

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires	4
1.1 Opérateurs de trace	5
1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle	6
1.3 Espaces discrets	8
1.3.1 Polynômes de Legendre	8
1.3.2 Formule de Gauss-Lobatto	8
1.3.3 Erreurs d'approximation et d'interpolation polynomiale	9
2 Les équations de Stokes couplées avec les équations de Darcy	10
2.1 Position du problème et formulation variationnelle	10
2.2 Existence et unicité de solution	14
3 Discrétisation spectrale des équations de Stokes couplées avec les équations de Darcy	19
3.1 Problème discret	20
3.2 Existence et unicité de solution	21
3.3 Estimation d'erreur	23

Introduction

Les écoulements dans des domaines partiellement occupés par un milieu poreux sont d'une grande importance, des exemples notables incluent les eaux souterraines et les eaux de surface ainsi que les filtres à air et l'huile. Ce problème complexe peut être modélisé par le système couplé d'équations de Stokes et Darcy. Le domaine physique est décomposé en deux régions : la région remplie d'un fluide incompressible modélisée par les équations de Stokes et la région du milieu poreux modélisée par la loi de Darcy. Considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω est composé de deux sous-domaines, Ω_P et Ω_F , avec $\Omega_P \cap \Omega_F = \emptyset$ et $\Omega_P \cup \Omega_F = \Omega$ (figure 1). Le domaine Ω_F est rempli par un fluide, et sera par conséquent appelé domaine purement fluide, tandis que Ω_P correspond à un milieu poreux les conditions de continuité de la vitesse normale et de la pression sont imposées sur l'interface. Dans le domaine purement fluide, le fluide s'écoule selon les équations de Stokes et dans le milieu poreux, le fluide s'écoule selon les équations de Darcy.

Ce modèle a été analysé dans [4] et [8]. Dans la référence [4] le problème est discrétisé par la méthode spectrale et dans la référence [8] le problème est discrétisé par la méthode des éléments finis. Dans notre travail nous optons pour la méthode spectrale. L'analyse mathématique des problèmes continus et discret à été effectuée en utilisant les Théorèmes de **Banach-Nečas-Babuška** et **Théorème de Babuška-Brezzi**.

Les méthodes spectrales sont des classes de technique utilisées en mathématiques appliquées et en calcul scientifique pour résoudre numériquement certaines équations aux dérivées partielles. Ce sont des méthodes de Galerkin avec intégration numérique. Leur principale caractéristique est que les solutions discrètes sont cherchées dans des espaces de polynômes de haut degré. Les intégrales sont évaluées au moyen de formules de quadrature appropriées. Elles permettent d'obtenir des approximations d'équations aux dérivées partielles avec une bonne précision et une convergence rapide.

Notre travail est structuré en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous donnons les principales propriétés des espaces de Sobolev [1] et quelques rappels d'analyse fonctionnelle. Ensuite nous donnons les principales estimations d'erreur d'approximation et d'interpolation polynômiale aux nœuds de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les équations de Stokes couplées avec les équations de Darcy. Le problème continu admet une formulation variationnelle qui comportent la vitesse, la pression et le tourbillon comme inconnues. Nous démontrons l'existence et l'unicité grâce aux théorèmes de **Banach-Nečas-Babuška** et **Babuška-Brezzi**. Nous discrétisons le problème continu par une méthode spectrale dans **le troisième chapitre**. C'est à dire, nous utilisons la méthode de Galerkin avec intégration numérique. Nous terminons par une estimation d'erreur a priori entre la solution continue et la solution discrète.

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est d'introduire les outils mathématiques nécessaires pour une bonne compréhension de l'étude du problème traité dans ce mémoire.

Les preuves des théorèmes et propositions de ce chapitre se trouvent dans les références [5], [9], [10], [11], [13], [16] et [17].

Dans la suite, on note Ω un ouvert borné lipschitzien connexe de \mathbb{R}^d . On note x le point générique de Ω , et (x_1, \dots, x_d) ses coordonnées. Finalement, on utilise la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^d , que l'on écrit soit dx , soit dx_1, \dots, dx_d .

On rappelle que $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω , et que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ désigne l'espaces des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans \mathbb{R}^d . Le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω . On note maintenant $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables v telles que

$$\int_{\Omega} v^2(x) dx < +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{0, \Omega} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

On note $\|\cdot\|_{0, \Omega}$ la norme

$$\|v\|_{0, \Omega} = \left(\int_{\Omega} v^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait que l'espace $L^2(\Omega)$ contient les deux espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ comme sous-espace denses, et que l'espace $L^2(\Omega)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$. Le produit de dualité entre les espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant alors une extension du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

La théorie des distributions (voir Schwartz [18]) permet de définir, pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, des dérivées d'ordre quelconque à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega)$: pour tout d-uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ de \mathbb{N}^d , $|\alpha|$ représente la longueur $\alpha_1 + \dots + \alpha_d$ et on note ∂^α la dérivée partielle d'ordre total $|\alpha|$ et d'ordre α_j par rapport à la j -ième variable, $1 \leq j \leq d$. On utilisera également la notation $\frac{\partial}{x_1}, \dots, \frac{\partial}{x_d}$ pour désigner les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux différentes variables x_1, \dots, x_d , et le symbole ∇ pour le vecteur à d composantes formé par ces dérivées.

Définition 1.0.1. *Pour tout entier $m \geq 0$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la façon suivante :*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha v)^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

Définition 1.0.2. *On définit les deux espaces de Sobolev $H(\operatorname{div}, \Omega)$ et $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ de la façon suivante :*

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3; \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\},$$

muni de la norme du graphe :

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = (\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

et

$$H(\mathbf{rot}, \Omega) = \{\boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega)^3; \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega)^3\},$$

muni de la norme du graphe :

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)} = (\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_F)^3}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_F)^3}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.0.3. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , l'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^N$ est dense dans $H(\operatorname{div}, \Omega)$.*

1.1 Opérateurs de trace

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d , de frontière assez régulière $\partial\Omega$.

Théorème 1.1.1. *L'application $\gamma_0 : u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ se prolonge de manière unique, et de façon continue, à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. On appelle l'opérateur γ_0 ainsi obtenu : l'application de traces.*

l'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $L^2(\partial\Omega)$. L'image de γ_0 est un espace de Sobolev fractionnaire appelé $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf_{u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = v} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Proposition 1.1.1 (Formule de Stokes).

L'application γ_n qui à $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^d$ associe $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega}$ se prolonge en une application linéaire continue de $H(\text{div}, \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et on a la formule de Stokes suivante :

$$\forall \mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega), \forall \mathbf{w} \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \text{div} \mathbf{u} \, dx = \langle \gamma_n \mathbf{u}, \gamma_0 \mathbf{w} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$

où γ_0 est l'opérateur de trace de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, et $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est le dual de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Théorème 1.2.1. Banach-Nečas-Babuška [5]

Soient V et W deux espaces de Hilbert, a une forme bilinéaire continue sur $V \times W$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour toute forme linéaire continue L sur W , il existe un unique $u \in V$ tel que

$$a(u, w) = L(w), \quad \forall w \in W \tag{1.2}$$

(ii) Les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\exists \alpha > 0, \inf_{v \in V} \left(\sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \right) \geq \alpha, \tag{1.3}$$

$$(\forall v \in V, a(v, w) = 0) \Rightarrow w = 0. \tag{1.4}$$

Dans le cas où ces deux assertions sont vérifiées, l'unique solution u de (1.2) vérifie en plus

$$\|u\|_V \leq \frac{\|L\|'_W}{\alpha}. \tag{1.5}$$

Théorème 1.2.2. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, Alors $E \times F$ est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|\cdot\|_{E \times F}$, définie par

$$\forall \mathbf{u} = (u_1, u_2) \in E \times F, \|\mathbf{u}\|_{E \times F} = (\|u_1\|_E^2 + \|u_2\|_F^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous considérons deux espaces de Hilbert X et M de normes respectives $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_M$, de produits scalaires respectifs $(\cdot, \cdot)_X$ et $(\cdot, \cdot)_M$ et de duals X' et M' avec le crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Nous nous donnons une forme bilinéaire continue : $b : X \times M \mapsto \mathbb{R}$, et nous lui associons l'opérateur B tel que, pour tout $\mathbf{v} \in X$ et $q \in M$, nous avons :

$$b(\mathbf{v}, q) = \langle B\mathbf{v}, q \rangle_{M', M} = \langle B'q, \mathbf{v} \rangle_{X', X}$$

Nous introduisons les espaces suivants :

$$V = \{ \mathbf{v} \in X; \forall q \in M, b(\mathbf{v}, q) = 0 \}.$$

$$V^\perp = \{ \mathbf{v} \in X; \forall w \in V, (\mathbf{v}, w)_X = 0 \}.$$

$$V^\circ = \{ l \in X'; \forall \mathbf{v} \in V, \langle l, \mathbf{v} \rangle_{X', X} = 0 \}$$

Théorème 1.2.3. Théorème de Babuška-Brezzi

Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\inf_{q \in M} \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_X \|q\|_M} \geq \beta ;$$

2. L'opérateur B' est un isomorphisme de M dans V° et

$$\forall q \in M, \|B'q\|_{X'} \geq \beta \|q\|_M$$

3. L'opérateur B est un isomorphisme de V^\perp sur M' et

$$\forall \mathbf{v} \in V^\perp, \|B\mathbf{v}\|_{M'} \geq \beta \|\mathbf{v}\|_X.$$

Proposition 1.2.1. Soit $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3$ tel que $\nabla \mathbf{u} = 0$ dans Ω_F et $\nabla \mathbf{u} = 0$ dans Ω_P . Alors $\nabla \mathbf{u} = 0$ sur tout le domaine Ω si et seulement si $(\mathbf{u}|_{\Omega_P} - \mathbf{u}|_{\Omega_F}) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ .

Théorème 1.2.4. Soit une fonction $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$ satisfait

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0, \quad 0 \leq i \leq I.$$

si et seulement si il existe un vecteur $\boldsymbol{\psi} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega)$ tel que

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot } \boldsymbol{\psi} \text{ dans } \Omega \text{ et } \text{div } \boldsymbol{\psi} = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$\langle \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} = 0, \quad 0 \leq j \leq J.$$

Théorème 1.2.5. *Soit une fonction $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$ satisfait*

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} = 0, \quad 0 \leq j \leq J.$$

si et seulement si il existe un vecteur $\boldsymbol{\psi} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega)$ tel que

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot } \boldsymbol{\psi} \text{ dans } \Omega \text{ et } \text{div } \boldsymbol{\psi} = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$\langle \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0, \quad 0 \leq i \leq I.$$

1.3 Espaces discrets

Notation 1.3.1. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . Pour tout entier $n \geq 0$, on définit \mathbb{P}_n comme l'espace des polynômes sur \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R} de degré $\leq n$. On note $\mathbb{P}_n(\Omega)$ l'espace des restrictions à Ω des fonctions de l'ensemble \mathbb{P}_n .*

Notation 1.3.2. *Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{P}_n^0(\Omega)$ l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Omega)$ qui s'annulent aux deux extrémités de Ω .*

1.3.1 Polynômes de Legendre

On note par Λ l'intervalle $] -1, 1[$.

Définition 1.3.1. *On appelle famille des polynômes de Legendre la famille $(L_n)_n$ de polynômes sur Λ , deux à deux orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$ et tels que, pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme L_n soit de degré n et vérifie : $L_n(1) = 1$ et*

$$\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \int_{-1}^1 L_n^2(\zeta) d\zeta = \frac{2}{2n+1}$$

1.3.2 Formule de Gauss-Lobatto

La formule de quadrature la plus naturelle dans le contexte polynomial est la formule de Gauss-Lobatto associée à la mesure de Lebesgue. Cette dernière tient compte des conditions aux bords. Nous référons à Bernardi, Maday et Rapetti [12], Crouzeix et Mignot [14] et à Davis et Rabinowitz [15] pour l'analyse numérique complète de la formule de Gauss-Lobatto. On rappelle cette formule dans la proposition suivante :

Proposition 1.3.1. *Soit N un entier positif fixé. On pose $\eta_0 = -1$ et $\eta_N = 1$. Il existe un unique ensemble de $N - 1$ points ξ_j de Λ , $1 \leq j \leq N - 1$, et un unique ensemble de $N + 1$ réels ρ_j , $0 \leq j \leq N$, tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme Φ de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$.*

$$\int_{-1}^1 \Phi(\zeta) d\zeta = \sum_{j=0}^N \Phi(\eta_j) \rho_j. \quad (1.6)$$

Les η_j , $1 \leq j \leq N - 1$, sont les zéros du polynôme L'_N . Les ρ_j , $0 \leq j \leq N$, sont positifs, et donnés par :

$$\rho_j = \frac{2}{N(N+1)L^2(\zeta_j)}, \quad 0 \leq j \leq N$$

La formule (1.6) est appelée formule de Gauss-Lobatto de type Legendre à $N+1$ points.

Proposition 1.3.2. *Tout polynôme $\varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^d)$ vérifie les inégalités*

$$\|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda^d)}^2 \leq \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(\xi_j) \rho_j \leq 3^d \|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda^d)}^2. \quad (1.7)$$

1.3.3 Erreurs d'approximation et d'interpolation polynomiale

Notation 1.3.3. *On note Π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Lambda^d)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda^d)$.*

Théorème 1.3.2. *$\forall s \geq 0$, $\exists c > 0$ ne dépendant que de s telle que, pour toute fonction g de $H^s(\Omega)$, on ait :*

$$\|g - \Pi_N g\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-s} \|g\|_{H^s(\Omega)}. \quad (1.8)$$

Notations 1.3.1. *On note \mathcal{I}_N l'opérateur d'interpolation aux points de Gauss-Lobatto, i.e. pour toute fonction g continue sur $\bar{\Omega}$, $\mathcal{I}_N g$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda^d)$ et vérifie :*

$$(\mathcal{I}_N g)(\eta_{i_1}, \dots, \eta_{i_d}) = g(\eta_{i_1}, \dots, \eta_{i_d}), \quad 0 \leq i_1, \dots, i_d \leq N.$$

Théorème 1.3.3. *Pour tout entier $s > \frac{d}{2}$, il existe une constante c positive ne dépendant que de s telle que, pour toute fonction g de $H^s(\Omega)$, on ait :*

$$\|g - \mathcal{I}_N g\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-s} \|g\|_{H^s(\Omega)}. \quad (1.9)$$

Chapitre 2

Les équations de Stokes couplées avec les équations de Darcy

2.1 Position du problème et formulation variationnelle

Soient Ω et Ω_F deux ouverts bornés connexes dans \mathbb{R}^3 , de frontières lipschitziennes, telles que $\overline{\Omega}_F \subset \Omega$ et Ω_F est simplement connexe à frontière connexe. On pose $\Omega_p = \Omega \setminus \overline{\Omega}_F$ et $\Gamma = \partial\Omega_F$ l'interface entre Ω_p et Ω_F (voir **figure 1**). Le domaine Ω_F est rempli par un fluide, et sera par conséquent appelé domaine purement fluide, tandis que Ω_p correspond à un milieu poreux. La première équation de notre problème représente l'écoulement dans le milieu poreux et la deuxième l'écoulement du fluide incompressible dans le domaine Ω_F . Des conditions de continuité de la vitesse normale et de la pression sont imposées sur l'interface.

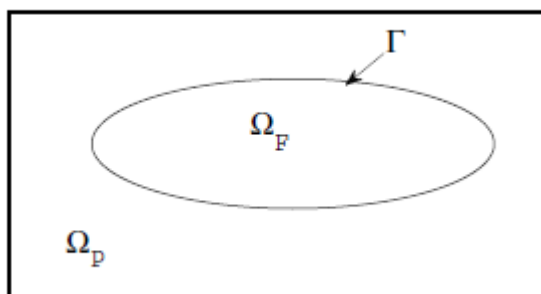


Figure 1 : Domaine bidimensionnel : Γ est l'interface entre Ω_p et Ω_F

On considère donc le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_p, \\ -\nu \Delta u + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_F, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega_p \text{ et } \Omega_F, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ (\mathbf{u}|_{\Omega_p} - \mathbf{u}|_{\Omega_F}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ p|_{\Omega_p} - p|_{\Omega_F} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{rot} \mathbf{u}|_{\Omega_F} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où les inconnues sont la vitesse \mathbf{u} et la pression p . La donnée \mathbf{f} correspond aux forces appliquées au fluide et les coefficients μ et ν représentent respectivement, le rapport de la viscosité du fluide à la perméabilité du milieu et la viscosité du fluide.

\mathbf{n} : est le vecteur unitaire normale à $\partial\Omega_p$ est dirigé vers l'extérieure de Ω_p .

En dimension 3, pour tout champs de vecteurs $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$,

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = (\partial_y v_z - \partial_z v_y, \partial_z v_x - \partial_x v_z, \partial_x v_y - \partial_y v_x).$$

On peut étendre cette définition à n'importe quel élément \mathbf{v} de $\mathcal{D}'(\Omega)^3$ par la formule de dualité

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^3, \quad \langle \mathbf{rot} \mathbf{v}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3, \mathcal{D}(\Omega)^3} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{rot} \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3, \mathcal{D}(\Omega)^3}$$

Le but est d'établir une formulation variationnelle, en considérant $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{u}$ dans Ω_F qui représente le tourbillon comme une nouvelle variable. Notons que Δu peut être écrit comme suit :

$$\Delta u = \nabla(\operatorname{div} u) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}).$$

Le système (2.1) se réécrit donc de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_p, \\ \nu \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_F, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega_p \text{ et } \Omega_F, \\ \boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{u} & \text{dans } \Omega_F, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ (\mathbf{u}|_{\Omega_p} - \mathbf{u}|_{\Omega_F}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ p|_{\Omega_p} - p|_{\Omega_F} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \boldsymbol{\omega}|_{\Omega_F} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

On définit les espaces de Sobolev $H(\text{div}, \Omega)$, $H_0(\text{div}, \Omega)$ et $\tilde{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega_F)$ respectivement par :

$$H(\text{div}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3; \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \},$$

muni de la norme du graphe :

$$\| \mathbf{v} \|_{H(\text{div}, \Omega)} = (\| \mathbf{v} \|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \| \text{div } \mathbf{v} \|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

et

$$H_0(\text{div}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega); \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

et

$$H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F) = \{ \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega_F)^3; \mathbf{rot } \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega_F)^3 \quad \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_F \},$$

muni de la norme du graphe :

$$\| \mathbf{v} \|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)} = (\| \mathbf{v} \|_{L^2(\Omega_F)^3}^2 + \| \mathbf{rot } \mathbf{v} \|_{L^2(\Omega_F)^3}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

et l'espace $L_0^2(\Omega)$ défini par

$$L_0^2(\Omega) = \{ q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q(x) dx = 0 \}.$$

Une formulation variationnelle associée au problème aux limites (2.2) est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) \in (H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F) \times H_0(\text{div}, \Omega)) \times L_0^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}; p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega), \mathbf{f} \in L^2(\Omega), \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ c(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \boldsymbol{\varphi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F). \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Les formes bilinéaire $a(\cdot, \cdot; \cdot)$, $b(\cdot; \cdot)$ et $c(\cdot; \cdot)$ sont définies par :

$$a(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega_F} \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx + \nu \int_{\Omega_F} (\mathbf{rot } \boldsymbol{\omega})(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx,$$

$$b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(x) q(x) dx, \text{ et } c(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega_F} \boldsymbol{\omega}(x) \boldsymbol{\varphi}(x) dx - \int_{\Omega_F} \mathbf{u}(x) (\mathbf{rot } \boldsymbol{\varphi})(x) dx.$$

Proposition 1. *Le problème (2.2) est équivalent au problème (2.3) au sens des distributions.*

Preuve.

Soit $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; p)$ une solution de (2.3), démontrons que $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; p)$ est une solution de (2.2) au sens des distributions. Nous avons : $\forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$

$$\mu \int_{\Omega_F} \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx + \nu \int_{\Omega_F} \mathbf{rot } \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}(x) dx - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(x) p(x) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx,$$

Prenons maintenant \mathbf{v} dans (2.3) tel que $\mathbf{v}|_{\Omega_P} \in \mathcal{D}(\Omega_P)$. Nous aurons alors

$$\mu \langle \mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_P)^3, \mathcal{D}(\Omega_P)^3} = 0.$$

En utilisant le fait que $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$, nous obtenons

$$\mu \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } L^2(\Omega_P). \quad (2.4)$$

D'où la première équation dans (2.2).

En particulier, en prenant \mathbf{v} tel que $\mathbf{v}|_{\Omega_F} \in \mathcal{D}(\Omega_F)$. Nous obtenons alors

$$\langle \nu \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_F)^3, \mathcal{D}(\Omega_F)^3} + \langle p, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_F)^3, \mathcal{D}(\Omega_F)^3} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_F)^3, \mathcal{D}(\Omega_F)^3}.$$

Où $\langle \cdot; \cdot \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_F)^3, \mathcal{D}(\Omega_F)^3}$ désigne le crochet de dualité entre $\mathcal{D}(\Omega)^3$ et son dual.

Or

$$\langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_F)^3, \mathcal{D}(\Omega_F)^3} = - \langle p, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_F)^3, \mathcal{D}(\Omega_F)^3}.$$

Par la suite

$$\nu \langle \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} + \nabla p - \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_F)^3, \mathcal{D}(\Omega_F)^3} = 0,$$

et donc :

$$\nu \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_F)^3.$$

En utilisant le fait que $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$ nous déduisons que

$$\nu \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{dans } L^2(\Omega_F)^3 \quad (2.5)$$

D'où la deuxième équation dans (2.2). De plus nous avons :

$$\forall q \in L_0^2(\Omega)^3 \quad \int_{\Omega} q(x) (\operatorname{div} \mathbf{u})(x) dx = 0,$$

En particulier pour $q = \operatorname{div} \mathbf{u}$, nous aurons :

$$\| \operatorname{div} \mathbf{u} \|_{0, \Omega}^2 = 0,$$

ceci donne

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega_F) \text{ et dans } L^2(\Omega_P).$$

Les conditions au bord sont assurées par l'appartenance de \mathbf{u} à $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ et $\boldsymbol{\omega}$ à $H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F)$.

La quatrième équation dans (2.2) est vérifiée au sens des distributions, puisque

$$c(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega_F).$$

La continuité de la vitesse normale sur l'interface est vérifiée puisque $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$. (voir Proposition 1.2.1). Reste à vérifier la continuité de la pression sur Γ :

On a : $\forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega_P} \mathbf{u}(x) \mathbf{v}(x) dx + \nu \int_{\Omega_F} \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}(x) dx - \int_{\Omega_P} (\text{div} \mathbf{v})(x) p(x) dx - \int_{\Omega_F} (\text{div} \mathbf{v}(x)) p(x) dx \\ = \int_{\Omega_P} \mathbf{f}(x) \mathbf{v}(x) dx, \end{aligned}$$

Les équations (2.5) et (2.4) assurent que p est dans $H^1(\Omega_F)$ et $H^1(\Omega_P)$, d'où une intégration par partie donne : $\forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega_P} \mathbf{u}(x) \mathbf{v}(x) dx + \nu \int_{\Omega_F} \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}(x) dx + \int_{\Omega_P} \nabla p(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx - \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p|_{\Omega_P} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ + \int_{\Omega_F} \nabla p(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx - \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_F, p|_{\Omega_F} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \mathbf{v}(x) dx, \end{aligned}$$

En considérant que $\mathbf{n}_F = -\mathbf{n}$, l'équation précédente s'écrit : $\forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega_P} \mathbf{u}(x) \mathbf{v}(x) dx + \nu \int_{\Omega_F} \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}(x) dx + \int_{\Omega_P} \nabla p(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx \\ - \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p|_{\Omega_P} - p|_{\Omega_F} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \int_{\Omega_F} \nabla p(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \mathbf{v}(x) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_P} (\mu \mathbf{u}(x) + \nabla p(x) - \mathbf{f}(x)) \mathbf{v}(x) dx + \int_{\Omega_F} \nu (\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} + \nabla p(x) - \mathbf{f}(x)) \mathbf{v}(x) dx \\ + \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p|_{\Omega_P} - p|_{\Omega_F} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0 \end{aligned}$$

Les conditions (2.5) et (2.4) impliquent que $p|_{\Omega_F} - p|_{\Omega_P} = 0$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Inversement : La formulation faible en tourbillon-vitesse-pression du problème couplé est obtenue en sommant les formulations faibles de Stokes et de Darcy et en prenant en compte les conditions sur l'interface. ■

2.2 Existence et unicité de solution

Pour analyser le problème (2.3), on introduit le sous-espace V de $H_0(\text{div}, \Omega)$

$$V = \{\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega); \forall q \in L_0^2(\Omega), b(\mathbf{v}, q) = 0\}.$$

Comme la forme $b(\cdot, \cdot)$ est continue, le sous-espace V est fermé, c'est donc un espace de Hilbert. En utilisant la formule de Stokes, il est clair que V coïncide avec l'espace des

fonctions à divergence nulle dans $H_0(\text{div}, \Omega)$. En effet, en choisissant $q = \text{div } \mathbf{v}$, $\text{div } \mathbf{v} \in L_0^2(\Omega)$ car $\int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v}) \cdot 1 dx = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \nabla 1 dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dx = 0$, puisque $\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$. On trouve : $b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})^2 dx = 0$, ceci est équivalent à $\|\text{div } \mathbf{v}\| = 0$, c.à.d, $\text{div } \mathbf{v} = 0$.

On introduit aussi le noyau

$$\mathcal{W} = \{(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F) \times V; \forall \varphi \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F), c(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}; \varphi) = 0\}.$$

formé de couples $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v})$ de $H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F) \times V$ tels que $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{rot } \mathbf{v}$ au sens des distributions.

Le sous espace \mathcal{W} est un espace de Hilbert puisque la forme c est continue.

Pour toute solution $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, p)$ du problème (2.3), le couple $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})$ est solution du problème réduit

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad a(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \mathbf{v}(x) dx. \quad (2.6)$$

Pour démontrer que le problème (2.3) est bien posé, on a besoin de démontrer (ii) du Théorème 1.2.1. Mais avant cela, on introduit le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *L'opérateur C défini par*

$$C : H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F) \longrightarrow V$$

$$\varphi \longmapsto C(\varphi) = \begin{cases} \mathbf{rot } \varphi & \text{dans } \Omega_F, \\ 0 & \text{dans } \Omega_P, \end{cases}$$

est continu.

Preuve.

Pour tout φ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F)$, la fonction $\mathbf{rot } \varphi \in L^2(\Omega_F)^3$ et elle est à divergence nulle dans Ω_F (car $\text{div}(\mathbf{rot } \varphi) = 0$), donc $\mathbf{rot } \varphi \in H(\text{div}, \Omega_F)$ et $C(\varphi) \in H(\text{div}, \Omega)$. Comme $\varphi \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ , ceci donne $\mathbf{rot } \varphi \cdot \mathbf{n} = 0$ (par un calcul), donc $C(\varphi) \in H_0(\text{div}, \Omega)$

et

$$\begin{aligned} \|C(\varphi)\|_{H(\text{div}, \Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (C(\varphi))^2 dx + \int_{\Omega} (\text{div } C(\varphi))^2 dx \\ &= \|\mathbf{rot } \varphi\|_{L^2(\Omega_F)^3}^2 + \|\text{div } \mathbf{rot } \varphi\|_{L^2(\Omega_F)}^2 \\ &\leq \|\mathbf{rot } \varphi\|_{L^2(\Omega_F)^3}^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Omega_F)^3}^2 = \|\varphi\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)}^2. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.1. *Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot; \cdot)$ vérifie les conditions*

$$\forall \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}, \quad \sup_{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}) \in \mathcal{W}} a(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) > 0, \quad (2.7)$$

$$\forall (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}) \in \mathcal{W}, \quad \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{a(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{H(\text{div}, \Omega)}} \geq \gamma (\|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^3}). \quad (2.8)$$

Preuve.

Nous prouvons successivement les deux inégalités. Soit \mathbf{v} un élément de V , tel que $a(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) = 0$, $\forall (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}) \in \mathcal{W}$. Puisque \mathbf{v} est à divergence nulle dans Ω et donc dans Ω_F , on a $\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$, en effet, il suffit d'utiliser la formule d'intégration par partie de Stokes sur les fonctions $v|_{\Omega_F}$ et 1. Alors le problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta \chi = 0 & \text{dans } \Omega_F, \\ \partial_n \chi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

admet une solution unique χ dans $H^1(\Omega_F) \cap L_0^2(\Omega_F)$. Alors le couple $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})$ défini par

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{dans } \Omega_P \\ \nabla \chi & \text{dans } \Omega_F, \end{cases} \quad \boldsymbol{\omega} = 0,$$

appartient à \mathcal{W} car $\mathbf{rot} \mathbf{u}|_{\Omega_F} = \mathbf{rot}(\nabla \chi) = 0 = \boldsymbol{\omega}$ et l'équation $a(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) = 0$ donne $\mu \int_{\Omega_P} \mathbf{v}^2(x) \, dx = 0$ donc \mathbf{v} est nulle dans Ω_P . Ensuite, puisque \mathbf{v} est à divergence nulle dans Ω_F , a une trace normale nulle sur Γ (car $v = 0$ dans Ω_P). Alors du Théorème 1.2.5 et comme Ω_F est simplement connexe, il existe $\boldsymbol{\phi}$ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F)$ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\phi}$ et $\text{div} \boldsymbol{\phi} = 0$ dans Ω_F . En outre, puisque $\boldsymbol{\phi}$ est à divergence nulle dans Ω_F et Γ est connexe, alors d'après le Théorème 1.2.4, il existe $\boldsymbol{\psi}$ dans $H(\text{div}, \Omega_F) \cap H(\mathbf{rot}, \Omega_F)$ tel que $\text{div} \boldsymbol{\psi} = 0$, $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}$ et $\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ . Le couple $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})$ défini par

$$\mathbf{u} = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_P, \\ \boldsymbol{\psi} & \text{dans } \Omega_F, \end{cases} \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\phi},$$

appartient donc à \mathcal{W} . En effet par densité de $\mathcal{D}(\Omega_F)^3$ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F)$, on a

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\varphi} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F) \quad c(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) &= \int_{\Omega_F} \boldsymbol{\phi}(x) \boldsymbol{\varphi}(x) \, dx - \int_{\Omega_F} \boldsymbol{\psi}(x) \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}(x) \, dx \\ &= \int_{\Omega_F} \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}(x) \boldsymbol{\varphi}(x) \, dx - \int_{\Omega_F} \boldsymbol{\psi}(x) \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}(x) \, dx = 0, \end{aligned}$$

et l'équation $a(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) = 0$ donne : $\nu \int_{\Omega_F} \mathbf{v}^2(x) \, dx = 0$ donc \mathbf{v} est également nulle dans Ω_F . Ceci prouve (2.7).

Pour tout $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})$ dans \mathcal{W} , en choisissant \mathbf{v} égal à $\mathbf{u} + C_{\boldsymbol{\omega}}$ on a :

$$a(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) = \mu \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_F)^3}^2 + \nu \int_{\Omega_F} \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} \, dx + \nu \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega_F)^3}^2$$

Comme $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}) \in \mathcal{W}$, alors $c(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = 0$, i.e. $\int_{\Omega_F} \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} dx = \int_{\Omega_F} \boldsymbol{\omega}^2 dx = \|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega_F)^3}^2$
D'où

$$a(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) \geq \min(\mu, \alpha\nu) \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_P)^3}^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega_F)^3}^2 + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega_F)^3}^2 \right). \quad (2.9)$$

D'autre part, d'après le Lemme 2.2.1, on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{H(\text{div}, \Omega)} = \|\mathbf{u} + C\boldsymbol{\omega}\|_{H(\text{div}, \Omega)} &\leq \|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}, \Omega)} + \|C\boldsymbol{\omega}\|_{H(\text{div}, \Omega)} \\ &\leq c \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

En combinant (2.9) et (2.10) on trouve (2.8). ■

Du Corollaire 2.4, Chap. 1 dans [16] et comme $H_0^1(\Omega)$ s'injecte dans $H_0(\text{div}, \Omega)$, on peut démontrer aisément la condition inf-sup suivante :

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{H(\text{div}, \Omega)}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.11)$$

Par application des Théorèmes 1.2.1 et 1.2.3, la Proposition 2.2.1 et l'inégalité (2.11) donnent le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.2.2. *Pour tout \mathbf{f} dans $L^2(\Omega)^3$, le problème (2.3) admet une solution unique $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; p)$ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$. De plus, cette solution vérifie :*

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}, \Omega)} + \|p\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^3}. \quad (2.12)$$

Preuve.

Pour tout \mathbf{f} dans $L^2(\Omega)^3$, l'existence d'une solution unique $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})$ au problème (2.6) découle de la Proposition 2.2.1

Concernant la pression p : On considère la fonctionnelle L définie par :

$$\begin{aligned} L : H_0(\text{div}, \Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx - \mu \int_{\Omega_P} \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx + \nu \int_{\Omega_F} (\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega})(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx. \end{aligned}$$

Il est clair que L est bien définie et linéaire puisque \int est linéaire. La forme L est continue.

En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |L(\mathbf{v})| &\leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^3} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^3} + |\mu| \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_P)^3} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_P)^3} + \nu \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \\ &\leq \left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^3} + |\mu| \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_P)^3} + \nu \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \right) \|\mathbf{v}\|_{H(\text{div}, \Omega)}. \end{aligned}$$

La forme $\mathbf{v} \longmapsto L(\mathbf{v})$ appartient donc à V° . Puisque l'égalité (2.6) et la condition "inf-sup" (2.11) sont vérifiées, le Théorème de **Babuška-Brezzi** (Théorème 1.2.3) assure l'existence et l'unicité de $p \in L_0^2(\Omega)$ tel que : $\forall \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega)$

$$\int_{\Omega} \text{div} \mathbf{v}(x) p(x) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx - \mu \int_{\Omega_P} \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx + \nu \int_{\Omega_F} (\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega})(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx.$$

On déduit que le triplet $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; p)$ est une solution unique de (2.3). De plus les inégalités (1.5) et (2.11) donnent immédiatement (2.12). ■

Chapitre 3

Discrétisation spectrale des équations de Stokes couplées avec les équations de Darcy

Dans ce chapitre le domaine Ω est une union finie de parallélépipèdes Ω_k tels que

$$\bigcup_{k=1}^K \Omega_k \subset \Omega \subset \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k, \bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k, \Omega_1 = \Omega_F, \bar{\Omega}_P = \bigcup_{k=2}^K \bar{\Omega}_k, \Omega_k \cap \Omega_{k'} = \emptyset, 1 \leq k < k' \leq K.$$

Pour tout $k \neq k'$, l'intersection $\bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_{k'}$ est soit vide, soit formée ou bien d'un côté commun à Ω_k et $\Omega_{k'}$, ou bien d'une face commune entière. Nous notons

$$\Gamma_{kk'} = \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_{k'}.$$

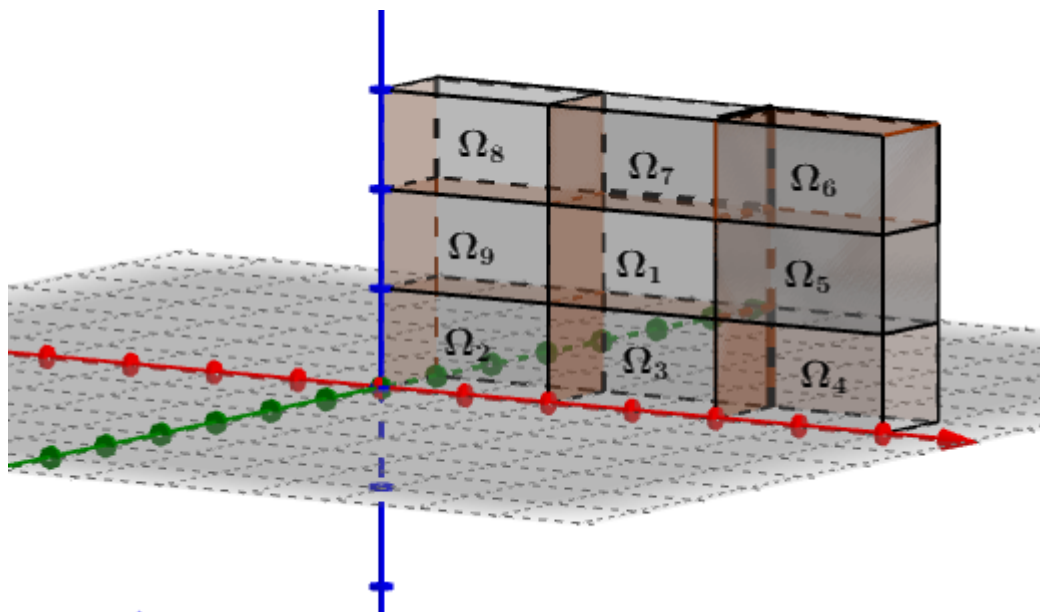


Figure 2 : Exemple de décomposition du domaine Ω en dimension 3

On note par δ le paramètre de discrétisation : $\delta = (N_1, N_2, \dots, N_k)$, $1 \leq k \leq K$, N_k est un entier positif, on note par $\mathbb{P}_{N_k}(\Omega_k)$ l'espace des restrictions à Ω_k des polynômes de degré $\leq N_k$ et c désigne une constante positive indépendante de δ .

Pour décrire les espaces discrets, on introduit pour tout triplet (ℓ, m, n) des entiers non négatifs, l'espace $\mathbb{P}_{\ell, m, n}(\Omega_k)$ des restrictions à Ω_k des polynômes de degré $\leq \ell$ par rapport à x , $\leq m$ par rapport à y et $\leq n$ par rapport à z . Si ℓ et m sont égaux à n , l'espace sera tout simplement noté $\mathbb{P}_n(\Omega_k)$.

3.1 Problème discret

On suppose que le domaine Ω est le cube $] -1, 1[^3$. Dans ce cas, la formule de quadrature utilisée est la formule de Gauss-Lobatto, le fait que cette formule possède des noeuds aux extrémités de l'intervalle $] -1, 1[$ permet de traiter facilement les conditions aux limites. Soient N_k des entiers ≥ 2 , $1 \leq k \leq K$, on définit les espaces

$$\mathbb{D}_{N_k} = \mathbb{P}_{N_k, N_k-1, N_k-1}(\Omega_k) \times \mathbb{P}_{N_k-1, N_k, N_k-1}(\Omega_k) \times \mathbb{P}_{N_k-1, N_k-1, N_k}(\Omega_k),$$

et

$$\mathbb{C}_{N_1}^1 = \mathbb{P}_{N_1-1, N_1, N_1}(\Omega_1) \times \mathbb{P}_{N_1, N_1-1, N_1}(\Omega_1) \times \mathbb{P}_{N_1, N_1, N_1-1}(\Omega_1).$$

On rappelle que l'espace $H_0(\text{div}, \Omega)$ coïncide avec l'espace des fonctions \mathbf{v} telle que $\mathbf{v}|_{\Omega_k} \in H_0(\text{div}, \Omega_k)$, $1 \leq k \leq K$, et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ et continu à travers $\bigcup_{1 \leq k \neq k' \leq K} \Gamma_{kk'}$.

Les espaces discrets \mathbb{D}_δ et \mathbb{C}_{N_1} associés à $H_0(\text{div}, \Omega)$ et $H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F)$ respectivement sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_\delta(\Omega) &= \{ \mathbf{v}_\delta \in H_0(\text{div}, \Omega), \mathbf{v}_\delta|_{\Omega_k} \in \mathbb{D}_{N_k}, 1 \leq k \leq K \}, \\ \mathbb{C}_{N_1}(\Omega_1) &= \mathbb{C}_{N_1}^1 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F). \end{aligned}$$

Et l'espace discret associé à $L_0^2(\Omega)$ est :

$$\mathbb{M}_\delta(\Omega) = \{ q_\delta \in L_0^2(\Omega); q_\delta|_{\Omega_k} \in \mathbb{P}_{N_k-1}(\Omega_k), 1 \leq k \leq K \}.$$

On définit sur les fonctions continues \mathbf{u} et \mathbf{v} le produit discret :

$$(u, v)_{N_k} = \sum_{i=0}^{N_k} \sum_{j=0}^{N_k} \sum_{l=0}^{N_k} u|_{\Omega_k}(\xi_i^k, \xi_j^k, \xi_l^k) v|_{\Omega_k}(\xi_i^k, \xi_j^k, \xi_l^k) \rho_i^k \rho_j^k \rho_l^k.$$

Les ξ_i^k et les ρ_i^k , $0 \leq i \leq N_k$ sont respectivement les noeuds et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto.

Aussi, nous définissons le produit scalaire global sur Ω par

$$(\varphi, \psi)_\delta = \sum_{k=1}^K (\varphi, \psi)_{N_k}.$$

La fonction \mathbf{f} est supposée continue sur $\bar{\Omega}$. On propose le problème discret suivant, construit de la formulation (2.3) en utilisant la méthode de Galerkin avec intégration numérique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta, p_\delta) \text{ dans } \mathbb{C}_{N_1} \times \mathbb{D}_\delta \times \mathbb{M}_\delta \text{ tels que} \\ a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}_\delta) + b_\delta(\mathbf{v}_\delta, p_\delta) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta, \quad \forall \mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta \\ b_\delta(\mathbf{v}_\delta, q_\delta) = 0, \quad \forall q_\delta \in \mathbb{M}_\delta \\ c_{N_1}(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_{N_1}, \boldsymbol{\varphi}_{N_1}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_{N_1} \in \mathbb{C}_{N_1} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où les formes bilinéaires $a_\delta(\cdot, \cdot; \cdot)$, $b_\delta(\cdot, \cdot)$ et $c_{N_1}(\cdot, \cdot; \cdot)$ sont définies par :

$$a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta) = \mu \sum_{k=2}^K (\mathbf{u}_{N_k}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k} + \nu (\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{v}_{N_1})_{N_1}, \quad b_\delta(\mathbf{v}_\delta, q_\delta) = \sum_{k=1}^K (\text{div} \mathbf{v}_{N_k}, q_{N_k})_{N_k},$$

$$c_{N_1}(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_{N_1}; \boldsymbol{\varphi}_{N_1}) = (\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \boldsymbol{\varphi}_{N_1})_{N_1} - (\mathbf{u}_{N_1}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{N_1})_{N_1}.$$

Les formes bilinéaires $a_\delta(\cdot, \cdot; \cdot)$, $b_\delta(\cdot, \cdot)$ et $c_{N_1}(\cdot, \cdot; \cdot)$ sont continues car elles sont définies dans des espaces de dimensions finies.

3.2 Existence et unicité de solution

Pour analyser le problème (3.1), on introduit d'abord le sous-espace vectoriel de dimension finie contenu dans V :

$$V_\delta = \{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta(\Omega); \forall q_\delta \in \mathbb{M}_\delta, b_\delta(\mathbf{v}_\delta, q_\delta) = 0\}. \quad (3.2)$$

On note que cet espace coïncide avec $\mathbb{D}_\delta(\Omega) \cap V$. En effet il suffit de prendre $q_\delta = \text{div} \mathbf{v}_\delta$.

On introduit également le noyau :

$$\mathcal{W}_\delta = \{(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{v}_\delta) \in \mathbb{C}_{N_1} \times V_\delta; \forall \boldsymbol{\varphi}_{N_1} \in \mathbb{C}_{N_1}, c_{N_1}(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{v}_{N_1}; \boldsymbol{\varphi}_{N_1}) = 0\}. \quad (3.3)$$

Soit \mathcal{I}_δ l'opérateur d'interpolation polynomiale défini sur les fonctions \mathbf{f} continues sur $\bar{\Omega}$ par $(\mathcal{I}_\delta \mathbf{f})|_{\Omega_k} = \mathcal{I}_\delta^k \mathbf{f}|_{\Omega_k}$, $1 \leq k \leq K$, où \mathcal{I}_δ^k est l'opérateur d'interpolation sur chaque sous

domaine Ω_k . On observe que pour toute solution $(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta, p_\delta)$ du problème (3.1), le couple $(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta)$ est solution du problème réduit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta) \text{ dans } \mathcal{W}_\delta \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v}_\delta \in V_\delta, \quad a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta. \end{cases} \quad (3.4)$$

On admet les résultats suivants, (pour les démonstrations on réfère à [4]).

Proposition 3.2.1. *Il existe une constante $\alpha_* > 0$ indépendant de δ telle que la forme bilinéaire $a_\delta(\cdot, \cdot; \cdot)$ vérifie les conditions*

$$\forall \mathbf{v}_\delta \in V_\delta \setminus \{0\}, \quad \sup_{(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta) \in \mathcal{W}_\delta} a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta) > 0, \quad (3.5)$$

$$\forall (\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta) \in \mathcal{W}_\delta, \quad \sup_{\mathbf{v}_\delta \in V_\delta} \frac{a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{H(\text{div}, \Omega)}} \geq \alpha_* (\|\boldsymbol{\omega}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}). \quad (3.6)$$

Par application du Théorème 1.2.1, la proposition 3.2.1 donne le résultat d'existence et d'unicité suivant

Corollaire 3.2.1. *Pour toute donnée \mathbf{f} continue sur $\bar{\Omega}$, le problème (3.4) admet une solution unique $(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta)$ dans \mathcal{W}_δ . De plus cette solution satisfait :*

$$\|\boldsymbol{\omega}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u}_\delta\|_{H(\text{div}, \Omega)} \leq c \|\mathcal{I}_\delta \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^3}. \quad (3.7)$$

Preuve.

L'inégalité de stabilité (3.7) découle immédiatement de (3.6). En effet

$$\|\boldsymbol{\omega}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{1}{\alpha_*} \sup_{\mathbf{v}_\delta \in V_\delta} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{H(\text{div}, \Omega)}}$$

La définitions de \mathcal{I}_δ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation d'équivalence (1.7) donnent

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta &= (\mathcal{I}_\delta \mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta \leq (\mathcal{I}_\delta \mathbf{f}, \mathcal{I}_\delta \mathbf{f})_\delta^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v}_\delta, \mathbf{v}_\delta)_\delta^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 3^3 \|\mathcal{I}_\delta \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^3} \|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \leq 3^3 \|\mathcal{I}_\delta \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^3} \|\mathbf{v}_\delta\|_{H(\text{div}, \Omega)^3} \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (3.7) avec $c = \frac{27}{\alpha_*}$. ■

Nous admettons la condition inf-sup discrète suivante. On réfère à [4] pour la preuve.

Lemme 3.2.2. *Il existe une constante $\beta_* > 0$ indépendante de N telle que la forme $b_\delta(\cdot, \cdot)$ satisfait la condition inf-sup suivante :*

$$\forall q_\delta \in \mathbb{M}_\delta, \quad \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{b_\delta(\mathbf{v}_\delta, q_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{H(\text{div}, \Omega)}} \geq \beta_* \|q_\delta\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.8)$$

Théorème 3.2.3. *Pour toute donnée \mathbf{f} continue sur $\overline{\Omega}$, le problème (3.1) admet une solution unique $(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta, p_\delta)$ dans $\mathbb{C}_{N_1} \times \mathbb{D}_\delta \times \mathbb{M}_\delta$. De plus, la partie $(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta)$ de cette solution vérifie (3.7).*

Preuve.

L'existence et l'unicité de $(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta)$ ont été établis dans le Corollaire 3.2.1.

Maintenant on remarque que la forme $\mathbf{v}_\delta \mapsto (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta - a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}_\delta)$ appartient à V_δ° . L'existence d'une solution p_δ dans \mathbb{M}_δ est alors une conséquence de la condition (3.8) et le Théorème 1.2.3. \blacksquare

3.3 Estimation d'erreur

Le but dans cette section est d'estimer l'erreur commise en approchant la solution du problème variationnel continu (2.3) par la solution du problème discret (3.1).

Proposition 3.3.1. (*Estimation de type Céa*)

Soient $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, p), (\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta, p_\delta)$ les solutions respectives de (2.3) et (3.1). Nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{H(\text{div}, \Omega)} &\leq c \inf_{(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta) \in \mathcal{W}_\delta} \left(\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + E_\delta^a(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta) + E_\delta^f \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

et

$$\begin{aligned} \|p - p_\delta\|_{L^2(\Omega)} &\leq c \inf_{q_\delta \in \mathbb{M}_\delta} \|p - q_\delta\|_{L^2(\Omega)} + c \inf_{(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta) \in \mathcal{W}_\delta} \left(\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + E_\delta^a(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta) + E_\delta^f \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

où E_δ^f et $E_\delta^a(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta)$ sont définis par

$$\begin{aligned} E_\delta^f &= \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta \rangle - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}}, \\ E_\delta^a(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta) &= \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{(a - a_\delta)(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}}. \end{aligned}$$

Preuve.

La preuve se fait en deux étapes, l'estimation d'erreur sur la vitesse et le tourbillon puis l'estimation sur la pression.

1. Soit $(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta)$ dans \mathcal{W}_δ . Nous avons d'après (2.4) et (3.4), pour tout $\mathbf{v}_\delta \in V_\delta$

$$\begin{aligned} a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta) &= a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta) - a_\delta(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta) \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta - a_\delta(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta) \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta - a_\delta(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta) + a(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v}_\delta) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta \rangle, \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nous ajoutons et nous retranchons le terme $a(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)$ dans le deuxième membre de (3.11), nous obtenons

$$\begin{aligned} a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta) &= a(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta) + (a - a_\delta)(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta) \\ &\quad + (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta \rangle. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v} \in V_\delta} \frac{a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} &\leq \sup_{\mathbf{v} \in V_\delta} \frac{a(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} \\ &\quad + \sup_{\mathbf{v} \in \mathbb{D}_\delta} \frac{(a - a_\delta)(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} + \sup_{\mathbf{v} \in \mathbb{D}_\delta} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta \rangle}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

la condition inf-sup (3.6) donne

$$\|\boldsymbol{\omega}_{N_1} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u}_\delta - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \leq c \left(\sup_{\mathbf{v} \in V_\delta} \frac{a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} \right), \quad (3.13)$$

combinant (3.12) et (3.13) nous aurons

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\omega}_{N_1} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u}_\delta - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} &\leq c \left(\sup_{\mathbf{v} \in V_\delta} \frac{a(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} \right. \\ &\quad \left. + E_\delta^f + E_\delta^a(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \boldsymbol{\omega}_\delta) \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

En utilisant la continuité de la forme $a(\cdot, \cdot; \cdot)$, on a

$$|a(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)| \leq \left(\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \right) \|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}, \quad (3.15)$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\omega}_{N_1} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u}_\delta - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} &\leq c \left(\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \right. \\ &\quad \left. + E_\delta^f + E_\delta^a(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \boldsymbol{\omega}_\delta) \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'inégalité triangulaire et (3.16) nous donnent, pour tout $(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \boldsymbol{\omega}_\delta) \in \mathcal{W}_\delta$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{H(\text{div}, \Omega)} &\leq \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\| + \|\boldsymbol{\theta}_{N_1} - \boldsymbol{\omega}_{N_1}\| \\ &\quad + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathbf{w}_\delta - \mathbf{u}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (3.9).

2. Pour tout $\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta$ et $q_\delta \in \mathbb{M}_\delta$. Nous avons de (2.3) et (3.1)

$$\begin{aligned} b_\delta(\mathbf{v}_\delta, p_\delta - q_\delta) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta - a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta) \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta - a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta) + a(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}; \mathbf{v}_\delta) + b(\mathbf{v}_\delta, p - q_\delta) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta \rangle. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nous ajoutons et nous retranchons le terme $a(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta)$ dans le deuxième membre de (3.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} b_\delta(\mathbf{v}_\delta, p_\delta - q_\delta) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta \rangle + a(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta) \\ &\quad + (a - a_\delta)(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta) + b(\mathbf{v}_\delta, p - q_\delta), \end{aligned} \quad (3.18)$$

et on a :

$$(a - a_\delta)(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta) = (a - a_\delta)(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta) + (a - a_\delta)(\boldsymbol{\omega}_{N_1} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta), \quad (3.19)$$

D'où (3.18) devient :

$$\begin{aligned} b_\delta(\mathbf{v}_\delta, p_\delta - q_\delta) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta \rangle + a(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta) + b(\mathbf{v}_\delta, p - q_\delta) \\ &\quad + (a - a_\delta)(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta) - a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{b_\delta(\mathbf{v}_\delta, p_\delta - q_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} &\leq \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta \rangle}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} + \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{a(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} \\ &\quad + \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{b(\mathbf{v}_\delta, p - q_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} + \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{(a - a_\delta)(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} \\ &\quad + \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

D'autre part, la conditions inf-sup (3.8) donne

$$\|p_\delta - q_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \beta \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{b_\delta(\mathbf{v}_\delta, p_\delta - q_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}}, \quad (3.21)$$

Combinant (3.20) et (3.21) on trouve

$$\begin{aligned} \|p_\delta - q_\delta\|_{L^2(\Omega)} &\leq \beta \left(\sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta \rangle}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} + \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{a(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} \right. \\ &\quad + \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{b(\mathbf{v}_\delta, p - q_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} + \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{(a - a_\delta)(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} \\ &\quad \left. + \sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{a_\delta(\boldsymbol{\omega}_{N_1} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)}{\|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}} \right). \end{aligned}$$

en utilisant la continuité de la forme $a(., .; .)$ et $b(., .)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|p_\delta - q_\delta\|_{L^2(\Omega)} &\leq c\|p - q_\delta\|_{L^2(\Omega)} + c\left(\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}\right) \\ &\quad + E_\delta^f + E_\delta^a(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta), \end{aligned} \quad (3.22)$$

l'inégalité triangulaire et (3.22) nous donnent

$$\begin{aligned} \|p - p_\delta\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|p - q_\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|p_\delta - q_\delta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \inf_{q_\delta \in \mathbb{M}_\delta} \|p - q_\delta\|_{L^2(\Omega)} + c \inf_{(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta) \in \mathcal{W}_\delta} \left(\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + E_\delta^f + E_\delta^a(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta) \right). \end{aligned}$$

■

Le but maintenant est d'estimer chaque terme de droite dans (3.9) et (3.10). Pour cela, on a besoin des résultats suivants :

Lemme 3.3.1. *Il existe une constante γ_* indépendante de N_1 telle que la forme $c_{N_1}(., .; .)$ satisfait la condition inf-sup suivante :*

$$\forall \boldsymbol{\varphi}_{N_1} \in \mathbb{C}_{N_1}, \quad \sup_{(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_{N_1}) \in \mathbb{C}_{N_1} \times V_{N_1}} \frac{c_{N_1}(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_{N_1}; \boldsymbol{\varphi}_{N_1})}{\|\boldsymbol{\omega}_{N_1}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u}_{N_1}\|_{L^2(\Omega_F)^3}} \geq \gamma_* \|\boldsymbol{\varphi}_{N_1}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)}. \quad (3.23)$$

Preuve.

Il a été démontré dans [7, Lem.3.4] que l'image de \mathbb{C}_{N_1} par l'opérateur \mathbf{rot} est égale à $V_{N_1} = \mathbb{D}_{N_1} \cap V$.

Donc pour tout $\boldsymbol{\varphi}_{N_1} \in \mathbb{C}_{N_1}$, nous choisissons $(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_{N_1}) = (\boldsymbol{\varphi}_{N_1}, -\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{N_1})$.

Nous avons

$$c_{N_1}(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_{N_1}; \boldsymbol{\varphi}_{N_1}) = (\boldsymbol{\varphi}_{N_1}, \boldsymbol{\varphi}_{N_1})_{N_1} + (\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{N_1}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{N_1})_{N_1} \geq \|\boldsymbol{\varphi}_{N_1}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)}^2,$$

et

$$\|\boldsymbol{\omega}_{N_1}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u}_{N_1}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \leq 2\|\boldsymbol{\varphi}_{N_1}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)}$$

D'où l'estimation (3.23). ■

Corollaire 3.3.2. *Nous avons l'estimation d'erreur suivante*

$$\begin{aligned} \inf_{(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta) \in \mathcal{W}_\delta} \left(\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \right) &\leq c \inf_{\boldsymbol{\zeta}_{N_1} \in \mathbb{C}_{N_1}} \inf_{\mathbf{z}_\delta \in V_\delta} \left(\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\zeta}_{N_1}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u} - \mathbf{z}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + E_{N_1}^c(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_{N_1}) \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

où $E_{N_1}^c(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_{N_1})$ est défini par

$$E_{N_1}^c(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_{N_1}) = \sup_{\boldsymbol{\varphi}_{N_1} \in \mathbb{C}_{N_1}} \frac{(c - c_{N_1})(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_{N_1}; \boldsymbol{\varphi}_{N_1})}{\|\boldsymbol{\varphi}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)}}.$$

Preuve.

Pour tout $(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_\delta) \in \mathbb{C}_{N_1} \times V_\delta$, d'après (3.23) il existe $(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{N_1}, \tilde{\mathbf{z}}_\delta) \in \mathbb{C}_{N_1} \times V_\delta$ tel que

$$c(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{N_1}, \tilde{\mathbf{z}}_\delta; \boldsymbol{\varphi}_{N_1}) = c(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_\delta; \boldsymbol{\varphi}_{N_1}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_{N_1} \in \mathbb{C}_{N_1}, \quad (3.25)$$

et

$$\|\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\tilde{\mathbf{z}}_{N_1}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \leq (\gamma_*)^{-1} \sup_{\boldsymbol{\varphi}_{N_1} \in \mathbb{C}_{N_1}} \frac{c_{N_1}(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_\delta; \boldsymbol{\varphi}_{N_1})}{\|\boldsymbol{\varphi}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)}}. \quad (3.26)$$

De (3.25), le couple $(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta)$, avec $\boldsymbol{\theta}_{N_1} = \boldsymbol{\zeta}_{N_1} - \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{N_1}$ et $\mathbf{w}_\delta = \mathbf{z}_\delta - \tilde{\mathbf{z}}_\delta$ est dans \mathcal{W}_δ .

L'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} &\leq \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\zeta}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} \\ &\quad + \|\mathbf{u} - \mathbf{z}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\tilde{\mathbf{z}}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}, \end{aligned}$$

utilisant (3.26) on trouve

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} &\leq c \left(\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\zeta}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{z}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_*)^{-1} \sup_{\boldsymbol{\varphi}_{N_1} \in \mathbb{C}_{N_1}} \frac{c_{N_1}(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_\delta; \boldsymbol{\varphi}_{N_1})}{\|\boldsymbol{\varphi}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)}} \right), \end{aligned}$$

et on a

$$c_{N_1}(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_\delta; \boldsymbol{\varphi}_{N_1}) = -c(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{u} - \mathbf{z}_\delta; \boldsymbol{\varphi}_{N_1}) - (c - c_{N_1})(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_\delta; \boldsymbol{\varphi}_{N_1}),$$

l'estimation (3.24) est donc vérifiée. ■

Estimons maintenant les quantités : E_δ^f , E_δ^a et $E_{N_1}^c$.

Pour $1 \leq k \leq K$, soit $\mathbf{f}_{N_{k-1}}$ un polynôme quelconque de $\mathbb{P}_{N_{k-1}}$. D'après l'exactitude de la formule quadrature de Gauss-Lobato, on voit que $\langle \mathbf{f}_{N_{k-1}}, \mathbf{v}_{N_k} \rangle = (\mathbf{f}_{N_{k-1}}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k}$. D'où

$$|\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_{N_k} \rangle - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k}| = |(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{N_{k-1}}, \mathbf{v}_{N_k}) - (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{N_{k-1}}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k}|$$

Soit $\Pi_{N_{k-1}}^k$ l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega_k)$ dans $\mathbb{P}_{N_{k-1}}(\Omega_k)$.

Comme $(\mathbf{f}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k} = (\mathcal{I}_\delta^k \mathbf{f}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k}$, en appliquant l'inégalité triangulaire on obtient

$$|\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_{N_k} \rangle - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k}| \leq |(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{N_{k-1}}, \mathbf{v}_{N_k})| + |(\mathcal{I}_\delta^k \mathbf{f} - \mathbf{f}_{N_{k-1}}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k}|,$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_{N_k} \rangle - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k} | &\leq \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_{N_{k-1}} \|_{L^2(\Omega_k)^3} \| \mathbf{v}_{N_k} \|_{L^2(\Omega_k)^3} \\ &\quad + (\mathcal{I}_\delta^k \mathbf{f} - \mathbf{f}_{N_{k-1}}, \mathcal{I}_\delta^k \mathbf{f} - \mathbf{f}_{N_{k-1}})_{N_k}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v}_{N_k}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

utilisant ensuite l'inégalité (1.7) on trouve

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_{N_k} \rangle - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k} | &\leq \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_{N_{k-1}} \|_{L^2(\Omega_k)^3} \| \mathbf{v}_{N_k} \|_{L^2(\Omega_k)^3} + 3^3 \| \mathcal{I}_\delta^k \mathbf{f} - \mathbf{f}_{N_{k-1}} \|_{L^2(\Omega_k)^3} \| \mathbf{v}_{N_k} \|_{L^2(\Omega_k)^3} \\ &\leq ((1 + 3^3) \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_{N_{k-1}} \|_{L^2(\Omega_k)^3} + 3^3 \| \mathbf{f} - \mathcal{I}_\delta^k \mathbf{f} \|_{L^2(\Omega_k)^3}) \| \mathbf{v}_{N_k} \|_{L^2(\Omega_k)^3}, \end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta} \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta \rangle - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\delta)_\delta}{\| \mathbf{v}_\delta \|_{L^2(\Omega)^3}} \leq c \left(\sum_{k=1}^K \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_{N_{k-1}} \|_{L^2(\Omega_k)^3} + \sum_{k=1}^K \| \mathbf{f} - \mathcal{I}_\delta^k \mathbf{f} \|_{L^2(\Omega_k)^3} \right),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} E_\delta^f &\leq c \sum_{k=1}^K \left(\inf_{\mathbf{f}_{N_{k-1}} \in \mathbb{P}_{N_{k-1}}(\Omega_k)^3} \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_{N_{k-1}} \|_{L^2(\Omega_k)^3} + \| \mathbf{f} - \mathcal{I}_\delta^k \mathbf{f} \|_{L^2(\Omega_k)^3} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^K \left(\| \mathbf{f} - \Pi_{N_{k-1}}^k \mathbf{f} \|_{L^2(\Omega_k)^3} + \| \mathbf{f} - \mathcal{I}_\delta^k \mathbf{f} \|_{L^2(\Omega_k)^3} \right). \end{aligned}$$

Estimons maintenant la quantité $E_\delta^a(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta)$: Soit maintenant $\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{D}_\delta$. On a

$$\begin{aligned} (a - a_\delta)(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta) &= \mu \sum_{k=2}^K \int_{\Omega_k} (\mathbf{w}_{N_k})(x) \cdot \mathbf{v}_{N_k}(x) dx - \mu \sum_{k=2}^K (\mathbf{w}_{N_k}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k} \\ &\quad + \nu \int_{\Omega_F} (\mathbf{rot} \boldsymbol{\theta}_{N_1})(x) \cdot \mathbf{v}_{N_1}(x) dx - \nu (\mathbf{rot} \boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{v}_{N_1})_{N_1}, \end{aligned}$$

et grâce à l'exactitude de la formule quadrature de Gauss-Lobato, on peut écrire

$$\begin{aligned} (a - a_\delta)(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta) &= \mu \sum_{k=2}^K \int_{\Omega_k} (\mathbf{w}_{N_k} - \Pi_{N_{k-1}}^k \mathbf{u})(x) \cdot \mathbf{v}_{N_k}(x) dx \\ &\quad - \mu \sum_{k=2}^K (\mathbf{w}_{N_k} - \Pi_{N_{k-1}}^k \mathbf{u}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k} \\ &\quad + \nu \int_{\Omega_F} (\mathbf{rot} \boldsymbol{\theta}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1(\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}))(x) \cdot \mathbf{v}_{N_1}(x) dx \\ &\quad - \nu (\mathbf{rot} \boldsymbol{\theta}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1(\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}), \mathbf{v}_{N_1})_{N_1}. \end{aligned}$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$\begin{aligned} |(a - a_\delta)(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)| &\leq \mu \sum_{k=2}^K \| \mathbf{w}_{N_k} - \Pi_{N_{k-1}}^k \mathbf{u} \|_{L^2(\Omega_k)^3} \cdot \| \mathbf{v}_{N_k} \|_{L^2(\Omega_k)^3} \\ &\quad + \nu \| \mathbf{rot} \boldsymbol{\theta}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1(\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}) \|_{L^2(\Omega_k)^3} \cdot \| \mathbf{v}_{N_1} \|_{L^2(\Omega)^3} \\ &\quad + \mu \sum_{k=2}^K \| (\mathbf{w}_{N_k} - \Pi_{N_{k-1}}^k \mathbf{u}, \mathbf{w}_{N_k} - \Pi_{N_{k-1}}^k \mathbf{u})_{N_k}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v}_{N_k}, \mathbf{v}_{N_k})_{N_k}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \nu (\mathbf{rot} \boldsymbol{\theta}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1(\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}), \mathbf{rot} \boldsymbol{\theta}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1(\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}))_{N_1}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v}_{N_1}, \mathbf{v}_{N_1})_{N_1}. \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité (1.7) on trouve

$$\begin{aligned}
|(a - a_\delta)(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)| &\leq \mu \sum_{k=2}^K \|\mathbf{w}_{N_k} - \Pi_{N_k-1}^k \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_k)^3} \cdot \|\mathbf{v}_{N_k}\|_{L^2(\Omega_k)^3} \\
&\quad + \nu \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\theta}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1(\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega})\|_{L^2(\Omega_F)^3} \cdot \|\mathbf{v}_{N_1}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \\
&\quad + 3^3 \sum_{k=2}^K \mu \|\mathbf{w}_{N_k} - \Pi_{N_k-1}^k \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_k)^3} \|\mathbf{v}_{N_k}\|_{L^2(\Omega_k)^3} \\
&\quad + 3^3 \nu \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\theta}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1(\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega})\|_{L^2(\Omega_F)^3} \|\mathbf{v}_{N_1}\|_{L^2(\Omega_F)^3}.
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned}
|(a - a_\delta)(\boldsymbol{\theta}_{N_1}, \mathbf{w}_\delta; \mathbf{v}_\delta)| &\leq c \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + \sum_{k=1}^K \|\mathbf{u} - \Pi_{N_k-1}^k \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_k)^3} \right. \\
&\quad \left. + \|\mathbf{rot}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1})\|_{L^2(\Omega_F)^3} \right. \\
&\quad \left. + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} - \Pi_{N_1-1}^1(\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega})\|_{L^2(\Omega_F)^3} \right) \|\mathbf{v}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
E_\delta^a &\leq c \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + \sum_{k=1}^K \|\mathbf{u} - \Pi_{N_k-1}^k \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_k)^3} + \|\mathbf{rot}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_{N_1})\|_{L^2(\Omega_F)^3} \right. \\
&\quad \left. + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} - \Pi_{N_1-1}^1(\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega})\|_{L^2(\Omega_F)^3} \right).
\end{aligned}$$

Estimons maintenant la quantité $E_{N_1}^c(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_{N_1})$: On a

$$\begin{aligned}
(c - c_\delta)(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_{N_1}; \boldsymbol{\varphi}_{N_1}) &= \int_{\Omega_F} \boldsymbol{\zeta}_{N_1}(x) \boldsymbol{\varphi}_{N_1}(x) dx - \int_{\Omega_F} \mathbf{z}_{N_1}(x) (\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{N_1})(x) dx \\
&\quad - (\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \boldsymbol{\varphi}_{N_1})_{N_1} + (\mathbf{z}_{N_1}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{N_1})_{N_1} \\
&= \int_{\Omega_F} (\boldsymbol{\zeta}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \boldsymbol{\omega})(x) \boldsymbol{\varphi}_{N_1}(x) dx - (\boldsymbol{\zeta}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi}_{N_1})_{N_1} \\
&\quad - \int_{\Omega_F} (\mathbf{z}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \mathbf{u})(x) (\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{N_1})(x) dx \\
&\quad + (\mathbf{z}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \mathbf{u}(x), \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{N_1})_{N_1}.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$\begin{aligned}
|(c - c_\delta)(\boldsymbol{\zeta}_{N_1}, \mathbf{z}_{N_1}; \boldsymbol{\varphi}_{N_1})| &\leq \|\boldsymbol{\zeta}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1\|_{L^2(\Omega_F)^3} \|\boldsymbol{\varphi}_{N_1}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \\
&\quad + \|\mathbf{z}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{N_1}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \\
&\quad + (\boldsymbol{\zeta}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \boldsymbol{\omega})_{N_1}^{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\varphi}_{N_1}, \boldsymbol{\varphi}_{N_1})_{N_1}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + (\mathbf{z}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \mathbf{u}, \mathbf{z}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \mathbf{u})_{N_1}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{N_1}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{N_1})_{N_1}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité (1.7) on trouve

$$\begin{aligned} |(c - c_\delta)(\zeta_{N_1}, \mathbf{z}_{N_1}; \varphi_{N_1} \boldsymbol{\omega})| &\leq \|\zeta_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1\|_{L^2(\Omega_F)^3} \|\varphi_{N_1}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \\ &\quad + \|\mathbf{z}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \|(\mathbf{rot} \varphi_{N_1})\|_{L^2(\Omega_F)^3} \\ &\quad + 3^3 \|\zeta_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \|\varphi_{N_1}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \\ &\quad + 3^3 \|\mathbf{z}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \|\mathbf{rot} \varphi_{N_1}\|_{L^2(\Omega_F)^3}, \end{aligned}$$

D'où

$$|(c - c_\delta)(\zeta_{N_1}, \mathbf{z}_{N_1}; \varphi_{N_1})| \leq (1 + 3^3) \left(\|\zeta_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega_F)^3} + \|\mathbf{z}_{N_1} - \Pi_{N_1-1}^1 \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \right) \|\varphi_{N_1}\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)}.$$

l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} E_{N_1}^c(\zeta_{N_1}, \mathbf{z}_{N_1}) &\leq (1 + 3^3) \left(\|\boldsymbol{\omega} - \zeta_{N_1}\|_{L^2(\Omega_F)^3} + \|\boldsymbol{\omega} - \Pi_{N_1-1}^1 \boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \right. \\ &\quad \left. \|\mathbf{u} - \mathbf{z}_{N_1}\|_{L^2(\Omega_F)^3} + \|\mathbf{u} - \Pi_{N_1-1}^1 \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_F)^3} \right). \end{aligned}$$

Il reste à majorer les erreurs d'approximation c.à.d la distance de $\boldsymbol{\omega}$ à \mathcal{W}_δ , la distance de \mathbf{u} à V_δ et la distance de p à \mathbb{M}_δ

Lemme 3.3.3. *Pour toute fonction $\boldsymbol{\omega} \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F)$ telle que pour tout $\boldsymbol{\omega}|_{\Omega_k} \in H^s(\mathbf{rot}, \Omega_k)$, $1 \leq k \leq K$, $s > 2$, Nous avons l'estimation d'erreur suivante :*

$$\inf_{\zeta_{N_1} \in \mathbb{C}_{N_1}} \|\boldsymbol{\omega} - \zeta_\delta\|_{H(\mathbf{rot}, \Omega_F)} \leq c N_1^{-s} \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^s(\mathbf{rot}, \Omega_F)}.$$

Preuve.

Il a été démontré dans [6] que pour tout φ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F)$, il existe un élément de \mathbb{C}_{N_1} noté $\mathcal{R}_{N_1} \varphi$ tel que

$$\|\varphi - \mathcal{R}_{N_1} \varphi\|_{L^2(\Omega_F)^3} \leq c N_1^{-s} \|\varphi\|_{H^s(\Omega_F)^3},$$

et

$$\|\mathbf{rot}(\varphi - \mathcal{R}_{N_1} \varphi)\|_{L^2(\Omega_F)^3} \leq c N_1^{-s} \|\mathbf{rot} \varphi\|_{H^s(\Omega_F)^3}.$$

D'où le résultat désiré. ■

Lemme 3.3.4. *Pour toute fonction $\mathbf{u} \in V$ telle que pour tout $\mathbf{u}|_{\Omega_k} \in H^s(\Omega_k)$, $1 \leq k \leq K$, $s > 2$, Nous avons l'estimation d'erreur suivante :*

$$\inf_{\mathbf{z}_\delta \in V_\delta} \|\mathbf{u} - \mathbf{z}_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq c \sum_{k=1}^K N_k^{-s} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega_k)}.$$

Lemme 3.3.5. *Pour tout fonction $p \in L_0^2(\Omega_k)$ telle que pour tout $p|_{\Omega_k} \in L_0^2(\Omega)$, $1 \leq k \leq K$, $s \geq 0$, Nous avons l'estimation d'erreur suivante :*

$$\inf_{q_\delta \in \mathbb{M}_\delta} \|p - q_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq c \sum_{k=1}^K N_k^{-s} \|p\|_{H^s(\Omega_k)}.$$

Preuve.

Il suffit de choisir q_δ tel que $q_\delta|_{\Omega_k} = \Pi_{N_k-1}^k p$. L'opérateur $\Pi_{N_k-1}^k$ vérifi

$$\int_{\Omega} \Pi_{N_k-1}^k p(x) dx = \int_{\Omega} p(x) dx = 0,$$

donc $\Pi_{N_k-1}^k p$ appartient à \mathbb{M}_δ . Ses propriétés d'approximation sont données dans le Théorème 1.3.2

$$\|p - q_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^K \|p - \Pi_{N_k-1}^k p\|_{L^2(\Omega_k)} \leq c \sum_{k=1}^K N_k^{-s} \|p\|_{H^s(\Omega_k)}.$$

■

Nous résumons tout ce qui précède dans le théorème principal suivant :

Théorème 3.3.6. *Soient $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, p)$ et $(\boldsymbol{\omega}_{N_1}, \mathbf{u}_\delta, p_\delta)$ les solutions respectives de (2.2) et (3.1). Nous supposons que $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, p) \in H^{s+1}(\Omega_F)^3 \times H^s(\Omega)^3 \times H^{s+1}(\Omega)^3$, $s \geq 0$ et la donnée \mathbf{f} dans $H^s(\Omega)^3$, $s > \frac{3}{2}$. Nous avons l'estimation d'erreurs suivante :*

$$\begin{aligned} & \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{N_1}\|_{H(\text{rot}, \Omega_F)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{H(\text{div}, \Omega)} + \|p - p_\delta\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq c \left(N_1^{-s-1} \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^{s+1}(\Omega_F)^3}^{\frac{3}{2}} + \sum_{k=1}^K (N^{-s} (\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega_k)^3} \right. \\ & \left. + N^{-1} \|p\|_{H^{s+1}(\Omega_k)} + N^{-s} \|\mathbf{f}\|_{H^s(\Omega_k)^3}) \right), \end{aligned}$$

avec

$$N = \min_{1 \leq i \leq K} N_i.$$

Bibliographie

- [1] **R.A. Adams**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, San Francisco, London, 1975.
- [2] **C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge et V. Girault**, *Vector potentials in three-dimensional nonsmooth domains*. Math. Meth. Appl. Sci. 21, 823–864 (1998) .
- [3] **P. Angot**, *Well-posed Stokes/Brinkman et Stokes/Darcy coupling revisited with new jump interface conditions*. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, EDP Sciences, 52 (5), pp.1875–1911, 2018.
- [4] **S.M. Aouadi, Y. Mabrouki, J. Satouri**, *Spectral discretization of Darcy equation coupled with Stokes equation by vorticity-velocity-pressure formulation* .
- [5] **I. Babuška, A. K. Aziz**, *Survey lectures on the mathematical foundation of the finite element method. in the mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*, pp.1-359, Academic Press, New York, 1972.
- [6] **F. Ben Belgacem and C. Bernardi**, *Spectral element discretization of the Maxwell equations*, Math. Comp, 68, pp. 1497–1520, 1999.
- [7] **C. Bernardi, N. Chorfi**, *Spectral discretization of the vorticity, velocity and pressure formulation of the stokes problem*, Siam J. Numer. Anal. Vol. 44, No. 2, pp. 826-850, 2006.
- [8] **C. Bernardi, F. Hecht, et O.Pironneau**, *Coupling Darcy and Stokes equations for porous media with cracks*, ESAIM :M2AN, Vol. 39, No 1, pp.7-35, 2005.
- [9] **C. Bernardi, V. Girault, Y. Maday**, *Approximation variationnelle : méthodes d'éléments finis et méthodes spectrales*, Université Pierre et Marie Curie-Paris, Cours de DEA, Octobre 1990.
- [10] **C. Bernardi, Y. Maday**, *Spectral Methods, in the Handbook of Numerical Analysis V*, P.G. Ciarlet & J.L. Lions eds. North-Holland, pp. 209-485, 1997.
- [11] **C. Bernardi, Y. Maday**, *Spectral element and mortar element methods*, Université Pierre et Marie Curie, Cours de DEA, Novembre 1998.

-
- [12] **C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti**, *Discrétisations variationnelles de problèmes aux Limites Elliptiques*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.
- [13] **H. Brezis** : *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, Heidelberg, London, 2010.
- [14] **M. Crouzeix, A. Mignot**, *Analyse numérique des équations différentielles*, Collection "Mathématiques Appliquées pour la maîtrise", Masson, Paris, 1984.
- [15] **P.J. Davis, P. Robinowitz**, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, Orlando, 1985.
- [16] **V. Girault, P. Raviart**, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1986.
- [17] **J. Nečas**, *Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles de type elliptique*. Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa. 16, pp. 305-326, 1962.
- [18] **L. Schwartz**, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.