République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

№ d'ordre : ....................
№ de séries : ..................

**Mémoire de fin d'études**

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**Master**

**Spécialité :** Mathématiques.

**Option :** EDP et Applications

**Thème**

# Sur l'étude théorique d'un problème d'optimisation semi-définie par la méthode primale-duale de (TC)

**Présenté par :**

– Bouhadjera Sana
– Chetouane Khadidja

**Devant le jury :**

| | | |
|---|---|---|
| Président | :Chikouche Wided | Prof Université de Jijel |
| Encadreur | : Touil Imene | MCA Université de Jijel |
| Examinateur | : Djemai Samia | MCB Université de Jijel |

Promotion **2020/2021**

# Table des matières

## *Remerciements*

*Tout d'abord et avant tout, je remercie ALLAH qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.*

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur Mme* ***Touil Imene****, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.*

*Je remercie aussi en particulier tous les enseignants du spécialité EDP.*

*Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail.*

*Mme* ***Chikouche Wided****, qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

*Mme* ***Djemai Samia****, pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Un grand merci pour mes* ***parents*** *et tout ma faille pour leurs sacrifice et encouragement, pour mes amis qui nous a supporté touts les difficultés et soutient moral tout au long de notre travail.*

*Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.*

*Sana KHadidja*

# Introduction générale

L'optimisation convexe est une branche des mathématiques cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à minimiser ou maximiser une fonction convexe à plusieurs variables dite objective sous contraintes convexes dit ensemble réalisable ou domaine réalisable.
La programmation semi-définie ($SDP$) est l'un des problèmes d'optimisation convexe. Cette dernière est une généralisation de la programmation linéaire ($PL$). En comparant avec la programmation linéaire standard le vecteur de variables $x \in \mathbb{R}^n_+$ est remplacé par une matrice variable $X \in \mathbb{S}^n_+$. Autrement dit, le cône de l'orthant positif $x \geq 0$ est remplacé par le cône des matrices semi-définies positives $X \succeq 0$.
Un problème de programmation semi-définie sous forme standard, s'écrit comme suit

$$(SDP) \begin{cases} \min\langle C, X\rangle \\ \langle A_i, X\rangle = b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ X \in \mathbb{S}^n_+, \end{cases} \tag{2.1}$$

où
$b \in \mathbb{R}^m$, $C$ et $A_i$, $i = 1, ..., m$, sont des matrices dans $\mathbb{S}^n$ et $\langle C, X\rangle = trace(CX) = \sum\limits_{i,j} C_{ij}X_{ij}$.
L'étude de ce genre de problèmes a connu un fantastique regain d'intérêt depuis les années 90, entres autres parce que l'on a disposé depuis, d'algorithmes efficaces permettant de les résoudre : il s'agit des algorithmes de méthodes de points intérieurs.
On désigne par méthode de points intérieurs ($MPI$), toute procédure de résolution générant une suite de points appartenant à l'intérieur (relatif) du domaine réalisable (admissible) et convergeant vers une solution optimale du programme considéré. Il y a principalement trois grandes catégories de méthodes de points intérieurs : les méthodes affines, les méthodes de réduction du potentiel et les méthodes de trajectoire centrale.
Le domaine des méthodes de points intérieurs (MPIs) pour PL a commencé avec l'algorithme d'ellipsoïde de Khachiyan en 1979, qui a permis de lier le nombre d'itérations par

un polynôme, ce qui a répondu à la question de savoir si des problèmes de programmation linéaire peuvent être résolus en temps polynomial ? mais malheureusement les expériences pratiques par la méthode d'ellipsoïde ont été décevantes. Suivi par le célèbre article de Karmarkar [32] en 1984, qui a introduit un algorithme avec une complexité polynômiale améliorée, ceci a également été accompagné par l'efficacité du comportement numérique de l'algorithme. Dans la décennie suivante, des milliers de documents, basés sur l'algorithme de Karmarkar, sont apparus sur ce sujet.

Ce mémoire est organisé et composé de deux chapitres :

Le premier chapitre, présente certaines notions et résultats qui seront utiles par la suite, à savoir : l'analyse matricielle, l'analyse convexe et la programmation mathématique.

Le deuxième chapitre est la base de ce travail, on applique la méthode de trajectoire centrale pour résoudre un problème de $(SDP)$, où on a choisi de détailler l'article de I. Touil, D. Benterki et A. Yassine [18], intitulé : " A feasible primal–dual interior point method for linear semidefinite programming ". Cet article est réparti en deux parties :

• **Partie théorique :** Dans cette partie, les auteurs se sont intéressés par la résolution des problèmes d'optimisation de la programmation semi-définie $(SDP)$ par une méthode de points intérieurs réalisable de type trajectoire centrale. En premier lieu, les auteurs ont associé au problème $(SDP)$ un problème perturbé, noté $(SDP)_\mu$, $\mu > 0$, puis ils ont montré l'existence et l'unicité de la solution optimale de $(SDP)_\mu$ et sa convergence vers la solution optimale de $(SDP)$ quand $\mu$ tend vers 0. Ensuite, pour résoudre $(SDP)$ les auteurs ont présenté d'une manière détaillée la méthode de trajectoire centrale primale-duale dans laquelle, ils ont proposé quatre nouvelles et simples alternatives pour calculer le pas de déplacement. Finalement, ils ont montré la convergence de l'agorithme obtenu ainsi que sa complexité algorithmique.

• **Partie numérique :** Dans cette partie, les auteurs ont effectué des simulations numériques pour des exemples à taille fixe et à taille variable, dans lesquelles, ils ont montré la convergence de chaqu'une des quatres alternatives vers la solution optimale de $(SDP)$, ainsi que la supériorité de la quatrième alternative par rapport aux autres, mesurée par le nombre d'itérations trouvé dans chaque exemple.

# Chapitre 1

# Préliminaires

## 1.1 Analyse convexe

### 1.1.1 Notion de convexité :

La notion de convexité est un outil mathématique important pour l'étude théorique et numérique des problèmes d'optimisation. À ce propos, nous présentons dans cette partie quelques notions de base d'usage courant.

**Définition 1.1.** *Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si :*

$$\forall x, y \in C \text{ et } \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

**Définition 1.2.** *Une fonction $f$ définie sur un ensemble convexe $C$ est dite convexe*

$$\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

*et si l'inégalité au dessus est stricte $\forall x \neq y$, alors $f$ est dite strictement convexe.*

### 1.1.2 Caractérisation d'une fonction convexe différentiable

Si $f \in C^1(C)$, où C est un ensemble convexe, alors on a les équivalences suivantes :

• $f$ est convexe si seulement si

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle\ ,\ \forall x, y \in C.$$

• $f$ est convexe si et seulement si

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0,\ \forall x, y \in C.$$

De plus, $f$ est dite strictement convexe si l'une ou l'autre des inégalités précédentes sont strictes pour $x \neq y$.

$\bullet f$ est fortement convexe si et seulement s'il existe $\alpha > 0$, tel que :

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2, \ \forall x, y \in C.$$

Si $f \in C^2(C)$, alors :

$\bullet f$ est convexe si et seulement si $\nabla^2 f(x)$ est semi-défini positif sur $C$ (c'est à dire que $y^T \nabla^2 f(x) y \geqslant 0, \ \forall x, y \in C$, ou encore toutes les valeurs propres de $\nabla^2 f(x)$ sont positives), telle que

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

est appelé matrice Hessienne de $f$ en $x$.

$\bullet f$ est strictement convexe si et seulement si $\nabla^2 f(x)$ est défini positif sur $C$ (c'est à dire que $y^T \nabla^2 f(x) y > 0, \ \forall x, y \in C$ et $y \neq 0$ ou encore toutes les valeurs propres de $\nabla^2 f(x)$ sont strictement positives).

**Définition 1.3.** *Le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable évalué au point $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit*

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T.$$

**Définition 1.4.** *Une fonction $f$ est dite coercive sur un ensemble convexe $C$ si*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

**Définition 1.5.** *On appelle fonction barrière toute fonction $f$ qui vérifie*

1. *$f(x) < \infty$ si $x \in int(D)$, où $int(D)$ est l'intérieur relatif du domaine réalisable $D$.*
2. *$f(x) \to \infty$ si $x \in Fr(D)$, où $Fr(D)$ est la frontière du domaine réalisable $D$.*

**Remarque 1.** *Dans la programmation mathématique, la fonction barrière classique la plus utilisée est la fonction barrière logarithmique.*

### 1.1.3 Formules de Taylor.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tels que $[a, a + h] \subset \Omega$, si $f \in C^1(\Omega)$, alors :

i) La formule de Taylor-Maclaurin à l'ordre 1 est donnée par :

$$\text{Il existe } \theta \in [0,1] \text{ tel que } f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a+\theta h), h \rangle .$$

ii) La formule de Taylor-young à l'ordre 1 est donnée par :

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \circ(\|h\|).$$

**Remarque**

Dans les formules précédentes, la notation $\circ(\|h\|^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ signifie que l'expression tend vers 0 plus vite que $\|h\|^k$ (c'est à dire, si on la divise par $\|h\|^k$, le résultat tend vers 0 quand h tend vers 0).

### 1.1.4 Cônes convexes

**Définition 1.6.** *Un sous-ensemble $C$ de $\mathbb{R}^n$ est un cône si seulement si*

$$\forall x \in C, \ \forall \lambda \geq 0 : \lambda x \in C.$$

*- On dit que $C$ est un cône pointé ou saillant si $C \cap (-C) = \{0\}$ (i.e., ne contenant aucune droite).*
*- On dit que $C$ est un cône convexe si l'ensemble $C$ est convexe.*

**Cône de récession**

Soit C un ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $a \in C$, on pose :

$$C_\infty(a) = \{d \in \mathbb{R}^n : a + \lambda d \in C, \ \forall \lambda > 0\},$$

alors, $C_\infty(a)$ est un cône convexe non vide.

**Définition 1.7.** *On appelle cône de récession (ou asymptote) de $C$ l'ensemble.*

$$C_\infty = \bigcap_{a \in C} C_\infty(a).$$

*Un élément $d \in C_\infty$ est appelé direction de récession.*

**Théorème 1.8.** *Si $C \neq \emptyset$ est convexe fermé, alors $C_\infty(a) = C_\infty(b), \ \forall a, b \in C$.*

**Théorème 1.9.** *Une fonction $f$ est dite inf-compacte si et seulement si $C_\infty = \{0\}$*

## 1.2 Analyse matricielle

### 1.2.1 Matrices semi-définies (définies) positives

Dans ce travail, nous sommes intéressées par les matrices symétriques semi-définies (définies) positives.

**Définition 1.10.** *On dit que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, si $A = A^T$. On note par $\mathbb{S}^n$ l'ensemble des matrices symétriques.*

**Définition 1.11.** *On dit que la matrice $A \in \mathbb{S}^n$ est semi-définie positive, et on écrira $A \succeq 0$ ; si $x^T Ax \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. On note par $\mathbb{S}^n_+$ l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives.*

**Définition 1.12.** *On dit que la matrice $A \in \mathbb{S}^n$ est définie positive, et on écrira $A \succ 0$, si $x^T Ax > 0$,$\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. On note par $\mathbb{S}^n_{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.*

### 1.2.2 Le cône des matrices symétrique semi-définies positives

**Définition 1.13.** *L'ensemble des matrices semi-définies positives $\mathbb{S}^n_+$ est un cône (convexe), pointu et fermé de plein dimension dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.*
*La fonction*

$$X \mapsto -\ln(\det(X)) = -\ln \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(X) = -\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i(X),\ X \in \mathbb{S}^n_+$$

*joue un rôle très important dans les méthodes de points intérieurs (MPIs).*

*1- La fonction $X \mapsto \det(X)$ est une fonction continue sur $\mathbb{S}^n_+$, et on a :*
- $\det(X) > 0$ *si* $X \succ 0$.

$\det(X) = 0$ *si* $X \succeq 0$ *et* $X$ *singulière.*

*2- La fonction $X \mapsto -\ln\det(X) \to -\infty$ si $X \in Fr(\mathbb{S}^n_+)$ avec $X \succ 0$, elle agit comme une barrière dans les itérations.*

**Lemme 1.14.** *La fonction $-\ln\det(X)$ est strictement convexe sur $\mathbb{S}^n_{++}$.*
*Le cône $\mathbb{S}^n_+$ induit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des matrices symétriques.*

**Définition 1.15.** *Le déterminant de la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'éléments $(a_{ij})$ est donné par*

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i},$$

*où $\sigma(n)$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$ et $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ la signature de permutation $\sigma$.*

### 1.2.3 Produit scalaire et norme

**Définition 1.16.** *Le produit scalaire entre deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est défini par*

$$\langle A, B\rangle = trace(B^T A) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = trace(A^T B).$$

*La norme de Frobenius associée à ce produit est définie comme suit*

$$||A||_F = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{trace(A^T A)},\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

**Proposition 1.17.** *([12]) Pour toute matrice $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a*

*1-* $||A||_F = \left|\left|A^T\right|\right|_F$.

*2-* $||\lambda A||_F = |\lambda|\,||A||_F\,, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

*3-* $||A+B||_F \leq ||A||_F + ||B||_F$, *(Inégalité triangulaire).*

*4-* $||AB||_F \leq ||A||_F \,.\, ||B||_F$.

*5-* $||A+B||_F^2 + ||A-B||_F^2 = 2\left(||A||_F^2 + ||B||_F^2\right)$, *(Inégalité de parallélogramme).*

*6- Si* $\langle A, B\rangle = 0, alors\, ||A+B||_F^2 = ||A-B||_F^2 = ||A||_F^2 + ||B||_F^2$ *(Théorème de Pythagore).*

**Définition 1.18.** ***(Factorisation de Cholesky)*** *Si $A$ est une matrice symétrique définie positive, il existe une matrice réelle triangulaire inférieure $L$ telle que $A = LL^T$.*

**Lemme 1.19.** *Soient $A$, $B \in \mathbb{S}_+^n$. Alors $\langle A, B\rangle \geq 0$ et en plus $\langle A, B\rangle = 0$ si et seulement si $AB$=0.*

**Proposition 1.20.** ***(Racine carrée d'une matrice)*** *Soit $A \in \mathbb{S}_+^n$. Alors il existe une matrice unique $B \in \mathbb{S}_+^n$, telle que :*

$$A = B^2.$$

*De plus, on a*

$$rg(A) = rg(B),$$

*et on notera $B = A^{\frac{1}{2}}$.*

**Proposition 1.21.** *Soit $B \in \mathcal{M}_n$ une matrice inversible, alors*

$$(A \in \mathbb{S}^n) \Leftrightarrow (B^T AB \in \mathbb{S}^n),$$

$$(A \in \mathbb{S}^n_+) \Leftrightarrow (B^T AB \in \mathbb{S}^n_+)$$

*et*

$$(A \in \mathbb{S}^n_{++}) \Leftrightarrow (B^T AB \in \mathbb{S}^n_{++})$$

**Définition 1.22.** ***(Matrice à diagonale (strictement) dominante)*** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :*

- *On dit que $A$ est une matrice à diagonale dominante si*

$$\forall i \in [1, n],\ |a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

- *On dit que $A$ est une matrice à diagonal strictement dominante si*

$$\forall i \in [1, n],\ |a_{ii}| > \sum_{i \neq j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

**Définition 1.23.** *Une matrice carrée $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite diagonale si :*
$\forall (i, j) \in [1, n]^2,\ i \neq j \Rightarrow d_{i,j} = 0.$

**Théorème 1.24.** *Si $A \in \mathbb{S}^n$ est à diagonale strictement dominante et si tous les éléments diagonaux sont strictement positifs, alors $A$ est définie positive.*

### 1.2.4 La trace d'une matrice

**Définition 1.25.** *([12]) L'opérateur trace de $A$, noté trace (.) : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est donné par :*

$$trace(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

**Propriétés :** ([12])

Pour toutes $A$, $B$, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

(a) $trace(\alpha A + \beta B) = \alpha trace(A) + \beta trace(B)$ (Linéarité).

(b) $trace(A^T) = trace(A)$.

(c) $trace(A^2) \leq trace(A^T A)$.

(d) $trace(AB) = trace(BA)$ (Commutativité).

(e) $trace(ABC) = trace(CAB) = trace(BCA) \neq trace(ACB)$.

(f) $trace(BAB^{-1}) = trace(A)$, avec $\det B \neq 0$.

### 1.2.5 Matrice adjointe

**Définition 1.26.** *Soit $A = (a_{ij})_{ij}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n((\mathbb{C}))$. On appelle matrice adjointe de $A$ la matrice*

$$A^* = (\bar{A})^T = (\overline{a_{ji}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

• *Si $A$ est la matrice d'un endomorphisme $f$ de l'espace hermitien $E$ dans une base orthonormée, alors $A^*$ est la matrice de l'adjoint $f^*$ de $f$ dans cette base.*
• *Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n((\mathbb{R}))$, alors $A^* = A^T = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_n((\mathbb{R}))$.*

Pour nos besoins, il convient d'écrire les valeurs propres dans l'ordre croissant,

$$\min_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A) = \max_{i=1}^{n} \lambda_i(A).$$

**Lemme 1.27.** *([12]) Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathbb{S}^n$, alors on a :*
*(a)* $\min_{i=1}^{n} \lambda_i(A+B) \geq \min_{i=1}^{n} \lambda_i(A) + \min_{i=1}^{n} \lambda_i(B)$,
*(b)* $\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A+B) \geq \max_{i=1}^{n} \lambda_i(A) + \max_{i=1}^{n} \lambda_i(B)$.

## 1.3 Programmation mathématique

### 1.3.1 Définitions

Dans cette partie, on donne les outils de base d'un problème d'optimisation. On rappelle certaines définitions élémentaires, les principaux résultats d'existence et d'unicité de la solution optimale et les conditions d'optimalité.

#### Problème d'optimisation

**Définition 1.28.** • *Un problème d'optimisation sans contraintes s'écrit comme suit :*

$$\begin{cases} \min f(x) = f(\bar{x}) \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

*Autrement dit :*

$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ telle que} \\ f(\bar{x}) \leq f(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

- *Un problème d'optimisation avec contraintes s'écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} \min f(x) = f(\bar{x}) \\ x \in S \end{cases}$$

*Autrement dit :*

$$\begin{cases} Trouver\ \bar{x} \in S\ telle\ que \\ f(\bar{x}) \leq f(x),\ x \in S, \end{cases}$$

*où* $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ *désigne l'ensemble des contraintes.*

**Définition 1.29.** *Un problème de programmation mathématique noté* $(PM)$ *est un problème d'optimisation sous contraintes qui minimise ou maximise une fonction donnée qui peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$\begin{cases} \min\ \ ou\ (\max) f(x) \\ g_i(x) \leq 0,\ i = \overline{1,n}, \\ h_i(x) = 0,\ j = \overline{1,m}, \\ x \in S, \end{cases}$$

où :

- $S$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ et $x$ un vecteur appelé variable, ses $n$ composantes sont dites les inconnues du problème $(PM)$.
- La fonction $f : S \to \mathbb{R}$ est appelée fonction objective ou économique.
- Les fonctions $g_i : S \to \mathbb{R},\ i = 1, ..., n,$ qui forment des inégalités sont appelées les contraintes inégalités du problème.
- Les fonctions $h_j : S \to \mathbb{R},\ j = 1, ..., m,$ qui forment des équations sont appelées les contraintes égalités du problème.
- Un vecteur $x$ vérifiant les contraintes de $(PM)$, i.e., $g_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., n,\ h_j(x) = 0,\ j = 1, ..., m\ et\ x \in S$ est dit **solution réalisable** de $(PM)$, l'ensemble de toutes les solutions réalisable de $(PM)$, noté $D$ est défini par :

$$D = domf \left( \bigcap_{i=1}^{n} domg_i \right) \left( \bigcap_{i=1}^{m} domh_i \right).$$

- Si $D = \mathbb{R}^n$, on dit que $(PM)$ est un problème d'optimisation sans contraintes.

**Définition 1.30.** ***(Minimum local)*** *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, on dit que la fonction* $f$ *admet un minimum local (solution optimale locale) en* $x^* \in D$*, si et seulement si :*

$$\exists B(x^*, \varepsilon) = \{x \in D,\ \| x - x^* \| < \varepsilon\} :\ \ f(x) \geq f(x^*),\ \ \forall x \in B(x^*, \varepsilon).$$

*L'ensemble des minima locaux de $(PM)$ est noté par :*

$$loc \ \min_{D} f(x).$$

**Définition 1.31.** ***(Minimum global)*** *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on dit que la fonction $f$ admet un minimum global (solution optimale globale) en $x^* \in D$, si et seulement si :*

$$f(x) \geq f(x^*), \ \ \forall x \in D.$$

*L'ensemble des minima globaux de $(PM)$ est noté par :*

$$arg \ \min_{D} f(x).$$

**Remarque 2.** *On a toujours $arg \ \min_{D} f(x) \subseteq loc \ \min_{D} f(x)$.*

### 1.3.2 Classification d'un programme mathématique

On classifie le problème $(PM)$ à partir de trois propriétés fondamentales à savoir la convexité, la différentiabilité et la linéarité des fonctions du problème.

1. $(PM)$ est convexe si les fonctions $f$ et $g_i$ sont convexes et les fonctions $h_j$ sont affines et $S$ est convexe.
2. $(PM)$ est différentiable si les fonctions $f$, $g_i$ et $h_j$ sont différentiables.
3. $(PM)$ est linéaire si la fonction $f$ est linéaire et les fonctions $g_i$et $h_j$ sont affines et $S$ est l'ortant positif.

### 1.3.3 Existence et unicité de solution

Dans cet partie, nous énonçons les théorèmes d'existence et d'unicité les plus utilisés (voir [1, 10]).

**Théorème 1.32.** *(Weierstrass)*
*Soit $D$ un compact (fermé et borné) non vide de $\mathbb{R}^n$, si la fonction $f$ est une fonction continue sur $D$, alors $(PM)$ admet au moins une solution optimale globale $x^* \in D$.*

**Théorème 1.33.** *Soit $D$ un ensemble non vide et fermé de $\mathbb{R}^n$, $f$ est une fonction continue et coercive sur $D$, alors $(PM)$ admet au moins une solution optimale globale $x^* \in D$.*

**Théorème 1.34.** *Si $D$ est convexe et $f$ est strictement convexe alors, il existe au plus une solution optimale de $(PM)$.*

**Remarque 3.** *L'unicité d'une éventuelle solution optimale est en souvent une conséquence de la stricte convexité de la fonction objective $f$ et de la convexité du domaine réalisable $D$ de $(PM)$.*

### 1.3.4 Conditions d'optimalité

Avant de donner les conditions d'optimalité de $(PM)$, on exige que les contraintes doivent satisfaire certains critères dits "critères de qualification".

**Qualification des contraintes**

1. $D$ est un polyèdre convexe ($i.e.$, $g_i$ affines), alors par définition les contraintes sont qualifiées en tout point réalisable.
2. Si $D$ est convexe ($i.e.$, $g_i$ convexes et $h_j$ affines) et $intD \neq \emptyset$, alors les contraintes sont qualifiées en tout point réalisable.
3. Une contrainte d'inégalité $g_i \leq 0$ est dite saturée (ou active) en $x^* \in D$ si $g_i(x^*) = 0$. De ce fait, une contrainte d'égalité $h_j(x) = 0$ est par définition saturée en tout point $x \in D$. Les contraintes sont qualifiées en $x^* \in D$, si les gradients de toutes fonctions contraintes saturées en $x^*$ sont linéairement indépendantes.

Le lagrangien d'un programme mathématique $(PM)$ est défini par

$$L(x, \lambda, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{m} y_j h_j(x), \lambda_i, y_j \in \mathbb{R}.$$

**Théorème 1.35.** *([11]) (Karush-Kuhn-Tucker **KKT**)*
*Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $D$, si $x^*$ est un minimum local du problème $(PM)$, alors il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^m_+$ tel que*

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum\limits_{j=1}^{m} y_i \nabla h_j(x^*) = 0, \ (\textit{condition d'optimalité}). \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, i = 1, ..., k, \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ (\textit{condition de complémentarité}). \\ h_j(x^*) = 0, j = 1, ..., m. \end{cases}$$

**Remarque.** Si $(PM)$ est convexe, alors les conditions d'optimalité **(KKT)** sont à la fois nécessaires et suffisantes.

## 1.4 Programmation semi-définie

La programmation semi-définie est une généralisation de la programmation linéaire $(PL)$, où les vecteurs sont remplacés par des matrices et l'orthant positif $(\mathbb{R}^n_+)$ par le cône convexe $\mathbb{S}^n_+$.
Le problème primal de la programmation semi-définie (SDP) sous forme standard, s'écrit comme suit :

$$(SDP)\begin{cases}\min \langle C, X\rangle \\ \langle A_i, X\rangle = b_i, i = 1, ..., m, \\ X \in \mathbb{S}^n_+, \end{cases}$$

où :
- $b \in \mathbb{R}^m$, $C$ et $A_i$, i=1,...,m, sont des matrices dans $\mathbb{S}^n$.

$$\langle C, X\rangle = trace(C^T X) = \sum_{ij} C_{ij} X_{ji}.$$

**Remarque 4.** *Plusieurs problèmes de programmation non linéaire peuvent se formuler sous la forme $(SDP)$, tel que la programmation quadratique convexe, la programmation combinatoire, les problèmes de coupure maximale dans la théorie des graphes, ainsi que les problèmes de min-max des valeurs propres.*

### 1.4.1 Dualité en programmation semi-définie $(SDP)$

Pour obtenir le problème dual de $(SDP)$, on considère la fonction lagrangienne suivante associée au problème $(SDP)$ :

$$L(X, y) = \langle C, X\rangle + \sum_{i=1}^{m} (b_i - \langle A_i, X\rangle) y_i, y \in \mathbb{R}^m,$$

donc, on calcule la fonction duale associée $q(y)$

$$\begin{aligned} q(y) &= \min_{X \in \mathbb{S}^n_+} L(X, y) \\ &= \min_{X \in \mathbb{S}^n_+} \left[\langle C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i, X\rangle\right] + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \end{aligned}$$

Il est claire que :

$$\min_{X \in \mathbb{S}^n_+} [\langle C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i, X\rangle] + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \begin{cases} 0, & si\ C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \in \mathbb{S}^n_+ \\ -\infty, & ailleurs. \end{cases}$$

TABLE 1.1 – Relations primales-duales $(SDP)$

| Minimisation | Maximisation |
|---|---|
| Variable | Contraintes |
| matrice ou scalaire $\geq 0$ | matrice ou scalaire $\leq$ |
| matrice ou scalaire $\leq$ | matrice ou scalaire $\geq$ |
| matrice $\succeq 0$ | matrice $\preceq$ |
| matrice $\preceq$ | matrice $\succeq$ |
| matrice ou scalaire non astreint | matrice ou scalaire $=$ |
| Contraintes | Variables |
| matrice ou scalaire $\geq$ | matrice ou scalaire $\geq 0$ |
| matrice ou scalaire $\leq$ | matrice ou scalaire $\leq 0$ |
| matrice $\succeq$ | matrice $\succeq 0$ |
| matrice $\preceq$ | matrice $\preceq$ |
| matrice ou scalaire $=$ | matrice ou scalaire non astreint |

Ce qui implique que

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} q(y) = \begin{cases} \max b^T y, & si\ C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \in \mathbb{S}_+^n, \\ -\infty, & ailleurs. \end{cases}$$

Donc, Le problème dual $(DSDP)$ associée $(SDP)$ s'écrit comme suite :

$$(DSDP) \begin{cases} \max b^T y \\ C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i = S, \\ y \in \mathbb{R}^m,\ S \in \mathbb{S}_+^n. \end{cases}$$

### 1.4.2 Relations primales-duales $(SDP)$

Comme dans la programmation linéaire, le problème $(SDP)$ peut s'écrire sous plusieurs formes, le tableau TABLE 1.1 représente les différents types de problèmes duaux correspondants.

### 1.4.3 Théorèmes de la dualité

**Théorème 1.36.** *([9])(**Dualité faible**) Si $X$ et $(y, S)$ sont des solutions réalisables de $(SDP)$ et $(DSDP)$ respectivement, alors on a toujours :*

$$\langle C, X\rangle - b^T y = \langle S, X\rangle \geq 0.$$

**Démonstration.** On a

$$\begin{aligned}\langle C, X\rangle - b^T y &= \langle C, X\rangle - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ &= \langle C, X\rangle - \sum_{i=1}^{m} y_i \langle A_i, X\rangle \\ &= \langle C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i, X\rangle = \langle S, X\rangle .\end{aligned}$$

Puisque les matrices $S$ et $X$ sont toutes les deux semi-définies positives, alors la trace de leur produit est un nombre positif ou nul i.e., $trace(XS) \geq 0$.
Ce qui donne :

$$\langle C, X\rangle - b^T y = \langle S, X\rangle \geq 0.$$

D'où le résultat.

**Théorème 1.37.** *([5])(**Dualité forte**)*
*Supposons qu'il existe une solution strictement réalisable $(y_0, S_0)$ pour $(DSDP)$. Soient*

$$p^* = \min\{\langle C, X\rangle : \mathcal{A}X = b, X \succeq 0\},$$

*et*

$$q^* = \max\{\langle b, y\rangle : \mathcal{A}^* y + S = C, S \succeq 0\},$$

*alors $p^* = q^*$ et si $p^*$ est une valeur finie, elle est atteinte pour une certaine matrice $X \in \{X \succeq 0 : \mathcal{A}X = b\}$.*

# Chapitre 2

# La méthode réalisable du point intérieur primale-duale pour la programmation semi-définie linéaire

La méthode de points intérieurs est l'une des méthodes les plus utilisées et les plus efficaces pour la résolution des problèmes de $(SDP)$, elle est relativement nouvelle et s'apparente à la méthode projective de Karmarkar en 1984 pour la programmation linéaire. Derrière le terme points intérieurs découle trois différents types de méthodes :

1. Les méthodes affines.
2. Les méthodes de réduction du potentiel.
3. Les méthodes de trajectoire centrale.

Dans notre travail, on utilise la méthode de trajectoire centrale (TC).

# Partie I : Étude théorique

## 2.1 Position du problème

Rappelons que le problème de $(SDP)$ considéré comme primal sous forme standard est défini par :

$$(SDP)\begin{cases}\min\langle C,X\rangle\\ \mathcal{A}X=b,\\ X\in\mathbb{S}^n_+,\end{cases}$$

où $b\in\mathbb{R}^m$, $\mathbb{S}^n_+$ désigne le cône des matrices semi-définies positives dans l'espace réel de $(n\times n)$ matrices symétriques $\mathbb{S}^n$. $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ défini par :

$$\mathcal{A}X=\left(\langle A_1,X\rangle,\langle A_2,X\rangle,...,\langle A_m,X\rangle\right)^T.$$

Les matrices $C$ et $A_i,\ i=1,...,m$, sont dans $\mathbb{S}^n_+$.
Le problème dual associé à $(SDP)$ est défini comme suit :

$$(DSDP)\begin{cases}\max b^Ty\\ \mathcal{A}^*y+S=C,\\ S\in\mathbb{S}^n_+,\end{cases}$$

où $\mathcal{A}^*$ est l'adjoint de $\mathcal{A}$ défini de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{S}^n$ par $\mathcal{A}^*y=\sum\limits_{i=1}^{n}y_iA_i$.
L'ensemble des solutions strictement réalisables de $(SDP)$ et $(DSDP)$ sont :

$$\begin{aligned}\mathring{\mathcal{F}}(SDP)=&\ \{X\in\mathbb{S}^n_{++}:\ \mathcal{A}X=b\},\\ \mathring{\mathcal{F}}(DSDP)=&\ \{(y,S)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{S}^n_{++}:\ \mathcal{A}^*y+S=C\},\end{aligned}$$

respectivement, où $\mathbb{S}^n_{++}$ est l'ensemble des matrices définies positives de $\mathbb{S}^n$.
Tout au long de ce chapitre, on suppose que :

**Hypothèse 1 :** Les matrices $A_i, i = 1, ..., m$, sont linéairement indépendantes, i.e.,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0, i = 1, ..., m.$$

**Hypothèse 2 :** Les deux problèmes $(SDP)$ et $(SDD)$ vérifient CPI, i.e., il existe $(X^0, y^0, S^0)$ telle que :

$$\begin{cases} trace(A_i X^0) = b_i,\ i = 1, ..., m,\ X^0 \succ 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} y_i^0 A_i + S^0 = C\ ,\ S^0 \succ 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

De hypothèse 2, il est bien connu que $(SDP)$ et $(DSDP)$ ont des solutions optimales $\bar{X}$ et $(\bar{S}$,$\bar{y})$ telles que $\left\langle C, \bar{X} \right\rangle = b^T \bar{y}$, i.e., les valeurs optimales de $(SDP)$ et $(DSDP)$ coïncident. Cette dernière condition, est appelée la dualité forte et peut être exprimée alternativement par $\left\langle \bar{X}, \bar{S} \right\rangle = 0$ ou $\bar{X}\bar{S} = 0$.
Pour étudier le problème $(SDP)$, on le remplace par le problème perturbé suivant :

$$(SDP)_\mu \begin{cases} \min[f_\mu(X) = \langle C, X \rangle - \mu \ln(detX) + n\mu \ln \mu],\ \mu > 0, \\ AX = b, \end{cases}$$

On peut aussi étudier $(SDP)$ en fonction de son dual perturbé suivant :

$$(DSDP)_\mu = \begin{cases} \max[g_\mu(y, S) = b^T y + \mu - \ln(detS) - n\mu \ln \mu],\ \mu > 0, \\ \mathcal{A}^* y + S = C. \end{cases}$$

Commençons d'abord par montrer que $(SDP)_\mu$ admet au moins une solution optimale.

## 2.2 Existence et unicité de la solution optimale de $(SDP)_\mu$ et sa convergence vers $(SDP)$

### 2.2.1 Existence et unicité de la solution optimale de$(SDP)_\mu$

Comme $f_\mu$ est strictement convexe, alors si une solution optimale de $(SDP)_\mu$ existe, elle est unique. Pour montrer que $(SDP)_\mu$ a une solution il suffit de montrer que $f_\mu$ est inf-compacte, ce qui revient notamment à montrer que le cône de récession est nul (Théorème 1.9).
Pour cette raison, nous donnons tout d'abord le lemme suivant :

**Lemme 2.1.** *Soit $X$ une matrice de $\mathbb{S}^n_{++}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f_\mu(X+t\Delta X)-f_\mu(X)}{t} = \langle C, \Delta X\rangle .$$

**Preuve.** On pose $\varepsilon(t) = \frac{f_\mu(X+t\Delta X)-f_\mu(X)}{t}$, $t>0$, alors la fonction objective du problème $(SDP)_\mu$ est définie par :

$$f_\mu(X) = \langle C, X\rangle - \mu \ln\det(X) + n\mu\ln\mu, \mu>0,$$

donc, on a :

$$\begin{cases} f_\mu(X) = \langle C, X\rangle - \mu\ln(\det(X)) + n\mu\ln\mu, \text{ et} \\ f_\mu(X+t\Delta X) = \langle C, X+t\Delta X\rangle - \mu\ln(\det(X+t\Delta X)) + n\mu\ln\mu, \end{cases}$$

on remplace dans l'expression de $\varepsilon(t)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\langle C, X+t\Delta X\rangle - \mu\ln(\det(X+t\Delta X)) + n\mu\ln\mu - \langle C, X\rangle + \mu\ln\det(X) - n\mu\ln\mu}{t} \\ &= \frac{\langle C, X\rangle + t\langle C, \Delta X\rangle - \mu\ln(\det(X+t\Delta X)) + n\mu\ln\mu - \langle C, X\rangle + \mu\ln\det(X) - n\mu\ln\mu}{t} \\ &= \langle C, \Delta X\rangle - \mu t^{-1}\left[\ln\det(X+t\Delta X) - \ln(\det(X)\right], \end{aligned}$$

alors :

$$\varepsilon(t) = \langle C, \Delta X\rangle - \mu t^{-1}\left[\ln\det(X+t\Delta X) - \ln\det(X)\right].$$

Comme $X \in \mathbb{S}^n_{++}$, alors la factorisation de Cholesky donne une matrice triangulaire inférieure $L_X$ avec $X = L_X L_X^T$, telle que les éléments diagonaux de $L_X$ sont positifs. Donc, on peut écrire $\varepsilon(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \langle C, \Delta X\rangle - \mu t^{-1}\left[\ln\det(L_X L_X^T + t\Delta X) - \ln\det(X)\right] \\ &= \langle C, \Delta X\rangle - \mu t^{-1}\left[\ln\det(L_X(I + tL_X^{-1}\Delta X L_X^{-T})L_X^T) - \ln\det(X)\right] \\ &= \langle C, \Delta X\rangle - \mu t^{-1}\left[\ln(\det(L_X)\det(I + tL_X^{-1}\Delta X L_X^{-T})\det(L_X^T)) - \ln\det(X)\right] \\ &= \langle C, \Delta X\rangle - \mu t^{-1}\left[\ln(\det(X)\det(I + tL_X^{-1}\Delta X L_X^{-T})) - \ln\det(X)\right] \\ &= \langle C, \Delta X\rangle - \mu t^{-1}\left[\ln(\det(X)) + \ln(\det(I + tL_X^{-1}\Delta X L_X^{-T})) - \ln\det(X)\right] \\ &= \langle C, \Delta X\rangle - \mu t^{-1}\left[\ln\det(I + tL_X^{-1}\Delta X L_X^{-T})\right], \end{aligned}$$

d'où

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \langle C, \Delta X\rangle - \mu t^{-1}\left[\ln\det(I + tL_X^{-1}\Delta X L_X^{-T})\right], & \text{si } tL_X^{-1}\Delta X L_X^{-T} \in \mathbb{S}^n_{++}, \\ +\infty, & \text{ailleurs .} \end{cases}$$

En passant à la limite quand $t$ tend vers l'infini, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t) &= \lim_{t\to+\infty}\left[\langle C,\Delta X\rangle - \mu t^{-1}\left[\ln\det(I+tL_X^{-1}\Delta X L_X^{-T})\right]\right]\\ &= \langle C,\Delta X\rangle - \mu\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\left[\ln\det(I+tL_X^{-1}\Delta X L_X^{-T})\right]\\ &= \langle C,\Delta X\rangle - \mu\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\left[\ln(\prod_{i=1}^{n}(1+t\lambda_i(\Delta X)))\right]\\ &= \langle C,\Delta X\rangle - \mu\lim_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{[\ln(1+t\lambda_i(\Delta X))]}{t},\end{aligned}$$

l'avant dernière égalité découle de la relation suivante
$\det(I+tL_X^{-1}\Delta X L_X^{-T}) = \prod_{i=1}^{n}(1+t\lambda_i(\Delta X))$, où $\lambda_i(\Delta X),\ i=1,...,n$, sont les valeurs propres de la matrice $L_X^{-1}\Delta X L_X^{-T}$.
Donc, après un changement de variable convenable et le fait que $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}=0$, la limite précédente devient :

$$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{f_\mu(X+t\Delta x)-f_\mu(X)}{t} = \langle C,\Delta X\rangle\,.$$

Ce qui complète la preuve. □

Rappelons que le cône de récession est défini par :

$$\begin{aligned}C_\infty(f_\mu) &= \left\{\Delta X\in\mathbb{S}_+^n : (f_\mu)_\infty(\Delta X) = \lim_{t\to+\infty}\left[\varepsilon(t)=\frac{f_\mu(X+t\Delta X)-f_\mu(X)}{t}\right]\le 0\right\}\\ &= \{\Delta X\in\mathbb{S}_+^n : \langle C,\Delta X\rangle\le 0\}.\end{aligned}$$

**Lemme 2.2.** $C_\infty(f_\mu) = \{\Delta X\in\mathbb{S}_+^n : \langle C,\Delta X\rangle\le 0\} = \{0\}$.

**Preuve.** On montre par l'absurde, c'est à dire, on suppose que : $C_\infty(f_\mu)\neq\{0\}$, i.e., il existe $\Delta X\in\mathbb{S}_{++}^n$ telle que : $\langle C,\Delta X\rangle\le 0$.
De l'hypothèse 2, il existe, $(y,\hat{S})\in\mathring{\mathcal{F}}(DSDP)$ tel que :

$$\hat{S} = C-\mathcal{A}^*y\in\mathbb{S}_{++}^n,$$

d'où

$$\begin{aligned}0<\left\langle\hat{S},\Delta X\right\rangle &= \langle C-\mathcal{A}^*y,\Delta X\rangle\\ &= \langle C,\Delta X\rangle - \langle\mathcal{A}^*y,\Delta X\rangle\\ &= \langle C,\Delta X\rangle - \left\langle\sum_{i=1}^{n}y_iA_i,\Delta X\right\rangle\\ &= \langle C,\Delta X\rangle - \sum_{i=1}^{n}y_i\langle A_i,\Delta X\rangle\,,\end{aligned}$$

et comme $\Delta X$ est une direction de descente, c'est à dire, elle vérifie la condition $\langle A_i, \Delta X\rangle = 0, \forall i = 1, ..., n$, alors, on trouve :

$$\langle \hat{S}, \Delta X\rangle = \langle C, \Delta X\rangle > 0,$$

contradiction, ceci montre que

$$C_\infty(f_\mu) = \{0\}.$$

Ce qui complète la preuve. □

### 2.2.2 Convergence de $(SDP)_\mu$ vers $(SDP)$

**Lemme 2.3.** *Soit $\bar{X}_\mu$ une solution optimale de $(SDP)_\mu$, alors $\bar{X} = \lim\limits_{\mu\to 0} \bar{X}_\mu$ est une solution optimale de $(SDP)$.*

**Preuve.** On met $f_\mu(X) = f(X,\mu)$ et $f(X) = f(X,0)$, tant que $f_\mu(X)$ est différentiable et convexe, alors il existe une solution optimale $\bar{X}_\mu$ de $(SDP)_\mu$ telle que :

$$\nabla_X f_\mu(\bar{X}_\mu) = \nabla_X f(\bar{X}_\mu, \mu) = 0.$$

Donc pour tout $X \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP)$ et par l'application du théorème de Taylor au voisinage du point $\bar{X}_\mu$ pour l'ordre 1, on trouve :

$$\begin{aligned} f(X) &\geq f(\bar{X}_\mu, \mu) + \left\langle X - \bar{X}_\mu, \nabla_X f(\bar{X}_\mu, \mu)\right\rangle + (0-\mu)\frac{d}{d\mu} f(\bar{X}_\mu, \mu). \\ &\geq f(\bar{X}_\mu, \mu) + (0-\mu)\frac{d}{d\mu} f_\mu(\bar{X}_\mu), \end{aligned}$$

et comme $f_\mu(\bar{X}_\mu) = \left\langle C, \bar{X}_\mu\right\rangle - \mu \ln(\det \bar{X}_\mu) + n\mu \ln \mu$, donc on dérive $f_\mu(\bar{X}_\mu)$ par rapport à $\mu$, on trouve :

$$\frac{d}{d\mu} f_\mu(\bar{X}_\mu) = -\ln(\det \bar{X}_\mu) + n \ln \mu + n,$$

on remplace par les valeurs de $f_\mu(\bar{X}_\mu)$ et $\frac{d}{d\mu} f_\mu(\bar{X}_\mu)$, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned} f(X) &\geq f(\bar{X}_\mu, \mu) + (0-\mu)(-\ln(\det \bar{X}_\mu) + n \ln \mu + n) \\ &\geq f(\bar{X}_\mu, \mu) + \mu \ln(\det \bar{X}_\mu) - \mu n \ln \mu - n\mu \\ &\geq \left\langle C, \bar{X}_\mu\right\rangle - \mu \ln \det \bar{X}_\mu + n\mu \ln \mu + \mu \ln \det \bar{X}_\mu - n \ln \mu - n\mu \\ &\geq \left\langle C, \bar{X}_\mu\right\rangle - n\mu, \end{aligned}$$

ce qui implique d'une part que :

$$\min_{\mathring{\mathcal{F}}(SDP)} [f(X) = f(X,0)] \geq \left\langle C, \bar{X}_\mu\right\rangle - n\mu.$$

D'autre part, nous avons :

$$\left\langle C, \bar{X}_\mu \right\rangle = f(\bar{X}_\mu) \geq \min_{X \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP)} [f(X) = f(X,0)].$$

Donc :

$$\left\langle C, \bar{X}_\mu \right\rangle = f(\bar{X}_\mu) \geq \min_{X \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP)} [f(X) = f(X,0)] \geq f(\bar{X}_\mu) - n\mu,$$

passons à la limite quand $\mu$ tend vers 0, on trouve :

$$\lim_{\mu \to 0} \left\langle C, \bar{X}_\mu \right\rangle = f(\bar{X}_\mu) \geq \lim_{\mu \to 0} \min_{X \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP)} [f(X) = f(X,0)] \geq \lim_{\mu \to 0} \left( f(\bar{X}_\mu) - n\mu \right),$$

ce qui donne :

$$\langle C, \bar{X} \rangle = f(\bar{X}) \geq \min_{X \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP)} [f(X) = f(X,0)] \geq f(\bar{X}),$$

d'où :

$$f(\bar{X}) = \min_{X \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP)} f(X), \text{ avec } \bar{X} = \lim_{\mu \to 0} \bar{X}_\mu,$$

par conséquent, $\bar{X}$ est une solution optimale de $(SDP)$. □

**Remarque 5.** *Nous savons que si l'un des deux problèmes $(SDP)$ et $(DSDP)$ a une solution optimale, et les valeurs optimales de ces problèmes sont égales et finies, alors l'autre a une solution optimale.*

## 2.3 Méthode de trajectoire centrale pimale-duale

Rappelons que $(SDP)_\mu$ est strictement convexe, donc les conditions de **KKT** sont nécessaires et suffisantes. Par conséquent, la recherche d'une solution optimale primale-duale $(\bar{X}_\mu, \bar{y}_\mu, \bar{S}_\mu)$ de $(SDP)_\mu$ et $(DSDP)_\mu$ est équivalent à la résolution du système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{A}X = b, \quad X \succ 0, \\ \mathcal{A}^* y + S = C, \quad S \succ 0, \\ XS = \mu I, \quad \mu > 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Pour chaque $\mu > 0$, le système (2.2) admet une solution unique $(X_\mu, y_\mu, S_\mu)$. L'ensemble de toutes ces solutions construit le chemin central ou la trajectoire centrale ou bien le $\mu-$centre.

Un point $(X, y, S)$ est dit proche de la trajectoire centrale, s'il appartient à l'ensemble suivant :

$$T_\theta(\mu) = \left\{ (X, y, S) \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP) \times \mathring{\mathcal{F}}(DSDP) : \left\| \frac{XS + SX}{2} - \mu I \right\|_F \leq \theta\mu, \ \theta \in (0,1) \right\}.$$

Comme pour $X, S \in \mathbb{S}^n$, le produit $XS$ n'est pas généralement dans $\mathbb{S}^n$, donc le côté gauche du système (2.2) est une application de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n$. Alors, pour remédier à ce problème on doit modifier le côté gauche de ce système par une application de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n$ dans lui-même.
Pour cela, nous utilisons l'opérateur dit de symétrisation similaire $H_p : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{S}^n$ introduit par Zhang [20] défini comme suit :

$$H_p(M) = \frac{1}{2}[PMP^{-1} + (PMP^{-1})^T],\ \forall M \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

avec $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice non singulière (régulière) dite matrice de mise à l'échelle (scaling matrix). Zhang a également montré que si $P$ est inversible et $M$ est semblable à une matrice (symétrique) définie positive, alors

$$H_P(M) = \mu I \Leftrightarrow M = \mu I.$$

Donc, pour toute matrice non singulière donnée, le système (2.2) est équivalent à :

$$\begin{cases} \mathcal{A}X = b,\ X \succ 0, \\ \mathcal{A}^*y + S = C,\ S \succ 0 \\ H_P(XS) = \mu I,\ \mu > 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

### 2.3.1 Calcul de direction

La méthode de Newton est une procédure bien connue pour résoudre un système d'équations non linéaires, la plus part des $(MPI_s)$ emploient des différentes directions de descente avec des stratégies convenables pour suivre la trajectoire centrale (chemin central).
La méthode de Newton appliquée sur le système (2.3) conduit au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{A}\Delta X = 0, \\ \mathcal{A}^*\Delta y + \Delta S = C, \\ H_P(X\Delta S + \Delta X S) = \sigma\mu I - H_P(XS), \end{cases} \tag{2.4}$$

où $(\Delta X, \Delta y, \Delta S) = \Delta\omega \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n$ est la direction cherchée, $\sigma \in (0, 1)$ est le paramètre de contralité et $\mu = \frac{\langle X,S\rangle}{n}$ est l'écart de dualité normalisé correspondant à $(X, y, S)$.
Le système (2.4) peut être écrit comme suit

$$\nabla F(X, y, S)\Delta\omega = -F(X, y, S). \tag{2.5}$$

avec

$$F(X, y, S) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}X - b \\ \mathcal{A}^* y + S - C \\ H_P(XS) - \sigma\mu I \end{bmatrix}.$$

La direction de descente obtenue par la résolution du système linéaire ci-dessus est appelée la famille de Monteiro-Zhang (**MZ**) [15, 17, 20].

• Pour la matrice de mise à l'échelle $P = I$, on obtient la direction de Alizadeh-Haeberly-Overton notée (**AHO**) [14].

• Pour $P = X^{\frac{-1}{2}}$ ou $P = S^{\frac{1}{2}}$, on obtient la direction de la famille des directions de Helmberg et al., Kojima et al. et Monteiro (**HKM**) [8].

• Pour $P = [X^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}SX^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}})]^{\frac{1}{2}}$, on obteint la direction de Nesterov-Todd notée (**NT**).

Dans cet article, nous prenons la direction de **AHO**.

**Remarque 6.** *La définie positivitée des matrices $X^+ = X + \Delta X$, $S^+ = S + \Delta S$ n'est pas toujours garantie. Pour surmonter cette difficulté, on introduit un paramètre $\alpha > 0$, dit pas de déplacement, et on met*

$$X^+ = X + \alpha\Delta X, \quad y^+ = y + \alpha\Delta y, \quad S^+ = S + \alpha\Delta S.$$

### 2.3.2 Calcul du pas de déplacement

Le calcul de ce pas de déplacement par les méthodes classiques de recherche linéaire est indésirable et en général impossible.

Dans ce sens, JP. Grouzeix et B. Merikhi [?] ont utilisé la notion des fonctions majorantes non coûteuses pour le problème dual de $(SDP)$ cela permet de calculer des pas de déplacement avec une technique simple.

Grâce à des résultats de définie positivitée dans l'algèbre linéaire, nous proposons dans ce travail quatre différentes alternatives qui offrent des pas de déplacement variables à chaque itération.

L'efficacité de l'une par rapport à l'autre peut être traduite par des tests numériques que nous présenterons à la fin de ce chapitre.

Comme dans [?], avant de donner l'expression de $\alpha$, il faut appliquer sur une matrice carrée le résultat de H. Wolkowicz et G.P.H. Styan [19] que nous rappelons dans l'énoncé suivant :

**Proposition 2.4.** *([19]). Soit $A$ une matrice $(n \times n)$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres, on a*

$$\bar{\lambda} - \delta\sqrt{n-1} \leq \min_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \bar{\lambda} - \frac{\delta}{\sqrt{n-1}}, \tag{2.6}$$

$$\bar{\lambda} + \frac{\delta}{\sqrt{n-1}} \leq \max_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \bar{\lambda} + \delta\sqrt{n-1}, \tag{2.7}$$

*où*

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A)_{ii} \;\; et \;\; \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}^2 - \bar{\lambda}^2.$$

*En se basant sur cette proposition, nous donnons dans les lemmes suivants trois alternatives pour calculer le pas de déplacement $\alpha$.*

### Première alternative

**Lemme 2.5.** *Soit $(X, y, S) \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP) \times \mathring{\mathcal{F}}(DSDP)$. Si $\alpha = \rho \min(\alpha_X, \alpha_S)$ avec $0 < \rho < 1$, alors $(X^+, S^+) \in \mathbb{S}^n_{++} \times \mathbb{S}^n_{++}$,*
*où pour $A \in \{X, S\}$, on a*

$$\alpha_A = \begin{cases} \dfrac{-1}{\bar{\lambda}_A - \delta_A\sqrt{n-1}} - \varepsilon, & si \; \left(\dfrac{-1}{\bar{\lambda}_A - \delta_A\sqrt{n-1}} > 0 \; et \; \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A) < 0\right), \\ \varepsilon, & si \; \left(\dfrac{-1}{\bar{\lambda}_A - \delta_A\sqrt{n-1}} < 0 \; et \; \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A) < 0\right), \\ 1, & si \; \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A) > 0, \end{cases}$$

*telles que $\bar{\lambda}_A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(L_A^{-1}\Delta A L_A^{-T}\right)_{ii}$, $\sigma_A^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(L_A^{-1}\Delta A L_A^{-T}\right)_{ij}^2 - \bar{\lambda}_A^2$, $\lambda_i(A)$, $i = 1, ..., n$, sont les valeurs propres de la matrice $L_A^{-1}\Delta A L_A^{-T}$, $\varepsilon$ est un petit réel positif et $X = L_X L_X^T$.*

**Preuve.** On sait que $X^+ = X + \alpha\Delta X$,
d'après la factorisation de Cholesky sur la matrice $X$, $i.e$, $X = L_X L_X^T$, on a :

$$\begin{aligned} X^+ &= L_X L_X^T + \alpha\Delta X \\ &= L_X(I + \alpha L_X^{-1}\Delta X L_X^{-T})L_X^T. \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} X^+ \text{ est définie positive} &\Leftrightarrow (I + \alpha L_X^{-1}\Delta X L_X^{-T}) \text{ est définie positive} \\ &\Leftrightarrow 1 + \alpha\lambda_i(X) > 0, \, \forall i = 1, ..., n, \end{aligned}$$

telle que 1 *est la valeur propre de* $I$ *et* $\lambda_i(X)$ *sont les valeurs propres de* $L_X^{-1}\Delta X L_X^{-T}$. Ce qui implique :

$$1+\alpha \min_{i=1}^{n} \lambda_i(X) > 0,$$

d'où

$$\alpha \min_{i=1}^{n} \lambda_i(X) > -1.$$

On distingue deux cas

• Si $\min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X) > 0$, alors $\alpha = 1$ (méthode de Newton classique).

• Si $\min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X) < 0$, alors $\alpha < \frac{-1}{\min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X)}$,

d'après la proposition 2.4, on a

$$\frac{-1}{\min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X)} \geq \frac{-1}{\bar{\lambda} - \delta\sqrt{n-1}},$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha < \dfrac{-1}{\min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X)}, \\ \dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} \leq \dfrac{-1}{\min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X)}, \end{cases}$$

donc, on distingue deux cas :

$$\begin{cases} \alpha < \dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} & \cdots (1) \\ \alpha > \dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} & \cdots (2) \end{cases}$$

comme $\alpha > 0$, alors on trouve :

• Si $\dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} > 0$ de (1), on a :

$$\alpha = \frac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} - \varepsilon.$$

• Si $\dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} < 0$ de (2), on a :

$$\alpha = \varepsilon.$$

de ce qui précède, on en déduit que la valeur du pas de déplacement $\alpha$ associée à la matrice $X$ est donnée par :

$$\alpha_X = \begin{cases} \dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} - \varepsilon, & \text{si } \left(\dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} > 0 \text{ } et \text{ } \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X) < 0\right), \\ \varepsilon, & \text{si } \left(\dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} < 0 \text{ } et \text{ } \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X) < 0\right), \\ 1, & \text{si } \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X) > 0. \end{cases}$$

De la même manière, on obtient l'expression de $\alpha_S$.

Finalement, on prend

$$\alpha = \rho \min(\alpha_X, \alpha_S), 0 < \rho < 1,$$

ce qui complète la preuve. $\square$

### Deuxième alternative

**Lemme 2.6.** *Soit* $(X, y, S) \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP) \times \mathring{\mathcal{F}}(DSDP)$. *Si* $\alpha = \rho \min(\alpha_X, \alpha_S)$ *avec* $0 < \rho < 1$, *alors* $(X^+, S^+) \in \mathbb{S}^n_{++} \times \mathbb{S}^n_{++}$,
*où pour* $A \in \{X, S\}$, *on a,*

$$\alpha_A = \begin{cases} \dfrac{-1}{\bar{\lambda}_A - \delta_A\sqrt{n-1}} - \varepsilon, & si \left(\dfrac{-1}{\bar{\lambda}_A - \delta_A\sqrt{n-1}} > 0 \ et \ \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A) < 0\right), \\ \varepsilon, & si \left(\dfrac{-1}{\bar{\lambda}_A - \delta_A\sqrt{n-1}} < 0 \ et \ \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A) < 0\right), \\ 1, & si \ \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A) > 0, \end{cases}$$

*tels que :* $\bar{\lambda}_A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (A^{-1}\Delta A)_{ii}$, $\sigma_A^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (A^{-1}\Delta A)_{ij}^2 - \bar{\lambda}_A^2$, $\lambda_i(A)$, $i = 1, ..., n$, *sont les valeurs propres de* $A^{-1}\Delta A$ *et* $\varepsilon$ *est un petit réel positif.*

**Preuve.** On a : $X^+ = X + \alpha\Delta X = X(I + \alpha X^{-1}\Delta X)$.
On sait que si $A$ et $B$ sont des matrices semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres, par conséquent $X^+$ et $X^{1/2}(I + \alpha X^{-1}\Delta X)X^{1/2}$, ont les même valeurs propres, donc :
Si $(I + \alpha X^{-1}\Delta X)$ est définie positive, alors $X^+$ est définie positive.
$(I + \alpha X^{-1}\Delta X)$ est définie positive si et seulement si $1 + \alpha\lambda_i(X^{-1}\Delta X) > 0$, $\forall i = 1, ..., n$, donc, il suffit de trouver $\alpha > 0$ qui vérifie :

$$1 + \alpha \min_{i=1}^{n} \lambda_i(X^{-1}\Delta X) > 0, \forall i = 1, ..., n.$$

Or

$$\alpha \min_{i=1}^{n} \lambda_i(X^{-1}\Delta X) > -1, i = 1, ..., n.$$

On distingue deux cas :
- Si $\min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X^{-1}\Delta X) > 0$, alors on prend $\alpha = 1$.
- Si $\min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X^{-1}\Delta X) < 0$, alors on choisit $\alpha$ qui vérifie : $\alpha < \frac{-1}{\min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X)}$.

D'après la proposition 2.4, on trouve :

$$\frac{-1}{\min_{i=1}^{n} \lambda_i(X)} \geq \frac{-1}{\bar{\lambda} - \delta\sqrt{n-1}},$$

d'où :

$$\begin{cases} \alpha < \dfrac{-1}{\min_{i=1}^{n} \lambda_i(X)}, \\ \dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} \leq \dfrac{-1}{\min_{i=1}^{n} \lambda_i(X)}, \end{cases}$$

ceci conduit à deux cas :

$$\begin{cases} \alpha < \dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} & \cdots (1) \\ \alpha > \dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} & \cdots (2) \end{cases}$$

comme $\alpha > 0$, alors on a :

• Si $\dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} > 0$ et de (1), la valeur de $\alpha$ est :

$$\alpha = \frac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} - \varepsilon, \ \varepsilon > 0$$

• Si $\dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} < 0$ et de (2), la valeur de $\alpha$ est :

$$\alpha = \varepsilon,$$

de ce qui précède, on en déduit que l'expression de $\alpha_X$ est donnée par :

$$\alpha_X = \begin{cases} \dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} - \varepsilon, & \text{si} \left( \dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} > 0 \text{ et } \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X) < 0 \right), \\ \varepsilon, & \text{si} \left( \dfrac{-1}{\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}} < 0 \text{ et } \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X) < 0 \right), \\ 1, & \text{si} \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X) > 0. \end{cases}$$

De la même manière, on obtient l'expression de $\alpha_S$.

Finalement, on prend

$$\alpha = \rho \min(\alpha_X, \alpha_S), 0 < \rho < 1,$$

ce qui complète la preuve. □

### 2.3.3 Troisième alternative

**Lemme 2.7.** *Soit* $(X, y, S) \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP) \times \mathring{\mathcal{F}}(DSDP)$. *Si* $\alpha = \rho \min(\alpha_X, \alpha_S)$ *avec* $0 < \rho < 1$, *alors* $(X^+, S^+) \in \mathbb{S}^n_{++} \times \mathbb{S}^n_{++}$,

*où pour* $A \in \{X, S\}$, *on a*

$$\alpha_A = \begin{cases} -\dfrac{(\bar{\lambda}_A - \delta_A\sqrt{n-1})}{(\bar{\beta}_A - \delta_{\Delta A}\sqrt{n-1})} - \varepsilon, & si \left( -\dfrac{(\bar{\lambda}_A - \delta_A\sqrt{n-1})}{(\bar{\beta}_A - \delta_{\Delta A}\sqrt{n-1})} > 0 \ et \ \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A) < 0 \right), \\ \varepsilon, & si \left( -\dfrac{(\bar{\lambda}_A - \delta_A\sqrt{n-1})}{(\bar{\beta}_A - \delta_{\Delta A}\sqrt{n-1})} < 0 \ et \ \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A) < 0 \right), \\ 1, & si \ \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A) > 0, \end{cases}$$

*tels que* $\bar{\lambda}_A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A)_{ii}$ *et* $\sigma_A^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}^2 - \bar{\lambda}_A^2$,
$\bar{\beta}_A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta A)_{ii}$ *et* $\sigma_{\Delta A}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\Delta A)_{ij}^2 - \bar{\beta}_A^2$, *où* $\lambda_i(A),\ i = 1,...,n,$ *sont les valeurs propres de* $\Delta A$ *et* $\varepsilon$ *est un petit réel positif.*

**Preuve.** On a $X^+ = X + \alpha\Delta X$.
Nous savons que $X^+ = X + a\Delta X$ est définie positive si et seulement si $\min_{i=1}^{n} \Upsilon_i > 0$, où $\Upsilon_i, i = 1,...,n$, sont les valeurs propres de la matrice $X^+$.
D'après le Lemme **??**, nous avons :

$$\min_{i=1}^{n} \Upsilon_i \geq \min_{i=1}^{n} \beta_i + \alpha \min_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

où $\beta_i$ *et* $\lambda_i, i = 1,...,n,$ sont les valeurs propres de $X$ et $\Delta X$ respectivement.
Donc, il suffit de trouver la valeur de $\alpha$, telle que :

$$\min_{i=1}^{n} \Upsilon_i \geq \min_{i=1}^{n} \beta_i + \alpha \min_{i=1}^{n} \lambda_i > 0.$$

On distingue deux cas :
- Si $\min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$, alors on prend $\alpha = 1$.
- Si $\min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i < 0$, alors on doit choisir le $\alpha$ qui satisfait

$$\alpha < -\frac{\min_{i=1}^{n} \beta_i}{\min_{i=1}^{n} \lambda_i(X)},$$

de la proposition 2.4, on trouve,

$$-\frac{\min\limits_{i=1}^{n} \beta_i}{\min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X)} \leq -\frac{\beta_i - \delta_X\sqrt{n-1}}{\lambda_i(X) - \delta_{\Delta X}\sqrt{n-1}},$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha < -\dfrac{\min_{i=1}^{n} \beta_i}{\min_{i=1}^{n} \lambda_i(X)} \\ -\dfrac{\left(\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}\right)}{\left(\bar{\beta}_X - \delta_{\Delta X}\sqrt{n-1}\right)} \leq -\dfrac{\min_{i=1}^{n} \beta_i}{\min_{i=1}^{n} \lambda_i(X)}, \end{cases}$$

donc, on distingue deux cas :

$$\begin{cases} \alpha < -\dfrac{\left(\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}\right)}{\left(\bar{\beta}_X - \delta_{\Delta X}\sqrt{n-1}\right)} \cdots (1) \\ \alpha > -\dfrac{\left(\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}\right)}{\left(\bar{\beta}_X - \delta_{\Delta X}\sqrt{n-1}\right)} \cdots (2) \end{cases}$$

comme $\alpha > 0$ de (1), on a :
- Si $-\dfrac{\left(\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}\right)}{\left(\bar{\beta}_X - \delta_{\Delta X}\sqrt{n-1}\right)} > 0$ de (1), on a :

$$\alpha = -\frac{\left(\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}\right)}{\left(\bar{\beta}_X - \delta_{\Delta X}\sqrt{n-1}\right)} - \varepsilon.$$

• Si $-\dfrac{\left(\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1}\right)}{\left(\bar{\beta}_X - \delta_{\Delta X}\sqrt{n-1}\right)} < 0$ de (2) , on a :

$$\alpha = \varepsilon.$$

Alors, l'expression de $\alpha_X$ est donnée comme suit :

$$\alpha_X = \begin{cases} -\dfrac{(\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1})}{(\bar{\beta}_X - \delta_{\Delta X}\sqrt{n-1})} - \varepsilon, & \text{si } \left(-\dfrac{(\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1})}{(\bar{\beta}_X - \delta_{\Delta X}\sqrt{n-1})} > 0 \text{ et } \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X) < 0\right), \\ \varepsilon, & \text{si } \left(-\dfrac{(\bar{\lambda}_X - \delta_X\sqrt{n-1})}{(\bar{\beta}_X - \delta_{(\Delta X}\sqrt{n-1})} < 0 \text{ et } \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X) < 0\right), \\ 1, & \text{si } \min\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(X) > 0. \end{cases}$$

De la même manière, on obtient l'expression de $\alpha_S$.

En suite, nous prenons

$$\alpha = \rho \min(\alpha_X, \alpha_S),\ 0 < \rho < 1.$$

Ce qui complète la preuve. □

**Quatrième alternative**

**Lemme 2.8.** *Soit (X,y,S)* $\in \mathring{\mathcal{F}}(SDP) \times \mathring{\mathcal{F}}(DSDP)$. *Si* $\alpha = \rho\ \min(\alpha_X, \alpha_S)$ *avec* $0 < \rho < 1$, *alors* $(X^+, S^+) \in \mathbb{S}^n_{++} \times \mathbb{S}^n_{++}$,
*où pour* $A \in \{X, S\}$, *on a :*

$$\alpha_A = \begin{cases} \min \dfrac{\left(\sum\limits_{i\neq j=1}^{n} |A_{ij}| - A_{ii}\right)}{\left(\Delta A_{ii} - \sum\limits_{i\neq j=1}^{n} |\Delta A_{ij}|\right)}, & si\ I_A \neq \emptyset, \\ +\infty, & si\ I_A = \emptyset. \end{cases}$$

*tel que :*

$$I_A = \left\{ i \in \{1, ..., n\} : \Delta A_{ii} - \sum_{i\neq j=1}^{n} |\Delta A_{ij}| < 0 \right\}.$$

**Preuve.** Rappelons qu'une matrice symétrique $D$ est définie positive si :

$$D_{ii} > \sum_{i\neq j=1}^{n} |D_{ij}|,\ \forall i = 1, ..., n.$$

Alors, $X^+ = X + \alpha\Delta X$ est définie positive si

$$X^+_{ii} > \sum_{i\neq j=1}^{n} |X^+_{ij}|,\ \forall i = 1, ..., n,$$

qui est équivalant à

$$X_{ii} + \alpha \Delta X_{ii} > \sum_{i \neq j=1}^{n} |X_{ij} + \alpha \Delta X_{ij}|, \; \forall i = 1, ..., n, \tag{2.8}$$

et comme $|a+b| \leq |a| + |b|$, alors on a :

$$\sum_{i \neq j=1}^{n} (|X_{ij}| + \alpha |\Delta X_{ij}|) \geq \sum_{i \neq j=1}^{n} |X_{ij} + \alpha \Delta X_{ij}|.$$

Donc, il suffit de trouver $\alpha$ qui vérifie :

$$X_{ii} + \alpha \Delta X_{ii} > \sum_{i \neq j=1}^{n} (|X_{ij}| + \alpha |\Delta X_{ij}|), \; \forall i = 1, ..., n,$$

ou bien

$$\alpha \left( \Delta X_{ii} - \sum_{i \neq j=1}^{n} |\Delta X_{ij}| \right) > \sum_{i \neq j=1}^{n} |X_{ij}| - X_{ii}, \; \forall i = 1, ..., n.$$

Si $\Delta X_{ii} - \sum\limits_{i \neq j=1}^{n} |\Delta X_{ij}| < 0$, alors $\alpha$ devient :

$$\alpha < \frac{\sum\limits_{i \neq j=1}^{n} |X_{ij}| - X_{ii}}{\Delta X_{ii} - \sum\limits_{i \neq j=1}^{n} |\Delta X_{ij}|}.$$

Donc, on en déduit que l'expression du pas de déplacement $\alpha$ associée à la matrice $X$ est donnée par :

$$\alpha_X = \begin{cases} \min \dfrac{\left( \sum\limits_{i \neq j=1}^{n} |X_{ij}| - X_{ii} \right)}{\left( \Delta X_{ii} - \sum\limits_{i \neq j=1}^{n} |\Delta X_{ij}| \right)}, & \text{si } I_X \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{si } I_X = \emptyset. \end{cases}$$

Ce qui donne l'expression de $\alpha_X$.

En appliquant le même principe sur la matrice $S$, on obtient l'expression de $\alpha_S$.

Enfin, nous prenons $\alpha = \rho \min(\alpha_X, \; \alpha_S), \; 0 < \rho < 1$.

La preuve est terminée. $\square$

## 2.4 L'algorithme de la méthode et l'analyse de sa complexité

Dans cette section, nous présentons l'algorithme de notre approche et étudions sa complexité en calculant le nombre total d'itérations produit pour obtenir une solution optimale.

Commonçcons d'abord par présenter l'algorithme de notre méthode.

### 2.4.1 Algorithme de trajectoire centrale

**Début algorithme**

**Initialisation :** $\varepsilon > 0$ est une précision donnée, $\sigma,\ \theta \in (0,1)$, $(X^0, y^0, S^0) \in T_\theta(\mu)$ et $k = 0$.

**Tant que** $\left\langle X^k, S^k \right\rangle \geq \varepsilon$ faire.

1. Prendre

- $\mu^k = \frac{\left\langle X^k, S^k \right\rangle}{n}$;
- $H^k = \sigma\mu^k I - \frac{1}{2}(X^k S^k + S^k X^k)$;

2. Calculez $\Delta\omega = (\Delta X^k, \Delta y^k, \Delta S^k)$ ;

$$\begin{cases} \Delta X^k = \mathcal{E}^{-1}\left(H^k - \mathcal{F}\Delta S^k\right); \\ \Delta y^k = -\left(B^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}^{-1}H^k\right); \\ \Delta S^k = -\mathcal{A}^*\Delta y^k; \end{cases}$$

3. Poser

$$\begin{cases} X^{k+1} = X^k + \alpha^k \Delta X^k; \\ y^{k+1} = y^k + \alpha^k \Delta y^k; \\ S^{k+1} = S^k + \alpha^k \Delta S^k; \end{cases}$$

$\alpha^k$ est obtenu par l'une des quatres alternatives.

4. Poser k=k+1 ;

**Fin tant que**

**Fin algorithme**

Dans l'algorithme $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des opérateurs de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^n$ définis par

$\mathcal{E}M = \frac{1}{2}(SM + MS)$ et $\mathcal{F}M = \frac{1}{2}(XM + MX)$.

Tout d'abord, nous énonçons certains résultats techniques nécessaires à l'analyse de notre algorithme.

### 2.4.2 Résultats de convergence

**Lemme 2.9.** *Soient* $(X, y, S) \in \mathbb{S}^n_{++} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n_{++}$ *et* $\Delta\omega = (\Delta X, \Delta y, \Delta S)$ *une solution du système* (2.4)*, alors :*

*(i)* $\langle \Delta X, \Delta S \rangle = 0$.

*(ii)* $\langle X, \Delta S \rangle + \langle S, \Delta X \rangle = trace(H)$*, où* $H = \sigma\mu I - \left(\frac{XS+SX}{2}\right)$ *tels que* $\sigma \in (0,1)$ *et* $\mu = \frac{\langle X,S \rangle}{n}$.

*(iii)* $\langle (X + \alpha\Delta X), (S + \alpha\Delta S) \rangle = (1 - \alpha(1-\sigma)) \langle X, S \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

**Preuve.** (i) Des deux premières équations du système (2.4), on a :

$$\langle \Delta X, \Delta S \rangle = \langle \Delta S, \Delta X \rangle = \langle -\mathcal{A}^* \Delta y, \Delta X \rangle = \left\langle -\left(\sum_{i=1}^m \Delta y_i A_i\right), \Delta X \right\rangle$$

$$\langle \Delta S, \Delta X \rangle = \left\langle -\sum_{i=1}^m \Delta y_i A_i, \Delta X \right\rangle = -\sum_{i=1}^m \Delta y_i \langle A_i, \Delta X \rangle = 0 \, (\langle A_i, \Delta X \rangle = 0)$$

D'où : $\langle \Delta X, \Delta S \rangle = 0$, ce qui montre (i).

(ii) On a :

$$H = \sigma\mu I - \left(\frac{XS+SX}{2}\right), \text{ donc}$$
$$trace(H) = trace\left(\sigma\mu I - \left(\frac{XS+SX}{2}\right)\right),$$

de la dernière équation du système (2.9) :

$$\sigma\mu I - H_p(XS) = H_p(X\Delta S + \Delta X S),$$

il devient :

$$trace(H) = trace\left(\frac{X\Delta S + S\Delta X + \Delta X S + \Delta S X}{2}\right),$$

et comme

$$trace(A+B) = trace(A) + trace(B), \text{ et } trace(A) = trace(A^T),$$

alors on a :

$$\begin{aligned} trace(H) &= trace\left(\frac{X\Delta S + \Delta X S}{2} + \frac{S\Delta X + \Delta S X}{2}\right) \\ &= trace(X\Delta S + \Delta X S) \\ &= trace(X\Delta S) + trace(\Delta X S), \end{aligned}$$

ce qui prouve (ii).

(iii) On utilisant (i) et (ii) de ce lemme, on trouve

$$\begin{aligned}
\langle (X+\alpha\Delta X),(S+\alpha\Delta S)\rangle &= \langle X,S\rangle + \alpha\left(\langle X,\Delta S\rangle + \langle \Delta X,S\rangle\right) + \alpha^2\langle \Delta X,\Delta S\rangle\\
&= \langle X,S\rangle + \alpha\left(\langle X,\Delta S\rangle + \langle \Delta X,S\rangle\right)\\
&= \langle X,S\rangle + \alpha trace(H)\\
&= \langle X,S\rangle + \alpha trace\left(\sigma\mu I - \left(\frac{XS+SX}{2}\right)\right)\\
&= \langle X,S\rangle + \alpha trace(\sigma\mu I) - \alpha trace\left(\frac{XS+SX}{2}\right)\\
&= \langle X,S\rangle + \alpha trace(\sigma\mu I) - \alpha trace\left(XS\right),
\end{aligned}$$

et comme $trace(XS) = n\mu$, on trouve

$$\begin{aligned}
\langle (X+\alpha\Delta X),(S+\alpha\Delta S)\rangle &= \langle X,S\rangle + \alpha\sigma\mu trace(I) - \alpha trace\left(XS\right)\\
&= (1-\alpha)\langle X,S\rangle + \alpha\sigma\mu n\\
&= (1-\alpha)\langle X,S\rangle + \alpha\sigma\langle X,S\rangle\\
&= \langle X,S\rangle(1+\alpha\sigma-\alpha)\\
&= (1-\alpha(1-\sigma))\langle X,S\rangle,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

La preuve est complétée. □

**Lemme 2.10.** *Soit $(X^+,y^+,S^+)$ une solution strictement réalisable, telle que :*

$$X^+ = X+\alpha\Delta X,\ y^+ = y+\alpha\Delta y \text{ et } S^+ = S+\alpha\Delta S,$$

*alors,*

$$\left\langle X^+,S^+\right\rangle < \langle X,S\rangle.$$

**Preuve.** Du lemme précédent, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\langle X^+,S^+\right\rangle &= \langle (X+\alpha\Delta X),(S+\alpha\Delta S)\rangle\\
&= (1-\alpha(1-\sigma))\langle X,S\rangle,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Comme $\sigma\in(0,1)$ et $\alpha>0$, il s'en suit : $1-\alpha(1-\sigma)<1$, ce qui donne : $\langle X^+,S^+\rangle < \langle X,S\rangle$, d'où la preuve. □

**Lemme 2.11.** *Soient $X^+$ et $X$ deux solutions strictement réalisables de $(SDP)_\mu$, avec $X^+ = X+\alpha\Delta X$, où $\alpha$ est le pas de déplacement et $\Delta X$ est la direction de Newton, alors nous avons $f_\mu(X^+) < f_\mu(X)$.*

**Preuve.** On a

$$f_\mu(X^+) \simeq f_\mu(X) + \left\langle \triangledown f_\mu(X), X^+ - X \right\rangle .$$

Donc

$$f_\mu(X^+) - f_\mu(X) \simeq \langle \triangledown f_\mu(X), \alpha \Delta X \rangle ,$$

de la méthode de Newton de second ordre, on a

$$\nabla f_\mu(X) = -\nabla^2 f_\mu(X) \Delta X,$$

donc, la relation précédente devient :

$$\begin{aligned} f_\mu(X^+) - f_\mu(X) &\simeq \alpha \left\langle -\triangledown^2 f_\mu(X) \Delta X, \Delta X \right\rangle \\ &\simeq -\alpha \left\langle \triangledown^2 f_\mu(X) \Delta X, \Delta X \right\rangle < 0, \end{aligned}$$

puisque $f_\mu$ est strictement convexe, d'où

$$f_\mu(X^+) < f_\mu(X).$$

$\square$

### 2.4.3 Analyse de la complexité

Dans cette partie, nous prouvons que la complexité algorithmique pour trouver une solution optimale est bornée par :

$$\mathcal{O}(\sqrt{n} \ln[\varepsilon^{-1}(\langle X^0, S^0 \rangle)]).$$

Tout au long de cette partie, nous donnons quelques lemmes techniques qui seront fréquemment utilisés lors de l'analyse.
L'algorithme sélectionne une suite de pas de déplacement $\{\alpha_k\}$ et de paramètres de centralité $\{\sigma_k\}$ selon la règle suivante : pour tous, $k \geq 0$, soit $\alpha_k = 1$ et $\sigma_k = 1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, où $\delta > 0$ est une constante qui est spécifiée dans le théorème ci-dessous ; le résultat suivant analyse le comportement d'une itération de la méthode de trajectoire centrale à petit-pas.

**Lemme 2.12.** *Soit* $(X, y, S) \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP) \times \mathring{\mathcal{F}}(DSDP)$ *et soit* $(\Delta X, \Delta y, \Delta S)$ *la solution de* (2.4) *avec* $H = \sigma\mu I - (\frac{XS+SX}{2})$*. Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*, on pose*

$$(X(\alpha), y(\alpha), S(\alpha)) = (X, y, S) + \alpha(\Delta X, \Delta y, \Delta S), \tag{2.9}$$

$$\mu(\alpha) = \frac{\langle X(\alpha), S(\alpha) \rangle}{n} \tag{2.10}$$

$$Q(\alpha) = \frac{X(\alpha)S(\alpha) + S(\alpha)X(\alpha)}{2} - \mu(\alpha)I. \tag{2.11}$$

*Alors,*

$$Q(\alpha)+Q(\alpha)^T=2(1-\alpha)\left(\frac{XS+SX}{2}-\mu I\right)+\alpha^2(\Delta X\Delta S+\Delta S\Delta X). \tag{2.12}$$

**Preuve.** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ donné. De (iii) du Lemme 2.9, on a

$$\langle (X+\alpha\Delta X),(S+\alpha\Delta S)\rangle=(1-\alpha(1-\sigma))\langle X,S\rangle\,\forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

$$\langle X(\alpha),S(\alpha)\rangle=(1-\alpha+\alpha\sigma)\langle X,S\rangle\,,$$

comme $\mu=\dfrac{\langle X,S\rangle}{n}$ et $\mu(\alpha)=\dfrac{\langle X(\alpha),S(\alpha)\rangle}{n}$, alors la dernière égalité devient :

$$\mu(\alpha)=(1-\alpha+\alpha\sigma)\mu.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
Q(\alpha)+Q^T(\alpha)&=X(\alpha)S(\alpha)+S(\alpha)X(\alpha)-2\mu(\alpha)I\\
&=(X+\alpha\Delta X)(S+\alpha\Delta S)+(S+\alpha\Delta S)(X+\alpha\Delta X)-2(1-\alpha+\alpha\sigma)\mu I\\
&=XS+\alpha X\Delta S+\alpha\Delta XS+\alpha^2\Delta X\Delta S+SX+\alpha S\Delta X+\alpha\Delta SX+\alpha^2\Delta S\Delta X\\
&-2(1-\alpha+\alpha\sigma)\mu\\
&=XS+SX-2\mu I+2\alpha\mu I-2\alpha\sigma\mu I+\alpha(\Delta XS+S\Delta X)+\alpha(\Delta SX+X\Delta S)\\
&+\alpha^2(\Delta X\Delta S+\Delta S\Delta X)\\
&=XS+SX-2\mu I+2\alpha\mu I-2\alpha\sigma\mu-\alpha XS-\alpha SX+\alpha XS+\alpha SX\\
&+2\alpha(\frac{1}{2}(\Delta XS+S\Delta X))+2\alpha(\frac{1}{2}(\Delta SX+X\Delta S))+\alpha^2(\Delta X\Delta S+\Delta S\Delta X)
\end{aligned}$$

on a

$$\mathcal{E}M=\frac{1}{2}(SM+MS).$$

Donc on peut écrire

$$(\frac{1}{2}(\Delta XS+S\Delta X))=\mathcal{E}M,$$

tel que

$$M=\Delta X,$$

et on a aussi

$$\mathcal{F}M=\frac{1}{2}(XM+MX).$$

Donc, on peut écrire

$$\frac{1}{2}(\Delta SX+X\Delta S)=\mathcal{F}M,$$

tel que

$$M = \Delta S.$$

Donc

$$\begin{aligned}
Q(\alpha) + Q(\alpha)^T &= (XS + SX - 2\mu I) - \alpha(XS - SX - 2\mu I) + \alpha(SX - XS - 2\sigma\mu I) + 2\alpha(\mathcal{E}M + \mathcal{F}M) \\
&+ \alpha^2(\Delta X\Delta S + \Delta S\Delta X) \\
&= (1-\alpha)(XS + SX - 2\mu I) + 2\alpha\mathcal{E}\Delta X + 2\alpha\mathcal{F}\Delta S + \alpha^2(\Delta X\Delta S + \Delta S\Delta X) \\
&= (1-\alpha)(XS + SX - 2\mu I) + \underbrace{\alpha(XS + SX - 2\sigma\mu I)}_{-2\alpha H} \\
&\quad + \underbrace{2\alpha(\mathcal{E}\Delta X + \mathcal{F}\Delta S)}_{2\alpha H} + \alpha^2(\Delta X\Delta S + \Delta X\Delta S) \\
&= 2(1-\alpha)\left(\frac{XS+SX}{2} - \mu I\right) + \alpha^2(\Delta X\Delta S + \Delta S\Delta X).
\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve.

Le lemme suivant fournit des bornes sur les directions $\Delta XX^{-1}$ et $X\Delta S$ pour $(X, y, S) \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP) \times \mathring{\mathcal{F}}(DSDP)$.

L'inégalité suivante impliquant des normes est utilisée dans la preuve du Lemme ci-dessous et dans autres endroits de ce travail.

Pour tout $A_1,\ A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on a $\|A_1A_2\|_F \leq \|A_1\|\|A_2\|_F$ et $\|A_1A_2\|_F \leq \|A_1\|_F\|A_2\|$ ([18]).

□

**Lemme 2.13.** *Soit $(X, y, S) \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP) \times \mathring{\mathcal{F}}(DSDP)$, telle que $\| XS - \mu I \| \leq \theta\mu$, pour $\theta \in [0, 1)$ et $\mu > 0$.*

*Supposons que $(\Delta X, \Delta y, \Delta S) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n$ est une solution de système (2.4) pour $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et soient $\delta_X = \mu \| \Delta XX^{-1} \|_F$ et $\delta_S = \| X\Delta S \|_F$ . Alors*

$$\delta_X\delta_S \leq \frac{1}{2}(\delta_X^2 + \delta_S^2) \leq \frac{\| H \|_F}{2(1-\theta)^2}.$$

**Preuve.** En utilisant la dernière équation de système (2.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\Delta SX + X\Delta S + \Delta XS + S\Delta X}{2} \\
&= \frac{\Delta SX + X\Delta S + \Delta XX^{-1}XS + SXX^{-1}\Delta X + \mu X^{-1}\Delta X - \mu X^{-1}\Delta X + \mu\Delta XX^{-1} - \mu\Delta XX^{-1}}{2} \\
&= \frac{\Delta SX + X\Delta S - \mu X^{-1}\Delta X + \mu\Delta XX^{-1} + \Delta XX^{-1}XS - \mu\Delta XX^{-1} + SXX^{-1}\Delta X + \mu X^{-1}\Delta X}{2} \\
&= \frac{\Delta SX + X\Delta S}{2} + \mu\left(\frac{\Delta XX^{-1} - X^{-1}\Delta X}{2}\right) + \frac{1}{2}\Delta XX^{-1}(XS - \mu I) + \frac{1}{2}(SX + \mu I)X^{-1}\Delta X
\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$
\begin{aligned}
&\| H \|_F \\
&\quad = \left\| \frac{\Delta SX + X\Delta S}{2} + \mu\left(\frac{\Delta X X^{-1} - X^{-1}\Delta X}{2}\right) + \frac{1}{2}\Delta X X^{-1}\left(XS - \mu I\right) + \frac{1}{2}\left(SX + \mu I\right)X^{-1}\Delta X \right\| \\
&\quad \geq \left\| \frac{\Delta SX + X\Delta S}{2} + \mu\left(\frac{\Delta X X^{-1} - X^{-1}\Delta X}{2}\right)\right\|_F \\
&\qquad - \left\| \frac{1}{2}\Delta X X^{-1}\left(XS - \mu I\right) + \frac{1}{2}\left(SX + \mu I\right)X^{-1}\Delta X \right\|_F \\
&\quad = \left( \left\| \frac{\Delta SX + X\Delta S}{2}\right\|_F^2 + \left\| \mu\left(\frac{\Delta X X^{-1} - X^{-1}\Delta X}{2}\right)\right\|_F^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad - \left\| \frac{1}{2}\Delta X X^{-1}\left(XS - \mu I\right) + \frac{1}{2}\left(SX + \mu I\right)X^{-1}\Delta X \right\|_F,
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\| H \|_F &= \left( \left\| \frac{\Delta SX + X\Delta S}{2}\right\|_F^2 + \left\| \frac{\mu(\Delta X X^{-1} + X^{-1}\Delta X)}{2}\right\|_F^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - \left\| \frac{1}{2}\Delta X X^{-1}\left(XS - \mu I\right) + \frac{1}{2}\left(SX + \mu I\right)X^{-1}\Delta X \right\|_F \\
&= \left( \left\| \frac{\Delta SX + X\Delta S}{2}\right\|_F^2 + \left\| \frac{\mu(\Delta X X^{-1} + X^{-1}\Delta X)}{2}\right\|_F^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - \left|\left| XS - \mu I \right|\right|_F \left|\left| \Delta X X^{-1} \right|\right|_F \\
&\geq \left( \left\| \frac{\Delta SX + X\Delta S}{2}\right\|_F^2 + \left\| \frac{\mu(\Delta X X^{-1} + X^{-1}\Delta X)}{2}\right\|_F^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \theta\delta_X \\
&= (\delta_X^2 + \delta_S^2)^{\frac{1}{2}} - \theta\delta_x \geq (1-\theta)\left(\delta_X^2 + \delta_S^2\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

où l'avant dernière inégalité est une conséquence de l'hypothèse $\|XS - \mu I\| \leq \theta\mu$. Par l'utilisation de (i) du Lemme 2.9, on montre que

$$\left\langle \Delta SX + X\Delta S, \Delta X X^{-1} + X^{-1}\Delta X \right\rangle = \langle \Delta X, \Delta S\rangle = 0.$$

Le résultat se déduit facilement de la dernière inégalité. $\square$

**Théorème 2.14.** *Soient $\theta \in (0,1)$ et $\delta \in [0, \sqrt{n}[$ des constantes satisfaisant*

$$\frac{\theta^2 + \delta^2}{2(1-\theta)^2(1-\frac{\delta}{\sqrt{n}})} \leq \theta,\ \theta \leq \frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

*Supposons que $(X, y, S) \in T_\theta(\mu)$ et soit $(\Delta X, \Delta y, \Delta S)$ la solution du système (2.4) avec $H = \sigma\mu I - \left(\frac{XS+SX}{2}\right)$ et $\sigma = 1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}$. Alors,*

*(a)* $(X^+, y^+, S^+) = (X, y, S) + (\Delta X, \Delta y, \Delta S) \in T_\theta(\mu^+)$,

*(b)* $\langle X^+, S^+\rangle = (1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}})\langle X, S\rangle$.

**Preuve.** l'énoncé (b) est une conséquence immédiate de (iii) du lemme 2.9, avec $\alpha = 1$ et le fait que $\sigma = 1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}$. D'où,

$$\mu^+ = \frac{\langle X^+, S^+\rangle}{n} = (1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}})\mu. \tag{2.14}$$

(a) De $\left\langle \frac{XS+SX}{2} - \mu I, I\right\rangle = 0$ et $(X, y, S) \in T_\theta(\mu)$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sigma\mu I - \frac{XS+SX}{2}\right|\right|_F^2 &= \left|\left|\sigma\mu I - \mu I + \mu I - \frac{XS+SX}{2}\right|\right|_F^2 \\
&= \left|\left|(\sigma - 1)\,\mu I + \left(\mu I - \frac{XS+SX}{2}\right)\right|\right|_F^2 \\
&= ||(\sigma-1)\mu I||_F^2 + \left|\left|\mu I - \frac{XS+SX}{2}\right|\right|_F^2 \\
&\leq \left[(1-\sigma)^2 n + \theta^2\right]\mu^2, \ \left(\left|\left|\mu I - \frac{XS+SX}{2}\right|\right|_F \leq \theta\mu\right) \\
&= (\delta^2 + \theta^2)\mu^2, \ \left(\sigma = 1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Tant que $||XS - \mu I|| \leq \theta\mu$, il découle du Lemme 2.13 avec $H = \sigma\mu I - \left(\frac{XS+SX}{2}\right)$,

$$\left|\left|\Delta X X^{-1}\right|\right|_F \leq \frac{\left|\left|\sigma\mu I - \frac{XS+SX}{2}\right|\right|_F}{(1-\theta)\,\mu} \tag{2.16}$$

et

$$\left|\left|\Delta X X^{-1}\right|\right|_F ||X\Delta S||_F \leq \frac{\left|\left|\sigma\mu I - \frac{XS+SX}{2}\right|\right|_F^2}{2\,(1-\theta)^2\,\mu}. \tag{2.17}$$

Soit $Q^+ = Q(1) = \frac{X^+S^+ + S^+X^+}{2} - \mu^+ I$, en utilisant la relation (2.12) avec $\alpha = 1$, de (2.17), (2.15), (2.13) et (2.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|\left|Q^+ + (Q^+)^T\right|\right|_F = \left|\left|Q^+\right|\right|_F &= \frac{1}{2}\,||\Delta X\Delta S + \Delta S\Delta X||_F\,, \text{ d'aprés(2.17)} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(||\Delta X\Delta S||_F + ||\Delta S\Delta X||_F\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(2\,||\Delta X\Delta S||_F\right) \\
&\leq ||\Delta X\Delta S||_F \\
&= \left|\left|\Delta X X^{-1} X\Delta S\right|\right|_F \\
&\leq \left|\left|\Delta X X^{-1}\right|\right|_F ||X\Delta S||_F \leq \frac{\left|\left|\sigma\mu I - \frac{XS+SX}{2}\right|\right|_F^2}{2\,(1-\theta)^2\,\mu}, \ \text{(de (2.15))} \\
&\leq \frac{(\delta^2+\theta^2)\,\mu}{2\,(1-\theta)^2} \leq \theta\left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)\mu, \ \text{(de (2.13))} \\
&= \theta\mu^+. \ \text{(de (2.14))}\,.
\end{aligned}$$

Donc, on conclut que :

$$\left\|\frac{X^+S^+ + S^+X^+}{2} - \mu^+ I\right\|_F \leq \theta\mu^+. \tag{2.18}$$

En utilisant (2.16), (2.15) et (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta X X^{-1}\right\|_F &\leq \frac{\left\|\sigma\mu I - \frac{XS+SX}{2}\right\|_F}{(1-\theta)\,\mu}, \quad \text{(de (2.16))} \\
&\leq \frac{(\delta^2+\theta^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-\theta)}, \quad \text{(de (2.15))} \\
&\leq \left[2\theta\left(1-\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} < 1, \quad \left(\text{de (2.13) et } \sigma \in [0,\sqrt{n}[\right).
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que la dernière relation implique que $I + \Delta X X^{-1} \succ 0$, d'où

$$X^+ = X + \Delta X = (I + \Delta X X^{-1})X \succ 0.$$

L'inégalité (2.18) implique que

$$\lambda_{\min}\left(\frac{X^+S^+ + S^+X^+}{2}\right) = \lambda_{\min}\left(X^+S^+\right) \geq (1-\theta)\,\mu^+ > 0.$$

D'où $X^+S^+ = (X^+)^{\frac{1}{2}}(X^+)^{\frac{1}{2}}S^+(X^+)^{\frac{1}{2}}(X^+)^{-\frac{1}{2}} \succ 0$, ce qui donne $(X^+)^{\frac{1}{2}}S^+(X^+)^{-\frac{1}{2}} \succ 0$, donc $S^+ \succ 0$.

En utilisant la première équation du système (2.4), on obtient

$\mathcal{A}X^+ = \mathcal{A}(X+\Delta X) = \mathcal{A}X + \mathcal{A}\Delta X = b$, alors $X^+ \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP)$.

En utilisant la deuxième équation du système (2.4), on obtient

$$\mathcal{A}^*y^+ + S^+ = \mathcal{A}^*(y+\Delta y) + (S+\Delta S) = \mathcal{A}^*y + S + \mathcal{A}^*\Delta y + \Delta S = C,$$

ce qui implique que $(y^+, S^+) \in \mathring{\mathcal{F}}(DSDP)$.

De (2.18) et comme $(X^+, y^+, S^+) \in \mathring{\mathcal{F}}(SDP) \times \mathring{\mathcal{F}}(DSDP))$, on conclut que $(X^+, y^+, S^+) \in T_\theta(\mu)$. □

**Corollaire 2.15.** *Soient $\theta$ et $\delta$ données dans le Théorème 2.14 et $(X^0, y^0, S^0) \in T_\theta(\mu)$. Alors, la méthode de la trajectoire centrale à petit-pas génère une suite de points $\{(X^k, y^k, S^k)\} \subset T_\theta(\mu)$, telle que :*

$$\left\langle X^k, S^k\right\rangle = \left(1-\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)^k \left\langle X^0, S^0\right\rangle, \ \forall k \geq 0.$$

*De plus, pour une précision donnée $\varepsilon > 0$, la méthode de trajectoire centrale à petit-pas trouve un point $(X^k, y^k, S^k)$ vérifiant $\left\langle X^k, S^k\right\rangle \leq \varepsilon$ dans au plus $K = \mathcal{O}\left(\sqrt{n}\ln\left[\varepsilon^{-1}\left(\langle X^0, S^0\rangle\right)\right]\right)$ itérations.*

**Preuve.** On a d'après le Théorème 2.14, $\langle X^+, S^+\rangle = \left(1-\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)\langle X, S\rangle$, donc par récurrence on a :

$$\left\langle X^k, S^k\right\rangle = \left(1-\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)^k \left\langle X^0, S^0\right\rangle,$$

et comme $\left\langle X^k, S^k\right\rangle \leq \varepsilon$, alors on a

$$\left\langle X^k, S^k\right\rangle = \left(1-\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)^k \left\langle X^0, S^0\right\rangle \leq \varepsilon,$$

ce qui implique :

$$\ln\left[\left(1-\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)^k \left\langle X^0, S^0\right\rangle\right] \leq \ln \varepsilon,$$

qui est équivalent à :

$$k\ln\left(1-\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left\langle X^0, S^0\right\rangle \leq \ln \varepsilon,$$

ce qui donne :

$$k\ln\left(1-\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right) \leq \ln\varepsilon - \ln\left\langle X^0, S^0\right\rangle = \ln\left(\frac{\varepsilon}{\langle X^0, S^0\rangle}\right)$$

puisque :

$$\ln(1-x) \geq (-x),\ 0 < x < 1,$$

alors on trouve :

$$k\left(-\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right) \leq \ln\left(\frac{\varepsilon}{\langle X^0, S^0\rangle}\right),$$

d'où

$$k \geq \left[\delta^{-1}\sqrt{n}\ln\left(\frac{\langle X^0, S^0\rangle}{\varepsilon}\right)\right].$$

Ce qui termine la preuve. □

# Partie II : Étude numérique

## 2.5 Tests numériques

Les exemples suivants sont pris de la littérature (voir par exemple [**?**, 7]) et implémentés sur MATLAB R2008b sur ( Nous avons pris $\varepsilon = 10^{-6}$, $\sigma = 0.1$ et $\rho = 0.99$.)
Dans le tableau des résultats, (ex $(m, n)$) représente la taille de l'exemple, (**Itr**) représente le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une solution optimale et (**Pas**) représente l'intervalle des pas de déplacement pour chaque alternative (notée par (**Alt**)).
Rappelons que le problème considéré est

$$(SDP) \begin{cases} \min \langle C, X \rangle \\ \langle A_i, X \rangle = b_i, i = 1, ..., m \\ X \in \mathbb{S}^n_+, \end{cases}$$

où son dual associé est

$$(DSDP) \begin{cases} \max b^T y \\ C - \sum\limits_{i=1}^{m} y_i A_i = S, \\ y \in \mathbb{R}, S \in \mathbb{S}^n_+. \end{cases}$$

• **Exemple à taille fixe**

**Exemple 1 :**

$$C(i, j) = -1, \forall i, j = 1, 2,\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = I,\ et\ b = (1, 1)^T.$$

On commence par un point initial $(X^0, y^0, S^0)$, tels que :

$$X^0 = diag(0.5, 0.5),\ y^0 = (0, -3)^T \text{ et } S^0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 2 :**

$C = diag(5, 8, 8, 5),\ A_4 = I,\ b = (1, 1, 1, 2)^T$ et les matrices $A_k,\ k = 1, ..., 3$, sont définies comme suit :

$$A_k(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = k \ \text{ ou } i = j = k+1, \\ -1 & \text{si } i = k, j = k+1 \text{ ou } i = k+1, j = k, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On commence par un point initial $(X^0, y^0, S^0)$, tels que :

$$X^0 = \frac{1}{2}I,\ y^0 = (1.5, 1.5, 1.5, 1.5)^T \text{ et } S^0 = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 3.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 & 3.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 3 :**

$$C = diag(-4, -2, -2, 0, 0, 0),\ A_1 = diag(1, -1, 1, 1, 0, 0),$$

$$A_2 = diag(1, 1, , 1, 0, 1, 0),\ A_3 = diag(2, 2, 1, 0, 0, 1) \text{ et } b = (6, 2, 4)^T.$$

On commence par un point initial $(X^0, y^0, S^0)$, tels que :

$X^0 = diag(1.467, 0.087, 0.36, 0.086, 0.532),\ y^0 = (-1, -1, -2)^T 1$ et $S^0 = diag(2, 2, 2, 1, 1, 2)$.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

| ex $(m, n)$ | $1^{re}$ Alt | | $2^{me}$ Alt | | $3^{me}$ Alt | | $4^{me}$ Alt | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itr | Pas | Itr | Pas | Itr | Pas | Itr | Pas |
| 3.5.1 $(2, 2)$ | 5 | $[1.05, 1.06]$ | 5 | $[1.05, 1.06]$ | 5 | $[0.99, 1.09]$ | 5 | $[0.99, 1.09]$ |
| 3.5.2 $(2, 3)$ | 11 | $[0.69, 0.82]$ | 3 | $[0.29, 1.34]$ | 7 | 0.99 | 7 | $[0.99, 1.08]$ |
| 3.5.3 $(4, 4)$ | 14 | $[0.7, 0.78]$ | 7 | 0.99 | 7 | 0.99 | 7 | $[0.99, 1.08]$ |
| 3.5.4 $(3, 6)$ | 18 | $[0.51, 0.7]$ | 8 | 0.99 | 8 | 0.99 | 6 | $[0.99, 1.1]$ |

• **Exemple à taille variable**

$C = -1,\ b(i) = 2,\ i = 1, ..., m$, et les matrices $A_k,\ k = 1, ..., m$, sont définies comme suit :

$$A_k(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = k, \\ 1 & \text{si } i = j \text{ et } i = m+k, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On commence par un point initial $(X^0, y^0, S^0)$, tels que :

$$y^0(i) = -2,\ i = 1, ..., m,\ S^0 = I \text{ et } X^0(i,j) = \begin{cases} 1.5 & \text{si } i \leq j, \\ 0.5 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

| taille $(m,n)$ | $1^{re}$ Alt | | $2^{me}$ Alt | | $3^{me}$ Alt | | $4^{me}$ Alt | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itr | Pas | Itr | Pas | Itr | Pas | Itr | Pas |
| $(10, 20)$ | 4 | 1.099 | 4 | 1.099 | 8 | $[0.99, 1.099]$ | 4 | 1.1 |
| $(20, 40)$ | 4 | 1.099 | 4 | 1.099 | 8 | 0.99 | 4 | 1.1 |
| $(50, 100)$ | 4 | 1.099 | 4 | 1.099 | 9 | 0.99 | 4 | 1.1 |
| $(100, 200)$ | 5 | 1.099 | 5 | 1.099 | 9 | 0.99 | 5 | 1.1 |
| $(150, 300)$ | 6 | $[0.88, 1.099]$ | 6 | $[0.99, 1.099]$ | 9 | 0.99 | 5 | 1.1 |

**Commentaires**

A travers les tests numériques effectués, les quatre alternatives offrent une solution optimale de (PSD) et (DSDP) dans un temps polynomiale et avec un petit nombre d'itérations.

On remarque aussi que la quatrième alternative est la meilleure, les résultats numériques comparatifs obtenus favorisent cette dernière par rapport aux autres.

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées à la résolution des problèmes de programmation semi-définie $(SDP)$ par la méthode de trajectoire centrale. Nous avons associé à $(SDP)$ un problème perturbé, noté $(SDP)_\mu$. Tout d'abord, nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution optimale du problème $(SDP)_\mu$, ensuite nous avons montré que la solution du problème perturbé $(SDP)_\mu$ converge vers la solution optimale du problème original $(SDP)$ lorsque $\mu$ tend vers zéro. Puis, nous avons prouvé, en appliquant une méthode simple et facile, la diminution de la fonction objective sur la suite déterminée par notre algorithme.
Le problème $(SDP)_\mu$ étant strictement convexe, les conditions **KKT** sont nécessaires et suffisantes. Pour cela ,nous avons utilisé la méthode de Newton qui nous permet de calculer une bonne direction de descente et de déterminer une nouvelle itération, mieux que celle d'actualité.
Pour calculer le pas de déplacement, plusieurs méthodes ont été proposées par les scientifiques et les chercheurs. Y compris, méthodes de recherche linéaire, qui sont très coûteuses et impraticables. Pour remédier ce problème, nous avons proposé dans ce travail une nouvelle approche : nous donnons quatre nouvelles alternatives pour calculer le pas de déplacement par une méthode simple, facile et techniquement beaucoup moins coûteuse. Enfin, nous avons analysé la convergence de l'algorithme obtenu et montré que la complexité pour les pas courts est borné par $\mathcal{O}(\sqrt{n}\ln[\varepsilon^{-1}(\langle X^0, S^0\rangle)])$ itérations.
Pour enrichir notre contribution, nous avons présenté des simulations numériques pour montrer l'efficacité de notre approche et la convergence des quatre alternatives à la solution optimale du problème. Ces simulations confirment que la quatrième alternative est meilleure que les autres en termes de nombre d'itérations.

# Bibliographie


[1] **M. Bierlaire** : *Introduction à l'optimisation différentiable, press polytechniques et universitaires romandes, (2006).*

[2] **M. Bouafia** :*Etude asymptotique des méthodes de points intérieurs pour la programmation lineaire, Thése de Doctorat Université de Sétif, (2016).*

[3] **I. Benadouane** :*La Méthode de PI primale-duale basée sur une fonction barrière à deux paramètres pour PL, Université de Jijel, (2020).*

[4] **R. A. Horn**, **C. R. Johnson**, : *Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York, 1985.*

[5] **C. Helmberg** : *Semidefinite programming for combinatorial optimization, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, Takustrabe 7, D-14195 Berlin, Germany, 2000.*

[6] **C. Kanzow**, **C. Nagel** : *Technical note some structural properties of a Newton-type method for semidefinite programs, J. Optim. Theory Appl. 122 (2004) 219–226.*

[7] **A. Keraghel** : *Etude adaptative et comparative des principales variantes dans l'algorithme de Karmarkar (Ph.D. thesis), Joseph Fourier University, Grenoble, France, 1989.*

[8] **M. Kojima**, **S. Shindoh**, **S. Hara,** : *Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices, SIAM J. Optim. 7 (1997) 86–125.*

[9] **K. Kara, A. Meghachi** : *Etude asymptotique de la méthode de trajectoire centrale pour la programmation semi-définie, Université de Jijel, 2019.*

[10] **A. Keraghel** : *Analyse convexe, thérie fondamentale et exercices, Editions Dar el'Houda, Ain M'lila, Algérie, (1999).*

[11] **Z. Kabbiche** : *Etude et extentions d'algorithmes de points intérieurs pour la programmation non linéare, Thèse doctorat d'état, Université Farhat Abbas-Setif, (2007).*

[12] **H. Lütkepohl** : *Handbook of Matrices, Humboldt-Universität zu Berlin, Germany, 1996.*

[13] **A. Leulmi** : *Etude d'une méthode barrière logarithmique via les fonctions minorantes pour la programmation Semi-définie, Université Farhat Abbas(Sétif, Algérie), 2018.*

[14] **R. D. C. Monteiro**, **P. R. Zanjácomo** : *A note on the existence of Alizadeh–Heaberly–Overton direction for semidefinite programming, Math. Program. 78 (1997) 393–396.*

[15] **R. D. C. Monteiro** : *Polynomial convergence of primal–dual algorithms for semidefinite programming based on the Monteiro and Zhang family of directions, SIAM J. Optim. 8 (1998) 797–812.*

[16] **C. Roos, T. Terlaky, J. Ph Vial** : *Theory and Algorithms for linear optimization, An interior Approach, J ohn Wiley, Sons, Chichester, U., 1997.*

[17] **K. C. Toh** : *Some new search directions for primal–dual interior point methods in semidefinite programming, SIAM J. Optim. 11 (2000) 223–242.*

[18] **I. Touil, D. benterki, A. yassine** :*A feasible primal-dual interior point method for linear semidefinite programming, Journal of Computational and Appliend Mathematics, Thèse de Doctorat, université de sétif (2017).*

[19] **H. Wolkowicz**, **G. P. H. Styan** : *Bounds for eigenvalues using traces, Linear Algebra Appl. 29 (1980) 471–506.*

[20] **Y. Zhang** : *On extending some primal–dual interior-point algorithms from linear programming to semidefinite programming, SIAM J. Optim. 8 (1998) 365–386.*

[21] **A. Zerari** :*Méthodes de points intérieurs et leurs applications sur des problèmes d'otimisation semi-définies, Université Farhat Abbas(Sétif, Algérie), 2020*