République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.

Option Analyse Fonctionnelle.

Thème

Théorème de Scorza-Dragoni et Théorème de Dugundji et leur application aux inclusions différentielles

Présenté par

Lahmer Amira

Le 18/07/2021

Devant le jury

Président	**S. Saidi**	M.C.A Université de Jijel
Encadreur	**D. Azzam-Laouir**	Prof. Université de Jijel
Examinateur	**R. Belhadef**	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

REMERCIMENTS

En tout premier lieu, je remercie **Allah** le tout puissant, qui m'a accordé la volonté, le courage et la santé tout au long de ma vie, qui m'a permis d'achever ce travail et de le mettre entre vos mains aujourd'hui.

Je tiens également à adresser mes remerciements les plus sincères à Madame **le Professeur Dalila. Azzam-Laouir** de m'avoir accordé le privilège de travailler sous sa direction. Pour ses judicieux conseils, sa ponctualité, sa rigueur scientifique, son sens de responsabilité et ses qualités humaines, m'ont beaucoup marqué. Je lui suis infiniment reconnaissante.

Ma gratitude s'adresse aux membres de jury Madame **Dr. Soumia. Saidi** et Monsieur **Dr. Rafik. Belhadef** qui me font l'honneur d'examiner ce mémoire.

À l'occasion, je tiens à exprimer mon sincère respect à l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation du primaire jusqu'au cycle universitaire.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à mes collégues et amis, avec qui j'ai passé une carrière pleine d'apprentissage.

Je ne peux manquer également d'exprimer ma gratitude la plus profonde à tous les membres de ma famille, pour leur soutien et leurs précieux mots d'encouragement, particulièrement mes parents et ma grand mère, la source de joie et d'inspiration, en espérant que sa bénédiction m'accompagnera toujours, que dieu la protège et la garde une couronne au dessus de nos têtes.

Amira

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, on se propose de présenter deux fameux théorèmes de mathématiques, il s'agit du théorème de Lusin qui dit que "toute fonction mesurable est presque continue", puis sa généralisation à des fonctions dépendant de deux variables, connue par le théorème de Scorza-Dragoni. Ainsi que le théorème de l'extension continue de Dugundji. Nous allons aussi présenter leurs versions multivoques et terminons par une application aux inclusions différentielles, qui met en exergue l'importance de ces théorèmes, dont les origines remontent aux deux derniers siècles.

En effet, le point de départ pour les extensions continues a commencé par le théorème de H-Tietze (1880-1964), ce théorème dit que toute fonction continue à valeurs réelles, définie sur un fermé d'un espace métrique se prolonge continûment sur tout l'espace. Ce théorème a été généralisé par P. Urysohn (1898-1924) au cas d'un espace normal. Il est maintenant connu sous le nom du théorème de Tietze-Urysohn.

Dans sa version, Dugundji a remplacé l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$, par n'importe quel espace localement convexe.

Le théorème de Scorza-Dragoni [20] a été généralisé au cas des fonctions multivoques dans les travaux de Castaing, Castaing et al et Himmelberg et al ([7], [8] et [17]).

Aussi, une généralisation du théorème de Dugundji [11] au cas multivoque a été réalisée par Benabdallah et al dans la référence [6].

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

1.1 Notations

Tout au long de ce manuscrit on notera par :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

$\mathcal{B}(X)$ la tribu Borélienne sur l'espace topologique X.

$\mathbb{L}(\mathbb{R})$ la tribu sur $\mathbb{R}$ des ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

Soit X un ensemble non vide on notera par :

$\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de tous parties de X.

A^c ou bien $X \backslash A$ le complémentaire de $A \subset X$.

Si on se place dans un espace métrique (X, d_X), on notera par :

$B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$.

$\overline{B}(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$.

B_X la boule ouverte de X de centre 0 et de rayon 1.

$\overline{B}_X$ la boule fermée de X de centre 0 et de rayon 1.

$\mathcal{V}_X(x_0)$ l'ensemble des voisinages du point $x_0 \in X$.

$\overline{A}$ l'adhérence de $A \subset X$.

$\mathring{A}$ l'intérieur de $A \subset X$.

∂A la frontiére de $A \subset X$, définie par $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Soit H un espace de Hilbert, on notera par :

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Le produit scalaire de H.

$\| \cdot \|$ la norme de H.

$\mathbb{1}_B$ La fonction caractéristique de $B \subset H$ définie par

$$\mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ \\ 0 & \text{si } x \notin B. \end{cases}$$

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, on notera par $C([0,T], E)$ l'espace des fonctions continues $u : [0,T] \longrightarrow E$ muni de la norme, $\|u\|_C = \sup\{\|u(t)\| : \ t \in [0,T]\}$.

$L^1([0,T], E)$ l'espace de Banach des fonctions $f : [0,T] \longrightarrow E$ Bochner-Lebesgue-intégrables muni de sa norme habituelle $\|\cdot\|_1$ et $L^\infty([0,T], H)$ son dual topologique, i.e. les fonctions essentiellement bornées muni de sa norme $\|\cdot\|_\infty$

1.2 Quelques notions de mesurabilité

Pour plus de détails sur cette section on peut consulter les références [4], [19].

Définition 1.2.1. ***(Espace mesurable)***

Soit Ω un ensemble non vide. On appelle tribu sur Ω, toute famille Σ de parties de Ω vérifiant

1. *$\emptyset \in \Sigma$;*
2. *Σ est stable par passage au complémentaire, i.e. $\forall A \in \Sigma,\ A^c \in \Sigma$;*
3. *Σ est stable par union dénombrable, i.e. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.*

- *Le couple (Ω, Σ) est appelé espace mesurable.*
- *Les éléments de Σ sont appelés parties Σ-mesurables.*

Définition 1.2.2. ***(Tribu engendrée)***

Soit Ω un ensemble et E une famille de parties de Ω et soit S la famille de toutes les tribus sur Ω contenant E. L'intersection de tous les éléments de S est appelée tribu engendrée par E, en fait c'est la plus petite tribu sur Ω contenant E. On la note souvent par $\sigma_\Omega(E)$ ou bien $\sigma(E)$.

Définition 1.2.3. *Soit (X, Θ_X) un espace topologique. Alors la tribu engendrée par la topologie Θ_X est appelée tribu Borélienne sur X et est notée $\mathcal{B}(X)$.*

Corollaire 1.2.4. *Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces métriques séparables, alors la tribu Borélienne de $X \times Y$ est égale à la tribu Borélienne produit, i.e. $\mathcal{B}(X \times Y) := \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$.*

Définition 1.2.5. ***(Espace mesuré)***

Soit (Ω, Σ) un espace mesurable. On appelle mesure positive sur Ω, toute application $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ vérifiant

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. μ *est σ-additive, i.e. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Σ deux à deux disjoints $(A_n \cap A_m \neq \emptyset \quad \forall n \neq m)$*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

• *Si μ est une mesure positive sur Ω, le triplet (Ω, Σ, μ) est appelé espace mesuré.*

Définition 1.2.6. *Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré.*

On dit que la mesure positive μ est une mesure finie si $\mu(A) < +\infty$, pour tout $A \in \Sigma$.

On dit que μ est σ-finie s'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ telle que $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\mu(A_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.2.7. *Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. Une partie N de Ω est dite μ-négligeable s'il existe un élément $B \in \Sigma$ tel que $N \subset B$ et $\mu(B) = 0$.*

Une partie négligeable n'est pas nécessairement mesurable.

Définition 1.2.8. ***(Propriété vraie μ-presque partout)***

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. On dit qu'une propriété $P(x)$, $x \in \Omega$, est vraie μ-presque partout (μ.p.p) sur Ω si l'ensemble $\{x \in \Omega : \ P(x) \text{ est fausse}\}$ est une partie μ-négligeable de Ω.

Définition 1.2.9. *Un espace mesuré (Ω, Σ, μ) est dit μ-complet si pour tout $A \in \Sigma$ avec $\mu(A) = 0$ et pour tout $F \subset A$, $F \in \Sigma$, i.e. tout ensemble μ-négligeable est mesurable.*

Proposition 1.2.10. ***(Propriétés des mesures positives)***

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. Alors,

1. $\forall A, B \in \Sigma,\ A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$.
2. $\forall A, B \in \Sigma,\ \mu(A) < +\infty,\ A \subset B \Longrightarrow \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.
3. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ \mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Définition 1.2.11. *Soit Ω un ensemble non vide. On dit que l'application $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ est une mesure extérieure sur Ω si et seulement si elle vérifie les propeiétés suivantes*

1. $\nu(\emptyset) = 0$.
2. $\forall A, B \in \Omega,\ A \subset B \Longrightarrow \nu(A) \leqslant \nu(B)$.
3. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega),\ \nu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$.

Définition 1.2.12. *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable et soit $A \subset \Omega$. On dit que A admet un recouvrement dénombrable par les éléments de Σ, s'il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ telle que $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*
Notons par $\mathcal{R}_A$ la famille de tous les recouvrements dénombrables de A par les éléments de Σ, i.e.

$$\mathcal{R}_A = \left\{ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma :\ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right\}.$$

Théorème 1.2.13. *Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. On définit l'application*

$$\begin{aligned} \mu^* : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) :\ (A_n)_n \in \mathcal{R}_A \right\}. \end{aligned}$$

Alors μ^* est une mesure extérieure sur Ω qui prolonge μ à $\mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 1.2.14. ***(La mesure extérieure de Lebesgue)***
Considérons $\mathbb{I} = \Big\{]a, b[:\ a, b \in \mathbb{R} \Big\}$ et soit

$$\begin{aligned} \mathscr{C} : \mathbb{I} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ ]a, b[&\longmapsto \mathscr{C}(]a, b[) = b - a. \end{aligned}$$

On définit la mesure extérieure de Lebesgue qu'on note par λ^*, comme suit

$$\begin{aligned} \lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto \lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \mathscr{C}(I_n) :\ (I_n)_n \subset \mathbb{I}_A \right\} \end{aligned}$$

et $\mathbb{I}_A$ *l'ensemble des recouvrements dénombrables de* A *par les intervalles ouverts de* $\mathbb{R}$*, i.e.*

$$\mathbb{I}_A = \left\{ (I_n)_n \subset \mathbb{I} \ : \ A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \right\}.$$

On peut facilement vérifier que λ^* *est effectivement une mesure extérieure sur* $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.15. ***(Tribu de Lebesgue)***

Posons

$$\mathbb{L}(\mathbb{R}) = \Big\{ E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c), \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \Big\}.$$

Cette partie d'ensembles $\mathbb{L}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *s'appelle tribu de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.16. *La restriction de la mesure extérieure* λ^* *sur* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *à* $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ *est une mesure positive appelée mesure de Lebesgue et est notée* λ*, donc si* $A \in \mathbb{L}(\mathbb{R})$, $\lambda^*(A) = \lambda(A)$.

Proposition 1.2.17. *Soit* A *un ensemble de nombres réels. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un ensemble ouvert* O *contenant* A *pour lequel* $\lambda^*(O \backslash A) < \varepsilon$.

Preuve.

On suppose dans un premier temps que $\lambda^*(A) < +\infty$.

Par Définition 1.2.14, la mesure extérieure de Lebesgue de A est donnée par

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \mathscr{C}(I_n) \ : \ (I_n) \subset \mathbb{I}_A \right\}.$$

Par suite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, (I_n^\varepsilon) \in \mathbb{I}_A \text{ tq } \lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathscr{C}(I_n^\varepsilon) < \lambda^*(A) + \varepsilon. \tag{1.2.1}$$

Posons $O = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} I_n^\varepsilon$. Il est clair que O est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant A. De plus,

$$\lambda^*(O) = \lambda^* \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n^\varepsilon \right).$$

Par la σ-sous additivité de λ^*, on obtient

$$\lambda^*(O) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(I_n^\varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathscr{C}(I_n^\varepsilon). \tag{1.2.2}$$

De (1.2.1) et (1.2.2) il vient que

$$\forall \varepsilon > 0, \lambda^*(O) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathscr{C}(I_n^\varepsilon) < \lambda^*(A) + \varepsilon,$$

et comme $\lambda^*(A) < +\infty$, ceci se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0, \lambda^*(O) - \lambda^*(A) < \varepsilon.$$

et donc $\lambda^*(O \backslash A) = \lambda^*(O) - \lambda^*(A) < \varepsilon \Longrightarrow \lambda^*(O \backslash A) < \varepsilon$.

On suppose maintenant que $\lambda^*(A) = +\infty$.

Sachant que λ^* est σ-finie (puisque $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (]-n, +n[)$ et $\lambda^*(]-n, +n[) = \lambda(]-n, +n[) = 2n < +\infty$) donc pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \exists (A_n)_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}), A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et $\lambda^*(A_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $\lambda^*(A_n) < +\infty$, par la première étape, pour tout $n \geq 1$, il existe un ouvert O_n de $\mathbb{R}$ tel que $A_n \subset O_n$ et $\lambda^*(O_n \backslash A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Posons $O = \bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n$. Nous avons pour tout $n \geq 1$, $A_n \subset O_n \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n$ donc $A \subset O$ et

$$O \backslash A = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \right) \backslash \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} (O_n \backslash A_n)$$

Par la monotonie de λ^*

$$\lambda^*(O \backslash A) \leqslant \lambda^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (O_n \backslash A_n))$$

et par la σ-sous additivité de λ^*

$$\lambda^*(O \backslash A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(O_n \backslash A_n) < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé un ouvert O de $\mathbb{R}$ contenant A tel que $\lambda^*(O \backslash A) < \varepsilon$.

■

Définition 1.2.18. *Soit Ω un espace topologique de Hausdorff. Une mesure de Radon est une mesure positive $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ tel que*

$\forall t \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert de t de mesure finie.

$\forall A \in \mathcal{B}(\Omega), \quad \mu(A) = \sup\{\mu(K) : \; K \, compact, \; K \subset A\}$.

Corollaire 1.2.19. *Une mesure de Radon est une mesure finie sur tout compact de Ω.*

Remarque 1.2.20. *La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est une mesure de Radon.*

Définition 1.2.21. *Soient* (Ω_1, Σ_1) *et* (Ω_2, Σ_2) *deux espaces mesurables. Une fonction* f : $(\Omega_1, \Sigma_1) \longrightarrow (\Omega_2, \Sigma_2)$ *est dite mesurable si l'image réciproque de tout élément de* Σ_2 *par* f *appartient a* Σ_1*, i.e.*

$$\forall B \in \Sigma_2,\ f^{-1}(B) \in \Sigma_1.$$

Proposition 1.2.22. ***(Mesurabilité et tribu engendrée)***
Soit $f : (\Omega_1, \Sigma_1) \longrightarrow (\Omega_2, \Sigma_2)$*. Si* Σ_2 *est une tribu engendrée par une famille de parties* $\mathcal{A}_2$ *de* Ω_2 *(i.e.* $\Sigma_2 = \sigma(\mathcal{A}_2)$*), alors* f *est mesurable ssi l'image réciproque de tout élément de* $\mathcal{A}_2$ *appartient a* Σ_1*, i.e.*

$$\forall\, B \in \mathcal{A}_2,\ f^{-1}(B) \in \Sigma_1.$$

1.3 Quelques rappels de topologie

Pour plus de détails sur cette section on peut consulter les références [13], [14], [16].

Définition 1.3.1. *Un espace topologique* (X, Θ_X) *est dit séparable s'il existe une partie* A *au plus dénombrable partout dense dans* X*.*

Définition 1.3.2. *Un espace topologique* (X, Θ_X) *est dit séparé ou de Hausdorff si, pour tous* $x_1, x_2 \in X$*,* $x_1 \neq x_2$*, il existe* $V_1 \in \mathcal{V}_X(x_1)$ *et* $V_2 \in \mathcal{V}_X(x_2)$ *tels que* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$*.*

Proposition 1.3.3. *Tout produit fini d'espaces métriques séparables est séparable.*

Définition 1.3.4. *Soit* (X, Θ_X) *un espace topologique et* $B \subset \Theta_X$*. On dit que* B *est une base d'ouverts de* X*, ou base de la topologie* Θ_X*, si tout ouvert non vide de* X *est réunion d'ouverts appartenant à* B*.*

Définition 1.3.5. *Soit* (X, Θ_X) *un espace topologique et* $x \in X$*. On appelle système fondamental de voisinages de* x*, ou base de voisinages de* x*, toute famille* $B(x)$ *de voisinages de* x *telle que pour tout autre voisinage* V *de* x*, il existe* $W \in B(x)$ *tel que* $W \subset V$*.*
Notons que si $B(x)$ *est une base de voisinages de* x*, alors*

$$\mathcal{V}(x) = \Big\{ V \subset X : \ \ \textit{il existe } W \in B(x) \textit{ tq } W \subset V \Big\}\,.$$

Autrement dit, $\mathcal{V}(x)$ *est l'ensemble des parties de* X *contenant un élément de* $B(x)$*.*

Proposition 1.3.6. *Soit (X, Θ_X) un espace topologique et $B \subset \Theta_X$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *B est une base d'ouverts de X.*
2. *Pour tout $x \in X$, la famille $\{U \in B : \ x \in U\}$ est une base de voisinages de x.*

Lemme 1.3.7. *L'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle admet une base dénombrable d'ouverts.*

Preuve.

Soit B l'ensemble des intervalles ouverts d'extrémités rationnelles, i.e.

$$B = \Big\{]a, b[: \ a, b \in \mathbb{Q} \text{ et } a < b \Big\}.$$

Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable alors B l'est aussi.

Pour montrer que B est une base d'ouverts de $\mathbb{R}$, en utilisant Proposition 1.3.6, il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la famille $\Big\{U \in B : \ x \in U\Big\}$ est une base de voisinages de x.

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que $\Big\{U \in B : \ x \in U\Big\}$ est une base de voisinages de x. En effet, soit $V =]a, b[\in B$ tq $x \in V$. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(x_n)_{n \geqslant 1} \subset \mathbb{Q} \cap]a, b[$ tel que $(x_n)_n$ converge vers $x \ \ \Rightarrow |x_n - x| < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n + \frac{1}{n} < x < x_n - \frac{1}{n}$ pour tout n assez grand.

Posons $p_n = x_n + \frac{1}{n}$ et $q_n = x_n - \frac{1}{n}$, alors $x \in]p_n, q_n[$ et $]p_n, q_n[\in B$.

Montrons que $]p_n, q_n[\subset]a, b[$. On sait que $x_n \in]a, b[\Rightarrow a < x_n < b$. Pour n assez grand on a

$$\begin{cases} x_n + \frac{1}{n} < b \\ \\ x_n - \frac{1}{n} > a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_n < b - \frac{1}{n} \\ \\ x_n > a + \frac{1}{n} \end{cases}$$

comme $p_n = x_n + \frac{1}{n}$ et $q_n = x_n - \frac{1}{n}$, alors $p_n < b$ et $q_n > a$, ceci signifie que $]p_n, q_n[\subset]a, b[= V$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la famille $\Big\{U \in B : \ x \in U\Big\}$ est une base de voisinages de x. D'où B est une base d'ouverts de $\mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Définition 1.3.8. *Soit (X, Θ_X) un espace topologique et $A \subset X$. On appelle topologie induite ou trace sur A par Θ_X, qu'on note Θ_A la topologie définie sur A par*

$$\Theta_A = \Big\{ V = O \cap A : O \in \Theta_X \Big\} \cdot$$

Le couple (A, Θ_A) *est appelé sous espace topologique de* (X, Θ_X).

L'ensemble $V = O \cap A$ *s'appelle trace de* O *sur* A.

Proposition 1.3.9. *Soit* (X, Θ_X) *un espace topologique et* $A \subset X$. *Soit* $x_0 \in A$, *les voisinages de* x_0 *dans* A *sont les ensemble de la forme* $V = W \cap A$ *où* W *est un voisinage de* x_0 *dans* X.

Définition 1.3.10. *Soit* (X, Θ_X) *un espace topologique, on dit que* X *est compact si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous recouvrement finie, i.e. pour tout* $(\Theta_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \Theta_X$, $X = \bigcup\limits_{\alpha\in I} \Theta_\alpha$, *il existe* $J \in I$, J *fini et* $X = \bigcup\limits_{\alpha\in J} \Theta_\alpha$.

Proposition 1.3.11. *[19] Tout espace métrique compact est séparable.*

Définition 1.3.12. ***(Suites extraites)***

Si X *est un ensemble quelconque, une suite d'éléments de* X *est une application* $u : \mathbb{N} \longrightarrow X$. *On note* $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$. *Etant donnée une suite* u *d'éléments de* X, *une sous suite (ou suite extraite) de* u *est une suite* v *de la forme* $v = u \circ \varphi$ *où* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante.* φ *est donc une suite strictement croissante d'entiers naturels. Si on note* $n_k = \varphi(k)$, *on a* $v_k = u_{\varphi(k)} = u_{n_k}$. *Toute sous suite d'une sous suite de* u *est une sous suite de* u.

Définition 1.3.13. *Soit* (X, d_X) *un espace métrique.*

La distance d'un point $x \in X$ *au sous ensemble* $A \subset X$, *est définie par*

$$d(x, A) := \inf\{d_X(x, a) : \; a \in A\}.$$

Si A *et* B *sont deux parties non vides de* X, *on appelle distance entre* A *et* B *la quantité*

$$d(A, B) := \inf\{d_X(a, b) : \; a \in A, b \in B\}.$$

Le diamètre de A *est le nombre* $\delta(A)$ *défini par*

$$\delta(A) := \sup\{d_X(x, y) : \; x \in A, y \in A\}.$$

Théorème 1.3.14. ***(Bolzano-Weirstrass)***

Soit (X, d_X) *un espace métrique. Alors les propriétés suivantes sont équivalents*

1. *(X, d_X) est compact ;*
2. *de toute suite de points de (X, d_X) on peut extraire une sous suite qui converge dans X.*

Proposition 1.3.15. *Soient (X, d_X) un espace métrique, A une partie de X. Alors*

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(x, A) = 0 \Longleftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A \text{ tel que } \lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Définition 1.3.16. *Soient $(X, \Theta_X), (Y, \Theta_Y)$ deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$. On dit que f est continue au point $x_0 \in X$ si,*

$$\forall W \in \mathcal{V}_Y(f(x_0)),\ \exists V \in \mathcal{V}_X(x_0) \text{ tel que } f(V) \subset W.$$

On dit que f est continue sur X ssi elle est continue en tout point de X.

Théorème 1.3.17. ***(Caractérisation de la continuité)***
Soient (X, Θ_X), (Y, Θ_Y) deux espaces topologiques, $f : X \longrightarrow Y$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *f est continue sur X.*
2. *L'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X.*
3. *L'image réciproque par f de tout fermé de Y est un fermé de X.*

Définition 1.3.18. *[18] Soient (X, Θ_X), (Y, Θ_Y) deux espaces topologiques et (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. On dit que $f : \Omega \times X \to Y$ est une application de Carathéodory si*

1. *$f(\cdot, x)$ est mesurable pour tout $x \in X$.*
2. *$f(t, \cdot)$ est continue pour tout $t \in \Omega$.*

Théorème 1.3.19. *Soit f une fonction réelle continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors*

1. *$f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (de même nature que I).*
2. *La fonction f admet une fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$.*
3. *La fonction f^{-1} est continue et strictement monotone (de même type que f).*

Définition 1.3.20. *Soient* (X, Θ_X) *un espace topologique,* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. *On appelle support de* f *l'ensemble noté Supp*(f) *et défini par*

$$Supp(f) = \overline{\{x \in X : \ f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.3.21. *[12] Soit* (X, Θ_X) *un espace topologique et soient* $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(V_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ *deux recouvrements de* X. *On dit que* $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *est un raffinement de* $(V_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ *si pour tout* $\lambda \in \Lambda$, *il existe un* $\alpha \in \Omega$ *tel que* $U_\lambda \subset V_\alpha$ *et on écrit* $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset (V_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$.

Définition 1.3.22. *[6] Soit* (X, Θ_X) *un espace topologique. Un recouvrement ouvert* $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *de* X *est dit localement fini si pour tout* $x \in X$, *il existe un voisinage* V *de* x *ne rencontrant qu'un nombre fini des* U_λ, *i.e. l'ensemble* $\Big\{\lambda \in \Lambda : \ U_\lambda \cap V \neq \emptyset\Big\}$ *est fini.*

Définition 1.3.23. *[1]* ***(Espace paracompact)***
Un espace topologique (X, Θ_X) *est dit paracompact s'il est séparé et tout recouvrement ouvert admet un raffinement ouvert localement fini.*

Théorème 1.3.24. *[12] (**A.H. Stone**)*
Tout espace métrique est un espace paracompact.

Définition 1.3.25. *[6] Soit* (X, Θ_X) *un espace topologique paracompact et* $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *un recouvrement ouvert de* X. *On appelle partition continue de l'unité toute famille* $\Big\{f_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\Big\}$ *de fonctions continues définies sur* X *à valeurs dans* $[0, 1]$ *vérifiant*

1. *Supp*$(f_\lambda) \subset U_\lambda$.
2. *Au voisinage de chaque point de* X, *il n'y a qu'un nombre fini de fonctions* f_λ *non nulles.*
3. $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) = 1, \ \forall\, x \in X$ *(cette somme est en fait finie).*

Proposition 1.3.26. *Soit* (X, d_X) *un espace métrique et soit* A *un sous-ensemble non vide de* X. *Alors l'application* $x \longmapsto d(x, A)$ *est lipshitzienne de constante 1, i.e. est une contraction.*

Preuve.

Soient $x, y \in X$ et soit $z \in A$. Nous avons d'une part,

$$\begin{aligned} d_X(x,z) \leqslant d_X(x,y) + d_X(y,z) &\Rightarrow \inf_{z\in A} d_X(x,z) \leqslant d_X(x,y) + \inf_{z\in A} d_X(y,z) \\ &\Rightarrow d(x,A) \leqslant d_X(x,y) + d(y,A). \end{aligned}$$

D'où

$$d(x,A) - d(y,A) \leqslant d_X(x,y). \tag{1.3.1}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} d_X(y,z) \leqslant d_X(y,x) + d_X(x,z) &\Rightarrow \inf_{z\in A} d_X(y,z) \leqslant d_X(x,y) + \inf_{z\in A} d_X(x,z) \\ &\Rightarrow d(y,A) \leqslant d_X(x,y) + d(x,A). \end{aligned}$$

D'où

$$d(y,A) - d(x,A) \leqslant d_X(x,y). \tag{1.3.2}$$

De (1.3.1) et (1.3.2) on obtient $|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d_X(x,y)$. D'où le résultat.

■

1.4 Quelques rappels de convexité

Pour plus de détails sur cette section consulter [1], [5] et [13].

Dans cette sous section, X est un espace vectoriel topologique.

Définition 1.4.1. *On dit qu'un ensemble $A \subset X$ est convexe ssi pour tous $x, y \in A$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A.$$

Proposition 1.4.2. *Soit A un sous ensemble convexe de X et α, β deux réels positifs. Alors*

1. *$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.*
2. *Si $0 \in A$ et $\alpha \leqslant \beta$ alors $\alpha A \subset \beta A$.*

Définition 1.4.3. *On dit que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est une combinaison convexe des points $x_1, \cdots, x_n$ de X, si $\lambda_i \geqslant 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$, et $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.*

Proposition 1.4.4. *Soit A un sous ensemble convexe de X. Alors A contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.*

Définition 1.4.5. *On dit que X est un espace localement convexe, si tout point de X admet un système de voisinages d'ensembles convexes.*

Définition 1.4.6. *L'enveloppe convexe de A, notée $co(A)$, est l'intersection de tous les sous- ensembles convexes de X contenant A. C'est le plus petit sous-ensemble convexe de X contenant A.*

Définition 1.4.7. *L'enveloppe convexe fermée de A, notée $\overline{co}(A)$, est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes fermées de X contenant A. C'est le plus petit sous-ensemble convexe fermé de X contenant A.*

Théorème 1.4.8. *Soit $A \subset X$. Alors,*

$$co(A) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i : \ k \in \{1, 2, \cdots\}, (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant k+1} \in \Delta_{k+1}, \ x_i \in A, \ \forall i = 1, \cdots, k+1 \right\},$$

où Δ_k est défini par

$$\Delta_k = \left\{ (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, \ \lambda_i \geqslant 0, \ \forall i = 1, \cdots, k \ et \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.4.9. *On dit qu'un ensemble χ est un espace affine s'il existe un espace vectoriel E et une application de $\chi \times E$ dans χ qui au point $a \in \chi$ et au vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ associe un point de χ noté $a + \overrightarrow{u}$ tel que*
$\forall a \in \chi$, $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, $(a + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = a + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$.
$\forall a, b \in \chi$, il existe $\overrightarrow{u} \in E$, tel que $a + \overrightarrow{u} = b$.

Définition 1.4.10. *[12] Un espace affine L de type "m" est un espace qui satisfait la propriété "m" suivante. Pour chaque espace métrique (X, d_X), pour toute fonction continue $f : X \longrightarrow L$ et $x \in X$, et pour tout voisinage W de $f(x)$, il existe un voisinage U de x et un certain ensemble convexe $C \subset L$ tel que $f(U) \subset C \subset W$. Cette classe d'espaces affines comprend tous les espaces vectoriels localement convexes.*

1.5 Polytopes et $\mathcal{CW}$ topologie

Définition 1.5.1. *Une n-cellule σ est un ensemble de points dont l'intérieur est homéomorphe au disque à n dimension $D^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\right\}$ avec la propriété supplémentaire que sa frontière doit être divisée en un nombre fini de cellules de dimension inférieure à celle de σ, appelée face de la n-cellule σ, i.e. $\tau < \sigma \iff \tau$ est une face de σ.*

Définition 1.5.2. *[10] (**m-simplexe**)*

Si $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ sont des points affinement indépendants (c-à-d $x_2-x_1, x_3-x_1, \cdots, x_{m+1}-x_1$ sont linéairement indépendants), alors l'enveloppe convexe de $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$est appelée m-simplexe (ou bien cellule d'ordre m) avec les sommets $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ et est notée σ ou σ_m, i.e.

$$\sigma = \left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : (\lambda_0, \cdots, \lambda_m) \in \Delta_{m+1}\right\}.$$

Exemple 1.5.3.

1. *0-simplexe est un point.*
2. *1-simplexe est un segment de droite $\sigma = AB, A < \sigma, B < \sigma$.*
3. *2-simplexe est un polygône (généralement un triangle) tel que $\sigma =\triangle\ ABC$, AB, BC, $AC<\sigma$ $A, B, C < \sigma$(car $A < AB$).*
4. *3-simplexe est un polyèdre (généralement un tétraèdre) avec polygônes, arrêtes et semmets comme faces.*

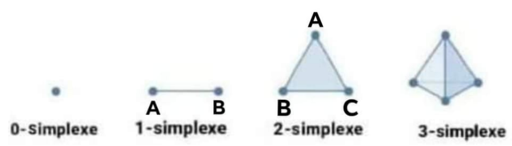

FIGURE 1.1 – Exemples de m-simplexes

Définition 1.5.4. *[11] (**Polytope**)*

Un polytope P est un ensemble de points composé d'une collection arbitraire de cellules euclidiennes fermées satisfaisant

1. *chaque face d'une cellule de la collection est elle-même une cellule de la collection ;*
2. *l'intersection de deux cellules fermées quelconques de P est une face des deux.*

Définition 1.5.5. *[11] Soit P un polytope. La $\mathcal{CW}$ topologie sur P est la topologie constituée des ensembles U qui sont ouverts si et seulement si $U \cap \bar{\sigma}$ est un ouvert par rapport à la topologie Euclidienne de $\bar{\sigma}$, pour toute cellule fermée $\bar{\sigma}$ de P.*

Définition 1.5.6. *[11] On appelle Star d'une cellule σ qu'on note Star(σ), la famille de toutes les cellules ouvertes ayant σ comme face.*

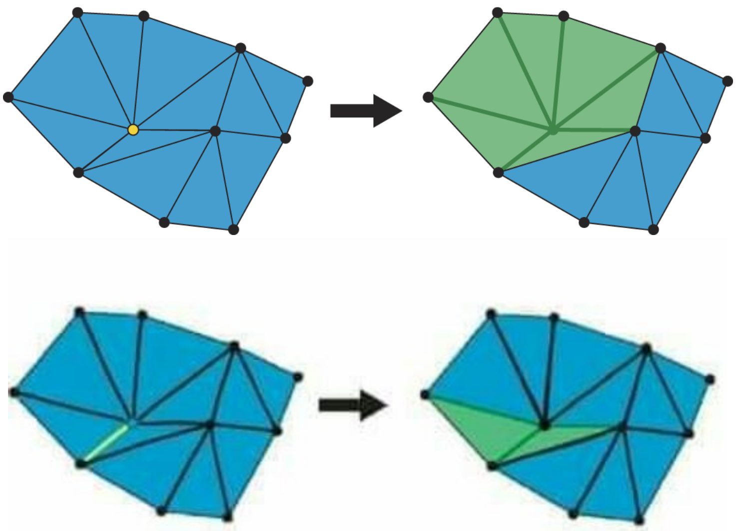

FIGURE 1.2 – Star d'une cellule (représentée à droite en vert)

Remarque 1.5.7. *Star(σ) est un ouvert par rapport à la topologie $\mathcal{CW}$.*

Définition 1.5.8. *[11] **(Nerf d'un recouvrement)***
Soit (X, Θ_X) un espace topologique et $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert de X. Soit R un espace vectoriel engendré par des vecteurs linéairement indépendants $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, les éléments de R vont être appelés points. Les $n+1$ point $p_{\lambda_0}, \cdots, p_{\lambda n}$ déterminent une n-cellule si et seulement si les ensembles correspondants satisfont $U_{\lambda_1} \cap \cdots \cap U_{\lambda_n} \neq \emptyset$. Le polytope ainsi déterminé, muni de la topologie $\mathcal{CW}$, sera appelé le nerf du recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et sera noté $\mathcal{N}((U_\lambda)_\lambda)$.

CHAPITRE 2

THÉORÈME DE LUSIN ET THÉORÈME DE DUGUNDJI UNIVOQUES

Le résultat suivant concerne le théorème de Lusin qui dit que toute fonction réelle mesurable est continue sur une grande partie de son domaine de définition.

2.1 Théorème de Lusin

Théorème 2.1.1. *[15]*

Soit E un sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, i.e. $E \in \mathbb{L}(\mathbb{R})$ et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $F_\varepsilon \subset E$ de mesure de Lebesgue $\lambda(F_\varepsilon) < \varepsilon$ tel que $g = f_{|(E\setminus F_\varepsilon)}$ est continue (g est la restriction de f à $E\setminus F_\varepsilon$).

Preuve.

D'après Lemme 1.3.7, $\mathbb{R}$ admet une base topologique dénombrable d'ouverts. Choisissons alors une base dénombrable $\{U_j\}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$. D'après Définition 1.2.21, on a pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(U_j) \in \mathbb{L}(E)$, i.e. $f^{-1}(U_j)$ est un sous ensemble mesurable de E. D'après Proposition 1.2.17, il existe B_j un ouvert de E contenant $f^{-1}(U_j)$ et pour tout $\delta > 0$, $\lambda(B_j\setminus f^{-1}(U_j)) < \delta$, en particulier pour $\delta = \frac{\varepsilon}{2^j}$ $(\varepsilon > 0)$, i.e. pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe B_j ouvert de E tq

$f^{-1}(U_j) \subset B_j$ et $\lambda(B_j \backslash f^{-1}(U_j)) < \frac{\varepsilon}{2^j}\cdot$ Posons $F_\varepsilon = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (B_j \backslash f^{-1}(U_j))$ alors

$$\lambda(F_\varepsilon) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (B_j \backslash f^{-1}(U_j))\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j \backslash f^{-1}(U_j)) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $F_\varepsilon \subset E$ tq $\lambda(F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Montrons que $g = f_{|(E\backslash F_\varepsilon)}$ est continue

Commençons par montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $g^{-1}(U_j) = B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon)$.

Dans un premier lieu, montrons que $g^{-1}(U_j) = f^{-1}(U_j) \cap (E \backslash F_\varepsilon)$.

(i) $g^{-1}(U_j) \subset f^{-1}(U_j) \cap (E \backslash F_\varepsilon)$.

Soit $x \in g^{-1}(U_j) \Longleftrightarrow g(x) \in U_j$. Comme $g^{-1}(U_j) \subset E \backslash F_\varepsilon$ donc $x \in E \backslash F_\varepsilon \Longrightarrow f(x) = g(x)$ $\Longrightarrow f(x) \in U_j \Longrightarrow x \in f^{-1}(U_j)$. Par suite, $x \in f^{-1}(U_j) \cap (E \backslash F_\varepsilon)$. D'où l'inclusion (i)

(ii) $f^{-1}(U_j) \cap (E \backslash F_\varepsilon) \subset g^{-1}(U_j)$.

Soit $x \in f^{-1}(U_j) \cap (E \backslash F_\varepsilon) \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(U_j)$ et $x \in (E \backslash F_\varepsilon) \Longleftrightarrow f(x) \in U_j$ et $x \in (E \backslash F_\varepsilon) \Longrightarrow$ $f(x) = g(x) \Longrightarrow g(x) \in U_j \Longrightarrow x \in g^{-1}(U_j)$. D'où l'inclusion (ii). Ceci montre l'égalité.

Montrons l'égalité $g^{-1}(U_j) = B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon) \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

(1) $g^{-1}(U_j) \subset B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon)$.

On a $f^{-1}(U_j) \subset B_j \Rightarrow f^{-1}(U_j) \cap (E \backslash F_\varepsilon) \subset B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon)$. Donc $g^{-1}(U_j) \subset B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon)$.

(2) $B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon) \subset g^{-1}(U_j)$.

On a $B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon) = B_j \cap \left(E \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (B_k \backslash f^{-1}(U_k))\right)$

Remarquons que $\left(E \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (B_k \backslash f^{-1}(U_k))\right) \subset (E \backslash (B_k \backslash f^{-1}(U_k)))$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En effet, soit $y \in \left(E \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (B_k \backslash f^{-1}(U_k))\right) \Longrightarrow y \in E$ et $y \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (B_k \backslash f^{-1}(U_k)) \Longrightarrow y \in E$ et $y \notin (B_k \backslash f^{-1}(U_k))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $y \in E \backslash (B_k \backslash f^{-1}(U_k))$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Alors $\left(E \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{B_k \backslash f^{-1}(U_k)\}\right) \subset (E \backslash (B_k \backslash f^{-1}(U_k)))$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par suite,

$$\begin{aligned} B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon) &= B_j \cap \left(E \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} (B_j \backslash f^{-1}(U_j))\right) \text{pour tout } j \in \mathbb{N}. \\ &\subset B_j \cap (E \backslash (B_j \backslash f^{-1}(U_j))) \end{aligned}$$

et comme

$$E \backslash (B_j \backslash f^{-1}(U_j)) = E \cap (B_j \backslash f^{-1}(U_j))^c$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon) &\subset B_j \cap E \cap (B_j \backslash f^{-1}(U_j))^c \\
&= (B_j \cap E) \cap (B_j \cap (f^{-1}(U_j))^c)^c \\
&= (B_j \cap E) \cap ((B_j)^c \cup ((f^{-1}(U_j))^c)^c \\
&= (B_j \cap E) \cap ((B_j)^c \cup f^{-1}(U_j)) \\
&= (B_j \cap E \cap (B_j)^c) \cup (E \cap B_j \cap f^{-1}(U_j)) \\
&= \emptyset \cup (E \cap B_j \cap f^{-1}(U_j)) \\
&= E \cap B_j \cap f^{-1}(U_j)
\end{aligned}$$

D'où

$$B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon) \subset E \cap B_j \cap f^{-1}(U_j) \subset f^{-1}(U_j).$$

car $f^{-1}(U_j) \subset B_j$ et $f^{-1}(U_j) \subset E$.

Il vient que, $B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon) \subset f^{-1}(U_j) \cap (E \backslash F_\varepsilon)$, i.e. $B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon) \subset g^{-1}(U_j)$.

Par (1) et (2) on obtient

$$g^{-1}(U_j) = (E \backslash F_\varepsilon) \cap B_j. \tag{2.1.1}$$

Revenons maintenant à la continuité de g. On va montrer que pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$, $g^{-1}(U)$ est un ouvert de $(E \backslash F_\varepsilon)$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$. Par suite, $g^{-1}(U) = g^{-1}(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} g^{-1}(U_j)$, par l'égalité (2.1.1), $g^{-1}(U) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \cap (E \backslash F_\varepsilon)$ qui est un ouvert de $E \backslash F_\varepsilon$ puisque $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ par Définition 1.3.8 de la topologie trace. D'où la continuité de g. Ceci termine la démonstration.

■

Sachant qu'un espace métrique compact admet une base dénombrable d'ouverts, alors en utilisant les mêmes arguments dans la preuve du théorème précédent, on a le résultat suivant.

Théorème 2.1.2. *Soit (Ω, d_Ω) un espace métrique compact et (Ω, Σ, μ) un espace mesuré positif de Radon. Alors, pour toute fonction $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $\mu(\Omega \backslash T_\varepsilon) < \varepsilon$ et $\varphi_{|T_\varepsilon}$ est continue (i.e., la restriction de φ à T_ε est continue).*

2.2 Théorème de Dugundji

Le résultat suivant concerne l'extension continue d'une application définie sur une partie fermée de l'espace à l'espace tout entier. Ce Théorème est dû à James Dugundji.
Pour ce but nous avons besoin du

Lemme 2.2.1. *[11] Soient (X, d_X) un espace métrique, A un sous ensemble fermé de X. Alors il existe un recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de $X\backslash A$ tel que*

1. *$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est localement fini.*
2. *Pour tout point $a \in A$ et pour tout voisinage W de a, il existe un voisinage V de a, $V \subset W$ et tel que $U_\lambda \cap V \neq \emptyset \Rightarrow U_\lambda \subset W$.*

Un tel recouvrement de $X\backslash A$ est appelé recouvrement canonique.

Preuve.
1. Montrons qu'il existe un recouvrement de $X\backslash A$ qui est localement fini. En effet, soit $x \in X\backslash A \iff x \notin A \iff x \notin \overline{A} \iff d(x, A) > 0$ (voir Proposition 1.3.15).
Choisissons un $r(x)$ tel que $0 < r(x) < \frac{1}{3}d(x, A)$ et posons

$$B_x := B(x, r(x)) = \{y \in X : \ d_X(x, y) < r(x)\}.$$

Il est clair que la famille $\{B_x : \ x \in X\backslash A\}$ est un recouvrement de $X\backslash A$ car

$$X\backslash A = \bigcup_{x\in X\backslash A} \{x\} \subset \bigcup_{x\in X\backslash A} B_x.$$

L'espace $X\backslash A$ est un espace paracompact d'après Théorème 1.3.24. Par Définition 1.3.23, la famille $\{B_x : \ x \in X\backslash A\}$ admet un raffinement ouvert localement fini. Ceci signifie qu'il existe un recouvrement ouvert de $X\backslash A$ qui est localement fini, que nous allons noté $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
2. Soit $a \in A$ et $W \in \mathcal{V}_X(a) \Longrightarrow \exists r'(a) > 0$ tel que $B(a, r'(a)) \subset W$.
Posons $r(a) = \frac{r'(a)}{3}$, i.e. $B(a, 3r(a)) \subset W$. Soit $V = B(a, r(a))$. Clairement $V \subset W$. On a $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un raffinement de $\{B_x : \ x \in X\backslash A\}$, par Définition 1.3.21, pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe $x \in X\backslash A$ tq $U_\lambda \subset B_x$.
On va démontrer que si $U_\lambda \cap V \neq \emptyset$ alors $U_\lambda \subset W$. En effet, soit $y \in U_\lambda$, alors $y \in B_x$ et donc

$$d_X(x, y) < r(x) < \frac{1}{3}d(x, A) < \frac{1}{2}d(x, A). \tag{2.2.1}$$

Soit $z \in U_\lambda \cap V$, i.e. $z \in U_\lambda$ et $z \in B(a, r(a))$, d'où

$$\begin{cases} z \in U_\lambda \Rightarrow d_X(x,z) < \frac{1}{2}d(x,A) \\ \\ z \in B(a,r(a)) \Rightarrow d_X(z,a) < r(a). \end{cases} \tag{2.2.2}$$

D'autre part, on sait que $d(x,A) < 2r(a)$ car si on suppose le contraire ($d(x,A) \geqslant 2r(a)$) on aura en utilisant (2.2.2),

$$\begin{aligned} d_X(x,a) \leqslant d_X(x,z) + d_X(z,a) &< \frac{1}{2}d(x,A) + r(a) \\ &< \frac{1}{2}d(x,A) + \frac{1}{2}d(x,A) = d(x,A), \end{aligned}$$

et ceci est en contradiction avec le fait que $a \in A$ et $d(x,A) = \inf_{b \in A} d_X(x,b)$. Alors par les relations (2.2.2) et (2.2.1), il vient que

$$\begin{aligned} d_X(y,a) &\leqslant d_X(y,z) + d_X(z,a) \\ &\leqslant d_X(y,x) + d_X(x,z) + d_X(z,a) \\ &< \frac{1}{2}d(x,A) + \frac{1}{2}d(x,A) + r(a) \\ &= d(x,A) + r(a) < 2r(a) + r(a) = 3r(a). \end{aligned}$$

Par suite $y \in B(a, 3r(a)) \subset W$. D'où le résultat.

■

Pour la preuve du résultat principal nous avons aussi besoin du

Théorème 2.2.2. *[11] Soient $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un recouvrement ouvert localement fini de l'espace métrique (X, d_X), $\mathcal{N}((U_\lambda)_\lambda)$ le nerf de $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Alors il existe une fonction continue $G : X \longrightarrow \mathcal{N}((U_\lambda)_\lambda)$ tel que $G^{-1}(Star(p_\lambda)) \subset U_\lambda$ pour chaque $\lambda \in \Lambda$.*

Preuve.

Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on définit l'application

$$\begin{aligned} K_\lambda : X &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto K_\lambda(x) = \frac{d(x, X \backslash U_\lambda)}{\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} d(x, X \backslash U_\lambda)}. \end{aligned}$$

Remarquons que $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} d(x, X\backslash U_\lambda)$ est une somme finie non nulle car $d(x, X\backslash U_\lambda) \neq 0 \Longleftrightarrow x \in U_\lambda$. En effet, sachant que U_λ est ouvert et donc $X\backslash U_\lambda$ est fermé, il est clair que

$$d(x, X\backslash U_\lambda) \neq 0 \Longleftrightarrow x \notin \overline{X\backslash U_\lambda} \Longleftrightarrow x \notin X\backslash U_\lambda \Longleftrightarrow x \in U_\lambda.$$

Ce recouvrement étant localement fini, par Définition 1.3.22, choisissons un voisinage de x dans X, noté V, tel que l'ensemble $\{\lambda \in \Lambda : U_\lambda \cap V \neq \emptyset\}$ est fini, disons égal à Λ_x=$\{\lambda_0, \cdots, \lambda_n\}$, donc comme $X \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, alors $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda_x} U_\lambda$, i.e. $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_x} d(x, X\backslash U_\lambda) \neq 0 \ \forall x \in X$. De plus,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} d(x, X\backslash U_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda_x} d(x, X\backslash U_\lambda) = \sum_{i=0}^{n} d(x, X\backslash U_{\lambda_i}) \ \forall x \in X. \tag{2.2.3}$$

Ceci signifie que cette somme est finie non nulle. Par suite la fonction $K_\lambda(\cdot)$ est bien définie. De plus, on a d'après Proposition 1.3.26, $x \longmapsto d(x, X\backslash U_\lambda)$ est continue, et la somme finie de fonctions continues est continue alors $K_\lambda(\cdot)$ est continue.

Vérifions maintenant que la famille $\{K_\lambda(\cdot) : \lambda \in \Lambda\}$ satisfait les 3 propriétés de la Définition 1.3.25. Nous avons $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda(x) = 1$, pour tout $x \in X$. En effet, d'après (2.2.3)

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{d(x, X\backslash U_\lambda)}{\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} d(x, X\backslash U_\lambda)} = \frac{\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} d(x, X\backslash U_\lambda)}{\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} d(x, X\backslash U_\lambda)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} d(x, X\backslash U_{\lambda_i})}{\sum\limits_{i=0}^{n} d(x, X\backslash U_{\lambda_i})} = 1.$$

D'autre part, $\mathrm{Supp}(K_\lambda) \subset U_\lambda$. En effet,

$$\begin{aligned} Supp(K_\lambda) &= \overline{\{x \in X : \ K_\lambda(x) \neq 0\}} \\ &= \overline{\{x \in X : \ d(x, X\backslash U_\lambda) \neq 0\}} \\ &\subset \{x \in X : \ x \in U_\lambda\} = U_\lambda, \end{aligned}$$

quittre à prendre un autre recouvrement ouvert (U'_λ) tel que $\overline{U'_\lambda} \subset U_\lambda$.

Enfin, on sait qu'au voisinage V de tout point $x \in X$, il n'y a qu'un nombre fini de fonctions K_λ non nulles, puisque $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est localement fini, i.e. $\{\lambda \in \Lambda : \ V \cap U_\lambda \neq \emptyset\}$ est fini, donc $x \in U_\lambda$ pour un nombre fini d'indices λ, alors $K_\lambda(x) \neq 0$ pour un nombre fini d'indices λ, ceci signifie que $\Lambda' = \{\lambda \in \Lambda : \ K_\lambda(x) \neq 0\}$ est fini. On conclut que $\{K_\lambda(\cdot) : \ \lambda \in \Lambda\}$ est une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Considérons maintenant l'application

$$G : X \longrightarrow \mathcal{N}((U_\lambda)_\lambda)$$
$$x \longmapsto G(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda(x)p_\lambda.$$

Sachant que $K_\lambda(x) = 0$ ssi $x \notin U_\lambda$, il vient que

$$G(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda_x} K_\lambda(x)p_\lambda = \sum_{i=0}^{n} K_{\lambda_i}(x)p_{\lambda_i}.$$

Commençons par montrer que $\boldsymbol{G^{-1}(Star(p_\lambda)) \subset U_\lambda}$.

Soit $\lambda \in \{\lambda_0, \cdots, \lambda_n\}$ et soit $x \in G^{-1}(Star(p_\lambda)) \Longleftrightarrow G(x) \in Star(p_\lambda) \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{n} K_{\lambda_i}(x)p_{\lambda_i} \in Star(p_\lambda)$. Par Définition 1.5.6, $K_\lambda(x) \neq 0 \Longrightarrow x \in U_\lambda$. Donc $G^{-1}(Star(p_\lambda)) \subset U_\lambda$.

Montrons maintenant que $\boldsymbol{G}$ est continue.

Soient $x \in X$, V un voisinage de $G(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda_x} K_\lambda(x)p_\lambda$ dans $\mathcal{N}((U_\lambda)_\lambda)$, il s'en suit que pour toute cellule fermée $\bar{\sigma}$, $V \cap \bar{\sigma}$ est un ouvert de $\bar{\sigma}$ pour la topologie affine de $\bar{\sigma}$ contenant $G(x)$, i.e. $V \cap \bar{\sigma}$ est un voisinage de $G(x)$ pour la topologie affine de $\bar{\sigma}$. En particulier pour $\bar{\sigma} = \{p_{\lambda_0}, \cdots, p_{\lambda_n}\}$, il vient que $V \cap \bar{\sigma} = \sum_{i=0}^{n} W_{\lambda_i}p_{\lambda_i}$ avec $W_{\lambda_i} \in \mathcal{V}_{[0,1]}(K_{\lambda_i}(x))$. Sachant que $K_{\lambda_i}(\cdot)$ est continue, alors pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, il existe $B_{\lambda_i} \in \mathcal{V}_X(x)$ tq $K_{\lambda_i}(B_{\lambda_i}) \subset W_{\lambda_i}$. Posons $B = \bigcap_{i=0}^{n} B_{\lambda_i}$, on obtient $K_{\lambda_i}(B) \subset W_{\lambda_i}$ pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, ceci implique que

$$\sum_{i=0}^{n} K_{\lambda_i}(B)p_{\lambda_i} \subset \sum_{i=0}^{n} W_{\lambda_i}p_{\lambda_i} \Longrightarrow G(B) \subset \sum_{i=0}^{n} W_{\lambda_i}p_{\lambda_i} = V \cap \bar{\sigma},$$

par suite $G(B) \subset V$. On conclut que pour tout voisinage V de $G(x)$ dans $\mathcal{N}((U_\lambda)_\lambda)$, il existe un voisinage B de x tel que $G(B) \subset V$, d'où la continuité de G.

■

Maintenant, nous sommes en mesure d'énoncer et démontrer le résultat principal

Théorème 2.2.3. *[12] **(J. Dugundji, version univoque)***

Soient (X, d_X) un espace métrique, A un sous ensemble fermé de X, L un espace vectoriel localement convexe et $f : A \longrightarrow L$ une application continue. Alors il existe une application continue $F : X \longrightarrow L$ qui prolonge f à X, i.e. $f(x) = F(x)$ $\forall x \in A$. De plus, $F(x) \subset co(f(A))$ pour tout $x \in X$.

Preuve.

On va montrer ce théorème avec L un espace affine de type "m". D'après les résultats du Lemme 2.2.1, la famille $\{B_x : x \in X \backslash A\}$ est un recouvrement ouvert de $X \backslash A$ qui admet un raffinement ouvert localement fini qu'on a noté $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.
Soit $B(A, r(x)) := \{y \in X : d(y, A) < r(x)\}$. Remarquons que si la boule B_x est centrée à l'extérieur de $B(A, 2r(x))$ ($x \notin B(A, 2r(x))$ i.e. $d(x, A) \geqslant 2r(x)$), alors $B_x \cap B(A, r(x)) = \emptyset$. En effet, si on suppose le contraire, $B_x \cap B(A, r(x)) \neq \emptyset$, il existe $y \in B_x$ et $y \in B(A, r(x))$

$$\begin{cases} y \in B_x \Rightarrow d_X(y, x) < r(x) \\ y \in B(A, r(x)) \Rightarrow d(y, A) < r(x), \end{cases}$$

il s'en suit que

$$d(x, A) \leqslant d_X(x, y) + d(y, A) < r(x) + r(x) = 2r(x)$$

ceci contredit le fait que $x \notin B(A, 2r(x))$. Comme $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est un raffinement localement fini de $\{B_x : x \in X \backslash A\}$, alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $x \in X \backslash A$ tel que $U_\lambda \subset B_x$.

$$\begin{aligned} &\text{Si } U_\lambda \cap B(A, r(x)) \neq \emptyset \text{ alors } B_x \cap B(A, r(x)) \neq \emptyset, \\ &\text{ceci signifie que } B_x \text{ est centrée à l'intérieur de } B(A, 2r(x)) \ (x \in B(A, 2r(x))) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Montrons que $d(B_x, A) \geqslant 2r(x) > 0$.

En effet, pour tout $(z, y) \in B_x \times A$, $d_X(x, y) \leqslant d_X(x, z) + d_X(z, y) \Longrightarrow d_X(z, y) \geqslant d_X(x, y) - d_X(x, z)$, comme $r(x) < \frac{1}{3} d(x, A)$ et puisque $y \in A$, il vient que $d_X(z, y) > 3r(x) - d_X(x, z)$, et comme $z \in B_x$, on obtient $d_X(z, y) > 3r(x) - r(x)$ donc $d_X(z, y) > 2r(x)$ pour tout $(z, y) \in B_x \times A$, alors

$$d(B_x, A) \geqslant 2r(x) > 0. \tag{2.2.5}$$

Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, on associe à U_λ un point $a_\lambda \in A$ comme suit :
on a $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est un raffinement de $\Big\{B_x : x \in X \backslash A\Big\}$ alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $x_\lambda \in X \backslash A$ tel que $U_\lambda \subset B_{x_\lambda}$. Par conséquent, $d(B_{x_\lambda}, A) \leqslant d(U_\lambda, A)$ car

$$d(B_{x_\lambda}, A) = \inf_{y \in B_{x_\lambda}} d(y, A) \leqslant \inf_{y \in U_\lambda} d(y, A) = d(U_\lambda, A),$$

d'après (2.2.5)

$$d(B_{x_\lambda}, A) \geqslant 2r(x) > 0 \Rightarrow d(U_\lambda, A) \geqslant 2r(x) > 0$$

et comme

$$d(U_\lambda, A) = \inf_{z \in U_\lambda} d(z, A) \text{ et } x_\lambda \in U_\lambda, \text{ alors } d(x_\lambda, A) > 0.$$

D'autre part, par la caractérisation de la borne inférieure, on a

$\forall \varepsilon > 0, \exists a_\epsilon \in A, d(x_\lambda, A) \leqslant d_X(x_\lambda, a_\varepsilon) < d(x_\lambda, A) + \varepsilon$. En particulier pour $\varepsilon = d(x_\lambda, A)$, il existe $a_\lambda \in A$, tel que $d(x_\lambda, A) \leqslant d_X(x_\lambda, a_\lambda) < d(x_\lambda, A) + d(x_\lambda, A)$. Par suite,

$$\exists a_\lambda \in A, \text{ tel que } d_X(x_\lambda, a_\lambda) < 2d(x_\lambda, A). \tag{2.2.6}$$

Une propriété fondamentale de $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est la suivante :

$\forall\, a \in A, \forall\, W \in \mathcal{V}_X(a), \; \exists\, V \in \mathcal{V}_X(a)$, V $\subset$ W tel que $U_\lambda \cap V \neq \emptyset \Rightarrow (U_\lambda \subset W)$ et $(a_\lambda \in A \cap W)$.

En comparant avec la propriété 2. du Lemme 2.2.1, et comme $a_\lambda \in A$, on voit bien qu'il suffit de montrer que $a_\lambda \in W$. En effet, on peut supposer que $W = B(a, \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$, et posons $V = B(a, \frac{\varepsilon}{12})$.

Si $U_\lambda \cap V \neq \emptyset$, d'après (2.2.4), B_{x_λ} est centrée à l'intérieur de $B(a, \frac{\varepsilon}{6})$, et le diamétre de U_λ $\delta(U_\lambda) \leqslant 2(\frac{\varepsilon}{12}) \Longrightarrow \delta(U_\lambda) \leqslant (\frac{\varepsilon}{6})$, de sorte qu'il soit complètement dans $B(a, \frac{\varepsilon}{4})$, ceci implique que

$$x_\lambda \in B(a, \frac{\varepsilon}{4}) \Longrightarrow d_X(x_\lambda, a) < \frac{\varepsilon}{4} \Longrightarrow d(x_\lambda, A) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.2.7}$$

et

$$d_X(a_\lambda, a) \leqslant d_X(a_\lambda, x_\lambda) + d_X(x_\lambda, a)$$

en utilisant (2.2.6)

$$d_X(a_\lambda, a) \leqslant 2d(x_\lambda, A) + d_X(x_\lambda, a) < 3\frac{\varepsilon}{4}.$$

Par suite, $a_\lambda \in B(a, \frac{3\varepsilon}{4})$ et donc $a_\lambda \in B(a, \varepsilon)$. Ceci implique que $a_\lambda \in W \cap A$.

D'après le résultat du Théorème 2.2.2, on sait que $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est une partition continue de l'unité de $X\backslash A$ subordonnée au recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. On définit alors la fonction F comme suit :

$$F : X \longrightarrow L$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda(x) f(a_\lambda) & \text{si } x \in X\backslash A. \end{cases}$$

Montrons que $F(x) \subset co(f(A))$ pour tout $x \in X$.

1) Si $x \in A$, $f(x) = F(x)$ et donc $F(x) \in f(A) \subset co(f(A))$.

2) Si $x \in X \backslash A$, on sait que $F(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_x} K_\lambda(x) f(a_\lambda)$, comme $a_\lambda \in A$ et $\sum_{\lambda \in \Lambda_x} K_\lambda(x) = 1$, il est clair que $F(x) \in co(f(A))$ d'après Définition 1.4.6.

Montrons la continuité de F.

Ceci revient à montrer que F est continue en tout point $x \in X$, i.e. $\forall\, W' \in \mathcal{V}_L(F(x))$, il existe $W \in \mathcal{V}_X(x)$ tel que $F(W) \subset W'$.

Soit dans un premier lieu, $x \in A$ et $W' \in \mathcal{V}_L(F(x)) = \mathcal{V}_L(f(x))$, comme $f : A \longrightarrow L$ est continue alors d'après la propriété "m" (voir Définition 1.4.10), il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}_A(x)$ et un certain ensemble convexe C tel que $f(U) \subset C \subset W'$, par les propriétés de la topologie trace, il existe $W \in \mathcal{V}_X(x)$, tel que $U = W \cap A$, et donc

$$F(W \cap A) = f(W \cap A) \subset C \subset W'. \tag{2.2.8}$$

Montrons que $\mathbf{F}(W) \subset W'$.

Soit $y \in W$ et montrons que $F(y) \in W'$. Il y a deux cas qui peuvent se présenter.

(i) Si $y \in A \cap W$, d'après (2.2.8) on a $F(y) \in W'$.

(ii) Si $y \in W \backslash A$, de la propriété fondamentale, il existe $V \in \mathcal{V}_X(x)$, $V \subset W$. Comme $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ est une partition continue de l'unité de $X \backslash A$ subordonnée au recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, alors il n'y a qu'un nombre fini d'indices λ, pour lequels les fonctions K_λ sont non nulles. Notons ces indices $\{\lambda_0, \cdots, \lambda_q\}$, alors $U_{\lambda i} \cap V \neq \emptyset$ pour tout $i \in \{0, \cdots, q\}$, ceci implique que $a_{\lambda_i} \in A \cap W$, il s'en suit que $F(a_{\lambda_i}) \in F(A \cap W) \subset C \subset W'$, enfin comme $F(a_{\lambda i}) = f(a_{\lambda i})$ sont des éléments de C, C est convexe et $F(y)$ est dans l'enveloppe convexe des $f(a_{\lambda i})$, d'après Proposition 1.4.4, $F(y) = \sum_{i=0}^{q} K_{\lambda i}(y) f(a_{\lambda i}) \in C \subset W'$.

De (i) et (ii), il existe $W \in \mathcal{V}_X(x)$ tel que $F(W) \subset W'$. D'où la continuité de F sur A.

Soit maintenant $x \in X \backslash A$, on a $F(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_x} K_\lambda(x) f(a_\lambda)$. Soit $W \in \mathcal{V}_L(F(x))$, i.e. $W \in \mathcal{V}_L(\sum_{\lambda \in \Lambda_x} K_\lambda(x) f(a_\lambda))$. Comme L est un espace vectoriel topologique, il existe $W_\lambda \in \mathcal{V}_L(K_\lambda(x) f(a_\lambda))$ tel que $\sum_{\lambda \in \Lambda_x} W_\lambda = W$. D'autre part, $W_\lambda \in \mathcal{V}_L(K_\lambda(x) f(a_\lambda)) \Rightarrow \exists W'_\lambda \in \mathcal{V}_L(K_\lambda(x))$ tel que $f(a_\lambda) W'_\lambda = W_\lambda$. Sachant que $K_\lambda(\cdot)$ est continue, alors il existe $\Omega \in \mathcal{V}_{X \backslash A}(x)$ tel que $K_\lambda(\Omega) \subset W'_\lambda$ et donc $f(a_\lambda) K_\lambda(\Omega) \subset f(a_\lambda) W'_\lambda$, i.e. $f(a_\lambda) K_\lambda(\Omega) \subset W_\lambda$ $\forall \lambda \in \Lambda_x$, et par suite $\sum_{\lambda \in \Lambda_x} f(a_\lambda) K_\lambda(\Omega) \subset \sum_{\lambda \in \Lambda_x} W_\lambda = W$, ceci implique que $F(\Omega) \subset W$. D'où la continuité de F en tout point $x \in X$. Ceci termine la démonstration. ■

CHAPITRE 3

THÉORÈMES DE SCORZA-DRAGONI ET DE DUGUNDJI MULTIVOQUES.

Dans ce chapitre, on se propose des généralisations du Théorème de Lusin au cas des fonctions à deux variables, dû à Scorza-Dragoni, et plus particulièrement sa version multivoque. Aussi bien que la généralisation du Théorème de Dugundji au cas multivoque.
Pour cet objectif, nous avons à introduire quelques notions de l'analyse multivoque.

3.1 Quelques préliminaires de l'analyse multivoque.

Pour plus de détails sur cette section consulter [1], [3] et [9].

3.1.1 Généralités sur les multi-applications

Définition 3.1.1. *Soient X, Y deux ensembles, $\mathcal{P}(Y)$ la famille de tous les sous ensembles de Y. On dit que F est une multi-application définie sur X à valeurs dans Y, si pour tout $x \in X$, $F(x)$ est un sous ensemble de Y, i.e. $F(x) \in \mathcal{P}(Y)$. On note $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ ou bien $F : X \rightrightarrows Y$.*

Dans la littérature, les multi-applications sont aussi appelées applications multivoques, ou multifonctions.

Définition 3.1.2. *Soient X, Y deux ensembles, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, on définit :*

(1) le domaine effectif de F par : $D(F) := \Big\{x \in X :\ F(x) \neq \emptyset\Big\}$.

(2) Le graphe de F est le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par :

$$Gph(F) := \Big\{(x, y) \in D(F) \times Y :\ y \in F(x)\Big\}.$$

(3) L'image d'une partie non vide V de X par F, l'ensemble défini par :

$$F(V) = \bigcup_{x \in V} F(x).$$

Le rang de F est donné par

$$rg(F) = Im(F) = F(X).$$

(4) On appelle image réciproque large d'une partie non vide V de Y par F, l'ensemble défini par :

$$F^{-1}(V) := \Big\{x \in X :\ F(x) \cap V \neq \emptyset\Big\}.$$

(5) On appelle image réciproque étroite d'une partie non vide V de Y par F, l'ensemble défini par :

$$F_{+}^{-1}(V) := \Big\{x \in X :\ F(x) \subset V\Big\}.$$

(6) L'inverse de l'application F est l'application $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ tel que

$$x \in F^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in F(x).$$

et nous avons $D(F) = Im(F^{-1})$ et $D(F^{-1}) = Im(F)$.

Définition 3.1.3. *Soit (X, d_X) un espace métrique et soient A, B deux sous ensembles fermées de X. On définit l'écart entre A et B par*

$$e(A, B) = \sup\{d(x, B), x \in A\},$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$h(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Avec la convention $\sup\limits_{\emptyset} = 0$ et $\inf\limits_{\emptyset} = +\infty$.

3.1.2 Notions de continuité des multi-applications

Définition 3.1.4. *Soient $(X, \Theta_X), (Y, \Theta_Y)$ deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s) si pour tout $x_0 \in X$ et tout ouvert W de Y tel que $F(x_0) \subset W$, il existe un voisinage V de x_0 ($V \in \mathcal{V}_X(x_0)$) tel que pour tout $x \in V, F(x) \subset W$.*

Proposition 3.1.5. *Soient $(X, \Theta_X), (Y, \Theta_Y)$ deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, $V \subset Y$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *F s.c.s sur X.*
2. *$F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de X, pour tout ouvert V de Y.*

Remarque 3.1.6. *Soient $(X, \Theta_X), (Y, \Theta_Y)$ deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, et soit $f : X \longrightarrow Y$. Si $F(x) = \{f(x)\}$, alors F s.c.s $\Longleftrightarrow$ f continue.*

Définition 3.1.7. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est h.s.c.s au point x_0 (s.c.s par rapport à la distance de haussdorff) si $\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $F(B(x_0, \delta)) \subset B(F(x_0), \varepsilon)$, avec*

$$B(F(x_0), \varepsilon) = \{y \in Y, d_Y(y, F(x_0)) < \varepsilon\}.$$

Définition 3.1.8. *Soient $(X, \Theta_X), (Y, \Theta_Y)$ deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que*

1. *F est à valeurs fermées (resp. compactes) si $F(x)$ est fermé (resp. compact) dans Y pour tout $x \in X$.*
2. *F est fermée si son graphe, $Gph(F)$ est un sous ensemble fermé de $X \times Y$.*

De façon équivalente, si X, Y sont deux espaces métriques, alors F est fermée si pour toute suite $((x_n, y_n))_n$ dans $Gph(F)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$ alors $(x, y) \in Gph(F)$.

Proposition 3.1.9. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes. Alors F est s.c.s si et seulement si F est h.s.c.s.*

Proposition 3.1.10. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes. Alors F est s.c.s au point x_0 ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon \overline{B}_Y$ pour tout $x \in B(x_0, \delta)$.*

Proposition 3.1.11. *Soient* (X, d_X), (Y, d_Y) *deux espaces métriques et soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application à valeurs non vides et* (Y, d_Y) *un espace compact, si le graphe de* F *est fermé alors* F *est s.c.s.*

Proposition 3.1.12. *Soient* (X, d_X), (Y, d_Y) *deux espaces métriques et soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application à valeurs fermées si* F *est s.c.s, alors le graphe de* F *est fermé.*

3.1.3 Notions de mesurabilité des multi-applications

Définition 3.1.13. *Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* (X, Θ_X) *un espace topologique et* $F : \Omega \rightrightarrows X$. *On dit que* F *est* Σ*-mesurable (ou mesurable) si pour tout* $A \in \Theta_X$, $F^{-1}(A) \in \Sigma$, *i.e. pour tout ouvert* A *de* X, $F^{-1}(A) = \Big\{t \in \Omega : \ F(t) \cap A \neq \ \emptyset\Big\} \in \Sigma$.

Remarque 3.1.14. *Si* (X, d_X) *est un espace métrique séparable, tout ouvert de* X *s'écrit comme union dénombrable de boules ouvertes. Dans ce cas,* F *est* Σ*-mesurable si* $F^{-1}(B(x, r)) \in \Sigma$ *pour tout* $x \in X$ *et tout* $r > 0$.

Définition 3.1.15. *Soient* $(X, \Theta_X), (Y, \Theta_Y)$ *deux espaces topologiques,* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application. On appelle sélection de* F *toute application* $f : X \longrightarrow Y$ *tel que* $f(x) \in F(x)$ *pour tout* $x \in X$.

Proposition 3.1.16. *Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* (Y, d_Y) *un espace métrique séparable complet et* $F : \Omega \rightrightarrows Y$ *une multi-application à valeurs fermées. Si* F *est mesurable, alors elle admet une sélection mesurable.*

Proposition 3.1.17. *Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* (Y, d_Y) *un espace métrique séparable et* $F : \Omega \rightrightarrows Y$ *une multi-application. Pour tout* $y \in Y$, *considérons la fonction*

$$\begin{aligned} g_y : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g_y(t) = d(y, F(t)). \end{aligned}$$

Alors F *est mesurable si et seulement si* g_y *est mesurable pour tout* $y \in Y$.

Proposition 3.1.18. *Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* (Y, d_Y) *un espace métrique séparable et* $F : \Omega \rightrightarrows Y$ *une multi-application mesurable à valeurs fermées. Alors le graphe de* F *appartient à* $\Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$.

Définition 3.1.19. *Soient* $(X, \Theta_X), (Y, \Theta_Y)$ *deux espaces topologiques,* (Ω, Σ) *un espace mesurable. Soit* $F : \Omega \times X \rightrightarrows Y$*. On dit que* F *est de type Carathéodory si*

1. pour tout $x \in X$ *fixé, la multi-application*

$$F_x : \Omega \rightrightarrows Y$$

$$t \mapsto F_x(t) = F(t, x)$$

est Σ*-mesurable ;*

2. pour tout $t \in \Omega$ *fixé, la multi-application*

$$F_t : X \rightrightarrows Y$$

$$x \mapsto F_t(x) = F(t, x)$$

est s.c.s.

Théorème 3.1.20. *Soient* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré et* μ *une mesure positive et* σ*-finie avec* Σ μ*-complète,* (Y, d_Y) *un espace métrique séparable complet. Soit* $F : \Omega \rightrightarrows Y$ *une multi-application à valeurs fermées non vides. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. F *est* Σ*-mesurable ;*
2. $Gph(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$*.*

3.2 Théorème de Scorza-Dragoni

Nous commençons par quelques résultats utiles pour les preuves des théorèmes principaux de ce chapitre.

Proposition 3.2.1. ***(Borne supérieure de Valadier pour les multi-applications)*** *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré positif avec* Σ *une tribu* μ*-complète et* μ *une mesure* σ*-finie et soit* (X, d_X) *un espace métrique séparable. Soit* $(F_j)_{j \in J}$ *la famille de toutes les multi-applications* Σ*-mesurables à valeurs fermées définies sur* Ω *à valeurs dans* X*. Alors il existe une multi-application* $\Gamma : \Omega \rightrightarrows X$*,* Σ*-mesurable à valeurs fermées tel que*

1. *pour chaque* $j \in J$*,* $F_j(t) \subset \Gamma(t)$ μ*-p.p ;*
2. *pour toute multi-application* $G : \Omega \rightrightarrows X$ Σ*-mesurable à valeurs fermées vérifiant la condition 1., on a* $\Gamma(t) \subset G(t)$ μ*-p.p.*

De plus, il existe un ensemble dénombrable $J_0 \subset J$ *tel que* $\Gamma(t) = \overline{\bigcup_{j \in J_0} F_j(t)}$ *μ-p.p.*
La multi-application Γ *est appelée borne supérieure de Valadier de la famille* $(F_j)_{j \in J}$.

Corollaire 3.2.2. *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré positif avec* Σ *une tribu* μ*-complète et* μ *une mesure* σ*-finie et soit* (X, d_X) *un espace métrique séparable. Alors pour toute multi-application* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *à valeurs fermées, il existe une* μ*-p.p. plus grande multi-application* $F_0 : \Omega \rightrightarrows X$ Σ*-mesurable à valeurs fermées tel que*

1. $F_0(t) \subset F(t)$ *μ-p.p sur* Ω *;*
2. *pour toute autre multi-application* $\widetilde{F} : \Omega \rightrightarrows X$ Σ*-mesurable à valeurs fermées vérifiant* $\widetilde{F}(t) \subset F(t)$ *μ-p.p. sur* Ω*, nous avous* $\widetilde{F}(t) \subset F_0(t)$ *μ-p.p sur* Ω *;*
3. *en particulier, pour toute sélection* Σ*-mesurable* f *de* F *nous avons* $f(t) \in F_0(t)$ *μ-p.p. sur* Ω.

Preuve.
1. Soit $(F_j)_{j \in J}$ la famille de toutes les multi-applications Σ-mesurables à valeurs fermées et μ-p.p contenues dans celles de F, i.e. pour tout $j \in J$, $F_j(t) \subset F(t)$ μ-p.p.
D'après la Proposition 3.2.1, il existe une borne supérieure de Valadier de la famille $(F_j)_{j \in J}$ notée F_0. De plus, on sait qu'il existe un ensemble dénombrable $J_0 \subset J$ tel que

$$F_0(t) = \overline{\bigcup_{j \in J_0} F_j(t)} \subset F(t) \; \mu - p.p.$$

Donc F_0 est une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées et $F_0(t) \subset F(t)$ μ-p.p.
2. D'autre part, pour toute autre multi-application $\widetilde{F}$ Σ-mesurable à valeurs fermées vérifiant $\widetilde{F}(t) \subset F(t)$ $\mu-$p.p, il existe $j_0 \in J_0$ tel que $F(t) = F_{j_0}(t)$ et comme $F_{j_0}(t) \subset F_0(t)$ (Proposition 3.2.1) on conclut que $\widetilde{F}(t) \subset F_0(t)$ μ-p.p.

■

Pour la démonstration du Théorème de Scorza-Dragoni on a aussi besoin du Lemme suivant

Lemme 3.2.3. *Soient* (Ω, d_Ω) *un espace métrique compact,* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré positif de Radon. Soit* (Z, d_Z) *un espace métrique séparable et* $h : \Omega \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable par rapport à* t *et lipchitzienne par rapport à* z*, i.e. il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$|h(t,z) - h(t,z')| \leqslant \alpha d_Z(z,z'), \; \forall z, z' \in Z. \tag{3.2.1}$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $\mu(\Omega \backslash T_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de h à $T_\varepsilon \times Z$ est continue.

Preuve.

Fixons une suite $(z_n)_n$ dense dans Z et $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction

$$h(\cdot, z_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto h(t, z_n)$$

est une fonction mesurable donc, d'après le théorème de Lusin, il existe un compact $K_n^\varepsilon \subset \Omega$ tel que $\mu(\Omega \backslash K_n^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ et la restriction de $h(\cdot, z_n)$ à K_n^ε est continue.

Soit $T_\varepsilon = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} K_n^\varepsilon$, nous avons $T_\varepsilon \subset \Omega$ puisque $K_n^\varepsilon \subset \Omega \;\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, et comme K_n^ε est un compact dans un espace métrique, donc il est fermé, par suite T_ε est un fermé dans Ω qui est compact, alors T_ε est un compact et

$$\mu(\Omega \backslash T_\varepsilon) = \mu(\Omega \backslash \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_n^\varepsilon) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega \backslash K_n^\varepsilon) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \mu(\Omega \backslash K_n^\varepsilon) < \sum_{n \geqslant 1} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Ceci signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $\mu(\Omega \backslash T_\varepsilon) < \varepsilon$ et $h(\cdot, z_n)_{|T_\varepsilon}$ est continue. D'où pour tout $t_0 \in T_\varepsilon$, on a

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall t \in T_\varepsilon,\; d_\Omega(t, t_0) < \delta \Longrightarrow |h(t, z_n) - h(t_0, z_n)| < \epsilon. \tag{3.2.2}$$

Montrons que la restriction de h à $T_\varepsilon \times Z$ est continue.

Nous avons h continue en $(t_0, z_0) \in T_\varepsilon \times Z$ équivaut à $\forall\, \beta > 0, \exists \bar{\delta} > 0$, $\forall\, (t, z) \in T_\varepsilon \times Z, d_\Omega(t, t_0) < \delta$ et $d_Z(z, z_0) < \delta \Longrightarrow |h(t, z) - h(t_0, z_0)| < \beta$.

Soit $\beta > 0$ et soit $t \in T_\varepsilon$ tq $d_\Omega(t, t_0) < \delta$ et soit $z \in Z$ tq $d_Z(z, z_0) < \delta$. Choisissons $n \geqslant 1$ tel que $d(z_0, z_n) < \frac{\beta}{4\alpha}$ (ce choix est possible grâce à la densité de $(z_n)_n$ dans Z). Alors

$$\begin{aligned}
|h(t, z) - h(t_0, z_0)| &\leqslant |h(t, z) - h(t, z_n)| + |h(t, z_n) - h(t_0, z_n)| + |h(t_0, z_n) - h(t_0, z_0)| \\
&\leqslant \alpha d_Z(z, z_n) + \epsilon + \alpha d_Z(z_n, z_0) \\
&\leqslant \alpha[d_Z(z, z_0) + d_Z(z_0, z_n)] + \epsilon + \alpha d_Z(z_n, z_0) \\
&\leqslant \alpha d_Z(z, z_0) + 2\alpha d_Z(z_0, z_n) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Par (3.2.2), pour $\epsilon = \frac{\beta}{4}$ et $0 < \delta < \frac{\beta}{4\alpha}$, il vient que

$$|h(t, z) - h(t_0, z_0)| < \alpha\delta + 2\alpha\frac{\beta}{4\alpha} + \frac{\beta}{4} < \alpha\frac{\beta}{4\alpha} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{4} = \beta.$$

D'où pour tout $\beta > 0$, $\exists\bar{\delta} = \delta$ tq pour tout $(t,z) \in T_\varepsilon \times Z$, $d_\Omega(t,t_0) < \bar{\delta}$ et $d_Z(z,z_0) < \bar{\delta}$ $\Longrightarrow |h(t,z) - h(t_0,z_0)| < \beta$. Ceci implique la continuité de h en tout point $(t_0,z_0) \in T_\varepsilon \times Z$. Par conséquent $h_{|T_\varepsilon \times Z}$ est continue.

■

Nous sommes maintenant en mesure de donner la version multivoque du Théorème de Scorza-Dragoni dûe à Castaing–Marques [8]

Théorème 3.2.4. ***Théorème de Scorza-Dragoni (Version multivoque)***
Soient (Ω, d_Ω) un espace métrique compact, (Ω, Σ, μ) un espace mesuré positif de Radon avec Σ μ-complète et $\sigma-$finie, (X, d_X) un espace métrique séparable complet et (Y, d_Y) un espace métrique compact. Soit $F : \Omega \times X \rightrightarrows Y$ une multi-application de Carathéodory à valeurs fermées non vides. Alors il existe une multi-application $F_0 : \Omega \times X \rightrightarrows Y$ tel que

1) *$Gph(F_0) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$.*
2) *Il existe un ensemble μ-négligeable N indépendant de (t,x) vérifiant $F_0(t,x) \neq \emptyset$ et $F_0(t,x) \subset F(t,x)$, pour tout $t \in \Omega\backslash N$ et pour tout $x \in X$.*
3) *Pour toutes applications mesurables $u : \Omega \longrightarrow X$ et $v : \Omega \longrightarrow Y$ vérifiant $v(t) \in F(t,u(t))$ μ-p.p., nous avons $v(t) \in F_0(t,u(t))$ μ-p.p.*
4) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $\mu(\Omega\backslash T_\varepsilon) < \varepsilon$ et tel que le graphe de la restriction de F_0 à $T_\varepsilon \times X$ soit fermé (i.e. $F_{0|T_\varepsilon \times X}$ est s.c.s).*

Preuve.

Nous avons F est une multi-application de Carathéodory i.e.,

1. Pour tout $x \in X$ fixé, la multi-application

$$\begin{aligned} F_x : \Omega &\rightrightarrows Y \\ t &\mapsto F_x(t) = F(t,x) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable.

2. Pour tout $t \in \Omega$ fixé, la multi-application

$$\begin{aligned} F_t : X &\rightrightarrows Y \\ x &\mapsto F_t(x) = F(t,x) \end{aligned}$$

est s.c.s.

1) Considérons la multi-application $G : \Omega \rightrightarrows X \times Y$ définie par

$$G(t) = Gph(F_t(\cdot)) = \Big\{(x,y) \in X \times Y : \; y \in F_t(x)\Big\} \, .$$

Comme F est à valeurs fermées, alors $F_t(\cdot)$ est à valeurs fermées et s.c.s. D'après Proposition 3.1.12, $Gph(F_t(\cdot))$ est fermé, c-à-d $G(\cdot)$ est à valeurs fermées. Alors d'après le Corollaire 3.2.2, il existe une μ-p.p. plus grande multi-application $G_0 : \Omega \rightrightarrows X \times Y$, Σ-mesurable à valeurs fermées tel que $G_0(t) \subset G(t)$ μ-p.p, i.e. il existe un sous ensemble μ-négligeable $N_1 \subset \Omega$ tel que $G_0(t) \subset G(t) \;\; \forall t \in \Omega \backslash N_1$.

Soit

$$\begin{aligned} &F_0 : \Omega \times X \rightrightarrows Y \\ &\qquad (t,x) \mapsto F_0(t,x) = \Big\{y \in Y : \; (x,y) \in G_0(t)\Big\} \, . \end{aligned}$$

Comme G_0 est à valeurs fermées, alors F_0 est à valeurs fermées, et

$$\begin{aligned} Gph(F_0) &= \Big\{(t,x,y) \in \Omega \times X \times Y : \; y \in F_0(t,x)\Big\} \\ &= \Big\{(t,x,y) \in \Omega \times X \times Y : \; (x,y) \in G_0(t)\Big\} \\ &= Gph(G_0). \end{aligned}$$

La multi-application G_0 étant Σ-mesurable à valeurs fermées, d'après Proposition 3.1.18, $Gph(G_0) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X \times Y)$ et par Corollaire 1.2.4, $\mathcal{B}(X \times Y) := \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$, d'où $Gph(G_0) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$. Ceci prouve la propriété 1).

2) Soient $(t,x) \in \Omega \times X$ et soit $y \in F_0(t,x)$, alors $(x,y) \in G_0(t)$, et comme $G_0(t) \subset G(t)$ pour tout $t \in \Omega \backslash N_1$, donc $(x,y) \in G(t)$ pour tout $t \in \Omega \backslash N_1$, c-à-d $y \in F(t,x)$ pour tout $t \in \Omega \backslash N_1$.

Alors il existe un ensemble N_1 μ-négligeable tel que $F_0(t,x) \subset F(t,x)$ pour tout $t \in \Omega \backslash N_1$, et pour tout $x \in X$.

Vérifions maintenant la non-vacuité de $F_0(t,x)$ pour $\mu-$presque tout $t \in \Omega$ et tout $x \in X$.

Fixons $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans X. Par Proposition 3.1.16 (puisque $F_x(\cdot)$ est Σ-mesurable) pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $F_{x_k}(\cdot)$ admet une sélection mesurable, i.e. il existe une application Σ-mesurable $y_k(\cdot) : \Omega \longrightarrow Y$ tel que $y_k(t) \in F(t,x_k)$ pour tout $t \in \Omega$, i.e. $(x_k, y_k(t)) \in G(t)$

pour tout $t \in \Omega$. Par Corollaire 3.2.2 il existe un ensemble μ-négligeable $N_2 \subset \Omega$ tel que $(x_k, y_k(t)) \in G_0(t)$ pour tout $t \in \Omega \backslash N_2$.

Fixons $t \in \Omega \backslash N_2$ et $x \in X = \overline{\{x_k\}}$, d'après Proposition 1.3.15, il existe une sous suite de (x_k) qu'on note $(x_{s(k)})$ qui converge vers x.

Comme (Y, d_Y) est un espace métrique compact, d'après Théorème 1.3.14, on peut extraire de $(y_{s(k)}(t))$ une sous suite $(y_{\varphi(s(k))}(t))$ qui converge dans Y vers un élément $y(t)$.

Comme G_0 est à valeurs fermées, on conclut que $(x, y(t)) \in G_0(t)$ et par suite $y(t) \in F_0(t, x)$. D'où l'existence de $N_2 \subset \Omega$ tq $F_0(t, x) \neq \emptyset$ pour tout $t \in \Omega \backslash N_2$. Par ce qui précède il existe $N = N_1 \cup N_2 \subset \Omega$ μ-négligeable tq $F_0(t, x) \subset F(t, x)$ et $F_0(t, x) \neq \emptyset$ pour tout $t \in \Omega \backslash N$ et tout $x \in X$. Ceci prouve la propriété 2).

3) Soient $u : \Omega \longrightarrow X$, $v : \Omega \longrightarrow Y$ deux applications mesurables tel que $v(t) \in F(t, u(t))$ $\mu-$p.p sur Ω. Alors $(u(t), v(t)) \in G(t)$ $\mu-$p.p sur Ω. D'après la propriété 3) du Corollaire 3.2.2, on obtient $(u(t), v(t)) \in G_0(t)$ $\mu-$p.p et donc $v(t) \in F_0(t, u(t))$ $\mu-$p.p.

4) Soit Maintenant $\varepsilon > 0$. La multi-application G_0 étant Σ-mesurable, d'après Proposition 3.1.17, la fonction

$$h : \Omega \times X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, x, y) \longmapsto h(t, x, y) = d((x, y), G_0(t))$$

est mesurable par rapport à t. D'autre part, Par Proposition 1.3.26, $h(t, \cdot, \cdot)$ est lipschitzienne par rapport à (x, y). Donc h est lipschitzienne par rapport à (x, y) et mesurable par rapport à t. Par le Lemme 3.2.3, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $\mu(\Omega \backslash T_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de $h_{|T_\varepsilon \times X \times Y}$ est continue. Donc $Gph(G_{0|T_\varepsilon})$ est fermé. En effet,

$$\begin{aligned}
Gph(G_{0|T_\varepsilon}) &= \Big\{(t, x, y) \in T_\varepsilon \times X \times Y : \ (x, y) \in G_0(t)\Big\} \\
&= \Big\{(t, x, y) \in T_\varepsilon \times X \times Y : \ (x, y) \in \overline{G_0(t)}\Big\} \\
&= \Big\{(t, x, y) \in T_\varepsilon \times X \times Y : \ d((x, y), G_0(t)) = 0\Big\} \\
&= \Big\{(t, x, y) \in T_\varepsilon \times X \times Y : \ h(t, x, y) \in 0\Big\} \\
&= h^{-1}(\{0\}).
\end{aligned}$$

Comme $h_{|T_\varepsilon \times X \times Y}$ est continue, et $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ alors $h^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $T_\varepsilon \times X \times Y$. Ceci implique que $Gph(G_{0|T_\varepsilon})$ est un fermé de $T_\varepsilon \times X \times Y$. De plus,

$$\begin{aligned} Gph(G_{0|T_\varepsilon}) &= \Big\{(t,x,y) \in T_\varepsilon \times X \times Y : \ (x,y) \in G_0(t)\Big\} \\ &= \Big\{(t,x,y) \in T_\varepsilon \times X \times Y : \ y \in F_0(t,x)\Big\} \\ &= Gph(F_{0|T_\varepsilon \times X}). \end{aligned}$$

Par suite, $Gph(F_{0|T_\varepsilon \times X})$ est un fermé de $T_\varepsilon \times X \times Y$, d'après la Proposition 3.1.11 $F_{0|T_\varepsilon \times X}$ est s.c.s. Ceci prouve la propriété 4) et termine la preuve du Théorème.

■

Théorème 3.2.5. ***Théorème de Scorza-Dragoni (Version univoque)***
Soient (Ω, d_Ω) un espace métrique compact, (Ω, Σ, μ) un espace mesuré positif de Radon avec Σ μ-complète et $\sigma-$ finie. Soit (X, d_X) un espace métrique séparable complet et soit $h : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $\mu(\Omega \backslash T_\varepsilon) < \varepsilon$ et $h_{|T_\varepsilon \times X}$ est continue.

Preuve.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [a,b]$ une fonction continue strictement croissante. Considérons la fonction $\psi = \varphi \circ h : \Omega \times X \longrightarrow [a,b]$ et pour tout $(t,x) \in \Omega \times X$, posons $F(t,x) = \{\varphi \circ h(t,x)\}$. Remarquons que $\varphi \circ h$ est une fonction de Carathéodory car

1. pour tout $x \in X$ fixé

$$\begin{aligned} \psi_x : \Omega &\longrightarrow [a,b] \\ t &\longmapsto \psi_x(t) = \varphi \circ h_x(t,x) = (\varphi \circ h)(t,x) \end{aligned}$$

est mesurable. En effet, pour tout $B \in \mathcal{B}([a,b])$,

$$\begin{aligned} \psi_x^{-1}(B) =& \{t \in \Omega : \ \psi_x(t) \in B\} \\ =& \{t \in \Omega : \ \varphi \circ h_x(t) \in B\} \\ =& \{t \in \Omega : \ t \in (\varphi \circ h_x)^{-1}(B)\} = h_x^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \end{aligned}$$

φ étant continue, $\varphi^{-1}(B)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et comme h_x est mesurable donc $h_x^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \in \Sigma$. Ceci implique la mesurabilité de ψ_x.

2. Pour tout $t \in \Omega$ fixé

$$\begin{aligned}\psi_t : X &\longrightarrow [a,b]\\ x &\longmapsto \psi_t(x) = \varphi \circ h_t(t,x) = (\varphi \circ h)(t,x)\end{aligned}$$

est continue, comme composition de deux fonctions continues. D'où $\varphi \circ h$ est une fonction de Carathéodory. Par suite F est une multi-application de Carathéodory à valeurs fermées. D'après Théorème 3.2.4 (propriété 4), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $\mu(\Omega \backslash T_\varepsilon) < \varepsilon$ et $\varphi \circ h_{|T_\varepsilon \times X}$ est continue. D'autre part, du Théorème 1.3.19, φ est injective sur $\mathbb{R}$, de plus elle est continue, alors elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle image $I = \varphi(\mathbb{R})$, i.e. $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow I$ est bijective continue, par conséquent $\varphi^{-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I. On a $\varphi \circ h_{|T_\varepsilon \times X}$ et $\varphi^{-1}_{|I}$ sont continues, alors $\varphi^{-1} \circ \varphi \circ h_{|T_\varepsilon \times X}$ est continue. D'où $h_{|T_\varepsilon \times X}$ est continue. Ceci termine la preuve.

■

3.3 Théorème de Dugundji

Théorème 3.3.1. *[6] **J. Dugundji (Version multivoque)***

Soient X, Y deux espaces de Banach. Soient $A \subset X$, $D \subset Y$ deux fermés non vides et $F : A \times D \rightrightarrows Y$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs convexes compactes, tel que

$$\forall (x,t) \in (A \times D), \quad F(x,t) \subset c(x)(1 + \|t\|)\overline{B}_Y, \tag{3.3.1}$$

où c est une fonction positive définie sur A. Alors il existe $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un recouvrement ouvert localement fini de $X \backslash A$ tel que

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad 0 < \delta(U_\lambda) \leqslant d(U_\lambda, A). \tag{3.3.2}$$

Soit $\{K_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ une partition continue de l'unité de $X \backslash A$ subordonnée au recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, choisissons $a_\lambda \in A$ tel que

$$d(a_\lambda, U_\lambda) < 2d(U_\lambda, A). \tag{3.3.3}$$

Alors, la multi-application $\widetilde{F}$ définie sur $X \times D$, comme suit

$$\widetilde{F} : X \times D \rightrightarrows Y$$

$$(x,t) \mapsto \widetilde{F}(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & \text{si } x \in A,\ t \in D, \\ \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda(x) F(a_\lambda, t) & \text{si } x \in X \backslash A,\ t \in D, \end{cases}$$

est une extension semi-continue supérieurement de F à $X \times D$ à valeurs convexes compactes dans Y. De plus, on a $\widetilde{F}(X \times D) \subset co(F(A \times D))$, et si c est constante, $\widetilde{F}(x,t) \subset c(1+\|x\|)\overline{B}_Y$ pour tout $(x,t) \in A \times D$. En particulier, si pour tout $(x,t) \in X \times D, F(x,t) \subset C$ où C est un convexe de X, alors $\widetilde{F}(x,t) \subset C$.

Preuve.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $0 \in F(x,t)$ pour tout $(x,t) \in A \times D$ quitte à prendre $G(x,t) = \overline{co}(\{0\} \cup F(x,t))$ au lieu de $F(x,t)$.

Par Lemme 2.2.1, la famille $\{B_x : \ x \in X \backslash A\}$ est un recouvrement ouvert de $X \backslash A$ qui admet un raffinement ouvert localement fini qu'on a noté $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, avec $B_x = B(x, r(x))$, i.e. $\forall \lambda \in \Lambda, \exists x \in X \backslash A$ tq $U_\lambda \subset B_x$. D'après (2.2.5) du Théorème 2.2.3, on a pour tout $x \in X \backslash A$

$$d(B_x, A) \geqslant 2r(x) > 0.$$

Il vient que, pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$d(U_\lambda, A) \geqslant d(B_x, A) \geqslant 2r(x) \geqslant \delta(U_\lambda) > 0.$$

Alors ce recouvrement vérifie (3.3.2). Choisissons, comme dans la preuve du Théorème 2.2.3, $a_\lambda \in A$, vérifiant (2.2.6), i.e.

$$d(a_\lambda, U_\lambda) < 2d(U_\lambda, A).$$

On construit, comme dans la preuve du Théorème 2.2.2, une partition continue de l'unité de $X \backslash A$ subordonnée au recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, qu'on note $\{K_\lambda(\cdot) : \ \lambda \in \Lambda\}$.

Considérons $\widetilde{F}$ la multi-application définie par

$$\widetilde{F} : X \times D \rightrightarrows Y$$

$$(x,t) \mapsto \widetilde{F}(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & \text{si } x \in A,\ t \in D, \\ \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda(x) F(a_\lambda, t) & \text{si } x \in X \backslash A,\ t \in D. \end{cases}$$

Il est clair que $\widetilde{F}_{|A\times D} = F$, i.e. pour tout $(x,t) \in A \times D, \widetilde{F}(x,t) = F(x,t)$.

Montrons que $\boldsymbol{\widetilde{F}(x,t) \subset co(F(A \times D))}$ pour tout $\boldsymbol{(x,t) \in X \times D}$.

Si $(x,t) \in A \times D$, $\widetilde{F}(x,t) = F(x,t)$, alors $F(x,t) \in F(A \times D) \subset co(F(A \times D))$ donc $\widetilde{F}(A \times D) \subset co(F(A \times D))$.

Si $(x,t) \in (X\backslash A) \times D$, on sait que $F(x,t) = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda(x)F(a_\lambda,t)$, comme $\{K_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ est une partition de l'unité, $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda(x) = 1$, et comme $a_\lambda \in A$, il est clair que $\widetilde{F}(x,t) \subset co(F(A\times D))$ d'après Définition 1.4.6. De plus, pour tout couple $(x,t) \in X \times D$, $\widetilde{F}(x,t)$ est convexe compact. En effet si $x \in X\backslash A$, l'ensemble $\Lambda' := \{\lambda \in \Lambda : \ K_\lambda(x) \neq 0\}$ est fini. Par suite, pour tout $t \in D$, l'ensemble $\widetilde{F}(x,t)$ est une combinaison convexe finie des ensembles $F(a_\lambda,t)$ qui sont convexes. Par Proposition 1.4.4, $\widetilde{F}(x,t)$ est convexe. Il nous reste à montrer la compacité de $\widetilde{F}(x,t)$. En effet, si $(x,t) \in A \times D$ le résultat est évident.

Si $(x,t) \in X\backslash A \times D$, soit $(x_n)_n \subset \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda(x)F(a_\lambda,t)$, i.e. $x_n = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda(x)y_n$, $y_n \in F(a_\lambda,t)$, et comme $F(a_\lambda,t)$ est compact on peut extraire de $(y_n)_n$ une sous suite $(y_{s(n)})$ qui converge vers $y \in F(a_\lambda,t)$, et donc de $(x_n)_n$ on peut extraire une sous suite $x_{s(n)} = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda(x)y_{s(n)}$ et qui converge vers $z = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda(x)y$, ceci prouve la compacité de $\widetilde{F}(x,t)$.

Prouvons maintenant que $\boldsymbol{\widetilde{F}}$ est semi-continue supérieurement sur $\boldsymbol{X \times D}$.

Nous allons procéder en plusieurs étapes.

Étape 1.

Montrons que $\widetilde{F}$ est s.c.s sur l'ouvert relatif $(X\backslash A) \times D$. Pour cela, soit $(x_0,t_0) \in (X\backslash A) \times D$ fixé. Choisissons un voisinage V_{x_0} de x_0 dans $X\backslash A$ tel que l'ensemble $\{\lambda \in \Lambda : \ U_\lambda \cap V_{x_0} \neq \emptyset\}$ soit fini, disons égal à $\{\lambda_0, \cdots, \lambda_n\}$.

On a pour tout $t \in D$, $0 < (1 + \|t\|) < (2 + \|t\|)$, sachant que $c(x)$ est une fonction positive sur A et $a_\lambda \in A$, il vient que $0 < c(a_{\lambda_i})(1 + \|t\|) < c(a_{\lambda_i})(2 + \|t\|)$ $\forall i \in \{0,\cdots,n\}$, ceci implique que $0 < c(a_{\lambda_i})(1 + \|t\|) < \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} c(a_{\lambda_i})(2 + \|t\|)$. Choisissons un réel $M > 0$ tel que

$$M > \max_{0\leqslant i\leqslant n} c(a_{\lambda_i})(2 + \|t\|). \tag{3.3.4}$$

Alors,

$$c(a_{\lambda_i})(1 + \|t\|) < M. \tag{3.3.5}$$

Sachant que $K_{\lambda_i}(\cdot)$ est une fonction continue sur $X\backslash A$ à valeurs dans $[0,1]$, alors $K_{\lambda_i}(\cdot)$ est continue en x_0, i.e.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X\backslash A,\ \ d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow |K_{\lambda_i}(x) - K_{\lambda_i}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{M(n+1)}.$$

Et chaque $F(a_{\lambda_i}, \cdot)$ est s.c.s en t_0, alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma \in]0,1]$ tel que pour tout $t \in B(t_0,\gamma) \cap D$, $F(a_{\lambda_i}, t) \subset F(a_{\lambda_i}, t_0) + \varepsilon \overline{B}_Y$ (voir Proposition 3.1.10).
Pour tout $(x,t) \in (B(x_0,\delta) \cap (X\backslash A)) \times (B(t_0,\gamma) \cap D)$, on obtient

$$|K_{\lambda_i}(x) - K_{\lambda_i}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{M(n+1)} \quad \text{et} \quad F(a_{\lambda_i}, t) \subset F(a_{\lambda_i}, t_0) + \varepsilon \overline{B}_Y. \tag{3.3.6}$$

Nous avons

$$K_{\lambda_i}(x) = K_{\lambda_i}(x) + K_{\lambda_i}(x_0) - K_{\lambda_i}(x_0) \Longrightarrow K_{\lambda_i}(x) \leqslant |K_{\lambda_i}(x) - K_{\lambda_i}(x_0)| + K_{\lambda_i}(x_0)$$

comme $0 \in F(a_{\lambda_i}, t)$ et $F(a_{\lambda_i}, t)$ est à valeurs convexes, par Proposition 1.4.2

$$K_{\lambda_i}(x) F(a_{\lambda_i}, t) \subset (|K_{\lambda_i}(x) - K_{\lambda_i}(x_0)| + K_{\lambda_i}(x_0)) F(a_{\lambda_i}, t)$$

par Proposition 1.4.2 une deuxième fois,

$$K_{\lambda_i}(x) F(a_{\lambda_i}, t) \subset |K_{\lambda_i}(x) - K_{\lambda_i}(x_0)| F(a_{\lambda_i}, t) + K_{\lambda_i}(x_0) F(a_{\lambda_i}, t)$$

et alors par (3.3.6),

$$K_{\lambda_i}(x) F(a_{\lambda_i}, t) \subset K_{\lambda_i}(x_0) F(a_{\lambda_i}, t) + \frac{\varepsilon}{M(n+1)} F(a_{\lambda_i}, t). \tag{3.3.7}$$

D'après (3.3.6) et (3.3.1) $\begin{cases} \forall t \in D \text{ et } \forall i = 1, \cdots, n, \quad F(a_{\lambda_i}, t) \subset c(a_{\lambda_i})(1 + \|t\|) \overline{B}_Y, \\ \forall t \in B(t_0,\gamma) \cap D,\ F(a_{\lambda_i}, t) \subset F(a_{\lambda_i}, t_0) + \varepsilon \overline{B}_Y. \end{cases}$
D'où par (3.3.7)

$$K_{\lambda_i}(x) F(a_{\lambda_i}, t) \subset K_{\lambda_i}(x_0) \Big(F(a_{\lambda_i}, t_0) + \varepsilon \overline{B}_Y \Big) + \frac{\varepsilon}{M(n+1)} \Big(c(a_{\lambda_i})(1 + \|t\|) \overline{B}_Y \Big),$$

et comme par (3.3.5)

$$\frac{\varepsilon}{M(n+1)} \Big(c(a_{\lambda_i})(1 + \|t\|) \Big) < \frac{\varepsilon}{M(n+1)} M = \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

Il vient que

$$K_{\lambda_i}(x) F(a_{\lambda_i}, t) \subset K_{\lambda_i}(x_0) \Big(F(a_{\lambda_i}, t_0) + \varepsilon \overline{B}_Y \Big) + \frac{\varepsilon}{(n+1)} \overline{B}_Y,$$

i.e.,

$$K_{\lambda_i}(x)F(a_{\lambda_i},t) \subset K_{\lambda_i}(x_0)F(a_{\lambda_i},t_0) + \varepsilon\left(K_{\lambda_i}(x_0) + \frac{1}{n+1}\right)\overline{B}_Y.$$

D'autre part, pour $x \in B(x_0,\delta) \subset V_{x_0}$, Λ' est contenu dans $\{\lambda_0,\cdots,\lambda_n\}$, car pour tout $\lambda \in \Lambda$, le support de chaque fonction K_λ est contenu dans U_λ. Donc pour le couple $(x,t) \in (B(x_0,\delta)\cap(X\backslash A)) \times (B(t_0,\gamma)\cap D)$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(x,t) = \sum_{i=0}^{n} K_{\lambda_i}(x)F(a_{\lambda_i},t) &\subset \sum_{i=0}^{n} K_{\lambda_i}(x_0)F(a_{\lambda_i},t_0) + \varepsilon\sum_{i=0}^{n}\left(K_{\lambda_i}(x_0)+\frac{1}{n+1}\right)\overline{B}_Y\\ &\subset \widetilde{F}(x_0,t_0) + \varepsilon\left(\sum_{i=0}^{n} K_{\lambda_i}(x_0) + \frac{1}{n+1}\right)\overline{B}_Y\\ &\subset \widetilde{F}(x_0,t_0) + \varepsilon\,(1+1)\,\overline{B}_Y,\end{aligned}$$

ceci implique que pour tout $(x,t) \in (B(x_0,\delta)\cap(X\backslash A)) \times (B(t_0,\gamma)\cap D)$

$$\widetilde{F}(x,t) \subset \widetilde{F}(x_0,t_0) + 2\varepsilon\overline{B}_Y.$$

D'où la s.c.s de $\widetilde{F}$ sur $(X\backslash A)\times D$.

Étape 2.

Montrons maintenant que $\widetilde{F}$ est s.c.s sur $\mathring{A}\times D$ (si $\mathring{A}$ est non vide). Cette conclusion est trivial puisque F est s.c.s sur $A\times D$ et $F=\widetilde{F}$ sur cet ensemble.

Étape 3.

Enfin, montrons dans cette dernière étape que $\widetilde{F}$ est s.c.s en tout point $(x_0,t_0)\in\partial A\times D$, où ∂A est la frontière de A. Nous avons $x_0\in\partial A = \overline{A}\cap\overline{A^c}$, i.e. $\forall\nu>0, B(x_0,\nu)\cap A\neq\emptyset$ et $B(x_0,\nu)\cap X\backslash A\neq\emptyset$. Comme A est un sous ensemble fermé de X alors $\partial A\subset A$ i.e. $x_0\in A$. Soit $\varepsilon>0$, puisque $\widetilde{F}=F$ sur $A\times D$ et que la multi-application F est s.c.s, alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe un réel $\beta>0$ et $\gamma>0$ tel que pour tout $t\in B(t_0,\gamma)\cap D$ et tout $x\in B(x_0,\beta)\cap A$, on a

$$F(x,t)\subset F(x_0,t_0)+\varepsilon\overline{B}_Y. \tag{3.3.8}$$

Il nous reste à montrer qu'il existe $\bar{\beta}>0$ tel que pour tout $x\in(X\backslash A)\cap B(x_0,\bar{\beta})$ et tout $t\in D\cap B(t_0,\gamma)$, on a $\widetilde{F}(x,t)\subset\widetilde{F}(x_0,t_0)+\varepsilon\overline{B}_Y$, ce qui compte tenu de (3.3.8) achèvera la démonstration.

Soit $x\in X\backslash A$ et $x\in B(x_0,\frac{\beta}{4})$, donc $d(x,x_0)<\frac{\beta}{4}$. Le choix de a_λ et l'estimation sur le diamètre de U_λ impliquent que pour tout $\lambda\in\Lambda_x=\{\lambda_0,\cdots,\lambda_n\}$, $K_\lambda(x)\neq 0$ $(x\in U_\lambda)$.

On a pour tout $y\in U_\lambda$

$$d_X(x, a_\lambda) \leqslant d_X(x, y) + d_X(y, a_\lambda) \leqslant \delta(U_\lambda) + d_X(y, a_\lambda).$$

D'où,

$$d_X(x, a_\lambda) \leqslant \delta(U_\lambda) + \inf_{y \in U_\lambda} d_X(y, a_\lambda) = \delta(U_\lambda) + d(a_\lambda, U_\lambda).$$

En utilisant (3.3.3) et (3.3.2), on obtient

$$d_X(x, a_\lambda) < 3d(U_\lambda, A),$$

et du fait que $x_0 \in A$ et $x \in U_\lambda$

$$d_X(x, a_\lambda) < 3d_X(x, x_0),$$

il s'en suit que

$$d_X(x_0, a_\lambda) \leqslant d_X(x_0, x) + d_X(x, a_\lambda) \leqslant d_X(x_0, x) + 3d_X(x, x_0) = 4d_X(x, x_0).$$

D'où

$$d_X(x_0, a_\lambda) \leqslant 4d_X(x, x_0) < 4\frac{\beta}{4} = \beta, \text{ i.e. } a_\lambda \in B(x_0, \beta).$$

Comme $a_\lambda \in A$, et donc $a_\lambda \in A \cap B(x_0, \beta)$, ceci implique que pour tout $t \in B(t_0, \gamma) \cap D$,

$$F(a_\lambda, t) \subset F(x_0, t_0) + \varepsilon \overline{B}_Y.$$

Donc, pour tout $x \in (X \backslash A) \cap B(x_0, \frac{\beta}{4})$ et tout $t \in D \cap B(t_0, \gamma)$, on a pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$

$$K_{\lambda_i}(x) F(a_{\lambda_i}, t) \subset K_{\lambda_i}(x) \big(F(x_0, t_0) + \varepsilon \overline{B}_Y\big)$$

$$\widetilde{F}(x, t) \subset \sum_{i=0}^{n} K_{\lambda_i}(x) \big(F(x_0, t_0) + \varepsilon \overline{B}_Y\big) = \widetilde{F}(x_0, t_0) + \varepsilon \overline{B}_Y.$$

Ceci termine la démonstration.

$\blacksquare$

CHAPITRE 4

UNE APPLICATION AUX INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce chapitre, nous allons considéré une application des théorèmes de Scorza-Dragoni et Dugundji dans la résolution d'une inclusion différentielle du premier ordre, quand le second membre est une multi-application de type Carathéodory, ceci en se basant sur un théorème d'existence avec perturbation globalement semi-continue supérieurement. En d'autres termes, cette application montre qu'à l'aide de ces deux fameux théorèmes, on peut généraliser l'existence de solutions pour des inclusions différentielles avec second membre globalement s.c.s à celles avec second membre de type Carathéodory i.e., mesurable par rapport à la variable temps et s.c.s par rapport à la variable de l'état.

4.1 Quelques préliminaires

Définition 4.1.1. *[9] **(Fonction d'appui)***
Soient X un espace vectoriel, $A \subset X$. On appelle fonction d'appui associée à A, notée $\delta^*(A, \cdot)$, la fonction définie sur X^* (le dual de X) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, par

$$\delta^*(A, x^*) = \sup_{y \in A} \langle x^*, y \rangle.$$

Théorème 4.1.2. *[2] Soit X un espace de Banach et $A \subset X$, alors*

$$\overline{co}(A) = \Big\{ x \in X : \ \langle x^*, x \rangle \leqslant \delta^*(x^*, A), \ \forall x^* \in X^* \Big\}.$$

Proposition 4.1.3. *[9] Soit F une multi-application définie sur un espace métrique (X, d_X) à valeurs dans un espace vectoriel normé $(Y, \|\cdot\|)$, semi-continue supérieurement à valeurs compactes, alors la fonction $(x, y) \in X \times X^* \mapsto \delta^*(F(x), y)$ est s.c.s.*

Théorème 4.1.4. *[4] Soient (Ω, Σ) espace mesurable, E un espace de Banach séparable. Soit $F : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides convexes compactes. Alors F est mesurable si et seulement si pour tout $x^* \in E^*$, $\delta^*(x^*, F(\cdot))$ est mesurable.*

Proposition 4.1.5. *Soient (X, d_X) un espace métrique, une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est s.c.s au point $x \in X$ si et seulement si pour tout suite $(x_n)_n \subset X$, qui converge vers x, nous avons*

$$\limsup_{n\to+\infty} f(x_n) \leqslant f(x).$$

Théorème 4.1.6. *[3]* ***(Lemme de Fatou pour les fonctions réelles)***

Soient (Ω, Σ, μ) espace mesuré, $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions mesurables. Supposons qu'il existe $g \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \leqslant g(t)$ μ-p.p. Alors

$$\int_\Omega \limsup_{n\to+\infty} f_n d\mu \geqslant \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Théorème 4.1.7. *[1] Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions absolument continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Hilbert H, satisfaisant*

1. $\forall t \in I$, $\{u_n(t)\}_n$est relativement compacte dans H;

2. il existe une fonction positive $c(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R})$ tel que $\|u_n'(t)\| \leqslant c(t)$ p.p sur I.

Alors il existe une sous-suite (notée encore $(u_n)_n$) qui converge vers une fonction absolument continue $u : I \longrightarrow H$ dans le sens suivant

1. $(u_n(\cdot))$ converge uniformément vers $u(\cdot)$ sur tout sous-ensemble compact de I ;

2. $(u_n'(\cdot))$ converge faiblement vers $u'(\cdot)$ dans $L^1(I, H)$.

4.2 Résultat d'existence

On commence par énoncer le résultat suivant prouvé dans [1] et qui concerne l'existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre, où le second membre est une multi-application globalement s.c.s.

Théorème 4.2.1. *[1] Soient H un espace de Hilbert, $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non vides. On suppose qu'il existe un sous ensemble convexe compact K de H, tel que $F(t,x) \subset K$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times H$. Alors pour tout $u_0 \in H$, il existe une fonction absolument continue $u : [0,T] \longrightarrow H$ solution de l'inclusion différentielle*

$$(P) \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) \in F(t,u(t)) \quad p.p. \ sur \ [0,T]; \\ u(0) = u_0; \\ \|\frac{du}{dt}(t)\| \leqslant \|K\| = \sup\limits_{z\in K}\|z\| \quad p.p. \ sur \ [0,T]; \\ u(t) \in u_0 + TK \quad \forall t \in [0,T]. \end{cases}$$

En utilisant le résultat du Théorème 4.2.1, on va montrer, grâce aux Théorèmes de Scorza-Dragoni et de Dugundji multivoques, que le problème (P) avec second membre une multi-application de type Carathéodory, admet une solution absolument continue.

Théorème 4.2.2. *[6] Soient H un espace de Hilbert séparable, K un sous-ensemble convexe compact de H et $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes fermées tel que :*

1. *pour tout $(t,x) \in [0,T] \times H$, $F(t,x) \subset K$;*
2. *pour tout $t \in [0,T]$, la multi-application $F(x,\cdot)$ est semi-continue supérieurement ;*
3. *pour tout $x \in H$, la multi-application $F(\cdot,t)$ est mesurable.*

Alors pour tout $u_0 \in H$, le problème (P) admet au moins une solution absolument continue.

Preuve.

On peut supposer que $0 \in F(t,x)$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times H$.

En vertu du Théorème de Scorza-Dragoni (Théorème 3.2.4), il existe une multi-application $F_0 : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ à valeurs convexes fermées vérifiant

(1) $Gph(F_0) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$;

(2) il existe un ensemble μ-négligeable N indépendant de $(t,x) \in [0,T] \times H$, tel que

$$\emptyset \neq F_0(t,x) \subset F(t,x), \text{ pour tout } (t,x) \in ([0,T]\backslash N) \times H;$$

(3) pour toutes multi-applications mesurables $u : [0,T] \longrightarrow H$ et $v : [0,T] \longrightarrow H$ vérifiant $v(t) \in F(t,u(t))$ μ-p.p, on a $v(t) \in F_0(t,u(t))$ μ-p.p ;
(4) pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un compact $J_n \subset [0,T]$, avec $\lambda([0,T]\backslash J_n) < \frac{1}{n}$, tel que la restriction $F_{0|(J_n\times H)}$ est semi-continue supérieurement.

$$\emptyset \neq F_0(t,x) \subset F(t,x), \text{ pour tout } (t,x) \in J_n \times H.$$

Ainsi (4) implique l'existence d'une suite croissante $(J_n)_{n\geqslant 1}$ de compacts de $[0,T]$, telle que pour tout $n > 0$, $F_{0|_{(J_n\times H)}}$ est s.c.s à valeurs convexes fermées non vides dans H. Par le Théorème de Dugundji, pour tout $n \geqslant 1$, la multi-application $F_{0|_{(J_n\times H)}}$ admet une extension s.c.s, $\widetilde{F}_n : [0,T] \times H \longrightarrow H$ tel que

$$\widetilde{F}_n(t,x) = F_0(t,x) \text{ pour tout } (t,x) \in J_n \times H. \tag{4.2.1}$$

$$\widetilde{F}_n(t,x) \subset K \text{ pour tout } (t,x) \in [0,T] \times H. \tag{4.2.2}$$

Justifions dans la suite la croissance de $(J_n)_{n\geqslant 1}$. Supposons que la suite obtenue n'est pas croissante. On peut alors construire à partir de $(J_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante qui vérifie les mêmes propriétés. En effet, si on pose

$$J'_1 = J_1, \quad J'_2 = J'_1 \cup J_2, \quad \cdots, \quad J'_n = J'_{n-1} \cup J_n,$$

il est clair que $J'_{n-1} \subset J'_n$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\lambda([0,T]\backslash J'_n) = \lambda([0,T]\backslash(J'_{n-1} \cup J_n)) &= \lambda([0,T] \cap (J'_{n-1} \cup J_n)^c) \\ &= \lambda([0,T] \cap ((J'_{n-1})^c \cap (J_n)^c) \\ &\leqslant \lambda([0,T] \cap (J_n)^c) = \lambda([0,T]\backslash J_n) < \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Montrons que $F_{0|_{(J'_n\times H)}}$ est s.c.s. On procède par récurrence.
Pour n=1, $F_{0|_{(J'_1\times H)}} = F_{0|_{(J_1\times H)}}$ est s.c.s.
On suppose que $F_{0|_{(J'_{n-1}\times H)}}$ est s.c.s et montrons que $F_{0|_{(J'_n\times H)}}$ est s.c.s. Pour $(t,x) \in J'_n \times H$, ceci implique que $(t,x) \in J_n \times H$ ou bien $(t,x) \in J'_{n-1} \times H$, et la s.c.s de F_0 est satisfaite sur ces deux ensembles. D'où le résultat.
D'après le Théorème 4.2.1, il existe une fonction absolument continue $u_n(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$

solution de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt}(t) \in \widetilde{F}_n(t, u_n(t)) \quad \text{p.p. sur } [0,T], \\ u_n(0) = u_0, \\ \|\frac{du_n}{dt}(t)\| \leqslant \|K\| \quad \text{p.p. sur } [0,T], \\ u_n(t) \in u_0 + TK \quad \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Alors, il existe une fonction mesurable $f_n : [0,T] \longrightarrow H$ tel que

$$\frac{du_n}{dt}(t) = f_n(t) \text{ et } f_n(t) \in \widetilde{F}_n(t, u_n(t)) \text{ p.p. sur } [0,T]. \tag{4.2.4}$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$, $(u_n(t)) \subset u_0 + TK$, et donc cette suite est relativement compacte, et comme $\|\frac{du_n}{dt}(t)\| \leqslant \|K\|$, par Théorème 4.1.7, $(u_n(\cdot))$ converge uniformément vers $u(\cdot)$ dans $C([0,T],H)$ et $(\frac{du_n}{dt})$ converge faiblement vers $\frac{du}{dt}$ dans $L^1([0,T],H)$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que $f(t) = \frac{du}{dt}(t) \in F(t,u(t))$ p.p. sur $[0,T]$. En effet, d'après (4.2.4), pour tout $n \geqslant 1$, il existe un ensemble μ-négligeable $N_n \subset [0,T]$ tel que pour tout $t \notin N_n$, $f_n(t) \in \widetilde{F}_n(t,u_n(t))$. Puisque $f_n(\cdot)$ et $u_n(\cdot)$ sont mesurables, alors d'après la propriété (3), $f_n(t) \in F_0(t,u_n(t))$, pour tout $t \in J_n \backslash N_n$.

Posons $N_0 = ([0,T] \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n)$ qui est négligeable car

$$\begin{aligned} \lambda(N_0) = \lambda\Big(([0,T] \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n)\Big) &\leqslant \lambda([0,T] \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n) + \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n) \\ &\leqslant \lambda(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ([0,T] \backslash J_n)) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(N_n) \leqslant \lambda([0,T] \backslash J_n) < \frac{1}{n} \ \ \forall n > 0. \end{aligned}$$

Par passage à la limite $n \to +\infty$, on obtient $\lambda(N_0) = 0$.

Ceci implique que $f_n(t) \in F_0(t,u_n(t))$, pour tout $t \in [0,T] \backslash N_0$, i.e. il existe un entier $p(t) > 0$ tel que pour tout $n \geqslant p(t)$, $t \in J_n \backslash N_n$ et $f_n(t) \in F_0(t,u_n(t))$.

Pour tout $x^* \in H$, on définit l'application

$$\begin{aligned} \delta^*(x^*, F_0(\cdot,\cdot)) : [0,T] \times H &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ (t,x) &\longmapsto \delta^*(x^*, F_0(t,x)). \end{aligned}$$

La fonction $\delta^*(x^*, F_0(t,\cdot))$ est s.c.s grâce à la s.c.s de F_0 sur $J_n \times H$ pour tout $n \geqslant p(t)$ (voir Proposition 4.1.3), et donc de Proposition 4.1.5, puisque (u_n) converge uniformément vers u, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} \delta^*(x^*, F_0(t,u_n(t))) \leqslant \delta^*(x^*, F_0(t,u(t))).$$

Pour tout $t \in [0,T]\backslash N_0$ (on a par la Définition de δ^*)

$$\langle x^*, f_n(t)\rangle \leqslant \delta^*(x^*, F_0(t, u_n(t)))$$

alors

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle x^*, f_n(t)\rangle \leqslant \limsup_{n\to+\infty}\delta^*(x^*, F_0(t, u_n(t))) \leqslant \delta^*(x^*, F_0(t, u(t))). \tag{4.2.5}$$

Remarquons aussi que par la Propriété (1), Théorème 3.1.20 et Théorème 4.1.4, la fonction $t \longmapsto \delta^*(x^*, F_0(t, x))$ est mesurable.

D'autre part, sachant que $f_n(\cdot) \rightharpoonup f(\cdot)$ dans $L^1([0,T], H) \iff \langle \xi, f_n(\cdot)\rangle \longrightarrow \langle \xi, f(\cdot)\rangle$ pour tout $\xi \in L^\infty([0,T], H)$, ceci implique que

$$\int_0^T \langle \xi(t), f_n(t)\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle \xi(t), f(t)\rangle dt$$

il en résulte du Lemme de Fatou (Lemme 4.1.6), et (4.2.5), que pour toute partie Lebesgue mesurable B de $[0,T]$, et tout $x^* \in H$ (en prenant $\xi = x^*\mathbb{1}_B(\cdot)$)

$$\begin{aligned}\int_B \langle x^*, f(t)\rangle dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_B \langle x^*, f_n(t)\rangle dt = \limsup_{n\to+\infty}\int_B \langle x^*, f_n(t)\rangle dt \\ &\leqslant \int_B \limsup_{n\to+\infty}\langle x^*, f_n(t)\rangle dt \leqslant \int_B \delta^*(x^*, F_0(t, u(t)))dt.\end{aligned}$$

Ceci implique que $\langle x^*, f(t)\rangle \leqslant \delta^*(x^*, F_0(t, u(t)))$ p.p. sur $[0,T]$. Par Théorème 4.1.2, on conclut que $f(t) \in \overline{co}(F_0(t, u(t)))$ p.p. et comme F_0 est à valeurs convexes fermées, donc $f(t) \in F_0(t, u(t))$ p.p. sur $[0,T]$, de la propriété (2), $f(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur $[0,T]$,
ceci termine la démonstration en remarquant que $u(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(0) = u_0$.

■

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Aubin, A. Cellina, Differential inclusions set-valued maps and viability theory. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New york Tokyo (1984).

[2] J. P. Aubin and I. Ekeland, Applied non nonlinear analysis. Wiley interscience, New York, (1984).

[3] D. Azzam-Laouir, Polycopié, cours d'analyse multivoque. Université de jijel, 2020-2021.

[4] D. Azzam-Laouir, Polycopié, cours de mesure et intégration. Université de jijel, 2009-2010.

[5] V. Barbu and T. Precupanu, Convexity and optimisation in Banach space, fourth edition Springer, Romania (2012).

[6] H. Benabdelah and A. Faik, Perturbations convexes et non convexes des équations d'évolution. Port. Math. 53 (1996) 187-208.

[7] C. Castaing, Une nouvelle extention du théorème de Scorza-Dragoni, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 271 (1970) 396-398.

[8] C. Castaing and M. Monteiro Marques, A multivalued version of Scorza–Dragoni theorem with an application to normal integrands. Bull. Pol. Acad. Sci. Mathematics, 42 (1994) 133–140.

[9] C. Castaing and M. Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin 580 (1977).

[10] Ph. Clauss and V. Loechner, Parametric analysis of polyhedral iteration spaces. Journal of VLSI Signal Processing. Kluwer Academic Pub, Vol. 19, No. 2, (1998) 179-194.

[11] J. Dugundji, An extension of Tietz's theorem. Pacific J. Math. 1 (1951) 353-367.

[12] J. Dugundji, Topology. Allyn and Bacon, Boston, (1966).

[13] N. El Hage Hassan, Topologie générale et espaces normés. Université d'Orléans, (2011).

[14] A. El Jai, Eléments de topologie et espaces métriques. Presses Universitaires de Perpignan, (2007)

[15] M. B. Feldman, A Proof of Lusin's Theorem, Amer. Math. Month., 88 (1981) 191-192.

[16] J. HENRY, Topologie et analyse, Notes de cours. Préparation à l'Agrégation interne de Mathématiques, Université Paris Sud Orsay, (2006).

[17] C. F. Himmelberg and F. S. Van Vleck, An extention of Brunovsky's Scorza-Dragoni type theorem for unbounded set-valued functions. Math. Slovaca 26(1976) 74-52.

[18] E. Kubińska, Approximation of Carathéodory functions and multifunctions. Real Analysis Exchange 30 (1), (2004) 351-359.

[19] H. Royden , P. Fitzpatrick, Real Analysis. Fourth Edition, United States, (2010).

[20] G. Scorza-Dragoni una theorema funzioni continue risetto ad una i misurable rispetto at ultra variable, Rend. Sem. Mat. univ Padova 17 (1948) 102-106.