



Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et Applications.

Thème

**La méthode primale-duale du point
intérieur basée sur plusieurs sélections du
pas de déplacement pour la programmation
du cône de second ordre (PCSO)**

Présenté par :

* BOUTAGHANE SARRA

* GHELIMA OUAHIBA

Devant le jury composé de :

Président : I. KECIS

M.C.A Université de Jijel

Encadreur : I. TOUIL

M.C.A Université de Jijel

Examineur : R. BOUFENOUCHE

M.C.B Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

Remerciements

Nos remerciements vont tout premièrement à ALLAH tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il nous donné durant ces longue années d'étude et le courage pour terminer ce mémoire.

Nous remercions chaleureusement notre encadreur I.TOUIL pour la pertinence de ses remarques et sa patience durant la réalisation de ce travail. Nous admirons beaucoup son sérieux et sa manière de diriger qui furent pour nous une grande source d'inspiration et de motivation.

Nous remercions vivement I.KECIS pour avoir accepter de présider le jury de soutenance.

Nous adressons également nos vifs remerciements à L'examinatrice R.BOUFENOUCHE pour avoir accepter d'être membre de ce jury.

Nous voulons aussi remercier tous les enseignants qui ont contribué à notre formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématique.

Enfin, c'est avec beaucoup de plaisir que nous pouvons remercier profondément nos familles pour leurs conseils et encouragement durant toutes les années de notre étude.

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'études

Je dédie ce travail à MON PÈRE que je t'aime.

A la lumière de ma vie, la source de mes efforts et mon bonheur, MAMAN que j'adore.

Je dédie ce travail à tous mes très chers frères :

FATIH, ABDELGHANI.

Je dédie ce travail à mes sœurs :

HAKIMA, CHAFIKA et WARDA

Je dédie ce travail à mes poussions de la famille :

RITAJ, RIHAB

Je dédie ce travail à toutes mes amies : ACHOUK, ZINEB, SALMA.

Elles n'ont cessé de consentir pour moi, par leur encouragement et leur profonde affection. Qu'elles m'ont donné l'avantage de me consacrer entièrement et uniquement à mes études. Je vous souhaite du fond de mon cœur une belle vie pleine de joie, de bonheur et de succès. A toute personne que j'ai une place dans son cœur que je connais, j'estime et j'aime.

A tout qui m'aiment et que j'aime.

B. SARRA

Dédicace

je dédie ce travail :

A l'homme de ma vie, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir ; **papa** je t'aime.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur : **MAMA** que j'adore.

A ma chère sœur **Sara**.

A mes frères **Lotfi** et **Yaakoub**.

A mon amie **Sakina**.

A tous ceux et celles qui m'ont apporté la moindre aide ou soutien, ils apprendront à se connaître.

GH.OUHIBA

Table des matières

Introduction	7
1 Préliminaires et notions fondamentales	9
1.1 Analyse convexes	9
1.2 Formule de Taylor	12
1.3 Programmation mathématique	13
1.3.1 Définitions	13
1.3.2 Classification des problèmes	15
1.3.3 Principaux résultats d'existence et d'unicité	15
1.3.4 Conditions d'optimalité	15
1.4 Théorie de la dualité	16
1.5 Relation entre primal-dual	17
1.5.1 Programme du cône de second ordre	18
1.6 Relation avec d'autres problèmes d'optimisation	21
1.7 Algèbre linéaire du cône de second ordre (PCSO)	21
1.7.1 Inégalités statistiques préliminaires	24
2 La méthode de trajectoire centrale primale-duale basée sur diverses sélections du pas de déplacement pour la programmation cône du second ordre	26
2.1 Position du problème	26
2.2 Convergence globale et méthode de Newton	28
2.2.1 Existence et unicité de la solution optimale de (P_μ)	28
2.2.2 Convergence de la solution optimale de (P_μ) vers celle de (P)	30

2.3	Calcul de directions par la méthode de Newton	31
2.4	Calcul du pas de déplacement	33
2.4.1	Le premier lemme	33
2.4.2	Le deuxième lemme	35
2.4.3	Le troisième lemme	36
2.4.4	Le quatrième lemme	37
2.5	L'algorithme de trajectoire centrale et son convergence	38
2.5.1	L'algorithme de trajectoire centrale pour le problème de PCSO :	38
2.6	Analyse de la complexité	41
Bibliographie		49

Introduction

L'optimisation est une branche des mathématiques utilisée dans des domaines tels que l'informatique, l'économie, la finance, les statistiques, l'exploration des données et de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie.

Un problème d'optimisation convexe est un problème d'optimisation dans lequel la fonction objective est une fonction convexe et l'ensemble réalisable est un ensemble convexe.

Un problème d'optimisation convexe est en forme standard s'il est écrit comme

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ g_i(x) \leq 0, \quad ; i = 1, \dots, m, \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est la variable et la fonction objective $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et les fonctions contraintes $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, ; i = 1, \dots, m$ sont convexes et $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, ; j = 1, \dots, p$ sont affines. Le programme du cône de second ordre (*PCSO*) est un problème d'optimisation convexe de la forme

$$(P) \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b, \\ x \in \mathcal{E}_+^n. \end{cases}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, \mathcal{E}_+^n = \{x \in \mathcal{E}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : x_0 \geq \|\tilde{x}\|\}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'optimisation.

Les problèmes de (*PCSO*) peuvent être résolus par les méthodes du point intérieur. Ces méthodes ont été découvertes par le mathématicien soviétique I. Dikin en 1967 et réinventées aux États-Unis au milieu des années 1980 par N. Karmarkar qui a développé une méthode pour la programmation linéaire appelé L'algorithme de Karmarkar, qui s'exécute dans un temps polynomial et d'autant plus efficace dans la pratique. Il y a principalement trois grandes classes de

méthodes de point intérieur : les méthodes affines, les méthodes projectives et les méthodes de trajectoire centrale. La classe des méthodes de trajectoire centrale primal-dual est considérée comme l'une des plus efficaces et réussies méthodes.

Dans notre travail on s'intéresse essentiellement à la résolution des problèmes d'optimisation de la programmation du cône de second ordre par la méthode primale-duale de type trajectoire centrale.

Ce mémoire est réparti en deux chapitres. Le premier a pour vocation de rappeler les notions fondamentales d'usage fréquent pour la suite, à savoir : l'analyse convexe, quelques résultats de la programmation mathématique. On précise ainsi la formulation générale du problème de PCSO et les théorème de la dualité.

Le deuxième chapitre est le centre de ce travail. Sur le plan théorique, nous montrons que le problème perturbé par le paramètre μ admet une solution optimale unique pour chaque valeur de μ fixé et converge vers une solution optimale du problème PCSO. Dans une deuxième partie, on présente d'une manière détaillée une méthode primale-duale de points intérieurs de type trajectoire centrale pour résoudre le problème PCSO dans laquelle, en introduisant quatre nouvelles alternatives donnant lieu au calcul effectif du pas de déplacement intervenant dans l'algorithme. Sur la plan algorithmique, nous présentons l'algorithme prototype de la méthode de trajectoire centrale pour la programmation du cône de second ordre. Puis, on montre sa convergence. Finalement, on termine cette partie par l'analyse de la complexité algorithmique, où on montre que notre algorithme trouve la solution optimale en un temps polynomial.

Chapitre 1

Préliminaires et notions fondamentales

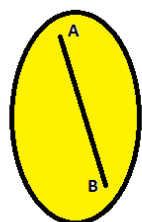
Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base sur l'analyse convexe, l'algèbre linéaire et les statistiques. Nous rappelons également la programmation mathématique, la programmation du cône de second ordre ainsi que les résultats de dualité.

1.1 Analyse convexes

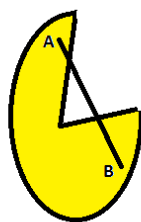
Définition 1.1.1. (*Ensembles convexes*) Un sous ensemble C de \mathbb{R}^n est dit convexe si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1]; (1 - \lambda)x + \lambda y \in C$$

Autrement dit, les segments de droite joignant deux points quelconques $x, y \in C$, c-à-d $[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y \in C, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ est entièrement inclus dans C :



Ensemble convexe



Ensemble non convexe

Définition 1.1.2. (*Fonctions convexes*) Soit f fonction définie sur un ensemble convexe C , f est dite :

- Convexe sur C si et seulement si :

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- Strictement convexe C si et seulement si :

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in]0, 1[, x \neq y, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

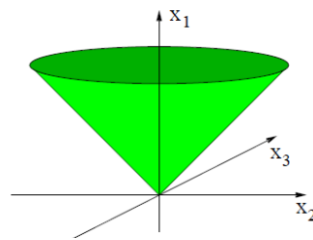
Remarque 1.1.1. On dit que la fonction f est (strictement) convexe sur un ensemble convexe C si $(-f)$ est (strictement) concave sur C .

Définition 1.1.3. (Ensemble compact) Soit K une partie de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}$. Alors K est compact si et seulement si K est une partie fermée et bornée.

Exemple 1.1.1. Les segments de \mathbb{R} sont compacts. Plus généralement, toute boule fermée de \mathbb{R} ou \mathbb{C} est compacte.

Définition 1.1.4. (Cône) On dit que l'ensemble K est un cône si :

$$\lambda K \subset K, \forall \lambda > 0$$



Un cône K est dit :

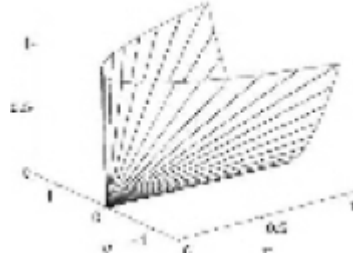
1. Pointé, si $0 \in K$.
2. Saillant, si $K \cap (-K) = \{0\}$.
3. Solide, si $\text{int}K \neq \emptyset$.
4. Convexe, si $K + K \subset K$.

Exemple 1.1.2. Les orthants positifs \mathbb{R}_+^n et \mathbb{R}_{++}^n , l'ensemble des polynômes positifs, l'ensemble des fonctions réelles qui sont positives sur une partie donnée de leur ensemble de définition et les ensembles de $(n \times n)$ matrices symétriques semi-définies positives (\mathbb{S}_+^n) sont des cônes.

Exemple 1.1.3. Soit \mathbb{S}_+^2 l'ensemble de (2×2) matrices symétriques (\mathbb{S}^n). \mathbb{S}_+^2 est un cône.

telles que : $x \geq 0; z \geq 0; xz - y^2 \geq 0$ avec $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$

La figure suivante illustre le cône \mathbb{S}_+^2



Définition 1.1.5. (Cônes convexes) Un ensemble non vide $K \subset \mathbb{R}^n$ est un cône convexe si et seulement s'il est stable par rapport aux combinaisons linéaires positives, i.e.,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \forall x, y \in K, \alpha x + \beta y \in K.$$

(Cône de récession) Soit C un convexe non vide de \mathbb{R}^n et $a \in C$, on pose :

$$C_\infty(a) = \{d \in \mathbb{R}^n, a + \lambda d \in C, \forall \lambda > 0\}.$$

Alors, $C_\infty(a)$ est un cône convexe non vide.

Définition 1.1.6. On appelle cône de récession (ou asymptote) de C l'ensemble

$$C_\infty = \bigcap_{a \in C} C_\infty(a).$$

Un élément $d \in C_\infty$ est appelé direction de récession.

Proposition 1.1.1. Soit C un convexe, fermé et non vide de \mathbb{R}^n , alors :

- $C_\infty(a) = C_\infty(b); \forall a, b \in C.$
- L'ensemble C_∞ , est un cône convexe fermé .
- C est borné si et seulement si $C_\infty = \{0\}.$

Exemple 1.1.4.

1. L'orthant positif \mathbb{R}_+^n et toute boule dans un espace vectoriel normé sont convexes.
2. Le disque unitaire $C = \{(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ est convexe.
3. Les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^n; b^T x \geq \beta\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n; b^T x \leq \beta\}$ sont des demi-espaces fermés convexes, avec $b \in \mathbb{R}^n$ et $\beta \in \mathbb{R}.$
4. Les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^n; b^T x > \beta\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n; b^T x < \beta\}$ sont des demi-espaces ouverts convexes non vide, avec $b \in \mathbb{R}^n$ et $\beta \in \mathbb{R}.$
5. L'ensemble $P = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b\}$ est un ensemble convexe fermé appelé polyèdre convexe ou tout simplement polyèdre, avec $b \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$

Définition 1.1.7. (Le cône dual) Soit K un cône. Le dual du cône K , noté K^* est défini de la façon suivante :

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : x^T y \geq 0, \forall x \in K\}.$$

K^* est un cône fermé et convexe.

Définition 1.1.8. (Fonction barrière) Soit $C \subset \mathbb{R}^n$, on appelle fonction barrière toute fonction f qui vérifie :

1. $f(x)$ finie, si x appartient à l'intérieur relatif du domaine réalisable (admissible).
2. $f(x)$ tend vers l'infini quand x s'approche de la frontière du domaine réalisable.

Définition 1.1.9. (Les dérivées) Le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable évalué au point $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$$

et les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice Hessienne s'écrivent :

$$[\nabla^2 f(x)]_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \forall i, j = 1, \dots, n.$$

1.2 Formule de Taylor

La formule de Taylor du nom de mathématicien Brook Taylor en 1715, permet l'approximation d'une fonction dérivable plusieurs fois au voisinage d'un point x_0 par un polynôme, dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de cette fonction à ce point.

Définition 1.2.1. Soient $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tels que $[a, a + h] \subset \Omega$, si $f \in C^1(\Omega)$, alors :

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 est donnée par :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \varepsilon(h).$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

Exemple 1.2.1. Considérons la fonction $x \mapsto e^x$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 de e^x au voisinage de 0 s'écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \varepsilon(x).$$

1.3 Programmation mathématique

1.3.1 Définitions

Dans cette partie, on donne certaines définitions élémentaires d'un programme mathématique ainsi que les principaux résultats d'existence et d'unicité de la solution optimale et les conditions d'optimalité.

Définition 1.3.1. (*Problème d'optimisation*) Un problème d'optimisation (minimisation) sans contraintes s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \min f(x) = f(\bar{x}) \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

autrement dit

$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ telle que} \\ f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Un problème d'optimisation (minimisation) sous contraintes s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \min f(x) = f(\bar{x}) \\ x \in D, \end{cases}$$

autrement dit

$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in D \text{ telle que} \\ f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in D. \end{cases}$$

Où $D \subsetneq \mathbb{R}^n$ appelé ensemble des contraintes.

Définition 1.3.2. (*Programme mathématique*) Un programme mathématique noté (PM) est un problème d'optimisation sous contraintes dans \mathbb{R}^n qui peut s'écrire de la façon suivante

$$(PM) \begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, n, \\ h_j(x) = 0, j = 1, \dots, m, \\ x \in D. \end{cases}$$

Où

- D est une partie de \mathbb{R}^n et x un vecteur appelé variable, ses n composantes sont dites les inconnues du problème (PM).
- La fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction objective ou économique.

- Les fonctions $g_i : D \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, qui forment des inégalités sont appelées les contraintes inégalités du problème.
- Les fonctions $h_j : D \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, m$, qui forment des équations sont appelées les contraintes égalités du problème.
- Un vecteur x vérifiant les contraintes de (PM), c'est-à-dire $g_i(x) \leq 0, (i = 1, \dots, n)$, $h_j(x) = 0, (j = 1, \dots, m)$ et $x \in D$ est dit solution réalisable de (PM), l'ensemble de ces solutions réalisables forme le domaine de définition (ou domaine réalisable) de (PM), i.e.,

$$S = \text{dom} f \bigcap_{i=1}^n \text{dom} g_i \bigcap_{j=1}^m \text{dom} h_j \bigcap D.$$

- Une solution réalisable x^* est dite optimale (ou optimum global) de (PM), si elle minimise la fonction $f(x)$ sur l'ensemble de toutes les solutions réalisables.
- Un vecteur x^0 est dit optimum local de (PM) si et seulement s'il existe un voisinage V de x^0 tel que x^0 soit optimum global du problème

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, n, \\ h_j(x) = 0, j = 1, \dots, m, \\ x \in D \cap V. \end{cases}$$

- la recherche du maximum d'une fonction f se ramène immédiatement au problème de minimisation de $-f$.
- Si $S = \mathbb{R}^n$, on dit que (PM) est un problème d'optimisation sans contraintes.

Définition 1.3.3. (Minimum local)

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que la fonction f admet un minimum local (solution optimale locale) en $x^* \in D$ si et seulement si :

$$\exists B(x^*, \varepsilon) = \{x \in D, \|x - x^*\| < \varepsilon\} : f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \subset D.$$

L'ensemble des minima locaux de (PM) est noté par :

$$\text{loc} \min_D f(x).$$

Définition 1.3.4. (Minimum global)

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que la fonction f admet un minimum global (solution optimale global) en $x^* \in D$ si et seulement si :

$$f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in D.$$

L'ensemble des minima globaux de (PM) est noté par :

$$\arg \min_D f(x).$$

Remarque 1.3.1. On a toujours $\arg \min_D f(x) \subseteq \text{loc} \min_D f(x)$.

1.3.2 Classification des problèmes

On classe le problème (PM) à partir de deux propriétés fondamentales à savoir la convexité et la différentiabilité des fonctions du problème. En effet

- (PM) est convexe si les fonctions f et g_i sont convexes et les fonctions h_j sont affines.
- (PM) est différentiable si les fonctions f , g_i et h_j sont différentiables.

1.3.3 Principaux résultats d'existence et d'unicité

Théorème 1.3.1. (Weierstrass) Si f est une fonction réelle continue sur $D \subset \mathbb{R}^n$ compact (D fermé borné), alors le problème (PM) admet au moins une solution optimale globale $x^* \in D$.

Théorème 1.3.2. Si D est convexe et f est strictement convexe alors, il existe au plus une solution optimale de (PM) .

Remarque 1.3.2. L'unicité d'une éventuelle solution optimale est en souvent une conséquence de la stricte convexité de la fonction objectif et de la convexité du domaine réalisable du problème d'optimisation.

Théorème 1.3.3. Si f est une fonction inf-compacte, alors le problème (PM) admet au moins une solution optimale.

Définition 1.3.5. Une fonction f est dite inf-compacte si $C_\infty = \{0\}$, où C_∞ est le cône de récession qui sera défini par la suite.

1.3.4 Conditions d'optimalité

Définition 1.3.6. Le lagrangien d'un programme mathématique (PM) est défini par

$$L(x, \lambda, y) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m y_j h_j(x), \lambda_i \in \mathbb{R}_+, y_j \in \mathbb{R}$$

Théorème 1.3.4. (Karush-Kuhn-Tucker (KKT))

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^n$, si x^* est un minimum local du problème (PM) alors, il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ tel que

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^m y_j \nabla h_j(x^*) = 0 & (\text{condition d'optimalité}), \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n & (\text{condition de complémentarité}), \\ h_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Les λ_i et y_j sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Définition 1.3.7. On dit qu'un problème de programmation mathématique est convexe s'il consiste à minimiser une fonction convexe (ou maximiser une fonction concave) sur un domaine convexe.

Ainsi le problème (PM) est un problème de programmation convexe (ou simplement un programme convexe) si f est convexe, les fonctions g_i ($i = 1, \dots, n$) et h_j ($j = 1, \dots, m$) sont convexes et $D \subset \mathbb{R}^n$ est aussi convexe.

Remarque 1.3.3. Si (PM) est convexe, alors les conditions d'optimalité (KKT) sont à la fois nécessaires et suffisantes.

La propriété fondamentale des programmes convexes apparaît alors dans le résultat suivant

Théorème 1.3.5. Pour un programme convexe, tout optimum local est un optimum global.

Remarque 1.3.4. Un problème de programmation mathématique est convexe dans lequel

- L'ensemble des contraintes (ou des solutions réalisables) est défini par un système d'équations (et/ou) d'inéquations linéaires.
- La fonction objective (ou économique) est linéaire.

1.4 Théorie de la dualité

Théorème 1.4.1. Dualité faible : Soient x et y deux solutions réalisables de (P) et (D) respectivement, alors $b^T y \leq c^T x$. La quantité $c^T x - b^T y \geq 0$, s'appelle saut de dualité.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} c^T x &\geq (A^T y)^T x, \\ &= y^T A x, \\ &= y^T b = b^T y. \end{aligned}$$

Noter : $b^T y \leq c^T x$ est toujours vrai si les solutions x et y sont optimales. □

Théorème 1.4.2. Dualité forte : Soient x et y deux solutions réalisables de (P) et (D) respectivement, tel que $b^T y = c^T x$, alors x et y sont des solutions optimales de (P) et (D), respectivement.

Preuve. On veut démontrer que x^* et y^* sont des solutions optimales des problèmes (P) et (D) respectivement, c'est à dire, on démontre que :

$$c^T x^* = \min c^T x \quad \text{et} \quad b^T y^* = \max b^T y.$$

il vient de montrer que $c^T x \geq b^T y$, donc $\min c^T x \geq \max b^T y$, en particulier $b^T y^* = c^T x^* \geq \min c^T x \geq \max b^T y \geq b^T y^* = c^T x^*$.

Et comme $b^T y^* = c^T x^*$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} c^T x^* \geq \min c^T x \geq c^T x^* \\ \text{et} \\ b^T y^* \geq \max b^T y \geq b^T y^*. \end{array} \right.$$

d'où le résultat. □

1.5 Relation entre primal-dual

primal	dual
fonction objective (min)	second membre
second membre	fonction objective (max)
A matrice des contraintes	A^T matrice des contraintes
contrainte $i \geq$	variable $y_i \geq 0$
contrainte $i =$	variable $y_i \leq 0$
variable $x_j \geq$	contrainte $j \leq$
variable $x_j \leq 0$	contrainte $j =$

Exemple 1.5.1. Soit le problème primal suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

- Le dual de ce problème est :

$$(D) \begin{cases} \max b^T y \\ A^T y \leq c, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Exemple 1.5.2. Soit le problème primal suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- Le dual de ce problème est :

$$(D) \begin{cases} \max 10y_1 + 8y_2 \\ y_1 + y_2 \geq 5, \\ 2y_1 - y_2 \geq 12, \\ y_1 + 3y_2 \geq 4, \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.5.1 Programme du cône de second ordre

Avant de définir le problème de programmation du cône de second ordre (PCSO) ainsi son problème perturbé associé, nous avons besoin d'introduire quelques notations.

Nous utilisons la notation " , " pour joindre des scalaires, des vecteurs et des matrices dans une ligne, et on utilise " ; " pour les joindre dans une colonne.

Par exemple : Si u et v sont deux vecteurs, alors avons

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = (u^T, v^T)^T = (u; v).$$

Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ dont la première entrée est indexée à 0, on écrit \tilde{v} pour le sous-vecteur composé des entrées de 1 à $n - 1$, donc, $v = (v_0, \tilde{v}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

On désigne par \mathcal{E}^n l'espace vectoriel réel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ de dimension n dont ses éléments v sont indexés à partir de 0.

Le cône du second ordre de dimension n est défini par :

$$\mathcal{E}_+^n = \{v \in \mathcal{E}^n : v_0 \geq \|\tilde{v}\|\}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme Euclidienne. L'ensemble $\text{int } \mathcal{E}_+^n = \{v \in \mathcal{E}^n : v_0 > \|\tilde{v}\|\}$ est appelé l'intérieur de \mathcal{E}_+^n .

On définit la fonction barrière logarithmique $\ell(\cdot)$ sur \mathcal{E}_+^n par :

$$\ell(v) := \begin{cases} -\ln \det(v), & \text{si } v \in \text{int } \mathcal{E}_+^n, \\ +\infty, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Soit $r \geq 0$ un entier. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, r$, soient n et n_i des entiers positifs tels que $n = \sum_{i=1}^r n_i$. Soit \mathcal{E}_{r+}^n désigne le produit cartésien de r cônes du second ordre $\mathcal{E}_+^{n_1}, \mathcal{E}_+^{n_2}, \dots, \mathcal{E}_+^{n_r}$. C'est à dire, $\mathcal{E}_{r+}^n = \mathcal{E}_+^{n_1} \times \mathcal{E}_+^{n_2} \times \dots \times \mathcal{E}_+^{n_r}$. De même, nous avons $\text{int } \mathcal{E}_{r+}^n = \text{int } \mathcal{E}_+^{n_1} \times \text{int } \mathcal{E}_+^{n_2} \times \dots \times \text{int } \mathcal{E}_+^{n_r}$ et $\mathcal{E}_r^n = \mathcal{E}^{n_1} \times \mathcal{E}^{n_2} \times \dots \times \mathcal{E}^{n_r}$.

Nous définissons la fonction barrière logarithmique $\ell(\cdot)$ sur \mathcal{E}_{r+}^n par :

$$\ell(v) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^r \ln \det(v_i), & \text{si } v = (v_1; v_2; \dots; v_r) \in \text{int } \mathcal{E}_{r+}^n; \\ +\infty, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Maintenant, nous sommes prêts à écrire les formes primales et duales d'un problème de PCSO ainsi les problèmes perturbés. Soient $y, b \in \mathbb{R}^m$. Soient aussi $x, c, z \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tels qu'ils soient tous partitionnés de manière conforme comme suit

$x := (x_1; x_2; \dots; x_r)$, $s := (s_1; s_2; \dots; s_r)$, $c := (c_1; c_2; \dots; c_r)$, et $A := (A_1, A_2, \dots, A_r)$, où $x_i, s_i, c_i \in \mathcal{E}^{n_i}$ et $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$ pour $i = 1, 2, \dots, r$.

Un programme du second ordre sous forme standard s'écrit :

$$(P) \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b, \\ x \in \mathcal{E}_+^n. \end{cases}$$

où

A = matrice réelle $m \times n$ (matrice des contraintes)

n = nombre de variables

m = nombre de contraintes

$c = (c_1, \dots, c_n)^T$ vecteur des coûts

$b = (b_1, \dots, b_m)^T$ vecteur du second membre

$c^T x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ fonction à minimiser (fonction objective ou fonction économique).

Pour obtenir le problème dual de (P), on considère la fonction Lagrangienne associée à ce dernier comme suit

$$L(x, y) = \langle c, x \rangle + \langle b - Ax, y \rangle, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m,$$

et on calcule la fonction duale associée $H(y)$

$$\begin{aligned} H(y) &= \min_x L(x, y) \\ &= \min_x \langle c, x \rangle + \langle b - Ax, y \rangle \\ &= \min_x \langle c, x \rangle + \langle -Ax, y \rangle + \langle b, y \rangle \\ &= \min_x \langle c - A^T y, x \rangle + \langle b, y \rangle \end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$\min_x \langle c - A^T y, x \rangle \geq 0 \begin{cases} 0, & \text{si } c - A^T y \geq 0, \\ -\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où

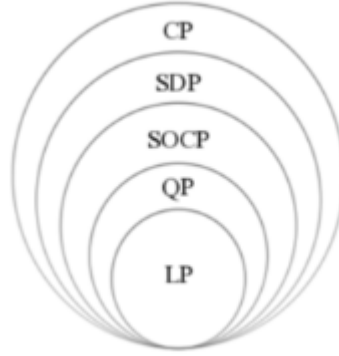
$$\max_y H(y) = \begin{cases} \max_y \langle b, y \rangle, & \text{si } c - A^T y \geq 0, \\ -\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc le problème dual de (P) s'écrit sous la forme suivante :

$$(D) \begin{cases} \max_y b^T y \\ A^T y + s = c, \\ s \in Q, y \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Remarque 1.5.1. *On peut toujours mettre un programme linéaire quelconque sous forme standard en introduisant des variables supplémentaires, dites variables d'écart.*

1.6 Relation avec d'autres problèmes d'optimisation



LP : Programme linéaire .

QP : Programme quadratique programme de cône de deuxième ordre SOCP.

SDP : Programme semi-défini

CP : Programme de cône.

Remarque 1.6.1. *D'après cette figure, on conclut que :*

- *Tout programme de (PCSO) peut se réduire à un problème de programmation linéaire (PL) ou de programmation quadratique (PQ).*
- *Autrement dit la programmation (PCSO) est une généralisation de la programmation linéaire et quadratique.*

1.7 Algèbre linéaire du cône de second ordre (PCSO)

Dans cette partie, on va donner les résultats préliminaires nécessaires pour la suite.

Définition 1.7.1. (*Décomposition spectrale*) *La décomposition spectrale de x dans \mathcal{E}^n est une décomposition de x en vecteurs propres (notés c_1 et c_2) avec des nombres propres (notés λ_1 et λ_2) définie comme suit :*

$$x = \underbrace{(x_0 + \|\tilde{x}\|)}_{\lambda_1(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1; \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|} \end{pmatrix}}_{c_1(x)} + \underbrace{(x_0 - \|\tilde{x}\|)}_{\lambda_2(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1; -\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|} \end{pmatrix}}_{c_2(x)}.$$

Remarque 1.7.1. • *Notons que $c_1(x)$ et $c_2(x)$ satisfont les propriétés suivantes :*

$$c_1(x) \circ c_2(x) = 0, \quad c_1^2(x) = c_1(x), \quad c_2^2(x) = c_2(x) \quad \text{et} \quad c_1(x) + c_2(x) = e_n. \quad (1.1)$$

- Toute paire de vecteurs $\{c_1, c_2\}$ qui satisfait les propriétés de (1.1) est appelée un référentiel de Jordan.
- On dit que les vecteurs x et y commutent si et seulement s'ils partagent un référentiel de Jordan, i.e., $x = \lambda_1(x)c_1 + \lambda_2(x)c_2$ et $y = \lambda_1(y)c_1 + \lambda_2(y)c_2$ pour un référentiel de Jordan dans $\{c_1, c_2\}$, donc $c_1(x) = c_1(y)$ et $c_2(x) = c_2(y)$ lorsque les opérateurs x et y commutent.

Définition 1.7.2. (Racine carrée) La racine carrée de x est définie par

$$x^2 := \lambda_1^2(x)c_1(x) + \lambda_2^2(x)c_2(x) = \begin{bmatrix} x_0^2 + \|\tilde{x}\|^2 \\ 2x_0\tilde{x} \end{bmatrix}.$$

Notons que x^2 peut s'écrire comme $x^2 = Arw(x)x$ où $Arw(x)$ est la matrice en forme de flèche (en anglais arrow-shaped matrix) définie dans $\mathbb{R}^{n \times n}$ associée à chaque vecteur $x \in \mathcal{E}^n$ et définie par :

$$Arw(x) := \begin{bmatrix} x_0 & \tilde{x}^T \\ \tilde{x} & x_0 I \end{bmatrix}.$$

Notons aussi que $x \in \mathcal{E}_+^n$ (resp. $x \in \text{int } \mathcal{E}_+^n$) si et seulement si la matrice $Arw(x)$ est semi-définie positive (resp. définie positive).

Nous définissons l'opérateur bilinéaire $\circ : \mathcal{E}^n \times \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ par :

$$x \circ y := Arw(x)y = \begin{bmatrix} x^T y \\ x_0 \tilde{y} + y_0 \tilde{x} \end{bmatrix}.$$

Pour chaque $x, y \in \mathcal{E}^n$. On sait que l'espace \mathcal{E}^n muni du produit "o" forme une algèbre euclidienne de Jordan avec le vecteur d'identité $e_n = (1, 0) \in \mathcal{E}^n$ sous le produit interne $\langle x, y \rangle := x^T y$.

Définition 1.7.3. (Trace d'un vecteur) Soit $x \in \mathcal{E}^n$ un vecteur, alors la trace du vecteur x est définie par :

$$\text{trace}(x) := \lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 2x_0$$

Proposition 1.7.1. Soient x et y deux vecteurs de \mathcal{E}^n , alors on a :

1. $\text{Trace}(x+y) = \text{trace}(x) + \text{trace}(y)$.
2. $\text{Trace}(\lambda x) = \lambda \text{trace}(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Définition 1.7.4. (Déterminant) Soit $x \in \mathcal{E}^n$ un vecteur, alors le déterminant du vecteur x est défini par :

$$\det(x) := \lambda_1(x) \times \lambda_2(x) = x_0^2 - \|\tilde{x}\|^2.$$

Remarque 1.7.2. • On dit que $x \in \mathcal{E}^n$ (respectivement $x \in \text{int}\mathcal{E}_+^n$) est *sem-défini* (*défini*) positif si et seulement si $\det(x) \geq 0$ (respectivement $\det(x) > 0$).

• Notons que $x \in \mathcal{E}_+^n$ est inversible si $\det(x) \neq 0$, son inverse est noté x^{-1} .

Définition 1.7.5. (Fonction continue) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Nous pouvons définir la fonction f sur \mathcal{E}^n par :

$$f(x) := f(\lambda_1(x))c_1(x) + f(\lambda_2(x))c_2(x).$$

En particulier, x^n pour un entier n , qui est défini récursivement par : $x^n := x \circ x^{n-1}$, peut être redéfini par :

$$x^n := \lambda_1^n(x)c_1(x) + \lambda_2^n(x)c_2(x).$$

Définition 1.7.6. (L'inverse d'un vecteur) Si $x \in \mathcal{E}^n$ est un vecteur : l'inverse de $x \in \mathcal{E}^n$ est défini par :

$$x^{-1} := \frac{1}{\lambda_1(x)}c_1(x) + \frac{1}{\lambda_2(x)}c_2(x) = \frac{1}{\det(x)}Rx,$$

où

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & -I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Notons que $x^{-1} \circ x = e_n$. Le vecteur $x \in \mathcal{E}^n$ est dit inversible si x^{-1} est défini (i.e., si $\det(x) \neq 0$), et non inversible dans le cas contraire. Le vecteur $x \in \mathcal{E}^n$ est appelé semi-défini positif (resp. défini positif) si $x \in \mathcal{E}_+^n$ (resp. $x \in \text{int}\mathcal{E}_+^n$). Il est important de signaler que chaque vecteur défini positif est inversible et que son inverse est également défini positif.

Définition 1.7.7. (Produit scalaire) Soit $x, y \in \mathcal{E}^n$, le produit scalaire est défini par :

$$\sqrt{\langle x, y \rangle} = \sqrt{\text{trace}(x^T y)}$$

Définition 1.7.8. (Norme) La norme du vecteur $x \in \mathcal{E}^n$ est définie comme suit :

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

et

$$\sqrt{x} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\text{trace}(x^T x)}.$$

Définition 1.7.9. Soit $x \in \mathcal{E}^n$ un vecteur, alors la racine carrée de x notée $x^{\frac{1}{2}}$ (ou \sqrt{x}) est définie comme suit

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda_1}c_1 + \sqrt{\lambda_2}c_2.$$

Définition 1.7.10. (Norme de Frobenius) La norme de Frobenius de $x \in \mathcal{E}^n$ est définie par :

$$\|x\|_F := \sqrt{\lambda_1^2(x) + \lambda_2^2(x)} = 2\|x\|.$$

Proposition 1.7.2. Soit $x, y \in \mathcal{E}^n$, alors on a :

$$\|x \circ y\| \leq \|x\| \|y\|_F \leq \|x\|_F \|y\|_F, \quad (1.2)$$

et

$$\|x + y\|_F^2 = \|x\|_F^2 + \|y\|_F^2 + 8x^T y.$$

Définition 1.7.11. (La représentation quadratique) La représentation quadratique Q joue un rôle important dans le développement de notre analyse.

Il est bien connu que dans le théorème 9 de la référence [24], on a $Q_p(\mathcal{E}_{r+}^n) = \mathcal{E}_{r+}^n$ pour tout vecteur inversible $p \in \mathcal{E}_+^n$ et de plus $Q_{p^{-1}} = Q_p^{-1}$ si p est inversible.

Remarque 1.7.3. Toutes les notions ci-dessus sont également utilisées au sens du bloc comme suit :

Soit $x = (x_1; x_2; \dots; x_r)$ et $y = (y_1; y_2; \dots; y_r)$ avec $x_i, y_i \in \mathcal{E}^{n_i}$ pour $i = 1, 2, \dots, r$. Alors,

- $x \circ y := (x_1 \circ y_1; x_2 \circ y_2; \dots; x_r \circ y_r)$.
- $x^T y := x_1^T y_1 + x_2^T y_2 + \dots + x_r^T y_r$.
- $Arw(x) := Arw(x_1) \oplus Arw(x_2) \oplus \dots \oplus Arw(x_r)$.
- $Q_x := Q_{x_1} \oplus Q_{x_2} \oplus \dots \oplus Q_{x_r}$.
- $e := (e_{n_1}; e_{n_2}; \dots; e_{n_r})$ est le vecteur d'identité de \mathcal{E}_r^n .
- $f(x) := (f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_r))$. En particulier $x^{-1} := (x_1^{-1}; x_2^{-1}; \dots; x_r^{-1})$.
- $\|x\|_F^2 := \|x_1\|_F^2 + \|x_2\|_F^2 + \dots + \|x_r\|_F^2$.
- x et y sont des opérateurs commutent si et seulement si x_i et y_i sont des opérateurs commutent pour chaque $i = 1, 2, \dots, r$.
- Notons que $x \in \mathcal{E}_{r+}^n$ a $2r$ valeurs propres (y compris les multiplicités). Ces valeurs propres sont constituées de l'union des valeurs propres de chaque x_i pour $i = 1, 2, \dots, r$.

1.7.1 Inégalités statistiques préliminaires

Dans cette partie, nous présentons quelques inégalités statistiques nécessaires pour montrer certains résultats de ce travail.

Définition 1.7.12. Soit $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une suite de n nombres réels, alors sa moyenne \bar{x} est donnée par :

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

et son écart-type σ_x est défini comme suit :

$$\sigma_x^2 := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2.$$

Proposition 1.7.3. Supposons que $x \in \mathbb{R}^n$, alors nous avons

$$\bar{x} - \sigma_x \sqrt{n-1} \leq \min_{1 \leq k \leq n} x_k \leq \bar{x} - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}},$$

et

$$\bar{x} + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}} \leq \max_{1 \leq k \leq n} x_k \leq \bar{x} + \sigma_x \sqrt{n-1}.$$

En particulier, si $x_k > 0$ pour tout les $k = 1, 2, \dots, n$, alors nous avons

$$n \ln(\bar{x} - \sigma_x \sqrt{n-1}) \leq A \leq \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \leq B \leq n \ln(\bar{x}),$$

où

$$A = (n-1) \ln\left(\bar{x} + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}}\right) + \ln(\bar{x} - \sigma_x \sqrt{n-1}), \text{ et } B = (n-1) \ln\left(\bar{x} - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}}\right) + \ln(\bar{x} + \sigma_x \sqrt{n-1}).$$

Le premier résultat de la proposition est due de la référence [39] et le deuxième est due du théorème 5 de la référence [9].

Chapitre 2

La méthode de trajectoire centrale primale-duale basée sur diverses sélections du pas de déplacement pour la programmation cône du second ordre

Dans ce chapitre, on considère une classe de méthodes de points intérieurs primale-duale de type trajectoire centrale pour la programmation du cône de second ordre (PCSO). On associe au problème primal (P) de (PCSO) le problème perturbé (P_μ). En premier lieu, on montre l'existence et l'unicité de la solution optimale de (P_μ) ainsi sa convergence vers la solution optimale du problème initial (P) quand μ tend vers 0. Puis, on présente quatre variantes pour calculer le pas de déplacement. Après, on établit la convergence de notre algorithme. Et enfin, on analyse la complexité algorithmique de notre méthode.

2.1 Position du problème

Le problème primal de PCSO et son dual dans les structures multi-blocs sont définis respectivement par :

$$(P_i) \begin{cases} \min c_1 x_1 + \dots + c_r x_r \\ A_1 x_1 + \dots + A_r x_r = b, \\ x_i \in \varepsilon_+^{n_i}, i = 1, \dots, r, \end{cases}$$

$$(D_i) \begin{cases} \max b^T y \\ A_i^T y + s_i = c_i, i = 1, \dots, r, \\ s_i \in \varepsilon_+^{n_i}, i = 1, \dots, r. \end{cases}$$

On peut réécrire le paire (P_i, D_i) de manière compacte comme suit :

$$(P) \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b, \\ x \succeq 0, \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} \max b^T y \\ A^T y + s = c, \\ s \succeq 0, \end{cases}$$

où $x, s \succeq 0$ signifie que $x, s \in \mathcal{E}_{r_+}^n$. Nous pouvons également écrire $x, s \succ 0$, pour signifier que $x, s \in \text{int } \mathcal{E}_{r_+}^n$. Maintenant, nous définissons les ensembles des solutions réalisables (resp. strictement réalisable) de (P) et (D) par :

$$\mathcal{F}_P = \{x \in \mathcal{E}_r^n : Ax = b, x \succeq 0\}.$$

$$\mathcal{F}_D = \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{E}_r^n : A^T y + s = c, s \succeq 0\}.$$

$$\mathcal{F}_P^0 = \{x \in \mathcal{E}_r^n : Ax = b, x \succ 0\}.$$

$$\mathcal{F}_D^0 = \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{E}_r^n : A^T y + s = c, s \succ 0\}.$$

Ensuite, on suppose que les deux hypothèses sur le paire primal-dual (P, D) sont satisfaites :

- **Hypothèse 1** : $\text{rang}(A) = m$, i.e., les m lignes de la matrice A sont linéairement indépendantes.
- **Hypothèse 2** : Les ensembles \mathcal{F}_P^0 et \mathcal{F}_D^0 sont non vides.

Soit $\mu > 0$, un paramètre barrière. Résoudre le problème (P) est équivalent à résoudre le problème perturbé suivant :

$$(P_\mu) \begin{cases} \min [f_\mu(x) = c^T x + \mu \ell(x) + 2r\mu \ln \mu] \\ Ax = b, \\ x \succ 0. \end{cases}$$

On peut aussi résoudre le problème dual perturbé suivant

$$(D_\mu) \begin{cases} \max [g_\mu(y, s) = b^T y - \mu \ell(s) - 2r\mu \ln \mu], \\ A^T y + s = c, \\ s \succ 0. \end{cases}$$

2.2 Convergence globale et méthode de Newton

Dans cette section, nous prouvons tout d'abord l'existence et l'unicité de la solution optimale du problème (P_μ) et sa convergence vers la solution optimale du problème (P) lorsque μ tend vers zéro. Ensuite, nous appliquons la méthode de Newton au problème (P_μ) pour trouver une classe de direction.

2.2.1 Existence et unicité de la solution optimale de (P_μ)

Afin d'élaborer le point de vue de la convergence, nous commençons d'abord par la définition introductive suivante.

Définition 2.2.1. Soient f une fonction à valeur réelle définie sur un espace matriciel X et $\alpha \geq 0$, alors :

- (a) L'ensemble $C_\alpha(f) := \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ est appelé l'ensemble α -niveau de f .
- (b) La fonction f est appelée inf-compacte si les ensembles des niveaux $C_\alpha(f)$ sont compacts pour tout $\alpha > 0$.
- (c) La fonction de récession de f est la fonction $(f)_\infty : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(f)_\infty(\Delta x) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x+t\Delta x) - f(x)}{t}$$
- (d) Le cône de récession de f est l'ensemble de 0-niveau de la fonction de récession de f , noté par $C_0((f)_\infty)$.

Notons que la fonction f_μ est une fonction strictement convexe pour tout $\mu > 0$. Alors, si une solution optimale du problème (P_μ) existe, elle est unique. Pour montrer que le problème (P_μ) admet une solution, il suffit de montrer que la fonction f_μ est inf-compacte, ce qui nous amène à vérifier que le cône de récession suivant :

$$C_0((f_\mu)_\infty) = \{\Delta x \in \mathcal{E}_{r+}^n : (f_\mu)_\infty(\Delta x) \leq 0\},$$

n'est rien d'autre que le singleton zéro. Ceci sera vu dans le lemme 2.2.2 qui dépend essentiellement du lemme suivant.

Lemme 2.2.1. Soient $x \in \mathcal{E}_r^n$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $x \succ 0$ et $x + t\Delta x \succ 0$, alors :

$$(f_\mu)_\infty(\Delta x) = c^T \Delta x,$$

où Δx est la direction de descente qui sera définie par la suite.

Preuve. Le résultat est trivial si x appartient à la frontière de \mathcal{E}_{r+}^n .

Soit $x \in \text{int } \mathcal{E}_{r+}^n$, alors

$$f_\mu(x) = c^T x - \mu \ln \det(x) + 2r\mu \ln \mu.$$

Soit aussi $\omega(x) := x^{-\frac{1}{2}} \circ (\Delta x \circ x^{-\frac{1}{2}})$, en utilisant (c) de la définition 2.2.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} (f_\mu)_\infty(\Delta x) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f_\mu(x + t\Delta x) - f_\mu(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c^T(x + t\Delta x) - \mu \ln \det(x + t\Delta x) - c^T x + \mu \ln \det(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c^T x + c^T t\Delta x - \mu \ln \det(x + t\Delta x) - c^T x + \mu \ln \det(x)}{t} \\ &= c^T \Delta x - \mu \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \det(x + t\Delta x) - \ln \det(x)}{t} \\ &= c^T \Delta x - \mu \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \det(x^{\frac{1}{2}} \circ (e + tw(x)) \circ x^{\frac{1}{2}}) - \ln \det(x)}{t} \\ &= c^T \Delta x - \mu \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \det(x) + \ln \det(e + tw(x)) - \ln \det(x)}{t} \\ &= c^T \Delta x - \mu \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{2r} \frac{\ln(1 + t\lambda_i(w))}{t}, \end{aligned}$$

où les deux dernières égalités se trouvent du faite que :

$$\Delta x = x^{\frac{1}{2}} \circ (e + tw(x)) \circ x^{\frac{1}{2}} \text{ et } \ln \det(e + tw(x)) = \prod_{i=1}^{2r} \ln \det(e + tw(x)),$$

et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} = 0$, donc nous passons à la limite, on trouve le résultat souhaité, i.e.,

$$(f_\mu)_\infty(\Delta x) = c^T \Delta x. \quad (2.1)$$

Ce qui termine la preuve. □

Lemme 2.2.2. $C_0((f_\mu)_\infty) = \{\Delta x \in \mathcal{E}_{r+}^n : (f_\mu)_\infty(\Delta x) \leq 0\} = \{0\}$.

Preuve. D'après le lemme précédent, montrer que $\{\Delta x \in \mathcal{E}_{r_+}^n : (f_\mu)_\infty(\Delta x) \leq 0\} = \{0\}$ est équivalent à montrer que

$$\{\Delta x \in \mathcal{E}_{r_+}^n : c^T \Delta x \leq 0\} = \{0\}.$$

On suppose que, $C_0((f_\mu)_\infty) \neq \{0\}$, i.e., il existe $\Delta x \neq 0$ dans \mathcal{E}_+^n tel que $\Delta x \in C_0((f_\mu)_\infty)$. D'après l'hypothèse 2, il existe $(y, \hat{s}) \in \mathcal{F}_D^0$, tel que

$$0 < \hat{s}^T \Delta x = (c - A^T y)^T \Delta x = c^T \Delta x - y^T A \Delta x = c^T \Delta x,$$

et comme Δx est une direction de descente, i.e., $A \Delta x = 0$, on arrive à $c^T \Delta x > 0$, contradiction.

Donc $C_0((f_\mu)_\infty) = 0$.

Ce qui complète la preuve. □

2.2.2 Convergence de la solution optimale de (P_μ) vers celle de (P)

Le lemme suivant prouve la convergence de la solution optimale du problème (P_μ) vers la solution optimale du problème (P) quand μ tend vers zéro .

Lemme 2.2.3. *Soit \bar{x}_μ une solution optimale primale du problème (P_μ) , alors $\bar{x} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \bar{x}_\mu$ est une solution optimale du problème (P) .*

Preuve. Soient $f_\mu := f(x, \mu)$ et $f(x) := f(x, 0)$. Tant que la fonction $f_\mu(x)$ est différentiable et convexe, alors il existe une solution optimale \bar{x}_μ du problème (P_μ) , telle que

$$\nabla_x f_\mu(\bar{x}_\mu) = \nabla_x f(\bar{x}_\mu, \mu) = 0.$$

Donc, pour tout $x \in \mathcal{F}_P^0$, et par l'application de la formule de Taylor au voisinage de \bar{x}_μ pour l'ordre 1, nous obtenons ;

$$f(x) \geq f(\bar{x}_\mu, \mu) + (x - \bar{x}_\mu)^T \nabla_x f(\bar{x}_\mu, \mu) + (0 - \mu) \frac{\partial f}{\partial \mu}(\bar{x}_\mu, \mu),$$

et comme $f(\bar{x}_\mu, \mu) = c^T \bar{x}_\mu - \mu \ln \det(\bar{x}_\mu) + 2r\mu \ln \mu$, alors on a

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(\bar{x}_\mu, \mu) = -\ln \det(\bar{x}_\mu) + 2r \ln \mu + 2r,$$

donc, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\bar{x}_\mu, \mu) + \mu \ln \det(\bar{x}_\mu) - 2r\mu \ln \mu - 2r\mu \\ &\geq c^T \bar{x}_\mu - \mu \ln \det(\bar{x}_\mu) + 2r\mu \ln \mu + \mu \ln \det(\bar{x}_\mu) - 2r\mu \ln \mu - 2r\mu \\ &\geq c^T \bar{x}_\mu - 2r\mu, \end{aligned}$$

et comme x est quelconque dans \mathcal{F}_P^0 , ceci implique d'une part que

$$\min_{x \in \mathcal{F}_P^0} f(x) \geq c^T \bar{x}_\mu - 2r\mu \geq c^T \bar{x}_\mu = f(\bar{x}_\mu).$$

D'autre part, nous avons

$$c^T \bar{x}_\mu = f(\bar{x}_\mu) \geq \min_{x \in \mathcal{F}_P^0} (f(x) = f(x, 0)).$$

Donc, en passant à la limite quand μ tend vers 0, il suit immédiatement que

$$f(\bar{x}) = \min_{x \in \mathcal{F}_P^0} f(x), \text{ avec } \bar{x} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \bar{x}_\mu.$$

Par conséquent, \bar{x} est une solution optimale du problème (P) , donc la preuve est complète. \square

2.3 Calcul de directions par la méthode de Newton

Comme la fonction objective du problème (P_μ) est strictement convexe, alors les conditions de KKT sont à la fois nécessaires et suffisantes pour caractériser une solution optimale du problème (P_μ) . Par conséquent, \bar{x}_μ et $(\bar{y}_\mu, \bar{s}_\mu)$ sont des solutions optimales de (P_μ) et (D_μ) respectivement si et seulement s'ils satisfont le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} Ax = b, x \succ 0, \\ A^T y + s = c, s \succ 0, \\ x \circ s = \mu e, \mu > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

dont sa solution est (x_μ, y_μ, s_μ) . Pour tout $\mu > 0$, l'ensemble de toutes ses solutions construit la trajectoire centrale ou le chemin central ou bien les μ -centres. Nous disons qu'un point (x, y, s) est proche de la trajectoire centrale, s'il appartient à l'ensemble $\mathcal{N}_\theta(\mu)$ qui est défini comme suit :

$$\mathcal{N}_\theta(\mu) = \{(x, y, s) \in \mathcal{F}_P^0 \times \mathcal{F}_D^0 : d_F(x, s) \leq \theta\mu\} \text{ où } d_F(x, s) = \|Q_{x^{\frac{1}{2}}} s - \mu e\|_F \text{ et } \theta \in (0, 1).$$

Maintenant, nous appliquons la méthode de Newton sur le système (2.2), nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} A\Delta x = 0, \\ A^T \Delta y + \Delta s = 0, \\ x \circ \Delta s + \Delta x \circ s = \sigma\mu e - x \circ s. \end{cases} \quad (2.3)$$

où $(\Delta x; \Delta y; \Delta s) \in \mathcal{E}_r^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{E}_r^n$ est la direction cherchée, $\mu = \frac{1}{2r} x^T s$ est le saut de dualité normalisé correspond à $(x; y; s)$ et $\sigma \in (0, 1)$ est le paramètre de centralité.

La classe commutative est notée par $C(x, s)$ et est définie comme suit :

$$C(x, s) = \{p \in \mathcal{E}_r^n : p \text{ inversible, } Q_p x \text{ et } Q_{p^{-1}} s \text{ des opérateurs commutent}\}. \quad (2.4)$$

D'après le lemme 28 de [35], l'égalité $x \circ s = \mu e$ est satisfaite, si et seulement si l'égalité $(Q_p x) \circ (Q_{p^{-1}} s) = \mu e$ est satisfaite, pour tout vecteur inversible $p \in \mathcal{E}_r^n$.

Donc, pour tout vecteur inversible donné $p \in \mathcal{E}_r^n$, le système (2.3) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} Ax = b, & x \succ 0, \\ A^T y + s = c, & s \succ 0, \\ (Q_p x) \circ (Q_{p^{-1}} s) = \mu e, & \mu > 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Soit $v \in \mathcal{E}_r^n$, nous définissons les vecteurs de l'échelle \bar{v} et \underline{v} et la matrice de mise à l'échelle \underline{A} par rapport à un vecteur non singulier $p \in \mathcal{E}_r^n$ comme suit :

$$\bar{v} := Q_p v, \quad \underline{v} := Q_{p^{-1}} v \text{ et } \bar{A} := Q_p A. \quad (2.6)$$

En utilisant ce changement de variables et le fait que $Q_p(\mathcal{E}_{r+}^n) = \mathcal{E}_{r+}^n$, nous concluons que le système (2.3) est équivalent au système de Newton suivant :

$$\begin{cases} \underline{A} \bar{\Delta} x = b - \underline{A} \bar{x}, \\ \underline{A}^T \bar{\Delta} y + \bar{\Delta} s = \underline{c} - \underline{s} - \underline{A}^T \bar{y}, \\ \bar{x} \circ \bar{\Delta} s + \bar{\Delta} x \circ \underline{s} = \sigma \mu e - \bar{x} \circ \underline{s}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Ici, le saut de dualité normalisé est $\mu = \frac{1}{2r} \bar{x}^T \underline{s} = \frac{1}{2r} x^T s$. En effet,

$$\bar{x}^T \underline{s} = (Q_p x)^T Q_{p^{-1}} s = x^T Q_p Q_{p^{-1}} s = x^T s. \quad (2.8)$$

La résolution du système de Newton (2.7) donne la direction cherchée $(\bar{\Delta} x; \bar{\Delta} y; \bar{\Delta} s)$. Puis à partir de (2.6), nous utilisons la mise à l'échelle inverse à $(\bar{\Delta} x, \bar{\Delta} s)$, nous obtenons la direction de Newton $(\Delta x; \Delta y; \Delta s)$. Signalons que la direction $(\bar{\Delta} x; \bar{\Delta} y; \bar{\Delta} s)$ appartient à la famille des directions de MZ (due de Monteiro [29] et Zhang [43]), qu'elle a été généralisée pour la programmation du cône symétrique par Schmieta et Alizadeh [35].

Clairement, l'ensemble $C(x, s)$ défini dans la relation (2.4) est une sous-classe de la famille des directions de MZ. Dans cette section, nous concentrons sur les choix suivants du vecteur p .

- **Premier choix** : nous choisissons souvent $p = x^{\frac{1}{2}}$ pour obtenir $\bar{x} = e$.
- **Deuxième choix** : nous choisissons $p = s^{-\frac{1}{2}}$ pour obtenir $\underline{s} = e$.

Ces deux choix de directions sont appelés la direction HRVW/KSH/M (due de Helmberg et al. [17] et Monterio [29] et Kojima al. [23]).

- **Troisième choix** : nous choisissons $p = (Q_{x^{\frac{1}{2}}}(Q_{x^{-\frac{1}{2}}}s)^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ ce choix de directions est appelé la direction NT (due de Nesterov et Todd [33]).

2.4 Calcul du pas de déplacement

L'itéré de Newton après une itération est défini par :

$$x^+ = x + \Delta x, y^+ = y + \Delta y \text{ et } s^+ = s + \Delta s.$$

Notons que la définie positivité des vecteurs x^+ et s^+ n'est pas toujours assurée pour sur monter cette difficulté, nous introduisons un paramètre $\alpha > 0$, que nous appelons pas de déplacement et nous redéfinissons x^+ , y^+ et s^+ comme suit :

$$x^+ := x + \alpha \Delta x, y^+ := y + \alpha \Delta y, s^+ := s + \alpha \Delta s.$$

Le calcul de ce pas de déplacement à l'aide des méthodes classiques de recherche linéaire est indésirable et en général impossible voir ([37, 9]).

Dans cette section, nous proposons dans les lemmes suivants quatre différentes alternatives pour calculer le pas de déplacement approprié qu'on le note α .

Chaque'un de quatre lemmes suivants donne une sélection pour calculer le pas de déplacement α .

2.4.1 Le premier lemme

Lemme 2.4.1. Soit $(x; y; s) \in \mathcal{F}_P^0 \times \mathcal{F}_D^0$. Si $\alpha = \rho \min\{\alpha_x, \alpha_s\}$ avec $0 < \rho < 1$, alors x^+ , $s^+ \succ 0$, où pour $v \in \{x, s\}$, nous avons :

$$\alpha_v = \begin{cases} \frac{-1}{\bar{\lambda}_v - \delta_v \sqrt{2r-1}} - \varepsilon, & \text{si } \left(\frac{-1}{\bar{\lambda}_v - \delta_v \sqrt{2r-1}} > 0 \text{ et } \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i (v^{1/2} \circ (\Delta v \circ v^{-1/2})) < 0 \right), \\ \varepsilon, & \text{si } \left(\frac{-1}{\bar{\lambda}_v - \delta_v \sqrt{2r-1}} > 0 \text{ et } \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i (v^{1/2} \circ (\Delta v \circ v^{-1/2})) < 0 \right), \\ 1, & \text{si } \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i (v^{1/2} \circ (\Delta v \circ v^{-1/2})) > 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

où

$$\bar{\lambda}_v = \frac{1}{2r} \sum_{i=1}^{2r} \lambda_i (v^{-1/2} \circ (\Delta v \circ v^{-1/2})); \delta_v^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2r} \lambda_i (v^{-1/2} \circ (\Delta v \circ v^{-1/2})) - \lambda_v^2.$$

et ε est un petit réel positif. Ici $\lambda_i (v^{-1/2} \circ (\Delta v \circ v^{-1/2}))$, $i = 1, 2, \dots, 2r$, sont les valeurs propres du vecteur $v^{1/2} \circ (\Delta v \circ v^{-1/2})$.

Preuve. Comme $x \succ 0$, alors les vecteurs $x^{\pm 1/2}$ sont bien définis et nous avons $x^{\pm 1/2} \succ 0$. Donc x^+ pour s'écrire comme suit

$$x^+ = x + \alpha \Delta x = x^{1/2} \circ x^{1/2} + \alpha \Delta x = x^{1/2} \circ (e + \alpha x^{-1/2} \circ (\Delta x \circ x^{-1/2})) \circ x^{1/2},$$

d'où

$$\begin{aligned} x^+ \succ 0 &\iff e + \alpha x^{-1/2} \circ (\Delta x \circ x^{-1/2}) \succ 0 \\ &\iff 1 + \alpha \lambda_i (x^{-1/2} \circ (\Delta x \circ x^{-1/2})) > 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, 2r. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$1 + \alpha \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i (x^{-1/2} \circ (\Delta x \circ x^{-1/2})) > 0 \implies \alpha \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i (x^{-1/2} \circ (\Delta x \circ x^{-1/2})) > -1.$$

Si

$$\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i (x^{-1/2} \circ (\Delta x \circ x^{-1/2})) < 0,$$

alors

$$\alpha < \frac{-1}{\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i (x^{-1/2} \circ (\Delta x \circ x^{-1/2}))},$$

En utilisant la Proposition 1.7.3, nous concluons que

$$\frac{-1}{\bar{\lambda}_v - \delta_v \sqrt{2r} - 1} \leq \frac{-1}{\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i (x^{-1/2} \circ (\Delta x \circ x^{-1/2}))}$$

d'où

$$\alpha < \frac{-1}{\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i (x^{-1/2} \circ (\Delta x \circ x^{-1/2}))} \text{ et } \frac{-1}{\bar{\lambda}_v - \delta_v \sqrt{2r} - 1} \leq \frac{-1}{\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i (x^{-1/2} \circ (\Delta x \circ x^{-1/2}))}$$

Ce qui donne l'expression de α_x .

En appliquant le même procédé sur s^+ , on obtient α_s .

Finalement, nous choisissons

$$\alpha = \rho \min\{\alpha_x, \alpha_s\} \text{ avec } 0 < \rho < 1.$$

Ce qui complète la preuve. □

2.4.2 Le deuxième lemme

Lemme 2.4.2. Soit $(x; y; s) \in \mathcal{F}_P^0 \times \mathcal{F}_D^0$. Si $\alpha = \rho \min\{\alpha_x, \alpha_s\}$ avec $0 < \rho < 1$, alors $x^+, s^+ \succ 0$, où pour $v \in \{x, s\}$, nous avons :

$$\alpha_v = \begin{cases} \frac{-1}{\bar{\lambda}_v - \delta_v \sqrt{2r-1}} - \varepsilon, & \text{si } \left(\frac{-1}{\bar{\lambda}_v - \delta_v \sqrt{2r-1}} > 0 \text{ et } \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(v^{-1} \circ \Delta v) < 0 \right); \\ \varepsilon, & \text{si } \left(\frac{-1}{\bar{\lambda}_v - \delta_v \sqrt{2r-1}} < 0 \text{ et } \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(v^{-1} \circ \Delta v) < 0 \right); \\ 1, & \text{si } \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(v^{-1} \circ \Delta v) > 0; \end{cases} \quad (2.10)$$

où

$$\bar{\lambda}_v = \frac{1}{2r} \sum_{i=1}^{2r} \lambda_i(v^{-1} \circ \Delta v) \quad \text{et} \quad \delta_v^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2r} \lambda_i(v^{-1} \circ \Delta v) - \bar{\lambda}_v^2.$$

et ε est un petit réel positif. Ici $\lambda_i(v^{-1} \circ \Delta v)$, $i = 1, 2, \dots, 2r$, sont les valeurs propres du vecteur $v^{-1} \circ \Delta v$.

Preuve. Comme $x \succ 0$, donc x est inversible et son inverse est défini positif (i.e., $x^{-1} \succ 0$). Alors, on peut écrire x^+ comme suit :

$$x^+ := x + \alpha \Delta x = x \circ (e + \alpha x^{-1} \circ \Delta x),$$

donc, comme $x^{-1} \succ 0$, on a :

$$\begin{aligned} x^+ \succ 0 &\iff x^{-1} \circ x \succ 0 \\ &\iff e + \alpha x^{-1} \circ \Delta x \succ 0 \\ &\iff 1 + \alpha \lambda_i(x^{-1} \circ \Delta x) \succ 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, 2r. \end{aligned}$$

Par conséquent ,

$$1 + \alpha \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x^{-1} \circ \Delta x) > 0 \implies \alpha \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x^{-1} \circ \Delta x) > -1.$$

Si $\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x^{-1} \circ \Delta x) < 0$, alors $\alpha < -1 / \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x^{-1} \circ \Delta x)$.

En utilisant la Proposition 1.7.3, nous concluons que :

$$\alpha < \frac{-1}{\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x^{-1} \circ \Delta x)} \quad \text{et} \quad \frac{-1}{\bar{\lambda}_x - \delta_x \sqrt{2r-1}} \leq \frac{-1}{\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x^{-1} \circ \Delta x)}.$$

Ce qui donne l'expression de α_x .

En appliquant la même procédure sur s^+ , on obtient α_s .

Finalement, nous choisissons

$$\alpha = \rho \min\{\alpha_x, \alpha_s\} \text{ avec } 0 < \rho < 1.$$

La preuve est complétée. □

2.4.3 Le troisième lemme

Lemme 2.4.3. *Soit $(x; y; s) \in \mathcal{F}_P^0 \times \mathcal{F}_D^0$. Si $\alpha = \rho \min\{\alpha_x, \alpha_s\}$ avec $0 < \rho < 1$, alors $x^+, s^+ \succ 0$, où pour $v \in \{x, s\}$, nous avons :*

$$\alpha_v = \begin{cases} -\frac{\bar{\lambda}_v - \delta_v \sqrt{2r-1}}{\bar{\lambda}_{\Delta v} - \delta_{\Delta v} \sqrt{2r-1}} - \varepsilon, & \text{si } \left(-\frac{\bar{\lambda}_v - \delta_v \sqrt{2r-1}}{\bar{\lambda}_{\Delta v} - \delta_{\Delta v} \sqrt{2r-1}} \text{ et } \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(\Delta v) < 0 \right); \\ \varepsilon, & \text{si } \left(-\frac{\bar{\lambda}_v - \delta_v \sqrt{2r-1}}{\bar{\lambda}_{\Delta v} - \delta_{\Delta v} \sqrt{2r-1}} \text{ et } \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(\Delta v) < 0 \right); \\ 1, & \text{si } \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(\Delta v) > 0; \end{cases} \quad (2.11)$$

où

$$\bar{\lambda}_v = \frac{1}{2r} \sum_{i=1}^{2r} \lambda_i(v) \text{ et } \delta_v^2 = \frac{1}{2r} \sum_{i=1}^{2r} \lambda_i^2(v) - \bar{\lambda}_v^2.$$

$$\bar{\lambda}_{\Delta v} = \frac{1}{2r} \sum_{i=1}^{2r} \lambda_i(\Delta v) \text{ et } \delta_{\Delta v}^2 = \frac{1}{2r} \sum_{i=1}^{2r} \lambda_i^2(\Delta v) - \bar{\lambda}_{\Delta v}^2.$$

Et ε est un petit réel positif. Ici $\lambda_i(v)$, $i = 1, 2, \dots, 2r$, sont les valeurs propres du vecteur v , et $\lambda_i(\Delta v)$, $i = 1, 2, \dots, 2r$, sont les valeurs propres du vecteur Δv .

Preuve. Il est bien connu que $x^+ := x + \alpha \Delta x \succ 0$, si est seulement si $\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x^+) > 0$. D'après la Proposition 1.7.3, il est également connu que :

$$\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x^+) \geq \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x) + \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(\Delta x).$$

Alors, pour trouver α qui assure $x^+ \succ 0$, il suffit de trouver α qui vérifie l'inégalité suivante :

$$\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x^+) \geq \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x) + \alpha \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(\Delta x) > 0.$$

Par conséquent

$$\alpha < -\frac{\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x)}{\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(\Delta x)} \quad \text{si} \quad \min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(\Delta x) < 0.$$

En utilisant la Proposition 1.7.3, nous trouvons :

$$\alpha < -\frac{\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x)}{\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(\Delta x)} \quad \text{et} \quad -\frac{\bar{\lambda}_v - \delta_v \sqrt{2r-1}}{\bar{\lambda}_{\Delta v} - \delta_{\Delta v} \sqrt{2r-1}} \leq -\frac{\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(x)}{\min_{1 \leq i \leq 2r} \lambda_i(\Delta x)}.$$

Ce qui donne l'expression α_x .

En appliquant la même procédure sur s^+ , on obtient α_s .

Finalement, on choisit

$$\alpha = \rho \min\{\alpha_x, \alpha_s\} \quad \text{avec} \quad 0 < \rho < 1.$$

Ce qui complète la preuve. □

2.4.4 Le quatrième lemme

Lemme 2.4.4. Soit $(x; y; s) \in \mathcal{F}_P^0 \times \mathcal{F}_D^0$. Si $\alpha = \rho \min\{\alpha_x, \alpha_s\}$ avec $0 < \rho < 1$, alors x^+ , $s^+ \succ 0$, où pour $v \in \{x, s\}$, nous avons :

$$\alpha_v = \begin{cases} \min_{i \in I_v} \frac{\|\tilde{v}_i\|_1 - (v_i)_0}{(\Delta v)_0 - \|\tilde{\Delta} v_i\|_1} & \text{si } I_v \neq \emptyset; \\ +\infty & \text{si } I_v = \emptyset. \end{cases} \quad (2.12)$$

où $I_v := \{i \in \{1, 2, \dots, r\} : (\Delta v_i)_0 - \|\tilde{\Delta} v_i\|_1 < 0\}$

Preuve. Rappelons qu'un vecteur $\omega \in \mathcal{E}_r^n$ est défini positif (i.e., $\omega \succ 0$) si et seulement si $(\omega_i)_0 \succ \|\tilde{\omega}_i\|$ (i.e., $\omega \succ 0$) pour $i = 1, 2, \dots, r$. Soit $\|\tilde{\omega}_i\|_1 := \sum_{j=1}^{n_i-1} |(\tilde{\omega}_i)_j|$ la norme taxicab du sous vecteur $\tilde{\omega}_i$; alors on sait que $\|\tilde{\omega}_i\| \leq \|\tilde{\omega}_i\|_1$.

Il s'ensuit que $\omega \succ 0$ si $(\omega_i)_0 > \|\tilde{\omega}_i\|_1$ pour $i = 1, 2, \dots, r$.

Alors, $x^+ := x + \alpha \Delta x \succ 0$ si $(x_i^+)_0 > \|\tilde{x}_i^+\|_1$, pour $i = 1, 2, \dots, r$.

Nous avons

$$\|\tilde{x}_i^+\|_1 = \|\tilde{x}_i + \alpha \tilde{\Delta} x_i\|_1 \leq \|\tilde{x}_i\|_1 + \alpha \|\tilde{\Delta} x_i\|_1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r.$$

Donc, il suffit de trouver α tel que :

$$(x_i)_0 + \alpha(\Delta x_i)_0 > \|\tilde{x}_i\|_1 + \alpha\|\widetilde{\Delta x_i}\|_1, \forall i = 1, 2, \dots, r.$$

où de manière équivalente

$$\alpha \left((\Delta x_i)_0 - \|\widetilde{\Delta x_i}\|_1 \right) > \|\tilde{x}_i\|_1 - (x_i)_0, \forall i = 1, 2, \dots, r.$$

Ce qui donne l'expression de α_x .

En appliquant la même procédure sur s^+ pour le vecteur $s^+ = s + \alpha\Delta s$, on obtient α_s ,

Finalement, on choisit

$$\alpha = \rho \min\{\alpha_x, \alpha_s\} \text{ avec } 0 < \rho < 1.$$

D'où le résultat souhaité. □

2.5 L'algorithme de trajectoire centrale et son convergence

Dans cette section, nous présentons l'algorithme de trajectoire centrale pour résoudre le problème PCSO et nous présentons son résultat de convergence.

2.5.1 L'algorithme de trajectoire centrale pour le problème de PCSO :

Début algorithme

1. **Initialisation** $(x^{(0)}; y^{(0)}; s^{(0)}) \in \mathcal{N}_\theta(\mu), \varepsilon > 0, \sigma, \theta \in (0, 1)$ et $k = 0$;
2. **Tantque** $x^{(k)T} s^{(k)} \geq \varepsilon$ **faire**
3. Choisir $p^{(k)} \in C(x^{(k)}; s^{(k)})$;
4. Calculer $(\overline{x^{(k)}}; \overline{y^{(k)}}; \overline{s^{(k)}})$ en utilisant la relation (2.6);
5. Poser $\mu^{(k)} := \frac{1}{2r} \overline{x^{(k)T} s^{(k)}}$, $h^{(k)} := \frac{\sigma}{2} \mu^{(k)} e - \overline{x^{(k)}} \circ \overline{s^{(k)}}$ et $\psi^{(k)} := \frac{1}{\mu} \overline{A x^{(k)2}} \overline{A^T}$;
6. Calculer $(\overline{\Delta x^{(k)}}; \overline{\Delta y^{(k)}}; \overline{\Delta s^{(k)}})$ en résolvant le système de Newton (2.7), nous obtenons $(\overline{\Delta x^{(k)}}; \overline{\Delta y^{(k)}}; \overline{\Delta s^{(k)}}) := \left(\left(h^{(k)} - \overline{x^{(k)}} \circ \overline{\Delta s^{(k)}} \right) \circ s^{(k)-1}; -\psi^{(k)-1} \overline{A} \left(s^{(k)-1} \circ h^{(k)} \right); -\overline{A^T} \overline{\Delta y^{(k)}} \right)$;
7. Calculer $(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)})$ en utilisant la relation (2.6);
8. Calculer le pas de déplacement $\alpha^{(k)}$ par l'une des quatre alternatives;
9. Poser $(x^{(k+1)}; y^{(k+1)}; s^{(k+1)}) := (x^{(k)} + \alpha^{(k)} \Delta x^{(k)}; y^{(k)} + \alpha^{(k)} \Delta y^{(k)}; s^{(k)} + \alpha^{(k)} \Delta s^{(k)})$;
10. Prendre $k = k + 1$;

11. Fin tantque

Fin algorithme

L'algorithme sélectionne une suite de pas $[\alpha^{(k)}]$ et de paramètres de centralité $\{\sigma^{(k)}\}$ selon la règle suivante : pour tout $k \geq 0$, on prend $\alpha^{(k)} = 1 - \delta/\sqrt{2r}$, où $\delta \in [0, \sqrt{2r}]$.

Dans le reste de cette section, nous présentons le résultat de la convergence de notre algorithme.

La preuve de ce résultat dépend essentiellement sur le lemme suivant :

Lemme 2.5.1. *Soient $(x; y; s) \in \text{int } \mathcal{E}_{r_+}^n \times \mathbb{R}^m \times \text{int } \mathcal{E}_{r_+}^n$, $(\bar{x}; y; \underline{s})$ est obtenu de (2.6) et $(\overline{\Delta x}, \Delta y, \underline{\Delta s})$ une solution du système (2.7). Alors, nous avons :*

$$(a) \quad \overline{\Delta x}^T \underline{\Delta s} = 0.$$

$$(b) \quad \bar{x}^T \underline{\Delta s} + \overline{\Delta x}^T \underline{s} = \frac{1}{2} \text{trace}(h), \quad \text{où } h = \frac{\sigma}{2} \mu e - \bar{x} \circ \underline{s} \text{ telle que } \sigma \in (0, 1) \text{ et } \mu = \frac{1}{2r} \bar{x}^T \underline{s}.$$

$$(c) \quad \bar{x}^{+T} \underline{s}^+ = \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)\right) \bar{x}^T \underline{s}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{où } \bar{x}^+ = \bar{x} + \alpha \overline{\Delta x} \text{ et } \underline{s}^+ = \underline{s} + \alpha \underline{\Delta s}.$$

$$(d) \quad x^{+T} s^+ = \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)\right) x^T s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{où } x^+ = x + \alpha \Delta x \text{ et } s^+ = s + \alpha \Delta s.$$

Preuve.

(a) Par les deux premières équations du système (2.7), on obtient

$$\overline{\Delta x}^T \underline{\Delta s} = -\overline{\Delta x}^T \underline{A}^T \Delta y = -(\underline{A} \overline{\Delta x})^T \Delta y = 0.$$

Ce qui prouve (a).

(b) On a :

$$h = \frac{\sigma}{2} \mu e - \bar{x} \circ \underline{s},$$

alors :

$$\text{trace}(h) = \text{trace}(\sigma \mu e - \bar{x} \circ \underline{s}),$$

de la troisième équation du système de Newton (2.7), on trouve :

$$\text{trace}(h) = \text{trace}(\bar{x} \circ \underline{\Delta s} + \overline{\Delta x} \circ \underline{s}),$$

de la propriété de la trace, on a

$$\text{trace}(h) = \text{trace}(\bar{x} \circ \underline{\Delta s}) + \text{trace}(\overline{\Delta x} \circ \underline{s}),$$

de la définition 1.7.4, on a :

$$\text{trace}(h) = 2(\bar{x}^T \underline{\Delta s}) + 2(\overline{\Delta x}^T \underline{s}),$$

$$\text{trace}(h) = 2(\bar{x}^T \underline{\Delta s} + \overline{\Delta x}^T \underline{s}),$$

$$\frac{1}{2} \text{trace}(h) = (\bar{x}^T \underline{\Delta s} + \overline{\Delta x}^T \underline{s}).$$

Ce qui prouve (b).

(c) Pour prouver le point (c), on a :

$$\begin{aligned}
 \bar{x}^{+T} \underline{s}^+ &= (\bar{x} + \alpha \overline{\Delta x})^T (\underline{s} + \alpha \underline{\Delta s}), \\
 &= \bar{x}^{+T} \underline{s} + \alpha \left(\overline{\Delta x}^T \underline{s} + \bar{x}^T \underline{\Delta s} \right) + \alpha^2 \overline{\Delta x}^T \underline{\Delta s}, \\
 &= \bar{x}^{+T} \underline{s} + \alpha \left(\overline{\Delta x}^T \underline{s} + \bar{x}^T \underline{\Delta s} \right) \quad (\text{de (a)}), \\
 &= \bar{x}^{+T} \underline{s} + \frac{1}{2} \alpha \text{trace}(h) \\
 &= \bar{x}^{+T} \underline{s} + \frac{1}{2} \text{trace}(\sigma \mu e - \bar{x} \circ \underline{s}) \quad (\text{de (b)}), \\
 &= \bar{x}^{+T} \underline{s} + \frac{1}{2} \alpha \sigma \mu \text{trace}(e) - \frac{1}{2} \alpha \text{trace}(\bar{x} \circ \underline{s}) \quad (\text{Propriété de la trace}), \\
 &= \bar{x}^{+T} \underline{s} + \alpha \sigma \mu r - \alpha \bar{x}^T \underline{s} \quad (\text{trace}(e) = 2r \text{ et } \text{trace}(\bar{x} \circ \underline{s}) = 2(\bar{x}^T \underline{s})), \\
 &= \bar{x}^T \underline{s} + \frac{1}{2r} \alpha \sigma \bar{x}^T \underline{s} - \alpha \bar{x}^T \underline{s} \quad \left(\mu = \frac{1}{2r} \bar{x}^T \underline{s} \right), \\
 &= \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{\sigma}{2} \right) \right) \bar{x}^T \underline{s},
 \end{aligned}$$

□

ce qui prouve (c).

Finalement, le point (d) découle de façon similaire de (c) et du fait que $\bar{x}^T \underline{s} = x^T s$ et $\bar{x}^{+T} \underline{s}^+ = x^{+T} s^+$ (de la relation (2.8)).

La preuve est complétée .

Maintenant, nous sommes prêts à présenter et prouver le résultat de convergence de notre algorithme.

Théorème 2.5.2. *Soit $(x; y; s)$ et soit $(x^+; y^+; s^+)$ une solution strictement réalisable des problèmes suivants (P_μ) et (D_μ) avec $(x^+; y^+; s^+) = (x + \alpha \Delta x; y + \alpha \Delta y; s + \alpha \Delta s)$, où α est le pas de déplacement et $(\Delta x; \Delta y; \Delta s)$ est la direction de Newton. Alors, nous avons :*

- (a) $x^{+T} s^+ < \bar{x}^T \underline{s}$.
- (b) $f_\mu(x^+) < f_\mu(x)$.

Preuve.

(a) De (d) du Lemme 2.5.1, on a :

$$x^{+T} s^+ = \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{\sigma}{2} \right) \right) \bar{x}^T \underline{s} < \bar{x}^T \underline{s}.$$

L'inégalité stricte découle de $\left(1 - \alpha \left(1 - \frac{\sigma}{2} \right) \right) < 1$ (puis que $\alpha > 0$ et $\sigma \in (0, 1)$),

donc

$$x^{+T} s^+ < \bar{x}^T \underline{s}.$$

Ce qui prouve (a).

- (b) Pour montrer (b) : en utilisant le développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction f_μ au voisinage de x , on trouve :

$$f_\mu(x^+) \simeq f_\mu(x) + \nabla_x f_\mu(x)^T (x^+ - x). \quad (2.13)$$

Donc

$$\begin{aligned} f_\mu(x^+) - f_\mu(x) &\simeq \nabla_x f_\mu(x)^T (x^+ - x) \\ &\simeq \alpha \nabla_x f_\mu(x) \Delta x, \quad (x^+ = x + \alpha \Delta x). \end{aligned}$$

puisque :

$$\nabla_x f_\mu(x) = -\nabla_{xx}^2 f_\mu(x) \Delta x.$$

alors, nous avons :

$$f_\mu(x^+) - f_\mu(x) \simeq -\alpha \Delta x^T \nabla_{xx}^2 f_\mu(x) \Delta x < 0,$$

où la stricte inégalité découle de la définie positivité de la matrice hessienne $\nabla_{xx}^2 f_\mu(x)$ (f_μ est strictement convexe). Ce qui montre $f_\mu(x^+) < f_\mu(x)$.

La preuve est complétée. □

2.6 Analyse de la complexité

Dans cette section, nous analysons la complexité de l'algorithme de trajectoire centrale proposé pour PCSO. Plus précisément, nous prouvons que la complexité de notre algorithme est bornée par :

$$\mathcal{O}(\delta^{-1} \sqrt{2r} \ln[\epsilon^{-1} x^{(0)} s^{(0)}]).$$

Notre preuve dépend essentiellement aux deux lemmes suivants :

Lemme 2.6.1. Soit $(x; y; s) \in \mathcal{F}_P^0 \times \mathcal{F}_D^0$ et soit $(\bar{x}; y; \underline{s})$ obtenu de (2.6), avec $h = \sigma \mu e - \bar{x} \circ \underline{s}$ et $(\bar{\Delta x}; \Delta y, \underline{\Delta s})$ une solution du système (2.7). Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned} (x(\alpha); y(\alpha); s(\alpha)) &:= (\bar{x}; y; \underline{s}) + \alpha (\bar{\Delta x}; \Delta y; \underline{\Delta s}), \\ \mu(\alpha) &:= \frac{1}{2r} x(\alpha)^T s(\alpha). \\ q(\alpha) &:= x(\alpha) \circ s(\alpha) - \mu(\alpha) e. \end{aligned}$$

Alors :

$$q(\alpha) = (1 - \alpha)(\bar{x} \circ \underline{s} - \mu e) + \alpha^2 \overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s}. \quad (2.14)$$

Preuve. Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, en utilisant le point (c) du lemme 2.5.1, nous avons :

$$x(\alpha)^T s(\alpha) = (1 - \alpha + \alpha \frac{\sigma}{2}) \bar{x}^T \underline{s},$$

et par conséquent,

$$\mu(\alpha) = (1 - \alpha + \alpha \frac{\sigma}{2}) \mu^+.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} q(\alpha) &= x(\alpha) \circ s(\alpha) - \mu(\alpha) e, \\ &= (\bar{x} + \alpha \overline{\Delta x}) \circ (\underline{s} + \alpha \underline{\Delta s}) - (1 - \alpha(1 - \frac{\sigma}{2})) \mu e, \\ &= \bar{x} \circ \underline{s} + \alpha \bar{x} \circ \underline{\Delta s} + \alpha \underline{s} \circ \overline{\Delta x} + \alpha^2 \overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s} - (1 - \alpha(1 - \frac{\sigma}{2})) \mu e, \\ &= \bar{x} \circ \underline{s} + \alpha(\bar{x} \circ \underline{\Delta s} + \underline{s} \circ \overline{\Delta x}) + \alpha^2 \overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s} - \mu e + \alpha \mu e - \alpha \mu e \frac{\sigma}{2}. \end{aligned}$$

De la troisième équation du système (2.7), on a ;

$$\bar{x} \circ \underline{\Delta s} + \overline{\Delta x} \circ \underline{s} = \frac{\sigma}{2} \mu e - \bar{x} \circ \underline{s} = h,$$

donc, on trouve :

$$\begin{aligned} q(\alpha) &= \bar{x} \circ \underline{s} + \alpha h + \alpha^2 \overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s} - \mu e + \alpha \mu e - \alpha \mu e \frac{\sigma}{2}, \\ &= \bar{x} \circ \underline{s} + \alpha \bar{x} \circ \underline{s} - \alpha \bar{x} \circ \underline{s} + \alpha h + \alpha^2 \overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s} - \mu e + \alpha \mu e - \alpha \mu e \frac{\sigma}{2}, \\ &= (\bar{x} \circ \underline{s} - \mu e) - \alpha(\bar{x} \circ \underline{s} - \mu e) + \alpha \bar{x} \circ \underline{s} - \alpha \mu e \frac{\sigma}{2} + \alpha h + \alpha^2 \overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s}, \\ &= (\bar{x} \circ \underline{s} - \mu e) - \alpha(\bar{x} \circ \underline{s} - \mu e) + \alpha h - \alpha(\frac{\sigma}{2} \mu e - \bar{x} \circ \underline{s}) + \alpha^2 \overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s}, \\ &= (\bar{x} \circ \underline{s} - \mu e) - \alpha(\bar{x} \circ \underline{s} - \mu e) + \alpha h - \alpha h + \alpha^2 \overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s}, \\ &= (1 - \alpha)(\bar{x} \circ \underline{s} - \mu e) + \alpha^2 \overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s}. \end{aligned}$$

La preuve est complétée. □

Lemme 2.6.2. Soient $(x; y; s) \in \mathcal{F}_P^0 \times \mathcal{F}_D^0$, $(\bar{x}; y; \underline{s})$ est obtenu de la relation (2.6), telle que $\|\bar{x} \circ \underline{s} - \sigma \mu e\| \leq \theta \mu$, pour $\theta \in [0, 1[$ et $\mu > 0$. Soient aussi $(\overline{\Delta x}; \Delta y; \underline{\Delta s})$ solution du système (2.7), $h = \sigma \mu e - \bar{x} \circ \underline{s}$, $\delta_x := \mu \|\overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1}\|_F$ et $\delta_s := \|\bar{x} \circ \underline{\Delta s}\|_F$. Alors, nous avons :

$$\delta_x \delta_s \leq \frac{1}{2} (\delta_x^2 + \delta_s^2) \leq \frac{\|h\|_F^2}{2(1 - \theta)^2}. \quad (2.15)$$

Preuve. De la dernière équation du système (2.7) et par la commutativité de l'opérateur, nous avons

$$h = \bar{x} \circ \underline{\Delta s} + \overline{\Delta x} \circ \underline{s} = \bar{x} \circ \underline{\Delta s} + \mu \overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1} + (\overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1}) \circ (\bar{x} \circ \underline{s} - \mu e) .$$

Il s'ensuit immédiatement que :

$$\|h\|_F \geq \|\bar{x} \circ \underline{\Delta s} + \mu \overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1}\|_F - \|\overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1}\|_F \|\bar{x} \circ \underline{s} - \mu e\|$$

et comme $\|\mu \overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1}\| = \frac{\delta_x}{\mu}$ et $\|\bar{x} \circ \underline{s} - \sigma \mu e\| \leq \theta \mu$,

alors, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned} \|h\|_F &\geq \|\bar{x} \circ \underline{\Delta s} + \mu \overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1}\|_F - \frac{\delta_x}{\mu} \mu \theta \\ &\geq \|\bar{x} \circ \underline{\Delta s} + \mu \overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1}\|_F - \theta \delta_x, \\ &\geq \sqrt{\|\bar{x} \circ \underline{\Delta s}\|_F^2 + \|\mu \overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1}\|_F^2} - \theta \delta_x \\ &= \sqrt{\delta_s^2 + \delta_x^2} - \theta \delta_x \\ &\geq (1 - \theta) \sqrt{\delta_s^2 + \delta_x^2}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

où la deuxième inégalité découle de l'hypothèse $\|\bar{x} \circ \underline{s} - \sigma \mu e\| \leq \theta \mu$ et la troisième inégalité découle de relation (1.2) du fait que

$$\begin{aligned} (\bar{x} \circ \underline{\Delta s})^T (\overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1}) &= \frac{1}{2} \text{trace} \left((\bar{x} \circ \underline{\Delta s}) \circ (\overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1}) \right), \\ &= \frac{1}{2} \text{trace} (\underline{\Delta s}^T \circ \overline{\Delta x}), \\ &= \frac{2}{2} \underline{\Delta s}^T \overline{\Delta x}, \\ &= \overline{\Delta x}^T \underline{\Delta s} = 0 \quad (\text{de (a) du lemme 2.5.1}). \end{aligned} \tag{2.17}$$

□

La preuve est complétée.

Le théorème suivant analyse le comportement d'une itération de notre algorithme.

Théorème 2.6.3. Soient $\theta \in (0, 1)$ et $\delta \in [0, \sqrt{2r})$ sont données telles que ;

$$\frac{\theta^2 + \delta^2}{2(1 - \theta)^2 \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}}\right)} \leq \theta \leq \frac{1}{2}. \tag{2.18}$$

Supposons que $(\bar{x}; y; \underline{s}) \in \mathcal{N}_\theta(\mu)$ et soit $(\overline{\Delta x}; \Delta y; \underline{\Delta s})$ une solution du système (2.7), avec $h = \sigma \mu e - \bar{x} \circ \underline{s}$ et $\sigma = 1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}}$. Alors, nous avons :

- (a) $\bar{x}^{+T} \underline{s}^+ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}}\right) \bar{x}^T \underline{s}$.
- (b) $(\bar{x}^+; y^+; \underline{s}^+) = (\bar{x}; y; \underline{s}) + (\overline{\Delta x}; \Delta y; \underline{\Delta s}) \in \mathcal{N}_\theta(\mu^+)$.
- (c) $(x^+; y^+; s^+) = (x; y; s) + (\Delta x; \Delta y; \Delta s) \in \mathcal{N}_\theta(\mu^+)$.

Preuve.

- Nous prouvons le point (a).

De (c) du Lemme 2.5.1, on a :

$$\begin{aligned} \bar{x}^{+T} \underline{s}^+ &= \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)\right) \bar{x}^T \underline{s}, \\ &= \left(1 - 1 + \frac{\sigma}{2}\right) \bar{x}^T \underline{s}, \\ &= \left(\frac{1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}}}{2}\right) \bar{x}^T \underline{s} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}}\right) \bar{x}^T \underline{s}. \end{aligned}$$

- Prouvons maintenant le point (b), on définit :

$$\mu^+ := \frac{1}{2r} \bar{x}^{+T} \underline{s}^+ = \left(1 - \frac{\delta}{2r}\right) \mu, \quad (2.19)$$

et soit $(\bar{x}; y; \underline{s}) \in \mathcal{N}_\theta(\mu)$, nous avons donc

$$\begin{aligned} \|\sigma\mu e - \bar{x} \circ \underline{s}\|_F^2 &\leq \|\sigma\mu e - \bar{x} \circ \underline{s} + (\sigma - 1)\mu e - (\sigma - 1)\mu e\|_F^2, \\ &= \|\sigma\mu e - \bar{x} \circ \underline{s} - \sigma\mu e + \mu e + \sigma\mu e - \mu e\|_F^2, \\ &= \|(\sigma - 1)\mu e\|_F^2 + \|\sigma\mu e - \bar{x} \circ \underline{s}\|_F^2 + \|(\sigma - 1)\mu e\|_F^2, \\ &\leq \theta^2 \mu^2 + (\sigma - 1)^2 \mu^2 2r, \\ &= ((\sigma - 1)^2 2r + \theta^2) \mu^2, \\ &= (\delta^2 + \theta^2) \mu^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

puisque $\|\bar{x} \circ \underline{s} - \sigma\mu e\| \leq \theta\mu$ et $h = \sigma\mu e - \bar{x} \circ \underline{s}$, en utilisant le Lemme 2.5.2 et l'équation (2.15), on trouve :

$$\mu \|\overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1}\|_F \|\bar{x} \circ \underline{\Delta s}\|_F \leq \frac{\|\sigma\mu e - \bar{x} \circ \underline{s}\|_F^2}{2(1 - \theta)^2}.$$

donc

$$\|\overline{\Delta x} \circ \bar{x}^{-1}\|_F \|\bar{x} \circ \underline{\Delta s}\|_F \leq \frac{\|\sigma\mu e - \bar{x} \circ \underline{s}\|_F^2}{2(1 - \theta)^2 \mu}. \quad (2.21)$$

On définit

$$q^+ := (1 - \alpha) \bar{x}^+ \circ \underline{s}^+ - \mu^+ e + \alpha^2 \|\overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s}\|_F = q(1) = \|\overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s}\|_F.$$

et en utilisant Lemme 2.5.1 avec $\alpha = 1$ et les relations (2.14), (2.18), (2.19), (2.20) et (2.21), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \|q^+\|_F &= \|\overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s}\|_F, \\
 &= \|\overline{\Delta x} \circ \underline{\Delta s}\|_F \|\overline{\Delta x} \circ \overline{x^{-1}}\|_F, \\
 &\leq \frac{\|\sigma\mu e - \overline{x} \circ \underline{s}\|_F^2}{2(1-\theta)^2\mu}, \\
 &\leq \frac{(\delta^2 + \theta^2)\mu}{2(1-\theta^2)}, \\
 &\leq \theta \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}}\right) \mu, \\
 &= \theta\mu^+.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|\overline{x}^+ \circ \underline{s}^+ - \mu^+ e\|_F \leq \theta\mu^+ \Rightarrow d(\overline{x}^+, \underline{s}^+) \leq \theta\mu^+. \quad (2.22)$$

En utilisant le côté droit de l'inégalité (2.15) et les inégalités (2.18) et (2.20), nous avons

$$\|\overline{\Delta x} \circ \overline{x^{-1}}\|_F \leq \frac{\|\sigma\mu e - \overline{x} \circ \underline{s}\|_F}{(1-\theta)\mu} \leq \frac{\sqrt{\delta^2 + \theta^2}}{(1-\theta)\mu} \leq \sqrt{2\theta(1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}})} < 1,$$

où la stricte inégalité découle de $\theta \leq \frac{1}{2}$ et $0 < 1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}} < 1$.

On peut voir facilement que $\|\overline{\Delta x} \circ \overline{x^{-1}}\|_F < 1$ implique que $e + \overline{\Delta x} \circ \overline{x^{-1}} \succ 0$, donc

$$\overline{x}^+ = \overline{\Delta x} + \overline{x} = (e + \overline{\Delta x} \circ \overline{x^{-1}}) \circ \overline{x} \succ 0.$$

De l'inégalité (2.18), nous avons $\lambda_{\min}(\overline{x}^+ \circ \underline{s}^+) \geq (1-\theta)\mu^+ > 0$, donc $\overline{x}^+ \circ \underline{s}^+ \succ 0$.

Comme $\overline{x}^+ \succ 0$ et \overline{x}^+ et \underline{s}^+ sont des opérateurs commutent, nous concluons que $\underline{s}^+ \succ 0$.

Utilisant la première équation du système (2.7), nous obtenons

$$\underline{A}x^+ = \underline{A}(x^+ + \overline{\Delta x}) = \underline{A}\overline{x} + \underline{A}\overline{\Delta x} = b, \text{ par conséquent } x^+ \in \mathcal{F}_D^0.$$

En utilisant la deuxième équation du système (2.7), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \underline{A}^T y^+ + \overline{s}^+ &= \underline{A}^T (y + \Delta x) + (\overline{s} + \Delta s) \\
 &= \underline{A}^T y + \overline{s} + \underline{A}^T \Delta y + \overline{\Delta s} = c,
 \end{aligned}$$

par conséquent $(y^+; \overline{s}^+) \in \mathcal{F}_D^0$.

Ainsi, de (2.22), on en déduit que $(\overline{x}^+; y^+; \underline{s}^+) \in \mathcal{N}_\theta(\mu^+)$

- Nous prouvons maintenant le point (c), on a :

$$\mu^+ := \frac{1}{2r} x^{+T} s^+ = \left(1 - \frac{\delta}{2r}\right) \mu. \quad (2.23)$$

et soit $(x; y; s) \in \mathcal{N}_\theta(\mu)$, nous avons donc

$$\begin{aligned}
 \|\sigma\mu e - x \circ s\|_F^2 &\leq \|\sigma\mu e - x \circ s + (\sigma - 1)\mu e + (\sigma - 1)\mu e\|_F^2, \\
 &= \|\sigma\mu e - x \circ s - \sigma\mu e + \mu e + \sigma\mu e - \mu e\|_F^2, \\
 &= \|(\sigma - 1)\mu e\|_F^2 + \|\delta\mu e - x \circ s\|_F^2 + \|(\sigma - 1)\mu e\|_F^2, \\
 &\leq \theta^2\mu^2 + (\sigma - 1)^2\mu^2 2r, \\
 &= ((\sigma - 1)^2 2r + \theta^2)\mu^2, \\
 &= (\delta^2 + \theta^2)\mu^2.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Puisque $\|x \circ s - \sigma\mu e\| \leq \theta\mu$ et $h = \sigma\mu e - x \circ s$, en utilisant le Lemme 2.5.2 et l'équation (2.15), on trouve :

$$\mu\|\Delta x \circ x^{-1}\|_F \|\bar{x} \circ \Delta s\|_F \leq \frac{\|\sigma\mu e - x \circ s\|_F^2}{2(1 - \theta)^2},$$

donc

$$\|\Delta x \circ x^{-1}\|_F \|x \circ \Delta s\|_F \leq \frac{\|\sigma\mu e - x \circ s\|_F^2}{2(1 - \theta)^2\mu}. \tag{2.25}$$

On définit

$$q^+ := q(1) = \|\bar{\Delta x} \circ \underline{\Delta s}\|_F.$$

en utilisant Lemme 2.5.1 avec $\alpha = 1$ et les relations (2.18), (2.23), (2.24), (2.25) et (2.26), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \|q^+\|_F &= \|\bar{\Delta x} \circ \underline{\Delta s}\|_F, \\
 &= \|\Delta x \circ \Delta s\|_F \|\Delta x \circ x^{-1}\|_F, \\
 &\leq \frac{\|\sigma\mu e - x \circ s\|_F^2}{2(1 - \theta)^2\mu}, \\
 &\leq \frac{(\delta^2 + \theta^2)\mu}{2(1 - \theta)^2}, \\
 &\leq \theta \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}}\right) \mu, \\
 &= \theta\mu^+.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|x \circ s - \mu^+ e\|_F \leq \theta\mu^+ \Rightarrow d(x^+, s^+) \leq \theta\mu^+. \tag{2.26}$$

En utilisant l'inégalité du côté droit de la relation (2.8) et en utilisant (2.18) et (2.24), nous avons

$$\|x \circ x^{-1}\|_F \leq \frac{\|\sigma\mu e - x \circ s\|_F}{(1-\theta)\mu} \leq \frac{\sqrt{\delta^2 + \theta^2}}{(1-\theta)\mu} \leq \sqrt{2\theta(1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}})} < 1,$$

où la stricte inégalité découle de $\theta \leq \frac{1}{2}$ et $0 < 1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}} < 1$.

On peut voir facilement que $\|\Delta x \circ x^{-1}\|_F < 1$ implique que $e + x \circ x^{-1} \succ 0$, donc

$$x^+ = \Delta x + x = (e + \Delta x \circ x^{-1}) \circ x \succ 0$$

De l'inégalité (2.18), nous avons $\lambda_{\min}(x^+ \circ s^+) \geq (1 - \theta)\mu^+ > 0$, donc $x^+ \circ s^+ \succ 0$.

Comme $x^+ \succ 0$ et x^+ et s^+ sont des opérateurs commutent, nous concluons que $s^+ \succ 0$.

Utilisant la première équation du système (2.7), nous obtenons

$$Ax^+ = A(x^+ + \Delta x) = Ax + A\Delta x = b,$$

et par conséquent $x^+ \in \mathcal{F}_P^0$.

En utilisant la deuxième équation du système (2.7), nous obtenons :

$$\begin{aligned} A^T y^+ + s^+ &= A^T(y) + x + (s + \Delta s) \\ &= A^T y + s + A^T \Delta y + \Delta s = c, \end{aligned}$$

et par conséquent $(y^+; \bar{s}^+) \in \mathcal{F}_D^0$.

Ainsi, de (2.26), on en déduit que $(x^+; y^+; s^+) \in \mathcal{N}_\theta(\mu)$.

La preuve est complète. □

Corollaire 2.6.4. Soient θ et δ sont données dans le Théorème 2.5.2 et $(x^{(0)}; y^{(0)}; s^{(0)}) \in \mathcal{N}_\theta(\mu)$.

Alors notre algorithme génère une suite de point $\{(x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)})\} \subset \mathcal{N}_\theta(\mu)$ telle que

$$x^{(k)T} s^{(k)} = \left(1 - \frac{\delta}{\delta - 1\sqrt{2r}}\right) x^{(0)T} s^{(0)}, \quad \forall k \geq 0. \quad (2.27)$$

De plus, pour $\varepsilon > 0$ une donnée, l'algorithme calcule une itération $\{(x^{(k)}; y^{(k)}; s^{(k)})\}$ satisfaisant $x^{(k)T} s^{(k)} \leq \varepsilon$ au plus de $K = \mathcal{O}\left(\delta^{-1}\sqrt{2r} \ln\left[\varepsilon^{-1}x^{(0)T} s^{(0)}\right]\right)$ itérations .

Preuve. Déterminer k qui vérifie $x^{(k)T} s^{(k)T} \leq \varepsilon$, équivalent à trouver k tel que

$$\left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}}\right)^k x^{(0)T} s^{(0)} \leq \varepsilon, \quad \forall k \geq 0.$$

qui est équivalent à

$$k \ln\left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{2r}}\right) \leq \ln \frac{\varepsilon}{x^{(0)T} s^{(0)}},$$

et comme

$$\ln(1 - x) \geq -x, \quad 0 < x = \frac{\delta}{\sqrt{2r}} < 1,$$

cela est vérifié si ;

$$k\left(-\frac{\delta}{\sqrt{2r}}\right) \leq \ln\left(\frac{\varepsilon}{x^{(0)T} s^{(0)}}\right),$$

où de manière équivalente

$$k \geq \left[\delta^{-1} \sqrt{2r} \ln \left(\frac{x^{(0)T} s^{(0)}}{\varepsilon} \right) \right].$$

Ce qui complète la preuve. □

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées à la résolution des problèmes de programmation du cône de second ordre (*PCSO*) par la méthode de trajectoire centrale (TC). Nous avons associé au problème primal (P) de (*PCSO*) un problème perturbé, noté (P_μ). En premier lieu et par une nouvelle et simple technique, nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution optimale du problème (P_μ), ensuite nous avons montré que la solution du problème perturbé (P_μ) converge vers la solution optimale du problème initial (P) lorsque μ tend vers zéro. Puis, nous avons prouvé, en appliquant une méthode simple et facile, la diminution de la fonction objective sur la suite déterminée par notre algorithme.

Le problème (P_μ) étant strictement convexe, les conditions **KKT** sont nécessaires et suffisantes. alors, nous avons utilisé la méthode de Newton qui nous a permis de calculer une bonne direction de descente et de déterminer une nouvelle itération, meilleure que celle d'actualité.

Pour calculer le pas de déplacement, plusieurs méthodes ont été proposées par les scientifiques et les chercheurs. Y compris, méthodes de recherche linéaire, qui sont très coûteuses et impraticables. Pour remédier ce problème, nous avons proposé dans ce travail une nouvelle approche : nous donnons quatre nouvelles alternatives pour calculer le pas de déplacement par une méthode simple, facile et techniquement beaucoup moins coûteuse. Enfin, nous avons analysé la convergence de l'algorithme obtenu et montré que sa complexité pour les méthodes à pas court est borné par $\mathcal{O}\left(\delta^{-1}\sqrt{2r} \ln \left[\varepsilon^{-1} \left(x^{(0)T} s^{(0)}\right)\right]\right)$ itérations.

Bibliographie

- [1] **M. Achache** : A weighted path-following method for the linear complementarity problem, *Studia Univ. Babes-Bolyai Ser. Inform.* 48 (2004) 61-73.
- [2] **A. Auslender** : An exact penalty method for nonconvex problems covering, in particular, nonlinear programming, semidefinite programming, and second-order cone programming. *SIAM. J. Optim.* 25 (2015) 1732-1759.
- [3] **F. Alizadeh, J. P. Haberly, M.-L. Overton** : Primal-dual interior-point methods for semidefinite programming, convergence rates, stability and numerical results. *SIAM J. Optim.* 8(1998) 746-768.
- [4] **F. Alizadeh, D. Goldfarb** : Second-order cone programming. *Math. Program. Ser.* 95 (2003)3-51.
- [5] **R. Behling, C. Gonzaga, G. Haeser** : Primal-dual relationship between Levenberg-Marquardt and central trajectories for linearly constrained convex optimization, *J. Optim. Theory Appl.* 162 (2014) 705-717.
- [6] **D. Benterki, J. P. Crouzeix, B. Merikhi** : A numerical feasible interior point method for linear semidefinite programs, *RAIRO Oper.Res.* 41 (2017) 49-59.
- [7] **D. Benterki, J. P. Crouzeix, B. Merikhi** : A numerical implementation of an interior point method for semidefinite programming. *Pesquisa Operacional* 23 (2003) 49-59.
- [8] **D. Benterki, A. Leulmi** : An improving procedure of the interior projective method for linear programming, *Appl. Math. Comput.* 199 (2008) 811-819.
- [9] **J. P. Crouzeix, B. Benterki** : Alogarithmic barrier method for semidefinite programming, *RAIRO Oper. Res.* 42 (2008) 123-139.

-
- [10] **Z. Darvay** : A weighted-path-following method for linear optimization, *Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Inform.* 47 (2002) 3-12.
- [11] **M. Dodani, A. Babu**, Karmarkar's projective method for linear programming : A computational appraisal, *Comput.* 199 (1989) 189-206.
- [12] **J. Faraut, A. Korányi** : *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1994.
- [13] **P. Gahinet, A. Nemirovski** : The projective method for solving linear matrix inequalities, *Math. Prog.* 77 (1997) 163-190.
- [14] **N. Gould, D. Orban, D. Robinson** : Trajectory-following methods for large-scale degenerate convex quadratic programming, *Math. Prog. Comput.* 5 (2013) 113-148.
- [15] **Y. J. Hans, D. Mittelmann** : Interior point methods for second-order cone programming and OR applications. *Comput. Optim. Appl.* 28 (2004) 255-285.
- [16] **Z. Hao, Z. Wan, X. Chi, J. Chen** : A power penalty method for second-order cone nonlinear complementarity problems. *J. Comput. Appl. Math.* 290 (2015) 136-149.
- [17] **C. Helmberg, F. Rendl, R.J. Vanderbei, H. Wolkowicz** : An interior-point methods for stochastic semidefinite programming . *SIAM. J. Optim.* 6 (1996) 342-361.
- [18] **D. Hertog** : *Interior Point Approach to Linear Quadratic and Convex Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [19] **Z. Kebbiche, A. Keraghel, A. Yassine** : Extension of a projective interior point method for linearly constrained convex programming, *Appl. Math. Comput.* 193(2007)553-559.
- [20] **S. Kettab, D. Benterki**, A relaxed logarithmic barrier method for semidefinite programming, *RAIRO Oper. Res.* 77 (2015) 555-568.
- [21] **B. Kheirfam** : A corrector-predictor path-following method for second-order cone nonlinear complementarity problems. *J. Comput. Appl. Math.* 93 (2016) 2064-2078.
- [22] **A. Keraghel**, : *Etude adaptative et comparative des principales variantes de l'algorithme de Karmarkar (Thèse de Doctorat)*, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1989.
- [23] **M. Kojima, S. Shindoh, S. Hara** : Interior-point methods for the monotone linear complementarity problem in symmetric matrices. *SIAM. J. Optim.* 7 (1997) 86-125.
- [24] **A. Leulmi** : *Thèse Doctorat : étude d'une méthode barrière logarithmique via les fonctions minorantes pour la programmation semi-définie.*

-
- [25] **I. Lustig** : Computatinal experience with a primal-dual interior point method for linear programming, *Linear Alg. Appl.* 152 (1991) 191-222.
- [26] **H. Lütkepohl** : Handbook of Matrices, Humboldt-Universität zu Berlin, Germany, 1996.
- [27] **L. Menniche, D. Benterki** : Alogarithmic barrier approach for linear programming, *J.Comput. Appl. Math.* 312 (2017) 267-275.
- [28] **L. Menniche** :These Doctorat : Etude Théorique et numérique d'une classe de méthodes de points intérieur pour la programmation linéaire.
- [29] **R.D. Monteiro** : primal-dual path-following algorithmic for semidefinite programming. *SIAM. J. Optim.* 7 (1997) 633-678.
- [30] **R. Naseri, A. Valinejad** : An extended variant of Karamarkars interior point algorithmic, *Appl.Math. Comput.* 184 (2007) 737-742.
- [31] **Nesterov, Todd** : A primal-dual interior-point algorithm for second-order cone optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 215 (2009) 1047-1061.
- [32] **Y. E. Nesterov, A. Nemiroveskii** : Interior-Point Polynomail Algorithms in Convex Programming, SIAM, 1997.
- [33] **Y. E. Nesterov, M. J. Todd** : A primal-dual interior-point methods for self-scaled cones. *SIAM. J. Optim.* 8 (1998) 324-364.
- [34] **C. Roos, T. Terlaky, J. P. Vial**, Theory and algorithms for linear Optimization : An Interior Point Approach,W. Johan and Sons, 1997.
- [35] **S. H. Schmieta, F. Alizadeh** : Extension of primal-dual interior point methods symmetric cones. *math. Program. Ser. A* 96 (2003) 409-438.
- [36] **J. Tang, G. He, L. Fang** : A new one-step smoothing newton method for second-order cone programming. *Applications of Mathematics*, 57 (2012) 311-331.
- [37] **I. Touil, D. Benterki , A. Yassine** : A feaisble primal-dual interior point for liner semidefinite programming, *J. Comput. Appl. Math.*321 (2017) 216-230.
- [38] **M. Todd, Y. Wang** : On combined phase 1- phase 2 projetive methods for linear programming, *Algorithmic.* 9(1993) 64-83.
- [39] **H. Wolkowicz, G. P. H. Styan** : Bounds for eigenvalues using traces. *Linear Algebra Appl.* 29 (1980) 471-506.
- [40] **S. Wright** : Primal-Dual Interior Point Methods, SIAM, Philadelphia, 1997.

- [41] **Y. Ye**, Theory and Analysis, in : Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics Optimization, John Wiley and Sons, New York, 1997.
- [42] **M. Zangiabada, G. Gu, C. Roos** : Full Nesterov-TooD Step primal-dual interior-point methods for second-order cone optimization, July, 2008.
- [43] **Y. Zhang** : On extending primal-dual interior-point algorithmic form linear programming to semidefinite programming. SIAM. J. Optim. 8 (1998) 356-386.