République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département mathématiques

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master
Spécialité : Mathématiques.
Option : EDP et Applications

Thème

Coefficients de singularités du problème de Dirichlet pour le système de l'élasticité (Lamé)

Présenté par :
Zergoug Amal
Boultif Samira

Devant le jury :

Président :	**Chikouche Wided**	Professeur	Univ de Jijel
Encadreur :	**Boufenouche Razika**	MCB	Univ de Jijel
Examinateur :	**Lounis Sabrina**	MCA	Univ de Jijel

Promotion : 2020/2021.

★ Remerciement ★

Tout d'abord et avant tout, nous remercions ALLAH le tout puissant, pour la force, la volonté, la santé, la patience et le courage qu'il nous à donné pour accomplir ce notre travail de recherche.

Je tien à exprimer ma profond gratitude, mes sincères remerciements, mon encadreur Mme R.BOUFENOUCHE, pour confiance qu'il nous a accordé en acceptant d'encadrer ce travail et pour sa patience, ces précieux conseils, pour ces orientations, ces encouragement et sa disponibilité constante.

Mes plus vifs remerciements vont aussi aux membres de jury W.CHIKOUCHE et Mme S.LOUNIS pour l'intérêt qu'ils ont apporté à lire et à présider et examiner ce travail.

Un grand merci pour mes Parents et tout ma famille pour leurs sacrifices et encouragements, pour mes amis qui nous a supporté toutes les difficultés et soutient moral tour au long de notre travail.

★ *Dédicaces* ★

Je dédie ce modeste travail :

À mon père *Abd Elhamid* ***et à ma mère*** *Saida****,***
Que vous dire si ce n'est un grand Merci !
Merci d'avoir supporté ces longues absences et ces brèves vacances.
Merci d'avoir toujours veillé à mon confort.
N'y a pas de mots assez forts pour vous exprimer tout mon amour.

À ma grand-mère *Mebarka****.***

À l'âmes des mes grands-parents *Mohamed****,*** *Mohand* ***et*** *Laram*
"Allah yarhamhom"

À mon frère *Mohamed* ***et mes sœurs*** *Meriem* ***et*** *Randa*

À mes oncles et mes tantes.

À mon fiancé *Nabil*

À toute la famille *ZERGOUG* ***et la famille*** *BOUFELLOUH*

À tous mes amis, qui je suis sure se reconnaîtront sans que j'aie à les citer,tous merci pour votre soutien, votre amitié, vos encouragements.

À vous tous, je dédie ce modeste travail.

AMEL.

★ *Dédicaces* ★

Je dédie ce modeste travail en signe de respect, de gratitude et de reconnaissanc :

À mon chère père** Ammar **pour ces précieux conseil et encouragement aucun dédicace sera exprimée l'amour, l'estime, et le respect que j'ai pour toi.
À ma mère** Safia**, qui a œuvré pour ma réussite, tout les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour tout son assistance et sa présence dans ma vie.

À Mes adorables beaux frères pour leur encouragements et leur aide, ma vie n'aurait pas eu de gout sans ils.

À mes chères sœurs** Naima, Habiba, Kenza **et** Feryel **que j'estime boucoup, pour leur disponibilités, leurs présence et leurs soutiens. Tout mes souhaits de bonheur et de réussit dans leurs vie.

***À les beaux enfants** Aymen**,** Amin**,** Hanine**,** Aya **et** Moad Bahaa – Eddin*

À mes camarades de promos de EDP.

À tous mes amis, qui je suis sure se reconnaîtront sans que j'aie à les citer,
tous merci pour votre soutien, votre amitié, vos encouragements.

À vous tous, je dédie ce modeste travail.

SAMIRA.

Table des matières

Table des figures

Notations

$\Omega \in \mathbb{R}^2$	Un ouvert borné.
σ	Le champ des contraintes.
ε	Le champ des déformations .
ρ	La densité de masse.
$\partial\Omega = \Gamma$	Frontière polygonale rectiligne.
Γ_i	Une partie (segment) de Γ; $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Gamma}_i$.
$f \in [L^2(\Omega)]^2$	Un champ de force.
η	Le vecteur unitaire normal sortant.
$Tr(A)$	La trace de la matrice A.
u^T	Le transposé de u.
τ	La tangente.
ω	L'ouverture de l'angle vers l'intérieur de Ω.
L	L'opérateur différentiel.
∇f	Le gradient de f.
$div f$	La divergence de f.
Δ	Le Laplacien.
$\frac{\partial u}{\partial \eta}$	La dérivée normal.
δ_{ij}	Symbole de Kroneker.
ν	Le coefficient de Poisson des plaques.
rot	rotation.
:	produit tensoriel
.	produit vectoriel
$D(\Omega)$	L'espace des fonctions C^∞ a support compact dans Ω.
$L^p(\Omega)$	L'espace des fonctions de puissance P-ième intégrable sur Ω pour la mesure de Lebesgue.
$H^s(\Omega)$	L'espace de Sobolev d'ordre s, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.
$W_p^s(\Omega)$	L'espace de Sobolev d'ordre s, $(W_2^s(\Omega) = H^s(\Omega))$.

$\alpha = \alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_N \in \mathbb{N}^N$ et $|\alpha| = \alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_N$.

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles (et par fois appelée équations différentielles partielles et abrégée en EDP), sont des équations apparaissent naturellement dans la modélisation de nombreux problèmes en physique, biologie, économie et ailleurs, et dont des solutions sont les fonctions inconnus dépendant de plusieurs variables et vérifiant certaines conditions. La mécanique des milieux continus (M.M.C) est le domaine de la mécanique qui s'intéresse à la déformation des solides et à l'écoulement des fluides. Notre travail rentre dans ce cadre qui s'exprime la loi de comportement qui est une relation reliant les champs des contraintes σ appliquées et des déformations sous forme tensorielle.

Dans l'étude des problèmes aux limites linéaires ou non linéaires, de nombreux résultats ont déjà été obtenus dans le cas de domaine à frontière régulières [29]. [1]. Ces résultats permettent à présent des applications en mécaniques et dans l'industrie [12].[15]. Par contre, l'étude d'existence, de régularités, et de singularités des solutions de problème aux limites dans des domaines non réguliers, tel que des domaines avec coins et arêtes (polygone, polyèdre...) par exemple et plus complexe [19].[25].[33].[32].
Ce domaine de recherche est l'aboutissement logique du précédent, et il est plus réaliste dans de plusieurs applications industrielles, car en pratique les hypothéses de régularité ne sont pas toujours vérifiées, au contraire.
Des résultats d'existence et de régularité pour le Laplacien dans des domaines non réguliers (fissuré ou non) ont été obtenus pour le problème de Dirichlet dans un polygone [26].[24].[22], polyèdre [27]. Ils ont démontrer que la solution variationnelle du problème considéré est réguliére (c'est-à-dire $H^2(\Omega)$) si seulement si tous les angles du polygone sont inférieur à π. Autrement dit que le problème admet un nombre fini des solutions singulières pour le système da Lamé dans une classe d'espaces de Sobolev à double poids [7]. Le cas d'un domaine non homogène par [9].[8].
Dans cette thèse non étudierons le comportement singulier de la solution variationnelle du problème de Dirichlet pour le système de Lamé (élasticité) dans un polygone plan borné, nous nous intéressons donc au singularité de la solution variationnelle $u \in (H^2(\Omega))$ du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\nabla(divu) = f \ dans \ \Omega, \\ u = 0 \ sur \ \Gamma. \end{cases} \tag{1}$$

ou λ et μ sont les constantes de Lamé ($\lambda \geq 0, \mu > 0$), ν est un nombre réel appelé le coefficient de Poisson($0 < \lambda < \frac{1}{2}$), tel que

$$\frac{\lambda+\mu}{\mu} = \nu_0 = \frac{1}{1-2\nu}.$$

$u_j, f_j, \ \sigma : (j = 1, 2)$ désigne respectivement les composantes du vecteur déplacement, de la densité des forces extérieures et le tenseur des contraintes linéarisées.

Cette Thèse se compose de trois chapitres, elle est organisée de la manière suivantes :
Dans **le premier chapitre** nous rappelons quelques notions et résultats essentiels de la théorie des milieux continus, les contraintes, les déformations et théorème de réciprocité de Maxwell-Betti.
Le deuxième chapitre est contient deux parties, la première partie consiste aux notation et formulation mathématique du problème, alors dans la deuxième partie on montre que le comportement singulier de la solution est gouverné par l'équation transcendante

$$\sin^2 \alpha\omega = (\frac{\nu_0}{\nu_0 + 2}\alpha)^2 \sin^2 \omega, \; \Re\alpha > 0,$$

Soulignons que cette équation est trouvé par Merouani [33] et est analogue à celle trouvée dans le contexte des plaques. par plusieurs auteurs [4], [11] avec différents conditions aux limites pour le Bilaplacien.
Dans notre travail on va détailler l'article de B. Merouani & R. Boufenouche par des techniques généralisant à un système celle utilisées pour le Bilaplacien [11], [35] et [37].
Le troisième chapitre est la partie essentiels pour réaliser l'objectif de notre travail consiste au calcul des coefficients de singularité c_β, d_β dans le cas important de la fissure, nous commençons par l'établir d'une relation d'orthogonalité entre deux fonctions $(v_\alpha)_{\alpha\in E}$ grâce à la formule de Green par l'opérateur de Lamé dans un secteur plan S, qui facilite les calculs des coefficients de singularités dans le cas important de la fissure et qui permettant d'étudier la convergence de la nouvelle série $\sum\limits_{\alpha\in E} c_\alpha r^\alpha v_\alpha(\theta)$.
On finira cette thèse par une conclusion.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Contraintes, déformations et équation du mouvement

On considère un matériau déformable occupant un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^N (N=2)$ ayant une frontière Γ supposée assez régulière.
Les inconnues du problème sont le champ des déplacements $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \to S_N$. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus représentant l'équivalence entre les efforts extérieurs et le tenseur des accélérations pour un système quelconque, conduit à l'équation du mouvement.

$$\operatorname{div} \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega.$$

Dans cette équation, $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse, $\ddot{u}$ est le champ des accélérations, $f_0 : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le champ des densités des forces volumiques appliquées sur le matériau qui sont les données du problème, et $\operatorname{div} \sigma$ est la divergence du champ des contraintes.
Dans certaines situations, cette équation peut aussi se simplifier par exemple dans le cas où :

$$\dot{u} = 0,$$

il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statique) ; ou bien dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le $\ddot{u}$ peut être négligé (processus quasi-statique). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient

$$\operatorname{div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Dans se qui suit, on va considérer des matériaux élastiques dans le cadre des petites déformations. Dans ce cas, le champ des déformations $\varepsilon : \Omega \longrightarrow S_N$ est linéarisé i.e.

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{dans}\Omega,\ i,j = \overline{1,2}.$$

Les équations du mouvement sont insuffisantes, à elle seules pour décrire l'équilibre des matériaux, elle doivent être complétés par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériaux et que l'on désigne en général par la loi de comportement qui est une relation reliant le tenseur de contrainte et le tenseur de déformation et leur dérivées.

1.2 Lois de comportement(linéaire et non linéaire)

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien qu'elle doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais qu'il faut réaliser pour établir une loi de comportement.

1.2.1 Loi de comportement élastique linéaire

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et connexe et soient σ le tenseur des contraintes et ε le tenseur des déformations. La loi de comportement élastique linéaire est donnée par

$$\sigma = \xi\varepsilon, \text{ i.e. } (\sigma_{ij} = \xi_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}),$$

où : $\xi = \xi_{ijkh}$ est un tenseur d'ordre 4, ses composantes ξ_{ijkh} s'appellent coefficients d'élasticité, ils sont indépendants du tenseur des déformations. Dans le cas non homogène les composantes ξ_{ijkh} dépendent du point $x \in \Omega$ et dans le cas homogène les composantes ξ_{ijkh}, sont des constantes et sont données par :

$$\xi_{ijkh} = \lambda\delta_{ij} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jk} + \delta_{ih}\delta_{jh}),$$

où les scalaires λ, μ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

D'habitude on suppose que ξ est un tenseur symétrique et positivement défini c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 1) \quad \langle \xi\tau_1, \tau_2 \rangle = \langle \tau_1, \xi\tau_2 \rangle, \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in S_N, \\ 2) \quad \exists\, c > 0 \text{ tel que : } \langle \xi\tau, \tau \rangle \geqslant c|\tau|^2, \quad \forall \tau \in S_N. \end{cases}$$

• **Loi de Hooke :**

La loi de Hooke est un loi de comportement des solides soumis à une déformation élastique de faible amplitude, elle a été énoncée par le physicien (Robert Hooke) par : " extension, telle force " ou bien en termes modernes " l'allongement est proportionnel à la force ".
Hooke désirait obtenir une théorie des ressorts, en soumettant ces derniers à des forces croissantes successives, dans cette loi deux aspects sont importants :

1. La linéarité .
2. l'élasticité .

Ce deux aspects ne sont pas identiques, la linéarité exprime que l'allongement est proportionnel à la force, l'élasticité exprime que cet effet réversible permet donc de revenir à l'état initial tel un ressort soumis à une petite force.
L'élasticité a une limite qui est indépendante de la notion de linéarité, Hooke n'a considère que la phase élastique est linéaire, donc proportionnelle et réversible.
La théorie d'élasticité linéaire se situe d'une part dans le cadre de la description des solides lentement déformables, et d'autre part on impose que la loi de comportement élastique reliant le tenseur des contraintes à celui des déformations est linéaire. Lorsque de plus le solide

élastique à un comportement isotrope (c'est-à-dire ne privilégie aucune direction de l'espace), la loi de comportement de Hooke est donc donnée par l'expression

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}(u)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(u),\ \ i,j = \overline{1,2},$$

μ et λ sont les coefficients de Lamé tel que :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sum_{i=0}^{3}\sigma_{kk}\delta_{ij},$$

où

$$E = \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}\ \ et\ \ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Dans la pratique, ce sont le module de Young et le coefficient de Poisson qui sont connus expérimentalement pour un matériau homogène donné et par conséquent on en déduit les coefficients de Lamé :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ et } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

1.2.2 Loi de comportement non linéaire

En général, une loi de comportement élastique non linéaire est de la forme :

$$\sigma = F(\varepsilon),$$

où F est un opérateur non-linéaire.

1.3 Formule de Betti

1.3.1 Théorème d'Ostrogradski-Gauss

Soit G un domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par une surface fermée S orientée vers l'extérieur de G et soit $\vec{V}$ un champ de vecteur dont la divergence est une fonction continue, alors l'intégrale de la divergence de $\vec{V}$ dans G est égale au flux de $\vec{V}$ à travers S, c'est à dire :

$$\iiint_G \operatorname{div}\vec{V}\ dxdydz = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}d\sigma.$$

1.3.2 Théorème de Maxwell-Betti

Le théorème de Maxwell-Betti est une conséquence du théorème du travail maximal (c'est-à-dire si F est la force totale exercée sur la particule et C la trajectoire réelle de la particule, alors le travail de F le long de C est de gagner l'énergie cinétique de la particule (énergie cinétique finale moins énergie cinétique initiale)), que nous allons commencer par démontrer. Soit $\vec{u}$ un champ de déplacement intérieur au solide, et soit :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(grad(\vec{u}) + grad(\vec{u})^{\mathsf{T}}\right),$$

le champ de déformation correspondant.
Considérons un champ de contraintes $\tilde{\sigma}$, indépendant du champ de déformation précédent, mais satisfaisant à la condition d'équilibre :

$$\operatorname{div}\tilde{\sigma} + \tilde{\vec{f}} = \vec{0},$$

et compatible avec les conditions de chargement de surface $\tilde{\vec{T}} = \tilde{\sigma} \cdot n$, où $\tilde{\vec{T}}$ est le vecteur contrainte développé par le chargement en surface et où "n" est le vecteur normal unité à la surface. Le travail réciproque des contraintes des surfaces sous le champ de déplacement $\vec{u}$ s'exprime avec le tenseur de contraintes :

$$\int_A \tilde{\vec{T}} \cdot \vec{u}\, dA = \int_A (\tilde{\sigma} \cdot n) \cdot \vec{u}\, dA = \int_A (\tilde{\sigma} \cdot \vec{u}) \cdot n\, dA.$$

Si la surface est suffisamment régulière, cette intégrale de surface peut être transformée en intégrale de volume grâce au théorème de flux-divergence (Ostrogradski-Gauss).i.e.

$$\int_A \vec{v} \cdot n\, dA = \int_V \operatorname{div}(\vec{v})\, dV.$$

Donc

$$\int_A \tilde{\vec{T}} \cdot \vec{u}\, dA = \int_A (\tilde{\sigma} \cdot \vec{u}) \cdot n\, dA = \int_V \operatorname{div}(\tilde{\sigma} \cdot \vec{u})\, dV,$$

et la formule de Leibnitz donne

$$\operatorname{div}(T \cdot \vec{v}) = \operatorname{div}(T) \cdot \vec{v} + T^{\mathsf{T}} \colon grad(\vec{v}).$$

Alors

$$\int_A \tilde{\vec{T}} \cdot \vec{u}\, dA = \int_V \operatorname{div}(\tilde{\sigma} \cdot \vec{u})\, dV = \int_V \operatorname{div}(\tilde{\sigma}) \cdot \vec{u}\, dV + \int_V \tilde{\sigma} \colon grad(\vec{u})\, dV.$$

En y substituant la condition d'équilibre

$$\operatorname{div}\tilde{\sigma} = -\tilde{\vec{f}},$$

et en tenant compte du fait que la composante antisymétrique du gradient de déplacement ne travaille pas dans le produit contracté avec le tenseur (symétrique) des contraintes, c'est-à-dire qu'on a l'identité :

$$\tilde{\sigma} \colon grad(\vec{u}) = \tilde{\sigma} \colon \varepsilon,$$

on obtient le théorème de l'énergie élastique :

$$\int_A \tilde{\vec{T}} \cdot \vec{u}\, dA + \int_V \tilde{\vec{f}} \cdot \vec{u}\, dV = \int_V \tilde{\sigma} \colon \varepsilon\, dV.$$

Pour que ce résultat soit valable, il faut que

1) Le champ de déplacement $\vec{u}$:
   - ⋆ qu'il soit deux fois différentiable dans l'intérieur du solide élastique linéaire,
   - ⋆ qu'il soit continu ainsi que son gradient ($grad\ \vec{u}$) dans l'intérieur et à la surface du solide.
2) Et que le tenseur des contraintes soit admissible, i.e :

- ⋆ qu'il soit continûment dérivable dans l'intérieur du volume V,
- ⋆ qu'il soit continu, ainsi que sa divergence, sur le volume fermé.

Dans l'énoncé du théorème de l'énergie élastique, le champ de contrainte et le champ de déformation sont mutuellement indépendants et ne sont donc pas nécessairement liés par une loi de comportement. Les forces extérieures $\{\vec{\tilde{T}}, \vec{\tilde{f}}\}$ exercent donc le même travail sous le champ de déplacement, que les contraintes internes sous le champ de déformation élastique.

1.3.3 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

Considérons un second état des déformations correspondant à l'action des forces extérieures $\{\vec{T}, \vec{f}\}$. Le matériau élastique, en se déformant, développe un champ de contraintes σ et le déplacement moléculaire $\vec{\tilde{u}}$ un champ de déformation

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}(grad(\vec{\tilde{u}}) + grad(\vec{\tilde{u}})^{\mathsf{T}}).$$

Comme pour l'état précédent, le théorème de l'énergie élastique s'écrit :

$$\int_A \vec{T} \cdot \vec{\tilde{u}}\, dA + \int_V \vec{f} \cdot \vec{\tilde{u}}\, dV = \int_V \sigma : \tilde{\varepsilon}\, dV.$$

Cette relation reste valable car $\{\vec{u}, \varepsilon, \sigma\}$ et $\{\vec{\tilde{u}}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma}\}$ sont deux états d'équilibre élastique du solide.

On retrouve bien l'énoncé continu du théorème de Maxwell-Betti :

$$\int_A \vec{T} \cdot \vec{\tilde{u}}\, dA + \int_V \vec{f} \cdot \vec{\tilde{u}}\, dV = \int_V \sigma : \tilde{\varepsilon}\, dV = \int_V \tilde{\sigma} : \varepsilon\, dV = \int_A \vec{\tilde{T}} \cdot \vec{u}\, dA + \int_V \vec{\tilde{f}} \cdot \vec{u}\, dV.$$

Là encore, malgré ça le matériau puisse n'être ni homogène, ni isotrope, mais la symétrie du tenseur d'élasticité est une condition nécessaire essentielle.

1.4 Espaces de Sobolev

1.4.1 Espace de Sobolev d'ordre entier

Définition 1.4.1. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et $m \geq 1$ un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre m sur Ω et on note $H^m(\Omega)$ l'ensemble*

$$H^m(\Omega) = \{u \text{ mesurable, tel que } D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant m\},$$

où

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n,$$

et sont au sens des distributions. On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire

$$<u, v>_{m,\Omega} = \int_\Omega \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha u \cdot D^\alpha v \right) dx, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega),$$

et on note

$$\begin{aligned}\| v \|_{H^m(\Omega)} &= \| v \|_{m,\Omega} \\ &= (v,v)^{\frac{1}{2}}_{m,\Omega} \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha v \|^2_{0,\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H^m(\Omega),\end{aligned}$$

la norme correspondante.

Propriétés

(i) $*$ pour $m = 0$ on a : $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$,
$*$ pour des entiers m_1, m_2 tels que $m_1 > m_2 \geq 1$, on a :

$$H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega) \text{ (avec injection continu).}$$

(ii) L'opérateur de dérivation $u \longmapsto \partial^\alpha u$ de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-|\alpha|}(\Omega)$ est continue, pour tout $|\alpha| \leqslant m$.

1.4.2 Espaces de Sobolev d'ordre non entier

Définition 1.4.2. *Soit s un réel, $0 < s < 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $H^s(\Omega)$ l'espace*

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \text{ tel que} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\| u \|_{H^s(\Omega)} = \left(\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si s désigne un réel positif de partie entière $[s] = m$, l'espace $H^s(\Omega)$ peut être défini de la manière suivante

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = m, D^\alpha u \in H^{s-m}(\Omega) \right\}.$$

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, nous pouvons définir l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ au moyen de la transformée de Fourier. En effet : si $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier est donnée par

$$v(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} exp(-ix\xi) v(x) dx, \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

et nous avons

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n), \text{ tel que } (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} v(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

et de la norme

$$\| v \|_{H^s(\mathbb{R})} = \| (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} v(\xi) \|_{L^2(\mathbb{R})},$$

qui est équivalente à la norme de $H^s(\mathbb{R}^n)$ (voir Raviart et Thomas [36]).

1.5 Application trace sur $H^m(\Omega)$

Désignons par $D(\overline{\Omega})$ l'espace des distributions des fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$ à $\overline{\Omega}$. Nous pouvons alors parler de la trace d'une fonction de $D(\overline{\Omega})$, et nous définissons l'application :

$$\begin{aligned} \gamma : D(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\Gamma), \\ \varphi &\longmapsto \gamma(\varphi) = \varphi|_\Gamma. \end{aligned}$$

L'application γ est dite application trace, et il est bien connu qu'elle est linéaire et continue au sens de la norme de $H^1(\Omega)$, il est aussi connu que si Ω est régulier, alors : $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.
Ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant

Théorème 1.5.1. *On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ assez régulière. Alors l'application γ de*

$$D(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^2(\Gamma),$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma), \\ u &\longmapsto \gamma(u). \end{aligned}$$

Preuve. Voir Lions-Magenes [30]. □

Chapitre 2

Solution singulière du problème

2.1 Notations et Formulation du problème

2.1.1 Notations

Ω désigne un corps homogène, élastique et isotrope occupant un domaine, borné de $\mathbb{R}^2$, à frontière polygonale rectiligne $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{J} \overline{\Gamma}_j$ où les Γ_j sont des segments de droites ouverts. Le coté $]S_{j-1}, S_j[$ est noté $\mathit{\Gamma}_{j-1}$ et éventuellement, Ω contient des fissures (voir Fig 2.1). L'ouvert défini ainsi est un domaine polygonal.
Il est commode, en coordonnées polaires, de travailler à l'origine. Donc, par translation suivie d'une rotation, on peut ramener S_j, $\mathit{\Gamma}_j$ et $\mathit{\Gamma}_{j-1}$ respectivement à O, Ox et Oy_ω (ω est l'angle que font O_x et Oy_ω vers l'intérieur de Ω (voir Fig 2.2)).
L désignera le système de lamé :

$$\mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div},$$

avec $\lambda > 0$ et $\lambda + \mu \geq 0$, λ et μ sont dites constantes de Lamé.
On posera $\nu_0 = (1 - 2\nu)^{-1} = \frac{\lambda+\mu}{\mu}$ où ν est le coefficient de Poisson ($0 < \nu < \frac{1}{2}$). u_j, f_j ($j = 1, 2$) et σ désignent respectivement les composantes du vecteur déplacement, de la densité des forces extérieures et le tenseur des contraintes linéarisées. η, τ sont respectivement la normale unitaire sortante et la tangente unitaire dans le sens positif sur la frontière Γ.

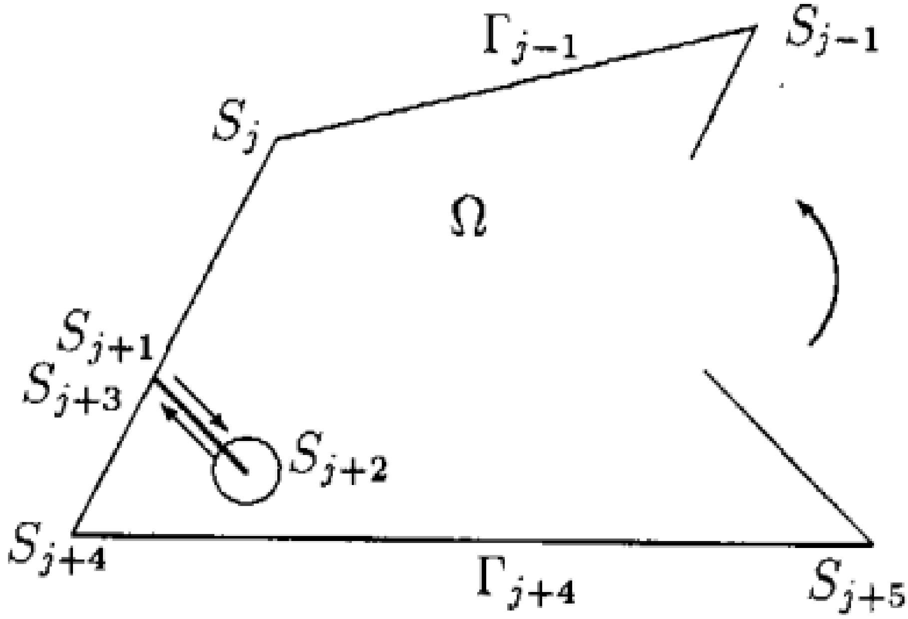

FIGURE 2.1 –

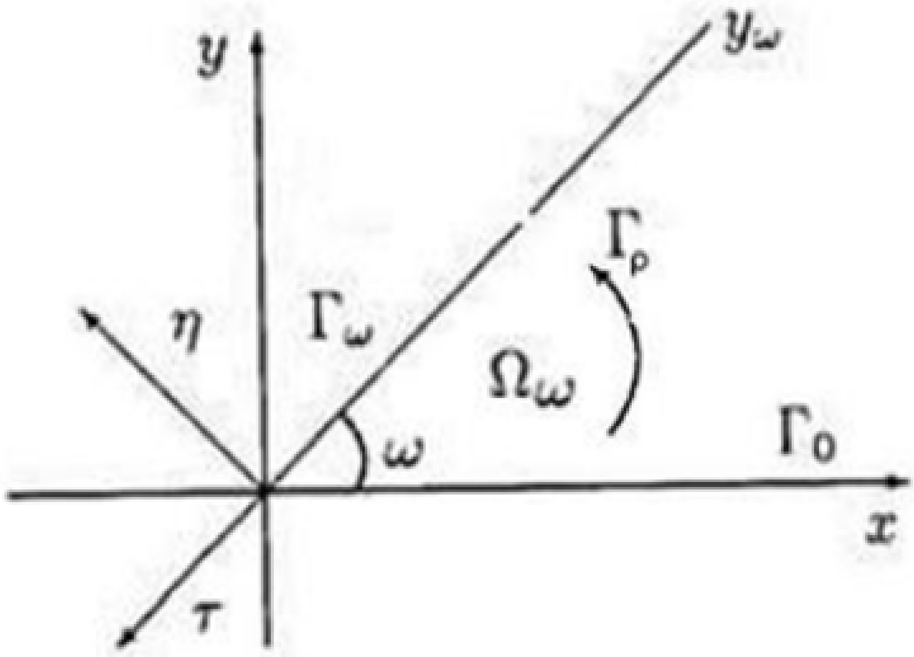

FIGURE 2.2 –

Soulignons que la méthode variationnelle usuelle, permet d'affirmer l'unicité d'une solution faible $u \in [H^1(\Omega)]^2$.

2.1.2 Formulation du problème

On considère le problème (P) gouverné par les équations de Lamé :

$$(P)\begin{cases}\Delta u + \nu_0 \nabla(\operatorname{div} u) = f \quad \text{dans } \Omega,\\ u = 0 \quad sur\ \Gamma_0, \Gamma_\omega.\end{cases}$$

tel que : $\nu_0 = (1-2\nu)^{-1} = \frac{\lambda+\mu}{\mu}$, ν le coefficient de Poisson$(0 < \nu < \frac{1}{2})$.
Dans ce qui suit on cherche u solution de (P), si possible dans $[H^1(\Omega)]^2$ pour tout $f \in (L^2(\Omega))^2$, de plus les théorèmes habituels de régularité (H. Blum & R. Rannacher [4]) permettent d'affirmer du premier coup que $u \in [H^2(\Omega \cap CV)]^2$ pour tout voisinage fermé V du sommet O de Ω.
L est l'opérateur au bord étant homogène et à coefficients constants, la forme

$$u_\alpha(r,\theta) = r^\alpha v_\alpha(\theta),$$

est beaucoup mieux adaptée à la géométrie de Ω, de plus la régularité de u est essentiellement déterminée par la partie $\Re\alpha$.
Soit $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)(u_1,u_2), \Delta u_i = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}, \quad \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right),\ i = 1,2.$$

Le système de Lamé homogène est sous la forme :

$$Lu = \Delta u + \nu_0 \nabla(\operatorname{div} u) = 0. \tag{2.1}$$

On notation indicielle, l'équation (2.1) s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \nu_0 \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = 0,\ i = 1,2. \tag{2.2}$$

• Pour i=1 :
l'équation (2.2) équivaut à

$$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + \nu_0\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = 0.$$

• Pour i=2 :
l'équation (2.2) équivaut à

$$\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + \nu_0\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) = 0.$$

Donc en coordonnées cartésiennes (2.1) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases}\Delta u_1 + \nu_0\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = 0,\\[2ex] \Delta u_2 + \nu_0\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) = 0.\end{cases} \tag{2.3}$$

Séparation des variables en coordonnées polaires :

L'idée de base est de transformer le domaine Ω dans la bande $\mathbb{R}\times]o,\omega[$, puis considérer les solutions de la forme $u_\alpha(r,\theta) = r^\alpha v_\alpha(\theta)$ dans le système $Lu = 0$.
On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x_1} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}. \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} - \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}. \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2} = -\frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta} - \\ \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_1}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Et par conséquent

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

Substituant les relations (2.4), (2.5) et (2.6) dans (2.3) on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2} + \nu_0\Big[\cos^2\theta\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u_1}{\partial r\partial\theta} + \frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial u_1}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}\Big] + \\ \nu_0\Big[\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial r\partial\theta} + \\ \frac{1}{r^2}\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\frac{\partial u_2}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta^2}\Big] = 0, \\ \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta^2} + \nu_0\Big[\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\frac{\partial u_1}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial r\partial\theta} - \\ \frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}\Big] + \nu_0\Big[\sin^2\theta\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial u_2}{\partial\theta} + \\ \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u_2}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta^2}\Big] = 0. \end{cases}$$

En multipliant par r^2 on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}
r^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+r\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2}+\nu_0\left[r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+r\sin^2\theta\frac{\partial u_1}{\partial r}-2r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u_1}{\partial r\partial\theta}+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}\right]+\\
\nu_0\left[r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}-r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial u_2}{\partial r}+r\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial r\partial\theta}+\right.\\
\left.\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)\frac{\partial u_2}{\partial\theta}-\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta^2}\right]=0,\\
\\
r^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}+r\frac{\partial u_2}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2}+\nu_0\left[r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+r\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial r\partial\theta}-\right.\\
\left.r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial u_1}{\partial r}-\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}\right]+\nu_0\left[r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}-2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+\right.\\
\left.2r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u_2}{\partial r\partial\theta}+r\cos^2\theta\frac{\partial u_2}{\partial r}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta^2}\right]=0.
\end{array}\right.$$

À présent on considère les solutions de la forme :

$$u_\alpha(r,\theta)=r^\alpha\left(v_1(\theta),v_2(\theta)\right).$$

Alors

$$\left\{\begin{array}{ll}\frac{\partial}{\partial r}u_1(r,\theta) & =\alpha r^{\alpha-1}v_1(\theta),\\ \frac{\partial}{\partial\theta}u_1(r,\theta) & =r^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta}v_1(\theta)=r^\alpha v_1'(\theta).\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll}\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}(r,\theta) & =\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}v_1(\theta),\\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}(r,\theta) & =r^\alpha\frac{\partial^2 v_1}{\partial\theta^2}(\theta)=r^\alpha v_1''(\theta).\end{array}\right.$$

Et par conséquent on en déduit le système :

$$r^\alpha\left\{\begin{array}{l}
\alpha(\alpha-1)v_1(\theta)+\alpha v_1(\theta)+\frac{\partial^2 v_1}{\partial\theta^2}+\nu_0\left[\alpha(\alpha-1)\cos^2\theta v_1(\theta)+\alpha\sin^2\theta v_1(\theta)-2\alpha\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\right.\\
2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 v_1}{\partial\theta^2}+\alpha(\alpha-1)\cos\theta\sin\theta v_2-\alpha\cos\theta\sin\theta v_2+\\
\left.\alpha\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\frac{\partial v_2}{\partial\theta}+\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)\frac{\partial v_2}{\partial\theta}-\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 v_2}{\partial\theta^2}\right]=0,\\
\\
\alpha(\alpha-1)v_2(\theta)+\alpha v_2(\theta)+\frac{\partial^2 v_2}{\partial\theta^2}+\nu_0\left[\alpha(\alpha-1)\cos\theta\sin\theta v_1(\theta)+\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\right.\\
\alpha\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\frac{\partial v_1}{\partial\theta}-\alpha\cos\theta\sin\theta v_1(\theta)-\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 v_1}{\partial\theta^2}+\alpha(\alpha-1)\sin^2\theta v_2(\theta)-\\
\left.2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial v_2}{\partial\theta}+2\alpha\cos\theta\sin\theta\frac{\partial v_2}{\partial\theta}+\alpha\cos^2\theta v_2(\theta)+\cos^2\theta\frac{\partial^2 v_2}{\partial\theta^2}\right]=0.
\end{array}\right.$$

$\Longleftrightarrow$

$$r^\alpha\left\{\begin{array}{l}
\alpha^2 v_1(\theta)+v_1''(\theta)+\nu_0\left[\left(\alpha(\alpha-1)\cos^2\theta+\alpha\sin^2\theta\right)v_1(\theta)+\left(2\cos\theta\sin\theta-2\alpha\right)v_1'(\theta)+\right.\\
\left.\sin^2\theta v_1''(\theta)+\alpha(\alpha-2)\cos\theta\sin\theta v_2(\theta)+(\alpha-1)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)v_2'(\theta)-\cos\theta\sin\theta v_2''(\theta)\right]=0,\\
\\
\alpha^2 v_2(\theta)+v_2''(\theta)+\nu_0\left[\alpha(\alpha-2)\cos\theta\sin\theta v_1(\theta)+(\alpha-1)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)v_1'(\theta)-\cos\theta\sin\theta v_1''(\theta)+\right.\\
\left.\left(\alpha(\alpha-1)\sin^2\theta+\alpha\cos^2\theta\right)v_2(\theta)+2(\alpha-1)\cos\theta\sin\theta v_2'(\theta)+\cos^2\theta v_2''(\theta)\right]=0.
\end{array}\right. \tag{2.7}$$

En utilisant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} w_{1,\alpha}(\theta) = \cos\theta v_{1,\alpha}(\theta) + \sin\theta v_{2,\alpha}(\theta), \\ w_{2,\alpha}(\theta) = -\sin\theta v_{1,\alpha}(\theta) + \cos\theta v_{2,\alpha}(\theta). \end{cases} \tag{2.8}$$

Donc

$$\begin{cases} v_{1,\alpha}(\theta) = \cos\theta w_{1,\alpha}(\theta) - \sin\theta w_{2,\alpha}(\theta), \\ v_{2,\alpha}(\theta) = \sin\theta w_{1,\alpha}(\theta) + \cos\theta w_{2,\alpha}(\theta). \end{cases}$$

Et par suite

$$\begin{cases} v'_{1,\alpha}(\theta) = -\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta) + \cos\theta w'_{1,\alpha}(\theta) - \cos\theta w_{2,\alpha}(\theta) - \sin\theta w'_{2,\alpha}(\theta), \\ v'_{2,\alpha}(\theta) = \cos\theta w_{1,\alpha}(\theta) + \sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta) - \sin\theta w_{2,\alpha}(\theta) + \cos\theta w'_{2,\alpha}(\theta). \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} v''_{1,\alpha}(\theta) = -cos\theta w_{1,\alpha}(\theta) - 2sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta) + cos\theta w''_{1,\alpha}(\theta) + sin\theta w_{2,\alpha}(\theta) - 2cos\theta w'_{2,\alpha}(\theta) - sin\theta w''_{2,\alpha}(\theta), \\ v''_{2,\alpha}(\theta) = -sin\theta w_{1,\alpha}(\theta) + 2cos\theta w'_{1,\alpha}(\theta) + sin\theta w''_{1,\alpha}(\theta) - cos\theta w_{2,\alpha}(\theta) - 2sin\theta w'_{2,\alpha}(\theta) + cos\theta w''_{2,\alpha}(\theta). \end{cases}$$

Donc le système (2.7) devient dans $]0,\omega[$:

$$
r^{\alpha}\left\{
\begin{array}{l}
\alpha^2\Big(\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta)-\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)\Big)+\\
\Big(-\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta)-2\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta)+\cos\theta w''_{1,\alpha}(\theta)+\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)-2\cos\theta w'_{2,\alpha}(\theta)-\sin\theta w''_{2,\alpha}(\theta)\Big)+\\
\nu_0\Big[\big(\alpha(\alpha-1)\cos^2\theta+\alpha\sin^2\theta\big)\Big(\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta)-\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)\Big)+\\
2\left(\cos\theta\sin\theta-\alpha\right)\Big(-\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta)+\cos\theta w'_{1,\alpha}(\theta)-\cos\theta w_{2,\alpha}(\theta)-\sin\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\Big)+\\
\sin^2\theta\Big(-\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta)-2\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta)+\cos\theta w''_{1,\alpha}(\theta)+\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)-2\cos\theta w'_{2,\alpha}(\theta)-\sin\theta w''_{2,\alpha}(\theta)\Big)\\
+\alpha(\alpha-2)\cos\theta\sin\theta\Big(\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta)+\cos\theta w_{2,\alpha}(\theta)\Big)+\\
(\alpha-1)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\Big(\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta)+\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta)-\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)+\cos\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\Big)-\\
\cos\theta\sin\theta\Big(-\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta)+2\cos\theta w'_{1,\alpha}(\theta)+\sin\theta w''_{1,\alpha}(\theta)-\cos\theta w_{2,\alpha}(\theta)-\\
2\sin\theta w'_{2,\alpha}(\theta)+\cos\theta w''_{2,\alpha}(\theta)\Big)\Big]=0,\\
\\
\alpha^2\Big(\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta)+\cos\theta w_{2,\alpha}(\theta)\Big)+\\
\Big(-\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta)+2\cos\theta w'_{1,\alpha}(\theta)+\sin\theta w''_{1,\alpha}(\theta)-\cos\theta w_{2,\alpha}(\theta)-2\sin\theta w'_{2,\alpha}(\theta)+\cos\theta w''_{2,\alpha}(\theta)\Big)+\\
\nu_0\Big[\alpha(\alpha-2)\cos\theta\sin\theta\Big(\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta)-\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)\Big)+\\
(\alpha-1)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\Big(-\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta)+\cos\theta w'_{1,\alpha}(\theta)-\cos\theta w_{2,\alpha}(\theta)-\sin\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\Big)-\\
\cos\theta\sin\theta\Big(-\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta)-2\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta)+\cos\theta w''_{1,\alpha}(\theta)+\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)-2\cos\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\\
-\sin\theta w''_{2,\alpha}(\theta)\Big)+\big(\alpha(\alpha-1)\sin^2\theta+\alpha\cos^2\theta\big)\Big(\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta)+\cos\theta w_{2,\alpha}(\theta)\Big)+\\
2(\alpha-1)\cos\theta\sin\theta\Big(\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta)+\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta)-\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)+\cos\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\Big)+\\
\cos^2\theta\Big(-\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta)+2\cos\theta w'_{1,\alpha}(\theta)+\sin\theta w''_{1,\alpha}(\theta)-\cos\theta w_{2,\alpha}(\theta)-\\
2\sin\theta w'_{2,\alpha}(\theta)+\cos\theta w''_{2,\alpha}(\theta)\Big)\Big]=0.
\end{array}
\right.
$$

Après des calculs le système (2.7) sera de la forme :

$$
\begin{cases}
w''_{1,\alpha}(\theta)+(\nu_0+1)(\alpha^2-1)w_{1,\alpha}(\theta)+\rho_0 w'_{2,\alpha}(\theta)=0,\\
(\nu_0+1)w''_{2,\alpha}(\theta)+(\alpha^2-1)w_{2,\alpha}+\rho_1 w'_{1,\alpha}(\theta)=0,
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

qui est un système différentiel d'ordre 2 à coefficients constants, tels que

$$
\rho_0=\nu_0(\alpha-1)-2.
$$
$$
\rho_1=\nu_0(\alpha+1)+2.
$$

Les conditions aux limites homogènes donnent :
- **Pour** $\theta = 0$:

$$w_{1,\alpha}(\theta) = w_{2,\alpha}(\theta) = 0. \tag{2.10}$$

- **Pour** $\theta = \omega$:

$$\begin{aligned} \cos\omega w_{1,\alpha}(\omega) - \sin\omega w_{2,\alpha}(\omega) = 0, \\ \sin\omega w_{1,\alpha}(\omega) + \cos\omega w_{2,\alpha}(\omega) = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Cherchons d'abord les solutions du système $(L_\alpha(w))$:
On a :

$$\begin{cases} w''_{1,\alpha}(\theta) + (\nu_0+1)(\alpha^2-1)w_{1,\alpha}(\theta) + \rho_0 w'_{2,\alpha}(\theta) = 0, \\ (\nu_0+1)w''_{2,\alpha}(\theta) + (\alpha^2-1)w_{2,\alpha}(\theta) + \rho_1 w'_{1,\alpha}(\theta) = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} w''_{1,\alpha}(\theta) = -(\nu_0+1)(\alpha^2-1)w_{1,\alpha}(\theta) - (\nu_0(\alpha-1)-2)w'_{2,\alpha}(\theta), \\ w''_{2,\alpha}(\theta) = \frac{-(\alpha^2-1)}{\nu_0+1}w_{2,\alpha}(\theta) - \frac{(\nu_0(\alpha+1)+2)}{\nu_0+1}w'_{1,\alpha}(\theta). \end{cases} \tag{2.12}$$

On doit écrire le système sous forme matricielles suivante :

$$X' = AX,$$

où

$$X = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix},$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(\nu_0+1)(\alpha^2-1) & 0 & 0 & -(\nu_0(\alpha-1)-2) \\ 0 & \frac{-(\alpha^2-1)}{\nu_0+1} & \frac{-(\nu_0(\alpha+1)+2)}{\nu_0+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A-\lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -(\nu_0+1)(\alpha^2-1) & 0 & -\lambda & -(\nu_0(\alpha-1)-2) \\ 0 & \frac{-(\alpha^2-1)}{\nu_0+1} & \frac{-(\nu_0(\alpha+1)+2)}{\nu_0+1} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^4 + 2(\alpha^2+1)\lambda^2 + (\alpha^2-1)^2.$$

Donc, l'équation caractéristique de $(L_\alpha(w))$ est donnée par :

$$\lambda^4 + 2(\alpha^2+1)\lambda^2 + (\alpha^2-1)^2 = 0. \tag{2.13}$$

• **Pour** $\alpha \notin \{0, \pm 1\}$ **:**
Les racines de cette équation sont des complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2} = \pm i(\alpha - 1) \text{ et } \lambda_{3,4} = \pm i(\alpha + 1),$$

et les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 sont :

$$v_1 = \left(1, \frac{-i\rho_1}{\rho_0}, \frac{-\rho_1(\alpha-1)}{\rho_0}, -i(\alpha-1)\right), v_2 = \left(1, i(\alpha-1), \frac{i\rho_1}{\rho_0}, \frac{-\rho_1(\alpha-1)}{\rho_0}\right),$$
$$v_3 = (1, -i(\alpha+1), -i, -(\alpha+1)), v_4 = (1, i, i(\alpha+1), -(\alpha+1)).$$

Donc la solution générale du système $(L_\alpha(w))$ est de la forme :

$$w_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} c_1\rho_0 \cos(\alpha-1)\theta + c_2\rho_0 \sin(\alpha-1)\theta - c_3 \sin(\alpha+1)\theta + c_4 \cos(\alpha+1)\theta \\ \\ -c_1\rho_1 \sin(\alpha-1)\theta + c_2\rho_1 \cos(\alpha-1)\theta - c_3 \cos(\alpha+1)\theta - c_4 \sin(\alpha+1)\theta \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

• **Pour** $\alpha = 0$:
L'équation (2.13) devient :

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0,$$

dont les racines sont $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.
Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont :

$$v_1 = (1, i, i, -1), v_2 = (-i, 1, 1, i), v_4 = (1, -i, -i, -1), v_4 = (i, 1, 1, -i).$$

Donc :

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2)\cos\theta + (c_2 - c_1)\sin\theta \\ (c_2 - c_1)\cos\theta - (c_1 + c_2)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

• **Pour** $\alpha = -1$:
L'équation (2.13) devient :

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0,$$

dont les racines sont

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2i \text{ et } \lambda_3 = -2i,$$

et par suite les vecteurs propres associés sont :

$$v_1 = (1,0,0,0),\ v_2 = (0,1,0,0),\ v_3 = (1, \frac{i}{\nu_0+1}, 2i, \frac{-2}{\nu_0+1}),\ v_4 = (1, \frac{-i}{\nu_0+1}, 2i, \frac{2}{\nu_0+1}).$$

Donc

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} c_1 + (\nu_0+1)[c_3\cos 2\theta + c_4 \sin 2\theta] \\ c_2 - c_3 \sin 2\theta + c_4 \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

• **Pour** $\alpha = 1$:
L'équation (2.13) devient :

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0,$$

dont les racines sont :

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2i \text{ et } \lambda_3 = -2i,$$

et les vecteurs propres associé sont :
$v_1 = (1,0,0,0), v_2 = (0,1,0,0), v_3 = (1,i,2i,-2), v_4 = (1,-i,-2i,-2)$.
Donc

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} c_1 + c_3\cos 2\theta + c_4 \sin 2\theta \\ c_2 - c_3 \sin 2\theta + c_4 \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Pour revenir de w_α à v_α en utilise le changement de variables (2.8) :

• **Pour** $\alpha \notin \{0, \pm 1\}$ **:**

$$v_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta w_{1,\alpha}(\theta) - \sin\theta w_{2,\alpha}(\theta) \\ \\ \cos\theta w_{2,\alpha}(\theta) + \sin\theta w_{1,\alpha}\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\Big(c_1\rho_0\cos(\alpha-1)\theta + c_2\rho_0\sin(\alpha-1)\theta - c_3\sin(\alpha+1)\theta + c_4\cos(\alpha+1)\theta\Big) - \\ \sin\theta\Big(- c_1\rho_1\sin(\alpha-1)\theta + c_2\rho_1\cos(\alpha-1)\theta - c_3\cos(\alpha+1)\theta - c_4\sin(\alpha+1)\theta\Big) \\ \\ \cos\theta\Big(- c_1\rho_1\sin(\alpha-1)\theta + c_2\rho_1\cos(\alpha-1)\theta - c_3\cos(\alpha+1)\theta - c_4\sin(\alpha+1)\theta\Big) + \\ \sin\theta\Big(c_1\rho_0\cos(\alpha-1)\theta + c_2\rho_0\sin(\alpha-1)\theta - c_3\sin(\alpha+1)\theta + c_4\cos(\alpha+1)\theta\Big) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1[\nu_0\alpha\cos(\alpha-2)\theta - (\nu_0+2)\cos\alpha\theta] + c_2[\nu_0\alpha\sin(\alpha-2)(\theta) - (\nu_0+2)\sin\alpha\theta] - \\ c_3\sin\alpha\theta + c_4\cos\alpha\theta \\ \\ -c_1[\nu_0\alpha\sin(\alpha-2)\theta + (\nu_0+2)\sin\alpha\theta] + c_2[\nu_0\alpha\cos(\alpha-2)\theta + (\nu_0+2)\cos\alpha\theta] - \\ c_4\sin\alpha\theta - c_3\cos\alpha\theta \end{pmatrix}.$$

• **Pour** $\alpha = 0$:

$$v_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} (c_1+c_2)\cos^2\theta + (c_2-c_1)\sin\cos\theta - (c_2-c_1)\cos\theta\sin\theta + (c_1+c_2)\sin^2\theta \\ \\ (c_2-c_1)\cos^2\theta - (c_1+c_2)\sin\theta\cos\theta + (c_1+c_2)\sin\theta\cos\theta + (c_2-c_1)\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

• **Pour** $\alpha = -1$:

$$v_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} c_1\cos\theta - c_2\sin\theta + c_3[(\nu_0+1)\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta] \\ \\ +c_4[(\nu_0+1)\cos\theta\sin 2\theta + \cos\theta\cos 2\theta] \\ \\ c_1\sin\theta + c_2\cos\theta + c_3[(\nu_0+1)\sin\theta\cos 2\theta - \cos\theta\sin 2\theta] \\ \\ +c_4[(\nu_0+1)\sin\theta\sin 2\theta + \cos\theta\cos 2\theta] \end{pmatrix}.$$

• **Pour** $\alpha = 1$:

$$v_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} c_1\cos\theta - c_2\sin\theta + c_3(\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta) + c_4(\cos\theta\sin 2\theta - \sin\theta\cos 2\theta) \\ \\ c_1\sin\theta + c_2\cos\theta + c_3(\sin\theta\cos 2\theta - \cos\theta\sin 2\theta) + c_4(\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta) \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne :

$$u_\alpha(r,\theta) = r^\alpha(v_{1,\alpha}(\theta), v_{2,\alpha}(\theta)).$$

Remarquons qu'on a obtenu la même solution que celle obtenue par Merouani [32].

2.2 Calcul des solutions singulières

Soit le problème aux limites homogène pour un système différentiel ordinaire d'ordre 2 dans $]0,\omega[$:

$$(L_\alpha(w)) \begin{cases} w''_{1,\alpha}(\theta) + (\nu_0+1)(\alpha^2-1)w_{1,\alpha}(\theta) + (\nu_0(\alpha-1)-2)\, w'_{2,\alpha}(\theta) = 0, \\ (\nu_0+1)w''_{2,\alpha}(\theta) + (\alpha^2-1)w_{2,\alpha}(\theta) + (\nu_0(\alpha+1)+2)\, w'_{1,\alpha}(\theta) = 0, \\ \qquad w_{1,\alpha}(0) = w_{2,\alpha}(0) = 0, \\ \cos\omega w_{1,\alpha}(w) - \sin\omega w_{2,\alpha}(w) = \sin\omega w_{1,\alpha}(w) + \cos\omega w_{2,\alpha}(w) = 0. \end{cases}$$

Ce problème dépend analytiquement du paramètre complexe $\alpha(\nu_0)$. Dans cette section nous allons déterminer les valeurs de $\alpha = \alpha(\nu_0)$ telles que le problème ait une w_α solution non nulle. c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs singulières et que l'on notera E :
La règle est alors la suivante : tout solution variationnelle $u \in [H^1(\Omega)]^2$ correspondant à des données régulières, appartient à $[H^s(V)]^2$ pour tout $s < \sigma$ pour tout voisinage fermé V de l'ensemble des sommets $S_j,\ 1 \le j \le N$ où :

$$\sigma = inf\left\{\Re\alpha, \alpha \in E, \Re\alpha > 0\right\}.$$

Proposition 2.2.1.
Le problème $(L_a(w))$, détermine $w_{1,\alpha}$ et $w_{2,\alpha}$ (donc $v_{1,\alpha}$ et $v_{2,\alpha}$ et par suite u_1 et u_2) non nulles lorsque $(\alpha \notin \{0,\pm1\})$ est solution de l'équation caractéristique(transcendante) :

$$\sin^2\alpha\omega = \left(\frac{\nu_0}{\nu_0+2}\alpha\right)^2 \sin^2\omega,\ \ \Re\,\alpha > 0. \tag{2.15}$$

Les valeurs exceptionnelles $\alpha \in \{0,\pm1\}$ donnent :

$$\begin{cases} \sin\omega = 0 & pour\ \ \alpha = \pm1, \\ w_\alpha = 0 & pour\ \ \alpha = 0. \end{cases}$$

Avant de donner la démonstration de la Proposition 2.2.1 donnons d'abord quelques théorèmes de régularité maximale.

Théorème 2.2.2.
Soit $u \in [H^1(\Omega)]^2$ une solution variationnelle de (P) avec $f \in (L^2(\Omega))^2$, alors $u \in [H^{m+2}(V]^2$ dès que l'équation caractéristique (2.15), n'a aucune racine α_l dans la bande :

$$0 < \Re\,\alpha_l < m+1.$$

L'équation (2.15), n'a pas de racine dans la bande

$$0 < \Re\alpha \le 1\ \text{ si } \omega \le \pi.$$

Preuve. Voir Grisvard [22]. □

Il est intéressant de traiter le cas de la coupure ($\omega = 2\pi$), pour cela on a la proposition suivante :

Proposition 2.2.3.
Soit $\omega = 2\pi$; *alors la solution variationnelle* $u \in [W_2^1(\Omega)]^2$ *du problème (P) appartient à* $[W_p^2(\Omega)]^2$ *dès que :* $p < \frac{4}{3}$.

Preuve.
Soit $\omega = 2\pi$; donc l'équation (2.15) devient $\sin^2 2\alpha\pi = 0$, donc les racines sont explicitement les nombres :

$$\alpha = \frac{l}{2}, \quad l \in \mathbb{Z},$$

il n'y a pas des racines dans la bande $0 < \Re\alpha_l < \frac{1}{2}$, ce qui donne la régularité de u dans $[W_2^2(V)]^2$ pour $2 - \frac{2}{p} < \frac{1}{2}$ i.e. pour $p < \frac{4}{3}$. □

Grisvard dans [22] à montré que les solutions singulières dans un voisinage V au sommet S du secteur Ω pour le problème (P), avec les différents types de conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, Mélé ...) sont définies de la forme :

$$V_l(r,\theta) = r^{\alpha_l} v_{\alpha_l}(\theta),$$

ou

$$U_l(r,\theta) = r^{\alpha_l}[\log r \ v_{\alpha_l}(\theta) + \partial_{\alpha_l} v_{\alpha_l}(\theta)].$$

Suivant que α_l est racine simple ou double de l'équation transcendante où $v_{\alpha_l} \in C^\infty(]0,\omega[)$ est solution du problème homogène correspondant à $(L_\alpha(w))$.
Pour notre problème on a la proposition 2.2.4.

Proposition 2.2.4.
Soit α_l, l *entier* $\geqslant 1$, *désigne une énumération des racines de l'équation* (2.15) *pour tout* $\alpha_l \notin \{0, \pm 1\}$; *alors les solutions singulières de (P) sont donnée par :*

$$V_l(r,\theta) = r^{\alpha_l} \phi_{\alpha_l}(\theta), \tag{2.16}$$

ou

$$U_l(r,\theta) = \begin{cases} r^{\alpha_l}\left[logr \ \phi_{\alpha_l}(\theta) + \partial_{\alpha_l}\phi_{\alpha_l}(\theta)\right], & si \ \omega < 2\pi, \\ r^{\alpha_l}\psi_{\alpha_l}(\theta), & si \ \omega = 2\pi, \end{cases} \tag{2.17}$$

où α_l, *est tel que :* $0 < \Re\alpha_l < m + 2 - \frac{2}{p}$, *et* $\phi_{\alpha_l}(\theta), \psi_{\alpha_l}(\theta)$ *sont de classe* C^∞ *sur* $[0,\omega]$ *est données respectivement comme suit :*

(i) ***Si*** $\omega < 2\pi$:

$$\phi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} (\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\omega \\ -(3\rho_1-\rho_0)\sin\alpha\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\rho_0+\rho_1)[\cos(\alpha-2)\theta - \cos\alpha\theta] \\ -(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\theta + (3\rho_0-\rho_1)\sin\alpha\theta \end{pmatrix} +$$

$$(\rho_0+\rho_1)\begin{pmatrix} \cos(\alpha-2)\omega \\ -\cos\alpha\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\theta + (3\rho_1-\rho_0)\sin\alpha\theta \\ -(\rho_0+\rho_1)[\cos(\alpha-2)\theta - \cos\alpha\theta] \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

(ii) ***Si*** $\omega = 2\pi$:

$$\varphi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} 2\alpha\nu_0[\cos(\alpha-2)(\theta) - \cos\alpha\theta] \\ -2\alpha\nu_0\sin(\alpha-2)\theta + 2[\nu_0(\alpha-2)-4]\sin\alpha\theta \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

$$\psi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} 2\alpha\nu_0\sin(\alpha-2)(\theta) - 2[\nu_0(\alpha+2)+4]\sin\alpha\theta \\ 2\alpha\nu_0[\cos(\alpha-2)\theta - \cos\alpha\theta] \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Preuve de la Proposition 2.2.4.

(i) **Si** $\omega < 2\pi$:
Soit $\alpha_l, l \geqslant 1$, une énumération des racines ($\notin \{0, \pm 1\}$) de l'équation (2.15) dans la bande
$$0 < \Re\alpha_l < m + 2 - \frac{2}{p}.$$
Une solution générale du système $L_\alpha(w)$ est donnée par :
$$w_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} c_1\rho_0\cos(\alpha-1)(\theta) + c_2\rho_0\sin(\alpha-1)(\theta) - c_3\sin(\alpha+1)(\theta) + c_4\cos(\alpha+1)(\theta) \\ -c_1\rho_1\sin(\alpha-1)(\theta) + c_2\rho_1\cos(\alpha-1)(\theta) - c_3\cos(\alpha+1)(\theta) - c_4\sin(\alpha+1)(\theta) \end{pmatrix}.$$
La condition au bord pour $\theta = 0$ donne :
$$\begin{cases} c_1\rho_0 + c_4 = 0, \\ c_2\rho_1 - c_3 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} c_4 = -c_1\rho_0, \\ c_3 = c_2\rho_1. \end{cases} \tag{2.21}$$
Substituant (2.21) avec la condition aux limites (2.11) on trouve le système :
$$(S)\begin{cases} (\rho_0+\rho_1)[\cos(\alpha-2)\omega - \cos\alpha\omega]c_1 + [(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\omega - (3\rho_1-\rho_0)\sin\alpha\omega]c_2 = 0, \\ [-(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\omega - (3\rho_0-\rho_1)\sin\alpha\omega]c_1 + (\rho_0+\rho_1)[\cos(\alpha-2)\omega - \cos\alpha\omega]c_2 = 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\det(S) = \begin{vmatrix} (\rho_0+\rho_1)[\cos(\alpha-2)\omega - \cos\alpha\omega] & (\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\omega - (3\rho_1-\rho_0)\sin\alpha\omega \\ -(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\omega - (3\rho_0-\rho_1)\sin\alpha\omega & (\rho_0+\rho_1)[\cos(\alpha-2)\omega - \cos\alpha\omega] \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\nu_0}{\nu_0+2}\alpha\right)^2 \sin^2\omega.$$

Si $\det(S) = 0$, le système admet une solution non identiquement nulle ce qui donne l'équation caractéristique (2.15), donc pour tout ($\alpha \notin \{0, \pm 1\}$) réelle ou complexe solution de (2.15), les solutions du système (S) décrivent une droite. Donc le choix de c_1 détermine les autres constantes $c_i, i = 2, 4$.
On prend :
$$\begin{aligned} c_1 &= (\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha_l-2)\omega - (3\rho_1-\rho_0)\sin\alpha_l\omega \\ &= 2\alpha\nu_0\sin(\alpha_l-2)\omega\cos - 2[\nu_0(\alpha+2)+4]\sin\alpha_l\omega. \\ c_2 &= (\rho_0+\rho_1)[\cos(\alpha_l-2)\omega - \cos\alpha_l\omega \\ &= 2\alpha\nu_0[\cos(\alpha_l-2)\omega - \cos\alpha_l\omega]. \end{aligned}$$

c_3, c_4 données par (2.11), et par conséquent (2.16) et (2.17) avec :

$$\phi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} 2\alpha\nu_0[\cos(\alpha-2)(\theta) - \cos\alpha\theta] \\ -2\alpha\nu_0\sin(\alpha-2)\theta + 2[\nu_0(\alpha-2)-4]\sin\alpha\theta \end{pmatrix}.$$

(ii) **Si** $\omega = 2\pi$:
D'après l'utilisation de la condition au limite en $\theta = 0$, la solution générale de $(L_\alpha(w))$ devient :

$$v_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} (\rho_0+\rho_1)[\cos(\alpha-2)\theta - \cos\alpha\theta] \\ -(\rho_0+\rho_1)\sin(\alpha-2)\theta + (3\rho_0-\rho_1)\sin\alpha\theta \end{pmatrix} c_1 +$$

$$\begin{pmatrix} (\rho_0+\rho_1)[\sin(\alpha-2)\theta + (\rho_0-3\rho_1)\sin\alpha\theta] \\ (\rho_0+\rho_1)[\cos(\alpha-2)\theta - \cos\alpha\theta] \end{pmatrix} c_2.$$

Pour la condition au limite en $\theta = \omega = 2\pi$:

$$v_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} (\rho_0+\rho_1)[\cos(2\alpha\pi-4\pi) - \cos 2\alpha\pi] \\ -(\rho_0+\rho_1)\sin(2\alpha\pi-4\pi) + (3\rho_0-\rho_1)\sin 2\alpha\pi \end{pmatrix} c_1 +$$

$$\begin{pmatrix} (\rho_0+\rho_1)[\sin(2\alpha\pi-4\pi) + (\rho_0-3\rho_1)\sin 2\alpha\pi] \\ (\rho_0+\rho_1)[\cos(2\alpha\pi-4\pi) - \cos 2\alpha\pi] \end{pmatrix} c_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2(\rho_0-\rho_1)\sin 2\alpha\pi \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 2(\rho_0-\rho_1)\sin 2\alpha\pi \\ 0 \end{pmatrix} c_2 = 0.$$

c_1 ou c_2 non identiquement nulle si et seulement si

$$16(\nu_0+2)^2\sin^2 2\alpha\pi = 0,$$

c'est-à dire :

$$\sin^2 2\alpha\pi = 0, \text{ car } (\nu_0+2) \neq 0.$$

Les racines de $\sin^2 2\alpha\pi$ sont les nombres :

$$\alpha_l = \frac{l}{2}, \ l \in \mathbb{Z},$$

elle sont toutes de multiplicité 2. D'où (2.19), (2.20) et par suite (2.16) et (2.17), avec α_l non entier supérieur à 1.

□

Proposition 2.2.5.
Dans le cas où $\alpha \in \{0, \pm1\}$, les solutions de (P), sont régulières, plus exactement on a :

(i) ***Pour*** $\alpha = 0$:

$$w = 0 \ sur \ ]0, \omega[.$$

(ii) ***Pour*** $\alpha = -1$:

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} (\nu_0+1)(\cos 2\theta - 1) & (\nu_0+1)\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

où $c = (c_3, c_4)$ *est une constante quelconque différent de* 0, *si* $\omega = \pi$ *ou* $\omega = 2\pi$.

(iii) ***Pour*** $\alpha = 1$:

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} 2\sin^2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

où $c = (c_1, c_2)$ *est une constante quelconque différent de* 0, *si* $\omega = \pi$ *ou* $\omega = 2\pi$.

Preuve.

(i) **Si** $\alpha = 0$:
La solution générale de $(L_\alpha(w))$ est donnée par

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} (c_1+c_2)\cos\theta + (c_2-c_1)\sin\theta \\ (c_2-c_1)\cos\theta - (c_1+c_2)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Les conditions aux limites donnent $c_1 = c_2 = 0$ donc $w = 0$ sur $]0, \omega[$.

(ii) **Si** $\alpha = -1$:
On a :

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} c_1 + (\nu_0+1)[c_3\cos 2\theta + c_4 \sin 2\theta] \\ c_2 - c_3 \sin 2\theta + c_4 \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

La condition au bord pour $\theta = 0$ donne :

$$\begin{cases} c_1 + (\nu_0+1)c_3 = 0, \\ c_2 + c_4 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -(\nu_0+1)c_3, \\ c_2 = -c_4. \end{cases} \tag{2.23}$$

Substituant (2.23) avec la condition aux limites pour $\theta = \omega$ on trouve :

$$(S_{-1}) \iff \begin{cases} \cos\omega(c_1 + (\nu_0+1)[c_3\cos 2\theta + c_4\sin 2\theta]) - \sin\omega(c_2 - c_3\sin 2\theta + c_4\cos 2\theta) = 0, \\ \sin\omega(c_1 + (\nu_0+1)[c_3\cos 2\theta + c_4\sin 2\theta]) + \cos\omega(c_2 - c_3\sin 2\theta + c_4\cos 2\theta) = 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} [\nu_0\cos\omega(\cos 2\omega - 1)]c_3 + [2\sin\omega(\nu_0\cos^2\omega + 1)]c_4 = 0, \\ [\sin(\nu_0(\cos 2\omega - 1) - 2)]c_3 + [\nu_0 \sin\omega \sin 2\omega]c_4 = 0. \end{cases}$$

Donc c_3 et c_4 est non nulle si et seulement si

$$\det(S_{-1}) = 0,$$

i.e. si $(1+\nu_0)\sin^2\omega = 0, (1+\nu_0) \neq 0$ donc

$$\sin\omega = 0$$

Par conséquent si $\omega = \pi, 2\pi$ on a :

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} (\nu_0+1)(\cos 2\theta - 1) & (\nu_0+1)\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

où $c = (c_3, c_4)$ est une constante quelconque $\neq 0$.

(iii) **Pour** $\alpha = 1$:
On a :

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} c_1 + c_3\cos 2\theta + c_4 \sin 2\theta \\ c_2 - c_3 \sin 2\theta + c_4 \cos 2\theta \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

La condition au bord pour $\theta = 0$ donne :

$$\begin{cases} c_1 = -c_3, \\ c_2 = -c_4. \end{cases} \tag{2.25}$$

D'après la condition aux limites pour $\theta = \omega$ et (2.25) on trouve le système :

$$(S_1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\omega(c_1 - c_1\cos 2\omega - c_2 \sin 2\omega) - \sin\omega(c_2 + c_1 \sin 2\omega - c_2\cos 2\omega) = 0, \\ \sin\omega(c_1 - c_1\cos 2\omega - c_2\sin 2\omega) + \cos\omega(c_2 + c_1\sin 2\omega - c_2\cos 2\omega) = 0. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0c_1 - 2\sin\omega c_2 = 0, \\ 2\sin\omega c_1 + 0c_2 = 0. \end{cases}$$

Pour que c_1, c_2 soit non nulle, il faut que et il suffit que $\det(S_1) = 0$.

$$\det(S_1) = 4\sin^2 w = 0,$$

c'est-à-dire $\omega = \pi$ où $\omega = 2\pi$.
Donc

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} 2\sin^2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

avec c_1 et c_2 des constantes quelconque non nulle.

$\square$

Chapitre 3

Coefficients de singularité $\mathbf{c}_\beta, \mathbf{d}_\beta$

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons mis en évidence une série trigonométrique d'un type nouveau adaptée à l'étude des solutions du problème aux limites de Dirichlet pour le système de Lamé. nous allons établir grâce à une formule de Betti une formule de Green pour l'opérateur de Lamé et une relation d'orthogonalité entre les fonctions $(v_\alpha)_{\alpha\in E}$, similaire à celle de L'orthogonalité pour le Laplacien et le Bilaplacien Dans un secteur plan S dans une première partie, dans la deuxième partie nous intéressons au calcul des coefficients de singularité dans le cas importante qui est le cas de la fissure et qui permettent de montrer la convergence de la nouvelle série $u(r,\theta) = \sum\limits_{\alpha\in E} c_\alpha r^\alpha v_\alpha(\theta)$. Nous suivant la même technique d'Ora-Tcha-kondor [37] et W. Chikouche & A. Aibeche [11] pour le Bilaplacien dans un secteur S avec différents conditions aux limites.

Soit S le secteur d'ouverture ($\omega \leq 2\pi$) et de rayon ρ (ρ positif et fixé) définit par :

$$S = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < \rho, 0 < \theta < \omega\right\},$$

et de la frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_\omega \cup \Sigma$ tels que :

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \left\{(r,0) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < \rho\right\},\\
\Gamma_\omega &= \left\{(r\cos\omega, r\sin\omega) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < \rho\right\},\\
\Sigma &= \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2, 0 < \theta < \omega\right\}.
\end{aligned}$$

3.2 Relation d'orthogonalité :

Soient $v_\alpha(r,\theta) = r^\alpha\varphi_\alpha(\theta)$, $v_\beta(r,\theta) = r^\beta\varphi_\beta(\theta)$ ($\Re\alpha > 0, \Re\beta > 0$), deux fonctions telles que : φ_α, φ_β sont des solutions du problème (P). On va écrire, en utilisant la formule de Green, une relation d'orthogonalité entre les fonctions v_α et v_β qui permet ensuite de calculer les coefficients du développement.

$$u(r,\theta) = \sum_{\alpha\in E} r^\alpha\varphi_\alpha(\theta),$$

où

$$E = \left\{\alpha \in \mathbb{C}/\sin^2\alpha\omega = \left(\frac{\nu_0}{\nu_0+2}\alpha\right)^2 \sin^2\omega,\ \Re\alpha > 0\right\}.$$

On a l'équation de Lamé :

$$Lu = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\ grad(\mathrm{div}\, u) = 0.$$

et

$$Lu = \mathrm{div}\, \sigma. \tag{3.1}$$

En effet : on a

$$\sigma = \lambda Tr(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon.$$

d'où :

$$\begin{aligned}
div\sigma &= \mathrm{div}\,(\lambda Tr(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon) \\
&= \lambda\ \mathrm{div}\,(Tr(\varepsilon)) + 2\mu\ \mathrm{div}(\varepsilon) \\
&= \lambda\nabla(Tr(\varepsilon)) + 2\mu\ \mathrm{div}(\frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)) \\
&= \lambda\nabla(Tr(\varepsilon)) + \mu
\end{aligned}$$

$$mathrmdiv(\nabla u) + \mu \mathrm{div}(\nabla u^T)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda\nabla(Tr(\varepsilon)) + \mu\ \mathrm{div}(\nabla u) + \mu\nabla \mathrm{div}\, u \\
&= (\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div}\, u) + \mu\ \mathrm{div}(\nabla u) \\
&= (\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div}\, u) + \mu\ \Delta u.
\end{aligned}$$

De plus on a pour deux fonctions $u, v \in [H^1(\Omega)]^2$:

$$(\sigma : grad^T u) = \mathrm{div}(\sigma\cdot u) - u\ \mathrm{div}\, \sigma,$$

et

$$(\sigma : grad\ u) = \mathrm{div}(\sigma\cdot u) - u\ \mathrm{div}\, \sigma^T.$$

Et comme σ est symétrique (i.e. $\sigma = \sigma^T$), la formule précédente sera :

$$(\sigma : grad\ u) = \mathrm{div}(\sigma\cdot u) - u\ \mathrm{div}\, \sigma.$$

Ce qui donne :

$$vLu = v\ \mathrm{div}\, \sigma = \mathrm{div}(\sigma\cdot v) - (\sigma : grad\ v). \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma : grad\ v) &= (\lambda(Tr\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon) : grad\ v \\
&= (\lambda\ \mathrm{div}\, u + 2\mu\varepsilon) : \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot v_i\right) \\
&= \left(\lambda\ \mathrm{div}\, u + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) : \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot v_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\left(\lambda\ \mathrm{div}\, u\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot v_j + \mu\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)\right) \\
&= \lambda\ \mathrm{div}\, u\ \mathrm{div}\, v + \mu\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

En y substituant (3.3) dans (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} vLu &= \operatorname{div}(\sigma v) - (\sigma : grad\ v) \\ &= \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} v_j) - \left(\lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v + \mu \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} v_j) - E(v,u), \end{aligned}$$

tel que :

$$E(u,v) = \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v + \mu \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

et σ_{ij} sont les composants du tenseur linéarisé des contraintes correspondant, donné par la loi de Hooke au moyen des coefficients de Lamé λ et μ :

$$\sigma_{ij}(u) = (\lambda \operatorname{div} u)\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{3.4}$$

où : δ_{ij} est le symbole de Kronecker, les indices i, j dans le cas d'élasticité restreints aux valeurs 1 et 2.
Par la même méthode on trouve que :

$$\begin{aligned} uLv &= \operatorname{div}(\sigma \cdot v) - \sigma : grad\ u \\ &= \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} u_j) - \left(\lambda \operatorname{div} v \operatorname{div} u + \mu \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial xj}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} vLu - uLv &= \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} v_j) - E(u,v) - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial xj}(\sigma_{ij} u_j) + E(u,v)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} v_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} u_j)\right). \end{aligned}$$

En intégrant sur S et en utilisant le théorème de flux-divergence(Ostrogradski), on trouve que :

$$\begin{aligned} \int_S (vLu - uLv)ds &= \int_S \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} v_j - \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} u_j\right) ds \\ &= \int_\Gamma \Big(\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \sigma_{ij} v_j \eta_i - \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \sigma_{ij} u_j \eta_i\Big) d\sigma \\ &= \int_\Gamma \sum_{j=1}^{2}\Big(v_j \sigma_{in}(u) - u_j \sigma_{in}(u)\Big) d\sigma \\ &= \int_\Gamma \Big(v\sigma(u)\cdot\eta - u\sigma(v)\cdot\eta\Big) d\sigma. \end{aligned}$$

Où $\sigma(u)$ est le tenseur de contraintes, η_i est le cosinus directeur de la normale η de la surface. Comme u (resp v) est solution du problème (P), on a alors :

$$Lu = Lv = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_S [vLu - uLv]\,dx &= \int_\Gamma [v\sigma(u).\eta - u\sigma(v).\eta]\,d\sigma \\
&= \int_{\Gamma_0} [v\sigma(u).\eta - u\sigma(v).\eta]\,d\sigma + \int_{\Gamma_w} [v\sigma(u).\eta - u\sigma(v).\eta]\,d\sigma + \int_\Sigma [v\sigma(u).\eta - u\sigma(v).\eta]\,d\sigma \\
&= \int_\Sigma [v\sigma(u).\eta - u\sigma(v).\eta]\,d\sigma \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'après les conditions aux limites, on trouve que les intégrales sur Γ_0 et Γ_ω s'annule. Donc la formule de Green s'écrit sous la forme :

$$\int_\Sigma (v\sigma(u)\cdot\eta - u\sigma(v)\cdot\eta)\,d\sigma = 0. \tag{3.5}$$

Théorème 3.2.1.
Soient $w_\alpha = r^\alpha(w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})$ et $w_\beta = r^\beta(w_{1,\beta}, w_{2,\beta})$ solutions du problème $(L_\alpha(w))$, avec α et β solutions de l'équation transcendante :

$$\sin^2\alpha\omega = \left(\frac{\nu_0}{\nu_0+2}\alpha\right)^2 \sin^2\omega, \quad \Re\alpha > 0.$$

Alors si $\alpha \neq \overline{\beta}$, on a :

$$\begin{aligned}
[w_\alpha, w_\beta] &= \int_0^\omega \left(\frac{1}{\overline{\beta}-\alpha}\nu_0(\overline{w'}_{2,\beta}, \overline{w'}_{1,\beta}) + ((1+\nu_0)\overline{w}_{1,\beta}, \overline{w}_{2,\beta})\right) \begin{pmatrix} w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix} d\theta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Preuve.
On a la relation d'orthogonalité :

$$\int_\Sigma (v\sigma(u)\cdot\eta - u\sigma(v)\cdot\eta) = 0.$$

Alors pour deux fonctions $u_\alpha(r,\theta) = r^\alpha\varphi_\alpha(\theta)$, $v_\beta(r,\theta) = r^{\overline{\beta}}\overline{\varphi}_\beta(\theta)$ de $[H^1(S)]^2$, $(\Re\alpha > 0, \Re\beta > 0)$, la formule (3.5) s'écrit :

$$\int_\Sigma [\overline{v}_\beta\sigma(u_\alpha).\eta - u_\alpha\sigma(\overline{v_\beta}).\eta]\,d\sigma = 0. \tag{3.6}$$

Sur Σ on a

$$\eta = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \rho = r,\ d\sigma = \rho d\theta,\ \theta \in [0,\omega].$$

• **Calcul du tenseur des contraintes $\sigma(\mathbf{u})$ (on coordonnées polaires)**
On a :

$$\sigma(u) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(u) & \sigma_{12}(u) \\ \sigma_{21}(u) & \sigma_{22}(u) \end{pmatrix}.$$

Où : σ_{ij} donné par la relation (3.4), $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ sont les coefficients de Lamé et ε_{ij} les composants du tenseur de déformation donné par la formule :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big),\ ij = 1,2.$$

Donc

$$\begin{cases} \sigma_{11}(u) = \lambda \operatorname{div} u + 2\mu\varepsilon_{11}(u), \\ \sigma_{12}(u) = 2\mu\varepsilon_{12}(u), \\ \sigma_{22}(u) = \lambda \operatorname{div} u + 2\mu\varepsilon_{22}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(u) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}[r^\alpha v_{1,\alpha}(\theta)], \\ \varepsilon_{12}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(r^\alpha v_{2,\alpha}(\theta)\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(r^\alpha v_{1,\alpha}(\theta)\Big)\right], \\ \varepsilon_{22}(u) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[r^\alpha v_{2,\alpha}(\theta)\right]. \end{cases}$$

En utilisant le changement de variables :

$$\begin{cases} v_{1,\alpha}(\theta) = \cos\theta w_{1,\alpha}(\theta) - \sin\theta w_{2,\alpha}(\theta), \\ v_{2,\alpha}(\theta) = \sin\theta w_{1,\alpha}(\theta) + \cos\theta w_{2,\alpha}(\theta). \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(u) =& \frac{\partial}{\partial x_1}\left[r^\alpha v_{1,\alpha}(\theta)\right] \\ =& \frac{\partial}{\partial x_1}\left[r^\alpha\Big(\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta) - \sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)\Big)\right] \\ =& \left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^\alpha\big(\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta) - \sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)\big)\Big)\right]\cdot\cos\theta - \\ & \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(r^\alpha(\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta) - \sin\theta w_{2,\alpha}(\theta))\Big)\right]\cdot\frac{1}{r}\sin\theta \\ =& r^{\alpha-1}\Bigg[\Big(\alpha\cos^2\theta + \sin^2\theta\Big)w_{1,\alpha}(\theta) - \cos\theta\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta) + \\ & \sin^2\theta w'_{2,\alpha}(\theta) + (1-\alpha)\cos\theta\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)\Bigg]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12}(u) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(r^\alpha v_{2,\alpha}(\theta)\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(r^\alpha v_{1,\alpha}(\theta)\Big)\right] \\
&= \frac{1}{2}\Bigg[\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^\alpha(\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta) + \cos\theta w_{2,\alpha}(\theta))\Big)\cdot\cos\theta - \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(r^\alpha(\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta) + \cos\theta w_{2,\alpha}(\theta))\Big)\cdot\frac{1}{r}\sin\theta + \\
&\qquad \frac{\partial}{\partial r}\Big(r^\alpha(\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta) - \sin\theta w_{2,\alpha}(\theta))\Big)\cdot\sin\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(r^\alpha(\cos\theta w_{1,\alpha}(\theta) - \sin\theta w_{2,\alpha}(\theta))\Big)\cdot\frac{1}{r}\cos\theta\Bigg] \\
&= \frac{1}{2}r^{\alpha-1}\Bigg[2(\alpha-1)\cos\theta\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta) + (\alpha-1)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)w_{2,\alpha}(\theta) + \\
&\qquad (\cos^2\theta - \sin^2\theta)w'_{1,\alpha}(\theta) - 2\cos\theta\sin\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\Bigg].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22}(u) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left[r^\alpha v_{2,\alpha}(\theta)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left[r^\alpha(\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta) + \cos\theta w_{2,\alpha}(\theta))\right]\cdot\sin\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[r^\alpha(\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta) + \cos\theta w_{2,\alpha}(\theta))\right]\cdot\frac{1}{r}\cos\theta \\
&= r^{\alpha-1}\Bigg[(\cos^2\theta + \alpha\sin^2\theta)w_{1,\alpha}(\theta) + (\alpha-1)(\cos\theta\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)) + \\
&\qquad \cos\theta\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta) + \cos^2\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\Bigg].
\end{aligned}$$

Pour trouver σ_{11}, σ_{22} nous calculons d'abord *divu* :
On a

$$u = r^\alpha v_\alpha(\theta) = r^\alpha(v_{1,\alpha}(\theta), v_{2,\alpha}(\theta)).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha v_{1,\alpha}(\theta)\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^\alpha v_{1,\alpha}(\theta)\right)\cdot\frac{-1}{r}\sin\theta + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha v_{2,\alpha}(\theta)\right)\sin\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^\alpha v_{2,\alpha}(\theta)\right)\cdot\frac{1}{r}\cos\theta \\
&= r^{\alpha-1}\Big((\alpha+1)w_{1,\alpha}(\theta) + w'_{2,\alpha}(\theta)\Big).
\end{aligned}$$

Et par suit :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \lambda\operatorname{div} u + 2\mu\varepsilon_{11}(u) \\
&= \lambda r^{\alpha-1}\Big((\alpha+1)w_{1,\alpha}(\theta) + w'_{2,\alpha}(\theta)\Big) + 2\mu r^{\alpha-1}\Bigg[\Big(\alpha\cos^2\theta + \sin^2\theta\Big)w_{1,\alpha}(\theta) + \\
&\qquad (1-\alpha)\cos\theta\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta) - \cos\theta\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta) + \sin^2 w'_{2,\alpha}\theta\Bigg] \\
&= r^{\alpha-1}\Bigg[\lambda\Big((\alpha+1)w_{1,\alpha}(\theta) + w'_{2,\alpha}(\theta)\Big) + 2\mu\Big(\alpha\cos^2\theta + \sin^2\theta\Big)w_{1,\alpha}(\theta)\Bigg] + \\
&\qquad 2\mu r^{\alpha-1}\Bigg[(1-\alpha)\cos\theta\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta) - \cos\theta\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta) + \sin^2 w'_{2,\alpha}\theta\Bigg].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} =& 2\mu\varepsilon_{12}(u)\\
=&\mu \cdot r^{\alpha-1}\Big[2(\alpha-1)\cos\theta\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta) + (\alpha-1)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)w_{2,\alpha}(\theta) +\\
&(\cos^2\theta-\sin^2\theta)w'_{1,\alpha}(\theta) - 2\cos\theta\sin\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\Big]\\
=&\mu r^{\alpha-1}\Big[2(\alpha-1)\cos\theta\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta) + (\alpha-1)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)w_{2,\alpha}(\theta)\Big]+\\
&\mu r^{\alpha-1}\Big[(\cos^2\theta-\sin^2\theta)w'_{1,\alpha}(\theta) - 2\cos\theta\sin\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\Big].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22} =& \lambda \operatorname{div} u + 2\mu\varepsilon_{22}(u)\\
=&\lambda r^{\alpha-1}\Big((\alpha+1)w_{1,\alpha}(\theta) + w'_{2,\alpha}(\theta)\Big) + 2\mu r^{\alpha-1}\Big[\Big(\cos^2\theta + \alpha\sin^2\theta\Big)w_{1,\alpha}(\theta) +\\
&(\alpha-1)\cos\theta\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta) + \cos\theta\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta) + \cos^2\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\Big]\\
=&r^{\alpha-1}\Big[\lambda\Big((\alpha+1)w_{1,\alpha}(\theta) + w'_{2,\alpha}(\theta)\Big) + 2\mu\Big(\cos^2\theta + \alpha\sin^2\theta\Big)w_{1,\alpha}(\theta)\Big]+\\
&2\mu r^{\alpha-1}\Big[(\alpha-1)\cos\theta\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta) + \cos\theta\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta) + \cos^2\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\Big].
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sigma(u_\alpha)\cdot\eta = \begin{pmatrix}\sigma_{11}(u) & \sigma_{12}(u)\\ \sigma_{21}(u) & \sigma_{22}(u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\sigma_{11}(u)\cos\theta + \sigma_{12}(u)\sin\theta\\ \sigma_{21}(u)\cos\theta + \sigma_{22}(u)\sin\theta\end{pmatrix}.$$

$$\sigma(u_\alpha)\cdot\eta = \begin{pmatrix} \left[r^{\alpha-1}\left[\lambda\Big((\alpha+1)w_{1,\alpha}(\theta)+w'_{2,\alpha}(\theta)\Big)\ 2\mu\Big(\alpha\cos^2\theta+\sin^2\theta\Big)w_{1,\alpha}(\theta)\right]+ \right. \\ \left. 2\mu r^{\alpha-1}\left[(1-\alpha)\cos\theta\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)-\cos\theta\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta)+\sin^2\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\right]\right]\cdot\cos\theta+ \\ \left[\mu r^{\alpha-1}\left[2(\alpha-1)\cos\theta\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta)+(\alpha-1)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)w_{2,\alpha}(\theta)\right]+\right. \\ \left. \mu r^{\alpha-1}\left[(\cos^2\theta-\sin^2\theta)w'_{1,\alpha}(\theta)-2\cos\theta\sin\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\right]\right]\cdot\sin\theta \\ \\ \\ \left[\mu r^{\alpha-1}\left[2(\alpha-1)\cos\theta\sin\theta w_{1,\alpha}(\theta)+(\alpha-1)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)w_{2,\alpha}(\theta)\right]+\right. \\ \left. \mu r^{\alpha-1}\left[(\cos^2\theta-\sin^2\theta)w'_{1,\alpha}(\theta)-2\cos\theta\sin\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\right]\right]\cdot\cos\theta+ \\ \left[r^{\alpha-1}\left[\lambda\Big((\alpha+1)w_{1,\alpha}(\theta)+w'_{2,\alpha}(\theta)\Big)+2\mu\Big(\cos^2\theta+\alpha\sin^2\theta\Big)w_{1,\alpha}(\theta)\right]+\right. \\ \left. 2\mu r^{\alpha-1}\left[(\alpha-1)\cos\theta\sin\theta w_{2,\alpha}(\theta)+\cos\theta\sin\theta w'_{1,\alpha}(\theta)+\cos^2\theta w'_{2,\alpha}(\theta)\right]\right]\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= r^{\alpha-1}\begin{pmatrix} \left[\lambda w'_{2,\alpha}(\theta)+(\alpha(\lambda+2\mu)+\lambda)\,w_{1,\alpha}(\theta)\right]\cos\theta-\mu\left[w'_{1,\alpha}(\theta)+(\alpha-1)\,w_{2,\alpha}(\theta)\right]\sin\theta \\ \mu\left[w'_{1,\alpha}(\theta)+(\alpha-1)\,w_{2,\alpha}(\theta)\right]\cos\theta+\left[\lambda w'_{2,\alpha}(\theta)+(\alpha(\lambda+2\mu)+\lambda)\,w_{1,\alpha}(\theta)\right]\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \mu r^{\alpha-1}\begin{pmatrix} \left[\frac{\lambda}{\mu}w'_{2,\alpha}(\theta)+\left(\alpha\frac{\lambda+2\mu}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}\right)w_{1,\alpha}(\theta)\right]\cos\theta-\left[w'_{1,\alpha}(\theta)+(\alpha-1)w_{2,\alpha}(\theta)\right]\sin\theta \\ \left[w'_{1,\alpha}(\theta)+(\alpha-1)w_{2,\alpha}(\theta)\right]\cos\theta+\left[\frac{\lambda}{\mu}w'_{2,\alpha}(\theta)+\left(\alpha\frac{\lambda+2\mu}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}\right)w_{1,\alpha}(\theta)\right]\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \mu r^{\alpha-1}\begin{pmatrix} \left[(\nu_0-1)w'_{2,\alpha}(\theta)+((\nu_0+1)\alpha+(\nu_0-1))\,w_{1,\alpha}(\theta)\right]\cos\theta- \\ \left[w'_{1,\alpha}+(\alpha-1)w_{2,\alpha}(\theta)\right]\sin\theta \\ \\ \left[w'_{1,\alpha}(\theta)+(\alpha-1)w_{2,\alpha}(\theta)\right]\cos\theta+ \\ \left[(\nu_0-1)w'_{2,\alpha}(\theta)+\Big(\alpha(\nu_0+1)+(\nu_0-1)\Big)w_{1,\alpha}(\theta)\right]\sin\theta \end{pmatrix},$$

tels que :

$$\frac{\lambda}{\mu}=\nu_0-1 \quad et \quad \frac{\lambda+2\mu}{\mu}=\nu_0+1.$$

Pour $\alpha\neq\overline{\beta}$, posons $\overline{v}_\beta = r^{\overline{\beta}}(\overline{v}_{1,\beta},\overline{v}_{2,\beta})$.

Ce qui implique que :

$$
\begin{aligned}
v_{\overline{\beta}}\sigma(w_\alpha).\eta =&\mu r^{\overline{\beta}+\alpha-1}(\cos\theta\overline{w}_{1,\beta} - \sin\theta\overline{w}_{2,\beta}, \sin\theta\overline{w}_{1,\beta} + \cos\theta\overline{w}_{2,\beta}) \\
&\times \begin{pmatrix} \left[(\nu_0-1)w'_{2,\alpha} + \Big((\nu_0+1)\alpha + (\nu_0-1)\Big)w_{1,\alpha}\right]\cos\theta - \big(w'_{1,\alpha} + (\alpha-1)w_{2,\alpha}\big)\sin\theta \\ \big(w'_{1,\alpha} + (\alpha-1)w_{2,\alpha}\big)\cos\theta + \Big((\nu_0-1)w'_{2,\alpha} + \Big(\alpha(\nu_0+1) + (\nu_0-1)\Big)w_{1,\alpha}\Big)\sin\theta \end{pmatrix} \\
=&\mu r^{\overline{\beta}+\alpha-1}(\cos\theta\overline{w}_{1,\beta} - \sin\theta\overline{w}_{2,\beta}, \sin\theta\overline{w}_{1,\beta} + \cos\theta\overline{w}_{2,\beta}) \times \begin{pmatrix} A_\alpha\cos\theta - B_\beta\sin\theta \\ B_\alpha\cos\theta + A_\alpha\sin\theta \end{pmatrix} \\
=&\mu r^{\alpha-1+\overline{\beta}}\Big(A_\alpha\cos^2\theta\overline{w}_{1,\beta} - B_\alpha\cos\theta\sin\theta\overline{w}_{1,\beta} - A_\alpha\cos\theta\sin\theta\overline{w}_{2,\beta} + B_\alpha\sin^2\theta\overline{w}_{2,\beta} + \\
&B_\alpha\cos\theta\sin\theta\overline{w}_{1,\beta} + A_\alpha\sin^2\theta\overline{w}_{1,\beta} + B_\alpha\cos^2\theta\overline{w}_{2,\beta} + A_\alpha\cos\theta\sin\theta\overline{w}_{2,\beta}\Big) \\
=&\mu r^{\alpha-1+\overline{\beta}}\Big(A_\alpha\overline{w}_{1,\beta} + B_\alpha\overline{w}_{2,\beta}\Big),
\end{aligned}
$$

tels que :

$$
\begin{aligned}
A_\alpha &= (\nu_0-1)w'_{2,\alpha} + (\alpha(\nu_0+1) + (\nu_0-1))w_{1,\alpha}. \\
B_\alpha &= w'_{1,\alpha} + (\alpha-1)w_{2,\alpha}.
\end{aligned}
$$

Par la même méthode on trouve

$$
\begin{aligned}
v_\alpha\sigma(\overline{w}_\beta)\cdot\eta &= r^\alpha(v_{1\alpha}, v_{2\alpha})\cdot\sigma(\overline{w}_\beta)\cdot\eta \\
&= r^{\overline{\beta}+\alpha-1}\Big(A_{\overline{\beta}}w_{1,\alpha} + B_{\overline{\beta}}w_{2,\alpha}\Big).
\end{aligned}
$$

En effet

$$
\sigma(\overline{w}_\beta)\cdot\eta = \mu r^{\overline{\beta}-1}\begin{pmatrix} \left[(\nu_0-1)\overline{w'}_{2,\beta} + \Big((\nu_0+1)\overline{\beta} + (\nu_0-1)\Big)\overline{w}_{1,\beta}\right]\cos\theta - \left[\overline{w'}_{1,\beta} + (\overline{\beta}-1)\overline{w}_{2,\beta}\right]\sin\theta \\ \left[\overline{w'}_{1,\beta} + (\overline{\beta}-1)\overline{w}_{2,\beta}\right]\cos\theta + \left[(\nu_0-1)\overline{w'}_{2,\beta} + \Big((\nu_0+1)\overline{\beta} + (\nu_0-1)\Big)\overline{w}_{1,\beta}\right]\sin\theta \end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
v_\alpha\sigma(\overline{w}_\beta)\cdot\eta =&\mu r^{\overline{\beta}-1+\alpha}(\cos\theta w_{1,\alpha} - \sin\theta w_{2,\alpha}, \sin\theta w_{1,\alpha} + \cos\theta w_{2,\alpha}) \\
&\times \begin{pmatrix} \left[(\nu_0-1)\overline{w'}_{2,\beta} + \Big((\nu_0+1)\overline{\beta} + (\nu_0-1)\Big)\overline{w}_{1,\beta}\right]\cos\theta - \left[\overline{w'}_{1,\beta} + (\overline{\beta}-1)\overline{w}_{2,\beta}\right]\sin\theta \\ \left[\overline{w'}_{1,\beta} + (\overline{\beta}-1)\overline{w}_{2,\beta}\right]\cos\theta + \left[(\nu_0-1)\overline{w'}_{2,\beta} + \Big((\nu_0+1)\overline{\beta} + (\nu_0-1)\Big)\overline{w}_{1,\beta}\right]\sin\theta \end{pmatrix} \\
=&\mu r^{\overline{\beta}-1+\alpha}(\cos\theta w_{1,\alpha} - \sin\theta w_{2,\alpha}, \sin\theta w_{1,\alpha} + \cos\theta w_{2,\alpha}) \times \begin{pmatrix} A_{\bar{\beta}}\cos\theta - B_{\bar{\beta}}\sin\theta \\ B_{\bar{\beta}}\cos\theta + A_{\bar{\beta}}\sin\theta \end{pmatrix} \\
=&r^{\bar{\beta}+\alpha-1}\Big(A_{\bar{\beta}}w_{1,\alpha} + B_{\bar{\beta}}w_{2,\alpha}\Big),
\end{aligned}
$$

tel que :

$$
\begin{aligned}
A_{\bar{\beta}} &= \left[(\nu_0-1)\overline{w'}_{2,\beta} + \Big((\nu_0+1)\bar{\beta} + (\nu_0-1)\Big)\overline{w}_{1,\beta}\right]. \\
B_{\bar{\beta}} &= \left[\overline{w'}_{1,\beta} + (\overline{\beta}-1)\overline{w}_{2,\beta}\right].
\end{aligned}
$$

Donc

$$\begin{aligned}
v_\alpha\sigma(\overline{w}_\beta)\cdot\eta - \overline{v}_\beta\sigma(w_\alpha)\cdot\eta =& \mu r^{\overline{\beta}+\alpha-1}\Big(A_{\bar{\beta}}w_{1,\alpha} + B_{\bar{\beta}}w_{2,\alpha} - A_\alpha\overline{w}_{1,\beta} - B_\alpha\overline{w}_{2,\beta}\Big)\\
=& \mu r^{\overline{\beta}+\alpha-1}\Big(\left[(\nu_0-1)\overline{w'}_{2,\beta} + ((\nu_0+1)\overline{\beta} + (\nu_0-1))\overline{w}_{1,\beta}\right]w_{1,\alpha} +\\
& \left[\overline{w'}_{1,\beta} + (\overline{\beta}-1)\overline{w}_{2,\beta}\right]w_{2,\alpha} - \left[(\nu_0-1)w'_{2,\alpha} + (\alpha(\nu_0+1) + (\nu_0-1))w_{1,\alpha}\right]\overline{w}_{1,\beta} -\\
& \left[w'_{1,\alpha} + (\alpha-1)w_{2,\alpha}\right]\overline{w}_{2,\beta}\Big)\\
=& \mu r^{\overline{\beta}+\alpha-1}\Big((\nu_0-1)\overline{w'}_{2,\beta}w_{1,\alpha} - w'_{1,\alpha}\overline{w}_{2,\beta} + \overline{w'}_{1,\beta}w_{2,\alpha} - (\nu_0-1)w'_{2,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} +\\
& (\overline{\beta}-\alpha)\left[(\nu_0+1)w_{1,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\right]\Big).
\end{aligned}$$

Par conséquent la relation (3.6) devient :

$$\begin{aligned}
\int_s \left[v_\alpha\sigma(\overline{w}_\beta\cdot\eta) - \overline{v}_\beta\sigma(w_\alpha)\cdot\eta\right]d\sigma =& \int_\Sigma \mu r^{\overline{\beta}+\alpha-1}\Big[(\nu_0-1)\overline{w'}_{2,\beta}w_{1,\alpha} - w'_{1,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\Big]d\sigma +\\
& \int_\Sigma \mu r^{\overline{\beta}+\alpha-1}\Big[\overline{w'}_{1,\beta}w_{2,\alpha} - (\nu_0-1)w'_{2,\alpha}\overline{w}_{1,\beta}\Big]d\sigma +\\
& \int_\Sigma \mu r^{\overline{\beta}+\alpha-1}\Big[(\overline{\beta}-\alpha)\left[(\nu_0+1)w_{1,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\right]\Big]d\sigma\\
=& \mu r^{\overline{\beta}+\alpha}\int_0^\omega \Big[(\nu_0-1)\overline{w'}_{2,\beta}w_{1,\alpha} - w'_{1,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\Big]d\theta +\\
& \mu r^{\overline{\beta}-\alpha}\int_0^\omega \Big[\overline{w'}_{1,\beta}w_{2,\alpha} - (\nu_0-1)w'_{2,\alpha}\overline{w}_{1,\beta}\Big]d\theta +\\
& \mu r^{\overline{\beta}+\alpha}\int_0^\omega \Big(\overline{\beta}-\alpha\Big)\Big[(\nu_0+1)w_{1,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\Big]d\theta\\
=& 0.
\end{aligned}$$

Remarque 3.2.2. *Les fonctions* $w_\alpha = r^\alpha(w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})$, $w_\beta = r^\beta(w_{1,\beta}, w_{2,\beta})$ *vérifient les conditions aux limites de Dirichlet pour* $\theta = 0$ *et* $\theta = \omega$, *donc on a*

$$\int_0^\omega w'_\beta w_\alpha d\theta = -\int_0^\omega w_\beta w'_\alpha d\theta.$$

En effet :

$$\int_0^\omega w'_\beta w_\alpha d\theta = \left[w_\beta w_\alpha\right]_0^\omega - \int_0^\omega w_\beta w'_\alpha d\theta = -\int_0^\omega w_\beta w'_\alpha d\theta.$$

De plus :

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Sigma} [v_\alpha \sigma(\overline{w}_\beta)\cdot\eta - \overline{v}_\beta\sigma(w_\alpha)\cdot\eta]\, d\theta =& \mu r^{\overline{\beta}+\alpha}\int\limits_0^\omega \Big[(\nu_0-1)\overline{w'}_{2,\beta}w_{1,\alpha} - w'_{1,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\Big]d\theta +\\
& \mu r^{\overline{\beta}+\alpha}\int\limits_0^\omega \Big[\overline{w'}_{1,\beta}w_{2,\alpha} - (\nu_0-1)w'_{2,\alpha}\overline{w}_{1,\beta}\Big]d\theta +\\
& \mu r^{\overline{\beta}+\alpha}\int\limits_0^\omega \Big[(\overline{\beta}-\alpha)\left[(\nu_0+1)w_{1,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\right]\Big]d\theta\\
=& \mu r^{\overline{\beta}+\alpha}\int\limits_0^\omega (\nu_0-1)\overline{w'}_{2,\beta}w_{1,\alpha}d\theta + \int\limits_0^\omega w_{1,\alpha}\overline{w'}_{2,\beta}d\theta +\\
& \mu r^{\overline{\beta}+\alpha}\int\limits_0^\omega w'_{1,\beta}\overline{w}_{2,\alpha}d\theta + \int\limits_0^\omega (\nu_0-1)w_{2,\alpha}\overline{w'}_{1,\beta}d\theta +\\
& \mu r^{\overline{\beta}-\alpha}\int\limits_0^\omega (\overline{\beta}-\alpha)\left[(\nu_0+1)w_{1,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\right]d\theta\\
=& \mu r^{\overline{\beta}+\alpha}\int\limits_0^\omega \Big(\nu_0\left[(\overline{w'}_{2,\beta}w_{1,\alpha} + w_{2,\alpha}\overline{w'}_{1,\beta}\right] +\\
& (\overline{\beta}-\alpha)\left[(\nu_0+1)w_{1,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\right]\Big)d\theta\\
=& \mu(\overline{\beta}-\alpha)r^{\overline{\beta}+\alpha}\int\limits_0^\omega \Big(\frac{\nu_0}{\overline{\beta}-\alpha}\left[(\overline{w'}_{2,\beta}w_{1,\alpha} + w_{2,\alpha}\overline{w'}_{1,\beta}\right] +\\
& \left[(\nu_0+1)w_{1,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\right]\Big)d\theta\\
=& \mu(\overline{\beta}-\alpha)r^{\overline{\beta}+\alpha}\int\limits_0^\omega \Big(\frac{1}{\overline{\beta}-\alpha}\nu_0(\overline{w'}_{2,\beta},\overline{w'}_{1,\beta}) + ((1+\nu_0)\overline{w}_{1,\beta},\overline{w}_{2,\beta})\Big)\\
& \cdot\begin{pmatrix} w_{1,\alpha}\\ w_{2,\alpha}\end{pmatrix} d\theta.
\end{aligned}
$$

Puisque r non nul on obtient :

$$\int\limits_0^\omega \Big(\frac{1}{\overline{\beta}-\alpha}\nu_0(\overline{w'}_{2,\beta},\overline{w'}_{1,\beta}) + ((1+\nu_0)\overline{w}_{1,\beta},\overline{w}_{2,\beta})\Big)\begin{pmatrix} w_{1,\alpha}\\ w_{2,\alpha}\end{pmatrix} d\theta = 0.$$

□

Corollaire 3.2.3.
Soient $w_\alpha = r^\alpha(w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})$ *et* $w_\beta = r^\beta(w_{1,\beta}, w_{2,\beta})$, *solutions du problème* (2.9), *avec* α *et* β *solutions de*

$$\sin^2\alpha w = \left(\frac{\nu_0}{\nu_0+2}\alpha\right)^2\sin^2 w, \quad \Re\alpha > 0.$$

Supposons de plus que

$$\int_0^\omega (w'_{2,\alpha}, w'_{1,\alpha}) \begin{pmatrix} w_{1,\beta} \\ w_{2,\beta} \end{pmatrix} d\theta = 0, \tag{3.7}$$

et $\alpha \neq \overline{\beta}$, *alors*

$$[w_\alpha, w_\beta] = \int_0^\omega \Big((1+\nu_0)w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha}\Big) \begin{pmatrix} \overline{w}_{1,\beta} \\ \overline{w}_{2,\beta} \end{pmatrix} d\theta = 0.$$

Preuve.
On a :

$$[w_\alpha, w_\beta] = \int_0^\omega \Bigg[\Big((\frac{1}{\overline{\beta}-\alpha}\nu_0)(w'_{2,\beta}, w'_{1,\beta})\Big) + (1+\nu_0)(\overline{w}_{1,\beta}, \overline{w}_{2,\beta})\Bigg] \begin{pmatrix} w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix} d\theta = 0.$$

D'après l'hypothèse (3.7) :

$$\int_0^\omega \Big(\frac{1}{\overline{\beta}-\alpha}\nu_0(w'_{2,\beta}, w'_{1,\beta})\Big) \begin{pmatrix} w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix} d\theta = 0.$$

Donc

$$[w_\alpha, w_\beta] = \int_0^\omega \Big((1+\nu_0)(w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})\Big) \begin{pmatrix} \overline{w}_{1,\beta} \\ \overline{w}_{2,\beta} \end{pmatrix} d\theta = 0.$$

$\square$

Remarque 3.2.4. *Pour* $w_\alpha(r,\theta) = r^\alpha(w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})$, *on définit l'opérateur linéaire* T *par :*

$$T(w_\alpha) = r^{\alpha-1} \begin{pmatrix} (\nu_0+1)w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.2.5.
D'après le Corollaire 3.2.3 si $\alpha \neq \overline{\beta}$ *on a :*

$$\int_\Sigma \Big(T(w_\alpha), \overline{w}_\beta + w_\alpha T(\overline{w}_\beta)\Big) d\sigma = 0.$$

Preuve.

$$\int_\Sigma (T(w_\alpha)\overline{w}_\beta + w_\alpha T(\overline{w}_\beta)) d\sigma = \int_\Sigma \Big[T\Big(r^\alpha(w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})\Big) r^{\overline{\beta}}\Big(\overline{w}_{1,\beta}, \overline{w}_{2,\beta}\Big) +$$
$$r^\alpha\Big(w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha}\Big) T\Big(r^{\overline{\beta}}\Big(\overline{w}_{1,\beta}, \overline{w}_{2,\beta}\Big)\Big)\Big].$$

D'après la Remarque 3.2.4

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Sigma}(T(w_\alpha)\overline{w}_\beta + w_\alpha T(\overline{w}_\beta))d\sigma =& \int\limits_0^\omega r^{\alpha-1}\begin{pmatrix}(\nu_0+1)w_{1,\alpha}\\ w_{2,\alpha}\end{pmatrix} r^{\overline{\beta}}(\overline{w}_{1,\beta},\overline{w}_{2,\beta})d\sigma +\\
& r^\alpha(w_{1,\alpha},w_{2,\alpha})r^{\overline{\beta}-1}\begin{pmatrix}(\nu_0+1)\overline{w}^{1,\beta}\\ \overline{w}_{2,\beta}\end{pmatrix} d\sigma\\
=& \int\limits_0^\omega r^{\alpha-1+\overline{\beta}}\Big((\nu_0+1)w_{1,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\Big)d\sigma +\\
& \int\limits_0^\omega r^{\alpha-1+\overline{\beta}}\Big((\nu_0+1)w_{1,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\Big)rd\theta\\
=& \int\limits_0^\omega r^{\alpha-1+\overline{\beta}}\Big((\nu_0+1)w_{1,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\Big)rd\theta +\\
& \int\limits_0^\omega r^{\alpha-1+\overline{\beta}}\Big((\nu_0+1)w_{1,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\Big)rd\theta\\
=& 2r^{\alpha+\overline{\beta}}\int\limits_0^\omega r^{\alpha-1+\overline{\beta}}\Big((\nu_0+1)w_{1,\alpha}\overline{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha}\overline{w}_{2,\beta}\Big)d\theta\\
=& 0.
\end{aligned}$$

□

3.3 Calcul des coefficients $\mathbf{c}_\beta, \mathbf{d}_\beta$

Corollaire 3.3.1.
Supposons que $u = \sum\limits_{\alpha\in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha$ *soit uniformément convergente dans* $\bar{S}$.
Si $[\varphi_\beta, \varphi_{\bar{\beta}}] \neq 0,$ *alors :*

$$c_{\bar{\beta}} = \frac{1}{2}\rho^{-2\bar{\beta}+1}\cdot\frac{\int\limits_{\Sigma}(Tu\cdot u_{\bar{\beta}} + u\cdot Tu_{\bar{\beta}})d\sigma}{[\varphi_\beta, \varphi_{\bar{\beta}}]}.$$

Preuve.
Pour $u = \sum\limits_{\alpha\in E} c_\alpha r^\alpha\varphi_\alpha$, et la linéarité de T on obtient :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Sigma}(Tu\cdot u_{\bar{\beta}} + u\cdot Tu_{\bar{\beta}})d\sigma &= \int\limits_{\Sigma}\left[T\left(\sum_{\alpha\in E} c_\alpha r^\alpha\varphi_\alpha\right)\cdot r^{\bar{\beta}}\varphi_{\bar{\beta}} + \sum_{\alpha\in E} c_\alpha r^\alpha\varphi_\alpha\cdot T\left(r^{\bar{\beta}}\varphi_{\bar{\beta}}\right)\right]d\sigma\\
&= \sum_{\alpha\in E} c_\alpha\int\limits_{\Sigma}\left[T\left(r^\alpha\varphi_\alpha\right)\cdot r^{\bar{\beta}}\varphi_{\bar{\beta}} + r^\alpha\varphi_\alpha T\left(r^{\bar{\beta}}\varphi_{\bar{\beta}}\right)\right]d\sigma.
\end{aligned}$$

et vu la Remarque 3.2.4 :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Sigma}(Tu\cdot u_{\bar\beta}+u\cdot Tu_{\bar\beta})d\sigma &= \sum_{\alpha\in E} c_\alpha \int\limits_{\Sigma}\Bigg[r^{\alpha-1}\begin{pmatrix}(\nu_0+1)\varphi_{1,\alpha}\\ \varphi_{2,\alpha}\end{pmatrix} r^{\bar\beta}(\varphi_{1,\bar\beta},\varphi_{2,\bar\beta}) \\
&+ r^{\alpha}(\varphi_{1,\alpha},\varphi_{2,\alpha})r^{\bar\beta-1}\begin{pmatrix}(\nu_0+1)\varphi_{1,\bar\beta}\\ \varphi_{2,\bar\beta}\end{pmatrix}\Bigg]d\sigma \\
&= \sum_{\alpha\in E} c_\alpha r^{\alpha+\bar\beta}\int\limits_0^\omega\Bigg[\begin{pmatrix}(\nu_0+1)\varphi_{1,\alpha}\\ \varphi_{2,\alpha}\end{pmatrix}(\varphi_{1,\bar\beta},\varphi_{2,\bar\beta})+(\varphi_{1,\alpha},\varphi_{2,\alpha})\begin{pmatrix}(\nu_0+1)\varphi_{1,\bar\beta}\\ \varphi_{2,\bar\beta}\end{pmatrix}\Bigg]d\theta \\
&= \sum_{\alpha\in E} c_\alpha r^{\alpha+\bar\beta}\int\limits_0^\omega\left[(\nu_0+1)\varphi_{1,\alpha}\varphi_{1,\bar\beta}+\varphi_{2,\alpha}\varphi_{2,\bar\beta}+(\nu_0+1)\varphi_{1,\alpha}\varphi_{1,\bar\beta}+\varphi_{2,\alpha}\varphi_{2,\bar\beta}\right]d\theta \\
&= 2\sum_{\alpha\in E} c_\alpha r^{\alpha+\bar\beta}\int\limits_0^\omega\left[(\nu_0+1)\varphi_{1,\alpha}\varphi_{1,\bar\beta}+\varphi_{2,\alpha}\varphi_{2,\bar\beta}\right]d\theta \\
&= 2\sum_{\alpha\in E} c_\alpha r^{\alpha+\bar\beta}\int\limits_0^\omega((\nu_0+1)\varphi_{1,\alpha},\varphi_{2,\alpha})\begin{pmatrix}\varphi_{1,\bar\beta}\\ \varphi_{2,\bar\beta}\end{pmatrix}d\theta \\
&= 2\sum_{\alpha\in E} c_\alpha r^{\alpha+\bar\beta-1}\int\limits_0^\omega((\nu_0+1)\varphi_{1,\alpha},\varphi_{2,\alpha})\begin{pmatrix}\varphi_{1,\bar\beta}\\ \varphi_{2,\bar\beta}\end{pmatrix}d\sigma.
\end{aligned}$$

et d'après le Corollaire 3.2.3

$$\int\limits_{\Sigma}(Tu\cdot u_{\bar\beta}+u\cdot Tu_{\bar\beta})d\sigma = 2\sum_{\alpha\in E} c_\alpha r^{\alpha+\bar\beta-1}\left[\varphi_\alpha,\varphi_{\bar\beta}\right].$$

Les termes de la somme s'annulent pour tout $\alpha\neq\bar\beta$ (d'après le Corollaire 3.2.5).
Donc pour $\alpha=\bar\beta$ l'intégrale précédent sera :

$$\int\limits_{\Sigma}(Tu\cdot u_{\bar\beta}+u\cdot Tu_{\bar\beta})d\sigma = 2c_{\bar\beta}r^{2\bar\beta-1}\left[\varphi_\beta,\varphi_{\bar\beta}\right].$$

Alors si $[\varphi_\beta,\varphi_{\bar\beta}]\neq 0$:

$$c_{\bar\beta}=\frac{1}{2}\rho^{-2\bar\beta+1}\cdot\frac{\int\limits_{\Sigma}(Tu\cdot u_{\bar\beta}+u\cdot Tu_{\bar\beta})d\sigma}{[\varphi_\beta,\varphi_{\bar\beta}]}.$$

□

Remarque 3.3.2. *La technique que nous allons utiliser pour l'étude de la série trigonométrique sera basée sur le Théorème 3.2.1 et le Corollaire 3.3.1. Dans ce qui suit nous étudions la série trigonométrique dans le cas particulier de la fissure ($\omega=2\pi$) qui est un cas très important de singularité de domaine. La connaissance explicite des racines de (E) simplifie les calculs.*

3.4 Convergence de la série dans le cas de la fissure $(\omega = 2\pi)$

Avant de calculer le coefficients des singularités pour étudier la convergence de la série on a besoin de rappeler le théorème de régularité et de décomposition suivant :

Théorème 3.4.1. *(De régularité et de décomposition) :*
Soit $u \in (W_2^1(\Omega))^2$, solution du problème (P), avec $f \in (W_p^m(\Omega))^2$, il existe des nombres c_l et d_l tels que

$$u_R = u - \sum_{0<\Re\alpha_l<m+2-\frac{2}{p}} c_l V_l - \sum_{\substack{0<\Re\alpha_l<m+2-\frac{2}{p} \\ \nu_l=2}} d_l U_l \ \in (W_p^{m+2}(V))^2,$$

à condition qu'aucun des $\Re\alpha_l$ ne sont égal à $m+2-\frac{2}{p}$.

Preuve. Voir B. Merouani [31]. □

Remarque 3.4.2. *Dans un domaine fissuré $(\omega = 2\pi)$ les racines de l'équation transcendante sont évidentes et simples, ce sont les $\frac{l}{2}$ avec $l \in \mathbb{Z}$, il convient alors de modifier le résultats du Théorème 3.4.1 comme suit : il existe des nombres c_l et d_l tels que*

$$u_R = u - \sum_l c_l r^{\frac{l}{2}} \varphi_{\frac{l}{2}}(\theta) - \sum_l d_l r^{\frac{l}{2}} \psi_{\frac{l}{2}}(\theta),$$

est de classe $W^{2,p}$ au voisinage de l'origine :

Demonstration. Voir P. Grisvard [28]. □

Donc décomposons u en deux parties par apport à θ

$$u = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2.$$

tels que

$$\mathfrak{U}_1 = \sum_{\alpha\in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha,\ \mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha$$

3.4.1 Étude de la première partie

Dans cette partie l'expression de φ_α et donné par :

$$\varphi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} 2\alpha\nu_0[\cos(\alpha-2)\theta - \cos\alpha\theta] \\ -2\alpha\nu_0\sin(\alpha-2)\theta + 2[\nu_0(\alpha-2)-4]\sin\alpha\theta \end{pmatrix}.$$

Et E l'ensemble définie par :

$$E = \left\{\alpha \in \mathbb{C}, \sin^2\alpha\omega = \left(\frac{\nu_0}{\nu_0+2}\alpha\right)^2 \sin^2\omega, \Re\alpha > 0\right\}.$$

Pour $\omega = 2\pi$:

$$E = \left\{\alpha = \frac{l}{2}, l \in \mathbb{N}^*\right\},$$

et

$$\forall\alpha \in E,\ \sin(\alpha-2)\omega = \sin\alpha\omega = \sin l\pi = 0.$$

1. Calcul de $\mathbf{c}_\beta$

Pour $\mathfrak{U}_1 = \sum_{\beta \in E} c_\beta r^\beta \varphi_\beta$, l'expression de c_β est donnée par :

$$c_\beta = \frac{1}{2}\rho^{-2\beta+1} \cdot \frac{\int_\Sigma (Tu \cdot u_\beta + u \cdot Tu_\beta) d\sigma}{[\varphi_\beta, \varphi_\beta]}.$$

(D'après le CorolMlaire 3.3.1).
Calculons d'abord $[\varphi_\beta, \varphi_\beta]$:

$$\begin{aligned}
[\varphi_\beta, \varphi_\beta] &= \int_0^\omega ((\nu_0+1)\varphi_{1,\beta}, \varphi_{2,\beta}) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{1,\beta} \\ \varphi_{2,\beta} \end{pmatrix} d\theta \\
&= \int_0^\omega \left[(\nu_0+1)\varphi_{1,\beta}^2 + \varphi_{2,\beta}^2\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[(\nu_0+1)(2\beta\nu_0)^2[\cos(\beta-2)\theta - \cos\beta\theta]^2 + \\
&\qquad [-2\beta\nu_0 \sin(\beta-2)\theta + 2[\nu_0(\beta-2)-4]\sin\beta\theta]^2 \Big] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[(\nu_0+1)(2\beta\nu_0)^2[\cos^2(\beta-2)\theta + \cos^2\beta\theta - 2\cos(\beta-2)\theta\cos\beta\theta\right] d\theta + \\
&\quad \int_0^{2\pi} \Big[(2\beta\nu_0)^2 \sin^2(\beta-2)\theta + 4[\nu_0(\beta-2)-4]^2 \sin^2\beta\theta - \\
&\qquad 8\beta\nu_0[\nu_0(\beta-2)-4]\sin(\beta-2)\theta\sin\beta\theta \Big] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\nu_0+1)(2\beta\nu_0)^2 \left[\cos^2(\beta-2)\theta + \cos^2\beta\theta\right] d\theta + \\
&\quad \int_0^{2\pi} \left[(2\beta\nu_0)^2 \sin^2(\beta-2)\theta + 4[\nu_0(\beta-2)-4]^2\sin^2\beta\theta\right] d\theta - \\
&\quad 2\int_0^{2\pi} (\nu_0+1)(2\beta\nu_0)^2 \cos(\beta-2)\theta\cos\beta\theta d\theta - \\
&\quad 8\int_0^{2\pi} \beta\nu_0[\nu_0(\beta-2)-4]\sin(\beta-2)\theta\sin\beta\theta d\theta.
\end{aligned}$$

Sur la base des relations trigonométriques suivantes :

$$\begin{cases} \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)), \\ \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) - \sin(x+y)). \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(\beta-2)\theta \cos\beta\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(2\beta-2)\theta + \cos(-2\theta)\right] d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(2\beta-2)\theta + \cos(2\theta)\right] d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\beta-2}\sin(2\beta-2)\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{2\pi} \\
&= 0, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(\beta-2)\theta \sin\beta\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(2\theta) + \cos(2\beta-2)\theta\right] d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta) + \frac{1}{2\beta-2}\sin(2\beta-2)\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= 0. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Et par conséquent :

$$\begin{aligned}
[\varphi_\beta, \varphi_\beta] &= \int_0^{2\pi} (\nu_0+1)(2\beta\nu_0)^2 \left[\cos^2(\beta-2)\theta + \cos^2\beta\theta\right] d\theta + \\
&\quad \int_0^{2\pi} \left[(2\beta\nu_0)^2 \sin^2(\beta-2)\theta + 4[\nu_0(\beta-2)-4]^2 \sin^2\beta\theta\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\nu_0+1)(2\beta\nu_0)^2 \left[\frac{1+\cos 2(\beta-2)\theta}{2} + \frac{1+\cos 2\beta\theta}{2}\right] d\theta + \\
&\quad \int_0^{2\pi} \left[(2\beta\nu_0)^2 \cdot \frac{1-\cos 2(\beta-2)\theta}{2} + 4(\nu_0(\beta-2)-4)^2 \cdot \frac{1-\cos 2\beta\theta}{2}\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 + 2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 \cos 2(\beta-2)\theta + \\
&\quad 2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 + 2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 \cos 2\beta\theta\Big] d\theta + \\
&\quad \int_0^{2\pi} \left[2(\beta\nu_0)^2 - 2(\beta\nu_0)^2 \cos 2(\beta-2)\theta + 2(\nu_0(\beta-2)-4)^2 - 2(\nu_0(\beta-2)-4)^2 \cos 2\beta\theta\right] d\theta.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\varphi_\beta, \varphi_\beta] = & \int_0^{2\pi} \Bigg[4(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 + 2(\beta\nu_0)^2 + 2(\nu_0(\beta-2)-4)^2 \Bigg] d\theta + \\
& \int_0^{2\pi} \Bigg[\left[2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 - 2(\nu_0(\beta-2)-4)^2\right] \cos 2\beta\theta \Bigg] d\theta + \\
& \int_0^{2\pi} \Bigg[\left[2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 - 2(\beta\nu_0)^2\right] \cos 2(\beta-2)\theta \Bigg] d\theta \\
= & \Bigg[\left[4(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 + 2(\beta\nu_0)^2 + 2(\nu_0(\beta-2)-4)^2\right] \theta \Bigg]_0^{2\pi} + \\
& \Bigg[\frac{1}{2\beta} \left[2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 - 2(\nu_0(\beta-2)-4)^2\right] \cos 2\beta\theta \Bigg]_0^{2\pi} + \\
& \Bigg[\frac{1}{2(\beta-2)} \left[2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 - 2(\beta\nu_0)^2\right] \cos 2(\beta-2)\theta \Bigg]_0^{2\pi} \\
= & \Bigg[\left[4(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 + 2(\beta\nu_0)^2 + 2(\nu_0(\beta-2)-4)^2\right] 2\pi \Bigg] \\
= & 2\pi \Bigg[2(\beta\nu_0)^2(2(\nu_0+1)+1) + 2(\nu_0(\beta-2)-4)^2 \Bigg] \\
= & 4\pi \Bigg[\beta^2\nu_0^2(2\nu_0+3) + (\nu_0(\beta-2)-4)^2 \Bigg].
\end{aligned}
$$

Ce qui est différent de 0, donc

$$
c_\beta = \frac{\rho^{-2\beta+1}}{8\pi[\beta^2\nu_0^2(2\nu_0+3) + (\nu_0(\beta-2)-4)^2]} \int_\Sigma (Tu \cdot u_\beta + u \cdot Tu_\beta) d\sigma.
$$

2. Convergence de la série

Soit S_{ρ_0} le sous secteur défini par

$$
S_{\rho_0} = S \cap \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2, r < \rho_0 \right\}, \rho_0 < \rho.
$$

Et les traces sur Σ définies par

$$
\mathfrak{U}_1 = \zeta_1 \in \left[\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)\right]^2 \text{ et } T\mathfrak{U}_1 = \phi_1 \in \left[\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)\right]^2.
$$

On a sur S_{ρ_0} : $\rho = \rho_0,\ d\sigma = \rho_0 d\theta$ et $\theta \in [0, \omega]$.
D'où

$$\begin{aligned}
c_\beta &= \frac{\rho_0^{-2\beta+1}}{8\pi[\beta^2\nu_0^2(2\nu_0+3)+(\nu_0(\beta-2)-4)^2]}\int_\Sigma (Tu\cdot u_\beta + u\cdot Tu_\beta)d\sigma \\
&= \frac{\rho_0^{-\beta}}{8\pi[\beta^2\nu_0^2(2\nu_0+3)+(\nu_0(\beta-2)-4)^2]}\int_\Sigma \rho_0^{1-\beta}\left(\phi_1\rho_0^\beta\varphi_\beta + \zeta_1\rho_0^{\beta-1}\begin{pmatrix}(1+\nu_0)\varphi_{1,\beta}\\ \varphi_{2,\beta}\end{pmatrix}\right)d\sigma \\
&= \frac{\rho_0^{-\beta}}{8\pi[\beta^2\nu_0^2(2\nu_0+3)+(\nu_0(\beta-2)-4)^2]}\int_0^{2\pi}\left[\rho_0\phi_1\begin{pmatrix}\varphi_{1,\beta}\\ \varphi_{2,\beta}\end{pmatrix} + \zeta_1\begin{pmatrix}(1+\nu_0)\varphi_{1,\beta}\\ \varphi_{2,\beta}\end{pmatrix}\right]\rho_0 d\theta \\
&= A_{\beta,\nu_0}\int_0^{2\pi}\left[\rho_0^2\phi_1\begin{pmatrix}\varphi_{1,\beta}\\ \varphi_{2,\beta}\end{pmatrix} + \zeta_1\rho_0\begin{pmatrix}(1+\nu_0)\varphi_{1,\beta}\\ \varphi_{2,\beta}\end{pmatrix}\right]d\theta, \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

avec

$$A_{\beta,\nu_0} = \frac{\rho_0^{-\beta}}{8\pi[\beta^2\nu_0^2(2\nu_0+3)+(\nu_0(\beta-2)-4)^2]}.$$

Corollaire 3.4.3.
Si $\mathfrak{U}_1$ est solution du problème (P) alors :

$$\mathfrak{U}_1 = \sum_{\alpha\in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha,$$

où c_α est donnée par (3.10) et où la série est convergente uniformément dans $\bar{S}_{\rho_0}$ pour tout $\rho_0 < \rho$.

Preuve.

1. Si : $\mathfrak{U}_1 = \sum\limits_{\alpha\in E} c_\alpha r^\alpha\varphi_\alpha$, alors d'après le Corollaire 3.3.1

$$\begin{aligned}
c_\alpha &= \frac{1}{2}\rho^{-2\alpha+1}\cdot\frac{\int_\Sigma (Tu\cdot u_\alpha + u\cdot Tu_\alpha)d\sigma}{[\varphi_\alpha,\varphi_\alpha]} \\
&= \frac{\rho^{-\alpha}}{8\pi[\alpha^2\nu_0^2(2\nu_0+3)+(\nu_0(\alpha-2)-4)^2]}\int_0^{2\pi}\left[\rho^2\phi_1\begin{pmatrix}\varphi_{1,\alpha}\\ \varphi_{2,\alpha}\end{pmatrix} + \zeta_1\rho\begin{pmatrix}(1+\nu_0)\varphi_{1,\alpha}\\ \varphi_{2,\alpha}\end{pmatrix}\right]d\theta,
\end{aligned}$$

qui est le résultat.

2. Si $\mathfrak{U}_1$ est solution du problème (P) et c_β donnée par (3.10) alors

$$\begin{aligned}
|c_\alpha| &= \left|\frac{\rho^{-\alpha}}{[\varphi_\alpha,\varphi_\alpha]}\cdot\int_0^{2\pi}\left[\rho^2\phi_1\begin{pmatrix}\varphi_{1,\alpha}\\ \varphi_{2,\alpha}\end{pmatrix} + \zeta_1\rho\begin{pmatrix}(1+\nu_0)\varphi_{1,\alpha}\\ \varphi_{2,\alpha}\end{pmatrix}\right]d\theta\right| \\
&\leqslant \frac{\rho^{-\alpha}}{[\varphi_\alpha,\varphi_\alpha]}\int_0^{2\pi}\left|\left(\rho^2\phi_1\begin{pmatrix}\varphi_{1,\alpha}\\ \varphi_{2,\alpha}\end{pmatrix} + \zeta_1\rho\begin{pmatrix}(1+\nu_0)\varphi_{1,\alpha}\\ \varphi_{2,\alpha}\end{pmatrix}\right)d\theta\right|.
\end{aligned}$$

$\varphi_{1,\alpha}$ et $\varphi_{2,\alpha}$ sont des fonctions bornées, donc

$$|c_\alpha| \leqslant \frac{\rho^{-\alpha}}{c} \cdot cte \leqslant cte\, \rho^{-\alpha}.$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\alpha\in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha\right| \leqslant \sum_{\alpha\in E} |c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha| &\leqslant \sum_{\alpha\in E} \rho^{-\alpha} |r^\alpha \varphi_\alpha|\, cte \\ &\leqslant \sum_{\alpha\in E} \left(\frac{r}{\rho}\right)^\alpha |\varphi_\alpha|\, cte \\ &\leqslant \sum_{\alpha\in E} \left(\frac{r}{\rho}\right)^\alpha cte.\end{aligned}$$

$\sum_{\alpha\in E} \left(\frac{r}{\rho}\right)^\alpha$ est une série convergente si $r < \rho$ $(r = \rho_0)$.
Donc la série $\sum_{\alpha\in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha$ converge uniformément pour tout $\rho_0 < \rho$, ceci entraîne la convergence uniforme de la série dans $\bar{S}_{\rho_0}$ vers un certain W_1 vérifiant (P).
D'après le Théorème d'existence de Grisvard & Geymonat [17] il existe ε positif, suffisamment petit tel que la solution du problème (P) s'écrit :

$$\mathfrak{U}_1 = \sum_{\alpha\in E} K_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha,$$

qui converge pour $r < \varepsilon$.
Le théorème d'unicité de Holmgren implique que $K_\alpha = c_\alpha$, alors W_1 et $\mathfrak{U}_1$ coïncide dans S_ε. Elles coïncides dans S_{ρ_0}, puisqu'elles y sont analytiquement réelles.

□

3.4.2 Étude de la deuxième partie

Dans ce cas :

$$\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha.$$

et

$$E = \left\{\alpha = \frac{l}{2}, l \in \mathbb{N}^*\right\}, \text{ car } \omega = 2\pi,$$

avec

$$\psi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} 2\alpha\nu_0 \sin(\alpha-2)\theta - 2[\nu_0(\alpha+2)+4]\sin\alpha\theta \\ 2\alpha\nu_0[\cos(\alpha-2)\theta - \cos\alpha\theta] \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.4.4.
Supposons que $\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha$, *soit uniformément convergente dans* $\bar{S}$. *Si* $[\psi_\beta, \psi_{\bar{\beta}}] \neq 0$ *alors*

$$d_{\bar{\beta}} = \frac{1}{2}\rho^{-2\bar{\beta}+1} \cdot \frac{\int_\Sigma (Tu \cdot u_{\bar{\beta}} + u \cdot Tu_{\bar{\beta}}) d\sigma}{[\psi_\beta, \psi_{\bar{\beta}}]}.$$

Preuve.
On a :

$$u = \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha, \psi_\alpha = (\psi_{1,\alpha},\ \psi_{2,\alpha}), \psi_{\bar\beta} = (\psi_{1,\bar\beta},\ \psi_{2,\bar\beta}) \text{ et } u_{\bar\beta} = r^{\bar\beta}\psi_{\bar\beta}.$$

Comme T est un opérateur linéaire, donc :

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (Tu \cdot u_{\bar\beta} + u \cdot Tu_{\bar\beta}) d\sigma &= \int_\Sigma \left[T\left(\sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha\right) \cdot r^{\bar\beta}\psi_{\bar\beta} + \sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha \cdot T\left(r^{\bar\beta}\psi_{\bar\beta}\right)\right] d\sigma \\ &= \sum_{\alpha\in E} d_\alpha \int_\Sigma \left[T\left(r^\alpha\psi_\alpha\right)\cdot r^{\bar\beta}\psi_{\bar\beta} + r^\alpha\psi_\alpha T\left(r^{\bar\beta}\psi_{\bar\beta}\right)\right] d\sigma.\end{aligned}$$

D'après la Remarque 3.2.4

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (Tu \cdot u_{\bar\beta} + u \cdot Tu_{\bar\beta}) d\sigma &= \sum_{\alpha\in E} d_\alpha \int_\Sigma \left[r^{\alpha-1} \begin{pmatrix} (\nu_0+1)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha}\end{pmatrix} r^{\bar\beta}(\psi_{1,\bar\beta}, \psi_{2,\bar\beta}) \right. \\ &\left. + r^\alpha \begin{pmatrix}\psi_{1,\alpha} & \psi_{2,\alpha}\end{pmatrix} r^{\bar\beta-1} \begin{pmatrix}(\nu_0+1)\psi_{1,\bar\beta} \\ \psi_{2,\bar\beta}\end{pmatrix}\right] d\sigma \\ &= \sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^{\alpha+\bar\beta} \int_0^\omega \left[\begin{pmatrix} (\nu_0+1)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha}\end{pmatrix} (\psi_{1,\bar\beta}, \psi_{2,\bar\beta}) + (\psi_{1,\alpha}, \psi_{2,\alpha}) \begin{pmatrix}(\nu_0+1)\psi_{1,\bar\beta} \\ \psi_{2,\bar\beta}\end{pmatrix}\right] d\theta \\ &= \sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^{\alpha+\bar\beta} \int_0^\omega \left[(\nu_0+1)\psi_{1,\alpha}\psi_{1,\bar\beta} + \psi_{2,\alpha}\psi_{2,\bar\beta} + (\nu_0+1)\psi_{1,\alpha}\psi_{1,\bar\beta} + \psi_{2,\alpha}\psi_{2,\bar\beta}\right] d\theta \\ &= 2\sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^{\alpha+\bar\beta} \int_0^\omega \left[(\nu_0+1)\psi_{1,\alpha}\psi_{1,\bar\beta} + \psi_{2,\alpha}\psi_{2,\bar\beta}\right] d\theta \\ &= 2\sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^{\alpha+\bar\beta} \int_0^\omega ((\nu_0+1)\psi_{1,\alpha}, \psi_{2,\alpha}) \begin{pmatrix}\psi_{1,\bar\beta} \\ \psi_{2,\bar\beta}\end{pmatrix} d\theta \\ &= 2\sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^{\alpha+\bar\beta-1} \int_0^\omega ((\nu_0+1)\psi_{1,\alpha}, \psi_{2,\alpha}) \begin{pmatrix}\psi_{1,\bar\beta} \\ \psi_{2,\bar\beta}\end{pmatrix} d\sigma.\end{aligned}$$

Et grâce au Corollaire 3.2.3

$$\int_\Sigma (Tu \cdot u_{\bar\beta} + u \cdot Tu_{\bar\beta}) d\sigma = 2\sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^{\alpha+\bar\beta-1}\left[\psi_\alpha, \psi_{\bar\beta}\right].$$

Les termes de la somme s'annulent si $\alpha \neq \bar\beta$.
Pour $\alpha = \bar\beta$ on obtient :

$$\int_\Sigma (Tu \cdot u_{\bar\beta} + u \cdot Tu_{\bar\beta}) d\sigma = 2 d_{\bar\beta} r^{2\bar\beta-1}\left[\psi_\beta, \psi_{\bar\beta}\right].$$

Donc

$$d_{\bar\beta} = \frac{1}{2}\rho^{-2\bar\beta+1} \frac{\int_\Sigma (Tu \cdot u_{\bar\beta} + u \cdot Tu_{\bar\beta}) d\sigma}{[\psi_\beta, \psi_{\bar\beta}]},$$

si

$$[\psi_\beta, \psi_{\bar{\beta}}] \neq 0.$$

$\square$

1. Calcul de $\mathbf{d}_\beta$

Pour $u = \sum\limits_{\beta \in E} d_\beta r^\beta \psi_\beta$ et d'après le Corollaire 3.4.4 on trouve :

$$d_\beta = \frac{1}{2}\rho^{-2\beta+1} \cdot \frac{\int\limits_{\Sigma}(Tu \cdot u_\beta + u \cdot Tu_\beta)d\sigma}{[\psi_\beta, \psi_\beta]}.$$

On calcul d'abord $[\psi_\beta, \psi_\beta]$:

$$\begin{aligned}
[\psi_\beta, \psi_\beta] &= \int\limits_0^\omega ((\nu_0+1)\psi_{1,\beta}, \psi_{2,\beta}) \cdot \begin{pmatrix} \psi_{1,\beta} \\ \psi_{2,\beta} \end{pmatrix} d\theta \\
&= \int\limits_0^\omega \left[(\nu_0+1)\psi_{1,\beta}^2 + \psi_{2,\beta}^2\right] d\theta \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left[(\nu_0+1)[2\beta\nu_0 \sin(\beta-2)\theta - 2[\nu_0(\beta+2)+4]\sin\beta\theta]^2 + (2\beta\nu_0)^2[\cos(\beta-2)\theta - \cos\beta\theta]^2\right] d\theta \\
&= \int\limits_0^{2\pi} (\nu_0+1)\left[(2\beta\nu_0)^2 \sin^2(\beta-2)\theta + [2(\nu_0(\beta+2)+4)]^2 \sin^2\beta\theta\right] d\theta - \\
&\quad 2\int\limits_0^{2\pi} [2\beta\nu_0(\nu_0+1)[2(\nu_0(\beta+2)+4)]\sin(\beta-2)\theta\sin\beta\theta] d\theta + \\
&\quad \int\limits_0^{2\pi} (2\beta\nu_0)^2[\cos^2(\beta-2)\theta + \cos^2\beta\theta] d\theta - 2\int\limits_0^{2\pi} (2\beta\nu_0)^2 \cos(\beta-2)\theta\cos\beta\theta d\theta \\
&= \int\limits_0^{2\pi} (\nu_0+1)\left[(2\beta\nu_0)^2 \frac{1-\cos 2(\beta-2)\theta}{2} + [2(\nu_0(\beta+2)+4)]^2 \frac{1-\cos 2\beta\theta}{2}\right] d\theta + \\
&\quad \int\limits_0^{2\pi} (2\beta\nu_0)^2 \left[\frac{1+\cos 2(\beta-2)\theta}{2} + \frac{1+\cos 2\beta\theta}{2}\right] d\theta - \\
&\quad 8\int\limits_0^{2\pi} [(\nu_0+1)\beta\nu_0(\nu_0(\beta+2)+4)\sin(\beta-2)\theta\sin\beta\theta] d\theta - \\
&\quad 8\int\limits_0^{2\pi} (\beta\nu_0)^2 \cos(\beta-2)\theta\cos\beta\theta d\theta.
\end{aligned}$$

Les relations (3.8) et (3.9) nous donnent :

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos(\beta-2)\theta \cos\beta\theta d\theta = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin(\beta-2)\theta \sin\beta\theta d\theta = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
[\psi_\beta, \psi_\beta] = & \int_0^{2\pi} (\nu_0+1) \left[(2\beta\nu_0)^2 \frac{1-\cos 2(\beta-2)\theta}{2} + [2(\nu_0(\beta+2)+4)]^2 \frac{1-\cos 2\beta\theta}{2} \right] d\theta + \\
& \int_0^{2\pi} (2\beta\nu_0)^2 \left[\frac{1+\cos 2(\beta-2)\theta}{2} + \frac{1+\cos 2\beta\theta}{2} \right] d\theta \\
= & \int_0^{2\pi} \left[2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 + 2(\nu_0+1)[\nu_0(\beta+2)+4]^2 + (2\beta\nu_0)^2 \right] d\theta + \\
& \int_0^{2\pi} \left[\left[2(\beta\nu_0)^2 - 2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 \right] \cos 2(\beta-2)\theta \right] d\theta + \\
& \int_0^{2\pi} \left[\left[2(\beta\nu_0)^2 - 2(\nu_0+1)[\nu_0(\beta+2)+4]^2 \right] \cos 2\beta\theta \right] d\theta \\
= & \left[\left[2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 + 2(\nu_0+1)[\nu_0(\beta+2)+4]^2 + (2\beta\nu_0)^2 \right] \theta \right]_0^{2\pi} + \\
& \left[\frac{1}{2(\beta-2)} \left[2(\beta\nu_0)^2 - 2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 \right] \sin 2(\beta-2)\theta \right]_0^{2\pi} + \\
& \left[\frac{1}{2\beta} \left[2(\beta\nu_0)^2 - 2(\nu_0+1)[\nu_0(\beta+2)+4]^2 \right] \sin 2\beta\theta \right]_0^{2\pi} \\
= & \left[2(\nu_0+1)(\beta\nu_0)^2 + 2(\nu_0+1)[\nu_0(\beta+2)+4]^2 + 4(\beta\nu_0)^2 \right] 2\pi \\
= & 2\pi \left[2(\nu_0+1)[\nu_0(\beta+2)+4]^2 + 2(\beta\nu_0)^2(1+\nu_0+2) \right] \\
= & 4\pi \left[\beta^2\nu_0^2(\nu_0+3) + (\nu_0+1)[\nu_0(\beta+2)+4]^2 \right].
\end{aligned}$$

Ce qui est différent de 0, Donc

$$d_\beta = \frac{\rho^{-2\beta+1}}{8\pi[\beta^2\nu_0^2(\nu_0+3) + (\nu_0+1)[\nu_0(\beta+2)+4]^2]} \int_\Sigma (Tu \cdot u_\beta + u \cdot Tu_\beta) d\sigma.$$

2. Convergence de la série

Soit S_{ρ_0} le sous secteur défini par

$$S_{\rho_0} = S \cap \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2, r < \rho_0 \right\}, \rho_0 < \rho.$$

Et les traces sur Σ définies par

$$\mathfrak{U}_2 = \zeta_2 \in \left[\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right]^2, \text{et } T\mathfrak{U}_2 = \phi_2 \in \left[\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right]^2.$$

On a sur S_{ρ_0} : $\rho = \rho_0$ alors $u_\beta = \rho_0^\beta \psi_\beta$, $d\sigma = \rho_0 d\theta$ et $\theta \in [0, \omega]$.
Donc

$$\begin{aligned}
d_\beta &= \frac{\rho_0^{-2\beta+1}}{8\pi[\beta^2\nu_0^2(\nu_0+3)+(\nu_0+1)[\nu_0(\beta+2)+4]^2]} \int_\Sigma (Tu\cdot u_\beta + u\cdot Tu_\beta) d\sigma \\
&= \frac{\rho_0^{-\beta}}{8\pi[\beta^2\nu_0^2(\nu_0+3)+(\nu_0+1)[\nu_0(\beta+2)+4]^2]} \int_\Sigma \rho_0^{1-\beta} \left(\phi_2 \rho_0^\beta \psi_\beta + \zeta_2 \rho_0^{\beta-1} \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\psi_{1,\beta} \\ \psi_{2,\beta} \end{pmatrix} \right) d\sigma \\
&= \frac{\rho_0^{-\beta}}{8\pi[\beta^2\nu_0^2(\nu_0+3)+(\nu_0+1)[\nu_0(\beta+2)+4]^2]} \int_0^{2\pi} \left[\rho_0 \phi_2 \begin{pmatrix} \psi_{1,\beta} \\ \psi_{2,\beta} \end{pmatrix} + \zeta_2 \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\psi_{1,\beta} \\ \psi_{2,\beta} \end{pmatrix} \right] \rho_0 d\theta \\
&= B_{\beta,\nu_0} \int_0^{2\pi} \left[\rho_0^2 \phi_2 \begin{pmatrix} \psi_{1,\beta} \\ \psi_{2,\beta} \end{pmatrix} + \zeta_2 \rho_0 \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\psi_{1,\beta} \\ \psi_{2,\beta} \end{pmatrix} \right] d\theta, \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

avec

$$B_{\beta,\nu_0} = \frac{\rho_0^{-\beta}}{8\pi[\beta^2\nu_0^2(\nu_0+3)+(\nu_0+1)[\nu_0(\beta+2)+4]^2]}.$$

Corollaire 3.4.5.
Si $\mathfrak{U}_2$ est solution du problème (P) alors :

$$\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha,$$

où d_α est donnée par (3.11) *et où la série est convergente uniformément dans $\bar{S}_{\rho_0}$ pour tout $\rho_0 < \rho$.*

Preuve.

1. On a :

$$\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha.$$

Vu le Corollaire 3.4.4

$$\begin{aligned}
d_\alpha &= \frac{1}{2}\rho^{-2\alpha+1} \cdot \frac{\int_\Sigma (Tu\cdot u_\alpha + u\cdot Tu_\alpha) d\sigma}{[\psi_\alpha, \psi_\alpha]} \\
&= \frac{\rho^{-\alpha}}{8\pi[\alpha^2\nu_0^2(\nu_0+3)+(\nu_0+1)[\nu_0(\alpha+2)+4]^2]} \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 \phi_2 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \zeta_2 \rho \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \right] d\theta,
\end{aligned}$$

qui est le résultat.

2. Si $\mathfrak{U}_2$ est solution du problème (P) et d_β donnée par (3.11) alors

$$\begin{aligned}
|d_\alpha| &= \left| \frac{\rho^{-\alpha}}{[\psi_\alpha, \psi_\alpha]} \cdot \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 \phi_1 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \zeta_1 \rho \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \right] d\theta \right| \\
&\leqslant \frac{\rho^{-\alpha}}{[\psi_\alpha, \psi_\alpha]} \int_0^{2\pi} \left| \left(\rho^2 \phi_1 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \zeta_1 \rho \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \right) d\theta \right|.
\end{aligned}$$

$\psi_{1,\alpha}$ et $\psi_{2,\alpha}$ sont des fonctions bornées, donc

$$|d_\alpha| \leqslant \frac{\rho^{-\alpha}}{c} \cdot cte \leqslant cte\, \rho^{-\alpha}.$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\alpha\in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha\right| \leqslant \sum_{\alpha\in E} |d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha| &\leqslant \sum_{\alpha\in E} \rho^{-\alpha} |r^\alpha \psi_\alpha|\, cte \\ &\leqslant \sum_{\alpha\in E} \left(\frac{r}{\rho}\right)^\alpha |\psi_\alpha|\, cte \\ &\leqslant \sum_{\alpha\in E} \left(\frac{r}{\rho}\right)^\alpha cte.\end{aligned}$$

$\sum\limits_{\alpha\in E} (\frac{r}{\rho})^\alpha$ converge si $r < \rho$ $(r = \rho_0)$.
Alors la série $\sum\limits_{\alpha\in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha$ converge uniformément pour tout $\rho_0 < \rho$.
donc la série est convergente uniformément dans $\bar{S}_{\rho_0}$ vers un certain W_2 qui est vérifiant (P).
D'après Grisvard & Geymonat [17] il existe ε positif, suffisamment petit tel que la solution du problème (P) s'écrit :

$$\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha\in E} H_\alpha r^\alpha \psi_\alpha,$$

qui converge pour $r < \varepsilon$.
Le théorème de Holmgren implique que $H_\alpha = d_\alpha$ alors W_2 et $\mathfrak{U}_2$ coïncide dans S_ε. Elles coïncides dans S_{ρ_0}, puisqu'elles y sont analytiquement réelles.

□

Remarque 3.4.6. *Pour* $\nu_0 = 0$, *on obtient la série trigonométrique de l'équation de Laplace dans un secteur.*

Conclusion générale

Dans notre travail nous avons étudié la singularité de la solution variationnelle du problème de Dirichlet pour le système de Lamé.

Dans la première partie nous avons montré comme Merouani [31] que le comportement singulier de la solution est gouverné par une équation transcendante, alors que dans la deuxième partie nous avons écrit une formule de Green et une relation d'orthogonalité, au l'opérateur de Lamé et qui nous a permis de généraliser les techniques utilisées pour le Laplacien et le Bilaplacien a un système pour calculer les coefficients de singularité et ainsi pour prouver la convergence de la nouvelle série $u = \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \phi_\alpha(\theta)$ dans le cas d'un domaine fissuré.

Bibliographie

[1] **S. Agmon**, *Lecturs on elliptique boundary value problems.* Van Nostrand mathematical Studies No 2, Princeton.

[2] **A. Alliche**, *Mécanique des solides Elasticité*, Université Pierre & Marie Curie-Paris.

[3] **B. Benferdi Sabrina**, *Étude variationnelle de quelques problèmes en mécanique du contact*, Thèse de Doctorat en Sciences, l'Université Les Frères Mentouri Constantine, Alger.2015.

[4] **H. Blum & R. Rannacher**, *On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners*, Maths. Methods. App. Sci., 2 (1980), 556-581.

[5] **R. Boufenouche**, *Comportement Singulier des Solutions de Quelques Problèmes aux Limites Gouvernées par le Bilaplacien dans un Polygone Plan*, Thèse de Doctorat en science université F. Abbas, Setif 2015.

[6] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle*, Théorie et Application. Masson (1983).

[7] **H. Benseridi & B. Merouani**, *Quelques pbs de transmission liés au Système de Lamé dans un polyèdre pour une classe d'espaces de Sobolev à doubles poids*, Rev. roum. sci. Techn-Méc. App., Tom 48, N 1-6, Bucarest, (2003), 21-34.

[8] **H. Benseridi & M. Dilmi**, *Régularité des solutions de quelques pbs aux limites dans un domaine de* $\mathbb{R}^2$ *non homogène*, An. Univ. Oradea. fax. Mathematica, Tom XII (2005), 221-235.

[9] **H. Benseridi** , *Singularité des solutions de quelques pbs aux limites liés au Système de Lamé au voisinage d'une arête d'un corps non homogène*, Thèse de Magister, Univ. F. Abbas, Setif, nov, 1998.

[10] **Cédric Camier**, *Modélisation et étude numérique de vibrations non-linéaire des plaques circulaires minces imparfaites, Application aux cymbales.* Thèse Présentée et soutenue publiquement le 2 février 2009 pour l'otention du Docteur de l'Ecole Polytechnique.

[11] **W. Chikouche & A. Aibeche**, *Coefficients of singularities of the biharmonic problem of Neumann type : case of the crack.* IJMMS 2003 : 5, 305-313, Hindawi Publishing Corp.

[12] **R. courant & D. Hilbert**, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience, 1953.

[13] **J.P. Demprsey & J.B. Sinclair**, *On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge*, J. of Elasticity, 9, N4, Octobre 1979.

[14] **M. Dilmi, H. Benseridi & A. Guesmia**, *Problème de contact sans frottement-Dirichlet pour les équations de Laplace et de Lamé dans un polygone*, Analele Universităţü Oradea. Fax. Mathematica, Tom XIV (2007), 221-236.

[15] **G. Duvant & J.L. Lions**, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod Paris(1972).

[16] **Feuille3**, *Equations et systèmes linéaires*, Université Lyon 1. Année 2014-2015.

[17] **P. Grisvard & G. Geymonat**, *Singularities and constructive methods for treatment*, Proceeding Oberwalfach, Springer-Verlag, 1983, p. 123-126.

[18] **P. Grisvard**, *Solutions singulières du système de Lamé*, Preprint No 173 et No 175, Université de Nice, (1987).

[19] **P. Grisvard**, *Singularities in boundary values problems*, Recherches en Mathématiques Appliquées, Vol.22, Masson, Paris, 1992 (French).

[20] **P. Grisvard**, *Le problème de Dirichlet pour les équations de lamé*, C.R.A.S, T.304, série I , No 3, (1987),p. 71-73.

[21] **P. Grisvard**, *Résolvante du Laplacien dans un polygone et singularités des équations elliptiques ou parabiliques*, CRAS, Paris, t.301 Serie I No 5, 1985 p.181-183.

[22] **P. Grisvard**, *Boundary value problems in plan polygons.* Instructions for use, E.D.F, Bulletin de la direction des études et recherches, serie C, Mathématique no.1, 1986, p.21 59.

[23] **P. Grisvard**, *Le problème de Dirichlet pour les équations de Lamé*, C. R. A. S. t.103, p.71-73, 1986.

[24] **P. Grisvard**, *Problèmes aux limites pour l'opérateur de Laplace dans un polygone plan*, Conférences au séminaire d'analyse numérique de Lyon-St. Etienne, 11-12-13 Mai 1976.

[25] **P. Grisvard & Looss**, *Problème unilatéraux dans des domaines non réguliers*,

[26] **P. Grisvard**, *Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone*, Bollettion della, unione mathematic, Italiana, 5(1972). 132-146.

[27] **P. Grisvard**, *Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polyèdre*, Annali S.N.S. Pissa, série IV-vol. II, 3(1975), 359-388.

[28] **P. Grisvard**, *Singularités en Elasticité*, Laboratoire de Mathématiques I.M.S.P. Parc Vabose. Nice, France 1988.

[29] **M.S. Hanna & K.T. Smith**, *Somme remarks on the Dirichlet problem in piecewise smooth domains*, Comn. Rure appl. Math, 20(1967), 575-593.

[30] **J.L. Lions & E. Magenes**, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications* , 1, Dunod,(1968).

[31] **B. Merouani**, *comportements singuliers des solutions du système de l'élasticité dans un polygone*, Thèse de doctorat, U.S.T.H.B., Alger (1990).

[32] **B. Merouani**, *Quelques problèmes aux limites pour le système de Lamé dans un secteur plan*, C.R.A.S, Paris, t. 304, série I, no. 13, 1987.

[33] **B. Merouani**, *Solutions singulières du système de l'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites*, Maghreb math, Rev, Vol 5, Nos 1 & 2, 1996, pp. 95-112.

[34] **B. Merouani & R. Boufenouche**, *Trigonometric series adapted for the study of dirichlet boundary-value problems of lame systems*, electronic journal of differential equations, vol. 2015 (2015), no. 181, pp. 1-6. issn : 1072-6691.

[35] **B. Merouani & R. Boufenouche**, *Coefficients of singularities for a simply supported plate problems in plane sectors*, Electronic jornal of Differential Equations, Vol 2013(2013),No 238, pp.1-8.

[36] **P. A. Raviart & J.M. Thomas**, *Introduction Ã L'analyse Numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, (1983).

[37] **O. Tcha-Kondor**, *Nouvelles séries trigonométriques adaptées à l'étude de problèmes aux limites pour l'équation biharmonique*, Étude du cas de la fissure [New trigonometric series adapted to the study of boundary value problems for the biharmonic equation. Cas of the crack], C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, p. 541-544, 1992(French).

[38] **M.L. Williams**, *Stress, singularities résulting from various boundary conditions in angular corner of plates in extension*, J.Appl. Mch, 19,1952, p. 526-528.