République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel Faculté des Sciences Exactes et

Informatique Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées.

Option : EDP et Applications.

Thème

Techniques de stabilisation des schémas d'éléments finis relatifs au problème de Stokes

Présenté par :

Kerrouche Nadjat

Khelfa Asma

Devant le jury composé de :

S. Maarouf	Université Mohamed Seddik Ben Yahia.	Présidente
H. Benhassine	Université Mohamed Seddik Ben Yahia.	Encadreur
O. Yakhlef	Université Mohamed Seddik Ben Yahia.	Examinateur

Promotion 2020/2021

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, nous remercions ALLAH qui nous a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance et gratitude à notre encadreur Mr ***Benhassine Hani****, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.*

Nous remercions aussi en particulier tous les enseignants du spécialité EDP.

Nous remercions les membres du jury qui ont accepté de juger notre travail.

Mme ***Maarouf Sara****, qui nous a fait l'honneur de présider ce jury.*

Mr ***Yakhlef Othman****, pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

Un grand merci pour nous ***parents*** *et nous famille pour leurs sacrifice et encouragement, pour nous amis qui nous ont soutenu durant les difficultés et leurs soutient moral tout au long de notre travail.*

Nous tenons à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

Asma Nadjat

Dédicace

Du profond du mon coeur, je dédie ce modeste travail :

À la personne la plus précieuse et la plus chère, ma mère ***"Hakima".***

À ceux qui ont fait de moi une bonne personne et une femme forte dans ce monde, mon père ***"Mehfoud"****.*

À Mes chers frères et sœurs ***"Naim", "Abdou", "Adem", "Mouhamed" , "Matin" et "Amel"****.*

Aux enfants ***"Rinad", "Safi elrahmen" et "Ritel"****.*

À tous mes amies de promotion 2^{eme} ***année master EDP et Applications****.*

À mes amies avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables .
"Nadjat","Nada","Oumaima et "Hadjer"*, je leur souhaite de ma part la réussite.*

À tous ceux qui ont une place dans mon coeur.

À toutes les membres de la famille ***"Khelfa"*** *et* ***"Zouraghen"****.*

Finalement, je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à ***ma réussite****.*
Merci d'être toujours là pour moi.

Asma

Dédicace

Du profond du mon coeur, je dédie ce modeste travail :

À la personne la plus précieuse et la plus chère, ma mère ***"Ghania".***

À ceux qui ont fait de moi une bonne personne et une femme forte dans ce monde, mon père ***"Bachir"****.*

À Mes chers frères et sœurs ***"Djamel", "Soufian", "Naser", "Ghanou" et "Sabrina"****.*

Aux enfants ***"Sara", "Salleh","Nour" et "Rahil"****.*

À tous mes amies de promotion 2^{eme} ***année master EDP et Applications****.*

À mes amies avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables .
"Asma","Nada","Oumaima "et "Karima"*, je leur souhaite de ma part la réussite.*

À tous ceux qui ont une place dans mon coeur.

À toutes les membres de la famille ***"Kerrouche"****.*

Finalement, je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à ***ma réussite****.*
Merci d'être toujours là pour moi.

Nadjat

Table des matières

Notations

Nous donnons ici quelques notations utiles par la suite :

• N : désigne la dimension de l'espace.

• Ω : désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, généralement domaine physique ou domaine fictif.

• $\overline{\Omega}$: désigne l'adhérence de Ω.

• $\mathbf{v}$: désigne une fonction vectorielle sur Ω.

• q : désigne une fonction scalaire sur Ω.

• $\partial\Omega$: désigne la frontière de Ω.

• $D(\Omega)$: désigne l'espace des fonction indéfiniment dérivables à support borné (espace des fonctions test) dans Ω.

• dx : désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$.

• $L^2(\Omega) = \{\mathbf{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{v}\,\text{mesurable et}\ \int\limits_{\Omega} |\mathbf{v}(x)|^2 dx < \infty\}$.

$L^2(\Omega)$ est une espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}(x)\mathbf{w}(x)dx,\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L^2(\Omega),$$

associé à la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\mathbf{v}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

• $L^2_0(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int\limits_{\Omega} q dx = 0\}$ est l'espace orthogonal aux constantes dans $L^2(\Omega)$.

• $H^m(\Omega)$: désigne l'espace de Sobolev sur Ω définit par

$$H^m(\Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega),\ \partial^{|\alpha|}\mathbf{v} \in L^2(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m\},$$

avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ et m un entier positif.

- $H^1(\Omega)$: désigne l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω définit par

$$H^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega),\, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq N\},$$

dont la norme associée est

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} = (\mathbf{v}, \mathbf{v})_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}} = \left(\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et de produit scalaire associé

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{1,\Omega} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right)_{0,\Omega}.$$

- $H^1(\Omega)$: est une espace de Hilbert pour le produit scalaire$(\cdot, \cdot)_{1,\Omega}$.

On désignera l'adhérence de $D(\Omega)$ dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ par

$$H_0^1(\Omega) = \{\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega); \mathbf{v} = 0\, sur\, \partial\Omega\}.$$

- $H^{-1}(\Omega)$: désigne l'espace dual de l'espace $H^1(\Omega)$.
- $|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}$: désigne la semi-norme sur $H^1(\Omega)$, définie par

$$|\mathbf{v}|_{1,\Omega} = \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega},$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: désigne le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.
- $\mathcal{T}_h$: désigne le maillage du domaine Ω.
- T : désigne diamètre maximum des triangles de $\mathcal{T}_h$.
- h : désigne le pas du maillage.

Introduction

La modélisation des phénomènes d'écoulements de fluides visqueux et incompressibles conduit à la résolution des équations non-linéaires de Navier-Stokes. Dans le cas, où le terme de non-linéarité disparait (par exemple pour des fluides à fortes viscosité), ces équations se réduisent aux équations de Stokes. Nous nous intéressons dans notre travail, à la formulation vitesse-pression des ces équations.

En particulier, on s'intéressera à une approximation par la Méthode des Eléments Finis (MEF) des équations de Stokes. Dans le travail de mémoire de master [12], une présentation détaillée des différents schémas d'approximation par une MEF existants a été faite, où la vérification de la condition inf-sup [4] a été démontrée pour chaque paires d'éléments finis vitesse-pression.

Dans notre travail, on va essayer de présenter trois techniques de stabilisation introduites respectivement par [19], [20] et [15] dans la fin des années 1980. Ces techniques consistent à rajouter au problème discret de Stokes, des termes dépendants du maillage pondérés par un facteur $\delta > 0$ de telles sortes que le problème modifié :

— soit consistant (la solution continue du problème de Stokes vérifie les équations discrètes modifiées),

— ne soit plus un problème de point-selle mais un problème coercif ou bien faiblement coercif, et la vérification de la condition inf-sup devient obsolète.

Dans le premier chapitre, on donnera quelques rappels mathématiques et on présentera une formulation variationnelle vitesse-pression du problème de Stokes avec des conditions aux bords de type Dirichlet. On mettra en évidence que l'existence et l'unicité de la solution continue

$(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ est assurée par la condition inf-sup continue grâce au théorème de Babuška–Brezzi.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéressera à la discrétisation par la méthode des éléments finis de l'équation de Stokes puis on étudiera l'existence et l'unicité de la solution discrète et sa stabilité. On verra que le choix des espaces d'éléments finis vitesse-pression stables dépend de la vérification de la condition inf-sup pour ces espaces. On présentera à la fin de ce chapitre quelques pairs éléments finis vitesse-pression $V_h \times Q_h$ stables pour l'approximation du problème de Stokes.

Enfin dans le troisième chapitre, on abordera le but de notre travail à savoir présenter la technique de stabilisation pour le problème de Stokes discret. Initiée par F. Brezzi and J. Pitkaranta [8] en 1984 et un peu plus tard par Hughes, Franca and Balestra [19]. On présentera trois techniques de stabilisation tirées de ces articles. Pour chacune d'elle on démontrera l'existence et l'unicité de la solution.

Chapitre 1

Problème de Stokes

1.1 Quelques résultats théoriques et préliminaires

Nous allons présenter brièvement dans ce paragraphe, quelques résultats et rappels mathématiques essentiels par la suite à l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Théorème 1.1. *[1](Inégalité de Cauchy-Schwartz)*
• ***Avec des sommes :***
Soient $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v} \in \Omega$. *Alors :*

$$\sum_{k=1}^{N} |\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{N} |\mathbf{u}_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N} |\mathbf{v}_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

• ***Avec des intégrales :***
Soient $f,g \in C([0,1], \mathbb{R})$. *Alors :*

$$\int_0^1 |fg| dx \leq \left(\int_0^1 |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

• ***Dans un espace de Hilbert :***
Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace pré-hilbertien. Alors, pour tous* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V.$$

Théorème 1.2. ***(Inégalité de Poincaré)****[1] Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$. *Alors, il existe* *une constante $C > 0$ (dépendent de Ω) telle que : pour toute fonction $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$, nous avons :*

$$\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq C_\Omega \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega}.$$

Théorème 1.3. ***(Formules de Green)*** *Soit Ω un ouvert borné de frontière régulière. Pour toute fonction $\mathbf{u}$ de $H^2(\Omega)^N$ et toute fonction $\mathbf{v}$ de $H^1(\Omega)^N$, on a*

$$-\int_\Omega \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \tag{1.1}$$

avec $\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j}$ et où $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire extérieure à Ω.

Lemme 1.1.1. *Soit $\mathrm{v} \in L^2(\Omega)$. On peut définir une forme linéaire continue $\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x_i}$ dans $H^{-1}(\Omega)$, $1 \leq i \leq N$, par la formule :*

$$\langle \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x_i}, \phi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega \mathrm{v}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \, dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

De plus, on a l'estimation suivante :

$$\|\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x_i}\|_{-1,\Omega} \leq \|\mathrm{v}\|_{0,\Omega} \quad \forall \mathrm{v} \in L^2(\Omega).$$

Théorème 1.4. ***(Théorème de Lax-Milgram)****[21] Soit V un espace de Hilbert de norme $\|\cdot\|_V$. On considère une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ continue sur $V \times V$ i.e.*

$$\exists M > 0, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V,$$

et on suppose qu'elle est coercive sur V, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2.$$

On considère aussi, une forme linéaire continue $L(\cdot)$ sur V. Alors, le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que :} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{cases}$$

admet une solution unique $\mathbf{u}$ *dans* V, *c'est-à-dire :*

$$\exists! \mathbf{u} \in V, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}).$$

Remarque 1.1.1. *Si la forme* $a(\cdot,\cdot)$ *est symétrique, alors l'élément* $\mathbf{u}$ *est caractérisé comme étant l'unique élément de* V *qui minimise la fonctionnelle* $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

c'est-à-dire :

$$\exists! \mathbf{u} \in V, \quad J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in V} J(\mathbf{v}).$$

Définition 1.1.1. *Soit* $\mathbf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *telle que* $\mathbf{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 ...., \mathrm{u}_N)$. *On définit les opérateurs divergences, gradient et laplacien si* $\mathbf{u}$ *est suffisamment régulière, associés comme suit :*

$$div\ \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i},$$

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nabla \mathrm{u}_1 \\ \nabla \mathrm{u}_2 \\ ... \\ \nabla \mathrm{u}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial x_N} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial \mathrm{u}_N}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathrm{u}_N}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial \mathrm{u}_N}{\partial x_N} \end{pmatrix},$$

et

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta \mathrm{u}_1 \\ \Delta \mathrm{u}_2 \\ ... \\ \Delta \mathrm{u}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{u}_1^2}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial \mathrm{u}_1^2}{\partial^2 x_2} & ... & \frac{\partial \mathrm{u}_1^2}{\partial^2 x_N} \\ \frac{\partial \mathrm{u}_2^2}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial \mathrm{u}_2^2}{\partial^2 x_2} & ... & \frac{\partial \mathrm{u}_2^2}{\partial^2 x_N} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial \mathrm{u}_N^2}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial \mathrm{u}_N^2}{\partial^2 x_2} & ... & \frac{\partial \mathrm{u}_N^2}{\partial^2 x_N} \end{pmatrix}.$$

1.2 Les équations de Stokes

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N = 2, 3$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. Le système de Stokes modélise l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible à petite vitesse. On suppose que le fluide occupe un domaine Ω et qu'il adhère ou bord de celui-ci, c'est-à-dire que sa vitesse est nulle sur le bord (se qui conduit à une condition aux limites de Dirichlet).

La modélisation mathématique du problème de Stokes conduit à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla\, p = \mathbf{f} \qquad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} \ \ = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

C'est un système d'EDPs linéaire avec une condition au bord homogène.

Les inconnues sont :

1. $\mathbf{u}$ la vitesse (un vecteur),
2. p la pression (un scalaire).

La donnée $\mathbf{f}$ représente la densité des forces et la constante $\nu > 0$ représente le coefficient de viscosité du fluide. Il y a une autre équation $div\mathbf{u} = 0$ appelée **condition d'incompressibilité** (qui correspond à la **conservation de la masse**).

Remarque 1.2.1. *Le problème de Stokes* (1.3) *est un modèle* ***simplifié*** *d'écoulement d'un fluide visqueux incompressible. En effet, les* ***vraies*** *équation du mouvement d'un tel fluide sont les équations* ***Navier-Stokes*** *stationnaires (voir [23])*

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Lorsque la vitesse de fluide $\mathbf{u}$ *est faible, le terme non-linéaire* $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}$ *étant quadratique en* $\mathbf{u}$ *devient négligeable, on obtient alors les équations de Stokes.*

1.3 Formulation variationnelle

Nous allons maintenant donner une formulation variationnelle du problème de Stokes (1.3). Pour cela, on fera les hypothèses de régularités suivantes : $\mathbf{f} \in L^2(\Omega), \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^N$ et $p \in L^2(\Omega)$. En multipliant la première équation de système (1.3) par une fonction test $\mathbf{v} \in V = H_0^1(\Omega)^N$

et en intégrant sur Ω, on obtient

$$-\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \;\; dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N. \tag{1.5}$$

En utilisant les formules (1.1) et (1.2)

L'expression (1.5) devient :

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \colon \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \;\; dx - \nu \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N, \tag{1.6}$$

avec : $\int\limits_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \; : \nabla \mathbf{v} \, dx = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i \, dx.$

Comme la fonction test est nulle sur le bord $\partial\Omega$ (condition aux limites homogène de Dirichlet), l'équation(1.6) est :

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \; : \nabla \mathbf{v} \;\; dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \;\; dx = \langle \mathbf{f} \; , \mathbf{v} \; \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N. \tag{1.7}$$

En prenant $\nu = 1$ dans tout ce qui suit et en tenant compte de la condition d'incompressibilité ($div\mathbf{u} = 0$) dans Ω associé à l'équation (1.7) nous donnons la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V_N \text{ tel que,} \\ \int\limits_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \; : \nabla \mathbf{v} \;\; dx = \langle \mathbf{f} \; , \mathbf{v} \rangle \; \forall \mathbf{v} \in V_N, \end{cases} \tag{1.8}$$

où $V_N = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N, div\mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega\}$.

En appliquant le théorème 1.4 de Lax-Milgram au problème (1.8) on a l'existence et l'unicité de la solution $\mathbf{u} \in V_N$.

Concernant la pression, puisque l'équation de Stokes ne fait intervenir que les dérivées, nous sommes poussés à imposer une condition sur p qui nous fixe la constante d'intégration afin de garantir l'unicité d'une telle pression. Nous choisissons à cet effet l'espace des fonctions de carré sommable à moyenne nulle : $Q = L_0^2(\Omega)$.

En multipliant la deuxième équation du problème (1.3) (l'équation d'incompressibilité) par une fonction test $q \in L^2_0(\Omega)$ et en intégrant sur Ω. On trouve :

$$\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = 0.$$

L'existence de p est alors garantit par le résultat important suivant

Lemme 1.3.1. ***(Théorème de De Rham)*** *Soit Ω un ouvert borne de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière et soit L une forme linéaire continue sur $H^1_0(\Omega)^N$. Alors : L s'annule sur V_N si et seulement s'il existe une fonction $p \in L^2(\Omega)$ telle que :*

$$L(\mathbf{v}) = \int_\Omega p \, div \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^N.$$

On détermine p de manière unique à une constante additive près.

il est claire que $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur $H^1_0(\Omega)^N$ et que $L(\mathbf{v}) = 0$, $\forall \mathbf{v} \in V_N$. Le théorème de De Rham permet de conclure l'existence de p.

1.4 Problèmes du point-selle

La formulation variationnelle (1.8) bien que séduisante d'un point de vue théorique, reste compliquée à mettre en œuvre en pratique lorsque l'on passe aux espaces discrets.
Noua allons donner ci-après une formulation variationnelle du problème de Stokes, dite formulation mixte, qui est plus appropriée. Elle est donnée sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}, p) \in H^1_0(\Omega)^N \times L^2_0(\Omega) \quad \text{tel que,} \\ \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \;\; dx - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} \;\; dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \; \in H^1_0(\Omega)^N, \\ \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u} \;\; dx = 0 \quad \forall q \in L^2_0(\Omega). \end{cases} \tag{1.9}$$

Cette formulation rentre dans le cadre plus générale des problèmes de point-selle que nous allons présenter ci-après. Cette présentation est basée sur la vérification d'une condition inf-sup pour ce type de problème (voir [4] et [18]).

1.4.1 Cadre général

Soit V et Q deux espaces de Hilbert munis de normes respectivement $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_Q$. Et soit V' et Q' leurs espaces duals correspondants. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ les crochets de dualité entre V' et V. On définit les deux formes suivantes :

1. $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $V\times V$,
2. $b(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $V\times Q$.

Ainsi que la fonction linéaire $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$.
On s'intéresse au problème de point-selle suivant, posé pour tout $\mathbf{f}$ dans le dual V' :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u},p)\in V\times Q \text{ tel que,} \\ a(\mathbf{u},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},p)=F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}\in V, \\ b(\mathbf{u},q)=0 \quad \forall q\in Q. \end{cases} \tag{1.10}$$

À ces formes bilinéaires on associe les opérateurs $A\in\mathscr{L}(V,V')$ et $B\in\mathscr{L}(V,Q')$ définis par :

$$\langle A\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = a(\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V, \tag{1.11}$$

$$\langle B\mathbf{v},q\rangle = b(\mathbf{v},q) \quad \forall \mathbf{v}\in V, \forall q\in Q. \tag{1.12}$$

On note $B^T\in\mathscr{L}(Q,V')$ l'opérateur transposé de B, c-à-d :

$$\langle B^T q,\mathbf{v}\rangle = \langle B\mathbf{v},q\rangle = b(\mathbf{v},q). \tag{1.13}$$

Le problème (1.10) est équivalent à

$$\begin{cases} A\mathbf{u}+B^T p=\mathbf{F} \quad \text{dans } V', \\ B\mathbf{u}=0 \quad \text{dans } Q'. \end{cases} \tag{1.14}$$

On introduit les sous-espaces suivants :

$$V^0=\{\mathbf{v}\in V|\ \ b(\mathbf{v},q)=0 \quad \forall q\in Q\}=ker(B),$$

son polaire

$$V^0_{pol}=\{\mathbf{f}\in V'|\ \ \langle\mathbf{f},\mathbf{w}\rangle=0 \quad \forall\ \mathbf{w}\in V^0\},$$

et enfin son orthogonal

$$(V^0)^\perp = \{\mathbf{v} \in V | \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = 0 \quad \forall \ \mathbf{w} \in V^0\}.$$

Vu que

$$V = V^0 \oplus (V^0)^\perp.$$

On a alors le lemme suivant.

Lemme 1.4.1. *On suppose la forme $b(\cdot,\cdot)$ continue sur $V \times Q$. Les trois propriétés sont équivalentes :*

1. *La condition inf-sup suivante est vérifie : il existe une constante $\beta > 0$ telle que :*

$$\inf_{q \in Q} \quad \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_V} \geq \beta \|q\|_Q; \tag{1.15}$$

2. *L'opérateur B^T est un isomorphisme de Q dans V^0_{pol}. De plus,*

$$\|B^T q\|_{V'} = \sup_{\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq 0} \frac{\langle B^T q, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_V} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q; \tag{1.16}$$

3. *L'opérateur B est un isomorphisme de $(V^0)^\perp$ dans Q'. De plus,*

$$\|B\mathbf{v}\|_{Q'} = \sup_{q \in Q, q \neq 0} \frac{\langle B\mathbf{v}, q \rangle}{\|q\|_Q} \geq \beta \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in (V^0)^\perp. \tag{1.17}$$

On peut maintenant énoncer le résultat principale d'existence et d'unicité pour les problèmes de point-selle.

Théorème 1.5. ***(Théorème de Brezzi-Babuška)*** *[22]On fait les hypothèses suivantes :*

1. *La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue sur V^0 et vérifie la propriété d'ellipticité pour une constante $\alpha > 0$:*

$$\forall \ \mathbf{v} \in V^0, \quad a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2; \tag{1.18}$$

2. *La forme bilinéaire $b(\cdot,\cdot)$ est continue et vérifie la condition inf-sup pour une constante $\beta > 0$:*

$$\forall q \in Q, \quad \sup_{\mathbf{v} \neq 0} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_V} \geq \beta \|q\|_Q. \tag{1.19}$$

Alors, pour tout élément $\mathbf{f}$ *de* V'*, le problème* (1.10) *admet une solution unique* $(\mathbf{u}, p)$ *dans* $V \times Q$.
De plus, cette solution vérifie

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|\mathbf{f}\|_{V'}, \tag{1.20}$$

et

$$\|p\|_Q \leq \frac{1}{\beta}(1 + \frac{M}{\alpha})\|\mathbf{f}\|_{V'}, \quad M > 0. \tag{1.21}$$

où M *et* α *sont les quantités qui interviennent de la continuité et la coercivité de* $a(\cdot, \cdot)$*.*

1.4.2 Cas particulier : le problème de Stokes

La formulation variationnelle du problème de Stokes (1.9) rentre dans le cadre des problèmes de point-selle (1.10) présentés précédemment où les formes $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ et $F(\cdot)$ sont définies respectivement par :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \colon \nabla \mathbf{v} \, dx, \\ b(\mathbf{v}, p) &= -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx, \\ F(\mathbf{v}) &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \;\; dx, \end{aligned}$$

sur les espaces $V = H_0^1(\Omega)^N$et $Q = L_0^2(\Omega)$.
Par la suite, nous allons monter que les conditions du théorème de Brezzi-Babuška sont vérifiées. Il est claire que les formes $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ sont continues sur $V \times V$ et $V \times Q$ respectivement :

1. la continuité de $a(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{0,\Omega} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \\ &\leq |\mathbf{u}|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

2. la continuité de $b(\cdot,\cdot)$

$$\begin{aligned}
|b(\mathbf{v},p)| &\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_i} p| dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \| \frac{\partial \ \mathbf{v}_i}{\partial \mathrm{x}_i} \|_{0,\Omega} \|p\|_{0,\Omega} \\
&\leq \sqrt{N} \left(\sum_{i=1}^{N} \| \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathrm{x}_i} \|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|p\|_{0,\Omega} \\
&\leq \sqrt{N} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \|p\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Aussi la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ est vérifiée. En effet, soit $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N$ on a donc :

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{v},\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^2 dx = \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \\
&\geq \frac{1}{1 + C(\Omega)^2} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2,
\end{aligned} \tag{1.22}$$

où $C(\Omega)$ est la constante de l' inégalité de Poincaré.

Enfin pour montrer que la condition inf-sup continue (1.15) est vérifiée, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.4.2. *[17] Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in L^2(\Omega)$, il existe $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N$ solution de*

$$\begin{cases} div\mathbf{v} = p & dans\,\Omega \\ \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|p\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

De plus, si $p \in L_0^2(\Omega)$, alors on peut prendre $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N$.

Soit $q \in Q$, d'après le lemme précédant, il existe $\mathbf{v} \in V$ tel que

$$q = -div\mathbf{v} \quad et \quad \|\mathbf{v}\|_V \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors

$$b(\mathbf{v},q) = \|q\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et

$$\frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_V} \geq \frac{1}{C}\frac{b(\mathbf{v},q)}{\|q\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{C}\|q\|_{L^2(\Omega)}$$

donc

$$\sup_{\mathbf{v}\in V}\frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_V} \geq \beta\|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent, la forme $b(\cdot,\cdot)$ vérifie la condition inf-sup continue avec $\beta = \frac{1}{C} > 0$, où C est la constante du lemme 1.4.2.

Toutes les hypothèses du théorème de Brezzi-Babuška sont vérifiées pour le problème de Stokes. Donc le problème admet une solution unique $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$.

Chapitre 2

Problème de Stokes par la méthode des élément finis

2.1 Méthodes d'éléments finis

La méthode des éléments finis est la méthode numérique de référence pour le calcul des solutions de problèmes aux limites elliptiques. L'idée de base de la (MEF) est de remplacer l'espace de Hilbert V sur lequel est posé la formulation variationnelle par un sous-espace V_h de dimension finie. Cette méthode est basée sur la notion géométrique de **maillage** du domaine Ω, un maillage est un pavage de l'espace en volume élémentaires très simples : triangles, tétraèdres, parallélépipèdes.

2.1.1 Triangulation

Dans cette section, on présente les notions de base et les principaux outils de la méthode des éléments finis. On réfère à [3] et [6] pour plus de détails. Dans la méthode des éléments finis, la construction du sous-espace discret nécessite la discrétisation préalable du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ en éléments géométriques simples. Contrairement au cas d'un intervalle de $\mathbb{R}$, la discrétisation d'un domaine de $\mathbb{R}^N$ est un problème technique difficile et la qualité de ce maillage est essentielle pour la qualité de l'approximation.

Définition 2.1.1. *Un maillage de Ω notée $\mathcal{T}_h$, est un ensemble fini de polygones ou de polyèdres $T \in \overline{\Omega}$, vérifiant les critères suivants :*

1. *Les éléments $T \subset \overline{\Omega}$ du maillage doivent recouvrir le domaine, i.e. leur union égal à $\overline{\Omega}$.*

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T,$$

2. *Chaque élément T de $\mathcal{T}_h$ est un polygone ou un polyèdre connexe fermé de $\mathbb{R}^N$ d'intérieur non vide à frontière régulière,*
3. *L'intersection de deux éléments distincts doit satisfaire :*

$$T \cap T' = \begin{cases} \emptyset, \\ \textit{un sommet}, \\ \textit{un côté}. \end{cases}$$

Le premier critère implique que Ω est polygonal ou est approché par un polygone. Le second critère a pour but d'assurer la continuité des fonctions de l'espace discret.
Dans la plupart des cas, les triangulations sont :

- *un triangles ou un quadrilatères convexes en dimension $N = 2$.*
- *un tétraèdres ou un parallélépipèdes rectangles en dimension $N = 3$.*

Dans ce qui suit, on s'intéressera à un maillage triangulaire de Ω.

Définition 2.1.2. *[2] Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages de Ω. On dit qu' il s'agit d'une suite de* ***maillages réguliers*** *si :*

1. *la suite $h = \max\limits_{t \in \mathcal{T}_h} diam(T)$ tend vers 0,*
2. *il existe une constante C strictement positive, pour toute $h > 0$ et tout $T \in \mathcal{T}_h$,*

$$\frac{diam(T)}{\rho(T)} \leq C, \tag{2.1}$$

telle que :

$$diam(T) = \max_{x,y \in T} \|x - y\| \quad et \quad \rho(T) = \max_{B_r \subset T}(2r).$$

Définition 2.1.3. *On appelle coordonnées barycentriques $\lambda_j, 1 \leq j \leq N + 1$, d'un point $x = (x_i)_{1 \leq i \leq N}$ de $\mathbb{R}^N$ par rapport aux $N+1$ sommets a_j non contenus dans un même hyperplan,* *la solution (unique) du système linéaire suivant*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N+1} a_{ij}\lambda_j = x_i, \quad 1 \leq i \leq N, \\ \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1, \end{cases}$$

où les $a_{i,j}$ sont les coordonnées du point a_j.

2.1.2 Espaces polynomiaux d'approximation

On introduit les espaces des éléments finis suivants :

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)]^N : \mathbf{v}_{h|T} \in \mathcal{P}_k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}, k \geq 1,$$

$$Q_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega) : q_{|T} \in \mathcal{P}_l(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}, l \geq 0.$$

où $\mathcal{P}_k(T)$ est l'espace des polynômes définis sur T de degrés $\leq k$.

Lemme 2.1.1. ***(Inégalité inverse)***
On suppose la triangulation $\mathcal{T}_h$ est régulière. Pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante C indépendant de k telle que :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{P}_k(T), \quad |\mathbf{v}|_{H^m(T)} \leq C h_T^{-m} \|\mathbf{v}\|_{L^2(T)}.$$

Définition 2.1.4. *On appelle opérateur d'interpolation π_h, l'application linéaire de $H_0^1(\Omega)^N$ dans V_h définie, pour tout $\mathrm{v} \in H_0^1(\Omega)^N$ par :*

$$\begin{aligned} \pi_h : V &\to V_h \\ \mathrm{v} &\mapsto \pi_h \mathrm{v} \end{aligned}$$

$$\pi_h \mathrm{v}(x) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{v}(x_i)\phi_i(x)$$

t.q $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ est une base de Lagrange de l'espace V_h.

On a alors les estimations d'erreur de l'approximation par la méthode des éléments fini [9] suivantes :

Lemme 2.1.2. *Il existe* $\pi_h \in \mathscr{L}(H^2(\Omega); W_h) \cap \mathscr{L}(V \cap H^2(\Omega); V_h)$ *tel que*

$$\|\mathrm{v} - \pi \mathrm{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq C'\, h \|\mathrm{v}\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall \mathrm{v} \in H^2(\Omega),$$

Où $C' > 0$ *est une constante indépendante de* h *et* $W_h \subset H^1(\Omega)$ *un sous-espace de dimension finie.*

Lemme 2.1.3. *Il existe* $S_h \in \mathscr{L}(Q \cap H^1(\Omega); Q_h)$ *l'opérateur de projection-*L^2 $S_h : L^2(\Omega) \rightarrow Q_h$ *tel que*

$$\|p - S_h p\|_{0,\Omega} \leq C'' h \|p\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall p \in H^1(\Omega).$$

Où $C'' > 0$ *est une constante indépendante de* h.

2.2 Approximation par la MEF du problème de Stokes

On s'intéresse maintenant à l'approximation du problème (1.10). La méthode de Galerkin consiste simplement a remplacer les espaces V et Q intervenant dans cette formulation par des espaces de dimensions finies.

Soit h un paramètre de discrétisation. Pour toute valeur de h, soient deux espaces de dimensions finies V_h et Q_h inclus respectivement dans V et Q. Cela induit que :

1. $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $V_h \times V_h$,
2. $b(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $V_h \times Q_h$.

Le problème discret s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \quad \text{ tel que,} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = F(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{2.2}$$

On introduit l'ensemble suivant :

$$V_h^0 = \{\mathbf{v}_h \in V_h | \quad b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\}.$$

Les résultats suivant assurant l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution du problème (2.2) est une conséquence directe du théorème (1.5).

Théorème 2.1. ***(Existence, unicité et stabilité)*** *Supposons que :*

1. *la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue sur V_h^0 et vérifie la propriété d'ellipticité pour une constante $\alpha_h > 0$:*
$$\forall \mathbf{v}_h \in V_h^0, \quad a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha_h \|\mathbf{v}_h\|_V^2; \tag{2.3}$$

2. *la forme bilinéaire $b(\cdot,\cdot)$ est continue et vérifie la condition inf-sup discrète pour une constante $\beta_h > 0$:*
$$\inf_{q_h \in Q_h} \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_V} \geq \beta_h \|q_h\|_Q. \tag{2.4}$$

Alors, pour tout élément $\mathbf{f}$ de V', le problème (2.2) admet une solution unique $(\mathbf{u}_h, p_h)$ dans $V_h \times Q_h$. De plus, cette solution vérifie

$$\|\mathbf{u}_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha_h} \|\mathbf{f}\|_{V'}, \tag{2.5}$$

et
$$\|p_h\|_Q \leq \frac{1}{\beta_h}(1 + \frac{M}{\alpha_h})\|\mathbf{f}\|_{V'} \quad M > 0. \tag{2.6}$$

Théorème 2.2. *[18] Supposons que le problème discret (2.2) vérifie la condition inf-sup discrète. Alors il admet une unique solution $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$. De plus, il existe une constante positive C ne dépendant pas de α_h, β_h tel que*

$$\|\mathrm{u} - \mathrm{u}_h\|_V + \|p - p_h\|_Q \leq C \left(\inf_{\mathrm{v}_h \in V_h} \|\mathrm{u} - \mathrm{v}_h\|_V + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q \right).$$

Lemme 2.2.1. ***(Lemme de Céa)*** *Soit $\mathbf{u}$ la solution du problème variationnel (1.10) et soit $\mathbf{u}_h$ la solution du problème discret (2.2). On a l'estimation suivante :*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V \right), \tag{2.7}$$

Pour plus de détails consulter [9].

2.3 Quelques exemple d'éléments stables

D'après ce qui précède, le choix des espaces d'éléments finis discrets (V_h, Q_h) est soumis à la vérification de la condition inf-sup discrète (2.4).

Il existe dans la littérature plusieurs choix possible des espaces d'espaces (V_h, Q_h) d'éléments finis vitesse/pression stables pour le problème de Stokes. Nous allons en présenté qualques uns. Pour ce qui est de la vérification de la condition inf-sup, le lecteur peut se référer au mémoire [12].

2.3.1 Mini-élément :$\mathcal{P}_1^{bulle}/\mathbb{P}_1$

Cet élément, introduit dans [18], soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$ et $T \in \mathcal{T}_h$.
Considérons l'espace polynomial suivant

$$\mathcal{P}_1^{bulle}(T) = [P_1 \oplus \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}]^2.$$

Le Mini-élément consiste à approximer la vitesse par des fonctions **continues** $\mathcal{P}_1^{bulle}$ par morceaux et la pression par des fonctions **continues** $\mathbb{P}_1$ par morceaux, i.e.

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_{|T} \in \mathcal{P}_1^{bulle} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$
$$Q_h = \{q_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega) : q_{|T} \in \mathbb{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

Proposition 2.3.1. ***(Stabilité)*** *Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de $\overline{\Omega}$, alors le couple (V_h, Q_h) est compatible (i.e : la condition inf-sup discrète est satisfaite).*

Théorème 2.3. *Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de $\overline{\Omega}$, la solution du problème de Stokes satisfait $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$. Alors, on a l'erreur de convergence suivante :*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C_1 h(|\mathbf{u}|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega}), \tag{2.8}$$

Si de plus Ω est convexe, on aura :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^2(|\mathbf{u}|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega}). \tag{2.9}$$

Les constante C_1, C_2 étant indépendantes de h.

2.3.2 Eléments de Taylor-Hood : $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$

L'élément de **Taylor-Hood** c'est le premier membre de la grande famille "**Taylor-Hood** $\mathbb{P}_{l+1} - \mathbb{P}_l$"[11]. Les vitesses discrètes sont **continues** $\mathbb{P}_2$ par morceaux et les pressions discrètes sont **continues** $\mathbb{P}_1$ par morceaux. Les espaces discrets sont donc définis par :

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_{h|T} \in \mathbb{P}_2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$
$$Q_h = \{q_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega) : q_{h|T} \in \mathbb{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Proposition 2.3.2. ***(Stabilité)*** *Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de $\overline{\Omega}$ contenant au moins trois triangles. Alors, le couple (V_h, Q_h) est compatible.*

Théorème 2.4. *Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de $\overline{\Omega}$ contenant au moins trois triangles et que la solution du problème de Stokes satisfait $(\mathbf{u}, p) \in H^{m+1}(\Omega)^2 \times H^m(\Omega)$, $m = 1, 2$. Alors, on a l'erreur de convergence suivante :*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C_1 h^m (|\mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + \|p\|_{m,\Omega}), \tag{2.10}$$

si de plus Ω est convexe, on aura :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^{m+1} (|\mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + \|p\|_{m,\Omega}). \tag{2.11}$$

Les constante C_1, C_2 étant indépendantes de h.

2.3.3 Elément de Crouzeix-Raviart :$\mathcal{P}_2^{bulle}/\mathbb{P}_1$

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$ par des triangles et $T \in \mathcal{T}_h$. Considérons l'espace polynomial suivent

$$\mathcal{P}_2^{bulle}(T) = [P_2 + \lambda_1^T \lambda_2^T \lambda_3^T P_0]^2.$$

L'élément de Crouzeix-Raviart consiste à approximer la vitesse par des fonctions **continues** $\mathcal{P}_2^{bulle}$ par morceaux et la pression par des fonctions **discontinues** $\mathbb{P}_1$ par morceaux, i.e.

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_{h|T} \in \mathcal{P}_2^{bulle} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$
$$Q_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega) : q_{h|T} \in \mathbb{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Les degrés de libertés relatives à la vitesse sont choisis comme suit :

$$\begin{cases} \text{les valeurs de } \mathbf{v} \text{ sur le treillis principal } T_2(T) \\ \text{et l'intégrale } \int\limits_T \mathrm{v}\, dx. \end{cases} \tag{2.12}$$

Proposition 2.3.3. ***(Stabilité)*** *Si la triangulation $\mathcal{T}_h$ est régulière, alors le couple (V_h, Q_h) est compatible.*

Théorème 2.5. *Supposons la triangulation $\mathcal{T}_h$ est régulière et que la solution du problème de Stokes satisfait $(\mathbf{u}, p) \in H^{k+1}(\Omega)^2 \times H^k(\Omega)$, $k = 1, 2$. Alors, on a l'erreur de convergence suivante :*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C_1 h^k (|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \|p\|_{k,\Omega}), \tag{2.13}$$

De plus, si Ω est convexe, on aura :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^{k+1} (|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \|p\|_{k,\Omega}). \tag{2.14}$$

Les constante C_1, C_2 étant indépendantes de h.

2.4 Forme algébrique

Dans cette section, nous étudions la structure du système algébrique associé à l'approximation da Galerkin pour le problème de Stokes (2.2). Soient M et N les dimensions de V_h et Q_h respectivement.

Le système linéaire associé à (2.2) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} A\mathbf{U} + B^T P = \mathbf{F}, \\ B\mathbf{U} = 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

où $A \in \mathbb{R}^{M \times M}$ et $B \in \mathbb{R}^{M \times N}$ sont les matrices associées aux formes bilinéaires $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$ respectivement. Le vecteur $\mathbf{F}$ est lui associé à la forme linéaire $(\mathbf{f}, \cdot)$ sont données par :

$$A = a(\cdot,\cdot), \quad B = b(\cdot,\cdot)$$

et

$$\mathbf{F} = (\mathbf{f}, \cdot).$$

U et **P** sont les inconnus.

Le système précédent s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Cette matrice est inversible **ssi** la condition inf-sup est vérifiée.

Chapitre 3

Technique de stabilisation des schémas d'éléments finis relatifs au problème de Stokes

Dans ce chapitre, on s'intéressera à la méthode de stabilisation du problème de Stokes. L'idée est de rajouter des termes dépendants du pas de discrétisation h dans le but de contourner la vérification de la condition inf-sup discrète. On présentera trois techniques de stabilisation pour le problème de Stokes initiées par Hughes-Franca & Balestra [19], Hughes & Franca [20] et Douglas & Wang [15].

3.1 Préliminaires

Dans la suite, on aura besoin de définir une norme discrète relative à la pression, aussi on aura besoin d'écritures appropriées pour les inégalités inverses.

Définition 3.1.1. *Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine Ω. Pour toute pression discrète $p \in Q_h$, où Q_h est l'espace d'approximation par une méthode d'éléments finis de Q, on définit la norme discète suivante*

$$|p|_h := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\nabla p\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1}$$

Lemme 3.1.1. ***(Les inégalités inverses)***

Si $\mathcal{T}_h$ est régulière. Il existe C, C_I deux constantes strictement positives indépendantes de h telle *que :*

$$|p|_h \leq C\|p\|_{0,\Omega} \quad \forall p \in Q_h, \tag{3.2}$$

$$C_I \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2 \|\Delta \mathbf{u}_h\|_{0,T}^2 \leq |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{u}_h \in V_h. \tag{3.3}$$

Définition 3.1.2. *On dit que la forme bilinéaire $L_h(\cdot,\cdot)$ est faiblement coercive s'il existe une constante positive C telle que :*

$$\sup_{\mathbf{v}\in V, \mathbf{v}\neq 0} \frac{L_h(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_V} \geq C\|\mathbf{u}\|_V \quad \forall \mathbf{u} \in V. \tag{3.4}$$

3.2 Méthodes de stabilisation

Avant de commencer, nous rappellerons au lecteur que les espaces d'approximation par une méthode d'éléments finis sont définis par

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)]^N : \mathrm{v}_{|T} \in \mathcal{P}_k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}, k \geq 1,$$

en ce qui concerne les vitesses et ce lui de la pression

$$Q_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega) : q_{|T} \in \mathcal{P}_l(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}, l \geq 0,$$

dans le cas d'une approximation discontinue où bien dans le cas d'une approximation continue par

$$Q_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : q_{|T} \in \mathcal{P}_l(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}, l \geq 1.$$

On rappellera aussi l'écriture du problème de Stokes discret

$$\begin{cases} \text{Trouver}(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \quad \text{tel que} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{3.5}$$

Dans la suite, pour une présentation claire, on se contentera que du cas d'une **approximation continue de la pression**.

3.2.1 1986 : La méthode de Hughes-Franca-Balestra

L'idée de cette méthode est de modifier le système de (3.5) en rajoutant des termes dépendants de h à la deuxième équation du système (équation relative à la condition d'incompressibilité). Hughes, Franca et Balestra [19] donnèrent le système de Stokes stabilisé suivant :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ -b(\mathbf{u}_h, q_h) + \delta \sum\limits_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h, \nabla q_h)_{0,T} = \delta \sum\limits_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(\mathbf{f}, \nabla q_h)_{0,T} \quad \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{3.6}$$

Le problème précédant s'écrit de la manière équivalente suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ L_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = G_h(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h, \end{cases} \tag{3.7}$$

où

$$L_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) := a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) - b(\mathbf{u}_h, q_h) + \delta \sum\limits_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h, \nabla q_h)_{0,T},$$

et

$$G_h(\mathbf{v}_h, q_h) := (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) + \delta \sum\limits_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(\mathbf{f}, \nabla q_h)_{0,T}.$$

L'écriture matricielle de (3.6) est donnée par :

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ -(B+C) & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_1 \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

où A et B sont définies dans la section 2.4 et les matrices $C \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$ associées aux formes bilinéaires $C(\cdot, \cdot)$ et $K(\cdot, \cdot)$ respectivement et le vecteur $\mathbf{F}_1$ qui est lui associé à la forme linéaire $(\mathbf{f}, \cdot)$ sont données par :

$$C(\mathbf{u}_h, q_h) = \delta \sum\limits_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(\Delta \mathbf{u}_h, \nabla q_h)_{0,T}, \qquad K(p_h, q_h) = \delta \sum\limits_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(\nabla p_h, \nabla q_h)_{0,T}$$

et

$$\mathbf{F}_1(q_h) = \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(\mathbf{f}, \nabla q_h)_{0,T}.$$

On notera que la formulation précédente est **consistante**, c'est à dire que la solution continue du problème de Stokes vérifie le problème discret (3.6). Aussi, il est clair que le système matriciel résultant **n'est pas symétrique**.

Nous allons montrer que la forme bilinéaire $L_h(\cdot,\cdot)$ est coercive sur les espaces d'approximations par éléments finie $V_h \times Q_h$ par rapport à une norme discrète que nous allons définir. Ce qui démontrera avec la continuité de $L_h(\cdot,\cdot)$ que le problème possédera une solution unique et donc que le système matricielle (3.8) est inversible.

Théorème 3.1. *La forme bilinéaire $L_h(\cdot,\cdot)$ est coercive sur l'espace $V_h \times Q_h$ par rapport la norme :*

$$[|||(\mathbf{u},p)|||]^2 = \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2 \|\nabla p\|_{0,T}^2. \tag{3.9}$$

Preuve. On a $\forall(\mathbf{u},p) \in V_h \times Q_h$:
En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\begin{aligned}
L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{u},p) &= a(\mathbf{u},\mathbf{u}) + \delta \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\left((-\Delta\mathbf{u}+\nabla p),\nabla p\right)_{0,T} \\
&= |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \delta \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\left((-\Delta\mathbf{u},\nabla p)+(\nabla p,\nabla p)\right)_{0,T} \\
&\geq |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 - \delta \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2 \|\Delta\mathbf{u}\|_{0,T}\|\nabla p\|_{0,T} + \delta \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|_{0,T}^2.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de la moyenne géométrique-arithmétique :

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

On pose :

$$a = \|\Delta\mathbf{u}\|_{0,T} \;\; et \;\; b = \|\nabla p\|_{0,T}.$$

On trouve :

$$-\delta \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\Delta\mathbf{u}\|_{0,T}\|\nabla p\|_{0,T} \geq \frac{-\delta}{2} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\|\Delta\mathbf{u}\|_{0,T}^2 + \|\nabla p\|_{0,T}^2).$$

Par suite

$$L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{u},p) \geq |\mathbf{u}|^2_{1,\Omega} + \delta \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|^2_{0,T} - \frac{\delta}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\|\Delta\mathbf{u}\|^2_{0,T} + \|\nabla p\|^2_{0,T}).$$

D'après l'inégalité inverse :

$$\begin{aligned} L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{u},p) &\geq |\mathbf{u}|^2_{1,\Omega} + \delta \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|^2_{0,T} - \frac{\delta}{2}C_I^{-1}|\mathbf{u}|^2_{0,\Omega} - \frac{\delta}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|^2_{0,T} \\ &\geq [1-\frac{\delta}{2}C_I^{-1}]|\mathbf{u}|^2_{0,\Omega} + \frac{\delta}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|^2_{0,T}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré :

$$\begin{aligned} L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{u},p) &\geq \frac{1}{C_p^2}\left[1-\frac{\delta}{2}C_I^{-1}\right]\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + \frac{\delta}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|^2_{0,T} \\ &\geq \min\left(\frac{1}{C_p^2}\left[1-\frac{\delta}{2}C_I^{-1}\right], \frac{\delta}{2}\right)\left[\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|^2_{0,T}\right]. \end{aligned}$$

En posant :

$$\beta = \min\left(\frac{1}{C_p^2}\left[1-\frac{\delta}{2}C_I^{-1}\right], \frac{\delta}{2}\right).$$

On trouve :

$$L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{u},p) \geq \beta[\|(\mathbf{u},p)\|]^2.$$

La constante β est positive si on prend $0 \leq \delta \leq 2C_I$ et la forme bilinéaire $L_h(\cdot,\cdot)$ sera coercive.

□

3.2.2 1987 : La méthode de Hughes-Franca

L'idée a été de modifier les deux équations du système de Stokes (3.5) en rajoutant des termes dépendants du maillage. La motivation de Hughes et Franca était d'obtenir, contrairement à la méthode précédente, une symétrie du système de Stokes stabilisé. La formulation construite était la suivante :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) - \delta \sum\limits_{T\in\tau_h} h_T^2(-\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h, -\Delta\mathbf{v}_h)_{0,T} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) - \delta \sum\limits_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\mathbf{f}, -\Delta\mathbf{v}_h)_{0,T} \quad \forall\mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) - \delta \sum\limits_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h, \nabla q_h)_{0,T} = -\delta \sum\limits_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\mathbf{f}, \nabla q_h)_{0,T} \quad \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{3.10}$$

Le problème précédant s'écrit de la manière équivalente suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ L_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = G_h(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall(\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h, \end{cases} \tag{3.11}$$

où

$L_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) := a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + b(\mathbf{u}_h, q_h) - \delta \sum\limits_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h, -\Delta\mathbf{v}_h + \nabla q_h)_{0,T}$,

et

$G_h(\mathbf{v}_h, q_h) := (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) - \delta \sum\limits_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\mathbf{f}, -\Delta\mathbf{v}_h + \nabla q_h)_{0,T}$.

L'écriture matricielle de (3.11) est donnée par :

$$\begin{bmatrix} A - D & (B + C)^T \\ B + C & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{F}_2 \\ -\mathbf{F}_1 \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

où le vecteur $\mathbf{F}_2$ et la matrice $D \in \mathbb{R}^{N\times N}$ associée à la forme bilinéaire $D(\cdot, \cdot)$ sont définis comme suit :

$D(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \delta \sum\limits_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\Delta\mathbf{u}_h, \Delta\mathbf{v}_h)_{0,T}$,

et

$\mathbf{F}_2(\mathbf{v}_h) = \delta \sum\limits_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\mathbf{f}, -\Delta\mathbf{v}_h)_{0,T}$.

Le problème variationnel approché (3.11) est **consistant** et le système matriciel (3.12) est **symétrique**, mais **n'est pas défini positif**.

Pour montrer l'existence et l'unicité de solution du problème (3.11), on démontre que la forme bilinéaire $L_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h)$ est continue et qu'elle est faiblement coercive sur les espaces d'approximations par éléments finie $V_h \times Q_h$. On démontre d'abord la continuité.

Théorème 3.2. ***(Continuité)*** *Il existe une constante positive C pour tout $(\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q) \in V_h \times Q_h$*

on a :

$$L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q) \le C(\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega}+\|p\|^2_{0,\Omega})^{\frac{1}{2}}(\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega}+\|q\|^2_{0,\Omega})^{\frac{1}{2}}. \tag{3.13}$$

Preuve. On a :

$L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q) = a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) + b(\mathbf{u},q) - \delta \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta\mathbf{u}+\nabla p, -\Delta\mathbf{v}+\nabla q)_{0,T}$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et les deux inégalités inverses on obtient :

$$\begin{aligned}
|L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q)| &= \left| \int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}dx - \int_\Omega p\cdot div\mathbf{v}dx - \int_\Omega q\cdot div\mathbf{u}dx - \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta\mathbf{u}+\nabla p,-\Delta\mathbf{v}+\nabla q)_{0,T}\right| \\
&\le |\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega} + \sqrt{N}\|p\|_{0,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega} + \sqrt{N}\|q\|_{0,\Omega}|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{v})_{0,T} \\
&\quad + \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\Delta\mathbf{u},\nabla q)_{0,T} + \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\nabla p,\Delta\mathbf{v})_{0,T} + \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(-\nabla p,\nabla q)_{0,T} \\
&\le |\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega} + \sqrt{N}\|p\|_{0,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega} + \sqrt{N}\|q\|_{0,\Omega}|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\Delta\mathbf{u}\|_{0,T}\|\Delta\mathbf{v}\|_{0,T} \\
&\quad + \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\Delta\mathbf{u}\|_{0,T}\|\nabla q\|_{0,T} + \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|_{0,T}\|\Delta\mathbf{v}\|_{0,T} + \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|_{0,T}\|\nabla q\|_{0,T} \\
&\le C\left(\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega}+\|p\|^2_{0,\Omega}+\delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\Delta\mathbf{u}\|^2_{0,T}+\delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|^2_{0,T}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega}+\|q\|^2_{0,\Omega}+\delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\Delta\mathbf{v}\|^2_{0,T}+\delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla q\|^2_{0,T}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

D'après (3.1) on a :

$$\begin{aligned}
L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q) &\le C\left(\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega}+\|p\|^2_{0,\Omega}+\delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\Delta\mathbf{u}\|^2_{0,T}+|p|_h^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega}+\|q\|^2_{0,\Omega}+\delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\Delta\mathbf{v}\|^2_{0,T}+|q|_h^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

On appliquant (3.2) et(3.3) on trouve :

$$L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q) \le C\left(\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega}+\|p\|^2_{0,\Omega}+\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega}+\|p\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega}+\|q\|^2_{0,\Omega}+\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega}+\|q\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc :

$$L_h(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) \leq C \left(|\mathbf{u}|^2_{1,\Omega} + \|p\|^2_{0,\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \left(|\mathbf{v}|^2_{1,\Omega} + \|q\|^2_{0,\Omega} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Afin de montrer la coercivité faible de $L_h(\cdot,\cdot)$, on suivera les étapes développées dans ([16] page 7). Nous avons essayé, dans la mesure du possible, de détailler les démonstrations qui sont assez ardues.

On aura besoin du résultat suivant :

Lemme 3.2.1. *Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée*

1. $k \geq N$,
2. $Q_h \subset C^0(\Omega)$,

où N est la dimension de l'espace et k le degrés d'interpolation de la MEF des vitesses. Alors il existe deux constantes C_1, C_2 indépendantes de h telles que :

$$\sup_{\mathbf{v} \in V_h} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}, \mathrm{p})}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \geq C_1 \|p\|_{0,\Omega} - C_2 |p|_h \quad \forall p \in Q_h.$$

Preuve. **Premièr cas** : $(k \geq N)$

En notant pour Π l'opérateur de projection de $L^2(\Omega)$ vers l'espace des fonctions constantes par morceaux :

$$\Pi : L^2 \longrightarrow \{q \in L^2(\Omega)/q_{|T} = Cte\},$$

définie par :

$$\Pi_{q_{|T}} = \frac{1}{mes(T)} \int_T q \, dx, \quad T \in \mathcal{T}_h, \quad q \in Q_h.$$

D'après [14] et [18] le couple $(V_h, \Pi Q_h)$ est stable, i.e. $\exists C_1, \forall p \in Q_h$:

$$\sup_{0 \neq \mathbf{w} \in V_h} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{w}, \Pi p)}{\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}} \geq C_1 \|\Pi p\|_{0,\Omega}.$$

En prenant : $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}}$, $\quad 0 \neq \mathbf{w} \in V_h$, on a $\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} = 1$ et on trouve l'estimation suivante :

$$\exists \mathbf{v} \in V_h : \quad (\nabla \cdot \mathbf{v}, \Pi p) \geq C_1 \|\Pi p\|_{0,\Omega}, \quad \forall p \in Q_h. \tag{3.14}$$

D'après l'orthogonalité de Πp et $(I-\Pi)p$ et l'estimation d'interpolation :

$$\|(I-\Pi)p\|_{0,T} \le C_3 h_T \|\nabla p\|_{0,T}, \quad T \in \mathcal{T}_h.$$

On trouve :

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot\mathbf{v}, p) &= (\nabla\cdot\mathbf{v}, \Pi p) + (\nabla\cdot\mathbf{v}, (I-\Pi)p)\\ &\ge C_1\|\Pi p\|_{0,\Omega} - \|\mathbf{v}\|\|(I-\Pi)p\|_{0,\Omega}\\ &\ge C_1\|\Pi p\|_{0,\Omega} - \|(I-\Pi)p\|_{0,\Omega}\\ &= C_1\|p\|_{0,\Omega} - (1+C_1)\|(I-\Pi)p\|_{0,\Omega}\\ &\ge C_1\|p\|_{0,\Omega} - (1+C_1)C_3(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|_{0,T}^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Donc :

$$(\nabla\cdot\mathbf{v}, p) \ge C_1\|p\|_{0,\Omega} - C_2|p|_h.$$

Deuxièmes cas : $Q_h \subset C^0(\Omega)$
On prend $p = \overline{p} + \tilde{p}$ telle que :

$$\overline{p} = \frac{1}{mes(\Omega)}\int_\Omega p\,dx.$$

$\tilde{p} \in L_0^2(\Omega)$ car $\int_\Omega \tilde{p}\,dx = \int_\Omega (p-\overline{p})dx = 0.$
D'après la condition inf-sup continue, comme $\tilde{p} \in L_0^2(\Omega)$, il existe $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^N$ tel que :

$$(\nabla\cdot\mathbf{w}, p) = (\nabla\cdot\mathbf{w}, \tilde{p}) \ge C_3\|\tilde{p}\|_{0,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}. \tag{3.15}$$

Aussi, il existe $\tilde{\mathbf{w}} \in V_h \cap H_0^1(\Omega)^N$ un interpolant de $\mathbf{w}$ qui vérifie les inégalités suivantes (c.f [4], [13] et [18])

$$\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{-2}\|\mathbf{w}-\tilde{\mathbf{w}}\|_{0,T}^2 + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_K^{-1}\int_{\partial T}|\mathbf{w}-\tilde{\mathbf{w}}|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \le C_4\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}, \tag{3.16}$$

et

$$\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega} \le C_5\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \tag{3.17}$$

En usant de la formule de Green sur chaque T$\in$ $\mathcal{T}_h$ (et par le fait que p est continue) et l' estimation (3.15) on trouve :

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}, p) &= (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{p}) \\
&= (\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}), \tilde{p}) + (\nabla \cdot \mathbf{w}, \tilde{p}) \\
&\geq (\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}), \tilde{p}) + C_3 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\tilde{p}\|_{0,\Omega} \\
&= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}, \nabla \tilde{p}) + C_3 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\tilde{p}\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalitè de Cauchy-Schwartz et l'estimation (3.16) on trouve :

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}, p) &\geq - \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\nabla \tilde{p}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C_3 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\tilde{p}\|_{0,\Omega} \\
&\geq \left\{ -C_4 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\nabla \tilde{p}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C_3 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\tilde{p}\|_{0,\Omega} \right\}.
\end{aligned}$$

D'après l'estimation (3.17) on trouve :

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}, p) &\geq \left\{ -\frac{C_4}{C_5} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\nabla \tilde{p}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C_3}{C_5} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega} \|\tilde{p}\|_{0,\Omega} \right\} \\
&\geq \left\{ -C_6 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\nabla \tilde{p}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C_7 \|\tilde{p}\|_{0,\Omega} \right\} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega} \\
&\geq \{ -C_6 |p|_h + C_7 \|\tilde{p}\|_{0,\Omega} \} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}, p)}{\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega}} \geq C_7 \|\tilde{p}\|_{0,\Omega} - C_6 |p|_h. \tag{3.18}$$

D'autre part, il existe $\mathbf{z} \in V_h$ tel que :

$$\frac{(\nabla \cdot \mathbf{z}, \bar{p})}{\|\mathbf{z}\|_{1,\Omega}} \geq C_9 \|\bar{p}\|_{0,\Omega}, \tag{3.19}$$

($\overline{p}$ étant constante sur tout Ω). On pose alors :

$$\mathbf{v} = \frac{\tilde{\mathbf{w}}}{\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega}} + \delta \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|_{1,\Omega}} \quad \delta > 0,$$

et en utilisant (3.15), (3.18)et(3.19) on obtient :

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{v}, p) &= \frac{(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}, p)}{\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega}} + \delta \frac{(\nabla \cdot \mathbf{z}, p)}{\|\mathbf{z}\|_{1,\Omega}} \\
&= \frac{(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}, p)}{\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega}} + \delta \frac{(\nabla \cdot \mathbf{z}, \overline{p})}{\|\mathbf{z}\|_{1,\Omega}} + \delta \frac{(\nabla \cdot \mathbf{z}, \tilde{p})}{\|\mathbf{z}\|_{1,\Omega}} \\
&\geq C_7 \|\tilde{p}\|_{0,\Omega} - C_6 |p|_h + \delta C_9 \|\overline{p}\|_{0,\Omega} + \delta C_3 \|\tilde{p}\|_{0,\Omega} \\
&\geq C_{10} \|\tilde{p}\|_{0,\Omega} + \delta C_9 \|\overline{p}\|_{0,\Omega} - C_6 |p|_h \\
&\geq C_{11} \|p\|_{0,\Omega} - C_6 |p|_h.
\end{aligned}$$

(Car $\|p\|_{0,\Omega}^2 = \|\overline{p}\|_{0,\Omega}^2 + \|\tilde{p}\|_{0,\Omega}^2$).
Ce qui démontre l'inégalité du lemme 3.2.1 . □

On alors le théorème suivant qui nous donne la faible coercivité de $L_h(\cdot, \cdot)$.

Théorème 3.3. *supposons que l'une de deux conditions est satisfaite :*

1. *$k \geq N$,*
2. *$Q_h \subset C^0(\Omega)$,*

et que $0 \leq \delta \leq C_I$. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que pour tout $(\mathbf{u}, p) \in V_h \times Q_h$ on a :

$$\sup_{(\mathbf{v},q) \in V_h \times Q_h} \frac{L_h(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q)}{(\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}} \geq C(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.20}$$

Preuve. Pour démontrer (3.20) il suffit de trouver deux constantes $C', C'' > 0$ pour lesquelles : $\forall (\mathbf{u}, p) \in V_h \times Q_h, \exists (\mathbf{v}, q) \in V_h \times Q_h$ telles que :

$$L_h(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) \geq C'(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2), \tag{3.21}$$

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2 \leq C''(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2). \tag{3.22}$$

Premièrement : On va montrer (3.21). On rappelle que :

$$
\begin{aligned}
L_h(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + b(\mathbf{u}, q) - \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta \mathbf{u} + \nabla p, -\Delta \mathbf{v} + \nabla q)_{0,T} \\
L_h(\mathbf{u}, p; \mathbf{u}, -p) &= |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 - \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta \mathbf{u} + \nabla p, -\Delta \mathbf{u} - \nabla p)_{0,T} \\
&= |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 - \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta \mathbf{u}, -\Delta \mathbf{u})_{0,T} - \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta \mathbf{u}, -\nabla p)_{0,T} \\
&\quad - \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(\nabla p, -\Delta \mathbf{u})_{0,T} - \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(\nabla p, -\nabla p)_{0,T} \\
&= |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 - \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2\|\Delta \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|_{0,T}^2.
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité inverse on trouve :

$$
\begin{aligned}
L_h(\mathbf{u}, p; \mathbf{u}, -p) &\geq |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 - \delta C_I^{-1}|\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + |p|_h^2 \\
&\geq (1 - \delta C_I^{-1})|\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + |p|_h^2 \\
&\geq C_3\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + |p|_h^2.
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

D'apres le lemme 3.2.1, il existe $\mathbf{w} \in V_h$, on pose $\mathbf{w} = \frac{\|p\|_{0,\Omega}}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}}\mathbf{v}$ alors :

$$
\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} = \|p\|_{0,\Omega}.
$$

et

$$
(\nabla.\mathbf{w}, p) \geq C_1\|p\|_{0,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} - C_2|p|_h\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \quad \forall p \in Q_h,
$$

D'après la bilinéarité de $L_h(\cdot,\cdot)$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned}
L_h(\mathbf{u},p;\text{-}\mathbf{w},0) &= L_h(\mathbf{u},0;\text{-}\mathbf{w},0) + L_h(0,p;\text{-}\mathbf{w},0) \\
&= a(\mathbf{u},\text{-}\mathbf{w}) - \delta \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{w})_{0,T} + (\nabla\cdot\mathbf{w},p) - \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\nabla p,\Delta\mathbf{w})_{0,T} \\
&\geq -\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} - \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\Delta\mathbf{u}\|_{0,T}\|\Delta\mathbf{w}\|_{0,T} + (\nabla\cdot\mathbf{w},p) - \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\nabla p,\Delta\mathbf{w})_{0,T} \\
&\geq -C_4\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + (\nabla\cdot\mathbf{w},p) - \delta\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\nabla p,\Delta\mathbf{w})_{0,T} \\
&\geq -C_4\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + (\nabla\cdot\mathbf{w},p) - \delta\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\nabla p\|_{0,T}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|\Delta\mathbf{w}\|_{0,T}^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.2.1 et l'inégalité inverse on a :

$$\begin{aligned}
L_h(\mathbf{u},p;\text{-}\mathbf{w},0) &\geq -C_4\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + C_1\|p\|_{0,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} - C_2|p|_h\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} - C_5|p|_h\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \\
&= -C_4\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\|p\|_{0,\Omega} + C_1\|p\|_{0,\Omega}^2 - (C_2+C_5)|p|_h\|p\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de la moyenne géométrique-arithmétique :

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\gamma} + \gamma b^2\right) \qquad \forall a,b,\gamma > 0,$$

pour tout $\gamma_1,\gamma_2 > 0$:

$$\begin{aligned}
L_h(\mathbf{u},p;\text{-}\mathbf{w},0) &\geq \frac{-C_4}{2}\left(\frac{\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2}{\gamma_1} + \gamma_1\|p\|_{0,\Omega}^2\right) + C_1\|p\|_{0,\Omega}^2 - \frac{(C_2+C_5)}{2}\left(\frac{|p|_h^2}{\gamma_2} + \gamma_2\|p\|_{0,\Omega}^2\right) \\
&\geq \frac{-C_4}{2\gamma_1}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 - \frac{C_4\gamma_1}{2}\|p\|_{0,\Omega}^2 + C_1\|p\|_{0,\Omega}^2 - \frac{(C_2+C_5)}{2\gamma_2}|p|_h^2 - \frac{(C_2+C_5)\gamma_2}{2}\|p\|_{0,\Omega}^2 \\
&\geq \frac{-C_4}{2\gamma_1}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \left(C_1 - \frac{C_4\gamma_1}{2} - \frac{(C_2+C_5)\gamma_2}{2}\right)\|p\|_{0,\Omega}^2 - \frac{(C_2+C_5)}{2\gamma_2}|p|_h^2 \\
&\geq -C_6\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + C_7\|p\|_{0,\Omega}^2 - C_8|p|_h^2. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

($C_7 > 0$ si γ_1 et γ_2 sont assez petit).
On pose alors $(\mathbf{v},q) = (\mathbf{u}-\sigma\mathbf{w},-p)$ avec $\sigma > 0$ on a :

$$L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q) = L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{u}-\sigma\mathbf{w},-p) = L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{u},-p) + \sigma L_h(\mathbf{u},p;\text{-}\mathbf{w},0),$$

car la forme $L_h(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire .

Pour conclure, les inégalités (3.23) et (3.24) assurent que :

$$\begin{aligned} L_h(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q) &\geq C_3\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + |p|^2_h - \sigma C_6\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + \sigma C_7\|p\|^2_{0,\Omega} - \sigma C_8|p|^2_h \\ &\geq (C_3 - \sigma C_6)\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + \sigma C_7\|p\|^2_{0,\Omega} + (1-\sigma C_8)|p|^2_h \\ &\geq C'(\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + \|p\|^2_{0,\Omega}). \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $0 < \sigma < min\{C_3C_6^{-1}, C_8^{-1}\}$ pour que $C' > 0$, donc l'inégalité (3.21) est satisfait.

Deuxièmement : on va montrer l'inégalité (3.22).

Comme dans la première étape on prendra : $(\mathbf{v},q) = (\mathbf{u}-\sigma\mathbf{w}, -p)$ avec $\sigma > 0$ et $\|\mathbf{w}\|^2_{1,\Omega} = \|p\|^2_{0,\Omega}$.

On trouve :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega} + \|q\|^2_{0,\Omega} &\leq 2\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + 2\sigma^2\|\mathbf{w}\|^2_{1,\Omega} + \|p\|^2_{0,\Omega} \\ &\leq 2\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + 2\sigma^2\|p\|^2_{0,\Omega} + \|p\|^2_{0,\Omega} \\ &\leq 2\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + (2+\sigma^2)\|p\|^2_{0,\Omega} \\ &\leq C''(\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + \|p\|^2_{0,\Omega}). \end{aligned}$$

Donc l'inégalité (3.22) est satisfaite.

En combinant les deux inégalités (3.21) et (3.22), on obtient la faible coercivité de $L_h(\cdot,\cdot)$. □

3.2.3 1989 : La méthode de Douglas-Wang

L'idée a été de modifier la formulation variationelle de la méthode du Hughes-Franca [20] afin d'obtenir la coercivité de la forme bilinéaire $L_h(\cdot,\cdot)$ mais en perdant la symétrie. La formulation proposée était la suivante :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h,p_h) + \delta \sum\limits_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h, -\Delta\mathbf{v}_h)_{0,T} = (\mathbf{f},\mathbf{v}_h) + \delta \sum\limits_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\mathbf{f}, -\Delta\mathbf{v}_h)_{0,T} \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ -b(\mathbf{u}_h,q_h) + \delta \sum\limits_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h, \nabla q_h)_{0,T} = \delta \sum\limits_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2(\mathbf{f},\nabla q_h)_{0,T} \quad \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{3.25}$$

Le problème précédant s'écrit de la manière équivalente suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ L_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = G_h(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall(\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h, \end{cases} \tag{3.26}$$

où

$L_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) := a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) - b(\mathbf{u}_h, q_h) + \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h, -\Delta\mathbf{v}_h + \nabla q_h)_{0,T}$,

et

$G_h(\mathbf{v}_h, q_h) := (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) + \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(\mathbf{f}, -\Delta\mathbf{v}_h + \nabla q_h)_{0,T}$.

Avec les mêmes notations de la méthode de Hughes-Franca, le système matricielle de (3.26) est donnée par :

$$\begin{bmatrix} A + D & (B - C)^T \\ -(B + C) & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_1 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Le système (3.27) est **définie positif** comme nous allons lavoir, mais **n'est pas symétrique**. Nous allons montrer que la forme bilinéaire $L_h(\cdot, \cdot)$ est coercive sur les espaces d'approximations par éléments finie $V_h \times Q_h$ par rapport à une norme discrète. Ce qui permettra de assurer l'existence et l'unicité de la solution.

Théorème 3.4. *[15] La forme bilinéaire $L_h(\cdot, \cdot)$ est coercive sur l'espace $V_h \times Q_h$ par rapport la norme :*

$$[\|(\mathbf{u}, p)\|]^2 = \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \| - \Delta\mathbf{u} + \nabla p\|_{0,T}^2. \tag{3.28}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} L_h(\mathbf{u}, p; \mathbf{u}, p) &= a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(-\Delta\mathbf{u} + \nabla p, -\Delta\mathbf{u} + \nabla p)_{0,T} \\ &= a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \| - \Delta\mathbf{u} + \nabla p\|_{0,T}^2 \\ &= [\|(\mathbf{u}, p)\|]^2. \end{aligned}$$

Alors la forme bilinéaire $L_h(\cdot, \cdot)$ est coercive et le problème (3.25) admet une solution unique. □

Conclusion

La technique de stabilisation consiste à modifier le problème discret de Stokes afin de contourner la vérification de la condition inf-sup discrète. Nous avons vues trois techniques où :
la première donne une forme bilinéaire qui n'est pas symétrique mais qui est coercive, la deuxième donne une forme bilinéaire symétrique et faiblement coercive et la troisième technique donne une forme bilinéaire qui n'est pas symétrique mais qui est coercive.
Nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution discrète pour chacune des trois techniques.

Bibliographie

[1] **R. A. Adams**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, San Francisco, London, (1975).

[2] **G. Allaire**, *Analyse Numérique et Optimisation*, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, (2006).

[3] **N. Arada**, *Méthode des éléments finis, Cours master EDP et applications*, Université de Jijel, (2021).

[4] **I. Babuska, J. Osborn and J. Pitkaranta**, *Analysis of mixed methods using mesh dependent norms.* Math, N° 35, pp.1039-1062, (1980).

[5] **T. Barth, P. Bochev, M. Gunzburger and J. Shadid**, *A toxonomy of consistently stabilized finite element methods for the Stokes problem*, (2004).

[6] **C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti**, *Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, Mathématiques et Applications, N° 45, Springer-Verlag, Paris, (2004).

[7] **F. Brezzi and J. Douglas**, *Stabilized Mixed Methods for the Stokes Problem*, Numerische Mathematik, N° 53, 225-235, (1988).

[8] **F. Brezzi and J. Pitkaranta**, *On the stabilization of finite element approximations for the Stokes problem*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, N° 10, 11-19, (1984).

[9] **F. Brezzi , M. Fortin**, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer-Verlag, (1991).

[10] **D. Boffi**, *Stability of higher order triangular Hood-Taylor elements for the stationary Stokes equations*, Mathematical models and methods in applied science, Vol. 4, N°.2. pp.223-235, (1994).

[11] **D. Boffi, F. Brezzi, M.Fortin**, *Mixed finite element methods and applications*, Springer-Verlag, Berlin, (2013).

[12] **O. Boussoufa**, *Etude comparative des différents schèmas numériques pour le problème de Stokes*, Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme de master, Université de Jijel, (2020).

[13] **P. Clement**, *Approximation by finite elements using local regularization*, R.A.I.R.O, N° 8, pp.77-84, (1975).

[14] **M. Crozeix and P.A .Raviart**, *Conforming and nonconforming finite element Methods for solving the stationary Stokes equations*, R.A.I.R.O, (1973).

[15] **J. Douglas and J. Wang**, *An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem*, Mathematics of computation, N°52, 186, pp.495-508, (1989).

[16] **L. Franca and R. Stenberg**, *Error analysis of some Galerkin least squares methods for the elasticity equations*, SIAM J.Numer .Anal., N° 28, pp.1680-1697, (1991).

[17] **G. P. GALDI**, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations : Linearized Steady Problems*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Voi. 38, Springer, New York, 2nd edition, (1998).

[18] **V. Girault, P. A. Raviart**, *Finite element method for the Navier-Stokes equation : theory and algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, (1986).

[19] **T.J.R Hughes, L.P Franca and M.Balestra**, *A new Unite element formulation for fluid dynamics : V. Circumventing the Babulka-Brezzi condition : a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations*, Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg. 59, 85-99, (1986).

[20] **T.J.R Hughes, L.P Franca**, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions : symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces*, Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg. 65, 85-96, (1987).

[21] **P. D. Lax and A. N. Milgram**, *Parabolic equations : Contributions to the theory of partial differential equations*, Annals of Mathematics Studies, N°. 33, pages 167–190, Princeton University Press, Princeton, (1954).

[22] **C. Murea**, *Schémas numériques stables pour les fluides, structures et leurs interactions*, Collection Mécaniques Des Fluides, (2017).

[23] **R. Temam**, *Navier-Stokes equation : Theory and numerical analysis*, AMS Chelsea Publishing, Providence, (2001).