République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématique

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Étude d'une inclusion différentielle d'ordre fractionnaire $0 < \alpha < 1$.

Présenté par :

- Mecheckef Samiha

Devant le jury :

Président :	**D. Affane**	MCA.	Université de Jijel
Encadreur :	**F. Selamnia**	MCB.	Université de Jijel
Examinateur :	**M. Benguessoum**	MCB.	Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

Remerciement

Je remercie en premier lieu mes reconnaissance á ***ALLAH*** mon ***DIEU*** tout puissant, de j' avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire, qui m' a permis d' instruire et d'arriver aussi loin dans les études, qui m' a donné courage et patience pour traverser tous les moments difficiles, et qui m' a permis d'achever ce travail.

J'exprime mes profonds remerciements á mon encadreur, Dr. ***F. Selamnia*** pour l'aide qu'elle m' a apportée, pour sa patience et la disponibilité dont elle a fait preuve á mon égard et de son œil critique qui m' a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections de mon mémoire, je la remercions vivement et j'espérer que mes efforts et mes résultats ont été à la mesure de son attente.

Je voudrais aussi remercier les membre du jury Dr. ***D. Affane***, et Dr. ***M. Benguessoum*** qui ont bien voulu accepter de porter leur jugement sur ce modeste travail qui je souhaite à la mesure de leur satisfaction.

Mes remerciements s'étendent aussi à tous mes ***professeurs*** qui m'ont enseigné et qui par leur compétence m'ont soutenu dans la poursuite de mes études et qui ont contribué à ce couronnement.

Enfin, je n'oubliera pas de remercier mes parents, ma familles, mes amis et mes collègues à l'université de Jijel, toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin par leur soutien et leurs encouragements à terminer ce travail.

♣*Samiha*♣

Dédicaces

Je dédie ce travail A :

Maman Houria la femme la plus affectueuse et la plus douce au monde, ma très chère Mère, pour tous son sacrifice, soutien, encouragement et son amour qui ont été la raison de ma réussite.

L'âme de mon père, qui malheureusement n'a pas partagé ma joie avec nous.

Mes Sœurs : Nasima, Madiha, Amira, Aziza et hana.

Mes Frère : Radhwane et Aziz .

Mes nièces : Hadil, Wijdane, Ghofran, Tasnim, Anfal et Hidaya.

Mes neveux : Motaze, Sirage, Marwan, Haytem, wail, Firas et Jawad.

Mes très chères Amies : Sarah, Yousra, Roumaissa.

et tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

J'espère que notre amitié sera éternelle.

♡♠*SAMIHA*♠♡

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les inclusions différentielles sont d'une grande importance car elles modélisent les performances de divers dispositifs mécaniques et électriques ainsi que le comportement des systèmes de contrôle automatique, comme nous voyons que l'incertitude inhérente à la modélisation du système dynamique conduit toujours à des inclusions différentielles en tant qu'outil mathématique correspondant.

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médecine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

Le calcul fractionnaire connait à l'heure actuelle une grande popularité parmi les chercheurs en sciences fondamentales et appliquées. En fait, il étend les opération de dérivation et d'intégration aux ordres non entiers. Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordres entiers à des ordres fractionnaires, permettant le calcul de la dérivée d'ordre α réel ou complexe d'une fonction différentiable.

Le concept des opérateurs d'ordres fractionnaires a été défini aux 19^e siècle par Riemann-Liouville et Leitinkov. Leur but est de prolonger la dérivation ou l'intégration d'ordre fractionnaire en utilisant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers. Il a été utilisé en mécanique de puis les années 1930 et en électrochimie de puis les années 1960. plus tard, plusieurs mathématiciens et physicien sont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire.

Bien que le concept de la dérivation d'ordre fractionnaire ne soit pas nouveau, ces origines remontaient à la fin du 17^e siècle, partant de la réponse de Gottfried Wilhelm. Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée sur la signification de $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$ si $n = \frac{1}{2}$. Son intérêt n'est reconnu que durant les deux dernières décennies du 20^e siècle où de nombreuses applications ont été développées utilisant ce concept.

Le calcul fractionnaire a été intensivement développé de puis la première conférence sur ce domaine en 1974. De puis, il a gagné une popularité et une considération importante dû principale mentaux nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie où il a été remarqué que le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques peut être décrit en utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire qui fournit un excellent instrument pour la description de plusieurs propriétés de matériaux et processus.

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de solutions pour certaines classes de problèmes aux limites pour d' inclusions différentielle d'ordre fractionnaire .

Le contenu de ce mémoire est basé sur les travaux de M. Benchohra et S. Hamani. Notre travail est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre intitulé **"Préliminaires et résultas de base"**, est consacré aux définitions, des notions et quelques théorèmes du point fixe qui seront utilisées dans la suite du travail.

le deuxième chapitre intitulé "**Calcul fractionnaire**", nous présentons les définitions et les propriétés des fonctions spéciales, dérivations fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo, intégration de Riemann-Liouville.
Le troisième chapitre intitulé **Inclusions différentielles d'ordre fractionnaire** $0 < \alpha < 1$", on s'intéresse à l'étude d'existence des solutions du problème pour l'inclusion différentielle d'ordre fractionnaire

$$^{C}D^{\alpha}x(t) \in F(t,x),\ pour\ tout\ t \in I = [0,T],\ 0 < \alpha < 1,$$

avec conditions locales de la forme

$$ax(0) + bx(T) = c,$$

où $^{C}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $F : I \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$, les résultats de ce chapitres ont basés sur les travaux de M. Benchohra.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET RÉSULTAS DE BASE

Dans ce chapitre, nous commençons par la présentation des notations rappelons certaines définitions, propositions et théorèmes dont on aura besoin tout au long de ce mémoire.
Les définitions et résultats de ce chapitre ont été pris de [1], [2], [3], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [17], [19].

1.1 Notations générales

Soient E un espace de Banach, E' son dual topologique, E'' le dual de E', i.e., le bidual de E, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ leur produit de dualité et $\|\cdot\|$ la norme de E.
On note par

- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
- p.p : presque partout.
- $\sigma(E, E')$: la topologie faible sur E.
- $\sigma(E', E)$: la topologie faible* sur E'.
- $B(0, r)$: la boule ouvert de E de centre 0 et de rayon r.

– $\overline{B}_E(0,r)$: la boule fermée de E de centre 0 et de rayon r, $\overline{B}_E$ la boule unité fermée de E.

– I^α : intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.

– D^α : dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.

– ${}^C D^\alpha$: dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α.

– $D^n = (\frac{d}{dt})^n$: dérivée ordinaire par rapport à t d'ordre entier n.

– $[\cdot]$: la partie entière d'un nombre réel.

Soit $I = [0,T],\ T > 0$. On note par

– $C(I,E)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de I dans E, muni de la norme sup, i.e.,

$$\|x(\cdot)\|_\infty = \sup_{t\in I} \|x(t)\|.$$

Si $I = E$, on note $C(E)$.

– $AC(I,E)$ l'espace de Banach des fonctions absolument continues de I dans E.

Si $I = E$, on note $AC(E)$.

– $AC^n(I,E)$ l'espace de Banach des fonctions absolument continues de I dans E, telle que pour $n \geq 2$, on a $x^{(k)} \in C(I,E)$, $k = 1,\cdots,n-1$ et $x^{(n-1)} \in AC(I,E)$

Si $I = E$, on note $AC^1(E)$.

– $L^p(I,E)$ $(p \in [1,+\infty[)$ l'espace quotient de Banach des fonctions $x : I \to E$ mesurables et telles que $\int_I \|x(t)\|^p \, dt < +\infty$, muni de la norme

$$\|x(\cdot)\|_p = \left(\int_I \|x(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $I = E$, on note $L^p(E)$.

– $L^\infty(I,E)$ l'espace quotient de Banach des fonctions $x : I \to E$ essentiellement bornées, muni de la norme

$$\|x(\cdot)\|_{L_\infty} = \inf \Big\{ c \geq 0 : \|x(t)\| \leq c,\ p.p.sur\ I \Big\}.$$

– (2n-1)!!=(2n-1).(2n-3)...(2n-2n-1)

– On note par $\overline{U}$ et la fermeture et la frontière de U respectivement.

$$\mathcal{P}(X) = \{A, A \subseteq X\} \text{ } l'ensemble\ des\ parties\ de\ X.$$

$$P_{cl}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ fermé }\}.$$

$$P_{b}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ borné }\}.$$

$$P_{cp}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ compact }\}.$$

$$P_{cp,cv}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ compact et convex }\}.$$

1.2 Rappels sur les espaces vectoriels normés

Définition 1.2.1. *[14]* ***(Espace topologie).***
Une topologie sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X, i.e., $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, vérifiant les propriétés suivantes

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. *Si $U, V \in \mathcal{T}$, alors $U \cap V \in \mathcal{T}$.*
3. *Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de X appartenant à $\mathcal{T}$, alors $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.*

L'ensemble X muni de la topologie $\mathcal{T}$ est appelés espace topologique.

Définition 1.2.2. *[14]* ***(Espace métrique).***
Une distance (ou métrique) sur un ensemble X est une application

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+$$

possédant, pour tous $x, y, z \in X$, les propriétés suivantes

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. *d(x, y) = d(y, x).*
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

L'ensemble X muni de la distance d est appelé espace métrique.

Définition 1.2.3. *[14]* ***(Espace normé).***
Une application $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ *est appelée une norme si elle vérifie les trois propriétés suivant*

1. $\forall x \in X \; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall x \in X \; \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *(homogénéité).*
3. $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*(inégalité triangulaire).*

L'ensemble X *muni de la norme* $\|\cdot\|$ *est appelé espace normé ou espace vectoriel normé.*

Définition 1.2.4. *[14]****(Espace de Banach).***
On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ *tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduit de la norme.*

Définition 1.2.5. *[14]****(Espace de Hilbert).***
Soit H *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Un produit scalaire sur* H *est une forme hermitienne définie positive sur* H*. Autrement dit, un produit scalaire sur* H *est une application*

$$\langle ., . \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$$

vérifiant, pour tous $x, \; x', \; y \in H$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *les propriétés suivantes*

1. $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ *et* $\langle \lambda x, y \rangle$.
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$.

Le nombre $\langle x, y \rangle$ *est appelé le produit scalaire des* x *et* y*.*
Tout $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $(x, y) \to \langle x, y \rangle$ *est un espace normé pour la norme définie par* $x \to \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ *et naturellement, un tel espace est toujours considéré comme un espace métrique pour la distance correspondante*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Un espace préhilbertien est un couple $(H, \langle ., . \rangle)$*, où* H *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $\langle ., . \rangle$ *est un produit scalaire sur* H*.*
Un espace de Hilbert ou espace hilbertien est un espace préhilbertien qui est aussi de Banach pour la norme associée au produit scalaire.

Définition 1.2.6. *[14] Un ensemble* A *est dite convexe si pour tous* a *et* b *de* A *le segment* $[a, b]$ *est contenu dans* A*, i.e.,*

$$\forall a, b \in A \;\; \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda a + (1 - \lambda) b \in A.$$

1.3 La topologie faible et la topologie faible*

Soient X un ensemble, $(y_i,\ \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espace topologique et pour chaque $i \in I$, soit $\varphi_i : X \to Y_i$ on veut munir X par topologie $\mathcal{T}$ la moins fine (avec minimum d'ouverts) qui rend continues touts les application $(\varphi_i)_{i\in I}$.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des partie de X de la forme

$$\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in F_j}\varphi_i^{-1}(U_i),$$

où U est un ouvert quelconque de Y_i, F_j est un sous ensemble fini quelconque d'indices. Alors, $\mathcal{T}$ définit une topologie sur E, de plus, $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine qui rend continues toutes les applications $\varphi_i(i \in I)$.

1.3.1 La topologie faible

Définition 1.3.1. *[14] Soient E un espace de Banach et E' son dual topologique, i.e., l'espace des formes linéaires continue sur E muni de la norme*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in \overline{B}} |\langle f, x\rangle|.$$

Définition 1.3.2. *[14] Soit $f \in E'$, et considérons la fonction*

$$\begin{aligned}\varphi_f :& E \to \mathbb{R}\\ & x \mapsto \varphi_f(x) = f(x) = \langle f, x\rangle.\end{aligned}$$

Lorsque f décrit E' nous obtenons des applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle la topologie faible sur E la topologie la moins fine rendant les applications $(\varphi_f)_i$ continues et on la note $\sigma(E, E')$.

Définition 1.3.3. *[14] Soit $x_0 \in E$, alors si on considère touts les ensemble de la forme*

$$V = \{x \in E, |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \forall i \in I\},$$

où I est fini, $f_i \in E'$ et $\varepsilon > 0$. Ces ensembles constituent une base de voisinage de x_0 pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Remarque 1.3.4.

1. *E étant espace de Banach, E muni d'une norme et alors on définit la topologie sera dite topologie forte.*
2. *Les ouverts (reps. fermés) faible (pour $\sigma(E, E')$) sont aussi des ouverts (reps. fermé) pour la topologie forte.*

Proposition 1.3.5. *Soit $(x_n)_n$ une suite de E.*

1. *La suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers x pour $\sigma(E, E')$ si et seulement si $(\langle f, x_n \rangle)_n$ converge vers $\langle f, x \rangle$ pour tout $f \in E'$.*
2. *Si $(x_n)_n$ converge fortement vers x, alors $(x_n)_n$ converge faiblement vers x.*
3. *Si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x, alors $(\|x_n\|)_n$ est borné et nous avons*
$$\|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\| .$$
4. *Si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x et $(f_n)_n$ converge fortement vers f dans E', alors $(\langle f, x_n \rangle)_n$ converge vers$\langle f, x \rangle$.*

Proposition 1.3.6. *Lorsque E est de dimension finie, la topologie fort de E et la topologie faible $\sigma(E, E')$ coïncident.*

1.3.2 La topologie faible*

Soient E un espace de Banach, E' son dual et E'' son bidual (le dual de E') muni de la norme

$$\|\zeta\|_{E''} = \underset{f\in\overline{B}_{E'(0,1)}}{sup} |\langle \zeta, f \rangle|.$$

Alors, on a une injection canonique $J : E \to E''$ définie de la façon suivante, pour tout $x \in E$ fixé, l'application

$$\begin{aligned} \zeta :& E' \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \zeta_x(f) = \langle \zeta_x, f \rangle = \langle f, x \rangle, \end{aligned}$$

est linéaire continue sur E', i.e., ζ_x est élément de E'' et

$$J : E \to E''$$
$$x \mapsto J(x) = \zeta_x,$$

est linéaire continue, de plus elle est une isométrie (on dit que $\|J(x)\| = \zeta_x = \|x\|$), et on a

$$\langle J(x), f\rangle = \langle \zeta_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \quad \forall x \in E,\ \forall f \in E'.$$

Sur l'espace E' sont définie déjà deux topologies

1. La topologie forte associée à la forme de $E'(\|f\|_{E'} = \sup\limits_{f\in\overline{B}_{E'}(0,1)} |\langle f, x\rangle|)$.
2. La topologie faible $\sigma(E', E'')$.

On définit une topologie sur E' qui est la topologie faible* que l'on note $\sigma(E', E'')$.

Définition 1.3.7. *[14] La topologie faible sur E' est la topologie la moins fine sur E' qui rend continues toutes les applications $(\zeta_x)_{x\in E}$. On la note $\sigma(E'', E)$.*

Proposition 1.3.8. *soit $(f_n)_n$ une suite de points de E'*

1. *La suite $(f_n)_n$ converge vers f pour $\sigma(E'E)$ (ou faiblement*) si est seulement si $(\langle f_n, x\rangle)_n$ converge vers $\langle f, x\rangle$ pour tout $x \in E$.*
2. *Si $(f_n)_n$ converge fortement vers f, alors $(f_n)_n$ converge faiblement* vers f.*
3. *$(f_n)_n$ converge vers f pour $\sigma(E', E)$, alors $(\|f_n\|_{E'})$ est bornée et nous avons*
$$\|f\|_{E'} \le \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|.$$
4. *$(f_n)_n$ converge vers f pour $\sigma(E', E)$ et $(x_n)_n$ converge fortement vers x dans E, alors $(\langle f_n, x_n\rangle)_n$ converge vers $(\langle f, x\rangle)$.*

Proposition 1.3.9. *[14] Si E est de dimension finie, les topologies forte, faible $\sigma(E', E'')$ et faible* $\sigma(E', E)$ coïncident sur E'.*

1.4 Quelques notions de continuité

Définition 1.4.1. *[14] Soit X un espace topologique et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, f est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall\ h \in \mathbb{R},\ h < f(x_0),\ \exists\ V \in V(x_0) \quad \textit{tel que}\ \ h < f(x),\ \forall x \in V.$$

Définition 1.4.2. *[14] Soit X un espace topologique et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, f est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall\ h \in \mathbb{R},\ h > f(x_0),\ \exists\ V \in V(x_0) \quad \textit{tel que}\ \ h > f(x),\ \ \forall x \in V.$$

Remarque 1.4.3. *Soit X un espace topologique et $x_0 \in X$, si $f : X \to \mathbb{R}$, alors*

1. *f est s.c.i au point x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in \vartheta(x_0),\ \forall x_0 \in V(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) > -\varepsilon.$$

2. *f est s.c.s au point x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in \vartheta(x_0),\ \forall x_0 \in V(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) < \varepsilon.$$

3. *f est continue au point x_0 si, et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in v(x_0), \forall x_0 \in V(x_0),\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Définition 1.4.4. *Soient X un espace topologique et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, f est continue au point x_0 si et seulement si f est s.c.i et s.c.s au point $x_0 \in X$.*

Définition 1.4.5. *Soient X un espace topologique, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et soit $x_0 \in X$ alors*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{V \in v(x_0)} \inf_{x \in V} f(x).$$

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{V \in v(x_0)} \sup_{x \in V} f(x).$$

Proposition 1.4.6. *Soit (x, d) un espace métrique et soit $f : x \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors*

$$f \textit{ est s.c.i au point } x_0 \iff \liminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0).$$

$$f \textit{ est s.c.s au point } x_0 \iff \limsup_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0).$$

Définition 1.4.7. *Soit E un espace de Banach, Y un sous-ensemble de E. On dit que la fonction $f : Y \to \mathbb{R}$ vérifie la condition de Lipschitz sur Y si pour un certain scalaire positif L on a*

$$|f(y) - f(y')| \leq L\|y - y'\|,$$

pour tous $y, y' \in Y$.
On dit que f est localement Lipschitzienne (de rapport L), au voisinage de x si pour un certain $\varepsilon > 0$, f vérifie la condition de Lipschitz (de rapport L) sur l'ensemble $x + \varepsilon \mathbf{B}_{E(0,1)}$ (c'est à dire dans un ε-voisinage de x).

Remarque 1.4.8. *Soient E un espace de Banach, $f : E \to \mathbb{R}$.*
Si f est lipschitzienne, alors f est localement lipschitzienne.

Définition 1.4.9. *Soient E un espace de Banach et $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$,*
$f : [a, b] \to E$ une application, alors f est dite absolument continue si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que pour toute partition dénombrable de $[a, b]$ par des intervalles disjoints $(]b_n, a_n[)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\sum_n (b_n - a_n) < \delta \;\; alors \;\; \sum_n \| f(b_n) - f(a_n) \| < \varepsilon.$$

Théorème 1.4.10. *Soient E un espace de Banach, $f : [a, b] \to E$, alors f est absolument continue si et seulement si il existe une application intégrable $v : [a, b] \to E$ telle que*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b v(t)dt$$

dans ce cas $\dot{f} = v$ p.p.

Remarque 1.4.11.

1. *Toute application Lipschizienne est absolument continue.*
2. *Toute application absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.*

Définition 1.4.12. *[17] Soient X et Y deux espaces de Banach, et $A : X \to Y$ une application linéaire. On dit que A est bornée si elle envoie les parties bornées de X sur des parties bornées de Y.*

Définition 1.4.13. *[17] Soient X et Y deux espaces de Banach, on appelle opérateur borné toute application linéaire continue de X dans Y.*

1.5 Multi-applications et sélections

Dans cette section, on se propose d'introduire quelques notions d'analyse multivoque qui seront utile dans notre étude.

Définition 1.5.1. *[2, 12] Soient X, Y deux ensembles non vide, une multi-application (ou application multivoque) F de X vers Y est une correspondance qui associée à tout élément $x \in X$ un ensemble $F(x)$ de Y. On notera*

$$F : X \rightrightarrows Y \;\; ou \;\; F : X \to \mathcal{P}(Y).$$

Définition 1.5.2. *[1, 3, 17] Soient X, Y deux ensemble non vide et $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ est une application multivoque.*

1. *On appelle domaine de F, l'ensemble*

$$Dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

2. *On appelle image de F, l'ensemble*

$$\begin{aligned} Im(F) &= \{y \in Y : \exists x \in X,\ y \in F(x)\} \\ &= \bigcup_{x \in X} F(x). \end{aligned}$$

3. *On appelle image d'une partie A de X par F, l'ensemble*

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x).$$

4. *On appelle graphe de F le sous ensemble de $X \times Y$, définie par*

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

5. *On appelle multi-application inverse (noté F^{-1}) $F^{-1} : P(Y) \to X$ définie par*

$$x \in F^{-1}(y) \;\Leftrightarrow\; y \in F(x).$$

6. *On appelle image de F^{-1}, l'ensemble*

$$\begin{aligned} Im(F^{-1}) &= \{x \in X : \exists y \in Y,\ x \in F^{-1}(y)\} \\ &= \{x \in X : \exists y \in Y,\ y \in F(x)\}. \end{aligned}$$

7. *On appelle image large de V par la multi-application F^{-1}, pour tout $V \in Y$ l'ensemble*
$$F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Définition 1.5.3. *[1]* ***(Distance de Hausdorff-Poumpeiu).***
Soient (X, d) un espace métrique induit par l'espace normé $(X, \|\cdot\|)$, et A, B deux parties non vides de X.
On a $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y)$.
On appelle écart entre A et B et on la note $e(A, B)$ la quantité définie par
$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B).$$
On considère la distance Hausdorff-Poumpeiu, l'application
$$H_d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$
définie par
$$H_d(A, B) = \max\Big(e(A, B), e(B, A)\Big)$$
alors, l'espace $(P_{b,cl}(X), H_d)$ est un espace métrique et $(P_{cl}(X), H_d)$ est un espace métrique généralisé.

Propriétés élémentaires

Soient A, B, $C \subset X$, alors

1. $e(A, \emptyset) = \infty$ si $A \neq \emptyset$.
2. $e(\emptyset, B) = 0$.
3. $H_d(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.
4. $H_d(A, B) \leq H_d(A, C) + H_d(C, B)$.

Définition 1.5.4. *[2] Soient X, Y deux espaces topologies, et soit $F : X \rightrightarrows Y$, alors F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout ensemble ouvert U de Y contenant $F(x_0)$, il existe un voisinage ouvert $V(x_0)$ dans X tel que pour tout $x \in V(x_0)$ on a $F(x) \subset U$.*
On dit que F est semi-continue supérieurement si elle est s.c.s en tout point $x \in X$.

Définition 1.5.5. *[2] Soient X, Y deux espaces topologies, et soit $F : X \rightrightarrows Y$, alors F est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert U de Y telle que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage $V(x_0)$ dans X tel que $F(x) \cap U \neq \emptyset$, pour tout $x \in V(x_0)$.*
On dit que F est semi-continue inférieurement si elle est s.c.i en tout point $x \in X$.

Définition 1.5.6. *[2] Une multi-application F est dite continue en un point $x_0 \in X$, si elle est à la fois s.c.s et s.c.i au point x_0. On dit que F est continue si elle l'est en tout point $x_0 \in X$.*

Lemme 1.5.7. *[12, 15] Si $F : X \to P_{cl}(Y)$ est s.c.s, alors Graphe(F) est un sous ensemble fermé de $X \times Y$, i.e., pour toute suite $(x_n)_{n\in N} \subset X$ et $(y_n)_{n\in N} \subset Y$, si $x_n \to x_*$, $y_n \to y_*$ quand $n \to \infty$ avec $y_n \in F(x_n)$, alors $y_* \in F(x_*)$. Inversement, si F est complètement continue à valeurs compactes non vides et son graphe fermé, alors F est s.c.s.*

Définition 1.5.8. *[2] Soient X, Y deux espaces normés, une application multivoque $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ est dite*

1. *Semi-continue supérieurement en x_0 au sens de ε (ε-δ-s.c.s) si pour tout $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que*

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B(0), \quad \forall x \in \varepsilon B(x_0) \cap X.$$

2. *Semi-continue inférieurement en x_0 au sens de ε (ε-δ-s.c.i) si pour tout $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que*

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B(0), \quad \forall x \in \varepsilon B(x_0) \cap X.$$

3. *On dit que F est ε-δ-s.c.s (resp. ε-δ-s.c.i) si elle est ε-δ-s.c.s (resp. ε-δ-s.c.i) en tout point $x_0 \in X$.*

Définition 1.5.9. *[3] Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, $F : \Omega \to \mathcal{P}(X)$ une multi-application.*
On dit que F est Σ-mesurable ou mesurable, si pour tout ouvert U de X

$$F^{-1}(U) = \{t \in \Omega : F(t) \cap U \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.5.10. *[10] Si F_1, $F_2 : \Omega \to P_{cp}(X)$ deux multi-application mesurable, alors l'application multivoque $t \to F_1(t) \cap F_2(t)$ est mesurable.*

Définition 1.5.11. *Une application multivoque $F : \Omega \to P_{cl}(X)$ est dite mesurable, si pour tout $x \in X$, la fonction distance $d(x, F(\cdot))$ est mesurable.*

Définition 1.5.12. *[1] Une application multivoque $F : I \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est dite de Carathéodory si elle vérifie*

(i) $t \to F(t, u)$ *est mesurable pour tout* $u \in \mathbb{R}$.

(ii) $u \to F(t, u)$ *est semi continue supérieurement presque par tous* $t \in I$.

Définition 1.5.13. *[12]Soient X, Y deux ensembles non vides, $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Théorème 1.5.14. *Soit $F : \Omega \to P_{cp}(X)$ une multi-application mesurable à valeur non vide, alors F a une sélection mesurable.*

Définition 1.5.15. *Soient X, Y deux ensemble non vide et $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ est une application multivoque .*

1. *F est fermée (resp. mesurable) si et seulement si son graphe est fermée (resp. mesurable).*
2. *F est convexe si et seulement si pour tous $x_1, x_2 \in Dom(F)$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a*

$$\lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

3. *F est a valeur fermée (resp. convexe, borné et compact) si pour tout $x \in X$ l'image $F(x)$ est fermé (resp. convexe, borné et compact).*
4. *F est borné, si pour tout ensemble $B \in P_b(X)$, l'ensemble $F(B)$ est borné dans $\mathcal{P}(Y)$.*

Définition 1.5.16. *[1] Un opérateur multivoque $N : X \to P_{cl}(X)$ est dite*

1. *γ-Lipschitz s'il existe $\gamma > 0$, tel que*

$$H_d(N(x), N(y)) \leq \gamma d(x, y), \quad \forall x,\ y \in X.$$

2. *γ-contractant s'il est γ-Lipschitz avec $\gamma < 1$.*

1.6 Quelques résultats de compacité

Définition 1.6.1. *[17] Soient X, Y deux espaces de Banach et U un ouvert de X. N un opérateur définie de U dans Y*

1. *Compact si l'image de $\overline{U}$ par N, i.e., l'ensemble $N(\overline{U})$ est relativement compact dans Y.*
2. *Complètement continue s'il est transforme tout borné de X en une ensemble relativement compact dans Y.*

Définition 1.6.2. *[14] Soit K un sous ensemble de $C(I, \mathbb{R})$.*

1. *On dit que K est équicontinue si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall t_1, t_2 \in I\ :\ |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon,\ \forall f \in K.$$

2. *On dit que K est uniformément borné s'il existe une constante $c > 0$ tel que*

$$\|f\|_\infty \leq c, \quad \forall f \in K.$$

Théorème 1.6.3. *[14]**(Arzelà-Ascoli).***
Soient X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et K un sous ensemble de $C(X,Y)$. K est relativement compact, si et seulement si

1. *K est équicontinue.*
2. *pour tout $t \in I$ l'ensemble $K(t) = \{f(t) : f \in K\}$ est relativement compact .*

Lemme 1.6.4. *[19]**(Mazur).***
Soit (x_n) une suite convergeant faiblement vers x dans E. Alors il existe une suite de combinaison convexe

$$y_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk} x_k,\ \text{avec}\ \ \alpha_{mk} > 0,\ \text{et}\ \sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk} = 1,$$

qui converge fortement vers x dans E.

1.7 Quelques théorèmes du point fixe

Définition 1.7.1. *[1] Soient E un espace de Banach et $F : E \to \mathcal{P}(E)$ une multi-application, alors un point $x \in E$ appelé point fixe de F si $x \in F(x)$.*

Théorème 1.7.2. *[1]* ***(Théorème du point fixe de Banach).***
Soient E un espace de Banach, et $A : E \to E$ un opérateur contractant, alors A admet un point fixe unique, i.e., $\exists! u \in E$ tel que $Au = u$.

Théorème 1.7.3. *[1]* ***(Théorème de l'alternative non linéaire de Leray Schauder).***
Soient X un espace de Banach et $C \subset X$ un sous-ensemble convexe non vide de X. On suppose qu'il existe un ouvert U dans C tel que $0 \in U$ et $N : \overline{U} \to C$ un opérateur continu et compact, alors on a l'alternative suivant

1. *N a un point fixe sur $\overline{U}$, ou bien*
2. *il existe $\lambda \in]0,1[$ et $u \in \partial U$ tel que $u \in \lambda N(u)$.*

Lemme 1.7.4. *[1] Soient X un espace de Banach et $C \subset X$ un sous-ensemble convexe non vide de X. On suppose qu'il existe un ouvert U dans C tel que $0 \in U$ et $N : \overline{U} \to \mathcal{P}(C)$ un opérateur semi-continu supérieur et compact, alors on a l'alternative suivant*

1. *N a un point fixe sur $\overline{U}$, ou bien*
2. *il existe $\lambda \in]0,1[$ et $u \in \partial U$ tel que $u \in \lambda N(u)$.*

Théorème 1.7.5. *[1]* ***(Covitz-Nadler).***
Soit (X,d) un espace métrique complet, si $N : X \to P_{cl}(X)$ est une contraction, alors N admet un point fixe (i.e., Fix $N \neq \emptyset$).

Théorème 1.7.6. *[1]* ***(Bohnenblust-Karlin).***
Soient X un espace de Banach et $K \in P_{cl,cv}(X)$ et supposons que l'opérateur $G : K \to P_{cl,cv}(K)$ est s.c.s et l'ensemble $G(K)$ est relativement compact dans X, alors G admet un point fixe dans K.

CHAPITRE 2

CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous présentons quelques fonctions spéciales, Dérivations et intégrations fractionnaire, qui seront utilisées dans le chapitre qui suite.

Les définitions et résultats de ce chapitre ont été pris de [8], [9], [16], [18].

2.1 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons des définitions et quelques propriétés des fonctions Gamma et Bêta, ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

2.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma ou fonction d'Euler est fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 2.1.1. *[8] Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction Gamma donnée par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \tag{2.1}$$

Cette intégrale est converge pour tout $x > 0$.

Propriété 2.1.2. *[18] La propriété importante de la fonction Gamma et la relation de récurrence suivante*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad x > 0. \tag{2.2}$$

En particulier,

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.3}$$

Preuve. On a

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-t} t^x dt,$$

on intégrant par partie, on trouve

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \\
&= \Big[- e^{-t} t^x \Big]_0^{+\infty} + x \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt}_{\Gamma(x)}, \\
&= x\Gamma(x).
\end{aligned}$$

Ce qui montre (2.2).
Pour $x = 1$ dans (2.1)

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = 1,$$

et en utilisant (2.2), on obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1.1 = 1! \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\
&\vdots \\
\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1).(n-2)! = (n-1)!,
\end{aligned}$$

par conséquent $\Gamma(n+1) = n!$. ■

Propriété 2.1.3. *[1] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = (2n-1)!! \frac{\sqrt{\pi}}{2^n},$$

avec

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}.$$

Preuve. On a

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt$$

on pose le changement de variable suivant

$$u = \sqrt{t} \Rightarrow t = u^2 \text{ et } dt = 2udu,$$

d'où

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u(u^2)\Big(\frac{1}{2}-1\Big)du\\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du,\end{aligned}$$

d'après l'intégrale de Gauss on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

,
alors

$$\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big) = 2\tfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Calculons maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n+\frac{1}{2}+1-1\right)\\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\\ &= \frac{1}{2^n}\left(2n-1\right)\left(2n-3\right)\cdots\sqrt{\pi}\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\left(2n-1\right)!!.\end{aligned}$$

■

Propriété 2.1.4. *[1] La fonction Gamma peut être représentée par limite*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)},\ x > 0.$$

Définition 2.1.5. *[9] Soit x>0, la fonction Gamma est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$, ses dérivées successives sont données par la formule*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}(\ln(t))^k dt.$$

2.1.2 La fonction bêta

La fonction Bêta joue un rôle important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gamma.

Définition 2.1.6. *[1] La fonction Bêta et généralement définie par*

$$\forall x,\ y > 0, \quad B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{2.4}$$

Propriété 2.1.7. *[1] La fonction Bêta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante*

$$\forall x,\ y > 0, \quad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.5}$$

d'où, Bêta est symétrique,

$$B(x,y) = B(y,x).$$

2.2 Dérivation et intégration fractionnaire

Dans cette section, nous présentons des définitions et quelques propriétés de l'intégral et dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, la dérivation fractionnaire au sens de Caputo, et quelques lemmes fondamentaux.

2.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Selon l'approche au sens de Riemann-Liouville sur le calcul fractionnaire, la notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$, généralise la fameuse formule attribuée a Cauchy d'intégrales répétées n-fois.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ on a

$$\begin{aligned} I_a^n f(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_n-1} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \end{aligned} \tag{2.6}$$

nous avons $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que le second membre de (2.6) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, alors c'était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit

Définition 2.2.1. *[16] Soient $f \in L^1([a, b])$, $\alpha > 0$, x, a, $b \in \mathbb{R}$, $x > a$, alors*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \tag{2.7}$$

est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) au sens de Riemann-Liouville d'ordre α, et

$$I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) au sens de Riemann-Liouville d'ordre α. En particulier, pour $\alpha = 0$ dans (2.7), on obtient $I_a^0 f(x) = f(x)$.

Exemple 2.3.

1. *Soit f une fonction définie par*

$$f(x) = (x-a)^\beta,\ x \in [a, b],\ \beta > -1,\ \alpha > 0.$$

On a

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta d(t), \tag{2.8}$$

en utilisant le changement de variable suivant

$$t = a + (x-a)\tau, \ \ avec\ \ 0 \le \tau \le 1, \quad dt = (x-a)d\tau, \tag{2.9}$$

donc, (2.8) devienne

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{\alpha-1} (\tau(x-a))^\beta (x-a) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-\tau)]^{\alpha-1} [(x-a)\tau]^\beta (x-a) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 \tau^\beta (1-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \end{aligned}$$

En appliquant la relations (2.4) puis (2.5), de la fonction Bêta

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta},$$

alors

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{2.10}$$

2. *Soit f une fonction définie par*

$$f(x) = c.$$

On a

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha c &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} c\, dt \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha}\right]_a^x \\
&= \frac{c}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x-t)^\alpha \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)}(x-t)^\alpha.
\end{aligned}$$

Lemme 2.3.1. *[16] Soit $f \in L^p([a,b])$, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est satisfaite*

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f(x)) = I_a^{\alpha+\beta} f(x)$$

pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Preuve. Soient $f \in L^p([a,b])$ et α, $\beta > 0$, alors

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (I_a^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(I_a^\beta f(t))dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s)ds\right]dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left[\int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s)ds\right]dt,
\end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini, on trouve

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (I_a^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} f(s)dsdt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)\underbrace{\int_a^t (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dt}_{L}\, ds,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

en utilisant le changement de variable suivant dans l'intégrale L,

$$t = s + (x-s)\tau, \text{ avec } 0 \leq \tau \leq 1, \text{ donc } dt = (x-x)d\tau,$$

on trouve

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 (x-s-(x-s)\tau)^{\alpha-1}(s+(x-s)\tau-s)^{\beta-1}(x-s)d\tau \\ &= \int_0^1 (x-s)(1-\tau)^{\alpha-1}[(x-s)\tau]^{\beta-1}(x-s)d\tau \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}, \end{aligned}$$

d'après la relations (2.4) puis (2.5), de la fonction Bêta

$$L = (x-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

la formule (2.11), devient

$$\begin{aligned} I_a^\alpha(I_a^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)\left[(x-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right]ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)ds \\ &= I_a^{\alpha+\beta}f(x). \end{aligned}$$

■

2.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.3.2. *[16] Soit $f \in L^1([a,b])$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, et $n \in \mathbb{N}$ la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α de f définie par*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt && (2.12) \\ &= D^n\left(I_a^{n-\alpha}f(x)\right) && (2.13) \end{aligned}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ est dérivée d'ordre entier $n = [\alpha]+1$.
En particulier,

1. *Pour $\alpha = 0$,*

$$D_a^0 f(x) = f(x),$$

D^0 est l'opérateur identité.

2. *Pour $\alpha = n$,*

$$D_a^n f(x) = D^{n+1}I_a^{n+1-n}f(x) = D^{n+1}I_a^1 f(x) = D^n f(x).$$

Exemple 2.4.

1. *Soit f une fonction défini par*

$$f(x) = (x-a)^{\beta} \text{ avec } \beta > -1.$$

D'après la définition 2.3.2 *et la relation* (2.10)*, on trouve*

$$D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{d^n}{dx^n}\Big(I_a^{n-\alpha}(x-a)^{\beta}\Big)$$

$$= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}(x-a)^{\beta+n-\alpha}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{\beta+n-\alpha}, \tag{2.14}$$

on sait que

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{\beta+n-\alpha} &= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)...(\beta+n-\alpha-n)(x-a)^{\beta+n-\alpha-n} \\ &= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha},\end{aligned}$$

et

$$\Gamma(\beta+n-\alpha+1) = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1),$$

alors

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{\beta+n-\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{2.15}$$

En remplace (2.15) *dans* (2.14)*, on trouve*

$$D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\left(\frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, d'après (2.2) *on déduit que*

$$D_a^{1}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1} = \beta(x-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dx}(x-a)^{\beta}.$$

2. *Soit f une fonction défini par*

$$f(x) = c.$$

On a

$$\begin{aligned} D_a^\alpha c &= \frac{d^n}{dx^n}(I_a^{n-\alpha} c) \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{c}{\Gamma(n-\alpha+1)}(x-a)^{n-\alpha}\right) \\ &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

on sait que

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha} = (n-\alpha)(n-\alpha-1)...(1-\alpha)(x-a)^{-\alpha}, \tag{2.17}$$

et comme

$$\Gamma(n-\alpha+1) = (n-\alpha)(n-\alpha-1)...(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha). \tag{2.18}$$

En remplace (2.17) *et* (2.18) *dans* (2.16), *on trouve*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha c &= \frac{c(n-\alpha)(n-\alpha-1)...(1-\alpha)(x-a)^{-\alpha}}{(n-\alpha)(n-\alpha-1)...(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Lemme 2.4.1. *[16] Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^p([a,b])$, alors on a l'égalité*

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x),$$

est vraie pour presque tout sur $[a,b]$.

Preuve. D'après la définition 2.3.2 et de lemme 2.3.1, on obtient

$$\begin{aligned} D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) &= D^n\Big(I_a^{n-\alpha}\big(I_a^\alpha f(x)\big)\Big) \\ &= D^n\big(I_a^n f(x)\big), \end{aligned}$$

on sait que

$$D^n I_a^n f(x) = f(x),$$

d'ou

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x).$$

■

Proposition 2.4.2. *[16] Soient α, $\beta>0$, si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^p([a,b])$ l'égalité*

$$D_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x)$$

est vrai presque partout sur $[a,b]$.

Propriété 2.4.3. *[18] Soient f et g deux fonctions dérivables fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'ordre α, alors pour λ, $\mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$D_a^{\alpha}\Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big) = \lambda D_a^{\alpha} f(x) + \mu D_a^{\alpha} g(x).$$

2.4.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.4.4. *[16] La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Caputo d'une fonction f définie sur $[a,b]$ est donnée par*

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) \tag{2.19}$$

où

$$n = [\alpha] + 1, \ si\ \alpha \notin \mathbb{N}, \ et\ n = \alpha\ si\ \alpha \in \mathbb{N}^*. \tag{2.20}$$

Si $\alpha = 0$, alors

$$^{C}D_a^{0} f(x) = f(x).$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, la relation (2.19) prend la forme

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha}\bigg(f(x) - f(a) \bigg).$$

Donc, si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et f est une fonction pour laquelle les dérivées fractionnaires au sens de Caputo (2.19), et celle de Riemann-Liouville (2.13) existent, alors elles sont liées l'une à l'autre par la relation

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-\alpha)!}(x-a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\alpha]+1). \tag{2.21}$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, on a

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha} f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \tag{2.22}$$

D'après la relation (2.21), on a

1. *Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors la dérivée au sens de Caputo* (2.19) *coïncide avec la dérivée de Riemann-Liouville* (2.13) *si la fonction f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ $(n = [\alpha]+1)$ s'annulent au point a, i.e.,*

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha} f(x) \rightarrow f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

2. *Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ et la dérivée usuelle $f^n(x)$ existe, alors $^{C}D_a^{\alpha} f(x)$ coïncide avec $f^{(n)}(x)$ i.e.,*

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = f^{(n)}(x).$$

Théorème 2.4.5. *[16] Soient $\alpha > 0$, n donné par* (2.20)*, si $f \in AC^n([a,b])$, alors la dérivée fractionnaire au sens de Caputo $^{C}D_a^{\alpha} f(x)$ existe presque partout sur $[a,b]$.*

1. *Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors $^{C}D_a^{\alpha} f(x)$ et donné par*

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-a)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt \tag{2.23}$$

$$= I_a^{n-\alpha} D^n f(x). \tag{2.24}$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, alors

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-a)^{-\alpha} f'(t)dt \tag{2.25}$$

$$= I_a^{1-\alpha} f'(x). \tag{2.26}$$

2. *Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors $^{C}D_a^{\alpha} f(x) = f^{(n)}(x)$.*

Preuve. D'après la définition, on a

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$

$$= D^n I_a^{n-\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right),$$

posons

$$L(x) = I_a^{n-\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right),$$

d'après (2.7), on a

$$L(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)dt,$$

intégrant par parties, on trouve

$$L(x) = -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)\Bigg|_{t=a}^{t=x}$$

$$+\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha}\frac{d}{dx}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)dt$$

$$= I_a^{n-\alpha+1}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right),$$

en répétant ce procédé n fois, on trouve

$$L(x) = I_a^{n-\alpha+n}D^n\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) \tag{2.27}$$

$$= I_a^n I_a^{n-\alpha}D^n\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right), \tag{2.28}$$

or, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ est polynôme de degré $n-1$, donc

$$L(x) = I_a^n I_a^{n-\alpha}D^n f(x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
{}^C D_a^\alpha f(x) &= D^n L(x)\\
&= \underbrace{D^n I_a^n}_{I_d} I_a^{n-\alpha}D^n f(x)\\
&= I_a^{n-\alpha}D^n f(x)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt.
\end{aligned}$$

■

Exemple 2.5. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x) = (x-a)^\beta, \quad \beta > 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}
{}^C D_a^\alpha (x-a)^\beta &= I_a^{n-\alpha}D^n(x-a)^\beta\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\left((t-a)^\beta\right)^{(n)}dt,
\end{aligned}$$

on sait que

$$\Big((t-a)^\beta\Big)^{(n)} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n},$$

et donc

$$^{C}D_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \underbrace{\int_a^x (x-t)^{n-\alpha+1}(t-a)^{\beta-n}dt}_{L}, \tag{2.29}$$

en utilisant le changement de variable (2.9) *dans l'intégrale* L*, on obtient*

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \Big(x-a-(x-a)\tau\Big)^{n-\alpha-1}\Big((a+(x-a)\tau - a\Big)^{\beta-n}(x-a)d\tau \\ &= \int_0^1 \Big((x-a)(1-\tau)\Big)^{n-\alpha-1}\Big(\tau(x-a)\Big)^{\beta-n}(x-a)d\tau \\ &= (x-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 \tau^{\beta-n+1}(1-\tau)^{n-\alpha+1})d\tau, \end{aligned}$$

en tenant compte de la définition de Bêta 2.4.1*, puis de la relation* (2.5)*, on trouve*

$$L = (x-a)^{\beta-\alpha}B(\beta-n+1, n-\alpha) \tag{2.30}$$

$$= (x-a)^{\beta-\alpha}\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \tag{2.31}$$

en retournant à la formule (2.29)*, on obtient*

$$\begin{aligned} ^{C}D_a^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\left((x-a)^{\beta-\alpha}\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

D'où

$$^{C}D_a^\alpha (x-a)^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}, & si\ \beta > n-1 \\ 0, & si\ \beta = 0,1,2,\dots,n-1. \end{cases}$$

En particulier, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante $f(x) = c$ *est nulle, autrement dit* $^{C}D_a^\alpha c = 0$.

Propriété 2.5.1. *[18] Soient* f *et* g *deux fonctions dérivables fractionnaires au sens de Caputo d'ordre* α*, alors pour* λ, $\mu \in \mathbb{R}$*, on a*

$$^{C}D_a^\alpha\Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big) = \lambda^{C}D_a^\alpha f(x) + \mu^{C}D_a^\alpha g(x).$$

2.5.1 Lemmes fondamentaux

Lemme 2.5.2. *[16] Soient* $\alpha > 0$, $f \in C([a,b])$ *ou* $f \in L^\infty([a,b])$*, alors*

$$^{C}D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x).$$

Preuve. Soit $f \in C([a,b])$ la relation (2.19) permet d'obtenir le résultat suivant

$$^{C}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_a^{\alpha} f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha},$$

puis d'après le lemme 2.4.1, on a

$$^{C}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_a^{\alpha} f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha},$$

et comme $k \leq n-1$ pour $k = 0, 1, ..., n-1$, alors les dérivées $I_a^{\alpha} f^{(k)}(a) = 0$, ce qui donne

$$^{C}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(x) = f(x).$$

■

Lemme 2.5.3. *[16] Soient $\alpha > 0$, $f(x) \in AC^n([a,b])$, alors*

$$I_a^{\alpha}\, {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

En particulier, si $\alpha \in]0,1]$ et $f \in AC([a,b])$, alors

$$I_a^{\alpha}\, {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = f(x) - f(a).$$

Preuve. Soient $\alpha > 0$, $f \in AC^n([a,b])$, on a

$$I_a^{\alpha}\, {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = I_a^{\alpha}(I_a^{n-\alpha} D^n f^n(x)),$$

et d'après le lemme 2.3.1, il résulte que

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}\, {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) &= I_a^{n} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \underbrace{\int_0^x (x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t) dt}_{I_1}, \end{aligned}$$

par intégration par partie de l'intégrale I_1, on trouve

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}\, {}^{C}D_a^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \Big[(x-t)^{(n-1)} f^{(n-1)}(t)\Big]_a^x + \frac{n-1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t) dt \\ &= -\frac{1}{\Gamma(n)} (x-a)^{(n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n+1)} \underbrace{\int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t) dt}_{I_2}, \end{aligned}$$

en faisant le même pour I_2, on trouve

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha \, {}^C D_a^\alpha f(x) = & -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{(n-1)} f^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(x-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) \\
& + \frac{1}{\Gamma(n-2)} \int_a^x (x-t)^{n-3} f^{(n-3)}(t) dt,
\end{aligned}$$

en continuant par l'intégration par partie successives on obtient finalement

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha \, {}^C D_a^\alpha f(x) = & -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{(n-1)} f^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(x-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) \\
& - \cdots + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x f^{(1)}(t) dt, \\
& = -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{(n-1)} f^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(x-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) \\
& - \cdots + f(x) - f(a).
\end{aligned}$$

■

CHAPITRE 3

INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE $0 < \alpha < 1$.

Dans ce chapitre, nous considérons le problème aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire et nous nous intéressons à l'existence des solutions de ce problème dans le cas convexe et non convexe.
Soit

$$^{C}D^{\alpha}x(t) \in F(t,x), \textit{ pour tout } t \in I = [0,T],\ 0 < \alpha < 1 \tag{3.1}$$

$$ax(0) + bx(T) = c, \tag{3.2}$$

où $^{C}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $F : I \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

3.1 Existence des solutions

Dans ce travail on défini l'ensemble des sélections de F par

$$S_{F,x} = \{v \in L^1(I,\mathbb{R}) : v(t) \in F(t,x(t)) \ p.p \ t \in I\}.$$

On commence par donner la définition d'une solution au problème (3.1)-(3.2)

Définition 3.1.1. *On dit que la fonction* $x \in AC(I, \mathbb{R})$ *est une solution du problème* (3.1)-(3.2)*, s'il existe une fonction* $v \in L^1(I, \mathbb{R})$ *avec* $v(t) \in F(t, x(t))$*, pour tout* $t \in I$*, telle que*

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = v(t), \text{ pour tout } t \in I,\ 0 < \alpha < 1,$$

et la fonction x *satisfait la condition* (3.2).

Pour l'existence des solutions de problème (3.1)-(3.2), on a besoin du lemme suivant

Lemme 3.1.2. *Soient* $0 < \alpha < 1$ *et* $h : J \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, une fonction* x *est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \tag{3.3}$$

si et seulement si x *est la solution de problème de Cauchy pour l'équation différentielle fractionnaire*

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = h(t), \quad t \in I, \tag{3.4}$$

$$x(0) = x_0. \tag{3.5}$$

Preuve. Supposons que x est solution de (3.3), i.e.,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= x_0 + I^{\alpha}h(t), \end{aligned}$$

en appliquant l'opérateur $^{C}D^{\alpha}$ aux deux membres de l'égalité (3.3) et par son linéarité, on trouve

$$\begin{aligned} ^{C}D^{\alpha}x(t) &= {}^{C}D^{\alpha}\Big(x_0 + I^{\alpha}h(t)\Big) \\ &= {}^{C}D^{\alpha}x_0 + {}^{C}D^{\alpha}I^{\alpha}h(t), \end{aligned}$$

on a

$$^{C}D^{\alpha}x_0 = 0.$$

D'après lemme 2.5.3, on a

$$^{C}D^{\alpha}I^{\alpha}h(t) = h(t).$$

Alors

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = h(t).$$

Ce qui montre(3.4).

Il reste à vérifier la condition (3.5), i.e.,

$$x(0) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^0 (0-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

donc

$$x(0) = x_0.$$

Alors x est une solution de problème aux limites (3.4)-(3.5).

Inversement, supposons que x est solution de problème de Cauchy

$$ {}^C D^\alpha x(t) = h(t), \quad t \in I, \tag{3.4}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.5}$$

en appliquant l'opérateur I^α aux deux membres de l'égalité (3.4), on trouve

$$\begin{aligned} I^\alpha\, {}^C D^\alpha x(t) &= I^\alpha h(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

D'après Lemme 2.5.3, on a

$$I^\alpha\, {}^C D^\alpha x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k(0)}{k!}(t-0)^k,$$

puisque $\alpha \in]0,1[$, alors on obtient

$$I^\alpha\, {}^C D^\alpha x(t) = x(t) - x(0), \tag{3.7}$$

de (3.6) et(3.7), on a

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + I^\alpha h(t) \\ &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t h(x) ds. \end{aligned}$$

Alors, x est solution de l'équation intégrale fractionnaire. ■

Comme conséquence de Lemme 3.1.2 nous avons le résultat suivant qui est utile dans ce qui suit

Lemme 3.1.3. *Soient* $0 < \alpha < 1$ *et* $h : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, une fonction* x *est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c\right], \tag{3.8}$$

si et seulement si x *est la solution de problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire*

$${}^C D^\alpha x(t) = h(t), \quad t \in I, \tag{3.9}$$

$$a x(0) + b x(T) = c. \tag{3.10}$$

Preuve. Supposons que x est solution de (3.8) i.e.,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c\right] \\ &= I^\alpha h(t) - \frac{1}{a+b}\Big[b I^\alpha h(T) - c\Big], \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha x(t) = &\ {}^C D^\alpha \left[I^\alpha h(t) - \underbrace{\frac{1}{a+b}\Big[b I^\alpha h(T) - c\Big]}_{k} \right] \\ = &\ {}^C D^\alpha I^\alpha h(t) - {}^C D^\alpha k, \end{aligned}$$

on a

$${}^C D^\alpha k = 0$$

et d'après Lemme 2.5.2, on a

$${}^C D^\alpha I^\alpha h(t) = h(t).$$

D'où

$${}^C D^\alpha x(t) = h(t).$$

Ce qui montre (3.9).

Il reste à vérifier la condition aux limites (3.10), on a

$$x(0) = I^\alpha h(0) - \frac{1}{a+b}\Big[b I^\alpha h(T) - c\Big].$$

$$x(T) = I^\alpha h(T) - \frac{1}{a+b}\Big[b I^\alpha h(T) - c\Big],$$

alors

$$\begin{aligned}
ax(0)+bx(T) &= aI^{\alpha}h(0)-\frac{1}{a+b}\Big[bI^{\alpha}h(T)-c\Big]+bI^{\alpha}h(T)-\frac{1}{a+b}\Big[bI^{\alpha}h(T)-c\Big]\\
&= bI^{\alpha}h(T)-\frac{ab}{a+b}I^{\alpha}h(T)+\frac{ac}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}I^{\alpha}h(T)+\frac{cb}{a+b}\\
&= \frac{ab+b^2}{a+b}I^{\alpha}h(T)-\frac{ab+b^2}{a+b}I^{\alpha}h(T)+\frac{c(a+b)}{a+b}\\
&= c.
\end{aligned}$$

Ce qui montre (3.10).

Inversement, supposons que x satisfait (3.9), alors d'après le Lemme 3.1.2, on a

$$x(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds.$$

Il reste à vérifier la condition aux limites (3.10)

$$x(0)=x_0$$

$$x(T)=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds.$$

On a

$$ax(0)+bx(T)=ax_0+bx_0+\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds=c,$$

donc

$$ax(0)+bx(T)=(a+b)x_0+\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds=c,$$

d'où

$$x_0=\frac{1}{a+b}\left(c-\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right).$$

Alors

$$x(t)=\frac{1}{a+b}\left(c-\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds.$$

Ce qui montre (3.8). ■

3.2 Le cas convexe

Théorème 3.2.1. *Soient les hypothèse suivant*

(H1) $F : I\times\mathbb{R}\to P_{cp.cv}(\mathbb{R})$*est une application multivoque Carathéodory.*

(H2) *Il existe* $p \in C(I,\mathbb{R})$ *et* $\psi : [0,\infty[\to (0,\infty)$ *une fonction continue et non décroissante, telle que*

$$\|F(t,u)\|_P \leq p(t)\psi(|u|), \quad \text{pour } t \in I \text{ et chaque } u \in \mathbb{R}.$$

(H3) *Il existe* $l \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$, *avec* $I^\alpha l < \infty$ *telle que*

$$H_d(F(t,u),F(t,\overline{u})) \leq l(t)|u-\overline{u}| \quad \text{pour tout } u,\overline{u} \in \mathbb{R},$$

et

$$d(0,F(t,0)) \leq l(t), \quad \text{pour tout } t \in I.$$

(H4) *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

$$\frac{M}{\psi(M)\,\|I^\alpha p\|_\infty + \frac{|b|\psi(M)(I^\alpha p)(T)}{|a+b|} + \frac{|c|}{|a+b|}} > 1. \tag{3.11}$$

Alors, le problème (3.1)-(3.2) *admet au moins une solution sur* I.

Preuve. On va transformer le problème (3.1)-(3.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur multivoque

$$N(x) = \Bigg\{ h \in C(I,\mathbb{R}) : \quad h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s) - \frac{1}{a+b}\Big[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds - c\Big],\ v \in S_{F,x} \Bigg\}.$$

Il est claire, d'après le Lemme 3.1.3 que les point fixes de N sont solutions de problème (3.1)-(3.2).

Nous allons utiliser l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour montrer que N admet un point fixe. La preuve sera donnée en cinq étapes.

Étape 1. N(x) est convexe pour tout $x \in C(I,\mathbb{R})$.

En effet, si $h_1, h_2 \in N(x)$, alors il existe $v_1, v_2 \in S_{F,x}$ telle que pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} h_i(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v_i(s)ds \\ &- \frac{1}{a+b}\Big[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v_i(s)ds - c\Big], \quad i = 1,2. \end{aligned}$$

Soit $0 \leq \lambda \leq 1$. Alors, pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} (\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s)]ds \\ &- \frac{1}{a+b}\Big[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}[\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s)]ds - c\Big], \end{aligned}$$

comme $S_{F,x}$ est convexe (car F est convexe), on a

$$\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in N(x).$$

D'ou $N(x)$ est convexe pour tout $x \in C(I,\mathbb{R})$.

Étape 2. N transforme les ensembles bornés en un ensemble borné dans $C(I,\mathbb{R})$.

Ee effet soit $B_{\eta^*} = \{x \in C(I,\mathbb{R}) : \|x\|_\infty \leq \eta^*\}$ un ensemble borné dans $C(I,\mathbb{R})$ où η^* une constatant positive et $x \in B_{\eta^*}$, alors pour tout $h \in N(x)$, il existe $v \in S_{F,x}$ telle que

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds \\ &- \frac{1}{a+b}\Big[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds - c\Big], \quad t \in I. \end{aligned}$$

Par **(H2)**, on a pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|v(s)|ds \\ &+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|v(s)|ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(|x(s)|)ds \\ &+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(|x(s)|)ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(\|x\|_\infty)ds \\ &+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(\|x\|_\infty)ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq \psi(\eta^*)I^\alpha p(t) + \frac{|b|}{|a+b|}I^\alpha p(T) + \frac{|c|}{|a+b|}. \end{aligned}$$

Alors

$$\|h\|_\infty \leq \psi(\eta^*)\,\|I^\alpha p(t)\|_\infty + \frac{|b|}{|a+b|}I^\alpha p(T) + \frac{|c|}{|a+b|} = l.$$

D'où, pour tout $h \in N(B_{\eta^*})$, il existe une constante positive l telle que

$$\|h\| \leq l.$$

Ce qui implique que $N(B_{\eta^*})$ est uniformément borné.

Étape 3. N transforme les ensembles bornés en un ensemble équicontinue dans $C(I,\mathbb{R})$.

Soient $t_1,\ t_2 \in I,\ t_1 < t_2$ et B_{η^*} un ensemble borné dans $C(I,\mathbb{R})$ donné dans l'étape 2, soient $x \in B_{\eta^*}$ et $h \in N(x)$, alors il existe $v \in S_{F,x}$ telle que

$$\begin{aligned}
|h(t_2) - h(t_1)| &= \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} v(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} v(s)ds\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] v(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} v(s)ds\Big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \Big|(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}\Big| |v(s)|ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \Big|(t_2 - s)^{\alpha-1}\Big| |v(s)|ds.
\end{aligned}$$

Par **(H2)**, on a pour tout t_1, $t_2 \in I$, et $t_1 < t_2$

$$\begin{aligned}
|h(t_2) - h(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}] p(s)\psi(|x(s)|)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} p(s)\psi(|x(s)|)ds \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty \psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}]ds \\
&+ \frac{\|p\|_\infty \psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty \psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha] + \frac{\|p\|_\infty \psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha ds \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty \psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{\|p\|_\infty \psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1 - t_2)^\alpha ds.
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro, par conséquent $N(B_{\eta^*})$ est équicontinue. Par l'étapes 2 et 3 avec le Théorème d'Arzelà-Ascoli, il s'ensuite que $N(B_{\eta^*})$ est relativement compact, nous peut conclure que $N : C(I;\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(C(I,\mathbb{R}))$ est complètement continue.

Étape 4. N est semi-continue supérieurement (s.c.s).

En effet, comme N est complètement continu à valeur compact non vides, il suffit de montrer que N est graphe fermé.

Soient $x_n \to x_*$, $h_n \in N(x_n)$ et $h_n \to h_*$, il suffit de montrer que $h_* \in N(x_*)$.

On a $h_n \in N(x_n)$, alors il existe $v_n \in S_{F,x_n}$ telle que, pour chaque $t \in I$,

$$h_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} v_n(s)ds - \frac{1}{a+b}\Big[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} v_n(s)ds - c\Big].$$

Nous devons montrer qu'il existe $v_* \in S_{F,x^*}$ telle que, pour chaque $t \in I$,

$$h_*(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} v_*(s)ds - \frac{1}{a+b}\Big[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} v_*(s)ds - c\Big].$$

Puisque $F(t,.)$ est semi-continue supérieure, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon) \geq 0$ telle que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$v_n(t) \in F(t, x_n(t)) \subset F(t, x_*(t)) + \varepsilon B(0,1),\ \forall t \in I.$$

Puisque $F(\cdot,\cdot)$ est a valeur compact, alors il existe un sous suite $v_{n_m}(.)$ telle que

$$v_{n_m}(.) \to v_*(.) \ \ quand \ \ m \to \infty, \ et \ v_*(t) \in F(t, x_*(t)), \ \ \forall t \in I.$$

Puisque $F(\cdot, x_n(t))$ est mesurable d'après **(H1)**, et $v \in L^1(I,\mathbb{R})$ une fonction mesurable. Alors il existe une sélection mesurable v_{n_m} de $F(\cdot, x_n(t))$, telle que

$$\begin{aligned} |v_{n_m}(t) - v_*(t)| &\leq d(F(t, x_n(t), v_*(t)) \\ &\leq H_d(F(t, x_n(t)), F(t, x_*(t))). \end{aligned}$$

Par **(H3)**

$$|v_{n_m}(t) - v_*(t)| \leq l(t) \left\| x_n - x_* \right\|_\infty ,$$

alors

$$\begin{aligned} |h_n(t) - h_*(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v_{n_m}(s) - v_*(s)| ds \\ &+ \frac{|b|}{|a+b|} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |v_{n_m}(s) - v_*(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(t) ds \left\| x_{n_m} - x_* \right\|_\infty \\ &+ \frac{|b|}{|a+b|} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(t) ds \left\| x_{n_m} - x_* \right\|_\infty , \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \left\| h_n - h_* \right\|_\infty &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(t) ds \left\| x_{n_m} - x_* \right\|_\infty \\ &+ \frac{|b|}{|a+b|} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(t) ds \left\| x_{n_m} - x_* \right\|_\infty \to 0 \ si \ m \to \infty. \end{aligned}$$

Alors, $h_* \in N(x_*)$.

Ce qui montre que N a son graphe fermé, alors N est s.c.s.

Étape 5. Estimation à priori des solutions.

Soit x une solution possible au problème (3.1)-(3.2). Alors, il existe $v \in S_{F,x}$ telle que, pour chaque $t \in I$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds \\ &- \frac{1}{a+b} \Big[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \Big]. \end{aligned}$$

Cela implique par **(H2)** que, pour chaque $t \in I$, nous avons

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|v(s)|ds \\
&+ \frac{|b|}{|a+b|}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|v(s)|ds + \frac{|c|}{|a+c|} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(|x(s)|)ds \\
&+ \frac{|b|}{|a+b|}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(|x(s)|)ds + \frac{|c|}{|a+c|} \\
&\leq \frac{\psi(\|x\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)ds \\
&+ \frac{|b|}{|a+b|}\frac{\psi(\|x\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)ds + \frac{|c|}{|a+c|} \\
&\leq \psi(\|x\|_\infty)I^\alpha p(t) + \frac{|b|\psi(\|x\|_\infty)I^\alpha p(T)}{|a+b|} + \frac{|c|}{|a+c|}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\|x\|_\infty}{\psi(\|x\|_\infty)\,\|I^\alpha p\|_\infty + \frac{|b|\psi(\|x\|_\infty)I^\alpha p(T)}{|a+b|} + \frac{|c|}{|a+c|}} \leq 1.$$

Alors par la condition (3.11), il existe une constante M telle que $\|x\|_\infty \neq M$.
Soit

$$U = \{x \in C(I,\mathbb{R}) : \|x\|_\infty < M\}.$$

L'opérateur $N : \overline{U} \to \mathcal{P}(C(I,\mathbb{R}))$ est semi-continue supérieurement et complètement continue. Du choix de U, il n'existe pas un $x \in \partial U$ telle que $x \in \lambda N(x)$ pour certains $\lambda \in (0,1)$. Par conséquence du Lemme (1.7.4) du point fixe d'alternative non linéaire de Leray-Schauder, on déduit que N admet au moins un point fixe x dans $\overline{U}$ qui est solution du problème (3.1)-(3.2). ■

3.3 Le cas non-convexe

Nous présentons maintenant un résultat pour le problème (3.1)-(3.2) avec F à valeurs non convexe. Nos considérations sont basées sur le Théorème 1.7.5 de points fixe de Covitz et Nadler pour multiapplications contractantes.

Théorème 3.3.1. *Supposons* **(H3)** *et l'hypothèse suivante sont vérifiés*
(H5) $F : I \times \mathbb{R} \to P_{cp}(\mathbb{R})$ *a la propriété que* $F(.,u) : I \to P_{cp}(\mathbb{R})$ *est mesurable pour*

chaque $u \in \mathbb{R}$.

Si

$$\|I^\alpha l\|_\infty + \frac{|b| I^\alpha l(T)}{|a+b|} < 1, \tag{3.12}$$

alors le problème (3.1)-(3.2) *admet au moins une solution sur* I.

Remarque 3.3.2. *Pour tout* $x \in C(I, \mathbb{R})$, *comme* F *vérifié* **(H3)** *alors l'ensemble des sélections* $S_{F,x}$, *est non vide et* F *admet une sélection mesurable* (*voir Théorème*(1.5.14)).

Preuve. Nous montrerons que N satisfait aux hypothèses de théorème du point fixe de Covitz et Nadler. La preuve sera donnée en deux étapes.

Étape 1. $N(x) \in P_{cl}(C(I, \mathbb{R}))$, pour chaque $x \in C(I, \mathbb{R})$.

En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in N(x)$, tel que $x_n \to \tilde{x}$ dans $C(I, \mathbb{R})$, il suffit de montrer que $\tilde{x} \in C(I, \mathbb{R})$.

Puisque $(x_n) \in N(x)$, alors il existe $v_n \in S_{F,x}$, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds \\ &- \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds - c \right]. \end{aligned}$$

En utilisant (**H3**) et le fait que F est à valeurs compactes, on peut passer à une sous-suite si nécessaire pour obtenir que v_n converge faiblement vers v dans $L^1_w(I, \mathbb{R})$ (L'espace muni de la topologie faible).

Une application de Lemme 1.6.4 de Mazur implique que v_n converge fortement vers v et donc $v \in S_{F,x}$.

Alors, pour chaque $t \in I$,

$$\begin{aligned} x_n(t) \to \tilde{x}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds \\ &- \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{x} \in N(x)$.

Étape 2.N contraction, i.e., il existe $\gamma < 1$ tel que

$$H_d(N(x), N(\overline{x})) \leq \gamma \|x - \overline{x}\|_\infty \text{ pour chaque } x, \overline{x} \in C(I, \mathbb{R}).$$

En effet, soit $x, \overline{x} \in C(I, \mathbb{R})$ et $h_1 \in N(x)$, alors, il existe $v_1(t) \in F(t, x(t))$ telle que pour chaque $t \in I$,

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_1(s) ds \\ &- \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_1(s) ds - c \right]. \end{aligned}$$

De (**H3**) il s'ensuite que

$$H_d(F(t, x(t)), F(t, \overline{x}(t))) \leq l(t)|x(t) - \overline{x}(t)|,$$

il existe donc $w \in F(t, \overline{x}(t))$ tel que

$$|v_1(t) - w| \leq l(t)|x(t) - \overline{x}(t)|, t \in I.$$

Considérons l'opérateur $U : I \to P(\mathbb{R})$ définie par

$$U(t) = \{w \in \mathbb{R} : |v_1(t) - w| \leq l(t)|x(t) - \overline{x}(t)|\}.$$

Puisque l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \cap F(t, \overline{x}(t))$ est mesurable (voir Proposition (1.5.10)), il existe une fonction $v_2(t)$ qui est une sélection mesurable pour V,
ainsi, $v_2(t) \in F(t, \overline{x}(t))$, et pour chaque $t \in I$,

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq l(t)|x(t) - \overline{x}(t)|.$$

On définit pour chaque $t \in I$,

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_2(s) ds \\ &- \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_2(s) ds - c \right], \end{aligned}$$

alors pour $t \in I$,

$$\begin{aligned} |h_1(t) - h_2(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v_1(s) - v_2(s)| ds \\ &+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |v_1(s) - v_2(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s)|x(s) - \overline{x}(s)| ds \\ &+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s)|x(s) - \overline{x}(s)| ds. \end{aligned}$$

Ainsi
$$\|h_1 - h_2\|_\infty \leq \left[\|I^\alpha l\|_\infty + \frac{|b|I^\alpha l(T)}{|a+b|}\right]\|x - \overline{x}\|_\infty.$$
D'une relation analogue, obtenue en échangeant les rôles de x et $\overline{x}$, il s'ensuite que
$$H_d(N(x), N(\overline{x})) \leq \gamma\|x - \overline{x}\|_\infty \leq \left[\|I^\alpha l\|_\infty + \frac{|b|I^\alpha l(T)}{|a+b|}\right]\|x - \overline{x}\|_\infty.$$

Donc, par (3.12), N est une contraction et donc, par le (1.7.5) du point fixe de Covitz et Nadler, N admet un point fixe x qui est la solution de (3.1)-(3.2).

■

3.4 Exemple

Dans cette section, nous appliquons le résultat principal du Théorème 3.2.1 à la fraction inclusion différentielle,

$$^{C}D^\alpha x(t) \in F(t, x(t)), \text{ pour tout } t \in I = [0, T],\ 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.13}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.14}$$

où $f_1, f_2 : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications, telles que pour tout $t \in I$, $f_1(t, .)$ est semi continue inférieurement(i.e. l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f_1(t, x) > \mu\}$ est ouvert pour chaque $\mu \in \mathbb{R}$), et $f_2(t, .)$ est semi continue supérieurement (i.e, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f_2(t, x) < \mu\}$ est ouvert pour chaque $\mu \in \mathbb{R}$). Définitions l'application multivoque $F : I \times \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ par

$$F(t, x) = \{v \in \mathbb{R} : f_1(t, x) \leq v \leq f_2(t, x)\}.$$

Supposons qu'il existe $\psi \in C(I, \mathbb{R}_+)$ et $\phi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ continue et non décroissante telle que

$$\max(|f_1(t, x)|, |f_2(t, x)|) \leq \psi(t)\phi(|x|), t \in I;\ \text{et tout } x \in \mathbb{R}.$$

F est à valeurs convexes compactes et s.c.s. En effet

1. Soient v_1, $v_2 \in F(t,x)$,

$$\begin{cases} f_1(t,x) \leq v_1 \leq f_2(t,x) \\ \qquad\qquad \text{et} \\ f_1(t,x) \leq v_2 \leq f_2(t,x) \end{cases}$$

$\forall \lambda \in [0,1]$:

$$\begin{cases} \lambda f_1(t,x) \leq \lambda v_1 \leq \lambda f_2(t,x) \\ \qquad\qquad \text{et} \\ (1-\lambda) f_1(t,x) \leq (1-\lambda) v_2 \leq (1-\lambda) f_2(t,x) \end{cases}$$

   Alors

$$f_1(t,x) \leq \lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \leq f_2(t,x),$$

   d'où $v_1 + (1-\lambda)v_2 \in F(t,x)$, ce qui implique que F est à valeurs convexes.

2. $F(t,x) = \Big[f_1(t,x), f_2(t,x)\Big]$ est compact puisque elle est fermé et borné.

3. Soit W un fermé de $\mathbb{R}$, $(t_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $I \times \mathbb{R}$ convergeant vers $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ tel que

$$F(t_0, x_0) \subset W.$$

   Par la semi-continuité supérieure de f_2 et la la semi-continuité inférieure de f_1, nous avons la relation

$$\limsup_{n\to\infty} f_1(t_n, x_n) \leq f_1(t_0, x_0) \leq f_2(t_0, x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f_2(t_n, x_n),$$

   ce qui implique

$$f_1(t_n, x_n) \leq f_1(t_0, x_0) \leq f_2(t_0, x_0) \leq f_2(t_n, x_n),$$

de laquelle nous déduisons que

$$F(t_n, x_n) \subset W, \ \forall n \geq 1.$$

Donc F est s.c.s.

Comme toutes les conditions du Théorème 3.2.1 sont satisfaites, alors le problème (3.13)-(3.14) admet au moins une solution x sur I.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Abbas, M. Benchohra, G. N'Guérékata, Topics in fractional differential equations. Springer-Verlag, New York, 2012.

[2] J. Aubin, A. Cellina, Differential Inclusions, Set-valued maps and viability theory, vol. 264. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1984.

[3] J. Aubin, H. Frankowska, Set-Valued Analysis. Birkhauser, Boston, 1990.

[4] A. Belarbi, M. Benchohra, S. Hamani, S. Ntouyas, Perturbed functional differential equations with fractional order, Commun. Appl. Anal. 11 (2007), 429– 440.

[5] A. Belarbi, M. Benchohra, A. Ouahab, Uniqueness results for fractional functional differential equations with infinite delay in Fréchet spaces, Appl. Anal. 85 (2006), 1459–1470.

[6] M. Benchohra, S. Hamani, S. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order. Surveys in Mathematics its Applications 3 (2008), 1–12.

[7] M. Benchohra, J. Henderson, S. Ntouyas, A. Ouahab, Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, J. Math. Anal. Appl. 338 (2) (2008), 1340-1350.

[8] J. Bonnar, The gamma function, treasure trove of mathematics, 2017.

[9] R. Campbell, Les intégrales eulériennes et leurs applications. Étude approfondie de la fonction gamma. Dunod, 1966.

[10] C. Castaing, M. Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions, vol. 580. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[11] H. Covitz, S. Naddler Jr, Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces. Israel Journal of Mathematics 8 (1970), 5–11.

[12] K .Deimling, Multivalued differential equations. Walter De Gruyter, Berlin-New York, 1992.

[13] A. Granas, J. Dugundji, Fixed point theory. Springer-Verlag, New York, 2003.

[14] N. El-Hage Hassan, Topologie générale et espaces normés, 2011.

[15] Sh. Hu, N. Papageorgiou, Handbook of multivalued analysis, theory I, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[16] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier science B. V., Amsterdam, 2006.

[17] W. Michel, Analyse fonctionnelle élémentaire. Cassini, Paris, 2000.

[18] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press,San Diego, 1999.

[19] K. Yosida, Functional Analysis, 6^{th} edn. Springer-Verlag, Berlin, 1980.