RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse fonctionnelle .

Thème

Solution Approchée Pour Une Inclusion Différentielle

Présenté par :

- Boukahoul Kamel.

Devant le jury :

Président	: T. Zerzaihi	Professeur Université de Jijel
Encadreur	: M. Yarou	Professeur Université de Jijel.
Examinateur	: F. Slamnia	M.C.B Université de Jijel.

Promotion **2020/2021**

Dédicace

A ma très chère tante et ma mère ***Fatima*** *, Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différentes obstacles.*

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, je remercie ALLAH qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur **MR.YAROU.MUSTAPHA**, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail,Le Professeur **TAHAR.ZERZAIHI**, qui me fait l'honneur de présider ce jury, **FATIHA SLAMNIA**,**M.C.B**, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

A , TOUS , UN GRAND MERCI.

Table des matières

Notations et abréviations

► Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

- $\mathbb{R}$ Ensemble des nombres réels.
- $\overline{\mathbb{R}}$ La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- $\mathbb{N}$ Ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}^n$ Ensemble des vecteurs de dimension $n (n \in \mathbb{N})$ à coordonnées réelles.
- Ω Est un domaine de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2 \ ou \ 3)$.
- Γ La frontière de Ω supposée régulière .
- $mes(\Gamma)$ La mesure de Lebesgue de Γ.
- ν La normale unitaire sortante à Γ.
- $\mathbb{S}^d$ L'espace des matrices symétrique d'ordre d.
- E L'espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|_E$.
- E' Le dual topologique de E.
- E'' Le bidual topologique de E.
- $\langle ., . \rangle$ Produit de dualité entre E et E'.
- H Un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$.
- $\| \cdot \|$ La norme de H.
- $B(x_0, r)$ La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.
- $\overline{B}(x_0, r)$ La boule fermé de centre x_0 et de rayon r.
- $co(A)$ L'enveloppe convexe d'un ensemble A.
- $\overline{co}(A)$ L'enveloppe convexe fermé d'un ensemble A.
- $\rightarrow$ La convergence forte.
- $\rightharpoonup$ La convergence faible.

- $C([0,T],H)$ Espace des fonctions continues de $[0,T]$ à valeurs dans H.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Le produit scalaire de H.
- $\mathcal{F}(X,Y)$ L'espace de toutes les applications $F : X \to Y$.
- $L^p(X,Y)$ L'espace des applications $p^{\text{ème}}$ intégrables $(1 \leq p < \infty)$.
- $L^\infty([0,T],H)$ L'espace des applications essentiellement bornées définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H .
- $\mathbf{C}(X,Y)$ L'espace de toutes les applications continues $f : X \to Y$, muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_{\mathbf{C}} = \sup_{t \in X} \|f(t)\|_Y.$$

- $d(x,A) = \inf_{a \in A} \mid x - a \mid$ La distance d'un point x d'un espace metrique X à l'ensemble A (A est une partie non vide de X).

► Considérons X et Y deux espaces vectoriels normés et $F : X \to Y$ une multi-application

- $\mathrm{Dom}(F)$ Le domaine de la multi-application F.
- $\mathrm{Im}(F)$ L'image de la multi-application F.
- $\mathrm{Gph}(F)$ Le graphe de la multi-application F.

- $p.p$ Presque par tout.
- $int(C)$ Intérieur d'un ensemble C.
- $adh(C)$ Adhérence d'un ensemble C.
- C^- Le cône polaire négatif d'un ensemble C.
- $C^\perp$ Le sous-espace orthogonal d'un ensemble C.
- $\iota_C(\cdot)$ La fonction caractéristique d'un ensemble C.
- $\bigtriangledown f(x_0)$ Le gradient de f au point x_0.
- $Div(f)$ La divergence de la fonction f .
- $N_C(x)$ Le cone normal où C en x.
- $s.c.i$ Semi-continue inférieurement.
- $s.c.s$ Semi-continue supéreurement.

Introduction

La théorie des inclusions différentielles a joué un rôle central dans de nombreux domaines comme les systèmes biologiques, problèmes physiques et dynamique de la population. Le but principal de notre travail est de calculer explicitement la solution approchée discrète d'une inclusion différentielle incluant un opérateur maximale monotone.

Nous présentons également une application numérique de nos résultats pour montrer comment calculer la solution approchée discrète d'une inclusion différentielle correspondante. L'inclusion différentielle a été étudiée par **S. Adly**, **A. Hantoute**, **T. Nguyen**, **M. Thera** et **L. B. Khiet** dans **[1][2][3]**, et par **Y. Shang** **[4][5][6]** dans l'étude de la stabilité à temps fixe dans le domaine de l'ingénierie de commande. Nous référons le lecteur intéressé à **[7][8]** pour plus de détails concernant les applications connexes (questions mathématiques liées à analyse portant respectivement sur des milieux poreux ou des systèmes biologiques).

Nous considérons, dans ce travail, l'inclusion différentielle suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{v}(s) \in g(v(s)) - B(v(s)) \quad \text{avec} \quad s \in [0,1] \\ v(0) = v_0 \in \operatorname{dom} B \end{cases}$$

Où

$B : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est un operateur maximal monotone,

$g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction k Lipschitz ,

$\operatorname{Dom} B$ est le domaine de B qui est donné par $\operatorname{Dom} B := \left\{x \in \mathbb{R}^N : Bx \neq \emptyset\right\}$,

$v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est l'inconnue,

$[0,1]$ l'intervalle du temps (pour la simplification).

En 2006, Mordukhovich **[9]** envisagé l'inclusion différentielle d'accompagnement $\dot{v}(s) \in G(v(s))$ p.p $s \in [0, b]$ où G est un multifonction lipschitz.
En 2019, dans le travail **[10]** la même méthode a été utilisé pour étudier l'inclusion différentielle suivante :

$$v(s) \in -N_{C(s)}(v(s)) \quad \text{p.p} \quad 0 \leq s \leq t, \quad v(0) \in C(0)$$

Où $C(s)$ est un ensemble convexe variable qui se déplace de façon continue en temp et $N_{C(s)}(x)$ désigne le cône normal associé à l'ensemble $C(s)$ en x.

Nous présentons dans ce travail une méthode pour obtenir la meilleure solution approximative de (1).
L'existence de la solution de cette inclusion est un résultat classique prouvé par **Brezis** dans **[11]**.
Le but principal de ce travail est de montres que si $v_n(s) \to v(s)$ lorsque $n \to +\infty$
Nous présentons aussi une application numérique de se resultat pour montrer comment calculer la solution approximative de l'inclusion différentielle correspondante

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre nous allons introduire tous les résultats et les notions qui nous seront très utiles tout au long de ce mémoire.
On commence par quelques concepts d'analyse convexe et d'analyse fonctionnelle.

1.1 Quelques espaces

1.1.1 Espace métrique

Définition 1.1.1. ***(Distance)*** *On considère un ensemble X, on appelle distance sur X une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, vérifiant les trois propriétés suivantes*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$

Exemple 1.1.1. *Sur $\mathbb{R}$ la distance usuelle est définie par $d(x, y) = |x - y|$.*

Définition 1.1.2. ***(Espace métrique)*** *Soit X un ensemble muni de la distance d, alors (X, d) s'appelle un espace métrique.*

Définition 1.1.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Si x est un point de X et A une partie de X alors on a*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}$$

Définition 1.1.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique. On dit qu'une suite* (x_n) *d'éléments de* X *est une suite de Cauchy si* $\forall \varepsilon > 0$*, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tous* $m, n \geq n_0$ *on a* $d(x_m, x_n) < \varepsilon$

Définition 1.1.5. *Soient* (X, d) *et* (Y, d') *des espaces métriques, et soit* $f : X \longrightarrow Y$ *une application,* f *est dite Lipschitzienne de constante (où : de rapport)* $\lambda \geq 0$ *si*

$$\forall x \in X, \forall y \in X : d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

Définition 1.1.6. *Un espace métrique* (X, d) *sera dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de* X *est convergente dans* (X, d)*.*

Définition 1.1.7. *Soit* X *un* $\mathbb{K}$ *-espace vectoriel,* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Une norme sur* X *est une application* $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *qui vérifie pour tous* x *et* y *dans* X *et* λ *dans* $\mathbb{K}$ *:*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(l'inégalité triangulaire).*

Exemple 1.1.2.

1. *L'application* $x \to |x|$ *est un norme sur* $\mathbb{R}$
2. *L'application* $z \to |z|$ *est une norme sur* $\mathbb{C}$
3. *Dans* $\mathbb{R}^n$*, on définit les trois normes suivantes :*

   si $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ *est dans* $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots.. + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots. |x_n|)$$

Définition 1.1.8. *Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé.*

1.1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.1.9. *Soit* X *un espace vectoriel. Un produit scalaire* $< u, v >$ *est une forme bilinéaire de* $X \times X$ *dans* $\mathbb{R}$*, symétrique, définie positive* $(i.e. < u, v > \geq 0, \forall u \in X$ *et* $< u, u >> 0$ *si* $u \neq 0)$

Définition 1.1.10. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire* $< u, v >$ *et qui est complet pour la norme* $< u, u >^{\frac{1}{2}}$

Exemple 1.1.3. $\mathbb{R}^n$ *est un espace de Hilbert.*

1.1.3 Espace de Banach

Définition 1.1.11. *Un espace vectoriel normé* $(X, \|\cdot\|)$ *sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou bien* $\mathbb{C}$ *qui est complet pour la distance associé a sa norme est appelé un espace de Banach.*

Définition 1.1.12. *L'espace vectoriel normé* $X = ([0, 1], \mathbb{R})$ *de la norme* $\| \cdot \|_1$ *n'est pas complet, ce n'est pas un espace de Banach.*

Définition 1.1.13. *Soit* E *un espace de Banach. une fonction* $f : [a, b] \longrightarrow E$ *est dite absolument continue si* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle* $[a, b]$ *par des intervalles disjoints* $[a_k, b_k]$ *vérifient*

$$\sum_{k \geq 0} (b_k - a_k) < \delta$$

on a

$$\sum_{k \geq 0} \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon$$

Proposition 1.1.1. *Soient* E *un espace de Banach et* $f \in L^1(I, E)$*. Alors* f *est abso- lument continue si il existe une fonction* $g \in L^1(I, E)$ *tell que*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds, \forall t \in I.$$

Définition 1.1.14. *Soient* E *un espace de Banach. Une fonction* $f : [a, b] \longrightarrow E$ *est absolument continue si est seulement si*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt$$

Remarque 1.1.1.

1. *Toute fonction absolument continue est continue.*
2. *Toute fonction Lipschitzienne est absolument continue.*
3. *Toute fonction absolument continue est uniformément continue.*

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Ensembles convexes

Définition 1.2.1 (Ensembles convexes). *Un sous-ensemble C de H est dit convexe si*

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1] : \ \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

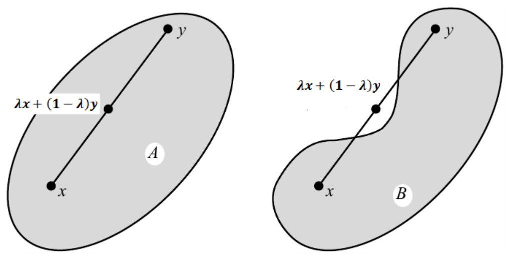

FIGURE 1.1 – A convexe, B non convexe.

Exemple 1.2.1.

1. *H et $\emptyset$ sont convexes.*
2. *Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.*
3. *Une boule ouverte ou fermée est convexe.*

1.2.2 Fonctions convexes

Définition 1.2.2 (Domaine effectif). *Soient H un espace de Hilbert et une fonction $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On appelle domaine effectif de f l'ensemble défini par :*

$$Domf := \{x \in H : f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.2.3 (Fonction propre). *La fonction f est dit propre si $Domf \neq \emptyset$. et $f(x) \neq -\infty, \ \forall x \in H$.*

Définition 1.2.4 (Fonction convexe). *On dit qu'une fonction $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si pour tout $x, y \in \operatorname{Dom} f$ et pour tout $t \in [0,1]$ on a :*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Définition 1.2.5. *Soient $D : H \longrightarrow H$ une application linéaire symétrique*
D est semi définie positive si $< Dx, x > \geq 0$

Exemple 1.2.2. *Soient $D : H \longrightarrow H$ une application linéaire symétrique et une fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) =< Dx, x >$ alors :*
D est semi définie positive si et seulement si f est convexe.

Définition 1.2.6 (Épigraphe). *On appelle épigraphe d'une fonction $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble défini par :*

$$epif := \{(x, t) \in H \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

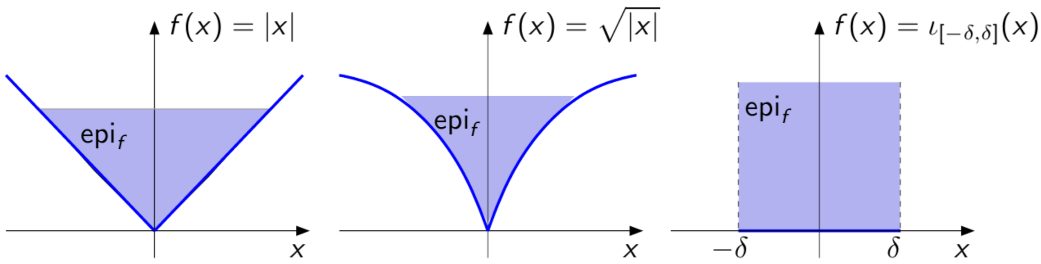

FIGURE 1.2 – Exemples Épigraphe des fonctions usuelles.

Proposition 1.2.1.

1. *f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe dans $H \times \mathbb{R}$.*
2. *Si f_1 et f_2 sont des fonctions convexes, alors $f_1 + f_2$ est convexe.*
3. *$(f_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions convexe alors **l'enveloppe supérieure** des (f_i) est convexe c'est-à-dire la fonction f définie par : $f(x) = \sup\limits_{i \in I} f_i(x)$ est convexe.*

1.2.3 Semi continuité

Pour une fonction $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nous pouvons définir la semi-continuité.

Définition 1.2.7 (Semi-continuité inférieure). *Une fonction $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement sur H* **(en abrégé s.c.i)** *si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers x, on a :*

$$\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x) \quad \forall x \in H$$

Exemple 1.2.3. *Soit $A : H \longrightarrow H$ une application linéaire, symétrique et semi dèfinie positive, alors*
la fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ est s.c.i sur H.
En effet,
Soit $(x)_n$ une suite qui converge vers x dans H alors par la linéarité de A, on a

$$\begin{aligned} f(x - x_n) &= \langle A(x - x_n), x - x_n\rangle \\ &= \langle Ax, x\rangle - \langle Ax, x_n\rangle - \langle Ax_n, x\rangle + \langle Ax_n, x_n\rangle \end{aligned}$$

Par la symétrie de A et du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned} f(x - x_n) &= \langle Ax, x\rangle - 2\langle Ax, x_n\rangle + \langle Ax_n, x_n\rangle \\ &= f(x) - 2\langle Ax, x_n\rangle + f(x_n) \end{aligned}$$

Et comme A est semi dèfiniè positive, on déduit que

$$2\langle Ax, x_n\rangle - f(x) \leq f(x_n)$$

Il est clair que $\langle Ax, x_n\rangle \longrightarrow \langle Ax, x\rangle = f(x)$ quand $n \longrightarrow \infty$ (par la continuité du produit scalaire), donc en passant à la limite inférieure, on obtient

$$f(x) \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} f(x_n)$$

Remarque 1.2.1.

1. *f est s.c.s si $(-f)$ est s.c.i .*
2. *f est continue si et seulement si f est s.c.s et s.c.i. à la fois.*

propriété 1.2.1.

1. *f est s.c.i si et seulement si son épigraphe est fermé dans $H \times \mathbb{R}$.*
2. *Si f_1 et f_2 sont s.c.i alors $f_1 + f_2$ est s.c.i.*
3. *$(f_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions s.c.i alors **l'enveloppe supérieure** des (f_i) est s.c.i.*

Définition 1.2.8. *On dit que la suite (x_n) de H converge faiblement vers $x \in H$ si*

$$\lim_{n \to +\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall y \in H$$

On note $x_n \rightharpoonup x$. La convergence forte entraine la convergence faible :

Proposition 1.2.2. *Si (x_n) converge fortement vers x, alors (x_n) converge faiblement vers x.*

Preuve.

En effet, pour tout $y \in H$,

$$|\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\| \, \|y\| \to 0$$

■

Définition 1.2.9. *Une fonction $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est faiblement semi-continue inférieurement sur H si pour tout $x_n \rightharpoonup x$, on a*

$$\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x) \quad \forall x \in H.$$

Remarque 1.2.2. *Toute fonction s.c.i alors elle est faiblement s.c.i mais la réciproque est n'est pas vraie en générale, elle est juste sous la convexité de la fonction.*

Exemple 1.2.4. *Soit $A : H \longrightarrow H$ une application linéaire, symétrique et semi-définie positive, alors*
la fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) =< Ax, x >$ est faiblement s.c.i sur H.

Théorème 1.2.1. ***[28]*** *Soit E un espace vectoriel topologique compact et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction s.c.i, alors f atteint son minimum sur E.*

1.2.4 Sous-différentiel et cône normal

Définition 1.2.10. ***[Sous-différentiel]*** *Soient H un espace de Hilbert et f une fonction convexe, propre et définie de H à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in dom(f)$.*
Le sous-différentiel de f au point x_0, noté $\partial f(x_0)$ est le sous-ensemble de H défini par :

$$\partial f(x_0) := \{\xi \in H : f(x) \geq f(x_0) + \langle \xi, x - x_0\rangle \, , \, \forall x \in H\} \, .$$

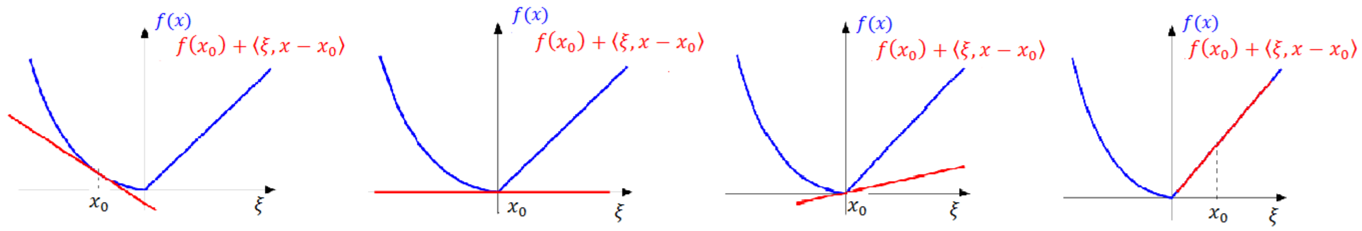

FIGURE 1.3 – Le sous différentiel (animation).

Remarque 1.2.3. *Si $x_0 \notin Dom(f)$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.*

Exemple 1.2.5.

Considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = |x| \,. \end{array}$$

$\partial f(0) = [-1, 1]$. *En effet,*

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \{y \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(0) + \langle y, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : |x| \geq x \cdot y \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : x\, y \leq x, \ \forall\, x > 0\} \cap \{y \in \mathbb{R} : x\, y \leq -x, \ \forall\, x < 0\} \cap \mathbb{R} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y \leq 1\} \cap \{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\} \cap \mathbb{R} \\ &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.3. *Si $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et différentiable en x_0 alors*

$$\partial f(x_0) = \{\bigtriangledown f(x_0)\}.$$

Définition 1.2.11 (Cône). *Un sous-ensemble $C \subset H$ est un cône si*

$$\forall\, x \in C\,,\, \forall \lambda \geq 0\,, \quad \lambda x \in C.$$

Définition 1.2.12 (Cône normal). *Soit $C \subset H$ un sous-ensemble convexe et $x_0 \in C$. On appelle cône normal de C au point x_0 l'ensemble noté $N_C(x_0)$ défini par :*

$$N_C(x_0) = \{\xi \in H : \langle \xi, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall\, x \in C\}.$$

On vérifie aisément que $N_C(x_0)$ est un cône convexe et fermé et que $\{0\} \in N_C(x_0)$.

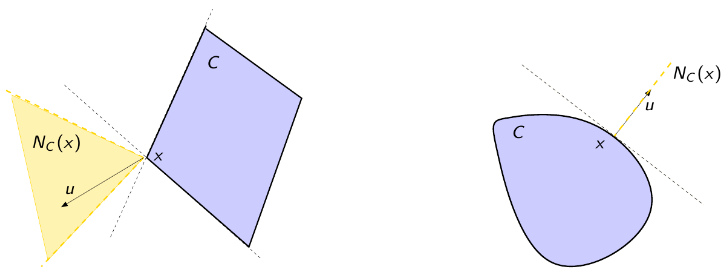

FIGURE 1.4 – Exemple de Cônes normaux.

Théorème 1.2.2. *Soit E un espace vectoriel normé, $C \subset E$ un sous-ensemble convexe tel que $int(C) \neq \emptyset$. Alors si $x \in int(C)$, on a $N_C(x) = \{0\}$.*

Preuve.

Soit $v \in N_C(x) \Longrightarrow v = 0$?

$$x \in int(C) \Longrightarrow \exists \delta > 0 \quad x + \delta B(0,1) \subset C,$$

$$\begin{aligned} v \in N_C(x) \Leftrightarrow \langle v, x + \delta e - x\rangle &\leq 0 \quad \forall e \in B(0,1), \\ \langle v, \delta e\rangle &\leq 0 \quad \forall e \in B(0,1), \\ \langle v, e\rangle &\leq 0 \quad \forall e \in B(0,1). \end{aligned}$$

Soit $r > 0$ suffisamment petit telle que $rv \in B(0,1)$

$$\begin{aligned} \langle v, rv\rangle \leq 0 &\Longrightarrow r\,\|v\|^2 \leq 0, \\ &\Longrightarrow \|v\| = 0 \Longrightarrow v = 0. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.2.4. *Soit C un sous-ensemble convexe de H et $x, y \in H$ tel que $x + y \in C$, $-x \in C$ alors :*

$$\textbf{1)}\ N_C(x+y) = N_{C-y}(x)\ .$$

$$\textbf{2)}\ N_C(-x) = -N_{-C}(x)\ .$$

Preuve.

$$\begin{aligned} 1)\ \textit{soit}\ z \in N_C(x+y) &\Longleftrightarrow \langle z, w - x - y\rangle \leq 0 \quad \forall\, w \in C, \\ &\Longleftrightarrow \langle z, (w - y) - x\rangle \leq 0 \quad \forall\, w \in C, \\ &\Longleftrightarrow z \in N_{C-y}(x)\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\ \textit{soit}\ z \in N_C(-x) &\Longleftrightarrow \langle z, w + x\rangle \leq 0 \quad \forall\, w \in C, \\ &\Longleftrightarrow \langle -z, -w - x\rangle \leq 0 \quad \forall\, w \in C, \\ &\Longleftrightarrow -z \in N_{-C}(x)\ . \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

1.2.5 Fonctions conjuguées

Définition 1.2.13. *Étant donnée une fonction propre $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on définit la fonction $f^* : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, **conjugué** de f par :*

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in H}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}.$$

L'application $f \longmapsto f^*$ est appelée **transformation de Legendre-Fenchel**.
*Notons que f^* est une fonction convexe et s.c.i sur H. En effet, pour chaque $x \in H$ **fixé** l'application $x^* \longmapsto \langle x^*, x\rangle - f(x)$ est convexe et continue, donc s.c.i. Par suite, **l'enveloppe supérieure** de ces fonctions (lorsque x parcourt l'ensemble d'indices H) est convexe et s.c.i.*

Proposition 1.2.5. ***[31]*** *On suppose que f est une fonction convexe s.c.i et propre, alors f^* est une fonction propre.*

On définit maintenant, lorsque f^* est une fonction propre, la fonction $f^{**} : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ par :

$$f^{**}(x) := \sup_{x^* \in H}\{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\}.$$

Théorème 1.2.3. ***[31]*(Fenchel-Moreau)**. *On suppose que f est une fonction propre, convexe et s.c.i. alors $f^{**} = f$.*

Lemme 1.2.1. *Soit $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, convexe et s.c.i alors :*

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(x^*).$$

tell que $\partial f(x)$ est le sous différentiel de f
Ce qui signifié que $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$.

Preuve. Soit $x^* \in \partial f(x)$ et donc

$$f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle, \quad \forall\, y \in H.$$

Or

$$\langle x^*, x\rangle - f(x) \geq \langle x^*, y\rangle - J(y), \quad \forall\, y \in H.$$

Par suite $f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle - f(x)$, d'où pour tout $z \in H$:

$$f^*(z) - f^*(x^*) \geq \langle z, x\rangle - f(x) - \langle x^*, x\rangle + f(x) = \langle z - x^*, x\rangle.$$

Par conséquent $x \in \partial f^*(x^*)$.

Inversement, soit $x \in \partial f^*(x^*)$ alors en utilisant le résultat précédent on trouve que $x^* \in \partial f^{**}(x)$, comme f une fonction propre, convexe et s.c.i alors d'après le **théorème 1.2.3** on a : $f = f^{**}$, et par suite $x^* \in \partial f(x)$. ■

1.2.6 Fonction indicatrice

Définition 1.2.14. *Soit C un sous-ensemble non vide de H, la fonction indicatrice associée à C est définie par :*

$$\begin{aligned} \delta_C(\cdot) : H &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto \delta_C(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \in C, \\ +\infty & si \;\; x \notin C. \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 1.2.4.

1. *$Dom(\delta_C) = C$ et $epi(\delta_C) = C \times [0, +\infty]$.*
2. *La fonction $\delta_C(\cdot)$ est convexe si et seulement si C est convexe de H.*
3. *La fonction $\delta_C(\cdot)$ est s.c.i si et seulement si C est fermé dans H.*

Proposition 1.2.6. *Soit C un sous-ensemble non vide et convexe de H, et $x_0 \in H$, alors*

$$\partial \delta_C(x_0) = \begin{cases} \emptyset & si \;\; x_0 \notin C. \\ N_C(x_0) & si \;\; x_0 \in C. \end{cases}$$

tell que $N_C(x_0)$ si le cône normal de C au point x_0.

Preuve.

* Si $x_0 \notin C$, on a évidemment que $\partial \delta_C(x_0) = \emptyset$.

* Si $x_0 \in C$, on va montrer que $\partial\delta_C(x_0) = N_C(x_0)$.

  Soit $\xi \in \partial\delta_C(x_0)$, alors

  $\langle \xi, x - x_0\rangle \leq \delta_C(x) - \delta_C(x_0), \quad \forall x \in H.$

  En particulier pour $x \in C$ on a

  $\langle \xi, x - x_0\rangle \leq 0 \quad , \forall x \in C.$

  Or $\xi \in N_C(x_0)$.

  Inversement, si $\xi \in N_C(x_0)$ alors

  $\langle \xi, x - x_0\rangle \leq 0 \quad , \forall x \in C$

  Or $\langle \xi, x - x_0\rangle \leq \delta_C(x) - \delta_C(x_0) \quad , \forall x \in C.$

  De plus $\langle \xi, x - x_0\rangle \leq \delta_C(x) - \delta_C(x_0) \quad , \forall x \in H$ (puisque $\delta_C(x) = +\infty$, si $x \notin C$),

  donc $\xi \in \partial\delta_C(x_0)$.

  D'où le résultat.

■

1.2.7 Fonction support

Définition 1.2.15. *On appelle fonction support de $C \subset H$ qu'on note $\sigma(C,\cdot)$ la fonction définie sur H par :*

$$\begin{aligned} \sigma(C,\cdot) : H &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ \xi &\longmapsto \sigma(C,\xi) = \sup_{x\in C}\langle \xi, x\rangle. \end{aligned}$$

*Le domaine de $\sigma(C,\cdot)$ est appelé le **cône barriére** de C et souvent désigné par $b(C) := dom(\sigma(C,\cdot))$.*

Exemple 1.2.6.

1. *Si $C = \{x\}$, alors $\sigma(C,\xi) = \langle \xi, x\rangle$.*
2. *Si $C = \mathbb{B}$, alors $\sigma(C,\xi) = \|\xi\|$.*
3. *Si C est un cône, alors $\sigma(C,\xi) = \delta_C(\xi)$ et $b(C) = C^-$.*
4. *Si C est un sous-espace vectoriel, alors $\sigma(C,\xi) = \delta_{C^\perp}(\xi)$ et $b(C) = C^\perp$.*

Proposition 1.2.7.

1. *Pour tout $C \subset H$ non vide la fonction support est sous-additive, positivement homogène (i.e. $\sigma(C,\xi_1+\xi_2) \leq \sigma(C,\xi_1) + \sigma(C,\xi_2)$ et $\sigma(C,\lambda\xi) = \lambda\sigma(C,\xi)\ \forall\, \lambda > 0$).*
2. *Pour tout $C_1, C_2 \subset H$, et $\xi \in H$, nous avons : $\sigma(C_1 + C_2,\xi) = \sigma(C_1,\xi) + \sigma(C_2,\xi)$ et $\sigma(C_1 \cup C_2,\xi) = max(\sigma(C_1,\xi),\sigma(C_2,\xi))$.*

Remarque 1.2.5. *soit C un ensemble* ***non vide*** *de H :*

1. $\delta_C^*(y) = \sup\limits_{x \in H}\{\langle y, x\rangle - \delta_C(x)\} = \sup\limits_{x \in C}\langle y, x\rangle = \sigma_C(y)\,, \;\; \forall\, y \in H\,.$
   Donc la fonction support est la conjuguée de l'indicatrice.
2. *D'après la proposition précédente la fonction support $\sigma(C, \cdot)$ est convexe sur H même si l'ensemble C n'est pas convexe de H.*
3. *La fonction support est propre et s.c.i même si l'ensemble C n'est pas fermé de H.*

Proposition 1.2.8. *Toute fonction support $\sigma(C, \cdot)$ d'un sous-ensemble $C \subset H$ est une fonction propre, convexe s.c.i et positivement homogène de H dans $\overline{\mathbb{R}}$.*
Inversement, toute fonction $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre, convexe s.c.i et positivement homogène est la fonction support de l'ensemble suivant :

$$C_\sigma := \{\xi \in H \,/\, \forall\, x \in H, \langle \xi, x\rangle \leq f(x)\}.$$

De plus, si $f(0) = 0$ on a : $C_\sigma := \partial J(0)$.

Preuve.
D'après ce qui précède la première assertion est évidente.
Pour établir la seconde, calculons la fonction conjuguée de f :
Si x^* appartient à C_σ, alors $f^*(x^*) = 0$ car

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in H}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\} \leq 0 = \langle x^*, 0\rangle - f(0) \leq f^*(x^*).$$

Si x^* n'appartient pas à C_σ, il existe alors $x_0 \in H$ tel que $\langle x^*, x_0\rangle - f(x_0) > 0$ donc

$$f^*(x^*) \geq \sup_{\lambda > 0}\{\langle x^*, \lambda x_0\rangle - f(\lambda x_0)\}$$

Comme la fonction J est positivement homogène alors :

$$f^*(x^*) \geq \sup_{\lambda > 0} \lambda\{\langle x^*, x_0\rangle - f(x_0)\} = +\infty.$$

Nous avons donc vérifié que f^* est la fonction indicatrice de C_σ.
Puisque f est une fonction propre, convexe et s.c.i on déduit que :

$$f(x^*) = f^{**}(x^*) = \delta_{C_\sigma}^*(x^*) = \sigma(C_\sigma, x^*)\,, \forall\, x^* \in H.$$

■

Proposition 1.2.9. *Soit C un sous-ensemble non vide et convexe de H et x* ***un élément de*** *C, alors*

$$\xi \in N_C(x) \Leftrightarrow \sigma(C, \xi) = \langle \xi, x\rangle.$$

Preuve.

Soit $y \in C$, alors

$$\begin{aligned} \xi \in N_C(x) &\Leftrightarrow \langle \xi, y - x \rangle \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \xi, y \rangle \leq \langle \xi, x \rangle. \end{aligned}$$

En appliquant le $\sup$ sur y on obtient :

$$\xi \in N_C(x) \Leftrightarrow \sigma(C, \xi) \leq \langle \xi, x \rangle.$$

Comme $x \in C$, on a $\sigma(C, \xi) \geq \langle \xi, x \rangle$, alors

$$\xi \in N_C(x) \Leftrightarrow \sigma(C, \xi) = \langle \xi, x \rangle.$$

D'où le résultat. ■

Proposition 1.2.10. *Soit $T > 0$ et $D(t)$ un sous ensemble non vide de H, supposons que*

1. *$D(t)$ est convexe fermé $\forall t \in [0, T]$.*
2. *$D(\cdot)$ est L-Lipschitzienne sur $[0, T]$.*

Alors,
$x \longmapsto \int_0^T \sigma(D(t), x(t))dt$ *est semi-continue inférieurement sur $L^2([0, T], H)$.*

1.3 Multi-applications (ou fonctions multivoques)

Définition 1.3.1. *Soient X, Y deux ensembles non vides, on appelle **multi-application** ou fonction multivoque définie sur X à valeurs dans Y, toute application F définie sur X à valeurs dans $\mathcal{P}(Y)$ et on note $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ ou $F : X \rightrightarrows Y$.*
Pour tout $t \in X$, $F(t) \subset Y$.

• *On appelle **domaine** (effectif) de F le sous ensemble de X défini par*

$$Dom(F) = \{t \in X : F(t) \neq \emptyset\}.$$

• *On appelle **image** de F le sous ensemble de Y défini par*

$$Im(F) = \{y \in Y : \exists t \in X, y \in F(t)\}.$$

• *Si $A \subset X$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de Y défini par $F(A) = \bigcup_{t\in A} F(t)$ et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y : \exists t \in A,\ y \in F(t)\}.$$

Ainsi, $Im(F) = F(X)$.

Définition 1.3.2. ***(Graphe d'une multi-application)***
Soient X et Y deux ensembles non vides, et soit $F : X \rightrightarrows Y$. On appelle ***le graphe*** *de F qu'on note* ***gph(F)*** *le sous ensemble de $X \times Y$ définie par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y, y \in F(x)\}.$$

Exemple 1.3.1.

Soit F une multi-application définie par

$$F : [0,1] \rightrightarrows [0,1]$$

$$x \mapsto F(x) = \begin{cases} [0,1] \textit{ si } x \neq \frac{1}{2} \\ [0,\frac{1}{2}] \textit{ si } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) Calculons le domaine de F

$$\begin{aligned} Dom(F) =& \{x \in [0,1], F(x) \neq \emptyset\} \\ =& \{x \in [0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1], [0,1] \neq \emptyset\} \cup \{x = \frac{1}{2}, [0,\frac{1}{2}] \neq \emptyset\} \\ =& [0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1] \cup \{\frac{1}{2}\} = [0,1]. \end{aligned}$$

2) Calculons l'image de F

$$\begin{aligned} Im(F) =& \bigcup_{t\in[0,1]} F(t) \\ =& \left(\bigcup_{t\in[0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1]} [0,1] \right) \bigcup_{t=\frac{1}{2}} [0,\frac{1}{2}] \\ =& [0,1] \cup [0,\frac{1}{2}] \\ =& [0,1] \end{aligned}$$

3) Calculons le graphe de F

$$\begin{aligned} gph(F) =&\{(t,x), t \in [0,1], x \in F(t)\} \\ =&\{(t,x), t \in [0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1], x \in [0,1]\} \cup \{(t,x), t = \frac{1}{2}, x \in [0,\frac{1}{2}]\} \\ =&([0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1] \times [0,1]) \cup (\frac{1}{2} \times [0,\frac{1}{2}]) \end{aligned}$$

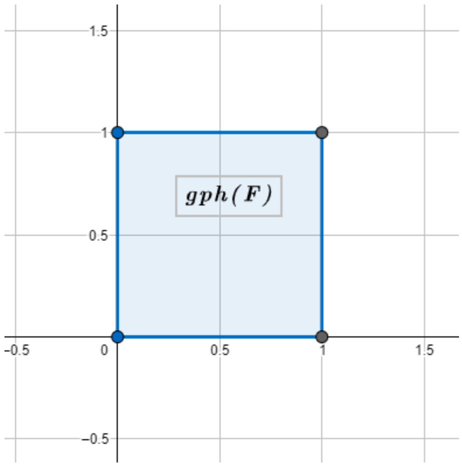

FIGURE 1.5 – Le graphe de F.

1.3.1 Continuité des multi-applications

Définition 1.3.3. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. F est dite semi-continue supérieurement au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$.*
• On dit que F est semi-continue supérieurement sur X si elle est semi-continue supérieurement en tout point $x \in X$.

Théorème 1.3.1. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-aplication à valeurs compacts, alors F est semi-continue supérieurement sur X si et seulement si pour chaque $x \in X$ et chaque suite $(x_n)_n$ de X telle que $x_n \longrightarrow x$, et $(y_n)_n$ de Y avec $(y_n)_n \in F(x_n)$, il existe une sous-suite $(y_m)_m$ de $(y_n)_n$ telle que*

$$\lim_{m\to\infty} y_m \in F(x).$$

Proposition 1.3.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs fermées. Alors le graphe de F est fermé dans $X \times Y$.*

• Le réciproque est donnée par le lemme suivant

Lemme 1.3.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides, avec Y un espace compact. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.*

Théorème 1.3.2. *Soit X un espace métrique, M un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$
et $F : X \rightrightarrows M$ une multi-application si F est s.c.s, alors la multi-application
$x \in X \rightrightarrows co(F(x)) \subset \mathbb{R}^n$ est aussi s.c.s.*

Théorème 1.3.3. *Soient X, Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s à valeurs compactes, alors*

$$\limsup_{x' \to x} F(x') = F(x).$$

1.3.2 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.3.4. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$. On dit que F est $(\Sigma, \mathcal{B}(Y))$-mesurable si pour tout ouvert V de Y*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X; F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.3.2. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) F est Σ-mesurable.

ii) Pour chaque $y \in Y$, la fonction

$$\begin{aligned} g_y : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(y, F(x)) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable.

Définition 1.3.5. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : Dom(F) \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \forall x \in Dom(F).$$

Théorème 1.3.4. *Soient (X, Σ, μ) un espace mésuré tel que Σ est μ-complète et soient (Y,d) un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1) F est Σ-mesurable.

2) Le graphe de F est mesurable.

3) $F^{-1}(B) \in \Sigma$ pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(Y)$.

4) $F^{-1}(C) \in \Sigma$ pour tout fermé C de Y.

1.4 Opérateurs maximaux monotones

1.4.1 Notion d'opérateur monotone

Définition 1.4.1 (Opérateur monotone). *L'opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit monotone si*

$$\forall u, v \in D(A) \;\; \forall u_1 \in A(u), \forall v_1 \in A(v), \;\; \langle v_1 - u_1, v - u \rangle \geq 0.$$

Proposition 1.4.1. *Soit f une fonction convexe propre sur H. Alors le sous-différentiel de f est un opérateur monotone.*

Preuve.
∂f est monotone $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(\partial f), \; \forall y_1 \in \partial f(x_1), \forall y_2 \in \partial f(x_2), \; \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$
Soient $x_1, x_2 \in D(\partial f)$ et $y_1 \in \partial f(x_1), \; y_2 \in \partial f(x_2)$.

$$y_1 \in \partial f(x_1) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_1) + \langle y_1, x - x_1 \rangle \,, \; \forall x \in H, \tag{1.1}$$

$$y_2 \in \partial f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_2) + \langle y_2, x - x_2 \rangle \,, \; \forall x \in H, \tag{1.2}$$

on a en particulier pour $x = x_2$ dans (1.1) et pour $x = x_1$ dans (1.2),
$f(x_2) \geq f(x_1) + \langle y_1, x_2 - x_1 \rangle$ et $f(x_1) \geq f(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle$, par addition

$$\langle y_1, x_2 - x_1 \rangle + \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle \leq 0, \;\; \text{donc} \;\; \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

D'où la monotonie de ∂f. ■

Remarque 1.4.1. *Si A_1 et A_2 sont des opérateurs monotones, alors $A_1 + A_2$ est un opérateur monotone .*

1.4.2 Notion d'opérateur maximal monotone

L'ensemble des opérateurs monotones de H est inductif pour l'inclusion des graphes se qui justifie la définition suivante :

Définition 1.4.2 (Opérateur maximal monotone). *Un opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit maximal monotone s'il est monotone et s'il n'existe pas d'opérateur monotone $G : H \rightrightarrows H$ tel que $gph(A) \subset gph(G)$.*

Proposition 1.4.2. *[32] Soit un opérateur $A : H \rightrightarrows H$. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

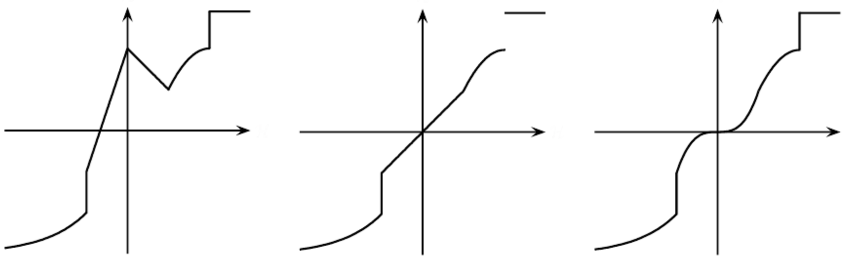

FIGURE 1.6 – Graphe d'un opérateur non monotone (à gauche) et version monotone (en centre) et version maximale monotone (à droite).

1. *A est maximal monotone.*
2. *A est monotone et $R(id + A) = H$.*

Exemple 1.4.1. *Soit $A : H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone de H, les opérateurs A^{-1} et λA pour $\lambda > 0$ sont maximaux monotones.*

Corollaire 1.4.1. *[33] Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur monotone et continu. Alors A est maximal monotone.*

Proposition 1.4.3. *[32] Soit f une fonction convexe propre sur H. Si f est semi-continue inférieurement alors le sous-différentiel de f est maximal monotone.*

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.4.1. *[32] Soit f une fonction convexe propre sur H et $\alpha \geq 0$. La fonction convexe $x \mapsto f(x) + \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2$ atteint son minimum en x_0 si et seulement si $\alpha(y - x_0) \in \partial f(x_0)$*

Revenons maintenant à la preuve de la **proposition 1.4.3** .

Preuve.
On sait déjà d'après la **Proposition 1.4.1** que ∂f est monotone, donc il reste à démontrer que $R(id + \partial f) = H$. Il est clair que $R(id + \partial f) \subset H$. Montrons que $H \subset R(id + \partial f)$. Soit $y \in H$, comme $y \in R(id + \partial f) \Leftrightarrow$

$$y \in \bigcup_{x \in D(id+\partial f)} (id + \partial f)(x) \Leftrightarrow \exists\, x_0 \in D(id + \partial f) \text{ tel que : } y \in (id + \partial f)(x_0),$$

$$\Leftrightarrow \exists\, x_0 \in D(id + \partial f) \text{ tel que : } y \in x_0 + \partial f(x_0).$$

La fonction $x \mapsto f(x) + \frac{1}{2}\|x-y\|^2$ est convexe s.c.i et tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\| \mapsto +\infty$, donc d'après le **Théorème 1.2.1** elle atteint son minimum en $x_0 \in H$ ce qui implique d'après le **Lemme 1.4.1** que $y \in x_0 + \partial f(x_0)$. D'où ∂f est maximal monotone d'après la **Proposition1.4.2**. ■

Remarque 1.4.2. *D'après la proposition précédente et la **remarque 1.2.4**, on peut dire que : si C est un sous-ensemble non vide, convexe et fermé de H alors le cône normale de C est un opérateur maximal monotone.*

Définition 1.4.3 (projection orthogonale). *La projection orthogonale appliquant Π_X sur un ensemble X est défini comme :*

$$\Pi_X(s) = \left\{ z \in X : \|z - s\| = \inf_{y \in X} \|y - s\| \right\}.$$

Définition 1.4.4 (la résolvente). *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-aplication Pour $\lambda > 0$, la résolvente de F donnée par*

$$J_\lambda^F x := (\mathrm{id} + \lambda F)^{-1}(x)$$

Définition 1.4.5 (l'approximation de Yoshida). *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-aplication l'approximation de Yoshida de F est donnée par*

$$F_\lambda x := \frac{1}{\lambda} \left(id \ - J_\lambda^F \right)(x)$$

1.4.3 Surjectivité et somme d'opérateurs maximaux monotones

T étant un opérateur maximal monotone, on peut trouver facilement des conditions suffisantes pour que T soit surjectif.

Définition 1.4.6 (Opérateur coercif). *On dit que un opérateur $T : H \rightrightarrows H$ est coercif si pour tout $(x_n, y_n) \in gph(T)$ tel que $\lim_{n \to +\infty} \| x_n \| = +\infty$, nous avons*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{< x_n - x_0, y_n >}{\| x_n \|} = +\infty \quad , \forall x_0 \in H. \tag{1.3}$$

Autrement dit, T est coercif s'il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\langle Tx, x \rangle \geq \beta \|x\|^2, \ \forall \, x \in H.$$

Corollaire 1.4.2. *[27] Soit $T : H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone et coercif, alors T est surjectif.*

Étant donnés A et B maximaux monotones, l'opérateur $A + B$ est monotone mais, en générale, il n'est pas maximal monotone (puisque son domaine peut être vide).

Corollaire 1.4.3. *[32] Soient $A, B : H \rightrightarrows H$ deux opérateurs maximaux monotones. si $(D(B) \cap int(D(A))) \neq \emptyset$, alors $A + B$ est maximal monotone.*

1.4.4 Le processus de la rafle

Nous présentons maintenant le problème suivant qui est connu sous le nom de processus de rafle :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) \quad p.p\ sur\ [0,T], \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $N_{C(t)}(u(t))$ et le cône normal au sens de l'analyse convexe à l'ensemble convexe $C(t)$ au point $u(t)$.

Pour interpréter le mécanisme décrit par ce problème , on suppose que $u(t)$ se trouve à l'nterieur de l'ensemble $C(t)$ ce point est réduit à zéro et donc, la vitesse du point est nulle , c-à-d le point ne bouge pas. par contre, tout contact du point $u(t)$ avec la frontière de l'ensemble $C(t)$ produit un choc qui repousse ce première avec une vitesse opposée à la normale à l'ensemble. En résume, le problème décrit le mouvement d'un ensemble qui traîne un point.

Il intervient dans beaucoup de domaine comme dans l'élastoplasticité, en contrôle optimale, en médecine avec la modélisation de canaux de médicaments, en modélisation de mouvement de foule, de circuit électrique, etc...

Récemment, dans **[20]**, les auteurs ont proposé une nouvelle variante du processus de rafle avec des contraintes sur la vitesse :

$$\begin{cases} A_1\dot{u}(t) + A_0u(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(\dot{u}(t)) \quad p.p\ sur\ [0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

$A_0, A_1 : H \longrightarrow H$ sont deux opérateurs linéaires bornés. Ils ont montré le caractère bien posé pour cette variante sous la bornitude de C. Des applications sur les circuits électriques non-réguliers ont été fourni. Le cas des contraintes non bornées C a été relaxé dans **[22]**. Poursuivre l'idée, une autre variante du processus de rafle implicite a été introduit et étudier dans **[20]** :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(Au'(t) + Bu(t)) \quad p.p\ sur\ [0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

avec condition de compatibilité :

$$Bu_0 \in C(0).$$

où $A, B : H \longrightarrow H$ sont deux opérateurs linéaires, bornés.

Chapitre 2

Solution approximative d'une inclusion différentielle

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous commençons tout d'abord par rappeler la définition de la Trajectoire discréte et l'extension par morceaux parce qu'ils sont très importants dans ce travail.

Ensuite, nous passons à prouver deux propositions importantes **Proposition 2.2.1** et **Proposition 2.2.2** parce qu'ils aident à prouver qu'il existe une seule solution approximative de l'inclusion différentielle (1).

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{v}(s) \in g(v(s)) - B(v(s)) \quad \text{avec} \quad s \in [0,1] \\ v(0) = v_0 \in \operatorname{dom} B \end{cases}$$

Où

$B : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ est un operateur maximal monotone,

$g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction k Lipschitz ,

$\operatorname{Dom} B$ est le domaine de B qui est donné par $\operatorname{Dom} B := \left\{x \in \mathbb{R}^N : Bx \neq \emptyset\right\}$,

$v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est l'inconnue,

$[0,1]$ l'intervalle du temps (pour la simplification).

2.2 Trajectoire discréte et extension par morceaux

Soit n est un entier positif, et $s_i = \frac{i}{n}$ pour tout $i = 0, \ldots, n$. Considérons le problème approximatif suivant pour (1)

$$(2) \qquad \begin{cases} \dot{v}_n\left(s_i\right) = g\left(v_n\left(s_i\right)\right) - B_{\frac{1}{n}}\left(v_n\left(s_i\right)\right) & \text{pour tout} \quad 0 \leq i \leq n-1 \\ v_n(0) = v_0 \end{cases}$$

Tel que pour tous $0 \leq i \leq n-1$, $\dot{v}_n\left(s_i\right) = n\left(v_n\left(s_{i+1}\right) - v_n\left(s_i\right)\right)$ et $\dot{v}_n(s) = \dot{v}_n\left(s_i\right)$ pour tous les s de l'intervalle $[s_i, s_{i+1}[$ ce problème a de nombreuses applications dans l'optimisation et la théorie des points fixes, et de nombreux articles ont étudié la solution exacte et approximative. **voir, par exemple [12][13][14]**.
Notre idée pour prouver le résultat principal de ce travail est d'utiliser ce problème pour trouver une solution approximative de notre problème principal (1).
Rappelons que, la trajectoire discrète unique $v_n(s_i), i = 0, \ldots, n$, de (2) est donné par :

$$(3) \qquad \begin{cases} v_n\left(s_{i+1}\right) = \frac{1}{n} g\left(v_n\left(s_i\right)\right) + J^B_{\frac{1}{n}} v_n\left(s_i\right) & \text{pour tout} \quad 0 \leq i \leq n-1 \\ v_n\left(s_0\right) = v_0 \end{cases}$$

Où $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction k Lipschitz et $J^B_{\frac{1}{n}}$ la résolvente de B donnée par

$$J^B_{\frac{1}{n}} x := (\mathrm{id} + \frac{1}{n} B)^{-1}(x)$$

Nous disons que $v_n(\cdot)$ est une extension par morceaux de l'unique trajectoire discrète de (2) qui est définie sur le sous-intervalle $[s_i, s_{i+1}$ [par la relation suivante :

$$v_n(s) = v_n\left(s_i\right) - \left(s - s_i\right) \dot{v}_n\left(s_i\right)$$

Nous allons montrer que si $v_n(\cdot)$ est une extension par morceaux de la trajectoire discrète unique $v_n\left(s_i\right)$ de (2) et $v(\cdot)$ est une solution de (1), alors $v_n(\cdot)$ converge uniformément vers $v(\cdot)$.

Lemme 2.2.1. *Soit b un nombre réel positif et $f(\cdot), g(\cdot)$ deux fonctions de $L^1([0, b], \mathbb{R})$ telle que la fonction $g(\cdot)$ est positif sur $[0, b]$, et soit w une fonction absolument continue de $[0, b]$ dans $\mathbb{R}^+$ tel que*

$$(1 - \lambda) w'(t) \leq f(t) w(t) + g(t) w^{\lambda}(t) \quad t \in [0, b]$$

avec $0 \leq \lambda < 1$. Alors l'inégalité suivante est satisfaite pour tout $0 \leq t \leq b$

$$w^{1-\lambda}(t) \leq w^{1-\lambda}(0) \exp\left(\int_0^t f(\alpha) \mathrm{d}\alpha\right) + \int_0^t \exp\left(\int_k^t f(\alpha) \mathrm{d}\alpha\right) g(s) \mathrm{d}s$$

Preuve.

Soit ε un nombre réel positif

$$\text{et} \quad w_\varepsilon(s) = (w(s)+\varepsilon)^{(1-\lambda)} \exp\left(-\int_0^s f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)$$

La dérivée première de w_ε est

$$w'_\varepsilon(s) = -f(s)\exp\left(-\int_0^s f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)(w(s)+\varepsilon)^{(1-\lambda)} + \exp\left(-\int_0^s f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)(1-\lambda)w'(s)(w(s)+\varepsilon)^{-\lambda}$$

$$= \exp\left(-\int_0^s f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)\left[-f(s)(w(s)+\varepsilon)^{(1-\lambda)} + (1-\lambda)w'(s)(w(s)+\varepsilon)^{-\lambda}\right]$$

$$= \exp\left(-\int_0^s f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)\left[\frac{-f(s)(w(s)+\varepsilon)+(1-\lambda)w'(s)}{(w(s)+\varepsilon)^\lambda}\right]$$

$$= \exp\left(-\int_0^s f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)\left[\frac{-f(s)(w(s)+(1-\lambda)w'(s)-\varepsilon f(s)}{(w(s)+\varepsilon)^\lambda}\right]$$

Utilisant le fait que $(1-\lambda)w'(t) \leq f(t)w(t) + g(t)w^\lambda(t)$ i.e $t \in [0,b]$, on a

$$w'_\varepsilon(s) \leq \exp\left(-\int_0^s f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)\frac{(w(s))^\lambda}{(w(s)+\varepsilon)^\lambda}g(s) - \frac{\varepsilon f(s)}{(w(s)+\varepsilon)^\lambda}\exp\left(-\int_0^s f(\alpha)d\alpha\right)$$

$$\leq \exp\left(-\int_0^s f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)\frac{(w(s))^\lambda}{(w(s)+\varepsilon)^\lambda}g(s) + \frac{\varepsilon|f(s)|}{(w(s)+\varepsilon)^\lambda}\exp\left(\int_0^s |f(\alpha)|\mathrm{d}\alpha\right)$$

donc

$$w'_\varepsilon(s) \leq \exp\left(-\int_0^s f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)g(s) + \varepsilon^{1-\lambda}|f(s)| \times \exp\left(\int_0^s |f(\alpha)|\mathrm{d}\alpha\right)$$

En intégrant cette inégalité de $s=0$ à $s=t$, on a

$$w_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(0) \leq \int_0^t \exp\left(-\int_0^s f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)g(s)\mathrm{d}s + \varepsilon^{1-\lambda}\int_0^t |f(s)|\exp\left(\int_0^s |f(\alpha)|\mathrm{d}\alpha\right)\mathrm{d}s$$

$$\leq \int_0^t \exp\left(\int_0^s f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)g(s)\mathrm{d}s + \varepsilon^{1-\lambda}\left(\exp\left(\int_0^t |f(\alpha)|\mathrm{d}\alpha\right) - 1\right)$$

en prenant $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans la dernière inégalité, on obtient

$$w^{1-\lambda}(t)\exp\left(-\int_0^t f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right) - w^{1-\lambda}(0) \leq \int_0^t \exp\left(\int_0^s f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)g(s)\mathrm{d}s$$

donc

$$w^{1-\lambda}(t) \leq w^{1-\lambda}(0) \exp \left(\int_0^t f(\alpha) \mathrm{d}\alpha \right) + \int_0^t \exp \left(\int_s^t f(\alpha) \mathrm{d}\alpha \right) g(s) \mathrm{d}s$$

■

Proposition 2.2.1. *Si* $v(\cdot)$ *est une solution de* (1)*, alors les inégalités suivantes sont satisfaites pour chaque nombre réel s dans l'intervalle* $[0, 1]$.

1. $\|v'(s)\| \leq e^k \|v'(0)\|$ *et* $\|v(s)\| \leq e^k \|v'(0)\| + \|v_0\|$,

2. $\|g(v(s))\| \leq ke^k \|v'(0)\| + 2k \|v_0\| + \|g(v_0)\|$,

3. $\|b(v(s))\| \leq (k+1)e^k \|v'(0)\| + 2k \|v_0\| + \|g(v_0)\|$,

Où $v'(s) = g(v(s)) - b(v(s))$ *p.p.* $s \in [0, 1], b(v(s)) \in B(v(s))$

Preuve.

○ La première inégalité :

Puisque $v(\cdot)$ est une solution de (1), on a $v'(s) = g(v(s)) - b(v(s))$ p.p. $s \in [0, 1]$. Donc $\forall t \in]0, 1[$ tel que $s + t \leq 1$, on a $v'(s + t) = g(v(s + t)) - b(v(s + t))$ p.p. $s \in [0, 1]$. Cette équation avec la condition initiale $v(0) = v_0 \in \mathrm{Dom}\, B$ est une solution unique $v(\cdot)$ qui est absolument continue sur [0, 1] **voir [11]**.

Soit $s \in]0, 1[$. avec g est une fonction k -Lipschitz et B est un opérateur maximal monotone , on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v(s+t) - v(s)\|^2 =& 2 \langle v'(s+t) - v'(s), v(s+t) - v(s) \rangle \\
=& 2\langle g(v(s+t)) - b(v(s+t)) - g(v(s)) - b(v(s)) v(s+t) - v(s) \rangle \\
=& 2\langle g(v(s+t)) - g(v(s)), v(s+t) - v(s) \rangle \\
& - 2\langle b(v(s+t)) - b(v(s)), v(s+t) - v(s) \rangle \\
\leq& 2k\|v(s+t) - v(s)\|^2
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall **voir le lemme 2.2.1**, on obtient

$$\|v(t+s) - v(s)\|^2 \leq \|v(t) - v(0)\|^2 e^{2ks} \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Par conséquent

$$\|v(t+s)-v(s)\| \leq \|v(t)-v(0)\| e^{ks}.$$

En divisant la dernière inégalité par $\|t\|$ et en prenant $t \to 0$, on obtient que

$$\|v'(s)\| \leq \|v'(0)\| \, \mathrm{e}^{ks} \quad \text{Comme} \quad v'(0)=g(v_0)-b(v_0), \text{ on a}$$
$$\|v'(s)\| \leq \|g(v_0)-b(v_0)\| \, e^{k}.$$

Utilisant le fait que $v(s)=\int_0^s v'(t)\mathrm{d}t+v_0$, on a

$$\begin{aligned}\|v(s)\| &\leq \left\|\int_0^s v'(t)\mathrm{d}t\right\| + \|v_0\| \\ &\leq \int_0^s \|v'(t)\| \,\mathrm{d}t + \|v_0\| \\ &\leq e^k \|v'(0)\| + \|v_0\|\end{aligned}$$

∘ La deuxième inégalité :

Par la lipschitzianité de g, nous obtenons pour tous $s \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\|g(v(s))\| &= \|g(v(s))-g(v_0)+g(v_0)\| \\ &\leq \|g(v(s))-g(v_0)\| + \|g(v_0)\| \\ &\leq k\|v(s)-v_0\| + \|g(v_0)\| \\ &\leq k\|v(s)\| + k\|v_0\| + \|g(v_0)\| \\ &\leq ke^k\|v'(0)\| + 2k\|v_0\| + \|g(v_0)\|.\end{aligned}$$

∘ La troisième inégalité :

Puisque $v'(s)=g(v(s))-b(v(s))$ p.p. $s \in [0,1]$,
on obtient

$$b(v(s)) = -v'(s)+g(v(s)) \quad \text{p.p.} \quad s \in [0,1],$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\|b(v(s))\| &= \|g(v(s))-v'(s)\| \\ &\leq \|g(v(s))\| + \|v'(s)\| \\ &\leq ke^k\|v'(0)\| + 2k\|v_0\| + \|g(v_0)\| + e^k\|v'(0)\| \\ &\leq (k+1)e^k\|v'(0)\| + 2k\|v_0\| + \|g(v_0)\|\end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.2. *Soit $v_n(\cdot)$ une extension par morceaux de la trajectoire discrète unique $v_n(s_i)$ de (2). Alors les inégalités suivantes sont satisfaites pour tout nombre réel s dans l'intervalle $[0,1]$ et pour tout $0 \leq i \leq n$.*

1. $\|v_n'(s)\| \leq e^k \|v_n'(0)\|$ *et* $\|v_n(s)\| \leq e^k \|v_n'(0)\| + \|v_0\|$

2. $\|g(v_n(s))\| \leq ke^k \|v_n'(0)\| + 2k\|v_0\| + \|g(v_0)\|$

3. $\|b(v_n(s_i))\| \leq (k+1)e^k \|v_n'(0)\| + 2k\|v(0)\| + \|g(v_0)\|$

Preuve.

∘ La première inégalité :

Soit $v_n(\cdot)$ une extension par morceaux de la trajectoire discrète unique $v_n(s_i)$ du problème suivant :

$$(3)\begin{cases} \dot{v}_n(s_i) = g(v_n(s_i)) - B_{\frac{1}{n}}(v_n(s_i)) \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq i \leq n-1 \\ v_n(0) = v_0. \end{cases}$$

et pour tout $0 \leq i \leq n-1$, on a

$$\begin{aligned} v_n(s_{i+1}) &= v_n(s_i) + \frac{1}{n} v_n'(s_i) \\ &= v_n(s_i) + \frac{1}{n}\Big[g(v_n(s_i)) - B_{\frac{1}{n}}(v_n(s_i))\Big] \\ &= v_n(s_i) + \frac{1}{n} g(v_n(s_i)) - \Big(v_n(s_i) - J^B_{\frac{1}{n}} v_n(s_i)\Big). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$v_n(s_{i+1}) = J^{\beta}_{\frac{1}{n}} v_n(s_i) + \frac{1}{n} g(v_n(s_i))$$

pour tout $0 \leq i \leq n-1$.

Donc

$$v_n(s_{i+2}) - v_n(s_{i+1}) = J^B_{\frac{1}{n}} v_n(s_{i+1}) - J^B_{\frac{1}{n}} v_n(s_i) + \tfrac{1}{n}\left[g(v_n(s_{i+1})) - g(v_n(s_i))\right]$$

Puisque J^B_λ (resp. g) est une fonction-Lipschitz (resp. k-Lipschitz) continue,

$$\|v_n(s_{i+2}) - v_n(s_{i+1})\| \leq \Big\|J^B_{\frac{1}{n}} v_n(s_{i+1}) - J^B_{\frac{1}{n}} v_n(s_i)\Big\| + \frac{1}{n}\|g(v_n(s_{i+1})) - g(v_n(s_i))\|$$

donc

$$\|v_n(s_{i+2}) - v_n(s_{i+1})\| \leq \|v_n(s_{i+1}) - v_n(s_i)\| + \tfrac{k}{n}\|v_n(s_{i+1}) - v_n(s_i)\|$$

Cela signifie

$$\|v_n(s_{i+2}) - v_n(s_{i+1})\| \leq \left(\frac{k}{n} + 1\right) \|v_n(s_{i+1}) - v_n(s_i)\|$$

En conséquence

$$\begin{aligned}
\|v_n(s_{i+2}) - v_n(s_{i+1})\| &\leq \left(\frac{k}{n} + 1\right) \|v_n(s_{i+1}) - v_n(s_i)\| \\
&\leq \left(\frac{k}{n} + 1\right)^2 \|v_n(s_i) - v_n(s_{i-1})\| \\
&\vdots \\
&\leq \left(\frac{k}{n} + 1\right)^{i+1} \|v_n(s_1) - v_n(s_0)\| \ \leq \left(\frac{k}{n} + 1\right)^{n} \|v_n(s_1) - v_n(s_0)\|
\end{aligned}$$

Puisque $\left(\frac{k}{n} + 1\right)^n \leq e^k$

$$\|v_n(s_{i+2}) - v_n(s_{i+1})\| \leq e^k \|v_n(s_1) - v_n(s_0)\| \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

On en déduit que

$$\|n(v_n(s_{i+2}) - v_n(s_{i+1}))\| \leq e^k \|n(v_n(s_1) - v_n(s_0))\| \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq i \leq n-2$$

Par conséquent

$$\|v_n'(s_i)\| \leq e^k \|v_n'(0)\| \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Il est clair que l'inégalité précédente est également vraie lorsque $i = 0$,
et puisque $v_n'(s) = v_n'(s_i)$ pour tout $s \in [s_i, s_{i+1}[$ et $i = 0, \ldots, n-1$,
on a

$$\|v_n'(s)\| \leq e^k \|v_n'(0)\| \quad \text{pour tout} \quad s \in [0,1].$$

Pour chaque $s \in [0,1]$, on a $v_n(s) = \int_0^s v_n'(r)dr + v_0$.
Puis

$$\begin{aligned}
\|v_n(s)\| &\leq \left\| \int_0^s v_n'(r)dr \right\| + \|v_0\| \\
&\leq \int_0^s \|v_n'(r)\| \, dr + \|v_0\| \\
&\leq s e^k \|v_n'(0)\| + \|v_0\| \\
&\leq e^k \|v_n'(0)\| + \|v_0\|
\end{aligned}$$

∘ La deuxième inégalité :

Par la lipschitzianité de g, nous obtenons pour chaque $s \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\|g(v_n(s))\| &= \|g(v_n(s)) - g(v_0) + g(v_0)\| \\
&\leq \|g(v_n(s)) - g(v_0)\| + \|g(v_0)\| \\
&\leq k\|v_n(s) - v_0\| + \|g(v_0)\| \\
&\leq k\|v_n(s)\| + k\|v_0\| + \|g(v_0)\| \\
&\leq ke^k\|v_n'(0)\| + 2k\|v_0\| + \|g(v_0)\|.
\end{aligned}$$

○ La troisième inégalité :

Puisque

$$v_n'(s) = g(v_n(s)) - b(v_n(s)) \quad \text{p.p} \quad s \in [0,1]$$

On obtient

$$b(v_n(s)) = -v_n'(s) + g(v_n(s)) \quad \text{p.p} \quad s \in [0,1]$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|b(v_n(s))\| &= \|g(v_n(s)) - v_n'(s)\| \\
&\leq \|g(v_n(s))\| + \|v_n'(s)\| \\
&\leq ke^k\|v_n'(0)\| + 2k\|v_0\| + \|g(v_0)\| + e^k\|v_n'(0)\| \\
&\leq (k+1)e^k\|v_n'(0)\| + 2k\|v_0\| + \|g(v_0)\|
\end{aligned}$$

■

2.3 Résultat principal

Théorème 2.3.1. *Soit $v_n(\cdot)$ une extension par morceaux de l'unique trajectoire discrète $v_n(s_i), i = 0, \ldots, n$, de (2) tel que $v_n(0) = v_0$.*
Alors $v_n(\cdot)$ converge uniformément vers la solution $v(\cdot)$ de (1).

Preuve.
Pour tout $s \in [s_i, s_{i+1}[$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|v_n(s) - v(s)\|^2 &= \langle v_n'(s) - v'(s), v_n(s) - v(s)\rangle \\
&= \langle v_n'(s) - v'(s), v_n(s_i) - v(s)\rangle + \langle v_n'(s) - v'(s), v_n(s) - v_n(s_i)\rangle.
\end{aligned}$$

Puisque $v_n'(s) = v_n'(s_i)$ pour tout $s \in [s_i, s_{i+1}[$ et $0 \leq i \leq n-1$.
Nous avons clairement que :
$v_n(s) = v_n(s_i) - (s - s_i) v_n'(s_i)$ pour tout $s \in [s_i, s_{i+1}[$ et $0 \leq i \leq n-1$.
Par conséquent

$$\begin{aligned} \|v_n(s) - v_n(s_i)\| &\leq (s - s_i) \|v_n'(s_i)\| \\ &\leq \frac{1}{n} \|v_n'(s_i)\| \end{aligned}$$

En utilisant la **Proposition 2.2.2** et le fait que $v_n'(0) = g(v_0) - B_{\frac{1}{n}}(v_0)$ et $\left\|B_{\frac{1}{n}}(v_0)\right\|$ est inférieur ou égal $\|b(v_0)\|$, on a

$$\begin{aligned} \|v_n(s) - v_n(s_i)\| &\leq \frac{1}{n} e^k \|v_n'(0)\| \\ &\leq \frac{1}{n} e^k (\|g(v_0)\| + \|b(v_0)\|) . \end{aligned}$$

Nous appliquons **Proposition 2.2.1** et la dernière inégalité, on obtient que

$$\begin{aligned} \langle v_n'(s) - v'(s), v_n(s) - v_n(s_i) \rangle &\leq \|v_n'(s) - v'(s)\| \|v_n(s) - v_n(s_i)\| \\ &\leq \frac{2(m_1)^2}{n} \end{aligned}$$

Où $m_1 = e^k (\|g(v_0)\| + \|b(v_0)\|)$.
En utilisant à nouveau la **proposition 2.2.2** et le fait que
$\|v_n'(0)\| \leq \|g(v_0)\| + \|b(v_0)\|$, nous obtenons pour tous $i = 1, \ldots n-1$

$$\left\|B_{\frac{1}{n}}(v_n(s_i))\right\| \leq (k+1)e^k (\|g(v_0)\| + \|b(v_0)\|) + 2k\|v_0\| + \|g(v_0)\|$$

D'autre part, nous avons pour tous $s \in [s_i, s_{i+1}[$.

$$\begin{aligned} \langle v_n'(s) - v'(s), v_n(s_i) - v(s) \rangle &= \langle g(v_n(s_i)) - g(v(s)), v_n(s_i) - v(s) \rangle \\ &\quad - \left\langle B_{\frac{1}{n}}(v_n(s_i)) - b(v(s)), v_n(s_i) - v(s) \right\rangle \\ &= \langle g(v_n(s_i)) - g(v(s)), v_n(s_i) - v(s) \rangle \\ &\quad - \left\langle B_{\frac{1}{n}}(v_n(s_i)) - b(v(s)), J_{\frac{1}{n}}^B v_n(s_i) - v(s) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle B_{\frac{1}{n}}(v_n(s_i)) - b(v(s)), v_n(s_i) - J_{\frac{1}{n}}^B v_n(s_i) \right\rangle \end{aligned}$$

Puisque $B_{\frac{1}{n}}(v_n(s_i)) \in B\left(J_{\frac{1}{n}}^B v_n(s_i)\right)$ et B est monotone, nous peut montrer que

$$\left\langle B_{\frac{1}{n}}(v_n(s_i)) - b(v(s)), J_{\frac{1}{n}}^B v_n(s_i) - v(s) \right\rangle \geq 0$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} &\left\langle B_{\frac{1}{n}}(v_n(s_i)) - b(v(s)), v_n(s_i) - J_{\frac{1}{n}}^B v_n(s_i) \right\rangle \\ &\leq \left\|B_{\frac{1}{n}}(v_n(s_i)) - b(v(s))\right\| \left\|v_n(s_i) - J_{\frac{1}{n}}^B v_n(s_i)\right\| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\left\|B_{\frac{1}{n}}\left(v_n\left(s_i\right)\right)\right\|+\|b(v(s))\|}{n}\left\|B_{\frac{1}{n}}\left(v_n\left(s_i\right)\right)\right\|$$

De la **Proposition 2.2.1** et de l'inégalité (3), on obtient

$$\left\langle B_{\frac{1}{n}}\left(v_n\left(s_i\right)\right)-b(v(s)), v_n\left(s_i\right)-J_{\frac{1}{n}}^B v_n\left(s_i\right)\right\rangle \leq \frac{2\left(m_2\right)^2}{n}.$$

où $m_2=(k+1) e^k\left(\left\|g\left(v_0\right)\right\|+\left\|b\left(v_0\right)\right\|\right)+2 k\left\|v_0\right\|+\left\|g\left(v_0\right)\right\|.$

Par conséquent, pour tout nombre réel s dans l'intervalle $[s_i, s_{i+1}]$ et $0 \leq i \leq n-1$

$$\left\langle v_n(s)-v^{\prime}(s), v_n\left(s_i\right)-v(s)\right\rangle \leq k\left\|v_n\left(s_i\right)-v(s)\right\|+\frac{2\left(m_2\right)^2}{n}$$

Comme $v_n(s)=v_n\left(s_i\right)-\left(s-s_i\right) v_n^{\prime}\left(s_i\right)$ pour tout $s \in\left[s_i, s_{i+1}\right[$ et $i=0, \ldots, n-1$, on peut obtenir directement que

$$\begin{aligned}\left\|v_n\left(s_i\right)-v(s)\right\|^2 \leq & \left\|v_n(s)-v(s)\right\|^2+\left\|\left(s-s_i\right) v_n^{\prime}\left(s_i\right)\right\|^2 \\ & +2\left\|v_n(s)-v(s)\right\|\left\|\left(s-s_i\right) v_n^{\prime}\left(s_i\right)\right\| .\end{aligned}$$

Donc

$$2\left\|v_n(s)-v(s)\right\|\left\|\left(s-s_i\right) v_n^{\prime}\left(s_i\right)\right\| \leq\left\|v_n(s)-v(s)\right\|^2+\left\|\left(s-s_i\right) v_n^{\prime}\left(s_i\right)\right\|^2$$

Donc

$$\left\|v_n\left(s_i\right)-v(s)\right\|^2 \leq 2\left\|v_n(s)-v(s)\right\|^2+2\left\|\left(s-s_i\right) v_n^{\prime}\left(s_i\right)\right\|^2$$

Donc

pour tout $s \in[0,1]$, On a

$$\begin{aligned}\left\langle v_n^{\prime}(s)-v^{\prime}(s), v_n(s)-v(s)\right\rangle & \leq 2 k\left\|v_n(s)-v(s)\right\|^2+2 k\left\|\left(s-s_i\right) v_n^{\prime}\left(s_i\right)\right\|^2 \\ & +\frac{2\left(m_2\right)^2}{n}+\frac{2\left(m_1\right)^2}{n} \\ & \leq 2 k\left\|v_n(s)-v(s)\right\|^2+\frac{(2 k+2)\left(m_1\right)^2}{n}+\frac{2\left(m_2\right)^2}{n} \\ & \leq 2 k\left\|v_n(s)-v(s)\right\|^2+\frac{c}{n^{\prime}}\end{aligned}$$

où $\quad c=(2 k+2)\left(m_1\right)^2+2\left(m_2\right)^2.$

En conséquence

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} s} \frac{1}{2}\left\|v_n(s)-v(s)\right\|^2 \leq 2 k\left\|v_n(s)-v(s)\right\|^2+\frac{c}{n}, \quad \forall s \in[0,1]$$

Du lemme de Gronwall **lemme 2.2.1**, nous obtenons pour tous $\quad 0 \leq s \leq 1$

$$\left\|v_n(s)-v(s)\right\|^2 \leq\left(\frac{c}{4 k n}\right) e^{2 k t}-\frac{c}{4 k n}.$$

Pour terminer $\sup \|v_n(s) - v(s)\|^2 \leq \left(\frac{c}{4kn}\right) e^{2k} - \frac{c}{4kn}.$

Donc

$$v_n(s) \to v(s) \text{ lorsque } n \to +\infty$$

■

Chapitre 3

Application numérique

On peut trouver une solution approximative de l'inclusion différentielle (1) en prenant n assez grand.
Soit $v_n(\cdot)$ un extension par morceaux de (2) :

$$\begin{cases} v_n\left(s_{i+1}\right) & = \frac{1}{n} g\left(v_n\left(s_i\right)\right)+J_{\frac{1}{n}}^B v_n\left(s_i\right) \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq i \leq n-1, \\ v_n(0) & = v_0 \end{cases}$$

Nous considérons ici $\quad s_i:=\frac{i}{n} \in[0,1] \quad$ pour tout $\quad 0 \leq i \leq n-1$.
Alors

$$\begin{aligned}
& v_n(0)=v_0(\text{ étant donné }) \\
& v_1=v_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n} g\left(v_0\right)+J_{\frac{1}{n}}^B\left(v_0\right) \\
& v_2=v_n\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{n} g\left(v_1\right)+J_{\frac{1}{n} B}\left(v_1\right), \\
& \vdots \\
& v_j=v_n\left(\frac{j}{n}\right)=\frac{1}{n} g\left(v_j\right)+J_{\frac{1}{n}}^B\left(v_j\right), \\
& \vdots \\
& v_n(1)=\frac{1}{n} g\left(v_{n-1}\right)+J_{\frac{1}{n}}^B\left(v_{n-1}\right) .
\end{aligned}$$

La suite $\left(v_n(\cdot)\right)_n$ converge uniformément vers $v(\cdot)$ l'unique solution de (1).
Donc pour n assez large, $v_n\left(s_i\right)$, $i=0, \ldots, n$ sont des solutions approximatives de (1) par rapport a s_i On a $v_n(s)=v_n\left(s_i\right)-\left(s-s_i\right) v_n\left(s_i\right)$ pour tout s $\epsilon\left[s_i, s_{i+1}[\right.$

$$\left\|v_n(s)-v(s)\right\|^2 \leq\left(\frac{c}{2 k n}\right) e^{2 k s}-\frac{c}{2 k n}, \quad \forall s \in[0,1]$$

Donc $v_n(\cdot)$ est une solution approximative de (1) pour n assez large.

Exemple 3.0.1. ***(Processus de la rafle)*** *On considère l'inclusion différentielle*

$$(4)\begin{cases} \dot{x}(t) \in x(t) - N_{[0,+\infty)}(x(t)) \quad \textit{p.p} \quad t \in [0,1] \\ x(0) = 1 \in [0,+\infty), \end{cases}$$

sur l'espace de tous les arcs absolument continus $x : [0,1] \to \mathbb{R}$.
où $\mathrm{N}_{[0,+\infty)}(x) = \{y \in \mathbb{R}/y(x-z) \geq 0$, tel que $\forall z \in [0,+\infty)\}$ L'inclusion différentielle (4) a une solution unique $x(t) = e^t$
On prend les approximations discrètes suivantes :

$$(5)\begin{cases} \dot{x}_n(t_j) = x_n(t_j), \quad j = 0,\ldots,n \\ x_n(0) = 1 \in [0,+\infty), \end{cases}$$

Où $\quad t_j := jh_n \in [0,1] \quad$ *comme* $\quad j = 0,\ldots,n, h_n = \frac{1}{n} \quad$ *tel que*

1. $\dot{x}_n(t_j) = \frac{x_n(t_{j+1}) - x_n(t_j)}{h_n}$ *pour tout* $\quad j = 0,\ldots,n$

2. $\dot{x}_n(t) = \dot{x}_n(t_j), \forall t \in [t_j, t_{j+1}[,$ *pour tout* $\quad j = 0,\ldots,n$

3. $x_n(t) = x_n(t_j) - (t - t_j)\dot{x}_n(t_j), \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}[,$ *et* $\quad j = 0,\ldots,n$

   On peut écrire l'inclusion différentielle (5) comme suit :

$$\begin{cases} x_n(t_{j+1}) = \frac{1}{n}x_n(t_j) + x_n(t_j), \quad j = 0,\ldots,n-1, \\ x_n(0) = 1 \end{cases}$$

Clairement
$x_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1, x_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^2, \ldots, x_n\left(\frac{j}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^j$
et $\quad x_n(1) = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n$, *et si* $\quad n = 1000, j = 500$
Alors $\quad x_{1000}(0.5) = \left(\frac{1}{1000} + 1\right)^{500} \simeq 1,6483 \quad$ *et* $\quad e^{0.5} \simeq 1,6486$.

Exemple 3.0.2. ***(Application à l'électricité)*** *: Dans cet exemple, nous appliquons notre résultat au cas des circuits électriques où la source de courant est fixé.*
*Nous discutons du circuit considéré dans **[17]**.*

$$Lv'(s) + Rv(s) \in -N_I(v(s)) \quad \textit{avec} \quad I = [c,+\infty[.$$

Si $v(0) = 0$ *et* $L = R$*, ensuite* $v'(s) \in -v(s) - \mathrm{N}_l(v(s))$ *Dans cet exemple,* $g(v(s)) = -v(s), B(v(s)) = \mathrm{N}_l(v(s))$ *et* $J^B_{\frac{1}{n}}(v) = \Pi_l(v)$.

Ona $v_n(s_i), i = 0, \ldots, n$ *est une trajectoire discrète de*

$$\begin{cases} v_n(s_{i+1}) = \frac{1}{n} g(v_n(s_i)) + \Pi_l(v_n(s_i)) \quad \textit{avec} \quad i = 0, \ldots, n-1 \\ v_n(0) = v_0 \end{cases}$$

où $s_i = \frac{i}{n} \in [0,1]$ *pour tout* $\quad i = 0, \ldots, n$ *. Puis*

$$\begin{aligned}
&v_n(0) = 0 \textit{ (étant donné)} \\
&v_1 = v_n\left(\frac{1}{n}\right) = c \\
&v_2 = v_n\left(\frac{2}{n}\right) = -\frac{1}{n}c + \Pi_l(c) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)c \\
&v_3 = v_n\left(\frac{3}{n}\right) = -\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)c + c = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)c \\
&v_4 = v_n\left(\frac{4}{n}\right) = -\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)c + c \\
&= \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)c \\
&\vdots \\
&v_i = v_n\left(\frac{i}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \cdots \; + (-1)^{i-1}\frac{1}{n^{i-1}}\right)c
\end{aligned}$$

pour n *assez large :*

$$v_n(s) \simeq v(s) \simeq \frac{n + \left(\frac{-1}{n}\right)^{i-1}}{n+1} c$$

pour tout $s \in \left[\frac{i}{n'}, \frac{i+1}{n}\right[\quad$ *et* $\quad 0 \leq i \leq n$.

Bibliographie

[1] **Adly S, Hantoute A, Nguyen BT**. *Invariant sets and Lyapunov pairs for differential inclusions with maximal monotone operators*. Math Anal Appl J Profile. $2018; 457(2) : 1017 - 1037$.

[2] **Adly S, Hantoute A, Thera M** . *Nonsmooth Lyapunov pairs for differential inclusions governed by operators with nonempty interior domain. Math Program*. $2016; 157(2) : 349 - 374$.

[3] **Adly S, Khiet LB**. *Nonconvex sweeping processes involving maximal monotone operators. Optim*. $2017; 66(9) : 1465 - 1486$.

[4] **Shang Y, Ye Y** . *Fixed-Time group tracking control with unknown inherent nonlinear dynamics*. Article (PDF Available) in IEEE Access. $2017; 5(1) : 12833 - 12842$.

[5] **Shang Y**. *Fixed-time group consensus for multi-agent systems with non-linear dynamics and uncertainties*. IET Control Theory Appl. $2018; 12(3) : 395 - 404$.

[6] **Shang Y**. *The limit behavior of a stochastic logistic model with individual time-dependent rates*. J Math. $2013; 2013 : 1 - 7$.

[7] **Li T, Pintus N, Viglialoro G** . *Properties of solutions to porous medium problems with different sources and boundary conditions*. Z Angew Math Phys. $2019; 70(86) : 1 - 18$.

[8] **Viglialoro G, Woolley TE**. *Boundedness in a parabolicelliptic chemotaxis system with nonlinear diffusion and sensitivity and logistic source*. Math Methods Appl Sci. $2018; 41 : 1809 - 1824$.

[9] **Mordukhovich BS**. *Variational Analysis and Generalized Differentiation II. Applications Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Berlin : Springer ; 2006

[10] **Hoang ND, Mordukhovich BS**. *Extended Euler-Lagrange and Hamiltonian conditions in optimal control of sweeping processes with controlled moving sets*. J Optim Theory Appl. $2019; 180(1) : 256 - 289$.

[11] **Brezis H**. *Operateurs maximaux monotones et semi Groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland : Elsevier ; 1973.

[12] **Ahmad H, Seadawy AR, Tufail AK, Thounthong P**. *Analytic approximate solutions for some nonlinear parabolic dynamical wave equations*. J Taibah Univ Sci. $2020; 14(1) : 346 - 358$.

[13] **Marin M, Othman MIA, Seadawy AR, Carstea C**. *A domain of influence in the Moore-Gibson-Thompson theory of dipolar bodies*. J Taibah Univ Sci. $2020; 14(1) : 653 - 660$.

[14] **Ozkan YS, Yasar E, Seadawy AR**. *A third-order nonlinear Schr ödinger equation the exact solutions, groupinvariant solutions and conservation laws*. J Taibah Univ Sci. $2020; 4(1) : 585 - 597$.

[15] **J.P. Aubin, A. Cellina**, *Differential inclusions set-valued maps and viability theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New york Tokyo 1984.

[16] **K. Deimling**, *Multivalued différential équation, W. de Grayter*. Berlin, New york, 1992.

[17] **Arias LMB, Hoang ND, Peypouquet J.** *Existence, stability and optimality for optimal control problems governed by maximal monotone operator*. J Differ Equ. $2016; 260 : 733\breve{}757$.

[18] **Adly,S., Haddad,T., et Ba Khiet Le :** *State-Dependent Implicit Sweeping Process in the Framework of Quasistatic Evolution Quasi-Variational Inequalities*. Journal of Optimization Theory and Applications springer 2018.

[19] **Adly, S., Haddad, T. :** *An implicit sweeping process approach to quasistatic evolution variational inequalities*. SIAM J. Math. Anal. $50(1), 761\breve{}778(2018)$.

[20] **Adly, S., Haddad, T., Thibault, L. :** *Convex sweeping process in the framework of measure differential inclusions and evolution variational inequalities.* Math. Program. Ser. $B148(1), 5\breve{}47(2014)$.

[21] **Adly, S. :** *A Variational Approach to Non smooth dynamics. Applications in Unilateral Mechanics and Electronics*. Springer, Cham (2017).

[22] **Adly, S., Le, B.K. :** *On semicoercive sweeping process with velocity constraint*. Optim. Lett. $12(4), 831\breve{}843(2018)$.

[23] **Adly, S., Le, B.K. :** *Unbounded second-order state-dependent Moreau's sweeping processes in Hilbert spaces.* J. Optim. Theory Appl. $169(2), 407˘423(2016)$.

[24] **Addi,K.,Brogliato,B.,Goeleven,D. :** *A qualitative mathematical analysis of a class of linear variational inequalities via semi-complementarity problems.Appl.Electron.* Math.Program.$126(1), 31˘67(2011)$.

[25] **Brogliato, B. :** *Non smooth Mechanics. Models, Dynamics and Control. Communications and Control Engineering Series, 3rd edn*. Springer, Cham (2016)

[26] **Bounkhel,M.,Castaing,C. :** *State dependent sweeping process in p-uniformly smooth and q-uniformly convex banach spaces*. Set Valued Var. Anal. $20, 187˘201(2012)$.

[27] **Barbu, V. :** *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*. Springer, Berlin (2010).

[28] **D. AZE :** *Eléments d'analyse convexe et variationnelle*. ellipses,édition marketing S.A., Paris, (1997).

[29] **Duvaut, D., Lions, J.L. :** *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer, Berlin (1976).

[30] **Goeleven, D. :** *Complementarity and Variational Inequalities in Electronics. Mathematical Analysis and its Applications*. Academic Press, London (2017).

[31] **H. Brezis :** *Analyse fonctionnelle*. MASSON, Paris,1983

[32] **H. Brezis, :** *Opérateurs maximaux monotones et semi-groups de contractions dans les espaces de Hilbert*. 1973

[33] **Heinz H. Bauschke, Patrick L. Combettes auth :** *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*

[34] **Han, W., Sofonea, M. :** *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 30. American Mathematical Society/International Press, Providence/Somerville (2002).

[35] **Kunze,M.,Marques,M.D.P.M. :** *An introduction to Moreau's sweeping process.In :Brogliato,B.(ed.) Impacts in Mechanical Systems. Analysis and Modelling, pp. 1–60.* Springer, Berlin (2000).

[36] **Moreau,J.J. :** *Sur l'évolution d'un système élastoplastique*.C.R.Acad.Sci.ParisSér.$A-B273, A118˘A121(1971)$.

[37] **Moreau,J.J. :** *Rafle par un convexe variable I, Sém. Anal*. Convexe Montpellier Exposé $15(1971)$.

[38] **Moreau,J.J. :** *Rafle par un convexe variable II, Sém. Anal*. Convexe Montpellier Exposé $3(1972)$.

[39] **R.T. Rockafellar :** *Convex Integral Functionals and Duality*. In : E.H. Zarantonello (Ed.) Contributions to Nonlinear Functional Analysis. Academic Press, New York, $215 - 236, 1971$.

[40] **Shillor, M., Sofonea, M., Telega, J.J. :** *Models and Analysis of Quasistatic Contact*. Springer, Berlin (2004).

[41] **Shillor, M., Sofonea, M., Telega, J.J. :** *Models and Analysis of Quasistatic Contact*.Springer, Berlin (2004).

[42] **Sofonea, M., Matei, A. :** *Variational Inequalities with Applications. A Study of Antiplane Frictional Contact Problems, Advances in Mechanics and Mathematics, vol. 18*. Springer, New York (2009).