République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik BenYahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité :Mathématiques.

Option :Analyse fonctionnelle.

Thème

Prédérivées d'applications multivoques

présenté par :

DORBI Messaouda

Devant le jury :

Président :	**A. Makhlouf**	MCB.	Université de Jijel
Encadreur :	**H.Menigher**	MAA.	Université de Jijel
Examinateur :	**B. Bensouilah**	MAA.	Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

Remerciements

Tous mes remerciements vont avant tout à ***ALLAH***. ***Dieu*** *soit loué, qui ma donné force, patience et volonté malgré les obstacles.* ***"Merci beaucoup mon dieu"***.

J'exprime toute ma reconnaissance à mon encadreur Monsieur ***Menigher Hammoud*** *M.A.A à l'université de jijel, pour son aide, la pertinence de ces remarques et se patience durant la réalisation de ce travail. Mon professeur, je vous salue et merci beaucoup.*

Je remercie également les membres de jury le président Madame ***A. Makhlouf*** *M.C.B à l'université de jijel, et l'examinateur Monsieur* ***B. Bensouilah*** *M.A.A à l'université de jijel pour avoir accepter de jury mon travail.*

Je tiens à remercier autre fois Monsieur ***B. Bensuilah***, *le chef de département de mathématique, tous les enseignants pour ses intérêts constants dans ses empressements à fournir les conditions pour la collecte des meilleurs résultats.*

Un grand merci à ma mère mon père et ma famille pour leurs aide, conseils et encouragement durant mes année des études et durant la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'analyse multivoque est une importante branche de l'analyse variationnelle. Elle étudie les propriétés des relations F d'un ensemble X dans un ensemble Y ; appelées applications multivoques qui à chaque élément $x \in X$ associent un sous-ensemble éventuellement vide de Y. Il est bien connu que certains problèmes provenant de divers domaines conduisent tout naturellement à l'utilisation de telles applications. Contrairement à l'idée émergée au cours de la première moitié du XX^e siècle selon laquelle l'analyse multivoque n'avait pas de motivation réelle, elle s'est révélée au cours de ces dernières décennies comme étant la clé de la compréhension de nombreux problèmes provenant de domaines très variés.

En 1981, A. Ioffe a introduit dans [11] une classe d'objets constituée d'applications multivoques positivement homogènes à valeurs fermées appelées prédérivées. Dans son article, Ioffe a introduite les concepts de prédérivée extérieure, intérieure et stricte pour des fonctions univoques non différentiables au sens usuel. Plus récemment, Pang a adapté ces derniers travaux dans [14] au cadre multivoque sous le nom de la T-différentiabilité. Depuis, ces concepts ont été utilisés dans divers contextes. De même, en effet, M. Gaydu, M.H Geoffrey et Y. Marcelin ont étudié dans [9] l'existence de plusieurs types de prédérivée pour les applications multivoques jouissant de propriétés convexes et établissant à la fois nécessaire et suffisant conditions d'optimalité impliquant de telles prédérivées pour les problèmes d'optimisations d'ensemble.

Dans le cadre de ce mémoire, nous parlerons de la prédérivée des applications multivoques $F : X \rightrightarrows Y$, tel que X et Y sont deux espaces de Banach.

On présentera le travail de ce mémoire sur trois chapitre principaux.

Dans le première chapitre, nous rappelons quelques notions préliminaires et concepts de base qui facilitent notre étude dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous discutons le concept de différentielle multivoque de F.S. De Blasi [5], comme applications positivement homogènes, semi-continue supérieurement, à valeurs convexes(fermées), bornées et non vides. D'autre parte, nous introduisons quelques notions de différentiabilité des applications multivoques au sens de K. Nachi et J. penot [13], nous introduisons d'abord le concept de pseudo-différentiable et quasi-différentiable.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de prédérivées d'applications multivoques. Plus précisément, nous établissons des résultats assurant l'existence de prédérivées pour des applications multivoques possédant certaines propriétés de convexité. Nous considérons successivement le cas particulier d'un processus convexe et le cas général des applications convexes, puis celui des applications cône-convexes.

NOTATIONS

Tout au long de ce mémoire nous allons adopter les notations suivantes

$\|\cdot\|$ désigne une norme sur un espace vectoriel E.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

$int(A)$ ou $\mathring{A}$ désigne l'intérieur pour la topologie de la norme d'une partie A d'un espace normé.

$\bar{A}$ est la fermeture pour la topologie de la norme d'une partie A d'un espace normé.

$\mathbb{B}_X$(resp, $\bar{\mathbb{B}}_X$) est la boule unité ouverte(resp,fermée) de X.

$r\mathbb{B}_X$(resp, $r\bar{\mathbb{B}}_X$) est la boule ouverte(resp, fermée) de centre 0_X et de rayon r.

$r\mathbb{B}_X(a)$(resp, $r\bar{\mathbb{B}}_X(a)$) est la boule ouverte(resp, fermée) de centre a et de rayon r.

$\mathcal{V}(x_0)$ L'ensemble des voisinages de x_0 .

$F : X \rightrightarrows Y$ désigne une application multivoque de X dans Y.

$\mathcal{P}(G)$ désigne la famille de tous les sous ensemble de G.

$dom(F)$ désigne le domaine de F

$Gr(F)$ désigne le graphe de F.

$Im(F)$ désigne limage de F.

$F^{-1}(D)$ image réciproque large d'une partie non vide D par F.

$F_+^{-1}(D)$ image réciproque étroite d'une partie non vide D par F.

s.c.s. abréviation de semi-continue supérieurement.

s.c.i. abréviation de semi-continue inférieurement.

o.s.c. abréviation de semi-continue extérieure.

i.s.c. abréviation de semi-continue intérieure.

i.e. signifie "c'est à dire".

resp. Respectivement.

$\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X vers Y.

$\mathcal{H}(X, Y)$ désigne l'ensemble des applications multivoques positivement homogènes de X dans Y.

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous recueillons les définitions et les résultats préliminaires de base qui nous seront utiles pour les démonstrations des théorèmes principaux de ce mémoire.

1.1 Topologie des espaces vectoriels normés

D'abord, nous rappelons quelque notions fondamentales de topologie d'un espace vectoriel normé. Les définitions et les résultats que nous allons énoncer sont pris de la référence [10], [15].

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.1.1. ***(Norme).*** *On appelle* ***norme*** *sur E, toute application $x \longmapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions*

1. $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
2. $\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,$
3. $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé ***espace vectoriel normé****, on note $(E, \|\cdot\|)$.*

Définition 1.1.2. *Deux norme $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont* ***équivalentes*** *s'il existe deux réels* *strictement positifs* c_1 *et* c_2 *tels que*

$$\forall x \in E, \quad c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1.$$

Théorème 1.1.3. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Définition 1.1.4. ***(Boules).*** *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé,* $a \in E$ *et* $r \in [0, +\infty[$.

1. *La **boule ouverte** de centre* a *et de rayon* r *est*

$$\mathbb{B}(a, r) = \{x \in E, \quad \|x - a\| < r\}.$$

2. *La **boule fermée** de centre* a *et de rayon* r *est*

$$\overline{\mathbb{B}}(a, r) = \{x \in E, \quad \|x - a\| \leq r\}.$$

3. *La **sphère** de centre* a *et de rayon* r *est*

$$\mathbb{S}(a, r) = \{x \in E, \quad \|x - a\| = r\}.$$

Proposition 1.1.5.

a) *L'intersection de deux boules de même centre* a *est la boule de centre* a *et de rayon* $r = \min(r_1, r_2)$.

b) *Si* $a_1 \neq a_2$, *il existe un réel* $r > 0$ *tel que* $\mathbb{B}(a_1, r) \cap \mathbb{B}(a_2, r) = \emptyset$.

c) *Pour tout point* x *d'une boule ouverte* $\mathbb{B}(a, r)$, *il existe un réel* $\epsilon > 0$ *tel que la boule ouverte* $\mathbb{B}(x, \epsilon)$ *soit entièrement contenue dans* $\mathbb{B}(a, r)$. *(Cette propriété est fausse pour les boules fermées).*

1.1.1 Ouverts, fermés, Intérieur, adhérence

Définition 1.1.6. ***(Ouverts).*** *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Une partie* $U \subset E$ *est dite un **ouvert** de* $(E, \|\cdot\|)$ *si pour tout* $x \in U$, *il existe* $r > 0$ *tel que* $\mathbb{B}(x, r) \subset U$.

Théorème 1.1.7. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé.*

- *Une réunion quelconque (non vide) d'ouverts de* E *est un ouvert de* E.
- *Une intersection finie (non vide) d'ouverts de* E *est un ouvert de* E.

Définition 1.1.8. ***(Fermés).*** *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Un sous-ensemble* F *de* E *est dit **fermé** de* E *si le complémentaire de* F *est un ouvert de* E.

Théorème 1.1.9. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé.*

- *Une intersection quelconque de fermés de* E *est un fermé de* E.
- *Une réunion finie de fermés de* E *est un fermé de* E.

Remarque 1.1.1. $\emptyset$ *et* E *sont des parties à la fois ouvertes et fermées de* E.

Définition 1.1.10. ***(Voisinages).*** *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé et* $x_0 \in E$. *On dit qu'une partie* V *de* E *est un* ***voisinage*** *de* x_0 *s'il existe un ouvert* U *de* E *tel que* $x_0 \in U \subset V$. *Plus généralement, soit* A *une partie de* E, *on appelle voisinage de* A *toute partie* V *de* E *telle qu'il existe un ouvert* U *de* E *vérifiant* $A \subset U \subset V$.

Remarque 1.1.2. *Une intersection quelconque de voisinages de* x_0 *n'est pas nécessairement un voisinage de* x_0.

Définition 1.1.11. ***(Intérieur d'une partie).*** *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé,* A *une partie non vide de* E *et* $x_0 \in E$. *On dit que* x_0 *est intérieur à* A *lorsque* A *est un voisinage de* x_0. *L'ensemble des points intérieurs à* A *s'appelle l'intérieur de* A *et se note* $\mathring{A}$.

Convention. *L'intérieur de* $\emptyset$ *est* $\emptyset$.

Propriété 1.1.12. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé, soit* A *une partie de* E.

1. $\mathring{A}$ *est le plus grand ouvert de* E *contenu dans* A.
2. $\mathring{A} \subset A$ *et* $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
3. $\mathring{A} = A \Leftrightarrow A$ *est ouvert.*
4. $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.
5. $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ *et* $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

Définition 1.1.13. ***(Adhérence d'une partie)***

Soit $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé,* A *une partie non vide de* E *et* $x_0 \in E$. *On dit que* x_0 *est adhérent à* A *lorsque tout voisinage de* x_0 *rencontre* A. *L'ensemble des points adhérents à* A *s'appelle l'adhérence de* A *et se note* $\bar{A}$.

Convention. *L'adhérence de* $\emptyset$ *est* $\emptyset$.

Propriété 1.1.14. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé,* A *une partie de* E.

1. $\bar{A}$ *est le plus petit fermé contenant* A.
2. A *est un fermé* $\Leftrightarrow \bar{A} = A$.
3. $A \subset \bar{A}$ *et* $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

4. $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$.

5. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ *et* $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

6. $C_E(\bar{A}) = \overbrace{C_E(A)}^{\circ}$ *et* $C_E(\mathring{A}) = \overline{C_E(A)}$.

1.1.2 Parties bornées et Compactes

Définition 1.1.15. ***(Parties bornées).*** *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé et soit* $A \subset E$. *On dit que* A *est* ***bornée*** *s'il existe* $r > 0$ *tel que* $A \subset \bar{\mathbb{B}}(0, r)$. *Où bien, s' il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $x \in A$, $\|x\| \leq M$.

Proposition 1.1.16.

- *L'intersection d'un nombre fini ou infini de parties bornées est une partie bornée.*
- *La réunion d'un nombre fini de parties bornées est une partie bornée.*

Définition 1.1.17. ***(Compacts).*** *Un sous ensemble* A *de* E *est dit* ***compact*** *si de tout recouverement ouvert de* A *on peut extraire un sous recouvrement fini, c'est à dire, si* $A \subset \bigcup\limits_{\alpha \in J} O_\alpha$ *où* $O_a lpha$ *est un ouvert de* E *pour tout* $\alpha \in I$, *il existe* $I \subset J$, I *fini tel que* $A \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} O_\alpha$.

D'une manière équivalent, Une partie A *de* E *est* ***compacte*** *si toute suite d'éléments de* A *admet au moins une valeur d'adhérence dans* A, *c'est-à-dire qu'il existe une suite extraite qui converge dans* A.

Proposition 1.1.18.

- *L'intersection d'un nombre fini ou infini de parties compactes est une partie compacte.*
- *La réunion d'un nombre fini de parties compactes est une partie compacte.*

Théorème 1.1.19. *Soit* E *et* G *deux espaces vectoriels normés,* $f : E \to G$ *une application continue, alors on a*

(i) *Si* A *est un compact de* E, *alors* $f(A)$ *est un compact de* G.

(ii) *Pour tout ouvert* U *de* G ,$f^{-1}(U)$ *est un ouvert de* E.

(iii) *Pour tout fermé* V *de* G, $f^{-1}(V)$ *est un fermé de* E.

Théorème 1.1.20. ***(Théorème de Borel-Lebesgue).*** *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie, soit* K *une partie non vide de cet espace.* K *est compact si et seulement si* K *est fermé et borné.*

1.1.3 Ensembles convexes

Définition 1.1.21. *Soient A et B deux sous-ensembles de X, $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit*

1) $A + B = \{a + b; \quad a \in A, b \in B\}$.

2) $x + A = \{x\} + A = \{x + a; \quad a \in A\}$.

3) $\lambda A = \{\lambda a; \quad a \in A\}$.

4) $-A = \{-a; \quad a \in A\}$.

Définition 1.1.22. *Soit X un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.*

1. *Soient x, $y \in X$. On appelle **segment** de X d'extrémités x et y l'ensemble*

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)y + \lambda x; \quad 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

2. *On dit qu'un sous-ensemble C de X est **convexe** si pour tous $x, y \in C$, le segment de X d'extrémités x et y est contenu dans C. Autrement dit, C est convexe si pour tout $\lambda \in [0, 1]$; on a*

$$\lambda C + (1 - \lambda)C \subset C.$$

Proposition 1.1.23. *Soit X un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.*

1. *Si A est un sous-ensemble convexe de X, alors pour tout $n \geq 1$, on a $nA = \underbrace{A + A + ... + A}_{n fois}$.*
2. *Si A est un sous-ensemble convexe de X tel que $0 \in A$, alors $tA \subset A$ pour tout $0 \leq t \leq 1$.*
3. *Si A et B sont des sous-ensembles convexes de X et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λA, $A + B$ et $A - B$ sont des ensembles convexes.*
4. *Une intersection de sous-ensemble convexe de X est convexe.*
5. *Toute boule ouverte (resp. fermée) est un convexe de X.*

Dans certaines de nos preuves, nous aurons besoin du résultat de Radström suivant.

Lemme 1.1.24. *Soit A, B et C trios ensembles donnés dans un espace vectoriel normé E. On suppose que B est convexe fermé, C est borné et $A + C \subset B + C$. Alors $A \subset B$.*

1.2 Espaces de Banach

Définition 1.2.1. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ qui est complet pour la distance associée à la norme.*

Remarque 1.2.1. *Soient E un espace vectoriel et $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ deux normes équivalentes sur E. Alors $(E, \| \cdot \|_1)$ est un espace de Banach si et seulement si $(E, \| \cdot \|_2)$ est un espace de Banach.*

Corollaire 1.2.2. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Corollaire 1.2.3. *Dans un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé dans E.*

Théorème 1.2.4. *Toute partie complète d'un espace vectoriel normé E est fermée.*

Remarque 1.2.2. *Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ normé de dimension finie est complet.*

Théorème 1.2.5. ***(théorème de Riesz)***
Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé. Alors, E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermé $\overline{\mathbb{B}}(0,1)$ dans $(E, \| \cdot \|)$ est compacte.

1.3 Distance de Hausdorff

Dans cette section, nous allons définir la distance de Hausdorff et donner les propriétés qu' en découlent, et ceci dans le but de définir une notion de différentiabilité des applications multivoques. Les références utilisées sont [12], [3], [5].

Définition 1.3.1. ***(la distance).*** *Soit X un ensemble non vide, On appelle **distance** sur X toute applications $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

1. $\forall x, y \in X; \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
2. $\forall x, y \in X; \quad d(x,y) = d(y,x),$
3. $\forall x, y, z \in X; \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$

*Le couple (X, d) est appelé un **espace métrique**.*

Définition 1.3.2. ***(Distance associée à une norme).*** *Soit $(X, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $x, y \in E$, la distance $d(x,y) = \|x - y\|$ est appelée **distance associée à la norme**.*

Définition 1.3.3. *Soit $(X, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé . La distance d'un point $x \in X$ à un sous-ensemble A de X est donnée par*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x,a) = \inf \{\| x - a \|, \quad a \in A\}.$$

Si A et B sont deux parties non vides de X, on définit la distance entre A et B par :

$$d(A,B) = \inf \{\| a-b \|, \quad a \in A, b \in B\}.$$

Conventions. *$d(x,\emptyset) = +\infty$ et $d(\emptyset, B) = 0$ pour tout $B \neq \emptyset$.*

Définition 1.3.4. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un espace vectoriel normé X. On appelle **excès (écart)** de A sur B ; la quantité*

$$e(A,B) = \sup_{a\in A} d(a,B).$$

De façon équivalente, on peut écrire

$$e(A,B) = \inf \{\varepsilon \geq 0, A \subset B + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}_X\}.$$

Conventions. *$e(\emptyset, B) = 0$ (si $B \neq \emptyset$) et $e(A,\emptyset) = +\infty$ pour tout A.*

Remarque 1.3.1. *En générale les quantités $e(A,B)$ et $e(B,A)$ sont différents.*

Définition 1.3.5. *Soit E un espace vectoriel normé, A et B de X. On définit **la distance de Hausdorff** entre A et B par :*

$$d_H(A,B) = \max \{e(A,B), e(B,A)\}.$$

De façon équivalente, on a

$$d_H(A,B) = \inf \{\varepsilon \geq 0, \quad A \subset B + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}_X \quad et \quad B \subset A + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}_X\}.$$

Remarque 1.3.2. *Signalons qu'en général, ni la distance entre deux ensembles, ni la distance de Hausdorff ne sont des distances. Toutefois, cette dernière peut l'être, lorsque nous travaillons sur l'ensemble des parties fermées de X.*

Remarque 1.3.3. *Nous écrivons $\|A\|$ au lieu de $d_H(A,0)$, car*

$$\begin{aligned} d_H(A,0) &= \max\{e(A,0), e(0,A)\} \\ &= \max\{0, \|A\|\} \\ &= \|A\| \end{aligned}$$

Nous avons les propriétés suivantes.

Propriété 1.3.6. *Soient A, B et C des sous ensembles de X alors*

1. $e(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.

2. $d_H(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.
3. $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$.
4. $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(A, C)$.

Lemme 1.3.7. *Soient A, A_1, B et B_1 des sous ensembles non vides bornés de X. Alors*

(i) $d_H(tA, tB) = td_H(A, B), \quad t \geq 0$.

(ii) $d_H(A + B, A_1 + B_1) \leq d_H(A, A_1) + d_H(B, B_1)$.

Si A, B sont bornés fermés et convexes, et C borné, on a

(iii) $d_H(A + C, B + C) = d_H(A, B)$.

1.4 Rappel sur les applications multivoques

Dans cette section, nous allons donner les définitions et les propriétés fondamentales des applications multivoques. Les références principales pour cette section sont [3], [12], [1] et [9].

1.4.1 Applications multivoques

Définition 1.4.1. *Soient E et G deux ensembles non vides. On appelle **application multivoque**(ou **multi-application**) F définie sur E à valeurs dans G toute application qui à chaque élément $x \in E$ associe un sous ensemble $F(x)$ de G, et on note $F : E \rightrightarrows G$ ou $F : E \to \mathcal{P}(G)$, où $\mathcal{P}(G)$ est l'ensemble des parties de G.*

Définition 1.4.2. *Soient E et G deux ensembles, $F : E \rightrightarrows G$ une application multivoque.*

1. *On appelle **domaine** (effectif) de F qu'on note $dom(F)$, le sous ensemble de G défini par*
$$dom(F) = \{x \in E, F(x) \neq \emptyset\}.$$
2. *On appelle **image** de F, qu'on note $Im(F)$, le sous ensemble de G défini par*
$$Im(F) = \{y \in G, \exists x \in E, y \in F(x)\}.$$
3. *On appelle **image d'une partie** A de E par F, qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de G défini par*
$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x).$$

Et on peut écrire

$$F(A) = \{y \in G, \exists x \in A, y \in F(x)\}.$$

4. *On appelle* ***image réciproque large*** *d'une partie non vide D de G par F, le sous ensemble défini par*

$$F^{-1}(D) = \{x \in E, F(x) \cap D \neq \emptyset\}.$$

5. *On appelle* ***image réciproque étroite*** *d'une partie non vide D de G par F, le sous ensemble défini par*

$$F_+^{-1}(D) = \{x \in E, F(x) \subseteq D\}.$$

6. *On appelle* ***graphe*** *de F, qu'on note $gr(F)$, le sous ensemble de $E \times G$ défini par*

$$Gr(F) = \{(x, y) \in E \times G, y \in F(x)\}.$$

7. *L'application multivoque inverse de F est l'application $F^{-1} : G \rightrightarrows E$ telle que $x \in F^{-1}(y)$ si et seulement si $y \in F(x)$.*

Remarque 1.4.1.

- $dom(F^{-1}) = Im(F)$ *et* $Im(F^{-1}) = dom(F)$.
- $F \subset G \Leftrightarrow Gr(F) \subset Gr(G)$.

Exampele 1.1. *Dans le cas où $f : E \to G$ est une application univoque, en considérant l'application multivoque*

$$\begin{aligned} F : E &\rightrightarrows G \\ x &\mapsto F(x) = \{f(x)\}. \end{aligned}$$

Pour $A \subset E$ et $B \subset G$, nous avons

$$F(A) = f(A),\ F^{-1}(B) = f^{-1}(B) \text{ et } Gr(F) = Gr(f).$$

Définition 1.4.3. *Soient $F : E \rightrightarrows G$, $H : E \rightrightarrows G$ deux applications multivoques et $\alpha : E \to \mathbb{R}$. On définit*

$$\begin{aligned} F + H : E &\rightrightarrows G \\ t &\mapsto (F + H)(t) = F(t) + H(t) = \{x + y : x \in F(t), y \in H(t)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha F : &E \rightrightarrows G \\ t &\mapsto (\alpha F)(t) = \alpha(t)F(t) = \{\alpha(t)x : x \in F(t)\}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$dom(F + H) = dom(F) \cap dom(H) \text{ et } dom(\alpha F) = dom(F).$$

Définition 1.4.4. *On considère trois ensembles E, G et D, deux applications multivoques $F : E \rightrightarrows G$ et $H : E \rightrightarrows G$. Alors on définit*

1. ***L'union***

$$\begin{aligned} F \cup H : & E \rightrightarrows G \\ & x \mapsto (F \cup H)(x) = F(x) \cup H(x). \end{aligned}$$

2. ***L'intersection***

$$\begin{aligned} F \cap H : & E \rightrightarrows G \\ & x \mapsto (F \cap H)(x) = F(x) \cap H(x). \end{aligned}$$

3. ***Le produit cartésien***

$$\begin{aligned} F \times H : & E \rightrightarrows G \\ & x \mapsto (F \times H)(x) = F(x) \times H(x). \end{aligned}$$

4. *Si $F : E \rightrightarrows G$ et $H : G \rightrightarrows D$, on définit la* ***composition***

$$\begin{aligned} F \circ H : & E \rightrightarrows D \\ & x \mapsto (F \circ H)(x) = \bigcup_{y \in H(x)} F(y). \end{aligned}$$

Définition 1.4.5. *Soit $F : E \rightrightarrows G$ une application multivoque et $f : X \to Y$ une application univoque. Si $f(x) \in F(x)$ pour tout $x \in X$, on dit que f est une* ***sélection univoque*** *de F.*

Définition 1.4.6. *Soient $F : X \rightrightarrows Y$ et $T : X \rightrightarrows Y$ deux applications multivoques. Si $F(x) \subset T(x)$ pour tout $x \in X$, on dit que F est une* ***sélection multivoque*** *de T.*

Exampele 1.2. *L'application $F : [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x < 1/2, \\ [0, 1] & si \quad t = 1/2, \\ 1 & si \quad 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

est une sélection multivoque de l'application $T : [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par $T(x) = [0, 1]$, $\forall x \in [0, 1]$.

Définition 1.4.7. *On dit que F est à valeurs fermées (resp. convexes , compactes,...) si pour tout élément $x \in dom(F)$, $F(x)$ est un sous-ensemble fermé (resp. convexe , compact,...).*

Définition 1.4.8. *Soient $F : X \rightrightarrows Y$, P est une propriété d'un sous-ensemble de $X \times Y$, par exemple fermé, convexe, compact...On dit que F vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si son graphe la vérifie.*

Dans toute la suite considérons X et Y deux espaces vectoriels normés généraux sur le corps des nombres réels.

1.4.2 Continuité d'applications multivoques

Définition 1.4.9. ***(Semi-continuité supérieure)***
On dit que l'application $F : X \rightrightarrows Y$ est ***semi-continue supérieure*** *(s.c.s. en abrégé) en un point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(\Omega) \subset U$ c'est à dire $F(x) \subset U, \forall x \in \Omega$.*

On dit que F est s.c.s. sur X si elle est s.c.s. en tout point $x \in X$.

Définition 1.4.10. ***(Semi-continuité inférieure)***
Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est dite ***semi-continue inférieurement*** *(s.c.i. en abrégé) en un point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert U de Y vérifiant $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(x) \cap U \neq \emptyset, \forall x \in \Omega$.*

On dit que F est s.c.i. sur X si elle est s.c.i. en tout point $x \in X$.

Définition 1.4.11. *Une application $F : X \rightrightarrows Y$ est dite* ***continue au sens de Vietoris*** *en un point $x_0 \in X$, si elle est à la fois s.c.s. et s.c.i.en ce point.*

Proposition 1.4.12. ***(Caractérisations de la s.c.s.)***
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) F *est s.c.s. sur* X.

(ii) $F_+^{-1}(U)$ *est un ouvert de* X *pour tout ouvert* U *de* Y.

(iii) $F^{-1}(V)$ *est un fermé de* X *pour tout fermé* V *de* Y.

Exampele 1.3. *Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ une application multivoque définie par*

$$F(t) = \begin{cases} [0,1] & si \quad t \neq 0, \\ [0,2] & si \quad t = 0. \end{cases}$$

F est s.c.s. sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas s.c.i. au point $t_0 = 0$. En effet, soit W fermé de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F^{-1}(W) &= \{t \in \mathbb{R} : F(t) \cap W \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty : \quad [0,1] \cap W \neq \emptyset\} \cup \{t = 0 : \quad [0,2] \cap W \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

* *Si* $[0,1] \cap W \neq \emptyset \Rightarrow [0,2] \cap W \neq \emptyset$, *alors* $F^{-1}(W) = \mathbb{R}$, *qui est fermé de* $\mathbb{R}$.

* *Si* $[0,1] \cap W = \emptyset$ *et* $[0,2] \cap W \neq \emptyset$, *alors* $F^{-1}(W) = \{0\}$, *qui est fermé de* $\mathbb{R}$

* *Si* $[0,1] \cap W = \emptyset$ *et* $[0,2] \cap W = \emptyset$, *alors* $F^{-1}(W) = \emptyset$, *qui est fermé de* $\mathbb{R}$

Donc, $\forall$ *W fermé de $\mathbb{R}$, $F^{-1}(W)$ fermé de $\mathbb{R}$. D'où, F est s.c.s. sur $\mathbb{R}$.*

Ainsi, F n'est pas s.c.i au point $t_0 = 0$. Car, $\exists\ U =]\frac{3}{2}, 2[$ un ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $F(0) \cap U \neq \emptyset$, et $\forall \varepsilon > 0$;$\exists\ t = \frac{1}{2} \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que $F(t) \cap U = \emptyset$.

D'où, F n'est pas s.c.i. au point $t = 0$.

Proposition 1.4.13. ***(Caractérisations de la s.c.i.)***
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque, alors les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) *F est s.c.s sur X.*

(ii) *$F^{-1}(U)$ est un ouvert de X pour tout ouvert U de Y.*

(iii) *$F_+^{-1}(V)$ est un fermé de X pour tout fermé V de Y.*

Exampele 1.4. *Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ une application multivoque définie par*

$$F(t) = \begin{cases} [-1,1] & si \quad t \neq 0, \\ \{0\} & si \quad t = 0. \end{cases}$$

F est s.c.i. sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas s.c.s. au point 0. En effet ; soit V un fermé de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_+^{-1}(V) &= \{t \in \mathbb{R} : F(t) \subseteq V\}. \\ &= \{t = 0 : \quad 0 \in V\} \cup \{t \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty : \quad [-1,1] \subset V\}. \end{aligned}$$

* *Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $[-1,1]$ et contenant 0, alors $F_+^{-1}(V) = \{0\}$, qui est fermé de $\mathbb{R}$.*

* *Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ contenant $[-1,1]$, alors $F_+^{-1}(V) = \mathbb{R}$, qui est fermé de $\mathbb{R}$.*

* *V est un fermé de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $[-1,1]$ et 0, alors $F_+^{-1}(V) = \emptyset$, qui est fermé de $\mathbb{R}$.*

Donc, pour tout V fermé de $\mathbb{R}$, $F_+^{-1}(V)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

D'où, F est s.c.i. sur $\mathbb{R}$.

Mais, F n'est pas s.c.s au point 0. En effet; $\exists\ U =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $F(0) \subset U$, Par contre $\forall \varepsilon > 0, \exists t = \frac{1}{2} \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que $F(t) = [-1, 1] \not\subseteq U$.

Donc F n'est pas s.c.s. au point 0.

Théorème 1.4.14. *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est s.c.i. en un point $x_0 \in dom(F)$ si et seulement si pour tout $y \in F(x_0)$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset dom(F)$ convergeant vers x_0, il existe une suite d'éléments $y_n \in F(x_n)$ qui converge vers y.*

Théorème 1.4.15. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque s.c.s. à valeur fermées. Alors le graphe de F est fermée.*

Corollaire 1.4.16. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque à valeurs non vides, avec Y un espace compact. Si le graphe de F est fermé alors Fest s.c.s..*

Les applications multivoques s.c.s. possèdent la propriété fondamentale qui suite.

Corollaire 1.4.17. *Si $F : X \rightrightarrows Y$ est s.c.s. à valeurs compactes alors l'image de tout compact de X est un sous ensemble compact de Y.*

Exampele 1.5. ***Contre exemple pour la s.c.i.***
Soit $F : [0.1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ une application multivoque définie par

$$F(t) = \begin{cases} [0, t] & si \quad t \neq 1, \\ \{0\} & si \quad t = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Gr(F) &= \{(t, y), y \in F(t)\} \\ &= \{(t, y), y \in [0, t]\} \\ &= \{(t, y) \in [0, 1] \times [0, 1[, y \in [0, t]\} \cup \{(1, 0)\}. \end{aligned}$$

F est s.c.i. sur $[0, 1]$ qui est compact mais

$$F([0, 1]) = \bigcup_{t\in[0,1]} F(t) = \bigcup_{t\in[0,1[} [0, t] \bigcup \{0\} = \bigcup_{t\in[0,1[} [0, t] = [0, 1[;$$

qui n'est pas compact.

Théorème 1.4.18. *Soient $F : X \rightrightarrows Y$ et $T : Y \rightrightarrows Z$ deux applications multivoques. Si F et T sont s.c.s. (resp, s.c.i.), alors la composée $T \circ F : X \rightrightarrows Z$ est s.c.s. (resp, s.c.i.).*

Théorème 1.4.19. *Soient $F : X \rightrightarrows Y$, $G : X \rightrightarrows Y$ deux applications multivoques tel que $\forall x \in X, F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$. On suppose que* *(i)* F *est s.c.s. au point* $x_0 \in X$.

(ii) $F(x_0)$ *est compact.*

(iii) *le graphe de* G *est fermé.*

Alors, l'application multivoque $F \cap G$ *est s.c.s. au point* x_0.

Définition 1.4.20. ***(ε-δ-semi-continue supérieure et inférieure).*** *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une application multivoque à valeurs bornées.*

a) *On dit que* F *est* ***ε-δ-semi-continue supérieurement*** *en* $x \in X$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$F(x+h) \subset F(x) + \varepsilon \mathbb{B}_Y, \text{ lorsque } \|h\| < \delta.$$

b) *On dit que* F *est* ***ε-δ-semi-continue inférieurement*** *en* $x \in X$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$F(x) \subset F(x+h) + \varepsilon \mathbb{B}_Y, \text{ lorsque } \|h\| < \delta.$$

c) F *est dite* ***ε-δ-continue*** *en* x *si elle est à la fois* ε-δ-*s.c.s. et* ε-δ-*s.c.i. en ce point.*

Proposition 1.4.21. *Si* $F : X \rightrightarrows Y$ *est s.c.s. alors* F *est* ε-δ-*s.c.s., l'inverse est vrais si* F *à valeurs compactes.*

Proposition 1.4.22. *s.c.i est le même que* ε-δ-*s.c.i. si* F *à valeurs compactes, sinon* ε-δ-*s.c.i. est plus contraignant.*

Définition 1.4.23. ***(H-semi-continue supérieure et inférieure).*** *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une application multivoque.*

a) *On dit que* F *est* ***H-semi-continue supérieurement*** *en* $x_0 \in X$, *si la fonction à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ $x \mapsto e(F(x), F(x_0))$ *est continue en* x_0. *On dit que H-s.c.s. si elle est H-s.c.s. à chaque* $x_0 \in X$.

b) *On dit que* F *est* ***H-semi-continue inférieurement*** *en* $x_0 \in X$, *si la fonction à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ $x \mapsto e(F(x_0), F(x))$ *est continue en* x_0. *On dit que H-s.c.i. si elle est H-s.c.i. à chaque* $x_0 \in X$.

c) *On dit que* F *est* ***H-continue*** *en* $x_0 \in X$ *si elle est H-s.c.s. et H-s.c.i. en* x_0.

Proposition 1.4.24. *Si* $F : X \rightrightarrows Y$ *est s.c.s. alors* F *est H-s.c.s.*

Proposition 1.4.25. *Si* $F : X \rightrightarrows Y$ *est H-s.c.i. alors* F *est H-s.c.i.*

Nous rappelons les limites inférieure et supérieure, la semi-continuité intérieure et extérieure d'une applications multivoque.

Définition 1.4.26. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et $\bar{x} \in X$. On définit* ***la limite inférieure*** *de F en $\bar{x}$ par*

$$\liminf_{x \to \bar{x}} F(x) = \{y \in Y | \forall V \in \mathcal{V}_y, \exists U \in \mathcal{V}_{\bar{x}}; \forall x \in U \setminus \{\bar{x}\}; F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Et ***la limite supérieure*** *de F en $\bar{x}$ par*

$$\limsup_{x \to \bar{x}} F(x) = \{y \in Y | \forall V \in \mathcal{V}_y, \forall U \in \mathcal{V}_{\bar{x}}; \exists x \in U \setminus \{\bar{x}\}; F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Définition 1.4.27. ***(Semi-continuité intérieure et extérieure)***
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et $\bar{x} \in X$.

(a) On dit que F est ***semi-continue extérieurement*** *(o.s.c.) en $\bar{x}$ si*

$$\limsup_{x \to \bar{x}} F(x) \subset F(\bar{x}).$$

(b) Elle est dite ***semi-continue intérieurement*** *(i.s.c.) en $\bar{x}$ si*

$$F(\bar{x}) \subset \liminf_{x \to \bar{x}} F(x).$$

(c) L'application F sera dite ***continue*** *en $\bar{x}$ si elle est à la fois o.s.c. et i.s.c. en ce point.*

Il est naturel de se demander s'il existe une relation entre les définitions (1.4.11) et (1.4.27). En fait, on sait grâce à [16] que la semi-continuité inférieure correspond à la semi-continuité intérieure, alors qu'en dehors de l'hypothèse de compacité la semi-continuité extérieure n'entraîne pas la semi-continuité supérieure.

Proposition 1.4.28. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et $\bar{x} \in X$.*

a) L'application F est ***o.s.c.*** *en $\bar{x}$ si et seulement si pour tout voisinage V de $F(\bar{x})$ et $\rho > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tels que*

$$F(x) \cap \rho\overline{\mathbb{B}}_Y \subset V, \quad \forall x \in U. \tag{1.1}$$

b) Si $F(\bar{x})$ est fermé et Y est de dimension finie, alors F est ***o.s.c.*** *en $\bar{x}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(x) \cap \rho\overline{\mathbb{B}}_Y \subset F(\bar{x}) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in U. \tag{1.2}$$

c) Si $F(\bar{x})$ est fermé borné et Y est de dimension finie, alors F est ***o.s.c.*** *en $\bar{x}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in U. \tag{1.3}$$

Proposition 1.4.29. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. On suppose que Y est de dimension finie. Soit $\bar{x} \in X$ tel que $F(\bar{x})$ soit un sous-ensemble fermé de Y. Alors l'application F est* ***semi-continue intérieurement*** *en $\bar{x}$ si et seulement si pour tous $\rho > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(\bar{x}) \cap \rho\overline{\mathbb{B}}_Y \subset F(x) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in U. \tag{1.4}$$

Définition 1.4.30. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. On dit que F est* ***localement fermée*** *en un point $(\bar{x}, \bar{y})$ de son graphe, s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{B}_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) \cap Gr(F)$ soit fermé.*

1.4.3 Applications multivoques lipschitziennes

Les résultats suivants sont pris des références [8], [9] et [12].

Définition 1.4.31. ***(Applications lipschitziennes).*** *On dit qu'une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est* ***lipschitzienne*** *en $\bar{x} \in X$, s'il existe une constante $\ell \geq 0$ et un voisinage $U \subset dom(F)$ de $\bar{x}$ telle que*

$$d_H(F(x), F(x')) \leq \ell \parallel x - x' \parallel, \quad \forall x, x' \in U. \tag{1.5}$$

De manière équivalente

$$F(x) \subset F(x') + \ell \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x, x' \in U. \tag{1.6}$$

Remarque 1.4.2. *L'application F sera dite lipschitzienne sur un sous-ensemble non vide D de $dom(F)$, s'il existe une constante positive ℓ tels que l'inclusion ci-dessus soit valable pour tous les éléments $x, x' \in D$.*

Définition 1.4.32. *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est dit* ***lipschitzienne extérieurement*** *en un point $\bar{x} \in X$; s'il existe une constante positive ℓ et un voisinage U de $\bar{x}$ tels que*

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + \ell \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in U. \tag{1.7}$$

Remarque 1.4.3. *Toute application multivoque lipschitzienne est lipschitzienne extérieurement.*

Définition 1.4.33. ***(Application pseudo-lipschitzienne).*** *Soit $F : X \rightrightarrows y$. On dit que F est* ***pseudo-lipschitzienne*** *en $\bar{x}$ pour $\bar{y} \in Y$ avec $\bar{y} \in F(\bar{x})$, s'il existe une constante $\ell \geqslant 0$, $U \in \mathcal{V}_{\bar{x}}$ et $V \in \mathcal{V}_{\bar{y}}$ tels que*

$$e(F(x) \cap V, F(x')) \leq \ell \parallel x - x' \parallel, \quad \forall x, x' \in U. \tag{1.8}$$

De façon équivalente

$$F(x) \cap V \subset F(x') + \ell \parallel x - x' \parallel \mathbb{B}_Y, \quad \forall x, x' \in U. \tag{1.9}$$

L'infimum des valeurs de ℓ pour lesquelles on a l'existence des voisinages U et V tels que ceci soit vrai est le module de Lipschitz de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$; il est noté $lip(F; \bar{x} \mid \bar{y})$. On dira que F ne possède pas cette propriété en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si et seulement si $lip(F; \bar{x}|\bar{y}) = +\infty$.

Remarque 1.4.4. *Lorsque F est lipschitzienne (resp. pseudo-lipschitzienne) de module ℓ, on dit aussi qu'elle est ℓ-lipschitzienne (resp. ℓ-pseudo-lipschitzienne).*

Définition 1.4.34. ***(Application calme).*** *Une application $F : X \rightrightarrows Y$ est dit* ***calme*** *en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ avec $(\bar{x}, \bar{y}) \in GrF$, s'il existe une constante $k \geq 0$, $U \in \mathcal{V}_{\bar{x}}$ et $V \in \mathcal{V}_{\bar{y}}$ tels que*

$$F(x) \cap V \subset F(\bar{x}) + k \parallel x - \bar{x} \parallel \mathbb{B}_Y, \quad \forall x \in U. \tag{1.10}$$

L'infimum des valeurs de k pour les quelles on a l'existence de tels voisinages vérifiant cette inclusion est le module du caractère calme de$F$. Il est noté $clm(F, \bar{x}|\bar{y})$.

Remarque 1.4.5. *Toute application pseudo-lipshitzienne est calme.*

Définition 1.4.35. ***(Régularité métrique).*** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque avec $domF \neq \emptyset$. On dit que F est* ***métriquement régulière*** *en $\bar{x} \in X$ pour $\bar{y} \in Y$ si $\bar{y} \in F(\bar{x})$, il existe $k \geq 0$, $U \in \mathcal{V}_{\bar{x}}$ et $V \in \mathcal{V}_{\bar{y}}$ tel que*

$$d_X(x, F^{-1}(y)) \leq k d_Y(y, F(x)), \quad \forall (x, y) \in U \times V.$$

L'infimum des valeurs de k pour les quelles on a l'existence de tels voisinages est le module de régularité métrique de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$. On le note $reg(F; \bar{x}|\bar{y})$. Si $reg(F; \bar{x}|\bar{y}) = +\infty$; la régularité métrique de F n'existe pas.

Définition 1.4.36. *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$est dite* ***ouverte*** *en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ avec $\bar{y} \in F(\bar{x})$ si $\bar{x} \in int(domF)$ et pour tout voisinage U de $\bar{x}$; l'ensemble $F(U)$ est un voisinage de $\bar{y}$.*

Théorème 1.4.37. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application à graphe convexe fermé, $\bar{x} \in X$ et $\bar{y} \in F(\bar{x})$. Alors les conditions suivante sont équivalentes*

(a) $\bar{y} \in int(Im(F))$,

(b) F est ouverte en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$,

(c) F est métriquement régulière en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$.

Le théorème suivant établit un lien entre la régularité métrique d'une application multivoque et la pseudo-lipschitzieté de son inverse. On peut en trouver une preuve dans [[8], page 165].

Théorème 1.4.38. *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est métriquement régulière en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si et seulement si son inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ est pseudo-lipshitzienne en $\bar{y}$ pour $\bar{x}$, De plus $lip(F^{-1}; \bar{y}|\bar{x}) = reg(F; \bar{x}|\bar{y})$.*

1.4.4 Convexité des applications multivoques

Définition 1.4.39. ***(convexité d'application multivoque).*** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. On dit que F est **convexe** si pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$*

$$(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y) \subset F((1 - \lambda)x + \lambda y). \tag{1.11}$$

Remarque 1.4.6.

Lorsque F est convexe, il en est de même de son domaine, son image et aussi son inverse F^{-1}.

Définition 1.4.40. *On considère une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ et $\bar{x} \in dom(F)$. On dit que F est **étoilée** en $\bar{x}$ (ou par rapport à $\bar{x}$) si, pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a*

$$(1 - \lambda)F(\bar{x}) + \lambda F(x) \subset F((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x). \tag{1.12}$$

Il est à noter que le domaine d'une application multivoque F étoilée en un point $\bar{x}$ l'est aussi en ce point et son image l'est en tout point $\bar{y} \in F(\bar{x})$.

Remarque 1.4.7. *Toute application multivoque étoilée est convexe.*

Définition 1.4.41. *Soit C un sous-ensemble non vide de Y .*

*(a) On dit que C est **un cône** s'il est stable pour la multiplication par les scalaires positifs,i.e., $\lambda C \subset C$ pour tout $\lambda \geq 0$.*

*(b) Un cône C est dit **pointé** si $C \cap (-C) = 0_Y$.*

*(c) Un cône convexe $C \subset Y$ est dit **solide** si $int(C) \neq \emptyset$.*

Proposition 1.4.42. *Soit Y un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, un cône $C \subset Y$ est convexe si et seulement si $C + C \subset C$.*

Proposition 1.4.43. *Soit Y un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $C \subset Y$. Si C est un cône convexe alors $C + int(C) \subset int(C)$.*

Définition 1.4.44. ***(Cône-convexité d'ensembles).*** *Soit $C \subset Y$ un cône convexe. Un sous-ensemble A de Y est dit* ***C-convexe*** *si $A + C$ est un ensemble convexe.*

Définition 1.4.45. ***(Cône-convexité d'application multivoque).*** *Soit $F : X \rightrightarrows y$ une application multivoque et $C \subset Y$ un cône convexe non vide. On dit que F est un* ***C-convexe*** *si pour tout $x, x' \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$;*

$$(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(x') \subset F((1 - \lambda)x + \lambda x') + C. \tag{1.13}$$

Remarque 1.4.8. *Lorsque $C = \{0_Y\}$ alors on retrouve la notion de convexité de la Définition (1.4.39) qui est plus forte.*

Définition 1.4.46. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et un cône convexe non vide $C \subset Y$. On dit que F est* ***C-concave*** *si, pour tout $x, x' \in X$ et tout $\lambda \in [0, 1]$;*

$$(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(x') \subset F((1 - \lambda)x + \lambda x') - C. \tag{1.14}$$

Définition 1.4.47. ***(Ensemble C-fermé).*** *Soit $C \subset Y$ un cône convexe non vide. Un sous-ensemble A de Y est dit* ***C-fermé*** *si l'ensemble $A + \overline{C}$ est fermé.*

Lorsque $C = \{0_Y\}$alors ce concept coïncide avec la notion classique d'un ensemble fermé.

Définition 1.4.48. ***(Application positivement homogène).*** *Soit $H : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. On dite que H est* ***homogène*** *si $H(tx) = tH(x)$ pour tout $t \geqq 0$ et $x \in X$, et* ***positivement homogène*** *si $0_Y \in H(0_X)$ et $H(\lambda x) = \lambda H(x)$ pour tous $x \in X$ et $\lambda > 0$.*

Proposition 1.4.49. ***(Caractérisation d'une application positivement homogène).*** *Une application multivoque $H : X \rightrightarrows Y$ est* ***positivement homogène*** *si et seulement si son graphe est un cône.*

Remarque 1.4.9. *Si $H : X \rightrightarrows Y$ est une application multivoque positivement homogène alors son inverse $H^{-1} : Y \rightrightarrows X$ l'est aussi, et donc $Gr(H)$ et $Gr(H^{-1})$ sont des cônes.*

Définition 1.4.50. ***(Processus convexe).*** *Une application $F : X \rightrightarrows Y$est appelée* ***un processus convexe*** *si elle est positivement homogène et vérifie*

$$F(x) + F(x') \subset F(x + x'), \quad \forall x, x' \in X. \tag{1.15}$$

De façon équivalente, une application multivoque est un processus convexe si et seulement si son graphe est un cône convexe. Un processus convexe est donc une application multivoque, mais la réciproque est fausse.

CHAPITRE 2

DIFFÉRENTIABILITÉ D'UNE APPLICATIONS MULTIVOQUE

Il ya plusieurs auteurs qui ont abordé la notion de différentiabilité d'une application multivoque, qui a été présenté sous différentes formes, chaque définition suit certaines propriétés. Dans ce chapitre, nous mettons en lumière le concept de différentiabilité d'une application multivoque de Nachi-Pinot et DeBlasi. Les références principales pour ce chapitre sont [13], [5] et [2].

2.1 Différentiabilité d'une application univoque

Nous rappelons d'abord la notion de différentiabilité d'une application univoque. Soit X et Y deux espaces vectoriels réels normés. f une application d'un ouvert O de X dans Y.

Définition 2.1.1. ***(Dérivée directionnelle).*** *Soient $x_0 \in O$, $h \in X$. La limite*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{\lambda} \tag{2.1}$$

lorsqu'elle existe, est appelée dérivée de f au point x_0 suivant la direction h. Elle est notée $f'(x_0; h)$.

Remarque 2.1.1. *Soit ϕ la fonction définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ par $\phi(t) = f(x_0 + th)$. D'après la définition précédente, f admet une dérivée au point x_0 dans la direction h si et seulement si ϕ est dérivable en zéro. De plus, $\phi'(0) = f'(x_0; h)$.*

Définition 2.1.2. ***(Dérivée de Gâteaux).*** *Soit $x_0 \in O$. Supposons que $f'(x_0; h)$ existe pour tout $h \in X$. S'il existe un opérateur linéaire et continu $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $Lh = f'(x_0; h)$ pour tout $h \in X$, alors l'opérateur L est appelé Gâteaux-différentielle (ou G-différentielle) de f au point x_0. Il est souvent noté $f'(x_0)$, et f est dite Gâteaux-différentiable (ou différentiable au sens de Gâteaux) au point x_0.*

Remarque 2.1.2. *L'application f est G-différentiable en x_0 si et seulement si, il existe un opérateur $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que*

$$f(x_0 + \lambda h) = f(x_0) + \lambda Lh + |\lambda|\varepsilon(\lambda), \quad \text{avec} \lim_{|\lambda| \to 0} \varepsilon(\lambda) = 0. \tag{2.2}$$

où ε est une application de $\mathbb{R}$ dans Y dépendant de h.

Remarque 2.1.3. *L'application f peut être G-différentiable en x_0 sans être continue en ce point.Par exemple, l'application $f$de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$définie par$f(x_1, x_2) = 1$ si $x^2 > 0$ et si $x_1 = (x_2)^2$, et $f(x_1, x_2) = 0$ sinon, est G-différentiable en $(0, 0)$ sans être continue en ce point.*

Définition 2.1.3. ***(Dérivée de Fréchet).*** *Soit $x_0 \in O$. Supposons qu'il existe un opérateur $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ et une application ε de X dans Y, tels que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + \|h\|\varepsilon(h), \quad \lim_{\|h\| \to 0} \varepsilon(h) = 0. \tag{2.3}$$

L'opérateur L est appelé différentielle de Fréchet (ou F-différentielle, ou Fréchet-différentielle) de f au point x_0, et f est dite Fréchet-différentiable (ou différentiable, ou différentiable au sens de Fréchet) au point x_0. La différentielle de f au point x_0 est souvent notée $Df(x_0)$, la notation $f'(x_0)$ est aussi utilisée.

Remarque 2.1.4. *Si l'application f est F-différentiable en x_0 alors l'opérateur L intervenant dans la définition précédente est unique. Par conséquent, l'application ε est aussi unique.*

Remarque 2.1.5. *Si l'application f est F-différentiable en x_0 alors elle est continue en ce point.*

Définition 2.1.4. ***(Définition équivalente de la F-différentiabilité).*** *L'application f est F-différentiable en x_0 si et seulement si, il existe un opérateur $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que*

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh\|_Y}{\|h\|_X} = 0. \tag{2.4}$$

Proposition 2.1.5. *Si f est Fréchet-différentiable au point x_0, alors elle est Gâteaux-différentiable en ce point, et la F-différentielle et la G-différentielle coïncident. La réciproque est fausse.*

Théorème 2.1.6. ***(Différentielle d'une combinaison linéaire).*** *Soient X, Y des espaces vectoriels normés. Soient U un ouvert de X, f et g deux applications de U dans Y, soient $x_0 \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Si f et g sont F-différentiables (respectivement G-différentiables) en x_0, alors $\lambda f+g$ est F-différentiable (respectivement G-différentiable) en x_0, et $D(\lambda f+g)(x_0) = \lambda Df(x_0)+Dg(x_0)$.

Théorème 2.1.7. ***(Différentielle de la composée de deux applications F-différentiables).*** *Soient X, Y , Z des espaces vectoriels normés, soient un ouvert U de X, et un ouvert V de Y. Soient f une application de U dans V, et g une application de V dans Z.*

Si f est F-différentiable en $x_0 \in U$, et si g est F-différentiable en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est F-différentiable en x_0, et $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$.

2.2 Différentiabilité d'une application multivoque

2.2.1 La notion de différentiabilité au sens de DeBlasi

La définition suivante de la différentiabilité est suggérée par une idée de Bridgland [4]. Soit X, Y des espaces de Banach, U un sous-ensemble ouvert non vide de X.

Définition 2.2.1. *Soit $F : U \rightrightarrows Y$ une application multivoque à valeurs bornées et non vides. On dit que F est différentiable au sens de DeBlasi au point $x \in U$, s'il existe une application ε-δ-s.c.s. et positivement homogène $D_x : X \rightrightarrows Y$ à valeurs bornées, fermées et convexes, et il existe un nombre $\delta > 0$, tels que*

$$d_H(F(x+h), F(x) + D_x(h)) = o(h), \quad \|h\| < \delta.$$

Où $o(h)$ désigne une fonction non négative telle que $\lim_{h\to 0} o(h)/\|h\| = 0$. D_x est appelé la différentielle (à valeurs multiples) de F en x.

Remarque 2.2.1. *La différentiabilité d'une application multivoque au sens de DeBlasi entraîne la différentiabilité au sens de Fréchet, si l'application est univoque.*

Le théorème suivant montre que le différentiel D_x est bien défini.

Théorème 2.2.2. *Soit $F : U \rightrightarrows Y$ une application multivoque à valeurs bornées et non vides. Si F est différentiable en x alors sa différentielle D_x est unique.*

Démonstration. Supposons que D_x et D_x^1 sont deux différentielle de F en x.

Soit $\delta > 0$ tel que

$$d_H(F(x+h), F(x) + D_x(h)) = o(h), \quad \|h\| < \delta,$$

soit $\delta^1 > 0$ tel que

$$d_H(F(x+h), F(x) + D_x^1(h)) = o^1(h), \quad \|h\| < \delta^1.$$

Comme D_x et D_x^1 sont homogène, alors $D_x(0) = D_x^1(0) = \{0\}$.

D'autre part, soit $u \neq 0$, et soit $t > 0$ tel que $t\|u\| < \delta, \delta^1$. Ensuite, par le lemme(1.3.7), nous avons

$$\begin{aligned} d_H(D_x(tu), D_x^1(tu)) &= d_H(D_x(tu) + F(x), D_x^1(tu) + F(x)) \\ &\leq d_H(D_x(tu) + F(x), F(x+tu)) + d_H(F(x+tu), D_x^1(tu) + F(x)) \\ &\leq o(tu) + o^1(tu). \end{aligned}$$

Ainsi

$$d_H(tD_x(u), tD_x^1(u)) \leq o(tu) + o^1(tu),$$

alors

$$td_H(D_x(u), D_x^1(u)) \leq o(tu) + o^1(tu),$$

d'où

$$d_H(D_x(u), D_x^1(u)) \leq o(tu)/t + o^1(tu)/t.$$

Lorsque $t \to 0$, nous avons

$$d_H(D_x(u), D_x^1(u)) = 0.$$

De plus, $D_x(u)$ et $D_x^1(u)$ sont bornée fermée, nous avons

$$D_x(u) = D_x^1(u).$$

Par conséquente, la différentielle D_x est unique. ■

Théorème 2.2.3. *Soit $F : U \rightrightarrows Y$ une application multivoque à valeurs bornées non vides, si F est différentiable en x alors elle est H-continue en ce point.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, puisque F est différentiable en x, il existe $\delta > 0$ tel que

$$d_H(F(x+h), F(x) + D_x(h)) = o(h), \quad \|h\| < \delta.$$

Par ailleurs, puisque D_x est ε-δ-$s.c.s.$ et $D_x(0) = 0$, il existe $0 < \delta_1 < \delta$ tel que $D_x(h) \subset \varepsilon \mathbb{B}_Y$ si $\|h\| < \delta_1$.

Pour $\|h\| < \delta_1$, on a

$$\begin{aligned} d_H(F(x+h), F(x)) &\leq d_H(F(x+h), F(x) + D_x(h)) + d_H(F(x) + D_x(h), F(x)) \\ &\leq o(h) + d_H(D_x(h), 0) \\ &\leq o(h) + \|D_x(h)\| \\ &\leq o(h) + \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où, F est H-continue en x. ■

Théorème 2.2.4. *Soit U un sous-ensemble ouvert et convexe non vide de X, $F : U \rightrightarrows Y$ une application multivoque à valeur bornées fermées. L'application F est constante si et seulement si pour tout $x \in U$, $D_x = 0$.*

Démonstration. Supposons que l'application multivoque F est une constante M, alors il existe $\delta > 0$, tel que pour $\|h\| < \delta$, on a

$$d_H(M, M + D_x(h)) = o(h),$$

implique que

$$d_H(0, D_x(h)) = o(h), \quad \forall \|h\| < \delta.$$

Par suit

$$\|D_x(h)\| = o(h), \quad \forall \|h\| < \delta.$$

Donc, nous avons $D_x = 0$.

Inversement,

Soit $x \in U$, comme $D_x = \{0\}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$d_H(F(x+h), F(x)) = o(h), \quad \forall \|h\| < \delta.$$

Soit $x, x_1 \in U$, on a

$$|d_H(F(x_1), F(x+h)) - d_H(F(x_1), F(x))| \leq d_H(F(x+h), F(x)) = o(h).$$

Pour $0 < \|h\| < \delta$, nous avons

$$|d_H(F(x_1), F(x+h)) - d_H(F(x_1), F(x))|/\|h\| \leq o(h)/\|h\|.$$

Considérons l'application $G : U \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = d_H(F(x_1), F(x))$, pour tout $x \in U$. On a donc que pour tout $x \in U$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|h\| < \delta$ entraîne $|G(x+h) - G(x)| \leq o(h)$. Par conséquent, G est différentiable(au sens de Fréchet), sa différentielle est 0 et ainsi G est constante. Or, $G(x_1) = d_H(F(x_1), F(x_1)) = 0$ et donc $G(x) = 0$ pour tout $x \in U$. On conclut que F est constante sur U car $F(x) = F(x_1)$ pour tout $x \in U$. ■

2.2.2 La notion de différentiabilité au sens de Nachi et Penot

Nous désignons par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X vers Y.

Définition 2.2.5. *Soit X, Y deux espaces vectoriels normés, X_0 un sous-ensemble ouvert de X, et soit $F : X_0 \rightrightarrows Y$ une application multivoque .*

*On dit que F est **différentiable** en $\bar{x} \in X_0$, si elle est s.c.i. en $\bar{x}$ et s'il existe $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que*

$$e(F(\bar{x}+h), F(\bar{x}) + A(h)) = o(h). \tag{2.5}$$

*De manière équivalente, F est **différentiable** en $\bar{x}$, si elle est s.c.i. en $\bar{x}$ et s'il existe $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, et une application $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ continue en 0 avec $\mu(0) = 0$ telles que*

$$F(\bar{x}+h) \subset F(\bar{x}) + A(h) + \mu(\|h\|)\|h\|\overline{\mathbb{B}}_Y. \tag{2.6}$$

A est appelé la dérivée de F en $\bar{x}$. L'ensemble des dérivée de F en $\bar{x}$ est noté $DF(\bar{x})$.

Définition 2.2.6. *Soit X, Y deux espace vectoriel normé, X_0 un sous-ensemble ouvert de X, et soit une application multivoque $F : X_0 \rightrightarrows Y$.*

*On dit que F est **pseudo-différentiable** en $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr(F)$, si elle est s.c.i. en $(\bar{x}, \bar{y})$ et s'il existe un voisinage V de $\bar{y}$, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que*

$$e(F(\bar{x}+h) \cap V, F(\bar{x}) + A(h)) = o(h). \tag{2.7}$$

*De manière équivalente, F est **pseudo-différentiable** en $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr(F)$ si elle est s.c.i. en ce point et s'il existe un voisinage V de $\bar{y}$, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et une application $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ continue en 0 avec $\mu(0) = 0$ telles que pour $x \in X$, on a*

$$F(\bar{x}+h) \cap V \subset F(\bar{x}) + A(h) + \mu(\|h\|)\|h\|\overline{\mathbb{B}}_Y. \tag{2.8}$$

Remarque 2.2.2. *Une application multivoque qu'est différentiable en $\bar{x}$ est pseudo-différentiable en $(\bar{x}, \bar{y})$ pour tout $\bar{y} \in F(\bar{x})$.*

Définition 2.2.7. *Soit X_0 un sous-ensemble ouvert de X. Une application multivoque $F : X_0 \rightrightarrows Y$ est dit **quasi-différentiable** en $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr(F)$ avec la dérivée $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, si elle est semi-continue inférieurement en $(\bar{x}, \bar{y})$ et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\beta > 0$, $\delta > 0$ dépendant de ε tels que*

$$F(\bar{x} + h) \cap \mathbb{B}_\beta(\bar{y}) \subset F(\bar{x}) + A(h) + \varepsilon \|h\| \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \delta \overline{\mathbb{B}}_X. \tag{2.9}$$

Exampele 2.1. *Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ donnée par $F(x) = [-1, 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors F est différentiable en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Remarque 2.2.3. *Dans la définition (2.2.5), nous avons $\mu(\|h\|)$ qui tend vers 0 lorsque $\|h\|$ tend vers 0 ; cela signifie que pour tout $\delta > 0$, nous avons l'existence d'un certain $\alpha > 0$ tel que $\|h\| \leq \alpha$ entraîne que $\mu(\|h\|) \leq \delta$. Si par ailleurs on pose $x = \bar{x} + h$, l'expression (2.6) devient*

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + A(x - \bar{x}) + \delta \|x - \bar{x}\| \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}). \tag{2.10}$$

Alors que l'expression (2.8) devient

$$F(x) \cap V \subset F(\bar{x}) + A(x - \bar{x}) + \delta \|x - \bar{x}\| \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}). \tag{2.11}$$

De la même façon, l'expression (2.9) de la définition (2.2.7) donne

$$F(x) \cap \mathbb{B}_\beta(\bar{y}) \subset F(\bar{x}) + A(x - \bar{x}) + \varepsilon \|x - \bar{x}\| \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \delta \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}). \tag{2.12}$$

Le lemme suivant éclaire les notions précédentes lorsque $F(\bar{x})$ est un singleton.

Lemme 2.2.8. *Soit $F : X_0 \rightrightarrows Y$ une application multivoque tel que $F(\bar{x}) = \{\bar{y}\}$, et soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors, parmi les affirmations suivantes, on a les équivalences $(a) \Leftrightarrow (b)$ et $(a') \Leftrightarrow (b')$:*

- *(a) F est différentiable en $\bar{x}$ de la dérivée A.*
- *(b) Toute sélections f de F est différentiable en $\bar{x}$ de la dérivée A.*
- *(a') F est quasi-différentiable en $(\bar{x}, \bar{y})$ de la dérivée A.*
- *(b') F est semi-continue inférieure en $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr(F)$ et tout sélection f de F continue en $\bar{x}$ est différentiable en $\bar{x}$ de la dérivée A.*

Corollaire 2.2.9. *Lorsque $F(\bar{x})$ est un singleton $\{\bar{y}\}$ et F est quasi-différentiable en $(\bar{x}, \bar{y})$, l'application A apparaissant dans (2.2.7) est unique.*

Remarque 2.2.4. *Lorsque $F(\bar{x})$ n'est pas un singleton l'unicité peut échouer.*

Proposition 2.2.10.

a) Soit $F : X \rightrightarrows Y$, $G : X \rightrightarrows Y$ différentiable en $\bar{x}$, alors $F + G$ est différentiable en $\bar{x}$.

b) Soit $F : X \rightrightarrows Y$ pseudo(resp, quasi)-différentiable en $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr(F)$ et soit $g : X \to Y$ différentiable en $\bar{x}$, alors $H := F + g$ est pseudo(resp, quasi)-différentiable en $(\bar{x}, \bar{y} + g(\bar{x}))$.

Proposition 2.2.11. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ non vide et différentiable sur un sous-ensemble ouvert convexe X_0 de X. S'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\inf\{\|A\|; \quad A \in DF(x)\} \leq c$ pour chaque $x \in X_0$, alors F est lipschitzienne de rapport c sur X_0 :*

$$d(F(x_1), F(x_0)) \leq c\|x_1 - x_0\|, \quad \forall x_0, x_1 \in X_0. \tag{2.13}$$

Proposition 2.2.12. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ tel que $F(\bar{x}) = \{\bar{y}\}$. Supposons que F est ouverte en $(\bar{x}, \bar{y})$ et est **quasi-différentiable** (resp, **pseudo-différentiable**) en $(\bar{x}, \bar{y})$ de dérivée A un isomorphisme de X sur Y. Alors F^{-1} est **quasi-différentiable** (resp, **pseudo-différentiable**) en $(\bar{y}, \bar{x})$ avec la dérivée A^{-1}.*

CHAPITRE 3

PRÉDÉRIVÉES D'APPLICATION MULTIVOQUE

Dans ce chapitre nous nous intéressons à établir plusieurs notions de prédérivée des applications multivoques, parmi elles étaient un prédérivée extérieure (resp, intérieure), et leur relations entre la semi-continuité extérieure(resp, intérieure). Ensuite, nous étudions l'existence de prédérivabilité pour des applications multivoque possédant certaines propriétés de convexité. Nous voudrions signaler que la plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont issus de la publication [9], [11] et [12].

D'abord nous rappelons la définition suivante présentant les notions de prédérivée de fonctions univoque introduites par Ioffe.

3.1 Définitions

Dans la suites on note $\mathcal{H}(X, Y)$ l'ensemble des **applications multivoques positivement homogènes** de X vers Y.

Définition 3.1.1. *Soit f une application univoque définie sur un voisinage de $\bar{x} \in X$, à* *valeurs dans Y, et soit $H : X \rightrightarrows Y \in \mathcal{H}(X,Y)$ à valeurs fermées. On considère les relations*

$$f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) \in H(h) + r(h)\|h\|\overline{\mathbb{B}}_Y; \tag{3.1}$$

$$H(h) \subset \bigcup_{0<t<1} t^{-1}(f(\bar{x}+th) - f(\bar{x})) + r(h)\|h\|\overline{\mathbb{B}}_Y; \tag{3.2}$$

où $r : X \to \mathbb{R}_+$ est une fonction définie sur un voisinage de 0.

a) On dit que H est une ***prédérivée extérieure*** *de f en $\bar{x}$ si la relation (3.1) est satisfaite avec $r(h) \to 0$ lorsque $\|h\| \to 0$.*

b) On dit que H est une ***prédérivée intérieure*** *de f en $\bar{x}$ si la relation (3.2) est satisfaite avec $r(h) \to 0$ lorsque $\|h\| \to 0$.*

c) On dit que H est une ***prédérivée*** *de f en $\bar{x}$ si elle est à la fois une prédérivée intérieure et extérieure de f en ce point.*

d) On dit que l'application H est une ***prédérivée stricte*** *de f en $\bar{x}$ si*

$$f(x+h) - f(x) \in H(h) + r(x,h)\|h\|\overline{\mathbb{B}}_Y, \tag{3.3}$$

avec $r(x,h) \to 0$ lorsque $\|x-\bar{x}\| \to 0$ et $\|h\| \to 0$; où $r : X \times X \to \mathbb{R}_+$.

Dans la définition suivante, Pang a développé les concepts inspirés de Ioffe au cadre multivoque.

Définition 3.1.2. *Soit X et Y deux espaces de Banach, $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et $H : X \rightrightarrows Y \in \mathcal{H}(X,Y)$, et soit $\bar{x} \in X$.*

(a) On dit que H est une ***prédérivée extérieure*** *de F en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + H(x-\bar{x}) + \delta \parallel x-\bar{x} \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in U. \tag{3.4}$$

(b) On dit que H est un ***prédérivée intérieure*** *de F en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(\bar{x}) \subset F(x) - H(x-\bar{x}) + \delta \parallel x-\bar{x} \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in U. \tag{3.5}$$

(c) On dit que H est une ***prédérivée*** *de F en $\bar{x}$ si elle est à la fois une prédérivée extérieure et intérieure de F en ce point.*

(d) On dit que H est une ***prédérivée strict*** *de F en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(x) \subset F(x') + H(x-x') + \delta \parallel x-x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x, x' \in U. \tag{3.6}$$

Dans le cadre univoque (lorsque $F := f$ une fonction univoque), la définition précédente peut s'écrire comme suit :

Définition 3.1.3. *Soit $f : X \to Y$ une fonction, $H \in \mathcal{H}(X,Y)$ et $\bar{x} \in X$.*

*(a) On dit que H est une **prédérivée** de f en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$f(x) \in f(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \delta \parallel x - \bar{x} \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in U. \tag{3.7}$$

*(b) On dit que H est une **prédérivée stricte** de f en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U se $\bar{x}$ tel que*

$$f(x) \in f(x') + H(x - x') + \delta \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x, x' \in U. \tag{3.8}$$

Remarque 3.1.1. *Dire que $r(h)$ tend vers 0 lorsque $\|h\|$ tend vers 0 revient à dire que pour tout $\delta > 0$, il existe $a > 0$ tel que $\|h\| \leq a$ entraîne que $|r(h)| \leq \delta$. En posant $x = \bar{x} + h$ dans la relation (3.1), nous obtenons*

$$f(x) \in f(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \delta \|x - \bar{x}\| \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_a(\bar{x}). \tag{3.9}$$

Dans le cas où $H \in \mathcal{L}(X,Y)$, cette dernière relation correspond à la Fréchet différentiabilité au sens classique. Si au contraire f est une application multivoque, celle-ci correspond à la prédérivabilité extérieure de la Définition (3.1.2).

Définition 3.1.4. ***(Pseudo-Prédérivée).*** *Soit X et Y deux espaces de Banach. Considérons une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$, $H \in \mathcal{H}(X,Y)$ et soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr(F)$.*

*(a) On dit que H est une **pseudo-prédérivée extérieure** de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$, si pour tout $\delta > 0$, il existe des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tel que*

$$F(x) \cap V \subset F(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \delta \parallel x - \bar{x} \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in U. \tag{3.10}$$

*(b) On dit que H est une **pseudo-prédérivée intérieure** de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$, si pour tout $\delta > 0$, il existe des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tel que*

$$F(\bar{x}) \cap V \subset F(x) - H(x - \bar{x}) + \delta \parallel x - \bar{x} \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in U. \tag{3.11}$$

*(c) L'application H sera dite une **pseudo-prédérivée** de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$, si elle est à la fois une pseudo-prédérivée intérieure et extérieure de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$.*

*(d) On dit que H est une **pseudo-prédérivée stricte** de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$, si pour tout $\delta > 0$, il existe des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tel que*

$$F(x) \cap V \subset F(x') + H(x - x') + \delta \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x, x' \in U. \tag{3.12}$$

3.2 Prédérivée et continuité

Dans cette section nous étudions la relation existant entre la prédérivabilité extérieure et la semi-continuité extérieure ; entre la prédérivabilité intérieure et la semi-continuité intérieure, pour ce faire, on a les deux propositions suivantes.

Proposition 3.2.1. *La prédérivabilité extérieure d'une application multivoque en un point n'entraîne pas la semi-continuité extérieure de cette dernière en ce point.*

Exampele 3.1. *Considérons l'application* $F(x) : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *définie par*

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & si \quad x = 0, \\ [0,1] & si \quad x \neq 0, \end{cases}$$

et l'application H *définie par*

$$H(x) = \begin{cases} \{0\} & si \quad x = 0, \\ \mathbb{R}_+ & si \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Il est claire que $H \in \mathcal{H}(X,Y)$*, l'application* H *est aussi prédérivée extérieure de* F *en* 0*, puisque pour tout* $\delta > 0$ *nous avons*

$$F(x) \subset F(0) + H(x) + [-\delta|x|, \delta|x|], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'autre parte, l'application F *n'est pas semi-continue extérieure en* 0*, en effet ;*
pour que F *est o.s.c. en 0, par exemple pour* $\rho = 1$ *et* $\varepsilon = 1/2$*, on devrait être capable de trouver un voisinage* U *de 0 tel que l'inclusion (1.2) soit vérifié, ce qui n'est pas le cas,i.e. n'est existe pas un voisinage* U *de* 0 *telle que*

$$F(x) \cap [-1,1] \subset [-1/2, 1/2], \quad \forall x \in U.$$

Les résultat de les deux propositions et le corollaire suivante ont été établis sous l'hypothèse de la semi-continuité extérieure d'une prédérivée H correspondante et la condition $H(0_X) = \{0_Y\}$.

Proposition 3.2.2. *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une application multivoque et* $H \in \mathcal{H}(X,Y)$*, soit* $\bar{x} \in X$*. Supposons que* Y *est de dimension finie,* H *est une prédérivée extérieure de* F *en* $\bar{x}$ *et que* $F(\bar{x})$ *est fermé. Si* H *est o.s.c. en* 0_X *et* $H(0_X) = \{0_Y\}$*, alors* F *est semi-continue extérieurement en* $\bar{x}$*.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$ fixés, comme H est o.s.c. en 0_X, alors d'après l'assertion (c) de la proposition (1.4.28), on peut trouver $a > 0$ tel que

$$H(x) \subset H(0_X) + \frac{\varepsilon}{2}\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in a\overline{\mathbb{B}}_X.$$

D'autre part, H est une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$, il existe $b > 0$ tel que

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \frac{\varepsilon}{2}\|x - \bar{x}\|\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_b(\bar{x}).$$

Posons $\alpha = \min\{a, b, 1\}$, nous avons

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \frac{\varepsilon}{2}\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}). \tag{3.13}$$

Et

$$H(x - \bar{x}) \subset H(0_X) + \frac{\varepsilon}{2}\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}). \tag{3.14}$$

Des relations (3.13) et (3.14), nous obtenons

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + H(0_X) + \frac{\varepsilon}{2}\overline{\mathbb{B}}_Y + \frac{\varepsilon}{2}\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}).$$

Puisque la boule unité est convexe, on obtient

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}).$$

En particulier,

$$F(x) \cap \rho\overline{\mathbb{B}}_Y \subset F(\bar{x}) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}).$$

D'où, la semi-continuité extérieure de l'application F au point $\bar{x}$. ■

Proposition 3.2.3. *La prédérivabilité intérieure d'une application multivoque en un point donné n'entraîne pas sa semi-continuité intérieure en ce point.*

Exampele 3.2. *Considérons l'application $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & si \quad x = 0, \\ \{0\} & si \quad x \neq 0, \end{cases}$$

et l'application H définie par

$$H(x) = \begin{cases} \{0\} & si \quad x = 0, \\ \mathbb{R}_- & si \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Il est claire que $H \in \mathcal{H}(X,Y)$*, l'application* H *est aussi prédérivée intérieure de* F *en* 0*, en effet ; pour tout* $\delta > 0$*, nous avons*

$$F(0) \subset F(x) - H(x) + \delta[-|x|, |x|].$$

En prendre $\rho = 1$ *et* $\varepsilon = 1/2$*. Pour tous* $a > 0$ *et* $x \in [-a,a]\backslash\{0\}$*, nous avons*

$$[0,1] \cap [-1,1] \not\subseteq F(x) + [-1/2, 1/2].$$

Par conséquent, F *n'est pas i.s.c. en* 0*.*

Proposition 3.2.4. *On considère une application* $F : X \rightrightarrows Y$*,* $H \in \mathcal{H}(X,Y)$ *et* $\bar{x} \in X$*. On suppose que* Y *est de dimension finie,* $F(\bar{x})$ *est fermé et* H *est une prédérivée intérieure de* F *en* $\bar{x}$*. Si l'application* H *est o.s.c. en* 0_X *et* $H(0_X) = \{0_Y\}$*, alors* F *est semi-continue intérieurement en* $\bar{x}$*.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$ fixés. Puisque H est semi-continu extérieurement, alors on peut trouver $b \in]0,1]$ tel que

$$H(x) \subset H(0_X) + \frac{\varepsilon}{2}\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in b\overline{\mathbb{B}}_X.$$

Par suit

$$-H(x) \subset -H(0_X) + \frac{\varepsilon}{2}\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in b\overline{\mathbb{B}}_X.$$

D'autre part, H est une prédérivée intérieure de F en $\bar{x}$, alors il existe $a > 0$ tel que

$$F(\bar{x}) \subset F(x) - H(x-\bar{x}) + \frac{\varepsilon}{2}\|x-\bar{x}\|\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_a(\bar{x}). \tag{3.15}$$

On peut réduire a si nécessaire de sorte que $a \leq b$, nous avons alors

$$-H(x-\bar{x}) \subset -H(0_X) + \frac{\varepsilon}{2}\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_a(\bar{x}). \tag{3.16}$$

Par les relation (3.15) et (3.16) avec la convexité de $\overline{\mathbb{B}}_Y$, on obtient

$$F(\bar{x}) \subset F(x) + \frac{\varepsilon}{2}(1 + \|x-\bar{x}\|)\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_a(\bar{x}).$$

Comme $\|x-\bar{x}\| \leq 1$, nous avons

$$F(\bar{x}) \subset F(x) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_a(\bar{x}).$$

En particulier

$$F(\bar{x}) \cap \rho\overline{\mathbb{B}}_Y \subset F(x) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_a(\bar{x}). \tag{3.17}$$

Ainsi, d'après la Proposition (1.4.29), l'application F est i.s.c. au point $\bar{x}$. ■

Exampele 3.3. *Pour justifier que l'existence de prédérivées pour une application multivoque en un point donné n'implique pas la continuité de cette dernière en ce point, nous considérons l'application* $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] \quad si \quad x \neq 0, \\ \{0\} \quad si \quad x = 0. \end{cases}$$

Et l'application H *définie par*

$$H(x) = \begin{cases} \{0\} \quad si \quad x = 0, \\ \mathbb{R} \quad si \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Il est claire que $H \in \mathcal{H}(X, Y)$*, l'application* H *est aussi prédérivée de* F *en* 0 *puisqu'elle est à la fois une prédérivée extérieure et intérieure de* F *en ce point, mais* F *n'est pas continu, car pour* $\varepsilon \in]0, 1[$ *on devrait être capable de trouver un voisinage* U *de* 0 *tel que l'assertion (c) de la Proposition (1.4.28) est vérifié.*

Le corollaire suivant permet, grâce à des hypothèses faites sur une prédérivée, d'obtenir la continuité de l'application au point en lequel cette prédérivée a été prise.

Corollaire 3.2.5. *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une application multivoque,* $H \in \mathcal{H}(X, Y)$ *et* $\bar{x} \in X$*. On suppose que* Y *est de dimension finie,* $F(\bar{x})$ *est un sous-ensemble fermé de* Y *et* H *est une prédérivée de* F *en* $\bar{x}$*. De plus, on suppose que* H *est o.s.c. en* 0_X *et* $H(0_X) = \{0_Y\}$*. Alors l'application* F *est continue en* $\bar{x}$*.*

Démonstration. Comme F et H vérifient les hypothèses de la Proposition (3.2.2), alors F est o.s.c. en $\bar{x}$. De même, les hypothèses de la Proposition (3.2.4) sont satisfaites, cela entraîne la semi-continuité intérieure de F en $\bar{x}$.

Par conséquent, l'application F est continue au point $\bar{x}$. ■

le lemme suivant établit l'existence de prédérivés d'un application multivoque continu qu'est lipschitzienne extérieurement, lipschitzienne et pseudo-lipschitzienne à valeurs définies.

Lemme 3.2.6. *Considérons une application multivoque* $F : X \rightrightarrows Y$*, Soit* D *un sous-ensemble ouvert de* $dom(F)$*,* $\bar{x} \in D$ *et soit une constante positive* ℓ*. On note* H *l'application multivoque à valeurs fermées bornées définie sur* X *par :* $H(\cdot) = \ell \parallel \cdot \parallel \mathbb{B}_Y$*.*

(a) Si F est ***lipschitzienne extérieurement*** *en $\bar{x}$ de constante ℓ, alors l'application H est une* ***prédérivée extérieure*** *de F en $\bar{x}$.*

(b) Si F est ***ℓ-lipschitzienne*** *sur D, alors l'application H est une* ***prédérivée stricte*** *de F en tout point de D.*

(c) Si F est ***ℓ-pseudo-lipschitzienne*** *en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ alors l'application H est une* ***pseudo-prédérivée stricte*** *de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$.*

Démonstration. **(a)** On suppose que F est lipschitzienne extérieurement en $\bar{x} \in D$ de constante ℓ, et montrons que H est une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$.
L'ensemble D étant ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{B}_\alpha(\bar{x}) \subset D$ et comme F est lipschitzienne extérieurement en $\bar{x} \in D$ alors

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + \ell \parallel x - \bar{x} \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

Pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + \ell \parallel x - \bar{x} \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y + \delta \parallel x - \bar{x} \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

D'après la définition de H,

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \delta \parallel x - \bar{x} \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

D'autre parte, l'application H est positivement homogène, En effet ;
$H(0_X) = \ell \parallel 0_X \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y$; cela implique que $0_Y \in H(0_X)$.
et soit $x \in X$ et $\lambda > 0$, alors

$$H(\lambda x) = \ell \parallel \lambda x \parallel = \lambda \ell \parallel x \parallel = \lambda H(x).$$

Par conséquent, H est une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$.

(b) On suppose que F est ℓ-lipschitzienne sur D, et montrons que H est une prédérivée stricte de F en tout point de D.
Soit $\bar{x} \in D$, il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{B}_r(\bar{x}) \subset D$ et

$$F(x) \subset F(x') + \ell \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x, x' \in \mathbb{B}_r(\bar{x}).$$

Alors pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$F(x) \subset F(x') + \ell \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y + \delta \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad x, x' \in \mathbb{B}_r(\bar{x}).$$

Et donc

$$F(x) \subset F(x') + H(x - x') + \delta \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad x, x' \in \mathbb{B}_r(\bar{x}).$$

Par conséquent, l'application H est une prédérivée stricte de F en tout point $\bar{x} \in D$.

(c) Soit F est ℓ-pseudo-lipschitzienne en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$, alors il existe des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tel que

$$F(x) \cap V \subset F(x') + \ell \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x, x' \in U.$$

Alors pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$F(x) \cap V \subset F(x') + H(x - x') + \delta \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x, x' \in U.$$

D'où, l'application H est une pseudo-prédérivée stricte de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$.

■

Remarque 3.2.1. *Lorsque l'application F dans l'assertion(c) du lemme (3.2.6) était simplement calme au point $\bar{x}$, alors l'application H serait une pseudo-prédérivée extérieure de F en ce point.*

3.3 Prédérivée et convexité

Le résultat suivante permet de relier la C-convexité d'une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ à la convexité de $F + C$; avec $(F + C)(x) := F(x) + C$.

Proposition 3.3.1. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et $C \subset Y$ un cône convexe non vide. L'application F est C-convexe si et seulement si $F + C$ est convexe.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ / Supposons que F est C-convexe et montrons que $F+C$ est convexe.

c'est à dire, montrons que pour tout $x, x' \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$;

$$(1 - \lambda)(F + C)(x) + \lambda(F + C)(x') \subset (F + C)((1 - \lambda)x + \lambda x').$$

F est C-convexe, alors pour tous $x, x' \in X$, $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(x') \subset F((1 - \lambda)x + \lambda x') + C. \tag{3.18}$$

Pour $x, x' \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}(1 - \lambda)(F + C)(x) + \lambda(F + C)(x') &= (1 - \lambda)(F(x) + C) + \lambda(F(x') + C) \\ &= (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(x') + (1 - \lambda)C + \lambda C.\end{aligned}$$

Comme C un ensemble convexe et $(1 - \lambda)C + \lambda C = C$, alors

$$(1 - \lambda)(F + C)(x) + \lambda(F + C)(x') = (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(x') + C.$$

À partir de (3.18), on a

$$(1-\lambda)(F+C)(x)+\lambda(F+C)(x') \subset F((1-\lambda)x+\lambda x')+C+C \subset F((1-\lambda)x+\lambda x')+C.$$

C'est-à-dire, pour tous $x, x' \in X$ et $\lambda \in [0,1]$;

$$(1-\lambda)(F+C)(x)+\lambda(F+C)(x') \subset (F+C)((1-\lambda)x+\lambda x').$$

D'où l'application $F+C$ est convexe.

$\Longleftarrow$/ Inversement,

Supposons que $F+C$ est convexe et montrons que F est C-convexe, c'est-à-dire montrons que pour tous $x, x' \in X$ et $\lambda \in [0,1]$, on a

$$(1-\lambda)F(x)+\lambda F(x') \subset F((1-\lambda)x+\lambda x')+C.$$

$F+C$ est convexe, alors pour tous $x, x' \in X$, $\lambda \in [0,1]$, on a

$$(1-\lambda)(F+C)(x)+\lambda(F+C)(x') \subset (F+C)((1-\lambda)x+\lambda x').$$

Alors

$$(1-\lambda)F(x)+\lambda F(x')+(1-\lambda)C+\lambda C \subset F((1-\lambda)x+\lambda x')+C.$$

Nous obtenons

$$(1-\lambda)F(x)+\lambda F(x')+C \subset F((1-\lambda)x+\lambda x')+C.$$

Si $(1-\lambda)F(x)+\lambda F(x')+C=\emptyset$ c'est clair. Sinon, pour tout $y \in (1-\lambda)F(x)+\lambda F(x')$ et comme $0_Y \in C$, alors $y \in F((1-\lambda)x+\lambda x')+C$.

Par conséquent

$$(1-\lambda)F(x)+\lambda F(x') \subset F((1-\lambda)x+\lambda x')+C.$$

Ce qui complet la preuve. ■

Proposition 3.3.2. *On considère un processus convexe $F : X \rightrightarrows Y$, D un sous-ensemble ouvert de dom(F) tel que $D-D \subset$ dom(F) et soit $\bar{x} \in D$. Alors l'application F admet une prédérivée stricte H en $\bar{x}$ qui est un processus convexe donné par $H(\cdot)=-F(-\cdot)$.*

Démonstration. Tout d'abord, nous montrons que l'application F admet une prédérivée stricte en $\bar{x}$.

l'ensemble D étant ouvert, alors il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{B}_r(\bar{x}) \subset D$. Puisque F est un processus convexe, alors

$$F(v) + F(u - v) \subset F(u), \quad \forall u, v \in D.$$

Cette inclusion est vraie pour tous $u, v \in \mathbb{B}_r(\bar{x})$. En particulier pour tout $z \in F(v)$ et $y \in F(u - v)$, nous avons $z \in F(u) - y$. Par conséquent,

$$F(v) \subset F(u) - F(-(v - u)).$$

Alors

$$F(v) \subset F(u) + H(v - u).$$

Pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$F(v) \subset F(u) + H(v - u) + \delta \parallel v - u \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall u, v \in \mathbb{B}_r(\bar{x}).$$

Montrons maintenant que H est une application positivement homogène,

Puisque F est un processus convexe alors $0_Y \in -F(0_X) = H(0_X) \Rightarrow 0_Y \in H(0_X)$.

D'autre parte, pour tout $x \in X$ et $\lambda > 0$, on a

$$H(\lambda x) = -F(-\lambda x) = -\lambda F(-x) = \lambda(-F(-x)) = \lambda H(x).$$

D'où H est une application positivement homogène, Par conséquent H est une prédérivée stricte de F en $\bar{x}$.

Finalement, montrons que H est un processus convexe,i.e,

$$H(x) + H(x') \subset H(x + x'), \quad \forall x, x' \in X.$$

Soient $x, x' \in X$,

$$H(x) + H(x') = -F(-x) - F(-x') = -(F(-x) + F(-x')) \subset -F(-(x + x')) = H(x + x').$$

D'où le résultat. ■

Théorème 3.3.3. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque convexe fermé, et soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr(F)$ tel que $\bar{x} \in int(dom(F))$. Alors F admet une pseudo-prédérivée stricte H à valeur fermée bornée en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ donnée par $H(\cdot) = \ell \parallel \cdot \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y$ pour certains constante positive ℓ.*

Démonstration. Puisque F est une application convexe fermée, il en est de même pour son inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$.

De plus, $\bar{x} \in int(dom(F)) = int(Im(F^{-1}))$.

D'où, à partir du théorème de Robinson-Ursescu (1.4.37) l'application F^{-1} est métriquement régulière en $\bar{y}$ pour $\bar{x}$, et d'après le théorème (1.4.38) ; F est pseudo-lipschitzienne en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$.

Par conséquent, il existe $\ell > 0$ et des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tel que

$$F(x) \cap V \subset F(x') + \ell \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x, x' \in U.$$

Ainsi, à partir du lemme (3.2.6) nous obtenons que l'application positivement homogène à valeur fermées et bornée $H(\cdot) = \ell \parallel \cdot \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y$ est une pseudo-prédérivée stricte de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$. ■

Théorème 3.3.4. *Soit Y un espace de Banach de dimension finie. On considère un cône convexe fermé non vide $K \subset Y$ et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque K-convexe. Soit $\bar{x} \in int(dom(F))$. On suppose qu'il existe une constante strictement positive α telle que*

(1) $F(x)$ soit k-fermé, $\forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x})$;

(2) il existe une constante $\eta > 0$ telle que $F(x) \subset \eta \overline{\mathbb{B}}_Y, \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x})$.

Alors, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ sur lequel l'application $F + K$ est lipschitzienne. En particulier, elle admet une prédérivée stricte $H : X \rightrightarrows Y$ à valeurs fermées bornée en tout point de U. De plus, l'application F admet en tout point de U une prédérivée stricte à valeurs fermées donnée par $H + K$.

Démonstration. Soit $\alpha > 0$ satisfait les hypothèse (1) et (2). Posons $\overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}) \subset domF$.

On prendre $u, v \in \overline{\mathbb{B}}_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$ telle que $u \neq v$, $\lambda \in]0, \frac{\alpha}{4}[$ et posons

$$w := u - \lambda \frac{(v - u)}{\parallel v - u \parallel},$$

alors

$$u = \lambda \frac{(v - u)}{\parallel v - u \parallel} + w,$$

i.e.

$$u(1 + \frac{\lambda}{\parallel v - u \parallel}) = \lambda \frac{v}{\parallel v - u \parallel} + w,$$

ceci implique que

$$u = (\frac{\lambda}{\parallel v - u \parallel + \lambda})v + (\frac{\parallel v - u \parallel}{\parallel v - u \parallel + \lambda})w.$$

En posant $t := \frac{\|v-u\|}{\|v-u\|+\lambda}$, nous obtenons $t \in]0,1[$ et $1-t = \frac{\lambda}{\|v-u\|+\lambda}$,

par conséquent

$$u = (1-t)v + tw.$$

L'application F est K-convexe, alors d'après la proposition (3.3.1) l'application $F+K$ est convexe, alors nous avons

$$(1-t)(F+K)(v) + t(F+K)(w) \subset (F+K)(1-t)v + tw),$$

i.e.

$$(1-t)(F+K)(v) + t(F+K)(w) \subset (F+K)(u). \tag{3.19}$$

D'autre part la convexité de $F+K$ implique que (F+K)(x) est un sous ensemble convexe de Y, pour tout $x \in X$. Nous avons

$$(1-t)(F+K)(v) + t(F+K)(v) = (F+K)(v).$$

En ajoutant $t(F+K)(v)$ dans l'inclusion (3.19), on obtenons

$$t(F+K)(v) + (1-t)(F+K)(v) + t(F+K)(w) \subset (F+K)(u) + t(F+K)(v).$$

Alors

$$(F+K)(v) + t(F+K)(w) \subset (F+K)(u) + t(F+K)(v).$$

Il s'en suit

$$F(v) + tF(w) + K + tK \subset F(u) + tF(v) + K + tK. \tag{3.20}$$

Comme l'ensemble K est un cône convexe, alors $K + tK = K + K = K$. D'où, l'inclusion (3.20) devient,

$$F(v) + tF(w) + K \subset F(u) + tF(v) + K. \tag{3.21}$$

D'après la seconde hypothèse, pour tout $x, x' \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x})$, $y \in F(x)$ et $y' \in F(x')$, nous avons

$$\| y - y' \| \leq \| y \| + \| y' \| \leq 2\eta \Longrightarrow y - y' \in 2\eta\overline{\mathbb{B}}_Y \Longrightarrow y \in \{y'\} + 2\eta\overline{\mathbb{B}}_Y.$$

En déduit que,

$$F(x) \subset F(x') + 2\eta\overline{\mathbb{B}}_Y. \tag{3.22}$$

Maintenant, montrons que $w \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x})$;

Sachant que $u = (1-t)v + tw$, nous avons

$$\begin{aligned}
\| w - \bar{x} \| &\leq \| w - v \| + \| v - \bar{x} \| \\
&\leq \| \frac{u - v + tv}{t} - v \| + \| v - \bar{x} \| \\
&\leq \frac{\| v - u \|}{t} + \frac{\alpha}{4} \\
&\leq \| v - u \| + \lambda + \frac{\alpha}{4} \\
&\leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} = \alpha.
\end{aligned}$$

Donc, $w \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x})$, et comme $v \in \overline{\mathbb{B}}_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x}) \subset \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x})$, l'inclusion (3.22) donne

$$F(v) \subset F(w) + 2\eta\overline{\mathbb{B}}_Y.$$

Par conséquent, l'inclusion (3.21) implique

$$F(v) + K + tF(w) \subset F(u) + K + 2\eta t\overline{\mathbb{B}}_Y + tF(w).$$

Y est un espace de Banach de dimension fini alors $2\eta t\overline{\mathbb{B}}_Y$ en est une partie compacte, D'autre parte $F(u) + K$ est fermé(par l'hypothèse (1)), et donc l'ensemble $F(u) + K + 2\eta t\overline{\mathbb{B}}_Y$ est fermé dans Y. elle est aussi convexe (comme une somme des convexes $F(u) + K$ et $2\eta t\overline{\mathbb{B}}_Y$).

On peut donc appliquer la loi de Radström (Lemme1.1.24), nous avons

$$F(v) + K \subset F(u) + K + 2\eta t\overline{\mathbb{B}}_Y.$$

Ceci nous donne

$$F(v) + K \subset F(u) + K + \frac{2\eta \| v - u \|}{\| v - u \| + \lambda}\overline{\mathbb{B}}_Y.$$

En particulier, pour tous $u, v \in \overline{\mathbb{B}}_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$, nous avons

$$(F + K)(v) \subset (F + K)(u) + \frac{2\eta}{\lambda} \| v - u \| \overline{\mathbb{B}}_Y. \tag{3.23}$$

Par conséquent, l'application $F + K$ est lipschitzienne sur $\mathbb{B}_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$. Ainsi par le lemme (3.2.6) elle admet une prédérivée stricte H en tout point de l'intérieur de $\overline{\mathbb{B}}_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$ donnée par

$$H(\cdot) = \frac{2\eta}{\lambda} \| \cdot \| \overline{\mathbb{B}}_Y.$$

Pour compléter la preuve, on doit montrer que l'application F admet $F + K$ pour prédérivée stricte en tout point de l'intérieure de $\overline{\mathbb{B}}_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$.

D'abord, K est un cône, alors $\lambda K = K$, pour tout $\lambda > 0$, cela implique que

$$(H + K)(\lambda x) = H(\lambda x) + K = \lambda H(x) + K = \lambda(H + K)(x), \quad \forall\, x \in X, \lambda > 0.$$

Et

$$(H+K)(0_X) = H(0_X) + K \Longrightarrow 0_Y \in H(0_X) + k.$$

Donc, l'application $H+K$ est positivement homogène.

Comme $0_Y \in K$, l'inclusion (3.23) donne

$$F(v) \subset (F+K)(v) \subset F(u) + \frac{2\eta}{\lambda} \parallel v-u \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y + K.$$

D'où

$$F(v) \subset F(u) + (H+K)(v-u).$$

Soit x' un vecteur arbitraire de l'intérieur de $\overline{\mathbb{B}}_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$. Il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{B}_r(x') \subset \overline{\mathbb{B}}_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$. Pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$F(v) \subset F(u) + (H+K)(v-u) + \delta \parallel v-u \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{B}_r(x').$$

Par conséquent, l'application $H+K$ est une prédérivée stricte de F en tout point x' appartement à l'intérieure de $\overline{\mathbb{B}}_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$. Sachant que Y est de dimension finie l'application H est à valeurs compactes et comme K est fermé, l'application $H+K$ est à valeurs fermées et la preuve donc est terminée. ■

Posant $K = 0$ dans le théorème (3.3.4), on obtient le résultat suivante concernant l'existence de prédérivée stricte pour une application multivoque dont le graphe est convexe sans être nécessairement fermé. Sa preuve est pratiquement la même que celle du théorème (3.3.4).

Corollaire 3.3.5. *Soit Y un espace de Banach de dimension fini et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque convexe. Soit $\bar{x} \in int(dom(F))$ et on suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

(1) $F(x)$ est fermé pour tout $x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x})$.

(2) il existe une constante $\eta > 0$ telle que $F(x) \subset \eta\overline{\mathbb{B}}_Y$, pour tout $x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x})$.

Alors, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que l'application F est lipschitzienne, En particulier, elle admet une prédérivée stricte $H : X \rightrightarrows Y$ à valeurs fermées et bornées en tout point de U.

Il s'avère que, sous une hypothèse supplémentaire sur une certaine troncation de l'application F, le théorème (3.3.3) est une conséquence du théorème (3.3.4) Lorsqu'on travaille dans un espace de dimension finie Y. Le corollaire suivante est plus précise.

Corollaire 3.3.6. *Soit Y un espace de Banach de dimension finie, On considère une application multivoque convexe fermée $F : X \rightrightarrows Y$. Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr(F)$ tel qu'il existe une* *constante $\delta > 0$ et un voisinage U de $\bar{x}$ tel que $F(x) \cap \overline{\mathbb{B}}_\gamma(\bar{y}) \neq \emptyset$ pour tout $x \in U$. Alors, l'application F admet une pseudo-prédérivée stricte à valeurs fermées bornées en $\bar{x}$ pour$\bar{y}$.*

Démonstration. Soit $\gamma > 0$ et U un voisinage de $\bar{x}$ tel que $F(x) \cap \overline{\mathbb{B}}_\gamma(\bar{y}) \neq \emptyset, \forall\, x \in U$.

Considérons l'application multivoque $F_\gamma : X \rightrightarrows Y$ définie par

$$F_\gamma(x) = F(x) \cap \overline{\mathbb{B}}_\gamma(\bar{y}).$$

Comme $\bar{y} \in F(\bar{x}) \cap \overline{\mathbb{B}}_\gamma(\bar{y})$, alors $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr(F_\gamma)$. Sachant que U est une voisinage de $\bar{x}$ contenu dans $dom(F_\gamma)$, nous avons $\bar{x} \in int(dom(F_\gamma))$.

L'application F_γ est convexe, en effet ;

Soient $(x, y), (u, v) \in Gr(F_\gamma) \subset Gr(F)$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors

$$\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(u, v) \in Gr(F).$$

De la convexité de F on a

$$\lambda F(x) + (1 - \lambda)F(u) \subset F(\lambda x + (1 - \lambda)u).$$

Pour $y \in F(x)$ et $v \in F(u)$, alors

$$\lambda y + (1 - \lambda)v \in F(\lambda x + (1 - \lambda)u). \tag{3.24}$$

La boule $\overline{\mathbb{B}}_\gamma(\bar{y})$ est convexe aussi, alors pour tout $y, v \in \overline{\mathbb{B}}_\gamma(\bar{y})$;

$$\lambda y + (1 - \lambda)v \in \overline{\mathbb{B}}_\gamma(\bar{y}). \tag{3.25}$$

De (3.24) et (3.25), nous concluons que

$$\lambda y + (1 - \lambda)v \in F(\lambda x + (1 - \lambda)u) \cap \overline{\mathbb{B}}_\gamma(\bar{y}) = F_\gamma(\lambda x + (1 - \lambda)u).$$

D'où

$$\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(u, v) \in Gr(F_\gamma).$$

De plus, l'ensemble $F_\gamma(x) = F(x) \cap \overline{\mathbb{B}}_\gamma(\bar{x})$ est fermé pour tout $x \in X$(car l'application F est fermée).

Donc l'hypothèse (1) du théorème (3.3.4) est satisfaire pour $K \equiv \{0_Y\}$.

D'autre parte, à partir de définition de l'application F_γ, en prenant $\eta := \gamma + \parallel \bar{y} \parallel$, nous avons $F_\gamma(x) \subset \eta \overline{\mathbb{B}}_Y$, pour $x \in X$. Alors, la seconde hypothèse du théorème (3.3.4) est aussi satisfaite.

Par conséquent, l'application F_γ admet une prédérivée stricte $H : X \rightrightarrows Y$ à valeurs fermée bornée, c'est-à-dire, il existe une application $H : X \rightrightarrows Y$ positivement homogène à valeurs fermée bornée tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$F_\gamma(x) \subset F_\gamma(x') + H(x - x') + \delta \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x, x' \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}).$$

D'où

$$F(x) \cap \overline{\mathbb{B}}_\gamma(\bar{y}) \subset F(x') + H(x - x') + \delta \parallel x - x' \parallel \overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x, x' \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}).$$

Par conséquent, l'application F admet une pseudo-prédérivée stricte en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$. ■

On peut affaiblir l'hypothèse (1) du théorème (3.3.4) et obtenir tout de même l'existence d'un prédérivée en un point $\bar{x}$ pour l'application $F + K$. Bien sûre, la notion de prédérivée nous obtenons est plus faible que celui du théorème (3.3.4) comme il est montré dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.7. *Soit Y un espace de Banach de dimension finie, On considérons un cône convexe fermé non vide $K \subset Y$ et $F : X \rightrightarrows Y$ une application K-convexe. Soit $\bar{x} \in int(dom(F))$ et supposons que les assertions suivantes sont valables :*

(1) $F(\bar{x})$ est K-fermé.

(2) il existe des constantes positives α et η telle que $F(x) \subset \eta\overline{\mathbb{B}}_Y$, pour tout $x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x})$. Alors, l'application $F + K$ est lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$. En particulier, il existe une application positivement homogène à valeurs bornée fermée $H : X \rightrightarrows Y$ tell que H est un prédérivée extérieure de l'application $F + K$ en $\bar{x}$. De plus, l'application F admet une prédérivée extérieure à valeurs fermées en $\bar{x}$ donnée par $H + K$.

Démonstration. Soit $\alpha > 0$ et $\eta > 0$ tel que $F(x) \subset \eta\overline{\mathbb{B}}_Y, \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x})$, posons $\overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}) \subset dom(F)$.

Considérons un point $x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$, une constante $\lambda \in]0, \alpha]$ et posons

$$u := \bar{x} - \lambda \frac{(x - \bar{x})}{\parallel x - \bar{x} \parallel}.$$

Alors

$$\bar{x} = u + \lambda \frac{(x - \bar{x})}{\parallel x - \bar{x} \parallel},$$

Par suit

$$\bar{x} + \lambda \frac{\bar{x}}{\parallel x - \bar{x} \parallel} = u + \frac{x}{\parallel x - \bar{x} \parallel}\lambda,$$

Ceci donne

$$\bar{x} = \left(\frac{\parallel x - \bar{x} \parallel}{\parallel x - \bar{x} \parallel + \lambda}\right)u + \left(\frac{\lambda}{\parallel x - \bar{x} \parallel + \lambda}\right)x.$$

En posant $t := \frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x-\bar{x}\|+\lambda}$, on obtient $t \in]0,1[$, et $1-t = \frac{\lambda}{\|x-\bar{x}\|+\lambda}$, et donc

$$\bar{x} = tu + (1-t)x.$$

D'autre part,

$$\|u-\bar{x}\| = \|\bar{x} - \lambda\frac{(x-\bar{x})}{\|x-\bar{x}\|} - \bar{x}\| = \lambda \leq \alpha.$$

Alors $u \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x})$.

Sachant que l'application F est K-convexe, par la proposition (3.3.1) on aura la convexité de l'application $F+K$, alors nous avons

$$(1-t)(F+K)(x) + t(F+K)(u) \subset (F+K)((1-t)x+tu) = (F+K)(\bar{x}).$$

En ajoutant $t(F+K)(x)$ aux deux membres de cette inclusion, nous avons

$$t(F+k)(x) + (1-t)(F+K)(x) + t(F+K)(u) \subset (F+K)(\bar{x}) + t(F+K)(x),$$

i.e,

$$t(F(x)+K) + (1-t)(F(x)+K) + t(F(u)+K) \subset F(\bar{x}) + K + t(F(x)+K).$$

D'où

$$F(x) + tF(u) + K + tK \subset F(\bar{x}) + tF(x) + K + tK.$$

Comme K est un cône convexe, alors $K + tK = K + K = 2K = K$. Donc

$$F(x) + tF(u) + K \subset F(\bar{x}) + tF(x) + K. \tag{3.26}$$

De l'hypothèse (2), on a pour tout $x, u \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x})$, $y \in F(x)$ et $y' \in F(u)$, nous avons

$$\| y - y' \| \leq \| y \| + \| y' \| \leq 2\eta \Longrightarrow y - y' \in 2\eta\overline{\mathbb{B}}_Y \Longrightarrow y \in \{y'\} + 2\eta\overline{\mathbb{B}}_Y.$$

En déduit que

$$F(x) \subset F(u) + 2\eta\overline{\mathbb{B}}_Y.$$

Par conséquent,l'inclusion (3.26) implique

$$F(x) + tF(u) + K \subset F(\bar{x}) + 2\eta t\overline{\mathbb{B}}_Y + tF(u) + K.$$

Sachant que l'application $F(\bar{x})+K$ est fermé (l'hypothèse(1)) et convexe, $2\eta t\overline{\mathbb{B}}_Y$ est compacte et convexe aussi, alors l'ensemble $F(\bar{x}) + K + 2\eta t\overline{\mathbb{B}}_Y$ est fermé et convexe. De plus $tF(u)$ est borné. En appliquant la loi de Radstrôme nous obtenons

$$F(x) + K \subset F(\bar{x}) + K + 2\eta t\overline{\mathbb{B}}_Y,$$

i.e.
$$(F+K)(x) \subset (F+K)(\bar{x}) + 2\eta \frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x-\bar{x}\|+\lambda}\overline{\mathbb{B}}_Y.$$
Il s'en suit que
$$(F+K)(x) \subset (F+K)(\bar{x}) + \frac{2\eta}{\lambda}\|x-\bar{x}\|\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}).$$
Et donc, l'application $F+K$ est lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$, d'après le lemme (3.2.6) elle admet une prédérivée extérieure $H : X \rightrightarrows Y$ à valeurs fermées bornées au point $\bar{x}$, donnée par
$$H(\cdot) = \frac{2\eta}{\lambda}\|\cdot\|\overline{\mathbb{B}}_Y.$$
Ainsi, pour tout $\delta > 0$ nous avons
$$F(x) + K \subset F(\bar{x}) + H(x-\bar{x}) + K + \delta\|x-\bar{x}\|\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}).$$
Comme $0_Y \in K$, alors
$$F(x) \subset F(\bar{x}) + (H+K)(x-\bar{x}) + \delta\|x-\bar{x}\|\overline{\mathbb{B}}_Y, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}}_\alpha(\bar{x}).$$
Par conséquent, l'application $H+K$ est une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$. ■

CONCLUSION

Le travail principal de ce mémoire porte sur l'étude des prédérivées d'applications multivoques. Tout d'abord, nous avons introduit le concept de différentiabilité des applications multivoques avec quelque résultats, nous nous sommes limités à deux notions seulement en raison du grand nombre de définitions. Puis, nous établissons des résultats d'existence de différents types de prédérivées pour des applications multivoques possédant certaines propriétés de convexité.

Ces résultats sont applicables dans le cadre de la théorie de l'optimisation multivoque, ils permettent d'établir des conditions nécessaires et des conditions suffisantes d'optimalité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. Aubin and H. Frankowska. Set-valued analysis, volume 2 of Systems Control : Foundations Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990

[2] D. Azé. An inversion theorem for set-valued maps. Bull. Austral. Math. Soc., 37(3) :411-414, 1988.

[3] D. Azzam-Laouir, Polycopié, cours d'analyse multivoque, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[4] T. F. Bridgland, Trajectory integrals of set valued functions, Pacific J. Math., 33 (1970), 43-67.

[5] F. S. De Blasi. On the differentiability of multifunctions. Pacific J. Math., 66(1) :67-81, 1976.

[6] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, New Yourk, 1992.

[7] Z.Denkowski, S.Migorski, and N.S. Papageorgiou. An Introduction to Nonlinear Analysis : Theory, Springer Science+Business Media New York, 2003.

[8] A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar. Implicit functions and solution mappings. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Dordrecht, 2009. A view from variational analysis.

[9] M. Gaydu, M. H. Geoffroy, and Y. Marcelin. Prederivatives of convex setvalued maps and applications to set optimization problems. J. Global Optim.,64(1) :141-158, 2016.

[10] N. H. Hassan .Topologie générale et espaces normés. Dunod, 2011.

[11] A. D. Ioffe. Nonsmooth analysis : differential calculus of nondifferentiable mappings. Trans. Amer. Math. Soc., 266(1) :1-56, 1981.

[12] Y. Marcelin. prédérivées et optimisation multivoque.Thèse de doctorat. ANTILLES. 2016.

[13] K. Nachi and J. P. Penot. Inversion of multifunctions and differential inclusions. Control Cybernet., 34(3) :871-901, 2005.

[14] C. H. J. Pang. Generalized differentiation with positively homogeneous maps : applications in set-valued analysis and metric regularity. Math. Oper. Res., 36(3) :377-397, 2011.

[15] H. Rådström. An embedding theorem for spaces of convex sets. Proc. Amer. Math. Soc., 3 :165-169, 1952.

.

[16] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. Variational analysis, volume 317 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[17] Y. Sawaragi, H. Nakayama, and T. Tanino. Theory of multiobjective optimization, volume 176 of Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1985.