الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة محمد الصديق بن يحيى- جيجل

كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلي

قسم الرياضيات

مذكرة مقدمة لنيل شهادة ماستر في الرياضيات

تخصص: رياضيات أساسية و متقطعة

الدوال المولدة لبعض الأعداد الشهيرة و كثيرات الحدود 2- متعامدة

إعـــــداد :

أمـــال غـادري

لجـــــنة المنـــــــاقشة :

أ. نور السادات توافق	جامعة جيجل	رئيسا
أ. عـلي بوسعيود	جامعة جيجل	مقررا
أ. منيرة قميحة	جامعة جيجل	ممتحنا

دفـعة 2021

شـــكر و عرفـان

الحمد لله الذي علم بالقلم، علم الإنسان ما لم يعلم، الحمد لله المنان، الملك القدوس السلام، مدبر الليالي و الأيام، مصرف الشهور و الأعوام، قدر الأمور فأجراها على أحسن نظام، ما شاء الله كان وما لم يشأ لم يكن الحمد لله على ما أنعم به علي من فضله، الخير الكثيرو العلم الوفير و أعانني على إنجاز هذا لعمل.

وبعد حمد الله تعالى وشكره على إنهائي لهذه المذكرة أتقدم بخـالص الشكر وعظيم الامتنان للأستاذ الفاضل **"علي بوسعيود"**على ما قدمه لي من علم نافع وعطاء متميز وإرشاد مستمر، وعلى ما بذلوا من جهد متواصل ونصح و توجيه من بداية مرحلة البحث حتى إتمام هذه المذكرة، و مهما كتبت من عبارات وجمل فإن كلمات الشكـر تظل عاجزة عن إيـفاء حقه، فجزاه الله عني خــــير الجزاء .

كما أتوجه بجزيل الشكر إلى السادة الأساتذة أعضاء لجنة المناقشة كل من الأستاذ**"نور السادات توافق"**، الأستاذة **"منيرة قميحة"** على اقتطاعهما جزءا من وقتهم الثمين من أجل الإطلاع على هذه المــــــذكرة، وعلى ما سيقدمونه من نصـــــــائح و توصيـــــــات .

كما أتقدم بأسمى عبارات الشـكر و التقديـر إلى والدي العزيزين اللذين غرسا في
حب العلم من الصغر،وقدما لي كل غالي ونفيس، وكان لهما الفضل بعد الله
فيما وصلت إليه الآن ، أســأل الله أن يرزقــهم من جنـــانه.

و الشكر الموصـول إلى كل من سـاعدني على إنـجاز
و إتمام هذا العمل المتواضع و نخص بالذكر
أساتذتي الذين تتلمذت على أيديهم
في كل مراحل دراستي
و شكرا.

الفهـــــــرس

مقدمة

منذ عدة سنوات تمت دراسة العديد من العلاقات التراجعية الخطية على سبيل المثال أعداد فيبوناشي ولوكاس وبال لوكاس،...إلخ بهدف البحث عن حلولها والدوال المولدة المرفقة بها وعلاقتها الصريحة، لأنها تستعمل على نطاق واسع في العديد من الأبحاث في عدة مجالات معرفية كعلم الإقتصاد وعلم الحاسوب، ...، لكن في السنوات الأخيرة لجأ الكثير من الباحثين لتعميم العديد من العلاقات التراجعية والكل مطلع على تعميم فيبوناشي وتعيميم كثيرات الحدود لفيبوناشي لهورادم (Horadam).

في بداية القرن الماضي تطرق الباحث اغرونوموف (Argomonov) إلى الأعداد من الرتبة الثالثة وهي عبارة عن توسيع لأعداد فيبوناتشي ذات الرتبة الثانية، ثم في سنة 1963 م تمت صياغة اسم ثريبوناتشي من قبل العالم فاينبرغ (Feinberg)، حيث قدم هذا الباحث مفهوم أعداد ثريبوناتشي بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} & , \quad \forall\, n \geq 3 \\ T_0 = 1,\ T_1 = 1,\ T_2 = 2 \end{cases}.$$

حيث قام العديد من الباحثين بتعميم أعداد ثريبوناتشي التي تأخذ الشكل :

$$\begin{cases} w_n = a w_{n-1} + b w_{n-2} + c w_{n-3} & , \quad \forall\, n \geq 3 \\ w_0 = \alpha,\ w_1 = \beta,\ w = \gamma \end{cases}.$$

M. Chelgham, A. Boussayoud , Construction of Symmetric functions of generalized Tribonacci numbers, *J. Sci. Arts.*50, 65-74, 2020**.**

باستعمال هذا التعميم يمكننا الحصول على العديد من العلاقات و الدوال المولدة باستعمال تقنية التوابع التناظرية .

تشكل كثيرات الحدود المتعامدة نقطة التقاء متميزة لمختلف تخصصات الرياضيات البحتة والتطبيقية بالإضافة إلى مجالات أخرى من العلوم التطبيقية.
تحمل العائلة الأولى من هذه متعددات الحدود اسم كثير الحدود لليجندر" Legendre polynomials" ، وقد اكتشف ليجندر هذه كثيرات الحدود في عام 1784 حيث أسس العديد من الخصائص المشتركة لهذه العائلات. بعد ذلك ، تم إدخال عائلات أخرى من كثيرات الحدود المتعامدة ، ولا سيما تلك الخاصة بـهيرميت (Hermite) والتي تستخدم في نظرية التقريب. في منتصف القرن التاسع عشر ، قدم جاكوبي (Jacobi)عائلة جديدة عممت كلاً من كثيرات الحدود لتشيبتشاف (Chebychev) و ليجندر(Legendre) . في نهاية القرن التاسع عشر ، تم تطوير ميدان كثيرات الحدود المتعامدة من قبل بافنوتي تشيبيتشيف ،كثيرات الحدود جاكوبي ،تشيبتشاف ،ليجندر هيرميت تُعرف بـ" كثيرات الحدود المتعامدة الكلاسيكية"
وقد حظيت كثيرات الحدود 2-تشيبيتشاف المتعامدة باهتمام كبير من طرف العديد من الباحثين حيث تم تعريفها بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} \hat{T}_n(x) = x\hat{T}_{n-1}(x) - \alpha\hat{T}_{n-2}(x) - \gamma\hat{T}_{n-3}(\mathrm{x}) & , \quad \forall\, n \geq 0, \gamma \neq 0 \\ \hat{T}_0(x) = 1,\ \hat{T}_1(x) = x,\ \hat{T}_2(x) = x^2 - \alpha \end{cases}.$$

وفي الآونة الأخيرة تم إيجاد جداء الدوال المولدة لجداء كثيرات الحدود 2-تشيبيتشاف المتعامدة مع بعضها البعض من طرف هـ. مرزوق، ع.بوسعيود، ع. عبد الرزاق في مقالهم:

H. Merzouk, A. Boussayoud, A. Abderrezzak, Ordinary Generating Functions of Binary Products of third-order Recurrence Relations and 2 – Orthogonal Polynomials, *Math. Slovaca*. 72(1), **(2022)** (In Press).

باستعمال تقنية التوابع التناظرية وتم الإجابة على العديد من الأسئلة المفتوحة التي طرحها الباحث خ. دواق في بعض مقالاته.

سنتطرق في هذه الدراسة إلى موضوع بعنوان " الدوال المولدة لبعض الأعداد الشهيرة وكثيرات الحدود 2-متعامدة " حيث نهتم بدراسة تأثير المؤثر التناظري $\delta_{p_1p_2}^{2-k}$ على السلسلة الشكلية القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)p_1^n z^n$ بهدف الحصول على دوال مولدة جديدة وأخرى تم الحصول عليها من قبل بعض الباحثين بطرق مختلفة، وهذا باستعمال تقنية التوابع التناظرية حيث سمحت لنا بحساب الدوال المولدة لجداء هذه الأعداد مع بعضها البعض ومع كثيرات الحدود، ومن المعلوم بأن حساب الدوال المولدة لجداء أمر صعب جدا، لكن تقنية التوابع التناظرية تسهل لنا بعض الأمور، كما قال العالم الفرنسي لا سكوا (Lascoux) في أحد المؤتمرات الدولية سنة 2008 أن تقنية التوابع التناظرية تحل لنا عدة مشاكل في الرياضيات المجردة والتطبيقية.

تمت تقسيم هذا البحث إلى ثلاثة فصول، تطرقنا في الفصل الأول إلى بعض المفاهيم العامة حول السلاسل الشكلية، و العلاقات التراجعية للأعداد من الرتبة الثانية و الثالثة، أما بالنسبة للأعداد من الرتبة الثانية فتناولنا كل من أعداد k-فيبوناشي، k-مارسان ، k-مارسان لوكاس، k-لوكاس، k-بال وبالنسبة للأعداد من الرتبة الثالثة فتناولنا كل من أعداد نارايانا و جاكوبيستال، جاكوبيستال لوكاس و كذا العلاقات التراجعية لكثيرات الحدود المتعامدة من الرتبة الثانية و الثالثة، إضافة إلى الرتبة الثانية والتي قمنا فيها بدراسة كثيرات الحدود المتعامدة لتشيبتشاف من الأنواع الأربعة وفي الرتبة الثالثة فتطرقنا إلى كثير الحدود 2-لتشيبيشتاف المتعامدة .

أما في الفصل الثاني فقد تم التركيز على بعض المفاهيم الأساسية حول التوابع التناظرية و بعض خصائصها و تطبيقاها، حيث توصلنا إلى استنتاج الدوال المولدة للأعداد الشهيرة و كثيرات الحدود المتعامدة من الرتبة الثانية و الثالثة المذكورة سابقا مع حساب التابع التناظري المرتبط بكل منا، و ذلك بإجراء تطبيقات على نظريتين تم اقتراحهما في هذا الفصل .

والفصل الثالث و الأخير فقمنا فقد إعتمدنا على النظرية المنشورة في المقال:

N. Saba, A .Boussayoud, S.Araci, M .Kerada, M.Acikgoz, Construction of a new class of symmetric function of binary products of (p, q)-numbers with 2-orthogonal Chebyshev polynomials, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 27(1), 1-26 **(2021).**

والتي تسمح لنا بالحصول على الدوال المولدة لجداء الأعداد من الرتبة الثانية السالف ذكرها مع كثيرات الحدود المتعامدة لتشيبتشاف من الأنواع الأربعة، كما قمنا بحساب الدوال المولدة لجداء كل من أعداد نارايانا و جاكوبيستال، جاكوبيستال لوكاس ذات الرتبة الثالثة مع الاعداد و كثيرات الحدود المتعامدة من الرتبة الثانية السابق ذكرها، وأخيرا قمنا بحساب الدوال المولدة لكثير الحدود 2-لتشيبيشتاف المتعامدة مع الاعداد وكثيرات الحدود المتعامدة من الرتبة الثانية السالف ذكرها سابقا .

الفصل الأول

نتطرق في هذا الفصل إلى بعض المفاهيم العامة، حيث نستهل الفصل بتقديم تعريف للسلاسل الشكلية، العلاقات التراجعية لأعداد k-فيبوناشي، k-مارسان ، k- مارسان لوكاس، k- لوكاس، k- بال لوكاس بعد ذلك نقوم بتعريف كثيرات الحدود المتعامدة لتشيبيتشاف من الأنواع الأربعة وبعدها نقوم بتعريف العلاقة التراجعية لأعداد ثريبوناشي المعممة و كثيرات الحدود 2- لتشيبيشتاف المتعامدة ثم نقدم مفهوما للدوال المولدة العادية، وكيفية إيجاد الدوال المولدة للأعداد و كثيرات الحدود المتعامدة السالف ذكرها.

1.1 السلاسل الشكلية

1.1.1 حقل السلاسل الشكلية

ليكن $(\mathbb{k},+,.)$ حقل تبديلي $(\mathbb{k}=\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C})$

تعريف 1.1:

عناصر $\mathbb{k}[[x]]=\left\{\sum_{i=0}^{+\infty}a_ix^i, a_i\in\mathbb{k}\right\}$ تسمى السلاسل الشكلية بمعاملات في $\mathbb{k}$. من أجل $i\in\mathbb{N}$ ، x^i يسمى وحيد الدرجة i و a_i هي معاملات من $\mathbb{k}$، حيث x لا معين.

- المعامل a_0 يدعى بالحد الثابت للسلسلة الشكلية $u=\sum_{i=0}^{+\infty}a_ix^i$.

2.1.1 العمليات على السلاسل الشكلية

تعريف 2.1:

لتكن $u=\sum_{i=0}^{+\infty}a_ix^i$ و $v=\sum_{i=0}^{+\infty}b_ix^i$ سلسلتين شكليتين، نعرف مجموعهما و جداءهما بالتالي:

$$u+v=\sum_{i=0}^{+\infty}(a_i+b_i)\,x^i, \tag{1.1}$$

$$u.v=\sum_{i=0}^{+\infty}c_ix^i \quad / \quad c_i=\sum_{k=0}^{i}a_kb_{i-k}. \tag{2.1}$$

1) الضرب في سلمي:

السلسلة $v=\sum_{i=0}^{+\infty}ka_ix^i$ هي ناتج ضرب السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty}a_ix^i$ في السلمي k.

2) الإشتقاق الشكلي:

السلسلة $v=\sum_{i=0}^{+\infty}(i+1)a_{i+1}x^i$ هي نتيجة الاشتقاق الشكلي للسلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty}a_ix^i$ بالنسبة إلى x.

3) المكاملة الشكلية:

السلسلة $v=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$ هي ناتج المكاملة الشكلية للسلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ بالنسبة إلى x .

3.1.1 السلاسل القابلة للقلب

تعريف 3.1:

نقول أنّ السلسلة $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ قابلة للقلب إذا و فقط إذا وجدت سلسلة $\sum_{i=0}^{+\infty} b_i x^i$ حيث:

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \; x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i \; x^i\right)=1. \qquad (3.1)$$

أمثلـــة:

1- السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty} x^i$ قابلة للقلب و مقلوبها $v=1-x$.

2- السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i x^i$ قابلة للقلب ومقلوبها $v=1+x$.

3- السلسلة $u=\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$ قابلة للقلب ومقلوبها $v=\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{x^i}{i!}$.

خاصية1.1:

السلسلة الشكلية $u=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $a_0 \neq 0$.

البرهان :

تكون السلسلة $u=\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ قابلة للقلب في $\mathbb{k}[[x]]$ إذا وفقط إذا وجد $u^{-1}=\sum_{i\geq 0} b_i x^i$ في $\mathbb{k}[[x]]$ بحيث $u u^{-1}=1$.

هذا معنـــــــاه:

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = 0, i \geq 1. \end{cases}$$

- إذا كانت u قابلة للقلب إذن مما سبق فإن $a_0 b_0 = 1$ و بالتالي a_0 قابل للقلب في الحقل IK ومنه $a_0 \neq 0$.

- وبالعكس، إذا كان $a_0 \neq 0$ فإن الجملة مثلثية علوية:

$$(S)\begin{cases} a_0b_0 = 1 \\ a_1b_0 + a_0b_1 = 0 \\ a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_ib_0 + a_{i-1}b_1 + \dots + a_0b_i = 0 \end{cases} .$$

تقبل حل وحيدا لأن محدد الجملة يساوي $a_0^{i+1} \neq 0$ من أجل كل i، إذن $u = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$ قابلة للقلب.

2.1 العلاقات التراجعية

نركز في هذه الفقرة اهتمامنا على العلاقات التراجعية الخطية من الرتبة الثانية والثالثة المتجانسة ذات معاملات ثابتة، حيث يمكن للقارئ الرجوع للمراجع [1،2،5] للمزيد من التفصيل حول العلاقات التراجعية.

تعريف 1.2:

نعرف متتالية فيبوناشي المعممة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2} , & \forall\, n \geq 2 \\ u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta \end{cases} . \qquad (1.2)$$

حيث : $p,q \in \mathbb{N}^*$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$.

- من خلال العلاقة (1.2) يمكن استنتاج العلاقات التراجعية لمجموعة من الأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية والتي نلخصها فالجدول التالي :

الأعداد	p	q	α	β	العلاقات التراجعية
$F_{k,n}$ فيبوناتشي-k	k	1	1	k	$\begin{cases} F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2} , & \forall\, n \geq 2 \\ F_{k,0} = 1,\ F_{k,1} = k \end{cases}$
$M_{k,n}$ مارسان-k	$3k$	-2	0	1	$\begin{cases} M_{k,n} = 3kM_{k,n-1} - 2M_{k,n-2} , & \forall\, n \geq 2 \\ M_{k,0} = 0,\ M_{k,1} = 1 \end{cases}$
$m_{k,n}$ مارسان لوكاس-k	$3k$	-2	2	$3k$	$\begin{cases} m_{k,n} = 3km_{k,n-1} - 2m_{k,n-2} , & \forall\, n \geq 2 \\ m_{k,0} = 2,\ m_{k,1} = 3k \end{cases}$
$L_{k,n}$ لوكاس-k	k	1	1	2	$\begin{cases} L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2} , & \forall\, n \geq 2 \\ L_{k,0} = 1,\ L_{k,1} = 2 \end{cases}$
$Q_{k,n}$ بال لوكاس-k	2	k	2	2	$\begin{cases} Q_{k,n} = 2Q_{k,n-1} + kQ_{k,n-2} , & \forall\, n \geq 2 \\ Q_{k,0} = 2,\ Q_{k,1} = 2 \end{cases}$

الجدول1.1: العلاقات التراجعية لبعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية.

ملاحظة 1.2:

بأخذ $k=1$ في الجدول السابق نتحصل على أعداد كل من فيبوناشي، ومارسان، مارسان لوكاس، لوكاس و بال لوكاس.

خاصية 1.2: [5]

الحل العام للعلاقة التراجعية (1.2) يعطى بـ:

$$u_n = \frac{c_1 x_1^n - c_2 x_2^n}{x_1 - x_2},$$

مع: $c_1 = \beta - \alpha x_2$ و $c_2 = \beta - \alpha x_1$ حيث x_1 و x_2 هما حلول المعادلة المميزة للعلاقة التراجعية (1.2) و $x_1 \neq x_2$.

تعريف 2.2:(تعميم ثريبوناشي)

نعرف أعداد ثريبوناشي المعممة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} w_n = aw_{n-1} + \mathrm{b}w_{n-2} + \mathrm{c}w_{n-3} & , \quad \forall\, n \geq 3 \\ w_0 = \alpha,\ w_1 = \beta\ , w = \gamma \end{cases} \quad . \qquad (2.2)$$

حيث : $a,b,c \in \mathbb{N}^*$ و $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$.

- من خلال العلاقة التراجعية (2.2) يمكن استنتاج العلاقات التراجعية لمجموعة من الأعداد الشهيرة ذات الرتبة الثالثة والموضحة في الجدول التالي :

أعداد	a	b	c	α	β	γ	العلاقة التراجعية
$J_n^{(3)}$ جاكوبستال	1	1	2	0	1	1	$\begin{cases} J_n^{(3)} = J_{n-1}^{(3)} + J_{n-2}^{(3)} + 2J_{n-3}^{(3)} & , \quad \forall\, n \geq 3 \\ J_0^{(3)} = 0,\ J_1^{(3)} = 1\ ,\ J_2^{(3)} = 1 \end{cases}$
$j_n^{(3)}$ جاكوبستال – لوكاس	1	1	2	2	1	5	$\begin{cases} j_n = j_{n-1}^{(3)} + j_{n-2}^{(3)} + 2j_{n-3}^{(3)} & , \quad \forall\, n \geq 3 \\ j_0^{(3)} = 2,\ j_1^{(3)} = 1\ ,\ j_2^{(3)} = 5 \end{cases}$
N_n ناريانا	1	0	1	0	1	1	$\begin{cases} N_n = N_{n-1} + N_{n-3} & , \quad \forall\, n \geq 3 \\ N_0 = 0, N_1 = 1\ , N_2 = 1 \end{cases}$

الجدول2.1: العلاقات التراجعية لبعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثالثة.

خاصية 2.2: [6]

الحل العام للعلاقة التراجعية (2.2) يعطى بـ:

$$w_n=\frac{R}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}x_1^n+\frac{S}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}x_2^n+\frac{T}{(x_3-x_1)(x_2-x_3)}x_3^n,$$

حيث x_1,x_2,x_3 هي حلول للمعادلة المميزة للعلاقة التراجعية (2.2) و $x_i\neq x_j, i,j=\overline{1.3}$

و

$$R=\gamma-(x_2+x_3)\beta+\alpha x_2x_3,$$

$$S=\gamma-(x_1+x_3)\beta+\alpha x_1x_3,$$

$$T=\beta(x_2-x_1-2x_3)+\alpha x_1(2x_3-x_2)+\gamma.$$

3.1 كثيرات الحدود المتعامدة

نظرية 1.3

لتكن $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كثيرات حدود نظامية أي:

$$P_n(x)=x^{\mathrm{n}}+a_{\mathrm{n}-1}x^{\mathrm{n}-1}+a_{n-2}x^{\mathrm{n}-2}+\cdots+a_1$$

تكون المتتالية $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ عبارة عن متتالية كثيرات حدود متعامدة منتظمة إذا و فقط إذا وجدت متتاليتان عقديتان (من $\mathbb{C}$) $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق العلاقة التراجعية التالية :

$$\begin{cases}P_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)P_n(x)-\beta_nP_{n-1}(x)\\ P_{-1}(x)=0,P_0(x)=1\end{cases},n\geq 1. \quad (1.3)$$

نظرية 2.3:

لتكن $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ عبارة عن متتالية لكثيرات الحدود المتعامدة فإن العلاقتين التاليتين متكافئتين:

1- $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$.

2- $\begin{cases}P_{n+1}(x)=xP_n(x)-\beta_nP_{n-1}(x)\\ P_{-1}(x)=0,P_0(x)=1\end{cases},n\geq 1$.

نظرية 3.3: (Favard's Theorem)

كل علاقة تراجعية لمتتالية كثيرات الحدود $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ من الرتبة الثانية عبارة عن كثيرات حدود متعامدة.

تعريف 1.3:

نعرف كثيرات الحدود المعممة لفيبوناشي بالعلاقة التراجعية التالية :

$$\begin{cases}P_n(x)=pxP_{n-1}(x)+qP_{n-2}(x) & ,\ \forall\ n\ \geq 2\\ P_0(x)=\alpha,\ P_1(x)=\beta x+\gamma\end{cases}. \quad (2.3)$$

حيث: $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ و $p,q\in\mathbb{Z}$.

ملاحظات:

1. لما $\begin{cases}\alpha=1,\beta=1,\gamma=0\\ p=2,q=-1\end{cases}$ نجد العلاقة التراجعية لكثير الحدود لتشيبتشاف من النوع الاول $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

2. لما $\begin{cases}\alpha=1,\beta=2,\gamma=0\\ p=2,q=-1\end{cases}$ نجد العلاقة التراجعية لكثيرالحدود لتشيبتشاف من النوع الثاني $(U_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

3. لما $\begin{cases}\alpha=1,\beta=2,\gamma=-1\\ p=2,q=-1\end{cases}$ نجد العلاقة التراجعية لكثيرالحدود لتشيبتشاف من النوع الثالث $(V_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

4. لما $\begin{cases}\alpha=1,\beta=2,\gamma=1\\ p=2,q=-1\end{cases}$ نجد العلاقة التراجعية لكثيرالحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع $(W_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

تعريف 2.3:

نعرف كثير الحدود 2- تشيبيتشاف بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases}\hat{T}_n(x)=x\hat{T}_{n-1}(x)-\alpha\hat{T}_{n-2}(x)-\gamma\hat{T}_{n-3}(x), & \forall n\geq 0,\gamma\neq 0\\ \hat{T}_0(x)=1,\ \hat{T}_1(x)=x,\ \hat{T}_2(x)=x^2-\alpha\end{cases} \quad (3.3)$$

4.1 الدوال المولدة

1.4.1 الدوال المولدة العادية

تعريف 1.4:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية، نرفق بهذه المتتـالية العددية الدالة المولدة العادية التالية:

$$S(u)(x)=g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n \quad . \quad (1.4)$$

الدالة المعرفة بهذه السلسلة تسمّى الدالة المولدة العـادية المرفقة بالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

نظرية 1.4:

إذا كانت $g(x)$ دالة مولدة للمتتالية (a_n) و $h(x)$ دالة مولدة لـ (b_n)، يكون لدينا:

1- $c_1g(x)+c_2h(x)$ دالة مولدة للمتتالية $(c_1a_n+c_2b_n)$ بحيث c_2,c_1 ثابتان.

2- $\frac{g(x)}{1-x}$ دالة مولدة للمتتالية $(a_0+a_1+\cdots+a_n)$.

3- $xg'(x)$ دالة مولدة للمتتالية (na_n) حيث $g'(x)$ هي مشتق g.

4- $g(x)h(x)$ دالة مولدة للمتتالية الالتفاف $(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)$.

البرهان: (أنظر[2])

نظرية 2.4:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية (1.2)، الدالة المولدة المرفقة بالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي:

$$g(x)=\frac{\alpha+(\beta-p\alpha)x}{1-px-qx^2}. \tag{2.4}$$

البرهان:

لدينا:

$$\begin{aligned}
g(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n\\
&=u_0+u_1x+\sum_{n=2}^{+\infty}u_nx^n\\
&=\alpha+\beta x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(pu_{n-1}+qu_{n-2}\right)x^n\\
&=\alpha+\beta x+p\sum_{n=2}^{+\infty}u_{n-1}x^n+q\sum_{n=2}^{+\infty}u_{n-2}x^n\\
&=\alpha+\beta x+px\sum_{n=1}^{+\infty}u_nx^n+qx^2\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n\\
&=\alpha+\beta x+px\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n-\alpha\right)+qx^2\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n\\
&=\alpha+\beta x-px\alpha+pxg(x)+qx^2g(x),
\end{aligned}$$

و منه ينتج لنا:

$$g\left(x\right)=\frac{\alpha+\left(\beta-p\alpha\right)x}{1-px-qx^{2}}.$$

وهو المطلوب .

إنطلاقا من النظرية 2.4 و الفقرة الثانية نتحصل على النتائج المدونة في الجدول التالي :

الدالة المولدة	β	α	q	P	الأعداد
$\frac{1}{1-kx-x^2}$	k	1	1	k	$F_{k,n}$
$\frac{x}{1-3kx+2x^2}$	1	0	-2	$3k$	$M_{k,n}$
$\frac{2-3kx}{1-3kx+2x^2}$	$3k$	2	-2	$3k$	$m_{k,n}$
$\frac{2-kx}{1-kx-x^2}$	2	1	1	k	$L_{k,n}$
$\frac{2-2x}{1-2x-kx^2}$	2	2	k	2	$Q_{k,n}$

الجدول3.1: الدوال المولدة لبعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية.

نظرية 3.4:

لتكن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية (2.2)، الدالة المولدة المرفقة بالمتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$g\left(x\right)=\frac{\alpha+\left(\beta-\alpha a\right)x+\left(\gamma-\alpha b-\beta a\right)x^{2}}{1-ax-bx^{2}-cx^{3}}. \qquad (3.4)$$

البرهان :

لدينا :

$$\begin{aligned}
g\left(x\right)&=\sum_{n=0}^{+\infty}w_nx^n\\
&=w_0+w_1x+w_2x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}w_nx^n\\
&=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}w_nx^n\\
&=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}\left(aw_{n-1}+\mathrm{b}w_{n-2}+\mathrm{c}w_{n-3}\right)x^n
\end{aligned}$$

$$= \alpha+\beta x+\gamma x^2+\sum_{n=3}^{+\infty} a w_{n-1} x^n+\sum_{n=3}^{+\infty} \mathrm{b} w_{n-2} x^n+\sum_{n=3}^{+\infty} \mathrm{c} w_{n-3} x^n$$

$$= \alpha+\beta x+\gamma x^2+a x \sum_{n=2}^{+\infty} w_n x^n+b x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} w_n x^n+c x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$$

$$= \alpha+\beta x+\gamma x^2+a x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n-\alpha-\beta x\right)+b x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n-\alpha\right)+c x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$$

$$= \alpha+(\beta-\alpha a) x+(\gamma-\alpha b-\beta a) x^2+a x g(x)+b x^2 g(x)+c x^3 g(x),$$

ومنه :

$$g(x)=\frac{\alpha+(\beta-\alpha a) x+(\gamma-\alpha b-\beta a) x^2}{1-a x-b x^2-c x^3}.$$

وهو المطلوب .

- انطلاقا من النظرية 3.4 والفقرة الثانية نتحصل على النتـائج المدونة في الجدول التالي :

أعداد	a	b	c	α	β	γ	الدالة المولدة
$J_n^{(3)}$	1	1	2	0	1	1	$\frac{x}{1-x-x^2-2x^3}$
$j_n^{(3)}$	1	1	2	2	1	5	$\frac{2-x+2x^2}{1-x-x^2-2x^3}$
N_n	1	0	1	0	1	1	$\frac{x}{1-x-x^3}$

الجدول 4.1: الدوال المولدة لبعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثالثة.

2.4.1 الدوال المولدة المرفقة بكثيرات الحدود المتعامدة :

نظرية 4.4:

لتكن $\left(P_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كثيرات الحدود المعرفة بالعلاقة التراجعية (2.3)، الدالة المولدة المرفقة بالمتتالية $\left(P_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ هي:

$$g(z)=\frac{\alpha+((\beta-\alpha p) x+\gamma) z}{1-p x z-q z^2}. \qquad (4.4)$$

البرهان :

لدينا:

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) z^n \\ &= P_0(x) + P_1(x)z + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(x) z^n \\ &= \alpha + (\beta x + \gamma) z + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(pxP_{n-1}(x) + qP_{n-2}(x) \right) z^n \\ &= \alpha + (\beta x + \gamma) z + px \sum_{n=2}^{+\infty} P_{n-1}(x) z^n + q \sum_{n=2}^{+\infty} P_{n-2}(x) z^n \\ &= \alpha + (\beta x + \gamma) z + pxz \sum_{n=1}^{+\infty} P_n(x) z^n + qz^2 \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) z^n \\ &= \alpha + (\beta x + \gamma) z + Pxz \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) z^n - \alpha \right) + qz^2 \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) z^n, \end{aligned}$$

ومنه ينتج لنا:

$$g(z) = \frac{\alpha + \left((\beta - \alpha p) x + \gamma \right) z}{1 - pxz - qz^2}.$$

وهو المطلوب .

إنطلاقا من النظرية 4.4 والفقرة الثالثة نتحصل على النتـائج التالية:

كثيرات الحدود	p	Q	α	β	γ	الدوال المولدة
$T_n(x)$	2	-1	1	1	0	$\frac{1-xz}{1-2xz+z^2}$
$U_n(x)$	2	-1	1	2	0	$\frac{1}{1-2xz+z^2}$
$V_n(x)$	2	-1	1	2	-1	$\frac{1-z}{1-2xz+z^2}$
$W_n(x)$	2	-1	1	2	1	$\frac{1+z}{1-2xz+z^2}$

الجدول5.1: الدوال المولدة لبعض كثيرات الحدود الشهيرة من الرتبة الثانية.

نظرية 5.4:

لتكن $\left(\hat{T}_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كثيرات الحدود المعرفة بالعلاقة التراجعية (3.3)، الدالة المولدة المرفقة

بالمتتالية $\left(\hat{T}_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ هي:

$$g(z)=\frac{1}{1-xz+\alpha z^2+\gamma z^3}. \qquad (5.4)$$

البرهان :

الدينا :

$$\begin{aligned}
g(z)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}_n(x)z^n\\
&=\hat{T}_0(x)+\hat{T}_1(x)z+\hat{T}_2(x)z^2+\sum_{n=3}^{+\infty}\hat{T}_n(x)z^n\\
&=1+xz+\left(x^2-\alpha\right)z^2+\sum_{n=3}^{+\infty}\left(x\hat{T}_{n-1}(x)-\alpha\hat{T}_{n-2}(x)-\gamma\hat{T}_{n-3}(x)\right)z^n\\
&=1+xz+\left(x^2-\alpha\right)z^2+x\sum_{n=3}^{+\infty}\hat{T}_{n-1}(x)z^n-\alpha\sum_{n=3}^{+\infty}\hat{T}_{n-2}(x)z^n-\gamma\sum_{n=3}^{+\infty}\hat{T}_{n-3}(x)z^n\\
&=1+xz+\left(x^2-\alpha\right)z^2+xz\sum_{n=2}^{+\infty}\hat{T}_n(x)z^n-\alpha z^2\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{T}_n(x)z^n-\gamma z^3\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}_n(x)z^n\\
&=1+xz+\left(x^2-\alpha\right)z^2+xz\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\hat{T}_n(x)z^n-(1+xz)\right)-\alpha z^2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{T}_n(x)z^n-1\right)-\gamma z^3\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}_n(x)z^n\\
&=1+xzg(z)-\alpha z^2g(z)-\gamma z^3g(z),
\end{aligned}$$

و منه ينتج لنا :

$$g(z)=\frac{1}{1-xz+\alpha z^2+\gamma z^3}.$$

و هو المطلوب .

الخاتمة :

ختاما فإننا قمنا في هذا الفصل بإعطاء بعض المفاهيم العامة التي سنلجأ إليها في الفصول القادمة. حيث تم التطرق إلى بعض التعريفات الخاصة ببعض الأعداد و كثيرات الحدود الشهيرة من الرتبة الثانية والثالثة ، و كذلك الدوال المولدة المرفقة لكل منها .

المـــــــــــــــــراجع:

المراجع باللغة العربية:

[1] أ. حميد شراري، م.عبد العزيز الزهيري، مقدمة في نظرية التركيبات، مطبوعات جامعة سعود، المملكة العربية السعودية، 2010.

[2] ع. بوسعيود، مطبوعة البيداغوجية، جامعة محمد الصديق بن يحيى جيجل، سبتمبر 2018.

[3] ن. صابة، م.فركيوي ، الدوال المولدة للأعداد وكثيرات الحدود الغوصية، مذكرة التخرج ماستر، جامعة جيجل 2019.

[4] و. بن عميرة ، الدوال المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي مع بعض الأعداد الشهيرة ، مذكرة التخرج ماستر، جامعة جيجل 2020.

المراجع باللغة الأجنبية:

[5] A. Boussayoud, M. Boulyer, M. Kerada, A simple and accurate method for determination of some generalized sequence of numbers, *Int. J. Pure Appl. Math*.108, 503-511, (2016).

[6] M. Chelgham, A. Boussayoud , Construction of Symmetric functions of generalized Tribonacci numbers, *J. Sci. Arts*.50, 65-74, 2020**.**

[7] M. Chelghem, **A.** Boussayoud. On the k-Mersenne Lucas numbers. *Notes Number Theory Discrete Math* 27(1),7-13, (2021).

[8] H. Merzouk, B. Aloui, A. Boussayoud, Generating Functions of the Products of 2-Orthogonal Chebyshev Polynomials with Some Numbersand the other Chebyshev Polynomials, *Issues of Analysis* 10(28)(1), 17-33 (2021).

[9] N. Saba, **A.** Boussayoud**,** K.V. Venkata Kanuri, Mersenne Lucas numbers and complete homogeneous symmetric functions, *J. Appl. Math. Comput. Sci.* 24(1),127–139, (2021**).**

الفصل الثاني

سنتطرق في هذا الفصل إلى العناصر الأساسية لنظرية التوابع التناظرية ، حيث نستهل هذا الفصل ببعض التعاريف حول التوابع التناظرية الأولية و التامة وبعد ذلك نقوم بإعطاء الدوال المولدة لبعض كثيرات الحدود والأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية والثالثة وذلك باستعمال تقنية التوابع التناظرية .

1.2 التوابع التنـاظرية

1.1.2 التوابع التناظرية الأوليّة

نعتبر فيما يلي n,k عددين صحيحين موجبين و $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ جذور مختلفة (حقيقية أو مركبة) لمعادلة جبرية من الدرجة n.

تعريف1.1:

نعرف التابع المتناظر الأولي من الرتبة k التابع المعرف بـ:

$$e_k^{(n)}=e_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}, \tag{1.1}$$

مع: $i_1,i_2,...,i_n\in\{0,1\}$ و $e_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ معدومة من أجل $k>n$ و $k<0$.

مثال 1.1:

من أجل معادلة من الدرجة الثانية ($n=2$ ، الجذور: λ_1,λ_2) لدينا:

$$\begin{cases} e_0^{(2)}=1, \\ e_1^{(2)}=\lambda_1+\lambda_2. \\ e_2^{(2)}=\lambda_1\lambda_2, \end{cases}$$

قضية 1.1:

السلسلة المولدة للتابع التناظري الأولي تعطى بـ :

$$E(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}e_k^{(n)}z^k=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z). \tag{2.1}$$

البرهان:

نبرهن بالتراجع على ذلك، من أجل $n=2$ لدينا :

$$\prod_{i=0}^{2}(1+\lambda_i z)=(1+\lambda_1 z)(1+\lambda_2 z)$$

$$=1+(\lambda_1+\lambda_2)z+\lambda_1\lambda_2 z^2$$

$$= e_0^{(2)} + e_0^{(2)} z + e_0^{(2)} z^2$$
$$= \sum_{k=0}^{2} e_k^{(2)} z^k .$$

نفرض الخاصية صحيحة من أجل n أي :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^k = \prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i z) .$$

و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n+1)} z^k = \prod_{i=1}^{n+1} (1+\lambda_i z) .$$

لدينا:

$$\prod_{i=1}^{n+1} (1+\lambda_i z) = \prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i z)(1+\lambda_{i+1} z)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^k \left(1+\lambda_{n+1} z\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^k + \lambda_{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^k + \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} e_{k-1}^{(n)} z^k$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^k + \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} e_{k-1}^{(n)} z^k$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} z^k + \lambda_{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} e_{k-1}^{(n)} z^k$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e_k^{(n)} + \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)}\right) z^k$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n+1)} z^k .$$

و هو المطلوب .

2.1.2 التوابع التناظرية التامة

__تعريف 2.1:__

نعرف التابع التناظري التام بالنسبة للجذور بالعلاقة التالية:

$$h_k^{(n)} = h_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+....+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} ... \lambda_n^{i_n}, \quad (3.1)$$

مع: $i_1, i_2, \ldots, i_n \geq 0$ و $\forall k < 0, h_k^{(n)} = 0$.

مثال2.1:

من أجل معادلة من الدرجة الثانية ($n = 2$ ، الجذور: λ_2, λ_1) لدينا:

$$\begin{cases} h_0^{(2)} = 1 = e_0^{(2)} \\ h_1^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2 = e_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 \\ h_3^{(2)} = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2 \\ \vdots \end{cases}.$$

قضية2.1:

السلسلة المولدة للتابع التناظري التام تعطى بـ:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n)} z^k = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i z)^{-1}. \quad (4.1)$$

البرهان:

نبرهن بالتراجع على ذلك من أجل $n = 2$ لدينا :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(2)} z^k = h_0^{(2)} + h_0^{(2)} z + h_0^{(2)} z^2 + ...$$

$$= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2) z + (\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2) z^2 + ...$$

$$= (1 + \lambda_1 z + \lambda_1^2 z^2 + ...)(1 + \lambda_2 z + \lambda_2^2 z^2 + ...)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda_1 z)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda_2 z)^k \right)$$

$$= \frac{1}{(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)}$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{2} (1 - \lambda_i z)}.$$

نفرض الخاصية صحيحة من أجل n أي :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n)} z^k = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i z)^{-1}.$$

و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n+1)} z^k = \prod_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i z)^{-1}.$$

لدينا:

$$h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)},$$

إذن:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n+1)} z^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)} \right) z^k \\
&= \lambda_{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} h_{k-1}^{(n+1)} z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n)} z^k \\
&= \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} h_{k-1}^{(n+1)} z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n)} z^k \\
&= \lambda_{n+1} z \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n+1)} z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n)} z^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n+1)} z^k - \lambda_{n+1} z \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n+1)} z^k &= \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i z)^{-1} \\
&= \frac{(1-\lambda_{n+1} z)^{-1}}{\prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i z)} \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i z)}.
\end{aligned}$$

و هو المطلوب.

2.2 بعض خصائص التوابع التناظرية

<u>**تعريف1.2:**</u>

نعتبر الأبجدية $P=\{p_1,p_2\}$، نعرف التابع المتناظر S_n المرفق بالأبجدية P بـ:

$$S_n(P)=S_n(p_1+p_2)=\frac{p_1^{n+1}-p_2^{n+1}}{p_1-p_2},n\in\mathbb{N}.$$

مع:

$$\begin{cases} S_0(P)=h_0^{(2)}=1 \\ S_1(P)=h_1^{(2)}=p_1+p_2 \\ S_2(P)=h_2^{(2)}=p_1^2+p_2^2+p_1p_2. \\ \vdots \\ S_n(P)=h_n^{(2)} \end{cases}$$

و $S_n(P)=0$ من أجل $n<0$.

__تعريف2.2:__

نعتبر الأبجدية $P=\{p_1,p_2,p_3\}$، نعرف التابع المتناظر S_n المرفق بالأبجدية P بـ:

$$S_n(P)=\frac{p_2S_n(p_1+p_2)-p_3S_n(p_1+p_3)}{p_2-p_3},n\in\mathbb{N}.$$

__تعريف 3.2:__

لتكن A و B أبجديتين، نرمز بـ$S_n(A-B)$ لمعاملات السلسلة المعرفة بـ:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A-B)z^n=\frac{\prod_{b\in B}(1-bz)}{\prod_{a\in A}(1-az)}=\mathrm{H}(z)\mathrm{E}(-z). \quad (1.2)$$

مـــع: $\forall n<0,S_n(A-B)=0$.

__نتيجة1.2:__

بوضع $A=\{0,0,...\}$ في العلاقة (1.3) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-B)z^n=\prod_{b\in B}(1-bz). \quad (2.2)$$

__خاصية1.2:__

إذا كان $A=\{0,0,...,0\}$ أو $B=\{0,0,...,0\}$ فإنه ينتج لنا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A-B)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)z^n.\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-B)z^n. \quad (3.2)$$

ملاحظة 1.2:

إذا كان $B=A$ من العلاقتين (1.2) و (3.2) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)z^n \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)z^n = 1,$$

أي:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)z^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)z^n}.$$

3.2 تطبيقات على التوابع التناظرية التامة

تعريف 1.3:

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ أبجديتين، نعرف المؤثر التناظري $P_1 \quad {}_2$ بـــ :

$$\delta_{P_1P_2}^k = \frac{p_1^k f(p_1) - p_2^k f(p_2)}{p_1 - p_2}. \tag{1.3}$$

تعريف 2.3:

نعتبر التابع g من $\mathbb{R}^n$، نعرف الفرق المقسوم بـــ :

$$\partial_{x_i x_{i+1}}(g) = \frac{g(x_1,x_2,\ldots x_i,x_{i+1},\ldots x_n) - g(x_1,x_2,\ldots x_{i+1},x_i,\ldots x_n)}{x_i - x_{i+1}}. \tag{2.3}$$

خاصية 1.3:

لتكن الأبجدية $P=\{p_1,p_2\}$، من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

$$\delta_{P_1P_2}^k f(p_1) = S_{k-1}(p_1+p_2) f(p_1) + p_2^k \partial_{p_1p_2}(f). \tag{3.3}$$

البرهان:

لدينا:

$$\delta_{P_1P_2}^k f(p_1) = \frac{p_1^k f(p_1) - p_2^k f(p_2)}{p_1 - p_2},$$

إذن:

$$\delta_{P_1P_2}^k f(p_1) = \frac{p_1^k f(p_1) - p_2^k f(p_2) + p_2^k f(p_2) - p_2^k f(p_2)}{p_1 - p_2}$$
$$= \frac{p_1^k - p_2^k}{p_1 - p_2} f(p_1) + p_2^k \frac{f(p_1) - f(p_2)}{p_1 - p_2}$$

$$=S_{k-1}(p_1+p_2)f(p_1)+p_2^k\partial_{p_1p_2}(f).$$

و هو المطلوب .

<u>نظرية 1.3:</u>

لتكن الأبجدية $P=\{p_1,p_2\}$ و k عدد طبيعي، لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+k-1}(p_1+p_2)z^n=\frac{S_{k-1}(p_1+p_2)-p_1p_2S_{k-2}(p_1+p_2)z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}. \quad (4.3)$$

<u>البرهان:</u>

- بإدخال المؤثر $\delta_{P_1P_2}^k$ على السلسلة القابلة للقلب $f(p_1z)=\sum_{n=0}^{+\infty}P_1^nz^n$ فإن الطرف الأيسر للعلاقة (4.4) يكتب على الشكل :

$$\delta_{P_1P_2}^kf(p_1)=\frac{p_1^kf(p_1)-p_2^kf(p_2)}{p_1-p_2}$$

$$=\frac{p_1^k\sum_{n=0}^{+\infty}p_1^nz^n-p_2^k\sum_{n=0}^{+\infty}p_2^nz^n}{p_1-p_2}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}p_1^{n+k}z^n-\sum_{n=0}^{+\infty}p_2^{n+k}z^n}{p_1-p_2}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{p_1^{n+k}-p_2^{n+k}}{p_1-p_2}\right)z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+k-1}(p_1+p_2)z^n.$$

- من جهة أخرى بإدخال المؤثر $\delta_{P_1P_2}^k$ على السلسلة القابلة للقلب $f(p_1z)=\frac{1}{(1-p_1z)}$ فإن الطرف الأيمن للعلاقة (4.4) يكتب على الشكل :

$$\delta_{p_1p_2}^{k} f\,(p_1)=\delta_{p_1p_2}^{k}\left(\frac{1}{(1-p_1z)}\right)$$

$$=\frac{\dfrac{p_1^k}{(1-p_1z)}-\dfrac{p_2^k}{(1-p_2z)}}{p_1-p_2}$$

$$=\frac{p_1^k(1-p_2z)-p_2^k(1-p_1z)}{(p_1-p_2)(1-p_1z)(1-p_2z)}$$

$$=\frac{p_1^k-p_2^k-\left(p_1^kp_2-p_2^kp_1\right)z}{(p_1-p_2)(1-p_1z)(1-p_2z)}$$

$$=\frac{p_1^k-p_2^k-p_1p_2\left(p_1^{k-1}-p_2^{k-1}\right)z}{(p_1-p_2)(1-p_1z)(1-p_2z)}$$

$$=\frac{\dfrac{p_1^k-p_2^k}{p_1-p_2}-p_1p_2\dfrac{\left(p_1^{k-1}-p_2^{k-1}\right)}{p_1-p_2}z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}$$

$$=\frac{S_{k-1}(p_1+p_2)-p_1p_2S_{k-2}(p_1+p_2)z}{(1-p_1z)(1-p_2z)}.$$

و هو المطلوب .

- من النظرية 1.2 و بأخذ الأبجديتين $P=\{p_1,p_2\}$ و $k\in\{0,1,2\}$ نستنتج الخواص التالية :

خاصية 2.3:

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ أبجدية لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+1}(p_1+p_2)z^n=\frac{p_1+p_2-p_1p_2z}{\prod_{i=1}^{2}(1-Pz)}. \qquad (5.3)$$

خاصية 3.3:

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ أبجدية لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n}(p_1+p_2)z^n=\frac{1}{\prod_{i=1}^{2}(1-Pz)}. \qquad (6.3)$$

نتيجة 1.3:

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ أبجدية لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(p_1+p_2)z^n=\frac{z}{\prod_{i=1}^{2}(1-Pz)}. \qquad (7.3)$$

نظرية 2.3:

لتكن A و P الأبجدية معرفتين على الترتيب بـ : $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ و n عدد طبيعي، لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)S_n(P)z^n=\frac{S_0(-A)-p_1p_2S_2(-A)z^2-p_1p_2S_3(-A)S_1(P)z^3}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_2z)^n\right)}. \qquad (8.3)$$

البرهان:

❖ بإدخال المؤثر $\delta_{p_1p_2}$ على السلسلة القابلة للقلب $f(p_1z)=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)p_1^nz^n$ فإن الطرف الأيسر للعلاقة (8.3) يكتب على الشكل :

$$\delta_{P_1P_2}f(p_1)=\frac{p_1f(p_1)-p_2f(p_2)}{p_1-p_2}$$

$$=\frac{p_1\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)p_1^nz^n-p_2\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)p_2^nz^n}{p_1-p_2}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)p_1^{n+1}z^n-\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)p_2^{n+1}z^n}{p_1-p_2}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)\left(\frac{p_1^{n+1}-p_2^{n+1}}{p_1-p_2}\right)z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)S_n(P)z^n.$$

❖ من جهة أخرى بإدخال المؤثر $\delta_{P_1P_2}$ على السلسلة القابلة للقلب $f(p_1z)=\frac{1}{\prod_{a\in A}(1-ap_1z)}$

فإن الطرف الأيمن للعلاقة (8.3) يكتب على الشكل :

$$\delta_{P_1P_2}f(p_1)=\delta_{P_1P_2}\left(\frac{1}{\prod_{a\in A}(1-ap_1z)}\right)$$

$$=\frac{\dfrac{p_1}{\prod_{a\in A}(1-ap_1z)}-\dfrac{p_2}{\prod_{a\in A}(1-ap_2z)}}{p_1-p_2}$$

$$=\frac{p_1\prod_{a\in A}(1-ap_2z)-p_2\prod_{a\in A}(1-ap_1z)}{(p_1-p_2)\prod_{a\in A}(1-ap_1z)\prod_{a\in A}(1-ap_2z)}$$

$$=\frac{p_1\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_2z)^n-p_2\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_1z)^n}{(p_1-p_2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_2z)^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)\left[\dfrac{p_1p_2^n-p_2p_1^n}{p_1-p_2}\right]z^n}{(p_1-p_2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_2z)^n\right)}$$

$$=\frac{1+\sum_{n=1}^{+\infty}S_n(-A)\left[\dfrac{p_1p_2^n-p_2p_1^n}{p_1-p_2}\right]z^n}{(p_1-p_2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_2z)^n\right)}$$

$$=\frac{1-p_1p_2\sum_{n=1}^{+\infty}S_n(-A)\left[\dfrac{p_1^{n-1}-p_2^{n-1}}{p_1-p_2}\right]z^n}{(p_1-p_2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_2z)^n\right)}$$

$$=\frac{1-p_1p_2\sum_{n=1}^{+\infty}S_n(-A)S_{n-2}(P)z^n}{(p_1-p_2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_2z)^n\right)}$$

$$=\frac{1-p_1p_2S_2(-A)z^2-p_1p_2S_3(-A)S_1(P)z^3}{(p_1-p_2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_2z)^n\right)}$$

$$=\frac{S_0(-A)-p_1p_2S_2(-A)z^2-p_1p_2S_3(-A)S_1(P)z^3}{(p_1-p_2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)(p_2z)^n\right)}.$$

و هو المطلوب .

- من النظرية 2.3 و بأخذ الأبجديتين $P=\{1\}$ و $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و نستنتج الخواص التالية :

خاصية 4.3:

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ أبجدية لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)z^n=\frac{1}{\prod_{a\in A}^{3}\left(1-az\right)}. \qquad (9.3)$$

خاصية 5.3:

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ أبجدية لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)z^n=\frac{z}{\prod_{a\in A}^{3}\left(1-az\right)}. \qquad (10.3)$$

نتيجة 2.3:

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ أبجدية لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)z^n=\frac{z^2}{\prod_{a\in A}^{3}\left(1-az\right)}. \qquad (11.3)$$

4.2 الدوال المولدة المرفقة ببعض الأعداد و كثيرات الحدود المتعامدة من الرتبة الثانية و الثالثة

1.4.2 الدوال المولدة المرفقة ببعض كثيرات الحدود المتعامدة الشهيرة من الرتبة الثانية

- فيما يأتي نقوم بتبديل p_1 بـ $[2p_1]$ و p_2 بـ $[-2p_2]$ في العلاقتين (6.3) و (7.3) .
  و بأخذ $\begin{cases}2\left(p_1-p_2\right)=px\\ 4p_1p_2=q\end{cases}$ و بضرب العلاقة (6.3) في α والعلاقة (7.3) في $\left(\left(\beta-p\alpha\right)x-\gamma\right)$ و جمعهما نتحصل على الخاصية التالية :

خاصية1.4:

ليكن n عدد طبيعي ، الدالة المولدة لكثيرات الحدود المعممة لفيبوناتشي تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n\left(x\right)z^n=\frac{\alpha+\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)z}{1-pxz-qz^2},$$

حيث : $P_n\left(x\right)=\alpha S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)+\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)$.

البرهان: (أنظر [6]).

من خلال الخاصية 1.4 يمكن استنتاج بعض النتائج الملخصة في الجدول أدناه:

كثيرات الحدود	p	q	α	β	γ	التابع التناظري
$T_n(x)$	2	-1	1	1	0	$T_n(x)=S_n(2p_1+[-2p_2])-xS_{n-1}(2p_1+[-2p_2])$
$U_n(x)$	2	-1	1	2	0	$U_n(x)=S_n(2p_1+[-2p_2])$
$V_n(x)$	2	-1	1	2	-1	$V_n(x)=S_n(2p_1+[-2p_2])-S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])$
$W_n(x)$	2	-1	1	2	1	$W_n(x)=S_n(2p_1+[-2p_2])+S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])$

الجدول1.2: التابع التناظري لبعض كثيرات الحدود الشهيرة من الرتبة الثانية.

2.4.2 الدوال المولدة المرفقة ببعض كثيرات الحدود المتعامدة الشهيرة من الرتبة الثالثة

- فيما يأتي نقوم بأخذ $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=x \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=\alpha \\ a_1a_2a_3=-\gamma \end{cases}$ في العلاقة (9.3)، نتحصل على الخاصية التالية :

خاصية 2.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لكثير الحدود 2- تشيبيتشاف المتعامد تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}_n(x)z^n=\frac{1}{1-xz+\alpha z^2+\gamma z^3},$$

حيث: $\hat{T}_n(x)=S_n(a_1+a_2+a_3)$.

3.4.2 الدوال المولدة المرفقة بالأعداد من الرتبة الثانية

- فيما يأتي نقوم بتبديل P_2 بـ $[-p_2]$ في العلاقتين (6.3) و (7.3) .

و بأخذ $\begin{cases} p_1-p_2=p \\ p_1p_2=q \end{cases}$ و ضرب العلاقة (6.3) في α وجمعها مع العلاقة (7.3) مضروبة في $(\beta-p\alpha)$ نتحصل على الخاصية التالية :

خاصية 3.4:

ليكن n عدد طبيعي ، الدالة المولدة لتعميم أعداد فيبوناتشي تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = \frac{\alpha + (\beta - p\alpha)x}{1 - px - qx^2},$$

حيث: $u_n = \alpha S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) + (\beta - p\alpha)S_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right)$.

البرهان: (أنظر [5]).

من خلال الخاصية 3.4 يمكن استنتاج بعض النتائج الملخصة في الجدول أدناه:

الأعداد	P	q	α	β	التابع التناظري
$F_{k,n}$	k	1	1	k	$S_n\left(p_1 + [-p_2]\right)$
$M_{k,n}$	$3k$	-2	0	1	$S_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right)$
$m_{k,n}$	$3k$	-2	2	$3k$	$2S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) - 3kS_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right)$
$L_{k,n}$	k	1	1	2	$2S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) - kS_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right)$
$Q_{k,n}$	2	k	2	2	$2S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) - 2S_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right)$

الجدول2.2: التابع التناظري لبعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية.

4.4.2 الدوال المولدة المرفقة بالأعداد من الرتبة الثالثة

- فيما يأتي نقوم بأخذ $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = a \\ a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = -b \\ a_1a_2a_3 = c \end{cases}$ و ضرب العلاقة (9.3) في α و العلاقة (10.3) في $(\beta - \alpha a)$ العلاقة (11.3) في $(\gamma - \alpha b - \beta a)$ و جمعهم ، نتحصل على الخاصية التالية :

خاصية4.4:

ليكن n عدد طبيعي ، الدالة المولدة لتعميم أعداد تريبوناتشي تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n z^n = \frac{\alpha + (\beta - \alpha a)z + (\gamma - \alpha b - \beta a)z^2}{1 - az - bz^2 - cz^3},$$

حيث: $w_n = \alpha S_n(a_1 + a_2 + a_3) + (\beta - \alpha a)S_{n-1}(a_1 + a_2 + a_3) + (\gamma - \alpha b - \beta a)S_{n-2}(a_1 + a_2 + a_3)$.

البرهان : (أنظر [4]).

من خلال الخاصية 4.4 يمكن استنتاج بعض النتائج الملخصة في الجدول أدناه:

أعداد	a	b	c	α	β	γ	التابع التناظري
$J_n^{(3)}$	1	1	2	0	1	1	$S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)$
$j_n^{(3)}$	1	1	2	2	1	5	$2S_n(a_1+a_2+a_3)-S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)+2S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)$
N_n	1	0	1	0	1	1	$S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)$

الجدول3.2: التابع التناظري لبعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثالثة.

الخاتمة:

ختاما فإننا قمنا في هذا الفصل بالتطرق إلى التوابع التناظرية الأولية و التامة و بعض خصائصها، كما قمنا بإعطاء التوابع التناظرية لبعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية و الثالثة و كثيرات الحدود 2-لتشيبتشاف وكثيرات الحدود لتريبوناتشي المعممة.

المــــــــــــــراجع:

المراجع باللغة العربية:

[1] ع. بوسعيود، مطبوعة البيداغوجية، جامعة محمد الصديق بن يحيى جيجل، سبتمبر 2018.

[2] و. بن عميرة ، الدوال المولدة لجداءات أعداد ثريبوناتشي مع بعض الأعداد الشهيرة ، مذكرة التخرج ماستر، جامعة جيجل 2020.

المراجع باللغة الأجنبية:

[3] Kh. Boubellouta**,** A. Boussayoud**,** M. Kerada, Symmetric Functions for k-Fibonacci Numbers and Orthogonal Polynomials, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*.6(3), 98-102, (2018).

[4] A. Boussayoud**,** M. Chelgham, S. Bougaba, On Some Identities and Generating Functions for Mersenne Numbers and Polynomials, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*.6(3), 93-97, (2018).

[5] S. Boughaba **,** A .Boussayoud**,** M. Kerada **,** Construction of Symmetric Functions of Generalized Fibonacci Numbers, *Tamap Journal of Mathematics and Statistics*.3, 1-7, (2019).

[6] H. Merzouk,**A**. Boussayoud**,** M. Chelgham, Symmetric Functions of Generalized Polynomials of Second Order, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*.7(5), 135-139, (2019).

الفصل الثالث

في هذا الفصل سنتطرق إلى دراسة تأثير المؤثر $\delta_{p_1p_2}^{2-k}$ على السلسلة الشكلية القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)p_1^n z^n$ الذي يسمح لنا بالحصول على الدوال المولدة لكل من جداءات كثيرات الحدود لتشيبيتشاف المعممة مع أعداد k-فيبوناتشي ، k-مارسان ، k-مارسان لوكاس وكذلك الدوال المولدة لكل من جداء كثير الحدود 2- تشيبيشاف المتعامدة مع الأعداد (k -مارسان، k-مارسان لوكاس، k-لوكاس ، k-بال لوكاس) ومع كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من الأنواع الأربعة و كذلك الدوال المولدة لأعداد تريبوناتشي المعممة مع بعض الأعداد و كثيرات الحدود المذكورة سابقا وذلك بإجراء تطبيقات على نظرية 2.1 المقترحة أدناه وهذا في حالة الأبجدية $P=\{p_1,p_2\}$

و $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و التي تمكننا من الحصول على بعض الدوال المولدة الجديدة.

1.3 مفاهيم أساسية

نظرية 1.1:

لتكن $P=\{p_1,p_2\}$ و $A=\{a_1,a_2,.....,a_n\}$ أبجديتين و k عدد طبيعي، لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)S_{n-k+1}(p_1+p_2)z^n = \frac{S_{1-k}(p_1+p_2)-e_1(A)p_1p_2S_{-k}(p_1+p_2)z}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_2^n z^n\right)} - \frac{p_1^{2-k}p_2^{2-k}z^{3-k}\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-k+3}(-A)S_n(p_1+p_2)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_2^n z^n\right)}. \quad (1.1)$$

البرهان:

❖ بإدخال المؤثر $\delta_{p_1p_2}^{2-k}$ على السلسلة القابلة للقب $f(p_1z)=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)p_1^n z^n$ فإن الطرف الأيسر للعلاقة (1.1) يكتب على الشكل :

$$\delta_{p_1p_2}^{2-k} f(p_1) = \frac{p_1^{2-k}f(p_1)-p_2^{2-k}f(p_2)}{p_1-p_2}$$

$$= \frac{p_1^{2-k}\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)p_1^n z^n - p_2^{2-k}\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)p_2^n z^n}{p_1-p_2}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)p_1^{n-k+2}z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)p_2^{n-k+2}z^n}{p_1-p_2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\left(\frac{p_1^{n-k+2}-p_2^{n-k+2}}{p_1-p_2}\right)z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) S_{n-k+1}(p_1+p_2) z^n .$$

❖ من جهة أخرى بإدخال المؤثر $\delta_{p_1p_2}^{2-k}$ على السلسلة القابلة للقلب $f(p_1z)=\frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)p_1^n z^n}$

فإن الطرف الأيمن للعلاقة (1.1) يكتب على الشكل :

$$\delta_{p_1p_2}^{2-k} f(p_1)=\delta_{p_1p_2}^{2-k}\left(\frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) p_1^n z^n}\right)$$

$$=\frac{\frac{p_1^{2-k}}{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) p_1^n z^n}-\frac{p_2^{2-k}}{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) p_2^n z^n}}{p_1-p_2}$$

$$=\frac{p_1^{2-k}\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_2^n z^n-p_2^{2-k}\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_1^n z^n}{(p_1-p_2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_2^n z^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\frac{p_1^{2-k}p_2^n-p_2^{2-k}p_1^n}{(p_1-p_2)} z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_2^n z^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_1^n p_2^n\left(\frac{p_1^{2-k-n}-p_2^{2-k-n}}{(p_1-p_2)}\right) z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_2^n z^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_1^n p_2^n S_{1-k-n}(p_1+p_2) z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_2^n z^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{1-k} S_n(-A) p_1^n p_2^n S_{1-k-n}(p_1+p_2) z^n+\sum_{n=3-k}^{+\infty} S_n(-A) p_1^n p_2^n S_{1-k-n}(p_1+p_2) z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) p_2^n z^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{1-k}S_n(-A)p_1^np_2^nS_{1-k-n}(p_1+p_2)z^n+\sum_{n=3-k}^{+\infty}S_n(-A)p_1^np_2^n\left(\frac{p_1^{2-k-n}-p_2^{2-k-n}}{(p_1-p_2)}\right)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nz^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{1-k}S_n(-A)p_1^np_2^nS_{1-k-n}(p_1+p_2)z^n-\sum_{n=3-k}^{+\infty}S_n(-A)p_1^{2-k}p_2^{2-k}\left(\frac{p_1^{n+k-2}-p_2^{n+k-2}}{(p_1-p_2)}\right)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nz^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{1-k}S_n(-A)p_1^np_2^nS_{1-k-n}(p_1+p_2)z^n-\sum_{n=3-k}^{+\infty}S_n(-A)p_1^{2-k}p_2^{2-k}S_{n+k-3}(p_1+p_2)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nz^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{1-k}S_n(-A)p_1^np_2^nS_{1-k-n}(p_1+p_2)z^n-\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+k-3}(-A)p_1^{2-k}p_2^{2-k}S_n(p_1+p_2)z^{n+3-k}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nz^n\right)}$$

$$=\frac{S_{1-k}(p_1+p_2)-e_1(A)p_1p_2S_{-k}(p_1+p_2)z-p_1^{2-k}p_2^{2-k}z^{3-k}\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+k-3}(-A)S_n(p_1+p_2)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_1^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(-A)p_2^nz^n\right)}.$$

و هو المطلوب .

- من النظرية 1.1 و بأخذ الأبجديتين $P=\{2p_1,-2p_2\}$ و $A=\{a_1,-a_2\}$ و $k\in\{0,1,2\}$ نستنتج الخاصيتين التاليتين :

خاصية 1.1:

لتكن $P=\{2p_1,-2p_2\}$ و $A=\{a_1,-a_2\}$ أبجديتين لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])z^n=\frac{1-4p_1p_2a_1a_2z^2}{(1-2p_1a_1z)(1+2p_2a_1z)(1+2p_1a_2z)(1-2p_2a_2z)}. \quad (2.1)$$

من العلاقة (3.1) نستنتج النتيجة التالية :

نتيجة1.1:

لتكن $P=\{2p_1,-2p_2\}$ و $A=\{a_1,-a_2\}$ أبجديتين لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])z^n=\frac{z-4p_1p_2a_1a_2z^3}{(1-2p_1a_1z)(1+2p_2a_1z)(1+2p_1a_2z)(1-2p_2a_2z)}. \quad (3.1)$$

خاصية 2.1:

لتكن $P=\{2p_1,-2p_2\}$ و $A=\{a_1,-a_2\}$ أبجديتين لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n=\frac{(a_1-a_2)z+2(p_1-p_2)a_1a_2z^2}{(1-2p_1a_1z)(1+2p_2a_1z)(1+2p_1a_2z)(1-2p_2a_2z)}. \quad (4.1)$$

2.3 الدوال المولدة الجديدة لجداء بعض كثيرات الحدود المتعامدة مع بعض الأعداد الشهيرة

1.2.3 الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود المتعامدة لفيبوناتشي المعممة مع أعداد k-مارسان

نظرية1.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n}P_n(x)z^n=\frac{\left[2\alpha(p_1-p_2)+((\beta-\alpha p)x+\gamma)\right]z+4\alpha(a_1-a_2)p_1p_2z^2-4((\beta-\alpha p)x+\gamma)p_1p_2a_1a_2z^3}{q(x)}. \quad (1.2)$$

حيث:

$$q(x)=1-2(p_1-p_2)(a_1-a_2)z-4\left[p_1p_2\left((a_1-a_2)^2+2a_1a_2\right)+a_1a_2(p_1-p_2)^2\right]z^2$$
$$-8a_1a_2p_1p_2(a_1-a_2)(p_1-p_2)z^3+16(a_1a_2)^2(p_1p_2)^2z^4.$$

البرهان :

لدينا:

$$P_n(x)=\alpha S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+((\beta-\alpha p)x+\gamma)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right),$$

و

$$M_{k,n}=S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right).$$

إذن :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n}P_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\alpha S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+((\beta-\alpha p)x+\gamma)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)z^n$$
$$=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)z^n$$
$$+((\beta-\alpha p)x+\gamma)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)z^n$$

$$=\alpha\frac{2(p_1-p_2)z+4(a_1-a_2)p_1p_2z^2}{(1-2p_1a_1z)(1+2p_2a_1z)(1+2p_1a_2z)(1-2p_2a_2z)}$$

$$+((\beta-\alpha p)x+\gamma)\frac{z-4p_1p_2a_1a_2z^3}{(1-2p_1a_1z)(1+2p_2a_1z)(1+2p_1a_2z)(1-2p_2a_2z)}$$

$$=\frac{\left[2\alpha(p_1-p_2)+((\beta-\alpha p)x+\gamma)\right]z+4\alpha(a_1-a_2)p_1p_2z^2-4((\beta-\alpha p)x+\gamma)p_1p_2a_1a_2z^3}{q(x)}.$$

حيث:

$$q(x)=1-2(p_1-p_2)(a_1-a_2)z-4\left[p_1p_2\left((a_1-a_2)^2+2a_1a_2\right)+a_1a_2(p_1-p_2)^2\right]z^2$$

$$-8a_1a_2p_1p_2(a_1-a_2)(p_1-p_2)z^3+16(a_1a_2)^2(p_1p_2)^2z^4.$$

و هو المطلوب.

- بأخذ $\begin{cases}p_1-p_2=x\\4p_1p_2=-1\end{cases}$ و $\begin{cases}a_1-a_2=3k\\a_1a_2=-2\end{cases}$ في العلاقة (1.2) يمكن الحصول على النتائج المدونة في الجدول التالي:

الجداءات	p	q	α	β	γ	الدالة المولدة
$\sum_{n=0}^{+\infty}M_{k,n}T_n(x)z^n$	2	-1	1	1	0	$\frac{xz-3kz^2+2xz^3}{1-6kz-(4-9k^2-8x^2)z^2-12xkz^3+4z^4}$
$\sum_{n=0}^{+\infty}M_{k,n}U_n(x)z^n$	2	-1	1	2	0	$\frac{2xz-3kz^2}{1-6kz-(4-9k^2-8x^2)z^2-12xkz^3+4z^4}$
$\sum_{n=0}^{+\infty}M_{k,n}V_n(x)z^n$	2	-1	1	2	-1	$\frac{(2x-1)z-3kz^2+2z^3}{1-6kz-(4-9k^2-8x^2)z^2-12xkz^3+4z^4}$
$\sum_{n=0}^{+\infty}M_{k,n}W_n(x)z^n$	2	-1	1	2	1	$\frac{(2x+1)z-3kz^2-2z^3}{1-6kz-(4-9k^2-8x^2)z^2-12xkz^3+4z^4}$

الجدول 1.3 الدوال المولدة لجداء k-مارسان مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من الأنواع الأربعة.

2.2.3 الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود المتعامدة لفيبوناتشي المعممة مع أعداد k- مارسان لوكاس

نظرية 2.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,n} P_n(x) z^n = \frac{2\alpha+\left[\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\left(2-3k\right)-6\alpha k\left(p_2-p_2\right)\right]z}{q(x)} - \frac{4\left[\alpha p_1 p_2\left(a_1a_2+3k\left(a_1-a_2\right)\right)-\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\left(p_2-p_2\right)a_1a_2\right]z^2}{q(x)} + \frac{12k\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)p_1p_2a_1a_2z^3}{q(x)}. \tag{2.2}$$

حيث :

$$q(x)=1-2\left(p_1-p_2\right)\left(a_1-a_2\right)z-4\left[p_1p_2\left(\left(a_1-a_2\right)^2+2a_1a_2\right)+a_1a_2\left(p_1-p_2\right)^2\right]z^2 -8a_1a_2p_1p_2\left(a_1-a_2\right)\left(p_1-p_2\right)z^3+16\left(a_1a_2\right)^2\left(p_1p_2\right)^2z^4.$$

البرهان:

لدينا:

$$P_n(x)=\alpha S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)+\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right),$$

و

$$m_{k,n}=2S_n\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)-3kS_{n-1}\left(a_1+\left[-a_2\right]\right).$$

إذن:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,n}P_n(x)z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\alpha S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)+\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)\right)\\ &\quad \left(2S_n\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)-3kS_{n-1}\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)\right)z^n\\ &= 2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)S_n\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)z^n\\ &\quad -3\alpha k\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)S_{n-1}\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)z^n\\ &\quad +2\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)S_n\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)z^n\\ &\quad -3k\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)S_{n-1}\left(a_1+\left[-a_2\right]\right)z^n\end{aligned}$$

$$=2\alpha\frac{1-4p_1p_2a_1a_2z^2}{(1-2p_1a_1z)(1+2p_2a_1z)(1+2p_1a_2z)(1-2p_2a_2z)}$$
$$-3\alpha k\frac{2(p_1-p_2)z+4(a_1-a_2)p_1p_2z^2}{(1-2p_1a_1z)(1+2p_2a_1z)(1+2p_1a_2z)(1-2p_2a_2z)}$$
$$+2((\beta-\alpha p)x+\gamma)\frac{(a_1-a_2)z+2(p_1-p_2)a_1a_2z^2}{(1-2p_1a_1z)(1+2p_2a_1z)(1+2p_1a_2z)(1-2p_2a_2z)}$$
$$-3k((\beta-\alpha p)x+\gamma)\frac{z-4p_1p_2a_1a_2z^3}{(1-2p_1a_1z)(1+2p_2a_1z)(1+2p_1a_2z)(1-2p_2a_2z)}$$

$$=\frac{2\alpha+\left[((\beta-\alpha p)x+\gamma)(2-3k)-6\alpha k(p_2-p_2)\right]z}{q(x)}$$
$$-\frac{4\left[\alpha p_1p_2(a_1a_2+3k(a_1-a_2))-((\beta-\alpha p)x+\gamma)(p_2-p_2)a_1a_2\right]z^2}{q(x)}$$
$$+\frac{12k((\beta-\alpha p)x+\gamma)p_1p_2a_1a_2z^3}{q(x)}.$$

و هو المطلوب.

- بأخذ $\begin{cases}p_1-p_2=x\\4p_1p_2=-1\end{cases}$ و $\begin{cases}a_1-a_2=3k\\a_1a_2=-2\end{cases}$ في العلاقة (2.2) يمكن الحصول على النتائج المدونة في الجدول التالي:

الجداءات	p	q	α	β	γ	الدالة المولدة
$\sum_{n=0}^{+\infty}m_{k,n}T_n(x)z^n$	2	-1	1	1	0	$\frac{2-9kxz+(8x^2+9k^2-4)z^2-6kx^3}{1-6kz-(4-9k^2-8x^2)z^2-12kxz^3+4z^4}$
$\sum_{n=0}^{+\infty}m_{k,n}U_n(x)z^n$	2	-1	1	2	0	$\frac{2-6kxz+(9k^2-4)z^2}{1-6kz-(4-9k^2-8x^2)z^2-12kxz^3+4z^4}$
$\sum_{n=0}^{+\infty}m_{k,n}V_n(x)z^n$	2	-1	1	2	-1	$\frac{2-3k(2x+1)z+(8x+9k^2-4)z^2-6kx^3}{1-6kz-(4-9k^2-8x^2)z^2-12kxz^3+4z^4}$
$\sum_{n=0}^{+\infty}m_{k,n}W_n(x)z^n$	2	-1	1	2	-1	$\frac{2-3k(2x-1)z+(9k^2-8x-4)z^2+6kx^3}{1-6kz-(4-9k^2-8x^2)z^2-12kxz^3+4z^4}$

الجدول 2.3 الدوال المولدة لجداءات k- مارسان لوكاس مع كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من الأنواع الأربعة.

3.2.3 الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود المتعامدة المعممة لفيبوناتشي مع أعداد k-فيبوناتشي

نظرية3.2:

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{k,n}P_n(x)z^n = \frac{\left[2\alpha(p_1-p_2)+((\beta-\alpha p)x+\gamma)\right]z+4\alpha(a_1-a_2)p_1p_2z^2-4((\beta-\alpha p)x+\gamma)p_1p_2a_1a_2z^3}{q(x)}. \quad (3.2)$$

حيث:

$$q(x)=1-2(p_1-p_2)(a_1-a_2)z-4\left[p_1p_2\left((a_1-a_2)^2+2a_1a_2\right)+a_1a_2(p_1-p_2)^2\right]z^2$$
$$-8a_1a_2p_1p_2(a_1-a_2)(p_1-p_2)z^3+16(a_1a_2)^2(p_1p_2)^2z^4.$$

البرهان :

لدينا:

$$P_n(x)=\alpha S_n(2p_1+[-2p_2])+((\beta-\alpha p)x+\gamma)S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]),$$

و

$$F_{k,n}=S_n(a_1+[-a_2]).$$

إذن :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{k,n}P_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+[-a_2])\left(\alpha S_n(2p_1+[-2p_2])+((\beta-\alpha p)x+\gamma)S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)z^n$$
$$=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+[-a_2])S_n(2p_1+[-2p_2])z^n$$
$$+((\beta-\alpha p)x+\gamma)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+[-a_2])S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])z^n$$
$$=\alpha\frac{1-4p_1p_2a_1a_2z^2}{(1-2p_1a_1z)(1+2p_2a_1z)(1+2p_1a_2z)(1-2p_2a_2z)}$$
$$+((\beta-\alpha p)x+\gamma)\frac{(a_1-a_2)z+2(p_1-p_2)a_1a_2z^2}{(1-2p_1a_1z)(1+2p_2a_1z)(1+2p_1a_2z)(1-2p_2a_2z)}$$
$$=\frac{\alpha+((\beta-\alpha p)x+\gamma)(a_1-a_2)z+a_1a_2\left(2((\beta-\alpha p)x+\gamma)(p_1-p_2)-4p_1p_2\right)z^2}{q(x)}.$$

و هو المطلوب.

- بأخذ $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$ و $\begin{cases} a_1-a_2=k \\ a_1a_2=1 \end{cases}$ في العلاقة (3.2) يمكن الحصول على النتائج المدونة في الجدول التالي:

الجداءات	p	q	α	β	γ	الدالة المولدة
$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{k,n}T_n(x)z^n$	2	-1	1	1	0	$\frac{1-kxz-(1-2x)z^2}{1-2kxz-(4x^2-k^2-2)z^2+2kxz^3+z^4}$
$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{k,n}U_n(x)z^n$	2	-1	1	2	0	$\frac{1+z^2}{1-2kxz-(4x^2-k^2-2)z^2+2kxz^3+z^4}$
$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{k,n}V_n(x)z^n$	2	-1	1	2	-1	$\frac{1-kz-(2x-1)z^2}{1-2kxz-(4x^2-k^2-2)z^2+2kxz^3+z^4}$
$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{k,n}W_n(x)z^n$	2	-1	1	2	1	$\frac{1+kz+(2x+1)z^2}{1-2kxz-(4x^2-k^2-2)z^2+2kxz^3+z^4}$

الجدول 3.3 الدوال المولدة لجداءات k- فيبوناتشي مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من النوع الرابع

- من النظرية 2.1 و بأخذ الأبجديتين $P=\{p_1,p_2\}$ و $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $k\in\{0,1,2\}$ نستنتج الخواص التالية:

<u>خاصية 1.2:</u>

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ أبجديتين لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n+1}(p_1+p_2)z^n=\frac{p_1+p_2-p_1p_2(a_1+a_2+a_3)z+p_1^2p_2^2a_1a_2a_3z^3}{\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_2z)}. \quad (4.2)$$

من العلاقة (4.2) نستنتج النتيجة التالية :

<u>نتيجة1.2:</u>

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ أبجديتين لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)S_n(p_1+p_2)z^n=\frac{(p_1+p_2)z-p_1p_2(a_1+a_2+a_3)z^2+p_1^2p_2^2a_1a_2a_3z^4}{\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_2z)}. \quad (5.2)$$

<u>خاصية 2.2:</u>

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ أبجديتين لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)S_n(p_1+p_2)z^n=\frac{1-p_1p_2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)z^2+p_1p_2(p_1+p_2)a_1a_2a_3z^3}{\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_2z)}. \quad (6.2)$$

من العلاقة (6.2) نستنتج النتيجة التالية :

<u>نتيجة2.2:</u>

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ أبجديتين لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2+a_3) S_{n-1}(p_1+p_2) z^n = \frac{z - p_1p_2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)z^3 + p_1p_2(p_1+p_2)a_1a_2a_3z^4}{\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_2z)}. \quad (7.2)$$

خاصية 3.2:

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,p_2\}$ أبجديتين لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3) S_{n-1}(p_1+p_2) z^n = \frac{(a_1+a_2+a_3)z - (p_1+p_2)(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)z^2}{\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_2z)} \quad (8.2)$$

$$+\frac{\left((p_1+p_2)^2 - p_1p_2\right)a_1a_2a_3z^3}{\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_2z)}.$$

3.3 الدوال المولدة لجداء كثيرات الحدود 2-تشيبتشاف المتعامدة مع بعض كثيرات الحدود المتعامدة و الأعداد الشهيرة

1.3.3 الدوال المولدة لجداء كثيرات الحدود 2- تشيبتشاف المتعامدة مع بعض الأعداد الشهيرة

- فيما يأتي نقوم بتبديل p_2 بـ $[-p_2]$ في العلاقتين (6.2) و (8.2) و بأخذ $\begin{cases} a_1+a_2+a_3 = x \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3 = \alpha_1 \\ a_1a_2a_3 = -\gamma \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2 = p \\ p_1p_2 = q \end{cases}$ نتحصل على:

خاصية 1.3:

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,-p_2\}$ أبجديتين حيث :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3) S_n(p_1+[-p_2]) z^n = \frac{1-q\alpha_1z^2+pq\gamma z^3}{\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1+a_ip_2z)}.$$

خاصية 2.3:

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{p_1,-p_2\}$ أبجديتين لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3) S_{n-1}(p_1+[-p_2]) z^n = \frac{xz - p\alpha_1z^2 - \gamma(p^2+q)z^3}{\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1+a_ip_2z)}.$$

نظرية 1.3:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة لجداء تعميم أعداد فيبوناتشي مع كثير الحدود 2-تشيبتشاف تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}_n(x)u_nz^n=\frac{\alpha+(\beta-p\alpha)xz+\alpha_1\left(q\alpha-(\beta-p\alpha)p\right)z^2+\left(pq\alpha-(\beta-p\alpha)\left(p^2+q\right)\right)\gamma z^3}{f(z)}.$$

حيث:

$$f(z)=1-pxz+\left(\alpha_1\left(p^2-2q\right)-qx^2\right)z^2+p\left(\gamma\left(p^2+3q\right)+\alpha_1qx\right)z^3$$

$$+q\left(\gamma x\left(p^2+2q\right)+\alpha_1^2q\right)z^4+\alpha_1\gamma pq^2z^5-\gamma^2q^3z^6.$$

البرهان:

لدينا :

$$\hat{T}_n(x)=S_n(a_1+a_2+a_3)$$

إذن :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}_n(x)u_nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(a_1+a_2+a_3)\left(\alpha S_n\left(p_1+[-p_2]\right)+(\beta-p\alpha)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right)z^n$$

$$=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(a_1+a_2+a_3)S_n(p_1+[-p_2])z^n$$

$$+(\beta-p\alpha)\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$=\alpha\frac{1-q\alpha_1z^2+pq\gamma z^3}{\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_2z)}$$

$$+(\beta-p\alpha)\frac{xz-p\alpha_1z^2-\gamma\left(p^2+q\right)z^3}{\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1-a_ip_2z)}$$

$$=\frac{\alpha+(\beta-p\alpha)xz+\alpha_1\left(q\alpha-(\beta-p\alpha)p\right)z^2+\left(pq\alpha-(\beta-p\alpha)\left(p^2+q\right)\right)\gamma z^3}{f(z)}.$$

و هو المطلوب.

- من خلال النظرية 1.3 يمكن استنتاج الدوال المولدة لجداء بعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية مع كثير الحدود 2- تشيبتشاف المتعامد .

نتيجة 1.3:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد k-مارسان مع كثير الحدود 2-تشيبتشاف المتعامدة تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}(x)M_{k,n}z^{n}=\frac{xz-3k\alpha_1 z^{2}-\gamma\left(9k^{2}-2\right)z^{3}}{f_1(z)}.$$

حيث:

$$f_1(z)=1-3kxz+\left(\alpha_1\left(9k^{2}-4\right)+2x^{2}\right)z^{2}+3k\left(\gamma\left(9k^{2}-6\right)-2\alpha_1 x\right)z^{3}$$
$$-2\left(\gamma x\left(9k^{2}-4\right)-2\alpha_1^{2}\right)z^{4}+12\alpha_1\gamma kz^{5}+8\gamma^{2}z^{6}.$$

نتيجة 2.3:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد k-مارسان لوكاس مع كثير الحدود 2-تشيبتشاف تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}(x)m_{k,n}z^{n}=\frac{2-3xz+\alpha_1\left(9k^{2}-4\right)z^{2}+3k\gamma\left(9k^{2}-13\right)z^{3}}{f_2(z)}.$$

حيث:

$$f_2(z)=1-3kxz+\left(\alpha_1\left(9k^{2}-4\right)+2x^{2}\right)z^{2}+3k\left(\gamma\left(9k^{2}-6\right)-2\alpha_1 x\right)z^{3}$$
$$-2\left(\gamma x\left(9k^{2}-4\right)-2\alpha_1^{2}\right)z^{4}+12\alpha_1\gamma kz^{5}+8\gamma^{2}z^{6}.$$

نتيجة 3.3:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد k-لوكاس مع كثير الحدود 2- تشيبتشاف المتعامد تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}(x)L_{k,n}z^{n}=\frac{2-kxz+\alpha_1\left(k^{2}+2\right)z^{2}+k\gamma\left(k^{2}+3\right)z^{3}}{f_3(z)}.$$

حيث:

$$f_3(z)=1-kxz+\left(\alpha_1\left(9k^{2}+2\right)-x^{2}\right)z^{2}+k\left(\gamma\left(k^{2}-3\right)+\alpha_1 x\right)z^{3}$$
$$+\left(\gamma x\left(k^{2}+2\right)+\alpha_1^{2}\right)z^{4}+\alpha_1\gamma kz^{5}-\gamma^{2}z^{6}.$$

نتيجة 4.3:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة لجداء أعداد k-بال لوكاس مع كثير الحدود 2- تشيبتشاف المتعامد تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}(x)Q_{k,n}z^n=\frac{2-2xz+2\alpha_1(k+2)z^2+2\gamma(3k+4)z^3}{f_4(z)}.$$

حيث:

$$f_4(z)=1-2xz+\left(\alpha_1(4+2k)-kx^2\right)z^2+2\left(\gamma(4+3k)+\alpha_1kx\right)z^3$$
$$+k\left(\gamma x(4+2k)+k\alpha_1^2\right)z^4+2\alpha_1\gamma k^2z^5-\gamma^2k^3z^6.$$

2.3.3 الدوال المولدة لجداء كثيرات الحدود 2- تشيبتشاف المتعامدة مع بعض كثيرات الحدود الشهيرة

- فيما يأتي نقوم بتبديل p_1 بـ $[2p_1]$ و p_2 بـ $[-2p_2]$ في العلاقتين (6.2) و (8.2) و بأخذ $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=x\\a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=\alpha_1\\a_1a_2a_3=-\gamma_1\end{cases}$ و $\begin{cases}p_1-p_2=y\\4p_1p_2=-1\end{cases}$ نتحصل على الخواص التالية:

خاصية 3.3:

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{2p_1,-2p_2\}$ أبجديتين لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(a_1+a_2+a_3)S_n(2p_1+[-2p_2])z^n=\frac{1-\alpha_1z^2-2\gamma_1yz^3}{\prod_{i=1}^{3}(1-2a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1+2a_ip_2z)}.$$

خاصية 4.3:

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $P=\{2p_1,-2p_2\}$ أبجديتين لدينا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])z^n=\frac{xz-2\alpha_1yz^2-\gamma_1\left(4y^2-1\right)z^3}{\prod_{i=1}^{3}(1-2a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1+2a_ip_2z)}.$$

نظرية 2.3 :

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود لتشيبشاف المعممة مع كثير الحدود 2-تشيبتشاف المتعامدة تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}_n(x)P_n(x)z^n=\frac{\alpha+((\beta-\alpha p)x+\gamma)xz-\alpha_1\left(2y\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)+\alpha\right)z^2}{g(z)}$$

$$-\frac{\gamma_1\left(2\alpha y+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)\left(4y^2-1\right)\right)z^3}{g(z)}.$$

حيث:

$$g(z)=1-2xyz+\left(2\alpha_1\left(2y^2-1\right)+x^2\right)z^2+\left(2\gamma_1 y\left(4y^2-3\right)-2\alpha_1 xy\right)z^3$$
$$-\left(2\gamma_1 x\left(2y^2-1\right)-\alpha_1^2\right)z^4+2\alpha_1\gamma_1 yz^5+\gamma_1^2 z^6.$$

البرهان:

لدينا:

$$P_n(x)=\alpha S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right),$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}_n(x)P_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)\left(\alpha S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right)$$

$$=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$

$$+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$

$$=\alpha\frac{1-\alpha_1 z^2-2\gamma_1 yz^3}{\prod_{i=1}^{3}(1-2a_i p_1 z)\prod_{i=1}^{3}(1+2a_i p_2 z)}$$

$$+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)\frac{xz-2\alpha_1 yz^2-\gamma_1\left(4y^2-1\right)z^3}{\prod_{i=1}^{3}(1-2a_i p_1 z)\prod_{i=1}^{3}(1+2a_i p_2 z)}$$

$$=\frac{\alpha+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)xz-\alpha_1\left(2y\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)+\alpha\right)z^2-\gamma_1\left(2\alpha y+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)\left(4y^2-1\right)\right)z^3}{g(z)}.$$

و هو المطلوب.

- من خلال النظرية 2.3 يمكن استنتاج الدوال المولدة لجداء بعض كثيرات الحدود الشهيرة من الرتبة الثانية مع كثير الحدود 2- تشيبتشاف المتعامدة .

نتيجة 5.3:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الاول مع كثير الحدود 2- تشيبتشاف تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}_n(x)T_n(y)z^n=\frac{1-xyz+\alpha_1\left(2y^2-1\right)z^2+\gamma_1\left(4y^2-3\right)yz^3}{g(z)}.$$

حيث:

$$g(z)=1-2xyz+\left(2\alpha_1\left(2y^2-1\right)+x^2\right)z^2+\left(2\gamma_1 y\left(4y^2-3\right)-2\alpha_1 xy\right)z^3 \\ -\left(2\gamma_1 x\left(2y^2-1\right)-\alpha_1^2\right)z^4+2\alpha_1\gamma_1 yz^5+\gamma_1^2 z^6.$$

نتيجة 6.3:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثاني مع كثير الحدود 2- تشيبتشاف المتعامد تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}_n(x)U_n(y)z^n=\frac{1-\alpha_1 z^2-2\gamma_1 yz^3}{g(z)}.$$

حيث:

$$g(z)=1-2xyz+\left(2\alpha_1\left(2y^2-1\right)+x^2\right)z^2+\left(2\gamma_1 y\left(4y^2-3\right)-2\alpha_1 xy\right)z^3 \\ -\left(2\gamma_1 x\left(2y^2-1\right)-\alpha_1^2\right)z^4+2\alpha_1\gamma_1 yz^5+\gamma_1^2 z^6.$$

نتيجة 7.3:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثالث مع كثير الحدود 2- تشيبتشاف المتعامد تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}_n(x)V_n(y)z^n=\frac{1-xz+\alpha_1(2y-1)z^2+\gamma_1\left(4y^2-2y-1\right)z^3}{g(z)}.$$

حيث:

$$g(z)=1-2xyz+\left(2\alpha_1\left(2y^2-1\right)+x^2\right)z^2+\left(2\gamma_1 y\left(4y^2-3\right)-2\alpha_1 xy\right)z^3 \\ -\left(2\gamma_1 x\left(2y^2-1\right)-\alpha_1^2\right)z^4+2\alpha_1\gamma_1 yz^5+\gamma_1^2 z^6.$$

نتيجة 8.3:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الرابع مع كثير الحدود 2- تشيبتشاف المتعامدة تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{T}_n(x)W_n(y)z^n=\frac{1+xz-\alpha_1(2y+1)z^2-\gamma_1\left(4y^2+2y-1\right)z^3}{g(z)}.$$

حيث:

$$g(z)=1-2xyz+\left(2\alpha_1\left(2y^2-1\right)+x^2\right)z^2+\left(2\gamma_1 y\left(4y^2-3\right)-2\alpha_1 xy\right)z^3$$
$$-\left(2\gamma_1 x\left(2y^2-1\right)-\alpha_1^2\right)z^4+2\alpha_1\gamma_1 yz^5+\gamma_1^2 z^6.$$

4.3 الدوال المولدة لجداء أعداد ثريبوناتشي المعممة مع بعض الأعداد و كثيرات الحدود المتعامدة الشهيرة

1.4.3 الدوال المولدة لجداء أعداد نارايانا من الرتبة الثالثة مع كثيرات الحدود المتعامدة لتشيبتشاف المعممة

- فيما يأتي نقوم بتبديل p_1 بـ $[2p_1]$ و p_2 بـ $[-2p_2]$ في العلاقتين (5.2) و (7.2) و بأخذ $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=0 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$ نتحصل على النظرية التالية :

<u>نظرية 1.4:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء نارايانا مع كثيرات الحدود لتشيبيتشاف المعممة تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n P_n(x) z^n=\frac{\left(2\alpha x+((\beta-\alpha p)x+\gamma)\right)z-\alpha z^2+\left(\alpha+2x\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)\right)z^4}{1-2xz+z^2-\left(8x^3-6x\right)z^3+\left(4x^2-2\right)z^4+z^6}.$$

البرهان:

لدينا:

$$P_n(x)=\alpha S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right),$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n P_n(x) z^n=\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)\left(\alpha S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right)z^n$$
$$=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$
$$+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$

$$= \alpha \frac{2xz - z^2 + z^4}{\prod_{i=1}^{3}(1-2a_i p_1 z)\prod_{i=1}^{3}(1+2a_i p_2 z)}$$

$$+((\beta - \alpha p)x + \gamma)\frac{z + 2xz^4}{\prod_{i=1}^{3}(1-2a_i p_1 z)\prod_{i=1}^{3}(1+2a_i p_2 z)}$$

$$= \frac{(2\alpha x + ((\beta-\alpha p)x+\gamma))z - \alpha z^2 + (\alpha + 2x((\beta-\alpha p)x+\gamma))z^4}{1-2xz+z^2-(8x^3-6x)z^3+(4x^2-2)z^4+z^6}.$$

و هو المطلوب .

- من خلال النظرية 1.4 يمكن استنتاج الدوال المولدة لجداء أعداد نارايانا من الرتبة الثالثة مع بعض كثيرات الحدود لتشيبيتشاف من الأنواع الأربعة .

<u>نتيجة 1.4:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد نارايانا من الرتبة الثالثة مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الأول تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n T_n(x) z^n = \frac{xz - z^2 + (1-2x^2)z^4}{1-2xz+z^2-(8x^3-6x)z^3+(4x^2-2)z^4+z^6}.$$

<u>نتيجة 2.4:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد نارايانا من الرتبة الثالثة مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثاني تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n U_n(x) z^n = \frac{2xz - z^2 + z^4}{1-2xz+z^2-(8x^3-6x)z^3+(4x^2-2)z^4+z^6}.$$

<u>نتيجة 3.4:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد نارايانا من الرتبة الثالثة مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n V_n(x) z^n = \frac{(2x-1)z - z^2 + (1-2x)z^4}{1-2xz+z^2-(8x^3-6x)z^3+(4x^2-2)z^4+z^6}.$$

<u>نتيجة 4.4 :</u>

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد نارايانا من الرتبة الثالثة مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n W_n(x) z^n = \frac{(2x+1)z - z^2 + (1+2x)z^4}{1-2xz+z^2-(8x^3-6x)z^3+(4x^2-2)z^4+z^6}.$$

2.4.3 الدوال المولدة لجداء أعداد جاكوبستال من الرتبة الثالثة مع كثيرات الحدود المتعامدة لتشيبتشاف المعممة

- فيما يأتي نقوم بتبديل p_1 بـ $[2p_1]$ و p_2 بـ $[-2p_2]$ في العلاقتين (5.2) و (7.2) و بأخذ $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$ نتحصل على النظرية التالية :

<u>نظرية 2.4:</u>

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء جاكوبستال مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف المعممة تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} P_n(x) z^n = \frac{(2\alpha x+((\beta-\alpha p)x+\gamma))z-\alpha z^2+((\beta-\alpha p)x+\gamma)z^3+(2\alpha+4x((\beta-\alpha p)x+\gamma))z^4}{1-2xz+(-4x^2+3)z^2-(16x^3-14x)z^3+(8x^2-3)z^4+4xz^5+4z^6}.$$

البرهان:

لدينا:

$$P_n(x)=\alpha S_n(2p_1+[-2p_2])+((\beta-\alpha p)x+\gamma)S_{n-1}(2p_1+[-2p_2]),$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} P_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)\left(\alpha S_n(2p_1+[-2p_2])+((\beta-\alpha p)x+\gamma)S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])\right)z^n$$

$$=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)S_n(2p_1+[-2p_2])z^n$$

$$+((\beta-\alpha p)x+\gamma)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}(2p_1+[-2p_2])z^n$$

$$=\alpha\frac{2xz-z^2+2z^4}{\prod_{i=1}^{3}(1-2a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1+2a_ip_2z)}$$

$$+((\beta-\alpha p)x+\gamma)\frac{z+z^3+4xz^4}{\prod_{i=1}^{3}(1-2a_ip_1z)\prod_{i=1}^{3}(1+2a_ip_2z)}$$

$$=\frac{(2\alpha x+((\beta-\alpha p)x+\gamma))z-\alpha z^2+((\beta-\alpha p)x+\gamma)z^3+(2\alpha+4x((\beta-\alpha p)x+\gamma))z^4}{1-2xz+(-4x^2+3)z^2-(16x^3-14x)z^3+(8x^2-3)z^4+4xz^5+4z^6}.$$

و هو المطلوب .

- من خلال النظرية 2.4 يمكن استنتاج الدوال المولدة لجداء أعداد جاكوبستال من الرتبة الثالثة مع بعض كثيرات الحدود لتشيبتشاف من الأنواع الأربعة .

نتيجة 5.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال من الرتبة الثالثة مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الأول تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} T_n(x) z^n = \frac{xz - z^2 - xz^3 + (2-4x^2)z^4}{1-2xz+(-4x^2+3)z^2-(16x^3-14x)z^3+(8x^2-3)z^4+4xz^5+4z^6}.$$

نتيجة 6.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال من الرتبة الثالثة مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثاني تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} U_n(x) z^n = \frac{2xz - z^2 + 2z^4}{1-2xz+(-4x^2+3)z^2-(16x^3-14x)z^3+(8x^2-3)z^4+4xz^5+4z^6}.$$

نتيجة 7.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال من الرتبة الثالثة مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} V_n(x) z^n = \frac{(2x-1)z - z^2 - z^3 + (2-4x)z^4}{1-2xz+(-4x^2+3)z^2-(16x^3-14x)z^3+(8x^2-3)z^4+4xz^5+4z^6}.$$

نتيجة 8.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال من الرتبة الثالثة مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} W_n(x) z^n = \frac{(2x+1)z - z^2 + z^3 + (2+4x)z^4}{1-2xz+(-4x^2+3)z^2-(16x^3-14x)z^3+(8x^2-3)z^4+4xz^5+4z^6}.$$

3.4.3 الدوال المولدة لجداء أعداد جاكوبستال لوكاس من الرتبة الثالثة مع كثيرات الحدود المتعامدة لتشيبيتشاف المعممة

- فيما يأتي نقوم بتبديل p_1 بـ $[2p_1]$ و p_2 بـ $[-2p_2]$ في العلاقة(6.2) ، (8.2) و(5.2) مضروبة في z و بإجراء تبديل المتغير المناسب و بأخذ $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=x \\ 4p_1p_2=-1 \end{cases}$ نتحصل على النظرية التالية :

نظرية 3.4:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة لجداء جاكوبستال لوكاس مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف المعممة تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_n^{(3)} P_n(x) z^n = \frac{2\alpha - \left(2\alpha x - \left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)\right)z + \left(\alpha\left(8x^2+1\right)+8\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)x\right)z^2}{1-2xz+\left(-4x^2+3\right)z^2-\left(16x^3-14x\right)z^3+\left(8x^2-3\right)z^4+4xz^5+4z^6}$$
$$+\frac{\left(\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)\left(16x^2-7\right)+4\alpha x\right)z^3-4\left(x\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)+\alpha\right)z^4+4\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)z^5}{1-2xz+\left(-4x^2+3\right)z^2-\left(16x^3-14x\right)z^3+\left(8x^2-3\right)z^4+4xz^5+4z^6}.$$

البرهان:

لدينا:

$$P_n(x) = \alpha S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right),$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_n^{(3)} P_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2S_n(a_1+a_2+a_3)-S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)+2S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\right)$$
$$\left(\alpha S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right)z^n$$
$$=2\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)\left(\alpha S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right)z^n$$
$$-\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)\left(\alpha S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right)z^n$$
$$+2\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)\left(\alpha S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)+\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)\right)z^n$$

$$=2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$

$$+2\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} P_n(x) z^n + 2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$

$$+2\left((\beta-\alpha p)x+\gamma\right)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$

$$=2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a_1+a_2+a_3)S_n\left(2p_1+[-2p_2]\right)z^n$$

$$+2\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)z^n$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}J_n^{(3)}P_n\left(x\right)z^n+2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\frac{\left(2p_1\right)^{n+1}-\left(-2p_2\right)^{n+1}}{2p_1+2p_2}z^n$$

$$+2\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)z^n$$

$$=2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)S_n\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)z^n$$

$$+2\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)z^n$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}J_n^{(3)}P_n\left(x\right)z^n+\frac{\alpha}{p_1+p_2}\left(2a_1\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\left(2p_1\right)^n z^n\right.$$

$$\left.+2p_2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\left(-2p_2\right)^n z^n\right)$$

$$+2\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)S_{n-1}\left(2p_1+\left[-2p_2\right]\right)z^n$$

نعلم أن :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}\left(A\right)\left(p_1z\right)^n=\frac{z^2}{1-ap_1t-bp_1^2z^2-cp_1^3z^3},$$

و منه:

$$=2\alpha\frac{1+z^2+4xz^3}{1-2xz+\left(-4x^2+3\right)z^2-\left(16x^3-14x\right)z^3+\left(8x^2-3\right)z^4+4xz^5+4z^6}$$

$$+2\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\frac{z+2xz^2+2\left(4x^2-1\right)z^3}{1-2xz+\left(-4x^2+3\right)z^2-\left(16x^3-14x\right)z^3+\left(8x^2-3\right)z^4+4xz^5+4z^6}$$

$$-\frac{\left(2\alpha x+\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\right)z-\alpha z^2+\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)z^3+\left(2\alpha+4x\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\right)z^4}{1-2xz+\left(-4x^2+3\right)z^2-\left(16x^3-14x\right)z^3+\left(8x^2-3\right)z^4+4xz^5+4z^6}$$

$$+\alpha\frac{2\left(4x^2-1\right)z^2-4xz^3-2z^4}{1-2xz+\left(-4x^2+3\right)z^2-\left(16x^3-14x\right)z^3+\left(8x^2-3\right)z^4+4xz^5+4z^6}$$

$$+2\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\frac{2xz^2-z^3+2z^5}{1-2xz+\left(-4x^2+3\right)z^2-\left(16x^3-14x\right)z^3+\left(8x^2-3\right)z^4+4xz^5+4z^6}$$

$$=\frac{2\alpha-\left(2\alpha x-\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\right)z+\left(\alpha\left(8x^{2}+1\right)+8\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)x\right)z^{2}}{1-2xz+\left(-4x^{2}+3\right)z^{2}-\left(16x^{3}-14x\right)z^{3}+\left(8x^{2}-3\right)z^{4}+4xz^{5}+4z^{6}}$$

$$+\frac{\left(\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)\left(16x^{2}-7\right)+4\alpha x\right)z^{3}-4\left(x\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)+\alpha\right)z^{4}+4\left(\left(\beta-\alpha p\right)x+\gamma\right)z^{5}}{1-2xz+\left(-4x^{2}+3\right)z^{2}-\left(16x^{3}-14x\right)z^{3}+\left(8x^{2}-3\right)z^{4}+4xz^{5}+4z^{6}}.$$

و هو المطلوب .

- من خلال النظرية 3.4 يمكن استنتاج الدوال المولدة لجداء أعداد جاكوبستال لوكاس من الرتبة الثالثة مع بعض كثيرات الحدود لتشيبيتشاف المعممة .

نتيجة 9.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال لوكاس من الرتبة الثالثة مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الأول تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_n^{(3)}T_n(x)z^n=\frac{2-3xz+z^{2}+\left(11x-16x^{3}\right)z^{3}+\left(4x^{2}-4\right)z^{4}-4xz^{5}}{1-2xz+\left(-4x^{2}+3\right)z^{2}-\left(16x^{3}-14x\right)z^{3}+\left(8x^{2}-3\right)z^{4}+4xz^{5}+4z^{6}}.$$

نتيجة 10.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال لوكاس من الرتبة الثالثة مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثاني تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_n^{(3)}U_n(x)z^n=\frac{2-2xz+\left(8x^{2}+1\right)z^{2}+4xz^{3}-4z^{4}}{1-2xz+\left(-4x^{2}+3\right)z^{2}-\left(16x^{3}-14x\right)z^{3}+\left(8x^{2}-3\right)z^{4}+4xz^{5}+4z^{6}}.$$

نتيجة 11.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال لوكاس من الرتبة الثالثة مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الثالث تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_n^{(3)}V_n(x)z^n=\frac{2-\left(2x+1\right)z+\left(1-8x+8x^{2}\right)z^{2}+\left(7+4x-16x^{2}\right)z^{3}+\left(4x-4\right)z^{4}-4z^{5}}{1-2xz+\left(-4x^{2}+3\right)z^{2}-\left(16x^{3}-14x\right)z^{3}+\left(8x^{2}-3\right)z^{4}+4xz^{5}+4z^{6}}.$$

نتيجة 12.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال لوكاس من الرتبة الثالثة مع كثير الحدود لتشيبيتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_n^{(3)}W_n(x)z^n=\frac{2-\left(2x-1\right)z+\left(1+8x+8x^{2}\right)z^{2}+\left(16x^{2}+4x-7\right)z^{3}-\left(4x+4\right)z^{4}+4z^{5}}{1-2xz+\left(-4x^{2}+3\right)z^{2}-\left(16x^{3}-14x\right)z^{3}+\left(8x^{2}-3\right)z^{4}+4xz^{5}+4z^{6}}$$

4.4.3 الدوال المولدة لجداء أعداد نارايانا من الرتبة الثالثة مع بعض أعداد فيبوناتشي المعممة

- فيما يأتي نقوم بتبديل p_2 بـ $[-p_2]$ في العلاقتين (5.2) و (7.2) و بأخذ $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=0 \\ a_1a_2a_3=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=p \\ p_1p_2=q \end{cases}$ نتحصل على النظرية التالية :

نظرية 4.4:

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا الدالة المولدة لجداء أعداد فيبوناتشي المعممة مع أعداد نارايانا تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n u_n z^n = \frac{\beta z + q\alpha z^2 + \left(q^2\alpha - pq(\beta - p\alpha)\right)z^4}{1 - pz - qz^2 - \left(p^3 + 3pq\right)z^3 - \left(qp^2 + 2q^2\right)z^4 - q^3z^6}. \quad (4.4)$$

البرهان:

لدينا:

$$u_n = \alpha S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) + (\beta - p\alpha) S_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right),$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n u_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2+a_3)\left(\alpha S_n\left(p_1+[-p_2]\right) + (\beta - \alpha p) S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right)z^n$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2+a_3) S_n\left(p_1+[-p_2]\right) z^n$$

$$+ (\beta - \alpha p)\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1+a_2+a_3) S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right) z^n$$

$$= \alpha \frac{pz + qz^2 + q^2z^4}{\prod_{i=1}^{3}(1 - a_i p_1 z)\prod_{i=1}^{3}(1 + a_i p_2 z)}$$

$$+ (\beta - p\alpha)\frac{z - pqz^4}{\prod_{i=1}^{3}(1 - a_i p_1 z)\prod_{i=1}^{3}(1 + a_i p_2 z)}$$

$$= \frac{\beta z + q\alpha z^2 + \left(q^2\alpha - pq(\beta - p\alpha)\right)z^4}{1 - pz - qz^2 - \left(p^3 + 3pq\right)z^3 - \left(qp^2 + 2q^2\right)z^4 - q^3z^6}.$$

و هو المطلوب .

- من خلال النظرية 4.4 يمكن استنتاج الدوال المولدة لجداء أعداد نارايانا من الرتبة الثالثة مع بعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية .

نتيجة 13.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد نارايانا من الرتبة الثالثة مع أعداد k-مارسان من الرتبة الثانية تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n M_{k,n} z^n = \frac{z+6kz^4}{1-3kz+2z^2-\left(27k^3-18k\right)z^3-\left(8-18k^2\right)z^4-8z^6}.$$

نتيجة 14.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد نارايانا من الرتبة الثالثة مع أعداد k-مارسان لوكاس من الرتبة الثانية تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n m_{k,n} z^n = \frac{3kz-4z^2+\left(8-18k^2\right)z^4}{1-3kz+2z^2-\left(27k^3-18k\right)z^3-\left(8-18k^2\right)z^4-8z^6}.$$

نتيجة 15.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد نارايانا من الرتبة الثالثة مع أعداد k-لوكاس من الرتبة الثانية تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n L_{k,n} z^n = \frac{2z+z^2+(k-1)z^4}{1-kz-z^2-\left(k^3+3k\right)z^3-\left(k^2+2\right)z^4-z^6}.$$

نتيجة 16.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد نارايانا من الرتبة الثالثة مع أعداد k-بال لوكاس من الرتبة الثانية تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n Q_{k,n} z^n = \frac{2z+2kz^2+\left(2k^2+4k\right)z^4}{1-2z-kz^2-(6k+8)z^3-\left(2k^2+4k\right)z^4-k^3z^6}.$$

5.4.3 الدوال المولدة لجداء أعداد جاكوبستال من الرتبة الثالثة مع أعداد فيبوناتشي المعممة

- فيما يأتي نقوم بتبديل p_2 بـ $[-p_2]$ في العلاقتين (5.2) و (7.2) و بأخذ $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=p \\ p_1p_2=q \end{cases}$ نتحصل على النظرية التالية:

نظرية 5.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال مع أعداد فيبوناتشي المعممة تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} u_n z^n = \frac{\beta z + q\alpha z^2 - q(\beta - p\alpha) z^3 + 2\left(q^2\alpha - pq(\beta - p\alpha)\right) z^4}{1 - pz - \left(p^2 + 3q\right) z^2 - \left(2p^3 - 7pq\right) z^3 - \left(2qp^2 + 3q^2\right) z^4 + 2q^2 pz^5 - 4q^3 z^6}.$$

البرهان:

لدينا:

$$u_n = \alpha S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) + (\beta - p\alpha) S_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right),$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} u_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1 + a_2 + a_3)\left(\alpha S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) + (\beta - \alpha p) S_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right)\right) z^n$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1 + a_2 + a_3) S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) z^n$$

$$+ (\beta - \alpha p) \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(a_1 + a_2 + a_3) S_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right) z^n$$

$$= \alpha \frac{pz + qz^2 + 2q^2 z^4}{\prod_{i=1}^{3}(1 - a_i p_1 z) \prod_{i=1}^{3}(1 + a_i p_2 z)}$$

$$+ (\beta - p\alpha) \frac{z - qz^3 - 2pqz^4}{\prod_{i=1}^{3}(1 - a_i p_1 z) \prod_{i=1}^{3}(1 + a_i p_2 z)}$$

$$= \frac{\beta z + q\alpha z^2 - q(\beta - p\alpha) z^3 + 2\left(q^2\alpha - pq(\beta - p\alpha)\right) z^4}{1 - pz - \left(p^2 + 3q\right) z^2 - \left(2p^3 - 7pq\right) z^3 - \left(2qp^2 + 3q^2\right) z^4 + 2q^2 pz^5 - 4q^3 z^6}.$$

و هو المطلوب .

- من خلال النظرية 5.4 يمكن استنتاج الدوال المولدة لجداء أعداد جاكوبستال من الرتبة الثالثة مع بعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية .

نتيجة 17.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال من الرتبة الثالثة مع أعداد k- مارسان من الرتبة الثانية تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} M_{k,n} z^n = \frac{z+2z^3+12kz^4}{1-3kz-\left(9k^2-6\right)z^2-\left(54k^3+42k\right)z^3-\left(12-36k^2\right)z^4+24kz^5+32z^6}.$$

نتيجة 18.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال من الرتبة الثالثة مع أعداد k-مارسان لوكاس من الرتبة الثانية تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} m_{k,n} z^n = \frac{3kz+8z^2-6kz^3+2\left(8-18k^2\right)z^4}{1-3kz-\left(9k^2-6\right)z^2-\left(54k^3+42k\right)z^3-\left(12-36k^2\right)z^4+24kz^5+32z^6}.$$

نتيجة 19.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال من الرتبة الثالثة مع أعداد k- لوكاس من الرتبة الثانية تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} L_{k,n} z^n = \frac{2z+z^2+\left(2k-2\right)z^4}{1-kz-\left(k^2+3\right)z^2-\left(2k^3-7k\right)z^3-\left(2k^2+3\right)z^4+2kz^5-4z^6}.$$

نتيجة 20.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال من الرتبة الثالثة مع أعداد k- بال لوكاس من الرتبة الثانية تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{(3)} Q_{k,n} z^n = \frac{2z-2kz^2+2kz^3+\left(4k^2+8k\right)z^4}{1-2z-\left(3k+4\right)z^2-\left(16-14k\right)z^3-\left(3k^2+8k\right)z^4+4k^2z^5-4k^3z^6}.$$

6.4.3 الدوال المولدة لجداء أعداد جاكوبستال لوكاس من الرتبة الثالثة مع أعداد فيبوناتشي المعممة

- فيما يأتي نقوم بتبديل p_2 بـ $\left[-2p_2\right]$ في العلاقة(6.2) ، (8.2) و(5.2) مضروبة في z و بإجراء تبديل المتغير المناسب و بأخذ $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-1 \\ a_1a_2a_3=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} p_1-p_2=p \\ p_1p_2=q \end{cases}$

نتحصل على النظرية التالية:

نظرية 6.4:

من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال لوكاس من أعداد فيبوناتشي المعممة تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_n^{(3)} u_n z^n = \frac{2\alpha+\left(\beta-2\alpha p\right)z+\left(4p\left(\beta-\alpha p\right)+\alpha\left(2-3q\right)\right)z^2+\left(\left(\beta-\alpha p\right)\left(4p^2+7q\right)-4pq\alpha\right)z^3}{1-2xz+\left(-4x^2+3\right)z^2-\left(16x^3-14x\right)z^3+\left(8x^2-3\right)z^4+4xz^5+4z^6}$$

$$-\frac{2\left(\alpha\left(q^{2}+q\right)-pq\left(\beta-\alpha p\right)\right)z^{4}-4\left(q^{2}\left(\beta-\alpha p\right)-\alpha pq\right)z^{5}}{1-2xz+\left(-4x^{2}+3\right)z^{2}-\left(16x^{3}-14x\right)z^{3}+\left(8x^{2}-3\right)z^{4}+4xz^{5}+4z^{6}}.$$

البرهان:

لدينا:

$$u_n=\alpha S_n\left(p_1+[-p_2]\right)+\left(\beta-p\alpha\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right),$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_n^{(3)}u_n z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)-S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)+2S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\right)$$
$$\left(\alpha S_n\left(p_1+[-p_2]\right)+\left(\beta-p\alpha\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right)z^n$$

$$=2\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)\left(\alpha S_n\left(p_1+[-p_2]\right)+\left(\beta-p\alpha\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right)z^n$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}\left(a_1+a_2+a_3\right)\left(\alpha S_n\left(p_1+[-p_2]\right)+\left(\beta-p\alpha\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right)z^n$$

$$+2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\left(\alpha S_n\left(p_1+[-p_2]\right)+\left(\beta-p\alpha\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right)z^n$$

$$=2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+2\left(\beta-\alpha p\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}J_n^{(3)}U_{k,n}z^n+2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+2\left(\beta-\alpha p\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$=2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)S_n\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$+2\left(\beta-\alpha p\right)\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+a_2+a_3\right)S_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)z^n$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}J_n^{(3)}U_{k,n}z^n+2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}\left(a_1+a_2+a_3\right)\frac{\left(p_1\right)^{n+1}-\left(-p_2\right)^{n+1}}{p_1+p_2}z^n$$

$$+2(\beta-\alpha p)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}(p_1+[-p_2])z^n$$

$$=2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(a_1+a_2+a_3)S_n(p_1+[-p_2])z^n$$

$$+2(\beta-\alpha p)\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}(p_1+[-p_2])z^n$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}J_n^{(3)}u_nz^n+\frac{2\alpha}{p_1+p_2}\left(p_1\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)(p_1)^n z^n\right.$$

$$\left.+p_2\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)(-p_2)^n z^n\right)$$

$$+2(\beta-\alpha p)\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}(a_1+a_2+a_3)S_{n-1}(p_1+[-p_2])z^n$$

نعلم أن :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-2}(A)(p_1z)^n=\frac{z^2}{1-ap_1t-bp_1^2z^2-cp_1^3z^3},$$

و منه:

$$=2\alpha\frac{1-qz^2-2pqz^3}{1-2xz+(-4x^2+3)z^2-(16x^3-14x)z^3+(8x^2-3)z^4+4xz^5+4z^6}$$

$$+2(\beta-\alpha p)\frac{z+pz^2+2(p^2+q)z^3}{1-2xz+(-4x^2+3)z^2-(16x^3-14x)z^3+(8x^2-3)z^4+4xz^5+4z^6}$$

$$-\frac{\beta z+q\alpha z^2-q(\beta-p\alpha)z^3+2(q^2\alpha-pq(\beta-p\alpha))z^4}{1-pz-(p^2+3q)z^2-(2p^3-7pq)z^3-(2qp^2+3q^2)z^4+2q^2pz^5-4q^3z^6}$$

$$+\alpha\frac{2z^2-2qz^4-4pqz^5}{1-2xz+(-4x^2+3)z^2-(16x^3-14x)z^3+(8x^2-3)z^4+4xz^5+4z^6}$$

$$+2(\beta-\alpha p)\frac{pz^2+qz^3+2q^2z^5}{1-2xz+(-4x^2+3)z^2-(16x^3-14x)z^3+(8x^2-3)z^4+4xz^5+4z^6}$$

$$=\frac{2\alpha+(\beta-2\alpha p)z+(4p(\beta-\alpha p)+\alpha(2-3q))z^2+((\beta-\alpha p)(4p^2+7q)-4pq\alpha)z^3}{1-2xz+(-4x^2+3)z^2-(16x^3-14x)z^3+(8x^2-3)z^4+4xz^5+4z^6}$$

$$-\frac{2(\alpha(q^2+q)-pq(\beta-\alpha p))z^4-4(q^2(\beta-\alpha p)-\alpha pq)z^5}{1-2xz+(-4x^2+3)z^2-(16x^3-14x)z^3+(8x^2-3)z^4+4xz^5+4z^6}.$$

و هو المطلوب .

- من خلال النظرية 6.4 يمكن استنتاج الدوال المولدة لجداء أعداد جاكوبيستال لوكاس من الرتبة الثالثة مع بعض كثيرات الحدود الشهيرة من الرتبة الثانية .

نتيجة 21.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال لوكاس من الرتبة الثالثة مع k-مارسان من الرتبة الثانية تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_n^{(3)} M_{k,n} z^n = \frac{z+12kz^2+\left(36k^2-14\right)z^3-12kz^4+16z^5}{1-3kz-\left(9k^2-6\right)z^2-\left(54k^3+42k\right)z^3-\left(12-36k^2\right)z^4+24kz^5+32z^6}.$$

نتيجة 22.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال لوكاس من الرتبة الثالثة مع k-مارسان لوكاس من الرتبة الثانية تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_n^{(3)} m_{k,n} z^n = \frac{4-9kz-\left(36k^2+16\right)z^2+\left(90k-108k^2\right)z^3+2\left(18k^2-12\right)z^4}{1-3kz-\left(9k^2-6\right)z^2-\left(54k^3+42k\right)z^3-\left(12-36k^2\right)z^4+24kz^5+32z^6}.$$

نتيجة 23.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال لوكاس من الرتبة الثالثة مع k-لوكاس من الرتبة الثانية تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_n^{(3)} L_{k,n} z^n = \frac{2+2(1-k)z+\left(8k-4k^2-1\right)z^2+\left(-4k^3+8k^2-11k+14\right)z^3+2\left(2k-k^2\right)z^4+8(1-k)z^5}{1-kz-\left(k^2+3\right)z^2-\left(2k^3-7k\right)z^3-\left(2k^2+3\right)z^4+2kz^5-4z^6}.$$

نتيجة 24.4:

من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالة المولدة لجداء أعداد جاكوبستال لوكاس من الرتبة الثالثة مع k-بال لوكاس من الرتبة الثانية تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} j_n^{(3)} Q_{k,n} z^n = \frac{4-6z-(11+6k)z^2-(30k+32)z^3-4\left(k^2+k\right)z^4-8\left(k^2+2k\right)z^5}{1-2z-(3k+4)z^2-(16-14k)z^3-\left(3k^2+8k\right)z^4+4k^2z^5-4k^3z^6}.$$

الخاتمة :

وختاما فإننا قمنا من خلال هذا الفصل بإيجاد دوال مولدة جديدة لجداءات بعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثالثة مع بعض كثيرات الحدود تشيبتشاف الشهيرة و جداءات كثيرات الحدود 2- تشيبتشاف المتعامدة مع كثيرات الحدود تشيبتشاف من الأنواع الاربعة وهذا باستعمال تقنية التوابع التناظرية وإعتمادا على النظرية 2.1.

المـــــــــــــــراجع:

[1] Y. Ben Cheikh, N. Ben Romhane, d-orthogonal polynomials sets of Tchebytchev type, in : Proceedings of the International Conference on Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials, S.Elaydi et al. (Ed.), Munich, Germany, World Scientifi25-30 July, (2005).

[2] Kh. Boubellouta, A. Boussayoud, Some identities and generating function of third-order recurrence relations, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics,45 (1) 826-842, (2021).

[3] T.S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials. Gordon and Breach, New York, (1978).

[4] K.Douak, P.Maroni, On d-orthogonal Tchebychev polynomials. I. Appl. Numer Math., 24 (1), 23–53, (1997).

[5] P.Maroni, Une th´eorie alg´ebrique des polynˆomes orthogonaux Applications aux polynˆomes orthogonaux semi-classiques, In Orthogonal Polynomials and their Applications, C. Brezinski et al. Editors, IMACS Ann. Comput. Appl. Math. no. 9, 95–130, (1991).

[6] P.Maroni, Fonctions Eul´eriennes, Polynˆomes Orthogonaux Classiques. Techniques de l'Ing´enieur, Trait´e G´en´eralit´es (Sciences Fondamentales). no. A 154 Paris.1–30 , (1994).

[7] H. Merzouk, A. Boussayoud, M.Chelgham, Generating Functions of Generalized Tribonacci and Tricobsthal Polynomials, Montes Taurus J. Pure Appl. Math. 2(2), 7-37, (2020).

[8] H. Merzouk, B. Aloui,A**.** Boussayoud**,** Generating Functions of the Products of 2-Orthogonal Chebyshev Polynomials with Some Numbersand the otherChebyshev Polynomials, Issues of Analysis 10(28)(1), 17-33, (2021)

[9] N. Saba, **A .**Boussayoud, S.Araci, M .Kerada, M.Acikgoz, Construction of a new class of symmetric function of binary products of (p, q)-numbers with 2-orthogonal Chebyshev polynomials, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 27(1), 1-26, (2021).

الخاتمة

وختاما فإننا قمنا من خلال هذا البحث بحساب الدوال المولدة باستعمال التوابع التناظرية، و ذلك باقتراح عدة نظريات في الفصل الثاني و الثالث، التي سمحت لنا بالحصول على الدوال المولدة الجديدة لجداء بعض الأعداد من الرتبة الثانية مع كثيرات الحدود لتشيبتشاف من الأنواع الأربعة، كما قمنا بحساب الدوال المولدة الجديدة لجداء بعض الأعداد من الرتبة الثالثة مع بعض الأعداد و كثيرات الحدود من الرتبة الثانية.

و انطلاقا من النتائج المتحصل عليها من خلال هذا البحث، فإنه يمكننا الحصول على دوال مولدة جديدة كلما قمنا بتوسيع عناصر الأبجديتين A و P.

المصطلحات العلمية

Field	حقل
Eigen values	قيم ذاتية
Eigen vectors	أشعة ذاتية
Formal series	السلاسل الشكلية
Recurrences Relations	العلاقات التراجعية
invertible	قابلة للقلب
Orthogonal polynomials	كثيرات الحدود المتعامدة
Characteristic equation	المعادلة المميزة
Algebraic equation	المعادلة الجبرية
Characteristic polynomials	كثير الحدود المميز
Divided differences	الفرق المقسوم
operator	المؤثر
Generating functions	الدوال المولدة
Elementary symmetric functions	التوابع التناظرية الأولية
complete symmetric functions	التوابع التناظرية التامة
Fibonacci numbers	أعداد فيبوناتشي
Lucas numbers	أعداد لوكاس
Tribonacci numbers	أعداد ثريبوناتشي
Mersenne numbers	أعداد مارسان
Jacobsthal numbers	أعداد جاكوبستال
Narayana numbers	أعداد نارايانا
Generalized Tribonacci numbers	أعداد ثريبوناتشي المعممة
Chebyshev polynomials	كثير الحدود لتشيبيتشاف
Generalized Fibonacci numbers	أعداد فيبوناتشي المعممة
first and second kinds	النوع الأول والثاني
Normalized	منتظمة