الجهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد الصديق بن يحي- جيجل

كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلي

قسم الرياضيات

مذكرة مقدمة لنيل شهادة ماستر في الرياضيات

تخصص : رياضيات أساسية ومتقطعة

بعض المتطابقات والتوابع المولدة لأعداد k- مارسان و k-مارسان لوكاس

إعداد:

- بسمة بوخالفة

لجنة المناقشة :

أ.علي بوسعيود	جامعة جيجل	رئيسا
أ.مراد شلغام	جامعة جيجل	مشرفا
أ.منيرة قميحة	جامعة جيجل	ممتحنة

دفعة 2021

بسم الله الرحمن الرحيم

شكر وعرفان

أبدأ شكري لله عزّ وجلّ الذي أعانني ووفّقني لأنجز هذا العمل وأتمه.

وأصلي وأسلم على نبيه صلى الله عليه وسلم.

*ولأن شكر الناس من شكر الله عزّ وجلّ . أتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير للأستاذ المشرف الأستاذ: **شلغام مراد** على توجيهاته ونصائحه القيمة.*

*مع فائق الشكر و التقدير للأستاذ **بوسعيود علي** رئيس لجنة المناقشة والأستاذة الممتحنة **قميحة منيرة*** لقبولهما أن يكونا عضوين في هذه اللجنة ويفيداني بنصائحهما و اقتراحتهما.

*أوجه شكري إلى أجمل مافي حياتي **"أمي وأبي"** عرفانا لهما بجميلهما وفضلهما عليا*

*أتقدم بالشكر كذلك لكل من ساعدني بطريقة مباشرة أو غير مباشرة ولو بالكلمة وأخص بالذكر من فتحت لي أبواب بيتها وكانت أمًا ثانية لي * **بوفحتة عائشة***

*وكل من صديقاتي اللواتي كن كالأخوات لي: **أحلام، ليلى، كنزة و خديجة** اللواتي كن دوما يحفزني و يشجعنني لإنجاز هذه المذكرة.*

إهداء

*إلى أحلى هدية إلى معنى الحب و الحنان ،إلى من كان دعاؤها سر نجاحي ....***أمي***

*إلى من كلت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم ،إلى القلب الكبير...***أبي***

*إلى من كانوا يضيئون لي الطريق ويساندونني إخوتي*** نسرين***هشام***حسين*** نهاد *** غادة***.*

*إلى من ساندوا ظهري وقت الحاجة ودعموا إيماني وقت الضياع عائلة بوزكوك نصر الدين و أخص بالذكر مدلل العائلة*** صهيب***.*

إلى كل من ساندني وشجعني في مشواري الدراسي.

بسمة.

الفهرس

مقدمة I

1 مفاهيم عامة

1.1 السلاسل الشكلية.....9

1.1.1 حلقة السلاسل الشكلية.....9

2.1.1 عمليات أخرى على السلاسل الشكلية.....9

3.1.1 السلاسل القابلة للقلب.....10

2.1 العلاقات التراجعية الخطية المتجانسة.....12

1.2.1 العلاقات التراجعية الخطية المتجانسة..... 12

2.2.1 العلاقات التراجعية k-ما رسان و k-مارسان لوكاس 13

3.2.1 حل العام العلاقة التراجعية لكل من أعداد k-ما رسان و k-مارسان لوكاس 13

3.1 التوابع المولدة..... 14

1.3.1 التوابع المولدة العادية 14

2.3.1 خواص السلسلة المولدة العادية..... 14

3.3.1 الدوال المولدة المرفقة لكل من أعداد k-ما رسان و k-مارسان لوكاس.....15

2 التوابع التناظرية

1.2 المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية.....18

1.1.2 دراسة قابلية تقطير المصفوفة A.....18

2.2 التوابع التناظرية 19

1.2.2 التوابع التناظرية الأولية 20

2.2.2 التوابع التناظرية التامة 21

3.2 بعض خصائص التوابع التناظرية 24

3 بعض المتابطقات و التوابع المولدة لأعداد k -ما رسان و k -ما رسان لوكاس

1.3 بعض المتطابقات الشهيرة و المجاميع.....27

1.1.3 بعض المتطابقات الشهيرة 27

2.1.3 مجموع الحدود الأولى لأعداد k -مارسان و k -مارسان لوكاس 31

3.1.3 المصفوفات المولدة لأعداد k -مارسان و k -مارسان لوكاس 34

2.3تعاريف ومفاهيم 34

3.3 نتائج أساسية 35

4.3 تطبيقات 37

5.3 الدوال المولدة لجداءات أعداد k -مارسان و k -ما رسان لوكاس 39

1.5.3 الدوال المولدة لأعداد k -مارسان 39

2.5.3 الدوال المولدة لأعداد k -ما رسان لوكاس 39

3.5.3 الدوال المولدة لجداءات أعداد k -ما رسان 40

4.5.3 الدوال المولدة لجداءات أعداد k -ما رسان لوكاس 43

5.5.3 الدوال المولدة لجداءات أعداد k -ما رسان مع k -ما رسان لوكاس 47

الخاتمة 49

المراجع.....50

مقدمة

مقدمة

درس العديد من الباحثين ولمدة طويلة العلاقات الترجعية الخطية وعلى سبيل المثال فيبوناتشي (Fibonacci) ولوكاس (Lucas) ومارسان (Mersenne) من أجل الحصول على نظريات وتطبيقات جوهرية لهذه المتتاليات في العديد من مجالات البحث مثل الفيزياء و الهندسة و العمارة و الطبيعة و الفن [1 ، 5 ، 6 ، 8]. تم تعريف عدة تعميمات للمتتاليات المذكورة أعلاه، نهتم في هذه الدراسة بشكل أساسي المعممة لأعداد مارسان لوكاس (Mersenne-Lucas) المعرفة في المقال [13] بـ $m_n=2^n+1$ و المسماة بمتتالية أعداد k-مارسان لوكاس (k-Mersenne-Lucas) و علاقتها بمتتالية أعداد k-مارسان-k) (Mersenne المعرفة في المقال[8] و التي هي تعميم لأعداد مارسان(Mersenne)التي أكتشفها و درسها أول مرة الرياضي الفرنسي ماران مارسان(Marin Mersenne) و المسماة باسمه و المعرفة بحدها العام: $M_n=2^n-1$ التي تُستخدم الآن على نطاق واسع في العديد من المجالات التطبيقية مثل التشفيروعلوم الكمبيوتروالفيزياء، كما تستعمل في البحث عن اكبر الأعداد الأولية.

تم تقسيم هذه المذكرة إلى ثلاثة فصول، حيث تطرقنا في الفصل الأول إلى بعض المفاهيم العامة حول السلاسل الشكلية، العلاقات التراجعية، الدوال المولدة و خصائصها، مع إعطاء التوابع المولدة للمتتاليات من الرتبة الثانية والتي نقوم بتطبيقها في حساب التوابع المولدة لكل من أعداد k-ما رسان و k-ما رسان لوكاس.

أما الفصل الثاني من الدراسة فقد تطرقنا فيه للمعادلات الجبرية من الدرجة الثانية والتوابع التناظرية الأولية و التوابع التناظرية التامة و خصائصهما و علاقتهما مع بعضهما، كما عرفنا التابع التناظري $S_n(A)=S_n(a+b)$ من أجل أبجدية $A=\{a,b\}$ و أخيرا عرفنا المتتالية $S_n(A-B)$ و خصائصها حيث A و B أبجديتين.

الفصل الثالث و الأخير يتألف من جزئيين. الجزء الاول تطرقنا فيه لبعض المتطابقات الشهيرة كمتطابقة كاتلان (Catalan)، متطابقة كاسيني (Cassini)، متطابقة دوكاني

(d'Ocagne)، متطابقة هونسبارجر (Honsberger) و متطابقات اخرى. كما قمنا بإعطاء المجاميع الجزئية للحدود الأولى ومجاميع الحدود ذات الدليل الزوجي وذات الدليل الفردي و مجاميع جزئية أخرى لكل من أعداد k-ما رسان و k-ما رسان لوكاس. اما الجزء الثاني فقمنا فيه بايجاد التوابع المولدة لكل من أعداد k-ما رسان و k-ما رسان لوكاس و كذا التوابع المولدة لجداءات هادمار(Hadamard) المتتالية و غير المتتالية لهذه الاعداد و لمربعاتها بالاستعانة ببعض المتطابقات المتحصل عليها في الجزء الاول و باستعمال تقنية التوابع التناظرية و بالاخص النظرية الأساسية للتوابع التناظرية (نظرية 1.3) و التي يتم البرهان عليها باستعمال المؤثر التناظري δ_{ab}^{k+1}و ذلك بتطبيقه على السلسلة الشكلية القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)a^n t^n$.

الفصل الأول

مفاهيم عامة

نقوم في هذا الفصل بإعطاء مفاهيم جبرية عامة ، التي يتم استخدامها في الفصلين التالين، إذ نتطرق في جزئه الأول إلى السلاسل الشكلية وخصائصها، وفي الجزء الثاني نعطي لمحة عن العلاقات التراجعية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية و العلاقتين لكل من أعداد k-مارسان و k-مارسان لوكاس وخصائصهما، أما الجزء الثالث فنستعرض فيه التوابع المولدة العادية وخصائصها مع إعطاء التوابع المولدة للمتتاليات من الرتبة الثانية ونقوم بتطبيقها في حساب التوابع المولدة لكل من أعداد k-ما رسان و k-ما رسان لوكاس.

1.1 السلاسل الشكلية

1.1.1 حلقة السلاسل الشكلية

لتكن A حلقة تبديلية تامة قد تكون A حقلا K حيث $K=\mathbb{R}$ أو $\mathrm{K}=\mathbb{C}$.

تعريف 1.1:

نسمي سلسلة شكلية على A كل متتالية $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ من عناصر A. تسمي العناصر a_i بمعاملات هذه السلسلة و يسمى المعامل a_0 بالمعامل الثابت.

ترميز: يرمز لمجموعة السلاسل الشكلية بـ $\mathrm{A}[\![X]\!]$ حيث $X=(0,1,0,0.....)$ يسمى باللامتغير(اللامعين)

إذا كانت $a=(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ سلسلة من $\mathrm{A}[\![X]\!]$ تكتب بـ $a=\sum_{i=0}^{+\infty}a_i X^{\,i}$.

تعريف2.1 (خاصية) :

ليكن $a=\sum_{i\geq 0}a_i X^{\,i}$ و $b=\sum_{i\geq 0}b_i X^{\,i}$ سلسلتين شكليتين على A. نعرف مجموعهما و جداؤهما كالتالي:

$$a+b=\sum_{i\geq 0}(a_i+b_i)X^{\,i},$$

$$ab=\sum_{i\geq 0}\sum_{k=0}^{i}a_k b_{i-k}X^{\,i}.$$

$(\mathrm{A}[\![X]\!],+,.)$ حلقة تبديلية تسمى حلقة السلاسل الشكلية على A دات اللامتغير (اللامعين) X.

2.1.1 عمليات أخرى على السلاسل الشكلية

لتكن $a=\sum_{i\in\mathbb{N}}a_i X^{\,i}$ سلسلة شكلية من $A[\![X]\!]$.

1) الضرب بسلمي :

$$\forall \lambda \in \mathrm{A};\quad \lambda.\sum_{i\geq 0} a_i X^{\,i} = \sum_{i\geq 0} \lambda a_i X^{\,i}$$

2) الاشتقاق:

مشتق الشكلي لسلسلة الشكلية $a=\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^{\,i}$ هي السلسلة $a'=\sum_{i\in\mathbb{N}}(i+1)a_{i+1}X^{\,i}$.

3) المكاملة:

نسمي السلسلة الشكلية $h=\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \frac{X^{\,i+1}}{i+1}$ بتكامل الشكلي (أو تابع مكاملة) السلسلة $a=\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^{\,i}$.

4) القسمة :

لتكن السلسلتين $a=\sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^{\,i}$ و $b=\sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^{\,i}$ حيث $b\neq 0$. نقول أن السلسلة b تقسم السلسلة a إذا و فقط إذا وجدت سلسلة شكلية $c=\sum_{i=0}^{+\infty} c_i X^{\,i}$ حيث $a=b.c$.

3.1.1السلاسل القابلة للقلب

تعريف 3.1:

لتكن $a=\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^{\,i}$ سلسلة شكلية غير معدومة. نقول عن السلسلة a أنها قابلة للقلب إذا وجدت سلسلة شكلية غير معدومة $b=\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^{\,i}$ حيث: $a.b=1$.

تسمي b مقلوب السلسلة a ويرمز لها a^{-1} .

خاصية 1.1 :

لتكن السلسلة الشكلية $a=\sum_{i\in\mathrm{N}} a_i X^{\,i}$ قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان a_0 قابل للقلب في A

البرهان:

نفرض السلسلة $a=\sum_{i\in\mathrm{N}} a_i X^{\,i}$ قابلة للقلب في $\mathrm{A}[[X]]$ إذا وفقط إذا وجد $b=\sum_{i\geq 0} b_i X^{\,i}$ في $A[[X]]$ بحيث $a.\mathrm{b}=1$.

هذا معنـــــــاه:

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 & (1) \\ \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = 0 \;;\; i\geq 1 & (2) \end{cases}$$

من (1) فإن a_0 قابل للقلب في الحلقة A .

$a=\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$ سلسلة شكلية على A .

ونفرض a_0 قابل للقلب فإن الجملة مثلثية علوية :

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1, \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0, \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0. \\ \vdots \\ a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + \ldots + a_0 b_i = 0 \ ; \forall i \geq 0. \end{cases} \qquad (*)$$

حيث : A_i المصفوفة المربعة ذات $(i+1)$ سطر وعمود المرفقة للجملة $(*)$

ومنه:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_i & a_{i-1} & a_{i-2} & a_{i-3} & a_{i-4}... & a_0 \end{pmatrix}.$$

ذات محدد $\det(A_i) = a_0^{i+1} \neq 0$ إذن الجملة $(*)$ تملك حلًا وحيداً $b = A^{-1}C$.

حيث: $C = (1,0,0,..,..,..)$.

أمثلـــة:

1) السلسلة $u = \frac{1}{1-x} = \sum_{i\geq 0} x^i$ قابلة للقلب و مقلوبها $v = 1-x$.

2) السلسة $u = \frac{1}{1+x} = \sum_{i\geq 0} (-1)^i x^i$ قابلة للقلب ومقلوبها $v = 1+x$.

3) السلسلة $u = \sum_{i\geq 0} \frac{x^i}{i!}$ قابلة للقلب ومقلوبها $v = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \frac{x^i}{i!}$.

2.1 العلاقات التراجعية الخطية المتجانسة

1.2.1 العلاقات التراجعية الخطية المتجانسة

نركز في هذه الفقرة اهتمامنا على البحث عن الحلول للعلاقات التراجعية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة.

تعريف 1.2:

نسمي علاقة تراجعية خطية من الرتبة k ذات معاملات ثابتة كل علاقة من الشكل:

$$u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0,\ n \geq k. \qquad (1.1)$$

حيث $n \in IN$، $d_1, d_2, \ldots d_k$ معاملات ثابتة من الحقل K مع $d_k \neq 0$.

ويسمى $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ الحل العام للعلاقة *(1.1)*.

نظرية 1.2*[1]*:

يوجد حل وحيد للعلاقة التراجعية المعرفة ب : $\forall n \geq k;\quad u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \ldots + d_k u_{n-k} = 0$

ذات الشروط الابتدائية: $u_0 = b_0, u_1 = b_1, \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}$ عبارة عن ثوابت معطاة من الحقل K.

ملاحظة:

نكتفي بعبارة العلاقة من الرتبة k للدلالة على العلاقة التراجعية الخطية المتجانسة من الرتبة k ذات معاملات ثابتة .

الحل العام لعلاقة تراجعية متجانسة

من الواضح أنّ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 0$ هو حل للمعادلة (1.1) ويسمي الحل الصفري (التافه).

إذا كان $u_n = \alpha^n$ مع $\alpha \neq 0$ حلاً غير تافه للمعادلة (1.1) فإنه يحقق :

$$\alpha^n + d_1\alpha^{n-1} + d_2\alpha^{n-2} + \cdots + d_k\alpha^{n-k} = 0$$

بما أن :

$$\forall n \geq k\ ; \alpha^{n-k} \neq 0$$

فإن :

$$\alpha^{n-k}(\alpha^k + d_1\alpha^{k-1} + \cdots + d_k) = 0 \quad \Rightarrow \alpha^k + d_1\alpha^{k-1} + \cdots + d_k = 0$$

أي أن α تعتبر حلاً للمعادلة $x^k + d_1 x^{k-1} + \cdots + d_k = 0$

تعريف 3.2: (كثير الحدود المميز)

يسمي كثير الحدود

$$P(X)=X^{k}+d_1X^{k-1}+d_2X^{k-2}+\cdots+d_k. \qquad (1.2)$$

بكثير الحدود المميز المرفق للعلاقة التراجعية (1.1).

ملاحظة3.2:

تدعى المعادلة $P(x)=0$ بالمعادلة المميزة المرفقة للعلاقة التراجعية (1.1)، وتسمى حلولها بالجذور المميزة في الحقل K.

نظرية3.2:

لتكن $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_k$ الجذور المميزة لكثير الحدود المميز (1.2)للعلاقة التراجعية (1.1). إذا كانت هذه الجذور مختلفة مثنى مثنى ،فان الحل العام للعلاقة (1.1) يعطى بـ:

$$u_n=c_1\alpha_1^n+c_2\alpha_2^n+\ldots+..+.c_k\alpha_k^n$$

حيث $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_k$ ثوابت من A.

2.2.1 العلاقات التراجعية k-ما رسان و k-ما رسان لوكاس

تعريف 4.2 :[13]

نعرف اعداد k-ما رسان $(M_{k.n})_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة التراجعية التالية :

$$\begin{cases}M_{k.n}=3kM_{k.n-1}-2M_{k.n-2},\forall n\geq 2\\ M_{k.0}=0,M_{k.1}=1.\end{cases}$$

ملاحظة 4.2:

بوضع $k=1$ في العلاقة نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد ما رسان .

تعريف 5.2: [8]

نعرف اعداد k-ما رسان لوكاس $(m_{k.n})_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة التراجعية التالية :

$$\begin{cases}m_{k,n+1}=3km_{k.n}-2m_{k.n-1},n\geq 1\\ m_{k.0}=2,m_{k.1}=3k.\end{cases}$$

ملاحظة 5.2:

بوضع $k=1$ في العلاقة نتحصل على العلاقة التراجعية لأعداد ما رسان لوكاس.

3.2.1 الحل العام للعلاقة التراجعية لكل من اعداد k-ما رسان و k-ما رسان لوكاس

المعادلة المميزة المرفقة بأعداد k-ما رسان و k-ما رسان لوكاس:

$$x^2-3kx+2=0.$$

والمعادلة تقبل جدرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{3k+\sqrt{9k^2-8}}{2} \qquad x_2=\frac{3k-\sqrt{9k^2-8}}{2}$$

ومنه الحل العام يكتب على الشكل: $c_1x_1^{\,n}+c_2x_2^{\,n}$.

لدينا من الشروط الابتدائية $M_{k.0}=0, M_{k.1}=1$ نجد أن:

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1x_1+c_2x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{1}{\sqrt{9k^2-8}} \\ c_2=\dfrac{-1}{\sqrt{9k^2-8}} \end{cases}$$

ومنه الحل العام لأعداد k-ما رسان :

$$M_{k.n}=\frac{1}{\sqrt{9k^2-8}}\left[\left(\frac{3k+\sqrt{9k^2-8}}{2}\right)^n-\left(\frac{3k-\sqrt{9k^2-8}}{2}\right)^n\right].$$

ومنه جهة أخرى لدينا من الشروط الابتدائية $m_{k.0}=2, m_{k.1}=3k$ نجد أن:

$$\begin{cases} c_1+c_2=2 \\ c_1x_1+c_2x_2=3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=-1 \end{cases}$$

الحل العام لأعداد k-ما رسان لوكاس:

$$m_{k.n}=\left(\frac{3k+\sqrt{9k^2-8}}{2}\right)^n-\left(\frac{3k-\sqrt{9k^2-8}}{2}\right)^n.$$

3.1 التوابع المولدة

1.3.1التوابع المولدة العادية

تعريف 1.3:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية تسمى السلسلة $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ بالدالة المولدة العادية (SGE) المرفقة بالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

خاصية 2.3 :[1]

إذا كانت $g(x)$ دالة مولدة للمتتالية (a_n) و $h(x)$ دالة مولدة لـ (b_n)، يكون لدينا:

1) $c_1g(x)+c_2h(x)$ دالة مولدة للمتتالية $(c_1a_n+c_2b_n)$ بحيث c_1, c_2 ثابتان.

2) $\frac{g(x)}{1-x}$ دالة مولدة للمتتالية $(a_0+a_1+\cdots+a_n)$.

3) $xg'(x)$ دالة مولدة للمتتالية (na_n) حيث $g'(x)$ هي مشتق g.

4) $g(x)h(x)$ دالة مولدة للمتتالية الالتفاف $(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)$.

3.3.1 الدوال المولدة المرفقة لكل من اعداد k-ما رسان و k-ما رسان لوكاس

نظرية 1.3:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية فيبوناشي المعممة المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_n = au_{n-1}+bu_{n-2}, \\ u_0=\alpha, u_1=\beta. \end{cases}$$

الدالة المرفقة للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n=\frac{a+(\beta-\alpha a)x}{1-ax-bx^2}. \qquad (1.4)$$

البرهان:

لدينـــــــــــا:

$$\begin{aligned} g(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n \\ &=u_0+u_1x+\sum_{n=2}^{+\infty}(au_{n-1}+bu_{n-2})x^n \\ &=\alpha+\beta x+ax\sum_{n=1}^{+\infty}u_nx^n+bx^2\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n \\ &=\alpha+\beta x+ax\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n-\alpha\right)+bx^2\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n \\ &=\alpha+(\beta-\alpha a)x+(ax+bx^2)\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n \end{aligned}$$

$$\left(1-ax-bx^2\right)g(x)=\alpha+(\beta-\alpha a)x$$

ومنه ينتج لنا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n=\frac{a+(\beta-\alpha a)x}{1-ax-bx^2}.$$

بتطبيق النظرية(1.3) نجد الدوال المولدة لكل من عداد k-ما رسان و k-ما رسان لوكاس.

نتيجة 1:

الدالة المولدة لأعداد k-ما رسان تعطى بالعلاقة :

$$g(x)=\frac{x}{1-3kx+2x^2}.$$

ملاحظة 6.2 :

لما k=1 :

الدالة المولدة لأعداد ما رسان تعطى بالعلاقة :

$$g(x)=\frac{x}{1-3x+2x^2}.$$

نتيجة 2 :

الدالة المولدة لأعداد k-ما رسان لوكاس تعطى بالعلاقة :

$$g(x)=\frac{2-3kx}{1-3kx+2x^2}.$$

ملاحظة 7.2 :

لما k=1 :

الدالة المولدة لأعداد ما رسان لوكاس تعطى بالعلاقة :

$$g(x)=\frac{2-3x}{1-3x+2x^2}.$$

الفصل الثاني

توابع التناظرية

نتناول في هذا الفصل العناصر الأساسية للنظرية التوابع التناظرية، حيث نتطرق في الفقرة الأولى الى المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية، وفي الفقرة الثانية نقدم بعض التعاريف حول التوابع التناظرية الأولية و التامة، وفي الأخير نتطرق الى بعض خصائص التوابع التناظرية .

1.2 المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة الجبرية من الدرجة الثانية $x^2 - a_1 x - a_2 = 0$ حيث a_1, a_2 من $\mathbb{C}$.

لدينا العلاقة التالية : $\begin{cases} a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ a_2 = -\lambda_1 \lambda_2 \end{cases}$ مع λ_1, λ_2 جدور المعادلة السابقة حيث $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$.

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ تسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة المرافقة لكثير الحدود.

1.1.2 دراسة قابلية تقطير المصفوفة A

أ.تعين القيم الذاتية :

لتكن λ قيمة ذاتية للمصفوفة A .يعطى كثير الحدود المميز للمصفوفة A بالعلاقة التالية :

$$\mathrm{P}_A(x) = x^2 - tr(A)x + \det A \ .$$

هذا الأخير ينعدم من أجل λ_1 ، λ_2 ،وهما القيمتين الذاتين للمصفوفة A وأيضا جذرين للمعادلة الأولى.

ب.الاشعة الذاتية للمصفوفة A :

ليكن v_i شعاعا ذاتيا مرفقا للقيمة الذاتية λ_i إذن:

$$Av_i = \lambda_i v_i, i = \overline{1,2}.$$

أي : $$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, i = \overline{1,2}$$

ومنه : $\begin{cases} a_1 x + a_2 y = \lambda_i x, \\ x = \lambda_i y. \end{cases}$

من المعادلتين السابقتين ينتج لنا $x = \lambda_i y$.

ومنه الشعاعين الذاتيتين للمصفوفة A هما : $v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

نفرض ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ونعتبر $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

ادن المصفوفة A قابلة للتقطير ومنه توجد مصفوفة P قابلة للقلب ومصفوفة D قطرية حيث :

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

وحيث $A = PDP^{-1}$:

$$A = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\ -1 & \lambda_1\end{pmatrix}.$$

وعليه المصفوفة A^n تعطى بالعلاقة التالية: $A^n = PD^nP^{-1}$ حيث:

$$A^n = \begin{pmatrix}\frac{\lambda^{n+1}_1 - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}\\ \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\lambda_1\lambda_2\frac{\lambda^{n-1}_1 - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\end{pmatrix}.$$

هذه الخاصية صحيحة من اجل $n < 0$.

ملاحظة :

لدينا: $Av_i = \begin{pmatrix}\lambda_i^2\\ \lambda_i\end{pmatrix}; A^n v_i = \begin{pmatrix}\lambda_i^{n+1}\\ \lambda_i^n\end{pmatrix}$.

2.2 التوابع التناظرية

تعريف 1.2:

نعتبر $A = \mathbb{R}^n$ نقول عن التابع f المعرف على A أنه متناظر إذا كان من أجل كل تبديلية σ من S_n العلاقة التالية محققة :

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{C}^n : f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots x_{\sigma(n)}).$$

1.2.2 التوابع التناظرية الأولية

تعريف 2.2 :

نسمي التابع التناظري الأولي من الرتبة k التابع e_k المعرف على A بـ:

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, , , \lambda_n) \in \mathbb{C}^n : e_k(\lambda_1, \lambda_2, , , \lambda_n) = \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}.$$

ويرمز اختصار لـ $e_k(\lambda_1, \lambda_2, , , \lambda_n)$ ب $e_k^{(n)}$.

مع $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n \in \{0 \vee 1\}$ و $e_k^{(n)}$ معدومة من أجل $k < n$ أو $k > n$.

مثال 1.2:

من أجل معادلة من الدرجة الثانية ($n=2$ ،الجذور λ_1,λ_2) لدينا:

$$\begin{cases} e_0^{(2)}=1 \\ e_1^{(2)}=\lambda_1+\lambda_2 . \\ e_2^{(2)}=\lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

قضية 1.2:

لدينا العلاقات التالية :

1) $e^{(n+1)}{}_k=\lambda_{n+1}e^{(n)}{}_{k-1}+e^{(n)}{}_k$,

2) $e^{(n)}{}_k=\lambda_n e^{(n-1)}{}_{k-1}+\lambda_{n-1}e^{(n-2)}{}_{k-1}+...+\lambda_{n-i}e^{(n-i-1)}{}_{k-1}+...+\lambda_k e_{k-1}{}^{(k-1)}$.

قضية 2.2:

السلسلة المولدة للتابع التناظري الأولي هي معاملات النشر في السلسلة:

$$E(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e_k^{(n)}t^n=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i t).$$

البرهان:

نبرهن على دالك بالتراجع.

لدينا من أجل $n=2$:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{2}(1+\lambda_i\,t) &=(1+\lambda_1 t)(1+\lambda_2 t)\\ &=1+(\lambda_1+\lambda_2)t+\lambda_1\lambda_2 t^2\\ &=e_0^{(2)}+e_1^{(2)}t+e_2^{(2)}t^2\\ &=\sum_{k=0}^{2}e_k^{(2)}t^k .\end{aligned}$$

نفرض الخاصية صحيحة من أجل n و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي:

$$\sum_{k=0}^{n+1}e_k^{(n)}t^n=\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i\,t).$$

لدينـــــــا:

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i\ \mathrm{t}) = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i\ \mathrm{t})\left(1+\lambda_{n+1}t\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e_k^{(n)} t^k \left(1+\lambda_{n+1}t\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e_k^{(n)} t^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n} e_k^{(n)} t^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e_k^{(n)} t^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} e_{k-1}^{(n)} t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} t^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)} t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} t^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)} t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (e_k^{(n)} + \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)})\, \mathrm{t}^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} e_k^{(n)} t^k .$$

وهو المطلوب.

2.2.2 التوابع التناظرية التامة

تعريف 3.2:

نعرف التابع التناظري التام من الرتبة k التابع h_k معرف على A بالعلاقة التالية:

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2,,,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n : h_k(\lambda_1,\lambda_2,,,\lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}.$$

يرمز اختصار لـ $h_k(\lambda_1,\lambda_2,,,\lambda_n)$ ب $h_k^{(n)}$.

مع $i_1,i_2,i_3,\ldots,i_n \geq 0$ و $h_k^{(n)}$ معدومة من أجل $k<0$.

مثال 2.2:

من أجل معادلة من الدرجة الثانية ($n=2$، الجذور λ_1,λ_2) لدينا:

$$\begin{cases} h_0^{(2)} = 1 \\ h_1^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2 \\ h_2^{(2)} = {\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + \lambda_1\lambda_2 \\ h_3^{(2)} = {\lambda_1}^3 + {\lambda_2}^3 + {\lambda_1}^2\lambda_2 + \lambda_1{\lambda_2}^2 \\ \vdots \end{cases}.$$

قضية 3.2:

لدينا العلاقات التالية :

1) $h_k{}^{(n+1)} = \lambda_{n-1} h_{k-1}{}^{(n+1)} + h_k{}^{(n)},$

2) $h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1}^k + \lambda_{n+1}^{k-1} h_1^{(n)} + \ldots + \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n)} + \lambda_k^n.$

قضية 4.2 :

التوابع التناظرية التامة من الرتبة k هي معاملات النشر في السلسلة:

$$H(\mathrm{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(n)} t^n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i\,\mathrm{t})}.$$

البرهان:

نبرهن بالتراجع على دالك :

من أجل $n = 2$ لدينا:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(2)} t^k = h_0^{(2)} + h_1^{(2)} t + h_2^{(2)} t^2 + \cdots$$

$$= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\,\mathrm{t} + (\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)\,\mathrm{t}^2 + \cdots$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(2)} t^k = (1 + \lambda_1 t + \lambda_1^2 t^2 + \cdots)(1 + \lambda_2 t + \lambda_2^2 t^2 + \cdots)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda_1\,\mathrm{t})^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda_2\,\mathrm{t})^k\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1-\lambda_1 t}\right)\left(\frac{1}{1-\lambda_2 t}\right)$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=0}^{2}(1-\lambda_i\,\mathrm{t})}.$$

نفرض الخاصية صحيحة من أجل n أي:

$$\sum_{k=0}^{n} h_k^{(n)} t^n = \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i\, t)^{-1}.$$

و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي:

$$\sum_{k=0}^{n+1} h_k^{(n)} t^n = \prod_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i\, t)^{-1}.$$

لدينـــــــــــــا:

$$h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n-1)} + h_k^{(n)}$$

إذن:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n+1)} t^k &= \lambda_{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} h_{k-1}^{(n+1)} t^k + \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n)} t^k \\
&= \lambda_{n+1} t \sum_{k=1}^{+\infty} h_{k-1}^{(n+1)} t^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n)} t^k \\
&= \lambda_{n+1} t \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n+1)} t^k + \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n)} t^k \\
&= \lambda_{n+1} t \prod_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i\, t)^{-1} + \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i\, t)^{-1} \\
&= \frac{\lambda_{n+1} t + (1-\lambda_{n+1}\, t)}{\prod_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i\, t)}.
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{(n+1)} t^k = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i\, t)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i\, t)^{-1}.$$

3.2 بعض خصائص التوابع التناظرية

تعريف 1.3:

نعتبر الأبجدية $E_2 = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. نعرف التابع المتناظر المرفق بالأبجدية E_2 بـ:

$$S_n(E_2) = S_n(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2},\ n \in \mathbb{N}. \qquad (2.1)$$

مع:

$$S_0(E_2) = h_0^{(2)} = 1$$

$$S_1(E_2) = h_1^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$S_2(E_2) = h_2^{(2)} = \lambda^2{}_1 + \lambda^2{}_2 + \lambda_1\lambda_2$$
$$\vdots$$
$$S_n(E_2) = h_n^{(2)} = h_n(\lambda_1, \lambda_2).$$

من أجل $n < 0$ و $S_n(E_2) = 0$.

تعريف 2.3 :[2]

لتكن A و B أبجديتين. نرمز بـ: $S_n(A-B)$ لمعاملات السلسلة المعرفة بـ:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_n(A-B)\mathrm{t}^n = \frac{\prod_{b\in B}(1-bt)}{\prod_{a\in A}(1-at)}. \qquad (2.2)$$

مع : $S_n(A-B) = 0, \forall n < 0$.

نتيجة 1.3:

بوضع $A = \varnothing$ في العلاقة (2.2) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-B)\mathrm{t}^n = \prod_{b\in B}(1-bt). \qquad (2.3)$$

خاصية 1.3: [3]

إذا كان $A = \varnothing$ أو $B = \varnothing$ فإنه ينتج لنا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A-B)\mathrm{t}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\mathrm{t}^n \sum_{j=0}^{+\infty} S_n(-B)\mathrm{t}^n. \qquad (2.4)$$

ملاحظة 2.3:

إذا كان $A = B$ من العلاقتين (2.4) و (2.3) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\mathrm{t}^n \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\mathrm{t}^n = 1, \qquad (2.5)$$

أي

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\mathrm{t}^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\mathrm{t}^n}. \qquad (2.6)$$

توطئة 2.3 :

نعتبر الأبجديتين A و B حيث $A = \{x\}$ و $B = \{b_1, b_2, ,,,,,, b_n\}$ لدينا:

$$S_{n+k}(x-B) = x^k S_n(x-B), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \qquad (2.7)$$

خاصية 3.3:

لتكن $A=\{x\}$ $B=\{b_1,b_2,,,,,,b_n\}$ لدينا:

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-bt)}{1-xt}=1+\cdots+S_{n-1}(x-B)t^{n-1}+\frac{S_n(x-B)}{1-xt}t^n. \qquad (2.8)$$

البرهان :

لدينـــــــــــا :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x-B)t^n=1+S_1(x-B)+\cdots+S_n(x-B)t^n+S_{n+1}(x-B)t^{n+1}+\cdots$$

انطلاقا من التوطئة (2.3) لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x-B)t^n&=1+S_1(x-B)+\cdots+S_n(x-B)t^n+S_{n+1}(x-B)t^{n+1}+\cdots\\&=1+S_1(x-B)+\cdots+S_n(x-B)t^n+xS_n(x-B)t^{n+1}+x^2S_n(x-B)t^{n+2}+\cdots\\&=1+S_1(x-B)+\cdots+S_{n-1}(x-B)t^{n-1}+S_n(x-B)(1+xt+x^2t^2+\cdots)t^n\\&=1+S_1(x-B)+\cdots+S_{n-1}(x-B)t^{n-1}+S_n(x-B)\frac{1}{1-xt}t^n\\&=1+S_1(x-B)+\cdots+S_{n-1}(x-B)t^{n-1}+\frac{S_n(x-B)}{1-xt}t^n.\end{aligned}$$

وهو المطلوب .

الفصل الثالث

بعض المتطابقات والتوابع المولدة

k- ما رسان لوكاس و k-مارسان

ينقسم هذا الفصل إلى قسمين، نتطرق في القسم الأول إلى بعض المتطابقات الشهيرة كمتطابقة Catalan، متطابقةCassini،متطابقة d'Ocagnes's، وكذلك متطابقة، Honsberger's or Convolutio بالإضافة إلى متطابقات أخرى، كما نقوم بإعطاء مجاميع الحدود الأولى ومجاميع حدود ذات الدليل الزوجي والفردي لكل من أعداد k-مارسان و k-مارسان لوكاس. أما في القسم ثاني فنقوم بإدخال المؤثر التناظري δ_{ab}^{k+1} على السلسلة القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)a^n t^n$ الذي يسمح لنا بإيجاد الدوال المولدة للتوابع التناظرية وجداءات هدمارت لهذه التوابع، وإستعمال هذه النظرية لإيجاد التوابع المولدة k-مارسان و k-مارسان لوكاس وكذا جداءات هدمارت لهده الأعداد، والتوابع المولدة لأعداد k-ما رسان الزوجي و الفردي.

1.3بعض المتطابقات الشهيرة و المجاميع

1.1.3 بعض المتطابقات الشهيرة

نظرية 1.3 :
من أجل كل $n \in \mathbb{N}, k \geq 1$ لدينا:

$i)$ $m_{k,n+s}m_{k,n-s} - m_{k,n}^2 = 2^{n-s} m_{k,s}^2 - 2^{n+2}$, ***(Catalan identity).***

$ii)$ $m_{k,n}m_{k,s} = m_{k,n+s} + 2^s m_{k,n-s}$,

$iii)$ $m_{k,2n} - m_{k,n}{}^2 = 2^{n-s}(m_{k,2s} - m_{k,s}{}^2)$.

البرهان:

$i)$
$$\begin{aligned} m_{k,n+s}m_{k,n-s} - m_{k,n}{}^2 &= (r_1^{n+s} + r_2^{n+s})(r_1^{n-s} + r_2^{n-s}) - (r_1^n + r_2^n)^2 \\ &= r_1^{n+s}r_2^{n-s} + r_2^{n+s}r_1^{n-s} - 2(r_1r_2)^n \\ &= r_1^{n-s}r_2^{n-s}(r_1^{2s} + r_2^{2s}) - 2^{n+1} \\ &= (r_1r_2)^{n-s}((r_1+r_2)^2 - 2^{s+1}) - 2^{n+1} \\ &= 2^{n-s}(m_{k,s}^2 - 2^{s+1}) - 2^{n+1} \\ &= 2^{n-s}m_{k,s}^2 - 2^{n+2} \end{aligned}$$

$ii)$
$$\begin{aligned} m_{k,n}m_{k,s} &= (r_1^n + r_2^n)(r_1^s + r_2^s) \\ &= r_1^{n+s} + r_2^{n+s} + r_1^n r_2^s + r_1^s r_2^n \\ &= m_{k,n+s} + r_1^s r_2^s (r_1^{n-s} + r_2^{n-s}) \\ &= m_{k,n+s} + 2^s m_{k,n-s} \end{aligned}$$

$$iii)\ m_{k,2n} - m_{k,n}{}^2 = (r_1^{2n} + r_2^{2n}) - r_1^{2n} - r_2^{2n} - 2(r_1 r_2)^n$$
$$= -2^{n+1}$$
$$= -2^{n-s}(2^{s+1})$$
$$= -2^{n-s}(-2(r_1 r_2)^s)$$
$$= 2^{n-s}((r_1^{2s} + r_2^{2s}) - r_1^{2s} - r_2^{2s} - 2(r_1 r_2)^s)$$
$$= 2^{n-s}((r_1^{2s} + r_2^{2s}) - (r_1^s + r_2^s)^2)$$
$$= 2^{n-s}(m_{k,2s} - m_{k,s}^2)$$

في نظرية 1 بوضع $s=1$ في $(i$ نتحصل على متطابقةCassini، بوضع $s=n$ في $(ii$ ،و بوضع $s=n+1$ في $(i$ نتحصل على النتيجة التالية:

نتيجة 3.1:
من أجل كل $n \in \mathrm{N}, k \geq 1$:

$i)\ m_{k,n+1}m_{k,n-1} - m_{k,n}^2 = 2^{n-1}(9k^2 - 8),$ Identity cassini .
$ii) m_{k,2n} = m_{k,n}^2 - 2^{n+1},$
$iii) m_{k,2n+1} = \frac{1}{3k}\left(m_{k,n+1}^2 + 2m_{k,n}^2 - 2^{n+3}\right).$

نظرية 2.3 ***(d'Ocagnes's Identity)***
من أجل كل $n \in \mathrm{N}, k \geq 1$ لدينا:

$$m_{k,n+1}m_{k,s} - m_{k,s+1}m_{k,n} = (9k^2 - 8)2^s M_{k,n-s}.$$

البرهان :

$$m_{k,n+1}m_{k,s} - m_{k,s+1}m_{k,n} = (r_1^{n+1} + r_2^{n+1})(r_1^s + r_2^s) - (r_1^{s+1} + r_2^{s+1})(r_1^n + r_2^n)$$
$$= r_1^{n+1}r_2^s + r_2^{n+1}r_1^s - r_1^{s+1}r_2^n - r_2^{s+1}r_1^n$$
$$= (r_1 r_2)^s (r_1^{n-s} - r_2^{n-s})(r_1 - r_2)$$
$$= 2^s \frac{(r_1^{n-s} - r_2^{n-s})}{r_1 - r_2}(r_1 - r_2)^2$$
$$= 2^s M_{k,n-s}(9k^2 - 8)$$
$$= (9k^2 - 8)2^s M_{k,n-s}$$

نظرية 3.3 ***Honsberger's or Convolution Identity***:

من أجل كل $n \in \mathrm{N}, k \geq 1$ لدينا:

$$m_{k,n+1}m_{k,s} - 2m_{k,n}m_{k,s-1} = (9k^2 - 8)M_{k,n+s}$$

البرهان:

$$\begin{aligned} m_{k,n+1}m_{k,s} - 2m_{k,n}m_{k,s-1} &= (r_1^{n+1} + r_2^{n+1})(r_1^s + r_2^s) - 2(r_1^n + r_2^n)(r_1^{s-1} + r_2^{s-1}) \\ &= r_1^{n+1+s} + r_1^{n+1}r_2^s + r_2^{n+1+s} + r_2^{n+1}r_1^s - r_1r_2(r_1^{n+s-1} + r_1^n r_2^{s-1} + r_2^{n+s-1} + r_2^n r_1^{s-1}) \\ &= r_1^{n+1+s} + r_2^{n+1+s} - r_1^{n+s}r_2 - r_2^{n+s}r_1 \\ &= (r_1^{n+s} - r_2^{n+s})(r_1 - r_2) \\ &= \frac{(r_1^{n+s} - r_2^{n+s})}{(r_1 - r_2)}(r_1 - r_2)^2 \\ &= (9k^2 - 8)M_{k,n+s} \end{aligned}$$

بوضع $s = n$ في النظرية أعلاه نتحصل على النتيجة التالية:

نتيجة 3.2:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}, k \geq 1$ لدينا :

$$i)\ M_{k,n} = \frac{1}{9k^2 - 8}\left(2m_{k,n+1} - 3km_{k,n}\right),$$

$$ii)\ M_{k,2n} = \frac{1}{9k^2 - 8}\left(2m_{k,2n+1} - 3km_{k,2n}\right),$$

$$iii)\ M_{k,2n+1} = \frac{1}{9k^2 - 8}\left(3km_{k,2n+1} - 4m_{k,2n}\right).$$

نتيجة3.3:

من أجل كل$n \in \mathbb{N}, k \geq 1$ لدينا:

$$i)\ m_{k,n} = 2M_{k,n+1} - 3kM_{k,n},$$

$$ii)\ m_{k,2n} = 2M_{k,2n+1} - 3kM_{k,2n},$$

$$iii)\ m_{k,2n+1} = 3kM_{k,2n+1} - 4M_{k,2n}.$$

نظرية 4.3 :

من أجل كل$n \in \mathbb{N}, k \geq 1$ لدينا:

$i)\ \ m_{k,n+s}m_{k,n-s}-m_{k,n}^2=2^{n-s}(9k^2-8)M_{k,s}^2,$

$ii)\ \ m_{k,n}M_{k,n}=M_{k,2n},$

$iii)\ \ m_{k,n}^2=m_{k,2n}+2^{n+1}=(9k^2-8)M_{k,n}^2+2^{n+2},$

$iv)\ \ m_{k,n}m_{k,s}+(9k^2-8)M_{k,n}M_{k,s}=2m_{k,n+s},$

$v)\ \ m_{k,n}m_{k,s}-(9k^2-8)M_{k,n}M_{k,s}=2m_{k,n-s},$

$vi)\ \ M_{k,n}m_{k,s}+M_{k,s}m_{k,n}=2M_{k,n+s},$

$vii)\ \ M_{k,n}m_{k,s}-M_{k,s}m_{k,n}=2^{s+1}M_{k,n-s}.$

البرهان:

$i)\ \ m_{k,n+s}m_{k,n-s}-m_{k,n}^2=(r_1^{n+s}+r_2^{n+s})(r_1^{n-s}+r_2^{n-s})-(r_1^n+r_2^n)^2$

$$\begin{aligned}&=r_1^{n+s}r_2^{n-s}+r_2^{n+s}r_1^{n-s}+2(r_1r_2)^n\\&=(r_1r_2)^{n-s}((r_1^{2s}+r_2^{2s})-2(r_1r_2)^s)\\&=(r_1r_2)^{n-s}((r_1^s+r_2^s)^2-2(r_1r_2)^s-2(r_1r_2)^s)\\&=2^{n-s}(m_{k,s}^2-2^{s+2}).\end{aligned}$$

لدينا: $m_{k,s}^2-2^{s+2}=(9k^2-8)M_{k,s}^2$

ومنه: $m_{k,n+s}m_{k,n-s}-m_{k,n}^2=2^{n-s}(9k^2-8)M_{k,s}^2$.

$ii)\ \ m_{k,n}M_{k,n}=(r_1^n+r_2^n)\left(\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_1}\right)$

$$\begin{aligned}&=\frac{r_1^{2n}-r_2^{2n}}{r_1-r_2}\\&=M_{k,2n}.\end{aligned}$$

$iii)\ \ m_{k,n}^2=(r_1^n+r_2^n)^2=(r_1^{2n}+r_2^{2n}+2(r_1r_2)^n)$

$$=m_{k,2n}+2^{n+1}$$

ولدينا : $m_{k,n}^2-2^{n+2}=(9k^2-8)M_{k,n}^2$

$$m_{k,n}^2=(9k^2-8)M_{k,n}^2+2^{n+2}$$

ومنه :

$$m_{k,n}^2 = m_{k,2n} + 2^{n+1} = (9k^2-8)M_{k,n}^2 + 2^{n+2}.$$

$$iv)\quad m_{k,n}m_{k,s} + (9k^2-8)M_{k,n}M_{k,s} = (r_1^n + r_2^n)(r_1^s + r_2^s) + (9k^2-8)\left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}\right)\left(\frac{r_1^s - r_2^s}{r_1 - r_2}\right)$$

$$= r_1^{n+s} + r_1^n r_2^s + r_2^n r_1^s + r_2^{n+s} + \frac{9k^2-8}{(r_1-r_2)^2}(r_1^n - r_2^n)(r_1^s - r_2^s)$$

$$= 2(r_1^{n+s} + r_2^{n+s})$$

$$= 2m_{k,n+s}.$$

$$v)\quad m_{k,n}m_{k,s} - (9k^2-8)M_{k,n}M_{k,s} = r_1^n r_2^s + r_2^n r_1^s + r_1^n r_2^s + r_2^n r_1^s$$

$$= 2(r_1 r_2)^s (r_1^{n-s} + r_2^{n-s})$$

$$= 2^{s+1} m_{k,n-s}.$$

$$vi)\quad M_{k,s}m_{k,n} + M_{k,n}m_{k,s} = \frac{r_1^s - r_2^s}{r_1 - r_2}(r_1^n + r_2^n) + \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}(r_1^s + r_2^s)$$

$$= \frac{r_1^{n+s} - r_2^{n+s}}{r_1 - r_2} + \frac{r_1^{n+s} - r_2^{n+s}}{r_1 - r_2}$$

$$= 2\left(\frac{r_1^{n+s} - r_2^{n+s}}{r_1 - r_2}\right)$$

$$= 2M_{k,n+s}.$$

$$vii)\quad M_{k,n}m_{k,s} - M_{k,s}m_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}(r_1^s + r_2^s) - \frac{r_1^s - r_2^s}{r_1 - r_2}(r_1^n + r_2^n)$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1^n r_2^s - r_1^s r_2^n - r_1^s r_2^n + r_2^s r_1^n)$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} 2((r_1 r_2)^s (r_1^{n-s} - r_2^{n-s}))$$

$$= 2^{s+1}\frac{r_1^{n-s} - r_2^{n-s}}{r_1 - r_2}$$

$$= 2^{s+1} M_{k,n-s}.$$

2.1.3 مجموع الحدود الأولى لأعداد k-مارسان و k-مارسان لوكاس

نظرية5.3:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}, k > 1$ لدينا :

1) $\sum_{i=0}^{n} M_{k,i} = \frac{M_{k,n+1}-2M_{k,n}-1}{3(k-1)}$,

2) $\sum_{i=0}^{n} M_{k,2i} = \frac{M_{k,2(n+1)}-4M_{k,2n}-3k}{9(k^2-1)}$,

3) $\sum_{i=0}^{n} M_{k,2i+1} = \frac{M_{k,2n+3}-4M_{k,2n+1}-3}{9(k^2-1)}$,

4) $\sum_{i=0}^{n} m_{k,i} = \frac{m_{k,n+1}-2m_{k,n}+3k-2}{3(k-1)}$,

5) $\sum_{i=0}^{n} m_{k,2i} = \frac{m_{k,2(n+1)}-4m_{k,2n}+9k^2-6}{9(k^2-1)}$,

6) $\sum_{i=0}^{n} m_{k,2i+1} = \frac{m_{k,2n+3}-4m_{k,2n+1}+3k}{9(k^2-1)}$.

البرهان :

1) $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} M_{k,i} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{r_1^i - r_2^i}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\sum_{i=0}^{n} r_1^n + \sum_{i=0}^{n} r_2^n\right) \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\frac{r_1^{n+1}-1}{r_1-1} - \frac{r_2^{n+1}-1}{r_2-1}\right) \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\frac{-((r_1^{n+1}-r_2^{n+1}) - r_1 r_2 (r_1^n - r_2^n) + r_1 + r_2}{-3(k-1)}\right) \\ &= \frac{M_{k,n+1} - 2M_{k,n} + 3k}{3(k-1)}.\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} M_{k,2i} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{r_1^{2i} - r_2^{2i}}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\sum_{i=0}^{n} r_1^{2i} - \sum_{i=0}^{n} r_2^{2i}\right) \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\frac{r_1^{2(n+1)}-1}{r_1-1} - \frac{r_2^{2(n+1)}-1}{r_2-1}\right) \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\frac{-((r_1^{2(n+1)} - r_2^{2(n+1)}) - (r_1 r_2)^2 (r_1^{2n} - r_2^{2n}) - (r_1^2 + r_2^2)}{-9(k^2-1)}\right) \\ &= \frac{M_{k,2(n+1)} - 4M_{k,2n} - 3k}{9(k^2-1)}.\end{aligned}$$

3) $$\sum_{i=0}^{n} M_{k,2i+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{r_1^{2i+1} - r_2^{2i+1}}{r_1 - r_2}$$
$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\sum_{i=0}^{n} r_1^{2i+1} - \sum_{i=0}^{n} r_2^{2i+1}\right)$$
$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(r_1 \frac{r_1^{2(n+1)} - 1}{r_1^2 - 1} - r_2 \frac{r_2^{2(n+1)} - 1}{r_2^2 - 1}\right)$$
$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\frac{-((r_1^{2n+3} - r_2^{2n+3}) + (r_1 r_2)^2 (r_1^{2n+1} - r_2^{2n+1}) - (r_1 - r_2)(r_1 r_2 + 1)}{-9(k^2 - 1)}\right)$$
$$= \frac{M_{k,2n+3} + 4M_{k,2n+1} - 3}{9(k^2 - 1)}.$$

4) $$\sum_{i=0}^{n} m_{k,i} = \sum_{i=0}^{n} (2M_{k,i+1} - 3kM_{k,i})$$
$$= 2\sum_{i=0}^{n} M_{k,i+1} - 3k \sum_{i=0}^{n} M_{k,i}.$$

ولدينا من جيهة أخرى:

$$\sum_{i=0}^{n} M_{k,i+1} = \sum_{j=1}^{n+1} M_{k,j}$$
$$= M_{k,0} + \sum_{j=1}^{n+1} M_{k,j}$$
$$= \sum_{j=0}^{n+1} M_{k,j}$$
$$= \frac{M_{k,n+2} - 2M_{k,n+1} + 3k}{3(k-1)}.$$

ومنه:

$$\sum_{i=0}^{n} m_{k,i} = 2\sum_{i=0}^{n} M_{k,i+1} - 3k \sum_{i=0}^{n} M_{k,i}$$
$$= 2\frac{M_{k,n+2} - 2M_{k,n+1} + 1}{3(k-1)} - 3k \frac{M_{k,n+1} - 2M_{k,n} + 1}{3(k-1)}$$
$$= \frac{2M_{k,n+2} - 3kM_{k,n+1} - 2(2M_{k,n+1} - 3kM_{k,n}) + 3k - 2}{3(k-1)}$$
$$= \frac{m_{k,n+1} - 2m_{k,n} + 3k - 2}{3(k-1)}.$$

5) $$\sum_{i=0}^{n} m_{2i} = 2\sum_{i=0}^{n} M_{k,2i+1} - 3k\sum_{i=0}^{n} M_{k,2i}$$
$$= 2\frac{M_{k,2n+3} - 4M_{k,2n+1} - 3}{9(k^2-1)} - 3k\ \frac{M_{k,2(n+1)} - 4M_{k,2n} - 3}{9(k^2-1)}$$
$$= \frac{2M_{2n+3} - 3kM_{2n+2} - 4(2M_{k,2n+1} - 3kM_{k,2n}) + 9k^2 - 6}{9(k^2-1)}$$
$$= \frac{m_{k,2(n+1)} - 4m_{k,2n} + 9k^2 - 6}{9(k^2-1)}.$$

6) $$\sum_{i=0}^{n} m_{k,2i+1} = 3k\sum_{i=0}^{n} M_{k,2i+1} - 4\sum_{i=0}^{n} M_{k,2i}$$
$$= 3k\ \frac{M_{k,2n+3} - 4M_{k,2n+1} - 3}{9(k^2-1)} - 4\frac{M_{k,2(n+1)} - 4M_{k,2n} - 3}{9(k^2-1)}$$
$$= \frac{3kM_{2n+3} - 4M_{2n+2} - 4(3kM_{k,2n+1} - 4M_{k,2n}) + 3k}{9(k^2-1)}$$
$$= \frac{m_{k,2n+3} - 4m_{k,2n+1} + 3k}{9(k^2-1)}.$$

3.1.3 المصفوفات المولدة لأعداد k-مارسان و k-مارسان لوكاس

نعتبر المصفوفتين التاليتين المربعتين $A = \begin{pmatrix} 3k & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$، $B = \begin{pmatrix} \frac{3k}{2} & \frac{9k^2-8}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3k}{2} \end{pmatrix}$.

نظرية 6.3 :

من أجل كل $n \in \mathbb{Z}$ ، $k > 1$

$$i)\ A^n = \begin{pmatrix} M_{k,n+1} & -2M_{k,n} \\ M_{k,n} & -2M_{k,n-1} \end{pmatrix},$$

$$ii)\ B^n = \begin{pmatrix} \frac{m_{k,n}}{2} & \frac{(9k^2-8)M_{k,n}}{2} \\ \frac{M_{k,n}}{2} & \frac{m_{k,n}}{2} \end{pmatrix}.$$

2.3 تعاريف ومفاهيم

تعريف 1.3:

لتكن الأبجدية $A = \{a_1, a_2\}$ نعرف المؤثر التناظري δ_{ab}^k بالعلاقة التالية :

$$\delta_{a_1a_2}^k f(a_1) = \frac{a^k f(a_1) - a_2{}^k f(a_2)}{a_1 - a_2},\ k \in \mathbb{N}. \qquad (3.1)$$

حيث f تابع معرف على $\mathbb{C}$.

ملاحظة 1.3 :

إذا كان $f(a_1)=a_1$ المؤثر(3.1) يعطى بالعلاقة:

$$\delta^k_{a_1a_2}a_1 = S_k(a_1+a_2) \quad .$$

إذا كان $f(a_2)=a_2$ لمؤثر(3.1) يعطى بالعلاقة:

$$\delta^k_{a_1a_2}a_2 = -\delta_{a_1a_2}({a_2}^k).$$

خاصية 1.3:

لتكن الأبجدية $A=\{a_1,a_2\}$، من أجل كل عدد طبيعي k لدينا:

$$\delta^{k+1}_{a_1a_2}f(a_1) = S_k(A)f(a_1)+{a_2}^{k+1}\partial_{a_1a_2}f(a_1).$$

البرهان:

لدينا:

$$\begin{aligned}\delta^{k+1}_{ab}f(a_1) &= \frac{{a_1}^{k+1}f(a_1)-{a_2}^{k+1}f(a_2)}{a_1-a_2}\\ &= \frac{{a_1}^{k+1}f(a_1)-{a_2}^{k+1}f(a_2)+{a_2}^{k+1}f(a_1)-{a_2}^{k+1}f(a_1)}{a_1-a_2}\\ &= \frac{{a_1}^{k+1}-{a_2}^{k+1}}{a_1-a_2}f(a_1)+{a_2}^{k+1}\frac{f(a_1)-f(a_2)}{a_1-a_2}\\ &= S_k(A)f(a_1)+{a_2}^{k+1}\partial_{a_1a_2}f(a_1).\end{aligned}$$

3.3 نتائج أساسية

نظرية7.3:

لتكن الأبجدية $A=\{a_1,a_2\};B=\{b_1,b_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)S_{n+k}(B)t^n = \frac{S_k(B)-b_1b_2(a_1+a_2)S_{k-1}(B)t-a_1a_2b_1b_2\delta_{b_1b_2}({b_2}^k)t^2}{\prod_{a\in}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2t)}. \tag{3.2}$$

البرهان:

بإدخال المؤثر $\delta^{k+1}_{b_1b_2}$ على السلسلة $f(b_1)=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A){b_1}^nt^n$.

الطرف الأيسر للعلاقة (3.2) يكتب على الشكل:

$$\delta_{b_1b_2}^{k+1} f(b_1) = \delta_{b_1b_2}^{k+1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) b_1^{\,n} t^n\right)$$

$$= \frac{b_1^{\,k+1}\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) b_1^{\,n} t^n - b_2^{\,k+1}\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) b_2^{\,n} t^n}{b_1 - b_2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\left(\frac{b_1^{\,n+k+1} - b_2^{\,n+k+1}}{b_1 - b_2}\right) t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) S_{n+k}(B) t^n .$$

من جهة اخرى و باعتبار $f(b_1) = \dfrac{1}{\prod_{a\in A}(1-ab_1 t)}$ لدينا:

ومنه حسب الخاصية (3.1) لدينا:

$$\delta_{b_1b_2}^{k+1} f(b_1) = \delta^{k+1}{}_{b_1b_2} \frac{1}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)}$$

$$= \frac{b_1^{k+1}\dfrac{1}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)} - b_2^{k+1}\dfrac{1}{\prod_{a\in A}(1-ab_2t)}}{b_1-b_2}$$

$$= \frac{b_1^{k+1}\prod_{a\in A}(1-ab_2t) - b_2^{k+1}\prod_{a\in A}(1-ab_1t)}{(b_1-b_2)\prod_{a\in A}(1-ab_2t)\prod_{a\in A}(1-ab_1t)}$$

$$= \frac{b_1^{k+1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right) - b_2^{k+1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)}{(b_1-b_2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n b_2^n \left(\dfrac{b_1^{k+1-n} - b_2^{k+1-n}}{b_1-b_2}\right) t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n b_2^n S_{k-n}(b_1+b_2)t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_2^n z^n\right)}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{k} S_n(-A)b_1^n b_2^n S_{k-n}(p_1+p_2)t^n + \sum_{n=k}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n b_2^n S_{k-n}(b_1+b_2)t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{k} S_n(-A)b_1^n b_2^n S_{k-n}(b_1+b_2)t^n + \sum_{n=k}^{+\infty} S_n(-A)b_1^{k+1} b_2^{k+1}\left(\dfrac{b_2^{n-k+1} - b_1^{n-k+1}}{p_1-p_2}\right) t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{k} S_n(-A)b_1^n b_2^n S_{k-n}(B)t^n - \sum_{n=k}^{+\infty} S_n(-A)b_1^{k+1} b_2^{k+1} S_{n-k}(B)t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)}$$

$$\delta_{b_1b_2}^{k+1} f\ (b_1) = \frac{\sum_{n=0}^{k} S_n(-A) b_1^n b_2^n S_{k-n}(b_1+b_2)t^n - b_1^{k+1} b_2^{k+1} \sum_{n=k+2}^{+\infty} S_n(-A) S_{n-k}(b_1+b_2)t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) b_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) b_2^n t^n\right)}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{k} S_n(-A) p_1^n p_2^n S_{k-n}(B) t^n - b_1^{k+1} b_2^{k+1} t^{k+2} \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+k}(-A) S_n(B) t^n}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) b_1^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) b_2^n t^n\right)}$$

$$= \frac{S_k(B) - b_1 b_2 (a_1+a_2) S_{k-1}(B) t - a_1 a_2 b_1 b_2 \delta_{b_1 b_2}(b_2^{\,k}) t^2}{\prod_{a\in} (1-ab_1 t) \prod_{a\in A} (1-ab_2 t)}$$

4.3 تطبيقات

- **الحالة الأولى** : $A=\{a_1,a_2\}, B=\{0\}$

من العلاقة (2.2) نتحصل على النتيجة التالية :

نتيجة 3.4:

نعتبر الأبجدية $A=\{a_1,a_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\,\mathrm{t}^n = \frac{1}{(1-a_1\,\mathrm{t})(1-a_2\,\mathrm{t})}. \qquad (3.3)$$

من العلاقة(3.3) نتحصل على النتيجة التالية :

نتيجة 3.5:

نعتبر الأبجدية $A=\{a_1,a_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(A)\,\mathrm{t}^n = \frac{t}{(1-a_1\,\mathrm{t})(1-a_2\,\mathrm{t})}. \qquad (3.4)$$

نتيجة 3.6:

نعتبر الأبجدية $A=\{a_1,a_2\}$، لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}(A)\,\mathrm{t}^n = \frac{(a_1+a_2)-a_1a_2t}{(1-a_1\,\mathrm{t})(1-a_2\,\mathrm{t})}. \qquad (3.5)$$

- **الحالة الثانية :**

من النظرية 2.3 وحسب قيم $k \in \{0,1,2\}$ نتحصل على النتائج التالية :

أ - من أجل $k=0$

من العلاقة (3.2) نتحصل على النتيجة التالية :

نتيجة 3.7:

لتكن الابجدية $A=\{a_1,a_2\};B=\{b_1,b_2\}$. لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)S_n(B)t^n = \frac{1-a_1a_2b_1b_2t^2}{(1-a_1b_1t)(1+a_2b_1t)(1+a_1b_2t)(1-a_2b_2t)}. \quad (3.6)$$

من نتيجة (3.5) *نتحصل على نتيجة التالية:*

نتيجة3.8:

لتكن الابجدية $A=\{a_1,a_2\};B=\{b_1,b_2\}$. لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(A)S_{n-1}(B)t^n = \frac{t-a_1a_2b_1b_2t^3}{(1-a_1b_1t)(1+a_2b_1t)(1+a_1b_2t)(1-a_2b_2t)}. \quad (3.7)$$

ب - من أجل $k=1$

نتيجة 3.9:

لتكن الابجدية $A=\{a_1,a_2\};B=\{b_1,b_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)S_{n+1}(B)t^n = \frac{(b_1-b_2)-b_1b_2(a_1-a_2)t}{(1-a_1b_1t)(1+a_2b_1t)(1+a_1b_2t)(1-a_2b_2t)}. \quad (3.8)$$

نتيجة 3.10:

لتكن الأبجدية $A=\{a_1,a_2\};B=\{b_1,b_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)S_{n-1}(B)t^n = \frac{(a_1-a_2)t+(b_1-b_2)a_1a_2t^2}{(1-a_1b_1t)(1-a_2b_1t)(1-a_1b_2t)(1-a_2b_2t)}. \quad (3.9)$$

نتيجة3.11 :

لتكن الأبجدية $A=\{a_1,a_2\};B=\{b_1,b_2\}$ لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(A)S_{n-1}(B)t^n = \frac{(a_1-a_2)t^2+a_1a_2(b_1-b_2)t^3}{(1-a_1b_1t)(1-a_2b_1t)(1-a_1b_2t)(1-a_2b_2t)}. \quad (3.10)$$

ج - من أجل $k=2$

نتيجة 3.12:

لتكن الأبجدية $A=\{a_1,a_2\};B=\{b_1,b_2\}$، لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A)S_{n+2}(B)t^n=\frac{((a_1+a_2)^2-a_1a_2+a_1a_2b_1^2b_2^2t^3}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2t)}. \quad (3.11)$$

نتيجة3.13 :

لتكن الأبجدية $A=\{a_1,a_2\};B=\{b_1,b_2\}$، لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n+1}(A)S_{n-1}(B)t^n=\frac{\left((b_1+b_2)^2-b_1b_2\right)t+b_1b_2a_1^2a_2^2t^3}{(1-a_1b_1t)(1-a_2b_1t)(1-a_1b_2t)(1-a_2b_2t)}. \quad (3.12)$$

5.3 الدوال المولدة لجداءات أعداد k-مارسان و k-مارسان لوكاس

1.5.3الدوال المولدة لأعداد k-مارسان

باستبدال a_2 بـ $(-a_2)$ في العلاقة (3.3) نتحصل على العلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n\left(a_1+[-a_2]\right)t^n=\frac{1}{1-(a_1-a_2)\,t-a_1a_2t^2}. \quad (3.13)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_{n-1}(a_1+[-a_1])\,t^n=\frac{t}{(1-a_1\,t)(1-a_2\,t)}. \quad (3.14)$$

1.بوضع $\begin{cases}a_1-a_2=3k\\ a_1a_2=-2\end{cases}$ في العلاقة (3.14)،(3.13) نتحصل على النتائج التالية:

نتيجة 3.14 :

الدالة المولدة لأعداد k-مارسان تعطى بالعلاقة التالية :

من أجل $n\in\mathbb{N}$

$$i)\ \sum_{n=0}^{+\infty}M_{k,n}t^n=\frac{t}{1-3kt+2t^2},$$

$$ii)\ \sum_{n=0}^{+\infty}M_{k,n+1}t^n=\frac{1}{1-3kt+2t^2}.$$

حيث $A=\{a_1,-a_2\}$: $M_{k,n}=S_{n-1}(A), M_{k,n+1}=S_n(A)$.

نتيجة 3.15:

لما $k=1$ نتحصل على الدالة المولدة مارسان:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_n t^n = \frac{t}{1-3t+2t^2},$$

2.5.3 الدوال المولدة k-مارسان لوكاس

نظرية 7.3

الدالة المولدة لأعداد k -مارسان لوكاس تعطى بالعلاقة التالية:

من أجل $n \in \mathbb{N}$

$$i)\ \sum_{n=0}^{\infty} m_{k,n} t^n = \frac{2-3kt}{1-3kt+2t^2},$$

$$ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} m_{k,n+1} t^n = \frac{3k-4t}{1-3kt+2t^2}.$$

البرهان :

$i)$

بضرب (3.13) في 2 وجمعها مع العلاقة (3.14) المضروبة ب $-3k$ ونتحصل على الدالة المولدة

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2S_n(A) - 3kS_{n-1}(B)t^n = \frac{2-3kt}{1-3kt+2t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} m_{k,n} t^n$$

حيث: $m_{k,n} = 2S_n(A) - 3kS_{n-1}(B)$

$ii)$

بضرب العلاقة (13.3) في $3k$ وجمعها مع العلاقة (14.3) المضروبة -4 لنتحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3kS_n(A) - 4S_{n-1}(B)t^n = \frac{3k-4t}{1-3kt+2t^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} m_{k,n+1} t^n.$$

حيث: $m_{k,n+1} = 3kS_n(A) - 4S_{n-1}(B)$

3.5.3 الدوال المولدة لجداءات أعداد k-مارسان

باستبدال a_2 ب $-a_2$ و b_2 ب $-b_2$ في العلاقة (3.2)

1.بوضع $\begin{cases} a_1 - a_2 = 3k \\ a_1 a_2 = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} b_1 - b_2 = 3k \\ b_1 b_2 = -2 \end{cases}$ في العلاقتين (6.3)، (7.3) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) S_n(B) t^n = \frac{1+2t}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(A) S_{n-1}(B) t^n = \frac{t+2t^2}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3}$$

ومنه: $S_{n-1}(A)S_{n-1}(B) = M_{k,n}^2$ و $S_n(A)S_n(B) = M_{k,n+1}^2$

نتيجة 3.17

الدوال المولدة لمربع متتالية أعداد k-مارسان هي :

من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+1}^2 t^n = \frac{1+2t}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n^2 t^n = \frac{t+2t^2}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3}.$$

2..بوضع $\begin{cases} a_1 - a_2 = 3k \\ a_1 a_2 = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} b_1 - b_2 = 3k \\ b_1 b_2 = -2 \end{cases}$ في العلاقتين (3.9) و (3.12) نتحصل على :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) S_{n-1}(B) t^n = \frac{3kt}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(A) S_{n+1}(B) t = \frac{(9k^2-2)t-4t^2}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3},$$

ومنه:

$$M_{k,n}M_{k,n+2} = S_{n-1}(A)S_{n+1}(B) \text{ و } M_{k,n}M_{k,n+1} = S_{n-1}(A)S_n(B).$$

نتيجة 3.18:

الدوال المولدة لجداءات الأعداد متتالية وغير متتالية لأعداد k-مارسان تعطى بالعلاقة التالية:

من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$i)\ \sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n} M_{k,n+1} t^n = \frac{3kt}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3},$$

$$ii)\ \sum_{n=}^{+\infty} M_{k,n} M_{k,n+2} t^n = \frac{(9k^2-2)t-4t^2}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3}.$$

نظرية8.3:

الدوال المولدة لمتتالية أعداد k-مارسان دات دليل الزوجي ودات الدليل الفردي تعطى بالعلاقة التالية:

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$i)\ \sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,2n} t^n = \frac{3kt}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2},$$

$$ii)\ \sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,2n+1} t^n = \frac{1-2t}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2}.$$

البرهان:

$i)$

$$M_{k,n+s} = M_{k,n+1} M_{k,s} - 2M_{k,n} M_{k,s-1} \qquad (*)$$

بوضع $s = n$ في (*) نحصل على:

$$M_{k,2n} = M_{k,n} M_{k,n+1} - 2M_{k,n-1} M_{k,n}$$

من العلاقة :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n} M_{k,n+1} t^n = \frac{3kt}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3},$$

نستنتج :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n-1} M_{k,n} t^n = \frac{3kt^2}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3},$$

حينئذ:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,2n} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n} M_{k,n+1} t^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n-1} M_{k,n} t^n$$

$$= \frac{3kt}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3} - 2\frac{3kt^2}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3}$$

$$= \frac{3kt}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2}.$$

ii)

بوضع $n = s+1$ *في* (*) *نتحصل*

$$M_{k,2n+1} = M_{k,n+1}^2 - 2M_{k,n}^2$$

ولدينا نتيجة

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n}^2 t^n = \frac{t+2t^2}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3},$$

و

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n+1}^2 t^n = \frac{1+2t}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3},$$

نحصل على

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,2n+1} t^n = \frac{1+2t}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3} - 2\frac{t+2t^2}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3}$$

$$= \frac{1+2t}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2}$$

$M_{k,2n+1} = S_n(A)S_n(B) - 2S_{n-1}(A)S_{n-1}(B).$ و $M_{k,2n} = S_{n-1}(A)S_n(B) - 2S_{n-2}(A)S_{n-1}(B).$

4.5.3 الدوال المولدة لجداءات k-مارسان لوكاس

نظرية9.3(*الدوال المولدة لمربع متتالية* k-*مارسان لوكاس*)

من أجل $n \in \mathbb{N}$ *لدينا:*

i) $$\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,n}^2 t^n = \frac{4-(27k^2-8)t+18k^2t^2}{1-\left(9k^2-2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3},$$

ii) $$\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,n+1}^2 t^n = \frac{9k^2-(54k^2-16)t+32t^2}{1+\left(2-9k^2\right)t+\left(18k^2-4\right)t^2-8t^3},$$

البرهان:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,n}^2 t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2M_{k,n+1} - 3kM_{k,n})^2$$
$$= 4\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n+1}^2 t^n - 12k \sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n+1} M_{k,n} t^n + 9k^2 \sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n}^2 t^n$$

باستعمال العلاقات الموجدة في النتائج (17.3)و(18.3) و بعد التعويض نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,n}^2 t^n = \frac{4 - (27k^2 - 8)t + 18k^2 t^2}{1 - (9k^2 - 2)t + (18k^2 - 4)t^2 - 8t^3}$$

ii)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,n+1}^2 t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (3kM_{k,n+1} - 4M_{k,n})^2$$
$$= 9k^2 \sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n+1}^2 t^n - 24k \sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n+1} M_{k,n} t^n + 16 \sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,n}^2 t^n$$

باستعمال العلاقات الموجدة في النتائج (17.3)و(18.3) و بعد التعويض نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,n+1}^2 t^n = \frac{9k^2 - (54k^2 - 16)t + 32t^2}{1 + (2 - 9k^2)t + (18k^2 - 4)t^2 - 8t^3}.$$

$m_{k,n+1}^2 = 9k^2 S_n(A) S_n(B) - 24k S_n(A) S_{n-1}(B) + 16 S_{n-1}(A) S_{n-1}(B)$. و

$m_{k,n}^2 = 4S_n(A) S_n(B) - 12k S_n(A) S_{n-1}(B) + 9k^2 S_{n-1}(A) S_{n-1}(B)$

نظرية10.3

الدوال المولدة لجداءات الأعداد المتتالية وغير المتتالية k-مارسان لوكاس *تعطى بالعلاقة التالية:*

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

i) $\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,n} m_{k,n+1} t^n = \frac{6k - 27k^3 t + 24kt^2}{1 + (2 - 9k^2)t + (18k^2 - 4)t^2 - 8t^3}$,

ii) $\sum_{n=}^{+\infty} m_{k,n} m_{k,n+2} t^n = \frac{18k^2 - 8 - (81k^4 - 54k^2 + 16)t + 36k^2 t^2}{1 + (2 - 9k^2)t + (18k^2 - 4)t^2 - 8t^3}$,

البرهان:

i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{k,n} m_{k,n+1} t^n = 9k^2 \sum_{n=0}^{\infty} M^2_{k,n+1} t^n - (9k^2+8) \sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n} . M_{k,n+1} t^n + 16 \sum_{n=0}^{\infty} M^2_{k,n} t^n$$

باستعمال العلاقات الموجدة في النتائج (17.3)و(18.3) و بعد التعويض نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{k,n} m_{k,n+1} t^n = \frac{6k - 27k^3 t + 24kt^2}{1 + (2 - 9k^2)t + (18k^2 - 4)t^2 - 8t^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{k,n} m_{k,n+2} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2M_{k,n+1} - 3kM_{k,n})((9k^2 - 4)M_{k,n+1} - 6kM_{k,n}) t^n$$

$$= (18k^2 - 8) \sum_{n=0}^{\infty} M^2_{k,n+1} t^n - 27k^3 \sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n} . M_{k,n+1} t^n + 18k^2 \sum_{n=0}^{\infty} M^2_{k,n} t^n$$

باستعمال العلاقات الموجدة في النتائج (17.3)و(18.3) و بعد التعويض نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{k,n} m_{k,n+2} t^n = \frac{18k^2 - 8 - (81k^4 - 54k^2 + 16)t + 36k^2 t^2}{1 + (2 - 9k^2)t + (18k^2 - 4)t^2 - 8t^3}$$

حيث:

$m_{k,n} m_{k,n+2} = (18k^2 - 8) S_n(A) S_n(B) - 27k^3 S_n(A) S_{n-1}(B) + 18k^2 S_{n-1}(A) S_{n-1}(B)$ و

$m_{k,n} m_{k,n+1} = 6k S_n(A) S_n(B) - (9k^2 + 8) S_n(A) S_{n-1}(B) + 12k S_{n-1}(A) S_{n-1}(B).$.

نظرية 11.3 :

الدوال المولدة لمتتالية أعداد k-مارسان لوكاس ذات دليل الزوجي وذات الدليل الفردي تعطى بالعلاقة التالية:

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

i) $\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,2n} t^n = \frac{2 - (9k^2 + 4)t}{1 - (9k^2 - 4)t + 4t^2},$

ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,2n+1} t^n = \frac{3k - 18kt}{1 - (9k^2 - 4)t + 4t^2}.$

البرهان:

i)

بوضع $n = 2n$ في النتيجة 3

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,2n}t^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,2n+1}t^n - 3k\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,2n}t^n$$
$$= 2\frac{1-2t}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2} - 3k\frac{3kt}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2}$$
$$= \frac{2-\left(9k^2+4\right)t}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2}.$$

بوضع $n=2n+1$ في النتيجة

$$m_{k,2n} = 2M_{k,2n+1} - 3kM_{k,2n},$$

إذن
$$m_{k,2n+1} = 3kM_{k,2n+1} - 4M_{k,2n},$$

حسب النظرية 5:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m_{k,2n+1}t^n = 3k\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,2n+1}t^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} M_{k,2n}t^n$$
$$= 3k\frac{1-2t}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2} - 4\frac{3kt}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2}$$
$$= \frac{3k-18kt}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2}$$

من نظرية 8.3 نستنتج:

و $m_{k,2n} = 2(S_n(A)S_n(B) - 2S_{n-1}(A)S_{n-1}(B)) - 3k(S_{n-1}(A)S_n(B) - 2S_{n-2}(A)S_{n-1}(B))$
$m_{k,2n+1} = 3k(S_n(A)S_n(B) - 2S_{n-1}(A)S_{n-1}(B)) - 4(S_{n-1}(A)S_n(B) - 2S_{n-2}(A)S_{n-1}(B))$

5.5.3 الدالة المولدة لجداء أعداد k-مارسان مع أعداد k-مارسان لوكاس

نظرية12.3 :

من أجل $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{k,n}M_{k,n}t^n = \frac{3kt}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2}.$$

البرهان:

لدينا : $m_{k,n}M_{k,n} = M_{k,2n}$

لدينا مما سبق:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,2n} t^n = \frac{3kt}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2}.$$

ومنه :

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{k,n} M_{k,n} t^n = \frac{3kt}{1-\left(9k^2-4\right)t+4t^2}$$

نستنتج :

$$m_{k,n} M_{k,n} = S_{n-1}(B) S_n(A) - 2S_{n-2}(A) S_{n-1}(B).$$

الخاتمة

الخاتمة

ختاما قمنا من خلال هذه المذكرة بإيجاد بعض المتطابقات الشهيرة لكل من أعداد k-مارسان و k-مارسان لوكاس، و حساب الدوال المولدة لهذه الأعداد و الدوال المولدة لجداءات هادمار (Hadamard) لهذه الأعداد و ذلك باستعمال تقنية التوابع التناظرية و بالأخص النظرية الأساسية للتوابع التناظرية (نظرية 1.3) في الفصل الثالث و بالإستعانة ببعض المتطابقات المتحصل عليها .

المراجع

المراجع باللغة العربية

[1] أ. حميد شراري، م.عبد العزيز الزهيري، مقدمة في نظرية التركيبات، مطبوعات جامعة سعود، المملكة العربية السعودية، 2010.

المراجع باللغة الأجنبية

[2] A. Abderrazzak, *Généralisation de la Transformation d' Euler d' une série formelle* , Adv. Math. - 1994. - Vol. 103. - pp. 180-195.

[3] A. Abderrezzak, *Généralisation d' identitès de Carlitz, Howard et Lehmer* , A equationes Math. - 1995. - Vol. 49. - pp. 36-46.

[4] A. Boussayoud, S. Boughaba, M. Kerada, S. Araci and M. Acikgoz, Generating functions of binary products of k-Fibonacci and orthogonal polynomials, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., RACSAM. DOI: 10.1007/s13398-019-00641-4, (2019), 12page.

[5]A. Boussayoud, M. Kerada and N. Harrouche, On the k-Lucas numbers and Lucas Polynomials, Turkish Journal of Analysis and Number.5(3) 121-125, (2017).

[6] A. Boussayoud, M. Chelgham and S. Boughaba, On some identities and generating functions for Mersenne numbers and polynomials, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*., 6(3), 93-97, (2018)

[7] A. Boussayoud and A. Abderrezzak and M. Kerada, Some applications of symmetric functions, Integers. 15, A#48, 1-7, (2015).

[8] M.Chelgham and A. Boussayoud, On the k-Mersenne-Lucas numbers, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 27(1), 7-13, (2021).

[9] A. D. Godase and M. B. Dhakne, On the properties of k-Fibonacci and k-Lucas numbers, Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech. 2(1) , 100-106, (2014)

[10] S. Ligh, L. Neal, A note on Mersenne numbers, *Mathematics Magazine*, 47(4), 231-233, (1974) .

[11] N. Saba and A. Boussayoud, Mersenne Lucas numbers and complete homogeneous symmetric functions, *J. Math. Computer Sci.*, 24, 127-139, (2022).

[12] N. Taskara,, K. Uslu and H. Gulec, On the properties of Lucas numbers with binomial coefficients, *Appl. Math. Lett.*, 23(1), 68-72, (2010).

[13] K. Uslu, V. Deniz, Some identities of k- Mersenne numbers, Adv. Appl. Discrete Math., 1(8), 413-423,(2017).

.