République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik BenYahia - Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Sur l' équation fonctionnelle $P(f) = f(P)$ dans un corps non archimédien

Présenté par :

Boudjerida rofia

Devant le jury :

Président :	**T. Zerzaihi**	Prof. Université de Jijel
Encadreur :	**B. Saoudi**	M.A.A Université de Jijel
Examinateur :	**F. Selamnia**	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à **Dieu** tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a donné durant ces longue années d'étude et le courage pour terminer ce mémoire.

Tout d'abord, Je suis honoré de remercier l'encadreur **B. Saoudi** qui m'a guidé, aidé et encouragé, surtout ses précieux conseils qui m'ont aidé à nourrir ma réflexion.

Je remercie également les membres du jury, le président **T. Zerzaihi**, l'examinateur **F. Selamnia**, d'avoir accepté l'évaluation de mon travail.

Aussi, je remercie tous les enseignants qui ont contribué à notre formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématiques.

Enfin, Je remercie sincèrement ma famille et mes amis pour leur patience, leur intérêt et leurs encouragements envers moi, je remercie enfin tous ceux qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.

$\mathbb{K}$	:	Un corps.
p	:	Un nombre premier.
v	:	La valuation sur $\mathbb{K}$.
$d(a,r)$	:	Le disque fermé de centre a et de rayon r.
$d^{-}(a,r)$	:	Le disque ouvert de centre a et de rayon r.
$D(a,r)$	:	L'un ou l'autre de ces deux disque.
$C(a,r)$	:	Le cercle de centre a et de rayon r.
v_p	:	La valuation p-adique.
$\lvert \cdot \rvert_p$	:	La norme p-adique.
$\mathbb{Z}_p$	:	Anneau des entiers p-adiques.
$\mathbb{Q}_p$	:	Corps des nombres p-adiques.
$\overline{\mathbb{Q}}_p$	:	La clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$.
$\mathbb{C}_p$	:	Corps des nombres complexes p-adiques.
$\mathcal{A}(D(a,r))$	:	L'ensemble des fonctions analytiques sur $D(a,r)$.
$\mathbb{C}_p[X]$	:	L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$	:	L'ensemble des fonctions entiers sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$	:	L'ensemble des fonctions entiers transcendantes sur $\mathbb{C}_p$.
$\mu(r,.)$	:	Le module de maximum.
$\nu(f,\log r)$	:	La fonction de valuation p-adique de f.
$\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$	:	L'ensemble des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathbb{C}_p(X)$	:	L'ensemble des fonctions rationnelles sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(X)$	:	L'ensemble des fonctions méromorphes transcendantes sur $\mathbb{C}_p$.

INTRODUCTION

L'étude de la permutabilité des fonctions entières (resp. méromorphes) est de résoudre l'équation fonctionnelle $f \circ g(z) = g \circ f(z)$. Plusieurs auteurs travaillent sur cette équation pour les fonctions entières (resp. méromorphes) complexes, les principaux résultats ont été obtenus par **J. F. Ritt, I. N. Baker, P. Fatou** et autres ....

Dans ce mémoire, on va étudier ce problème dans le corps des nombres complexes p-adiques. On généralise certains résultats du cas complexe au cas p-adique. Cependant, cette étude est basée sur le théorème de Picard p-adique et le polygone de valuation p-adique. L'utilisation de ces outils nous permet d'obtenir des résultats complètement différents de ceux du cas complexe.

Ce mémoire est réparti sur l'introduction générale et trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on commence par la construction du corps des nombres complexe p-adique $\mathbb{C}_p$. Ce corps est le complété de la clôture algébrique du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$. Ensuite, on présente les propriétés topologiques et analytiques de $\mathbb{C}_p$ et on cite par exemple le fait que le cercle est un ensemble ouvert. On termine ce chapitre par une représentation des séries entières complexes p-adiques.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la distribution des zéros des fonctions p-adiques. Au début, on énonce une méthode qui nous permet d'étudier la distribution des zéros d'un polynôme (module maximum). Cette méthode s'étend d'une manière naturelle au fraction rationnelle, Puis, on donne quelques résultats sur la distribution des zéros d'un polynôme. Ainsi, on étudie la distribution des zéros des fonctions analytiques (resp. méromorphes) p-adiques. A la fin de ce chapitre, on présente la distribution des zéros de la composition $f \circ g$.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la permutabilité des fonctions entières et méromorphes dans $\mathbb{C}_p$. On commence à donner la version p-adique du Théorème 6 dans[2]. On montre que si f une fonction entière transcendante p-adique et P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ tel que $P \circ f = f \circ P$, alors $P(z)$ est de la forme az où $a \in \mathbb{C}_p$ est une racine d'unité. Ce résultat est différent du résultat de cas complexe où **Baker** a montré que $P(z)$ est de la forme $az + b$. Puis, nous essayons de généraliser ce résultat pour les fonctions méromorphes et on prend P une fraction rationnelle et f une fonction méromorphe transcendante sur $\mathbb{C}_p$.

CHAPITRE 1

CONSTRUCTION ANALYTIQUE DU CORPS DES NOMBRES COMPLEXES P-ADIQUES

L'objectif de ce chapitre est de construire le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$ et de donner ses propriétés.

1.1 La valuation et la norme p-adique

Définition 1.1 ***(Valuation*** p***-adique)***

Soit p *un nombre premier. On appelle valuation* p*-adique l'application* $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$*, définie comme suit :*

- $v_p(0) = +\infty$.

- *Si n un entier non nul, $v_p(n) = k$ si p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n (i.e*
  $v_p(n) = \max\{\alpha \in \mathbb{N},\ p^\alpha | n\}$),
- *Si $n = \dfrac{a}{b}$ avec a et b des entiers non nuls, alors $v_p(\dfrac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$.*

Exemple 1.1

- *Pour $p = 2$, on a $14 = 2 + 3.2^2$, alors $v_2(14) = 1$.*
- *Pour $p \geq 3$, si $x = 1 + p^4 + 2p^8$, alors $v_p(x) = 0$.*
- *Pour $p > 5$, si $y = \frac{p+p^5}{p^2+5p^5+2p^7}$, alors $v_p(y) = 1 - 2 = -1$.*

Proposition 1.1 *[12] Pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$, on a*

1. $v_p(1) = 0$.
2. $v_p(x.y) = v_p(x) + v_p(y)$.
3. $v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$.

Proposition 1.2
Pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$v_p(x) \neq v_p(y) \Longrightarrow v_p(x + y) = \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

Preuve.
On prend $v_p(x) < v_p(y)$, comme on a

$$v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}, \forall x, y \in \mathbb{Z}^*,$$

alors $v_p(x + y) \geq v_p(x)$.
Il reste de montrer que $v_p(x) \geq v_p(x + y)$. On a

$$v_p(x) = v_p(x - y + y) \geq \min\{v_p(x + y), v_p(y)\}.$$

Si $\min\{v_p(x + y), v_p(y)\} = v_p(y)$, alors $v_p(x) \geq v_p(y)$, c'est une contraction avec l'hypothèse, donc $v_p(x) \geq v_p(x + y)$. ■

Définition 1.2 *(La norme p-adique)*

On définit la norme p-adique comme l' application $|.|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, \ si \quad x \neq 0 \\ 0, \ sinon \end{cases}$$

tel que $v_p(x)$ *représente la valuation p-adique de* x.

Exemple 1.2

1) *Pour* $p > 3$, *si* $x = 2p^4 + 3p^8$, *alors* $|x|_p = \frac{1}{p^{v_p(x)}} = \frac{1}{p^4} = p^{-4}$.
2) *Pour* $p > 5$, *si* $y = \frac{p+p^5}{p^2+5p^5+2p^7}$, *alors* $|y|_p = \frac{1}{p^{v_p(y)}} = p$.

Définition 1.3

On dit que une norme sur un corps $\mathbb{K}$ *est non archimédienne si elle vérifie*

$$||x + y|| \leq max(||x||, ||y||), \ \forall x, y \in \mathbb{K} \ (\textbf{\textit{inégalité triangulaire forte}}).$$

Remarque 1.1

Si $\mathbb{K}$ *est un espace vectorielle, on dit que la norme est ultramétrique.*

Proposition 1.3 *[7]*

La norme p-adique est une norme non archimédinne.

Preuve.

Soient $x, y \in \mathbb{Q}$, donc on a

$$\begin{aligned} |x + y|_p = p^{-v_p(x+y)} &\leq p^{-\min\{v_p(x), v_p(y)\}} \\ &= p^{\max\{-v_p(x), -v_p(y)\}} \\ &= \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\} \\ &= \max\{|x|_p, |y|_p\}. \end{aligned}$$

D'où, la norme p-adique $|.|_p$ est non archimédinne. ■

Remarque 1.2

1− *La norme p-adique* $|.|_p$ *prend ses valeurs dans l'ensemble discret défini par*

$$|\mathbb{Q}|_p = \{p^n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

2− *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $|n|_p \leq 1$.

1.2 Le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$

Le corps $\mathbb{Q}$ associé à la norme p-adique n'est pas complet, tout comme $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour la valeur absolue usuelle. La propriété suivante donne une caractéristique sur les suites de Cauchy qui n'est pas vraie pour la valeur absolue usuelle.

Proposition 1.4 *[7]*

Une suite $(a_n)_n$ *est de Cauchy dans* $(\mathbb{Q}, |.|_p)$ *si et seulement si* $a_{n+1} - a_n$ *tend vers* 0.

Preuve.

Supposons que $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m > n \geq n_0\ |a_m - a_n|_p < \varepsilon.$$

Donc, pour $m = n + 1$, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\ |a_{n+1} - a_n|_p < \varepsilon,$$

d'où

$$\lim_{n \to \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

Inversement, supposons que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq n_0$, on ait $|a_{m+1} - a_m|_p < \varepsilon$. D'où pour tout $m \in \mathbb{N}$, tel que $m > n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n|_p &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + \cdots - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n|_p \\
&\leq \max\{|a_m - a_{m-1}|_p, |a_{m-1} - a_{m-2}|_p, \ldots, |a_{n+1} - a_n|_p\} \\
&< \max\{\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon\} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{Q}, |.|_p)$. ■

On va donner un exemple d'une suite de Cauchy divergente pour $p = 5$. On définit la suite $(x_n)_n$ par $x_0 = a_0 = 1$ et $x_n = x_{n-1} + a_n 5^n$, où $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ est déterminé par la congruence $x_n^2 + 4 \equiv 0[5^n]$.
La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy car

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - x_{n-1}|_5 = \lim_{n\to+\infty} |a_n 5^n|_5 = \lim_{n\to+\infty} |a_n|_5 . 5^{-n} = 0.$$

Cependant, elle ne peut pas converger vers $x \in \mathbb{Q}$, puisque dans ce cas, on obtient $x^2 + 4 = 0$.

Définition 1.4
Le corps des nombres p-adiques, que l'on note $\mathbb{Q}_p$, est le complété de $\mathbb{Q}$ pour la norme $|.|_p$.

La norme p-adique sur $\mathbb{Q}_p$ est l'étendue de la norme p-adique sur $\mathbb{Q}$ de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbb{Q}_p,\ |x|_p = \lim_{n\to+\infty} |x_n|_p.$$

Où $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ convergente vers x.

Définition 1.5
On définit l'anneau des entiers p-adiques et on le note $\mathbb{Z}_p$, comme étant la boule

unité de $\mathbb{Q}_p$, i. e.

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, \ |x|_p \leq 1\}.$$

Proposition 1.5 *[7]*
L'anneau des entiers p-adiques est un anneau intègre.

Cette proposition nous permet de définir le corps des nombres p-adiques comme le corps de fraction de $\mathbb{Z}_p$, i. e.

$$\mathbb{Q}_p = \{\frac{x}{y}, \ x, y \in \mathbb{Z}_p \, et \, y \neq 0\}.$$

Proposition 1.6 *[7]*
Tout $x \in \mathbb{Q}_p$ admet un unique développement de Hensel

$$x = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n, \ où \, a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, \ n_0 \in \mathbb{Z}.$$

Si $a_{n_0} \neq 0$, alors on a $v_p(x) = n_0$.

On peut utiliser le développement de Hensel pour donner une autre définition de l'ensemble des entiers p-adiques comme suit :

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, \ x = \sum_{n \geq 0} a_n p^n\}.$$

1.3 Le corps $\mathbb{C}_p$

Définition 1.6
On dit qu'un corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clôs si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[x]$ de degré n admet n racines dans $\mathbb{K}$.

Proposition 1.7 *[4]*
Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs.

Preuve.

On considère le polynôme $P(x) = x^3 + p^4 \in \mathbb{Q}_p[x]$. Puis, si x est une racine de P, alors $v_p(x) = \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$. Donc $x \notin \mathbb{Q}_p$, d'où P n'a pas des racines dans $\mathbb{Q}_p$, i.e. $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs. ■

Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considérer une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ que l'on note $\overline{\mathbb{Q}_p}$ qui n'est pas complet. Nous avons besoin de la compléter pour former un plus grand corps complet et algébriquement clôs noté $\mathbb{C}_p$.

1.4 Propriétés analytiques et topologiques de $\mathbb{C}_p$

Proposition 1.8 *[12]*

Soit $(a_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}_p$, alors

P1) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, où $a \in \mathbb{C}_p^*$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n|_p = |a|_p$, $\forall n \geq n_0$.

P3) La séries $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. De plus,

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n|_p \leq \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|_p.$$

Exemple 1.3

1− *La série $\sum\limits_{n\geq 0} p^{3n^3}$ où $p > 3$, converge dans $\mathbb{C}_p$, car*

$$\lim_{n\to+\infty} |p^{3n^3}|_p = \lim_{n\to+\infty} p^{-3n^3} = 0.$$

2− *La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ est diverge dans $\mathbb{C}_p$. En effet*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{n}\right|_p = \lim_{n\to+\infty} p^{v_p(n)} \neq 0,$$

car $p^{v_p(n)} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.9 *[12]*
Soient $a, b \in \mathbb{C}_p$ et $r, r_0 \in]0, +\infty[$, on a les propriétés suivantes :

P1. *Le cercle est un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}_p$.*

P2. *Un disque $D(a, r)$ est un ensemble ouvert et fermé à la fois.*

P3. *Tout point d'un disque est un centre de ce disque.*

P4. *Soient $D(a, r)$ et $D(b, r_0)$ deux disques de $\mathbb{C}_p$, alors il sont disjoints ou l'un est inclus dans l'autre.*

P5. *Toutes les triangles dans $\mathbb{C}_p$ sont isocèles.*

Remarque 1.3

- *Le cercle est un ensemble fermé dans $\mathbb{C}_p$.*
- *Les disques $d^-(b, r)$ contenus dans $d(a, r)$ sont les disques $d^-(b, r)$ tels que $b \in d(a, r)$ et on les appelles les classes de $d(a, r)$. De plus, on appelle la classe de z dans $d(a, r)$ le disque $d^-(z, r)$.*

1.5 Séries entières complexes p-adiques

Dans cette section, nous étudions les séries entières dans le corps des nombres complexes p-adiques.

Définition 1.7 ***(Rayon de convergence)***
Le rayon de convergence d'une série complexe p-adique $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ où $a, a_n \in \mathbb{C}_p$, est défini par :

$$R = \sup\left\{|z-a|_p,\ z \in \mathbb{C}_p \text{ et } \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n \text{ converge}\right\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

Théorème 1.1 *[4]*
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ *une série entière, où* $a, a_n \in \mathbb{C}_p$ *et* $0 \leq R \leq +\infty$

P1) Si $|z-a|_p < R$, $\forall z \in \mathbb{C}_p$, *alors* $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ *converge.*

P2) Si $|z-a|_p > R$, $\forall z \in \mathbb{C}_p$, *alors* $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ *diverge.*

P3) Si $|z-a|_p = R$, $\forall z \in \mathbb{C}_p$, *donc on peut avoir :*

- *Si* $\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p R^n = 0$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ *converge sur* $C(a, R)$.
- *Si* $\lim_{n\to+\infty} \mid a_n \mid_p R^n \neq 0$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ *diverge sur* $C(a, R)$.

Exemple 1.4
Soit la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(z-a)^n}{n}$, $a \in \mathbb{C}_p$. *D'après la formule d'Hadamard, on a*

$$R^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p} = \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|_p^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{p^{\frac{v_p(n)}{n}}} = 1.$$

Donc, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(z-a)^n}{n}$ *converge dans* $d^-(a, 1)$. *Et pour* $R = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p 1 \neq 0.$$

D'où, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(z-a)^n}{n}$ *diverge sur* $C(a, 1)$.

Proposition 1.10 *[12]*
La série entière $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ *où* $a, a_n \in \mathbb{C}_p$, *et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

Exemple 1.5
Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(z-a)^n}{n}$ *où* $x, a \in \mathbb{C}_p$ *est* $R_1 = 1$. *De*

plus, le rayon de convergence de sa série dérivée $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}(z-a)^{n-1}$ *est* $R_2 = 1$. *Car*

$$R_2^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p} = \limsup_{n\to+\infty} |(-1)^{n+1}|_p^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty} |1|_p^{\frac{n+1}{n}} = 1.$$

CHAPITRE 2

LA DISTRIBUTION DES ZÉROS DES FONCTIONS *P*-ADIQUES

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode qui nous permet d'étudier la distribution des zéros des fonctions p-adiques (les polynômes, les fonctions analytiques, les fonctions méromorphes).

2.1 La distribution des zéros d'un polynôme

2.1.1 Module maximum

Définition 2.1

Soient $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z]$ *et* $r > 0$. *On définit le module maximum de* P, *par* *la formule*

$$\mu(r, P) = \max_{0 \leq n \leq N} \mid a_n \mid_p r^n.$$

Proposition 2.1 *[8]*
L'application du module maximum $P \longrightarrow \mu(r, P)$ est une norme ultramétrique sur $\mathbb{C}_p[z]$.

Preuve.

1) Soient $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z]$ et $r > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mu(r, P) = 0 &\Longleftrightarrow \max_{0 \leq n \leq N} |a_n|_p r^n = 0 \\
&\Longleftrightarrow |a_n|_p r^n = 0, \ \forall 0 \leq n \leq N \\
&\Longleftrightarrow |a_n|_p = 0, \ \forall 0 \leq n \leq N \\
&\Longleftrightarrow a_n = 0, \ \forall 0 \leq n \leq N \\
&\Longleftrightarrow P \equiv 0.
\end{aligned}$$

2) Soient $P \in \mathbb{C}_p[z]$ et $\lambda \in \mathbb{C}_p$, on pose

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n, , a_n \in \mathbb{C}_p.$$

Alors

$$(\lambda P)(z) = \sum_{n=0}^{N} (\lambda a_n) z^n$$

d'où

$$\mu(r, \lambda P) = \max_{0 \leq n \leq N} \mid \lambda a_n \mid_p r^n \tag{2.1}$$

$$= |\lambda|_p \max_{0 \leq n \leq N} \mid a_n \mid_p \tag{2.2}$$

$$= |\lambda|_p \mu(r, P). \tag{2.3}$$

3) Soient $P, Q \in \mathbb{C}_p[z]$ tel que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N_1} a_n z^n \quad , \quad Q(z) = \sum_{n=0}^{N_2} b_n z^n, \;\; avec \;\; N_1 \geq N_2.$$

Comme on a

$$(P+Q)(z) = P(z) + Q(z) = \sum_{n=0}^{N_1} (a_n + b_n) z^n, \;\; avec \;\; b_n = 0, \;\; \forall n > N_2$$

Donc

$$\mu(r, P+Q) = \max_{0 \leq n \leq N_1} |a_n + b_n|_p r^n, \;\; \forall r > 0.$$

On a

$$|a_n + b_n|_p \leq \max(|a_n|_p, |b_n|_p), \;\; \forall 0 \leq n \leq N_1.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq n \leq N_1} (|a_n + b_n|_p r^n) &\leq \max_{0 \leq n \leq N_1} (\max(|a_n|_p, |b_n|_p) r^n) \\
&\leq \max(\max_{0 \leq n \leq N_1} (|a_n|_p r^n, |b_n|_p r^n)) \\
&\leq \max(\max_{0 \leq n \leq N_1} |a_n|_p r^n, \max_{0 \leq n \leq N_1} |b_n|_p r^n) \\
&= \max(\max_{0 \leq n \leq N_1} |a_n|_p r^n, \max_{0 \leq n \leq N_2} |b_n|_p r^n) \\
&= \max(\mu(r, P), \mu(r, Q)).
\end{aligned}$$

Donc

$$\mu(r, P+Q) \leq \max(\mu(r, P), \mu(r, Q)).$$

D'où $\mu(r, .)$ est une norme ultramétrique . ∎

Définition 2.2 *(**Couronne**)*

Soient $r_1, r_2 \in]0, +\infty[$ tels que $r_1 < r_2$ et $a \in \mathbb{C}_p$. Le couronne $\Gamma(a, r_1, r_2)$ est définie par

$$\Gamma(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}_p, \; r_1 < |z-a|_p < r_2\}.$$

Théorème 2.1 *[8]*
Soit $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ *un polynôme non nul de* $\mathbb{C}_p$ *et* $z \in d(0, r)$ *où* $r > 0$. *Alors*

$$\lim_{|z|_p \to r,\, |z|_p \neq r} \mid P(z) \mid_p = \mu(r, P).$$

De plus, on a

i) Si P n'a pas de zéros dans la classe de z dans $d(0, r)$, *alors* $|P(z)|_p = \mu(r, P)$.

ii) Si P admet au moins un zéros dans cette classe, alors $\mid P(z) \mid_p < \mu(r, P)$.

Preuve.
Supposons que P n'a pas des zéros dans $\Gamma(0, r', r) \cup \Gamma(0, r, r'')$ où $r' < r < r''$. On peut aussi supposer que P est un polynôme unitaire. Soit $P(z) = \prod_{i=1}^{N}(z - \alpha_i)$ avec

- $|\alpha_i|_p < r'$, pour $i \leq h$.
- $|\alpha_i|_p > r''$, pour $i \geq l$.
- $|\alpha_i|_p = r$, pour $i = h + 1, \ldots, l - 1$.

Soit $z \in \Gamma(0, r', r)$, alors

a) Pour $i \leq h$, on a

$$\begin{aligned} |\alpha_i|_p < |z|_p &\Longrightarrow |(z - \alpha_i) - z|_p < |z|_p \\ &\Longrightarrow |z - \alpha_i|_p = |z|_p. \end{aligned}$$

b) Pour $i \geq h + 1$, on a

$$\begin{aligned} |z|_p < |\alpha_i|_p &\Longrightarrow |(\alpha_i - z) - \alpha_i|_p < |\alpha_i|_p \\ &\Longrightarrow |z - \alpha_i|_p = |\alpha_i|_p. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|P(z)|_p &= |\prod_{i=1}^{N}(z-\alpha_i)|_p \\
&= \prod_{i=1}^{h}|z-\alpha_i|_p \prod_{i=h+1}^{N}|z-\alpha_i|_p \\
&= \prod_{i=1}^{h}|z|_p \prod_{i=h+1}^{N}|\alpha_i|_p \\
&= |z|_p^h \prod_{i=h+1}^{N}|\alpha_i|_p.
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{|z|_p\to r^-}|P(z)|_p = r^h \prod_{i=h+1}^{N}|\alpha_i|_p.$$

Maintenant, soit $z \in \Gamma(0, r, r'')$, alors

1) Pour $i \geq l$, on a

$$\begin{aligned}
|\ z\ |_p < |\ \alpha_i\ |_p &\Longrightarrow |(\alpha_i - z) - \alpha_i|_p < |\alpha_i|_p \\
&\Longrightarrow |z-\alpha_i|_p = |\alpha_i|_p.
\end{aligned}$$

2) Pour $i \leq l-1$, on a

$$\begin{aligned}
|\alpha_i|_p < |z|_p &\Longrightarrow |(z-\alpha_i) - z|_p < |z|_p \\
&\Longrightarrow |z-\alpha_i|_p = |z|_p.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|P(z)|_p &= \Big|\prod_{i=1}^{N}(z-\alpha_i)\Big|_p\\ &= \prod_{i=1}^{l-1}|z-\alpha_i|_p\prod_{i=l}^{N}|z-\alpha_i|_p\\ &= |z|_p^{l-1}\prod_{i=l}^{N}|\alpha_i|_p.\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{|z|_p\to r^+}|P(z)|_p = r^{l-1}\prod_{i=l}^{N}|\alpha_i|_p.$$

D'où

$$\begin{aligned}\lim_{|z|_p\to r^-}|P(z)|_p &= r^h\prod_{i=h+1}^{N}|\alpha_i|_p\\ &= r^h\prod_{i=h+1}^{l-1}|\alpha_i|_p\prod_{i=l}^{N}|\alpha_i|_p,\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\lim_{|z|_p\to r^-}|P(z)|_p &= r^{l-1}\prod_{i=l}^{N}|\alpha_i|_p\\ &= \lim_{|z|_p\to r^+}|P(z)|_p.\end{aligned}$$

Mais les termes $|a_jz^j|_p$ sont tous différents pour chaque $|z|_p$ à l'exception d'un nombre fini des valeurs. Donc, il existe $\rho' \in [r', r[$ et $\rho'' \in]r, r'']$ telle que $|a_jz^j|_p$ sont tous différents lorsque $z \in \Gamma(0, \rho', r) \cup \Gamma(0, r, \rho'')$. Alors

$$|P(z)|_p = \max_{0\le j\le N}|a_j|_p|z|_p^j.$$

D'où

$$\lim_{|z|_p\to r,\,|z|_p\neq r}|P(z)|_p = \mu(r, P).$$

Maintenant, on va montrer *i*) et *ii*).

i) Soit $z \in d(0,r)$ et supposons que P n'a pas des zéros dans la classe de z dans $d(0,r)$, alors

(a) Pour $i \geq l$, on a

$$\begin{aligned} |z|_p < |\alpha_i|_p &\Longrightarrow |(\alpha_i - z) - \alpha_i|_p < |\alpha_i|_p \\ &\Longrightarrow |z - \alpha_i|_p = |\alpha_i|_p. \end{aligned}$$

(b) Pour $i \leq l-1$, on a

$$\alpha_i \notin d^-(0,z) \Longrightarrow |z - \alpha_i|_p \geq r. \tag{2.4}$$

D'autre part, on a

$$|z - \alpha_i|_p = \max |z|_p, |\alpha_i|_p \leq r. \tag{2.5}$$

De (2.4) et (2.5) on trouve

$$|z - \alpha_i|_p = r.$$

Donc

$$\begin{aligned} |P(z)|_p &= |\prod_{i=1}^{N}(z-\alpha_i)|_p \\ &= \prod_{i=1}^{l-1} |z-\alpha_i|_p \prod_{i=l}^{N} |z-\alpha_i|_p \\ &= \prod_{i=1}^{l-1} r \prod_{i=l}^{N} |\alpha_i|_p \\ &= r^{l-1} \prod_{i=l}^{N} |\alpha_i|_p \\ &= \mu(r,P). \end{aligned}$$

ii) Si P a au moins un zéros α dans la classe de z, alors $|z-\alpha_i|_p < r$ et

$|z-\alpha_i|_p \leq r,\ \forall i = 1, \cdots, l-1$ où $\alpha_i \neq \alpha$. Donc

$$\begin{aligned}
|P(z)|_p &= \Big|\prod_{i=1}^{N}(z-\alpha_i)\Big|_p \\
&= |z-\alpha|_p \prod_{i=1}^{l-1}|z-\alpha_i|_p \prod_{i=l}^{N}|z-\alpha_i|_p \\
&\leq |z-\alpha|_p \prod_{i=1}^{l-1} r \prod_{i=l}^{N}|\alpha_i|_p \\
&\leq r^{l-2}|z-\alpha|_p \prod_{i=l}^{N}|\alpha_i|_p \\
&< r^{l-1} \prod_{i=l}^{N}|\alpha_i|_p \\
&< \mu(r, P).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.2 *[4]*
Soit $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z]$ *où* $a_N \neq 0$. *On suppose que*

$$\mu(r, P) = |a_N|_p r^N, \ \textit{pour} \ r > 0.$$

Donc touts les racines de $P(z)$ *sont dans le disque fermé de centre* 0 *et de rayon* r.

Preuve.
On suppose que

$$P(z) = a_N(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_N),\ a_N \neq 0,$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ sont les racines de $P(z)$ dans $\mathbb{C}_p$ pas forcément distincts. Alors

$$\begin{aligned}\mu(r, z - \alpha_i) &= \max(1 \times r, |\alpha_i|_p), \quad \forall i = 1, \ldots, N \\ &= \max(r, |\alpha_i|_p), \quad \forall i = 1, \ldots, N.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mu(r, P) &= \mu(r, a_N(z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_N)) \\ &= | \, a_N \, |_p \prod_{i=1}^{N} \max(r, | \, \alpha_i \, |_p).\end{aligned}$$

Donc

$$\mu(r, P) = | \, a_N \, |_p r^N = | \, a_N \, |_p \prod_{i=1}^{N} \max(r, | \, \alpha_i \, |_p).$$

D'où $r^N = \prod_{i=1}^{N} \max(r, |\alpha_i|_p)$ et comme $\max(r, |\alpha_i|_p) \geq r$ pour tout $i = 1, \cdots, N$, on conclut que $|\alpha_i|_p \leq r$ pour tout $i = 1, \ldots, N$, donc bien montré que tous les racines de P sont dans le disque $d(0, r)$. ■

Corollaire 2.1 *[8]*
Soient $P(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z]$ *un polynôme unitaire, tel que* $a_n \in d(0, 1)$. *Alors les* N *zéros du* P *appartiennent au disque* $d(0, 1)$.

Preuve.
Supposons que $P(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z]$, où $a_N = 1$. Alors

$$\mu(1, P) = \max_{0 \leq n \leq N} |a_n|_p = 1 = |a_N|_p.$$

Donc d'après la Proposition 2.2 toutes les racines de $P(z)$ sont dans le disque $d(0, 1)$. ■

Théorème 2.2 *[4]*
Soit $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z]$*,* $r > 0$ *et* I *un indice tel que l'on ait*

$$|a_I|_p r^I = \mu(r, P) \ \ et \ \ |a_i|_p r^i < |a_I|_p r^I, \ \forall i > I.$$

Il existe alors $Q, R \in \mathbb{C}_P[z]$ *tel que*

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_I z^I \ \ avec \ \ |b_I|_p r^I = \mu(r, Q) = \mu(r, P),$$

et $\mu(r, R - 1) < 1$*, vérifiant*

$$P(z) = Q(z)R(z).$$

Théorème 2.3 *[4]*
Soit $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z]$ *non nul,* $r > 0$ *et* I *un indice tel que l'on ait*

$$|a_I|_p r^I = \mu(r, P) \ et \ |a_i|_p r^i < |a_I|_p r^I, \ \forall i > I.$$

Alors

1) *Si* $I \geq 1$*, alors* P *a exactement* I *zéros dans le disque* $d(0, r)$ *compte tenu des multiplicités.*
2) *Si* $I = 0$*, alors* P *n'a aucun zéros dans le disque* $d(0, r)$ *et sa norme p-adique est constante dans ce disque.*

Preuve.
On va utiliser le Théorème 2.2.

1) Si $I \geq 1$, comme $\mu(r, R - 1) < 1$, alors

$$|R(z) - 1|_p < 1, \ \forall z \in d(0, r).$$

Donc $|R(z)|_p = 1$ pour tout $z \in d(0, r)$ et par suite $R(z)$ ne s'annule pas. Comme le polynôme Q qui intervient dans la factorisation a toutes ses racines dans le disque $d(0,r)$, il en résulte que P a exactement I zéros comptes tenu des multiplicité dans ce disque.

2) Si $I = 0$, le polynôme Q qui intervient dans la décomposition $P = QR$ est un polynôme de degré 0, donc une constante β non nulle puisque P est non nul. Comme $\mu(r, R(z) - 1) < 1$, on a $|R(z)|_p = 1$ pour tout $z \in d(0,r)$ et par suite $|P(z)|_p = |\beta|_p$.

D'où le résultat. ■

Théorème 2.4

Soit $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z]$ *non nul,* $r > 0$ *et*

$$j = \min\left\{n \in \{0, \ldots, N\} \text{ tel que } \mu(r,P) = |a_n|_p r^n\right\}.$$

Alors

1) *Si* $j = 0$, *alors* P *n'a aucun zéros dans le disque* $d^-(0,r)$ *et sa norme p-adique est constante dans ce disque.*

2) *Si* $j \geq 1$, *alors* P *a exactement* j *zéros dans le disque* $d^-(0,r)$ *compte tenu des multiplicités.*

Preuve.

Soient $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z]$ non nul, $r > 0$ et

$$j = \min\left\{n \in \{0, \ldots N\} \text{ tel que } \mu(r,P) = |a_n|_p r^n\right\}.$$

1) Si $j = 0$, on a

$$\max_{1 \leq n \leq N} |a_n|_p r^n \leq |a_0|_p,$$

comme $P \not\equiv 0$, alors $|a_0|_p \neq 0$.

Donc $\forall z \in d^-(0,r)$, on a

$$|P(z) - a_0|_p = |\sum_{1\leq n\leq N} a_n z^n|_p \leq \max_{1\leq n\leq N} |a_n|_p |z|_p^n < \max_{1\leq n\leq N} |a_n|_p r^n \leq |a_0|_p.$$

Alors, $|P(z)|_p = |a_0|_p \neq 0$. D'où, P n'a pas de zéros dans le disque $d^-(0,r)$.

2) Si $j \in \{1,\dots,N\}$ alors pour tout $n < j$, on a

$$|a_n|_p r^n < |a_j|_p r^j \Longrightarrow \left(\frac{|a_n|_p}{|a_j|_p}\right)^{\frac{1}{j-n}} < r.$$

Posons $\rho_0 = \max\limits_{0\leq n\leq N} \left(\frac{|a_n|_p}{|a_j|_p}\right)^{\frac{1}{j-n}}$, alors pour tout $\rho \in]\rho_0, r[$, on a

$$\left(\frac{|a_n|_p}{|a_j|_p}\right)^{\frac{1}{j-n}} \leq \rho_0 < \rho \Longrightarrow |a_n|_p \rho^n < |a_j|_p \rho^j, \forall n < j.$$

D'où, pour tout $\rho \in]\rho_0, r[$, on a

$$|a_n|_p \rho^n < |a_j|_p \rho^j, \forall n < j. \tag{2.6}$$

D'autre part, pour tout $\rho \in]0, r[$, pour tout $n > j$, on distingue deux cas

- Si $|a_n|_p \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} |a_n|_p r^n \leq |a_j|_p r^j &\Longrightarrow r^{n-j} \leq \frac{|a_j|_p}{|a_n|_p} \\ &\Longrightarrow \rho^{n-j} < r^{n-j} \leq \frac{|a_j|_p}{|a_n|_p} \\ &\Longrightarrow |a_n|_p \rho^n < |a_j|_p \rho^j. \end{aligned}$$

- Si $|a_n|_p = 0$, on a

$$|a_n|_p \rho^n = 0 < |a_j|_p \rho^j.$$

D'où

$$|a_n|_p\rho^n < |a_j|\rho^j, \forall n > j, \forall \rho \in]0, r[\tag{2.7}$$

de (2.6) et (2.7) on a, pour tout $\rho \in]\rho_0, r[$

$$|a_n|_p\rho^n < |a_j|_p\rho^j,\ \forall n < j,\ |a_n|_p\rho^n < |a_j|_p\rho^j,\ \forall n > j.$$

D'où P a exactement j zéros sur $d(0, \rho)$, pour tout $\rho \in]\rho_0, r[$. Donc P a exactement j zéros sur $d^-(0, r)$.

■

Proposition 2.3 *[4]*
Soit $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z]$ *non nul et* $r > 0$, *alors*

P1) $\mu(r, P)$ *est croissante.*

P2) Si P a un zéro b dans le disque $d(0, r)$, $\mu(r, P)$ *est strictement croissante* $\forall r > |\, b\,|_p$.

P3) $\mu(r, P)$ *est continue.*

2.1.2 La fonction de valuation p-adique

Notation 2.1

- $N(P, r)$ *le nombre des zéros de P dans le disque fermé* $d(0, r)$.
- $n(P, r)$ *le nombre des zéros de P dans le disque ouvert* $d^-(0, r)$.
- $A(P, r)$ *le nombre des zéros de P sur le cercle* $C(0, r)$.

Chacun de ces zéros étant compté avec sa multiplicité.

Définition 2.3
Soit $P \in \mathbb{C}_p[z]$ *telle que* $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ *et* $r > 0$, *on définit la fonction* $\nu(P, .)$ *par*

$$\log r \longrightarrow \nu(P, \log r) = \log(\mu(r, P)) = \max_{0 \le n \le N}(\log |a_n|_p + n \log r).$$

Cette fonction est la fonction de valuation p-adique de P et son graphe est dit polygone de valuation de P.

Proposition 2.4 *[4]*
Soit $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z]$ *non nul et soit* $r > 0$*, la fonction* $\nu(P, .)$ *vérifié les propriétés suivantes*

P1) C'est une fonction continue, affine par morceaux, croissante et convexe.

P2) $\nu(P, .)$ *admet des dérivée à gauche* $\nu^-(P, .)$ *et à droite* $\nu^+(P, .)$ *en tout point* $\log r$*, on a*

- $\nu^+(P, \log r) = N(P, r)$ *le plus grand entier tel que*

$$\nu(P, \log r) = \log |a_{N(P,r)}|_p + N(P, r) \log r.$$

Où $N(P, r)$ *est le nombre des zéros de P dans le disque fermé* $d(a, r)$*.*

- $\nu^-(P, .) = n(P, r)$ *le plus petit entier tel que*

$$\nu(P, \log r) = \log |a_{n(P,r)}|_p + n(P, r) \log r.$$

Où $n(P, r)$ *est le nombre des zéros de P dans le disque ouvert* $d^-(a, r)$*.*

- $A(P, r) = N(P, r) - n(P, r)$ *le nombre des zéros de P sur le cercle* $C(a, r)$*.*

Exemple 2.1
Soit $p(z) \in \mathbb{C}_p[z]$ *tel que*

$$P(z) = p^3 + (p^2 + p^3)z + (p + 2p^4)z^2 + pz^3, \; p \geq 2.$$

Alors, calculons $\mu(r, P)$

- *Pour $r = p^{-2}$, on a*

$$|a_0|_p r^0 = p^{-3} \times 1 = p^{-3}.$$
$$|a_1|_p r^1 = p^{-2} \times p^{-2} = p^{-4}.$$
$$|a_2|_p r^2 = p^{-1} \times p^{-4} = p^{-5}.$$
$$|a_3|_p r^3 = p^{-1} \times p^{-6} = p^{-7}.$$

Donc

$$\mu(p^{-2}, P) = p^{-3}.$$

D'où $N(P, p^{-2}) = n(P, p^{-2}) = 0$, alors P n'a aucun zéro dans le disque fermé $d(0, p^{-2})$.

- *Pour $r = p^{-1}$, on a*

$$|a_0|_p r^0 = p^{-3} \times 1 = p^{-3}.$$
$$|a_1|_p r^1 = p^{-2} \times p^{-1} = p^{-3}.$$
$$|a_2|_p r^2 = p^{-1} \times p^{-2} = p^{-3}.$$
$$|a_3|_p r^3 = p^{-1} \times p^{-3} = p^{-4}.$$

Donc

$$\mu(p^{-1}, P) = p^{-3}.$$

D'où
$N(P, p^{-1}) = 2$, alors P a deux zéros dans le disque fermé $d(0, p^{-1})$.
$n(P, p^{-1}) = 0$, alors P n'a aucun zéro dans le disque ouvert $d^{-}(0, p^{-1})$.
$A(P, p^{-1}) = 2$, alors P a deux zéros sur le cercle $C(0, p^{-1})$.

- *Pour $r = 1$, on a*

$$|a_0|_p r^0 = p^{-3}.$$
$$|a_1|_p r^1 = p^{-2}.$$
$$|a_2|_p r^2 = p^{-1}.$$
$$|a_3|_p r^3 = p^{-1}.$$

Donc

$$\mu(1, P) = p^{-1}.$$

D'où

$N(P, 1) = 3$, *alors P a trois zéros dans le disque fermé* $d(0, 1)$.

$n(P, 1) = 2$, *alors P a deux zéros dans le disque ouvert* $d^-(0, 1)$.

$A(P, 1) = 1$, *alors P a un zéro sur le cercle* $C(0, 1)$.

- *Pour $r = p$, on a*

$$|a_0|_p r^0 = p^{-3} \times 1 = p^{-3}.$$
$$|a_1|_p r^1 = p^{-2} \times p = p^{-1}.$$
$$|a_2|_p r^2 = p^{-1} \times p^2 = p.$$
$$|a_3|_p r^3 = p^{-1} \times p^3 = p^2.$$

Donc

$$\mu(p, P) = p^2.$$

D'où

$N(P, p) = n(P, p) = 3$, *alors P n'a aucun zéro sur le cercle* $C(0, p)$.

Et comme $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clôs on a

$$\mu(r,P)=\begin{cases}|a_0|_p r^0 & 0\le r\le p^{-1}.\\ |a_2|_p r^2 & p^{-1}\le r\le 1.\\ |a_3|_p r^3 & r\ge 1.\end{cases}=\begin{cases}p^{-3} & 0\le r\le p^{-1}.\\ p^{-1}r^2 & p^{-1}\le r\le 1.\\ p^{-1}r^3 & r\ge 1.\end{cases}$$

D'où

$$\nu(P,\log r)=\log\mu(r,P)=\begin{cases}-3\log p & -\infty\le \log r\le -\log p.\\ -\log p+2\log r & -\log p\le \log r\le 0.\\ -\log p+3\log r & \log r\ge 0.\end{cases}$$

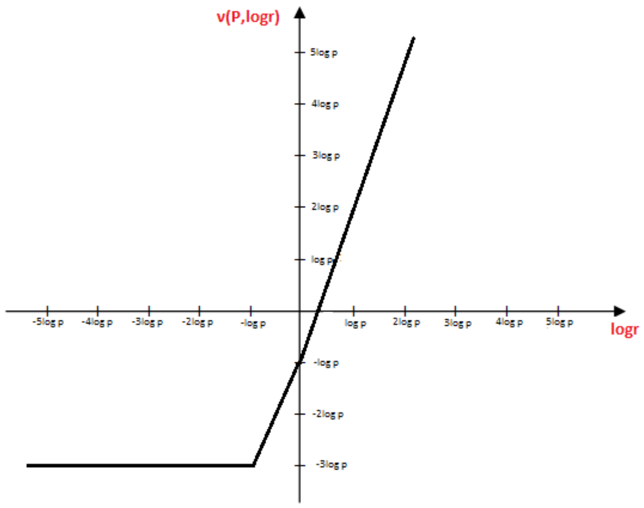

FIGURE 2.1 – Polygone de valuation p-adique de P.

Remarque 2.1

La norme non archimédienne (module maximum) définie sur $\mathbb{C}_p[z]$ est prolongée d'une façon naturelle sur $\mathbb{C}_p(z)$ par $\mu(r,\frac{P}{Q})=\frac{\mu(r,P)}{\mu(r,Q)}$.

2.2 La distribution des zéros d'une fonction analytique p-adique

Définition 2.4

Soient $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$, on dit que la fonction $f : d(a,r) \to \mathbb{C}_p$ est analytique sur $d(a,r)$, s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mid a_n \mid_p r^n = 0 \, et \, f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n, \quad \forall z \in d(a,r).$$

Définition 2.5

Soient $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$, on dit que la fonction $f : d^-(a,r) \to \mathbb{C}_p$ est analytique sur $d^-(a,r)$, s'il existe une suite unique $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ satisfaisant $|a_n|\rho^n \longrightarrow 0$, pour tout ρ avec $0 < \rho < r$ et $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$, $\forall z \in d^-(a,r)$.

Remarque 2.2

1) *Une fonction de variable complexe p-adique définie sur un disque $D(a,r)$ où $a \in \mathbb{C}_p$ est dite analytique sur ce disque lorsqu'elle admet un développement en séries entière en tout point de $D(a,r)$.*
2) *Si $r = +\infty$, alors f est analytique sur tout $\mathbb{C}_p$ et on dit que f est entière.*

Exemple 2.2

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} p^{2n^2} z^n$, $z \in \mathbb{C}_p$, on a

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\mid a_n \mid_p}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} p^{-2n}} = +\infty.$$

Alors $\sum_{n\geq 0} p^{2n^2} z^n$ converge sur $\mathbb{C}_p$, donc f une fonction entière.

Notation 2.2

- *On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ l'ensemble des fonction entière sur $\mathbb{C}_p$,et $\mathcal{A}(D(0,r))$ l'ensemble des fonctions analytiques sur le disque $D(0,r)$.*
- *On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$ l'ensemble des fonction entière qui ne sont pas des polynômes.*

Définition 2.6 ***(0rdre de multiplicité d'un zéro)***
Soient $f \in \mathcal{A}(d^-(a,r))$, $\alpha \in d^-(a,r)$, et $0 < \rho < r$ tel que $\forall z \in d(\alpha,r)$, $f(z) = \sum_{n\geq q} a_n(z-\alpha)^n$ où $a_q \neq 0, q \in \mathbb{N}^*$. On dit dans ce cas que, α est un zéros de f d'ordre q.

Proposition 2.5
Soit $f \in \mathcal{A}(d^-(a,r))$ avec $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$, une fonction non nulle. Si $\alpha \in d^-(a,r)$ est un zéros d'ordre q de f, alors on peut écrire f sous la forme

$$f(z) = (z-\alpha)^q\varphi(z),\ \forall z \in d(a,r_1),\ 0 < r_1 < r.$$

Où φ est analytique au point α et $\varphi(\alpha) \neq 0$.

Preuve.
Soient $z \in d(\alpha,r)$ et $0 < r_1 < r$. Comme α est un zéros d'ordre q de f, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n\geq q} a_n(z-\alpha)^n,\ \forall z \in d(\alpha,r_1) \\ &= (z-\alpha)^q(a_q + a_{q+1}(z-\alpha) + a_{q+2}(z-\alpha)^2 + \dots),\ \forall z \in d(\alpha,r_1) \\ &= (z-\alpha)^q(\sum_{i\geq 0} a_{q+i}(z-\alpha)^i),\ \forall z \in d(\alpha,r_1). \end{aligned}$$

Donc $f(z) = (z-\alpha)^q\varphi(z)$, $\forall z \in d(\alpha,r_1)$ avec $\varphi(z) = \sum_{i\geq 0} a_{q+i}(z-\alpha)^i$ est une fonction analytique sur le disque $d(\alpha,r_1)$ et $\varphi(\alpha) \neq 0$. $\blacksquare$

Proposition 2.6 ***(Principe des zéros isolés)***
Soit $f \in \mathcal{A}(d^-(a,r))$ une fonction non nulle et soit $c \in d^-(a,r)$ tel que $f(c) = 0$, alors il existe $R > 0$ assez petit vérifier

$$\forall z \in d^-(c,r) - \{c\},\ f(z) \neq 0.$$

Preuve.
Si c est un zéro de f, on peut écrire la fonction non nulle f sous la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq q} a_n (z-c)^n,\ a_q \neq 0,\ q \geq 1.$$

Il en résulte que si $|z-c|_p$ est assez petit et non nul, on a

$$\begin{aligned} |f(z)|_p &= \Big|\sum_{n\geq q} a_n(z-c)^n\Big|_p = \max_{n\geq q}(|a_n|_p|z-c|_p^n) \\ &= |a_q|_p|z-c|_p^q \neq 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Théorème 2.5 *[12]* ***(Strassman)***
Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ une série entière non nulle avec des coefficients dans $\mathbb{C}_p$. Et supposons que $f(x)$ converge pour tout $z \in d(a,1)$. Soit N un entier positif défini par les deux conditions

$$\begin{cases} 1)|a_N|_p = \max_{n\geq 0} |\ a_n\ |_p. \\ 2)|a_n|_p < |a_N|_p\ \forall n > N. \end{cases}$$

On a dans ce cas $f : d(a,1) \to \mathbb{C}_p$ possède au plus N zéros dans $d(a,1)$.

Remarque 2.3 *La Proposition* 2.4 *reste valable si l'on prend $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$(ou $f \in \mathcal{A}(d^-(a,r))$) à la place de $P \in \mathbb{C}_p[z]$.*

Théorème 2.6 *[6](**Formule de Jensen**)*

Soit $f \in \mathcal{A}(d^-(a,R))$, $R > 0$ et $r \in]0,R[$ telle que $f(a) \neq 0$. Soient $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ les zéros de f (pas nécessairement distincts) sur le disque fermé $d(a,r)$. Alors

$$\log \mu(r,f) = \log |f(a)|_p + \sum_{|\alpha-a|_p\leq r} w_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p}$$

tel que $\omega_\alpha(f)$ est un entier relatif, si f a un zéros d'ordre q alors $w_\alpha(f) = q$ et si $f(\alpha) \neq 0$, $w_\alpha(f) = 0$.

Preuve.

La démonstration de cette formule est conséquence des propriétés de polygone de valuation p-adique de f.

Soit $f \in \mathcal{A}(d^-(a,R))$, $R > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ telle que $f(a) \neq 0$. Alors le polygone de valuation de f donne pour tout $r \in]0,R[$

$$\log \mu(r,f) = \log |f(a)|_p + \sum_{|\alpha-a|_p\leq r} w_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p} \tag{2.8}$$

Pour montrer l'égalité (2.8), on suppose $0 = r_o < r_1 < r_2 < \cdots < r_k < r$ et $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n$. On a

$$\log(\mu(r,f)) = \max_{n_i\geq 0}(\log |a_{n_i}|_p + n_i \log r), \tag{2.9}$$

alors pour tout $t \in]0,r]$

$$\begin{aligned}
0 < t \leq r_1 &: \log(\mu(t,f)) = \log |a_0|_p = \log |f(a)|_p \\
r_1 \leq t \leq r_2 &: \log(\mu(t,f)) = \log |a_{n_1}|_p + n_1 \log t \\
&\vdots \\
r_{k-1} \leq t \leq r_k &: \log(\mu(t,f)) = \log |a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1} \log t \\
r_k \leq t \leq r &: \log(\mu(t,f)) = \log |a_{n_k}|_p + n_k \log t
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\log(\mu(r,f)) &= [\log(\mu(r,f)) - \log(\mu(r_k,f))] + [\log(\mu(r_k,f)) - \log(\mu(r_{k-1},f))] + \cdots + [\log(\mu(r_2,f)) \\
&\quad - \log(\mu(r_1,f))] + \log(\mu(r_1,f)) \\
&= [\log|a_{n_k}|_p + n_k \log r - \log|a_{n_k}|_p - n_k \log r_k] + [\log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1}\log r_k \\
&\quad - \log|a_{n_{k-1}}|_p - n_{k-1}\log r_{k-1}] + \cdots + [\log|a_{n_1}|_p + n_1 \log r_2 - \log|a_{n_1}|_p \\
&\quad - n_1 \log r_1] + \log|f(a)|_p \\
&= \log|f(a)|_p + n_k \log\frac{r}{r_k} + n_{k-1}\log\frac{r_k}{r_{k-1}} + \cdots + n_1 \log\frac{r_2}{r_1} \\
&= \log|f(a)|_p + n_k \log\frac{r}{r_k} + n_{k-1}\Big(\log\frac{r}{r_{k-1}} - \log\frac{r}{r_k}\Big) + \cdots + n_1\Big(\log\frac{r}{r_1} - \log\frac{r}{r_2}\Big) \\
&= \log|f(a)|_p + (n_k - n_{k-1})\log\frac{r}{r_k} + (n_{k-1}-n_{k-2})\log\frac{r}{r_{k-1}} + \cdots + (n_2 - n_1)\log\frac{r}{r_2} \\
&\quad + (n_1 - n_0)\log\frac{r}{r_1} \\
&= \sum_{i=1}^{k}(n_i - n_{i-1})\log\frac{r}{r_i} + \log|f(a)|_p,
\end{aligned}$$

où $(n_i - n_{i-1})$ le nombre des zéros de f sur le cercle $|x-a|_p = r_i$, donc $\forall r \in]0,R[$, on a

$$\log\mu(r,f) = \log|f(a)|_p + \sum_{i=1}^{k}(n_i - n_{i-1})\log\frac{r}{r_i}.$$

Donc

$$\log\mu(r,f) = \log|f(a)|_p + \sum_{|\alpha-a|_p \le r} w_\alpha(f)\log\frac{r}{|\alpha - a|_p}.$$

∎

Théorème 2.7 ***(Picard p-adique)***
Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non constante, alors f admet au moins un zéros dans $\mathbb{C}_p$. De plus si f n'est pas un polynôme (i.e.$f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$) alors f a une infinité de zéros dans $\mathbb{C}_p$.

Preuve.
Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une fonction entière p-adique, alors

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p r^n = 0, \ \forall r > 0.$$

Donc on a

$$\mu(r,f) = \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n,$$

et

$$\nu(f, \log r) = \log(\mu(r,f)) = \max_{0\leq n\leq N}(\log|a_n|_p + n\log r).$$

D'après la preuve du Théorème 2.6, on sait que les zéros de f apparaissant aux coins du polygone de valuation et que $\mu(r,f) = |a_0|_p$ pour r proche de zéro à condition que $a_0 \neq 0$. Comme on a f n'est pas constante, alors pour tout r suffisamment grand on a

$$\mu(r,f) \neq |a_0|_p.$$

Donc le polygone a au moins un coin et f a au moins un zéro. Si f est transcendent, alors f a une infinité de nombre de coefficient non nul. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe r_n tel que pour tout $r \geq r_n$ on a

$$\mu(r,f) \neq |a_n|_p r^n.$$

Par conséquent, le polygone de valuation de f a une infinité de coins. Donc f a une infinité de zéros. ■

Corollaire 2.2
Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non constante. Alors on a $f(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p$.

Théorème 2.8 *(Spécificité Ultramétrique)*
Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ (resp $f \in \mathcal{A}(d(a,r)), r > 0$) $\forall \rho \in]0, +\infty[$(resp $\rho \in]0, r[$), on a

$$\mu(\rho, f') \leq \frac{1}{\rho}\mu(\rho, f)$$

Preuve.
Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$, alors $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ et $f'(z) = \sum_{n\geq 1} na_n(z-a)^{n-1}$, $a \in \mathbb{C}_p$ pour $\rho > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mu(\rho, f') &= \max_{n\geq 0} |na_n|_p \rho^{n-1} \\
&= \rho^{-1} \max_{n\geq 0} |n|_p |a_n|_p \rho^n \\
&\leq \rho^{-1} \max_{n\geq 0} |a_n|_p \rho^n \\
&= \frac{1}{\rho}\mu(\rho, f).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. Même démonstration pour $f \in \mathcal{A}(d(a,r))$, $\rho \in]0, r[$. ∎

2.3 La distribution des zéros d'une fonctions méromorphes p-adiques

Définition 2.7 *(Points singuliers isolés)*
On dit que le point $a \in \mathbb{C}_p$ est un point singulier isolé d'une fonction s'il existe $d^-(a,r)$ telle que f est analytique sur $d^-(a,r)$ et n'est pas analytique en a.

Définition 2.8 *(Fonctions méromorphes)*
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}_p$, une fonction f est dite méromorphe sur U s'il existe un ensemble A des points singuliers isolés dans U tel que f est analytique sur $U \backslash A$ et tel que les éléments de A soient des pôles de f.

Notation 2.3 *On note*

- $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ *l'ensemble des fonctions méromorphes définie sur $\mathbb{C}_p$(Corps des fractions de $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$).*
- $\mathcal{M}(d^-(a,r)$ *l'ensemble des fonctions méromorphes définie sur $d^-(a,r)$ (Corps des fractions de $\mathcal{A}(d^-(a,r))$.*
- *La norme $\mu(r,.)$ définie dans $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ (resp dans $\mathcal{A}(d^-(a,R))$ quand $r > 0$ (resp $0 < r < R$) s'étend d'une manière naturelle à $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ (resp dans $\mathcal{M}(d^-(a,r))$ en posant $\mu(r,f) = \dfrac{\mu(r,g)}{\mu(r,h)}$ avec $g,h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$(resp $g,h \in \mathcal{A}(d^-(a,r))$.*

Remarque 2.4
Soit $f \in \mathcal{M}(d^-(a,r))$ et $a \in \mathbb{C}_p$, telle que $f = \dfrac{g}{h}$ où $g,h \in \mathcal{A}(d^-(a,r))$, pour $r > 0$. On a

1) *Les zéros de f sont des zéros de g et les pôles de f sont des zéros de h.*
2) *Toute fonction entière $f(x)$ est une fonction méromorphe, c'est à dire $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$.*
3) *Toute fonction rationnelle dans $\mathbb{C}_p$ est une fonction méromorphe.*
4) *Une fonction méromorphe qui n'est pas une fraction rationnel est dit fonction méromorphe transcendante.*

Théorème 2.9 *[6](**Formule de Jensen**)*
Soient $f \in \mathcal{M}(d^-(a,r))$, $r > 0$, $a \in \mathbb{C}_p$ telle que f n'a ni zéros ni pôle en a. Soient α_i, $i \geq 1$ les zéros de f et β_j, $j \geq 1$ les pôles de f (pas nécessairement distincts) sur $d(a,r)$. Alors

$$\log \mu(r,f) = \log |f(a)|_p + \sum_{|\alpha-a|_p \leq r} w_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p} - \sum_{|\beta-a|_p \leq r} w_\beta(\frac{1}{f}) \log \frac{r}{|\beta - a|_p}.$$

tel que $w_\alpha(f)$ est un entier relatif, si f a un zéros α d'ordre q (resp.$\dfrac{1}{f}$ a un pôle α d'ordre q) alors $w_\alpha(f) = q$ (resp.$w_\alpha(\dfrac{1}{f}) = -q$) et si $f(\alpha) \neq 0, +\infty$, $w_\alpha(f) = 0$.

Preuve.

Soit $f \in \mathcal{M}(d^{-}(a,r))$, $r > 0$ tel que $f(a) \neq 0, +\infty$, on pose $f = \dfrac{g}{h}$ telle que $h, g \in \mathcal{A}(d^{-}(a,r))$, $r > 0$. Alors d'après le Théorème 2.6, on a

$$\log \mu(r,g) = \log |g(a)|_p + \sum_{|\alpha - a|_p \leq r} w_\alpha(g) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p}.$$

Et

$$\log \mu(r,h) = \log |h(a)|_p + \sum_{|\alpha - a|_p \leq r} w_\alpha(h) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\log \mu(r,f) &= \log \mu(r,g) - \log \mu(r,h) \\
&= \log |g(a)|_p + \sum_{|\alpha - a|_p \leq r} w_\alpha(g) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p} - \log |h(a)|_p - \sum_{|\alpha - a|_p \leq r} w_\alpha(h) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p} \\
&= \log \Big|\frac{g(a)}{h(a)}\Big|_p + \sum_{|\alpha - a|_p \leq r} w_\alpha(g) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p} - \sum_{|\alpha - a|_p \leq r} w_\alpha(h) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\log \mu(r,f) &= \log \Big|\frac{g(a)}{h(a)}\Big|_p + \sum_{|\alpha - a|_p \leq r} w_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p} - \sum_{|\alpha - a|_p \leq r} w_\alpha(\frac{1}{f}) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p} \\
&= \log |f(a)|_p + \sum_{|\alpha - a|_p \leq r} w_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha - a|_p} - \sum_{|\beta - a|_p \leq r} w_\beta(\frac{1}{f}) \log \frac{r}{|\beta - a|_p}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.7 ***(Picard p-adique)***

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ une fonction méromorphe non constante. Alors f prend toutes les valeurs de $\mathbb{C}_p$, sauf au plus un.

Preuve.

Supposons que f ne prendre que deux valeurs distincts $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_p$. On note $f = \dfrac{g}{h}$, où g et h sont deux fonctions entières sans zéros communs, de sorte que la fonction méromorphe $H = \dfrac{g - \alpha h}{g - \beta h}$ n'a pas de zéros et de pôles. Par conséquent, d'après le Théorème 2.7, H est égal à une constante $\gamma \in \mathbb{C}_p \backslash \{1\}$ et nous avons donc $f = \dfrac{\alpha - \beta\gamma}{1 - \gamma}$, qui est une contradiction. ■

Théorème 2.10

Soit $f \in \mathcal{M}(d^-(a, r))$, $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ tel que f, f' sans zéros communs, alors

$$\frac{\mu(\rho, f')}{\mu(\rho, f)} \leq \frac{1}{\rho}, \ \forall \rho \in]0, r[.$$

Preuve.

Posons $f = \dfrac{g}{h}$ avec $g, h \in \mathcal{A}(d^-(a, r))$, $r > 0$, $a \in \mathbb{C}_p$ pour $\rho \in]0, r[$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\rho, f')}{\mu(\rho, f)} = \mu(\rho, \frac{f'}{f}) &= \mu(\rho, \frac{g'h - gh'}{gh}) \\ &= \frac{\mu(\rho, g'h - gh')}{\mu(\rho, gh)}. \end{aligned}$$

Comme

$$\mu(\rho, g'h - gh') \leq \max(\mu(\rho, g'h), \mu(\rho, gh')).$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\rho, f')}{\mu(\rho, f)} &\leq \max\Big(\frac{\mu(\rho, g'h)}{\mu(\rho, gh)}, \frac{\mu(\rho, gh')}{\mu(\rho, gh)}\Big) \\ &= \max\Big(\frac{\mu(\rho, g')}{\mu(\rho, g)}, \frac{\mu(\rho, h')}{\mu(\rho, h)}\Big). \end{aligned}$$

On sait que $\dfrac{\mu(\rho, g')}{\mu(\rho, g)} \leq \dfrac{1}{\rho}$ et $\dfrac{\mu(\rho, h')}{\mu(\rho, h)} \leq \dfrac{1}{\rho}$. D'où l'inégalité. ■

2.4 La distribution des zéros d'une composition $f \circ g$

Proposition 2.8

Soit $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non constantes. Soit r_0 un réel positif tel que la fonction $\mu(r, g)$ soit strictement croissante pour $r > r_0$.

Posons $F = f \circ g$, on a alors pour tout $r > r_0$

P1) $n(F, r) = n(f, \mu(r, g))n(g, r)$.

P2) $N(F, r) = N(f, \mu(r, g))N(g, r)$.

P3) $A(F, r) = A(f, \mu(r, g))N(g, r) + n(f, \mu(r, g))A(g, r)$.

Preuve.

Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ telle que $F = f \circ g$ où $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$, d'où $\mu(r, F) = \mu(\mu(r, g), f)$, pour tout $r > 0$. Comme la fonction $\mu(r, g)$ est strictement croissante pour $r > r_0$, on déduit que

$$\nu^-(F, \log r) = \nu^-(f, \nu(g, \log r))\nu^-(g, \log r).$$

Et

$$\nu^+(F, \log r) = \nu^+(f, \nu(g, \log r))\nu^+(g, \log r).$$

pour $\log r > \log r_0$ D'après la Proposition 2.4, on obtient

$$n(F, r) = n(f, \mu(r, g))n(g, r). \tag{2.10}$$

Et

$$N(F, r) = N(f, \mu(r, g))N(g, r). \tag{2.11}$$

en faisant la différence entre (2.10) et (2.11)

$$\begin{aligned}A(F,r) = N(F,r) - n(F,r) &= N(f,\mu(r,g))N(g,r) - n(f,\mu(r,g))n(g,r)\\ &= N(f,\mu(r,g))N(g,r) - n(f,\mu(r,g))n(g,r)\\ &- n(f,\mu(r,g))N(g,r) + n(f,\mu(r,g)N(g,r)\\ &= A(f,\mu(r,g))N(g,r) + n(f,\mu(r,g))A(g,r).\end{aligned}$$

■

Théorème 2.11

Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$, λ un entier positif fixé. On suppose que sur une infinité de cercle de centre 0 de $\mathbb{C}_p$, F a un nombre de zéros compris entre 1 et λ. Alors toute factorisation de F sous la forme $F = f \circ g$ avec $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ entraine que f où g est un polynôme de degré compris entre 1 et λ.

Preuve.

On suppose que les deux fonctions f et g sont de degré supérieur où égale à $\lambda + 1$ on aurait pour r assez grand

$$N(g,r) \geq \lambda + 1 \ \text{ et } \ n(f,\mu(r,g)) \geq \lambda + 1.$$

D'autre part l'hypothèse du théorème et la formule $P3$) de la Proposition 2.8 montre que pour une infinité de r arbitrairement grand, on a $A(f,\mu(r,g)) \neq 0$ où $A(g,r) \neq 0$.

Pour un tel r on aurait alors $A(F,r) \geq \lambda + 1$. C'est une contradiction avec l'hypothèse.

Donc f ou g est nécessairement un polynôme de degré compris entre 1 et λ.

■

Corollaire 2.3

Soit $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(z)$, λ un entier positif fixé. On suppose que sur une infinité de

cercles de centre 0 *de* $\mathbb{C}_p$*, F admet un nombre de zéros compris entre* 1 *et* λ *et que sur une infinité de cercles de centre* 0 *de* $\mathbb{C}_p$*, F admet un nombre de pôles compris entre* 1 *et* λ*.*
Alors toute factorisation de F sous la forme $F = f \circ g$ *avec* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ *et* $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ *entraine que*

$$\begin{cases} g \in \mathbb{C}_p[z] \ \ \textit{tel que} \quad 1 \leq \deg g \leq \lambda \\ \textit{ou bien} \\ f \in \mathbb{C}_p(z) \ \ \textit{tel que} \quad 1 \leq \deg f \leq \lambda. \end{cases}$$

Preuve.
On écrit $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ *où* $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ *n'ont pas de zéros communs d'où*

$$F = f \circ g = \frac{f_1 \circ g}{f_2 \circ g},$$

on applique ensuite le Théorème 2.11 à chacune des fonctions $f_1 \circ g$ *et* $f_2 \circ g$*.* ∎

CHAPITRE 3

PERMUTABILITÉ DES FONCTIONS ENTIÈRES ET MÉROMORPHES P-ADIQUES

Dans ce chapitre, on va montrer certains résultats sur la permutabilité des fonctions entières et méromorphes p-adiques.

Théorème 3.1 *[15]*
Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$ et f une fonction entière sur $\mathbb{C}_p$ telle que $P \circ f = f \circ P$. Alors f est un polynôme.

Pour la démonstration on a besoin du lemmes suivants.

Lemme 3.1
Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un polynôme,*
2. *il existe $c > 0$ et $d \geq 0$ tels que $\mu(r, f) \leq cr^d$, pour r assez grand.*

Preuve.
Supposons que $f(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$, où $a_0, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{C}_p$ et $a_n \neq 0$. Donc, pour r assez grand, on a $\mu(r, f) = |a_n|_p r^n$. Ainsi, il suffit de prendre $c = |a_n|_p$ et $d = n$ pour avoir l'inégalité.
Inversement, si il existe $c > 0$ et $d \geq 0$ tel que $\mu(r, f) \leq cr^d$, pour r assez grand, alors pour tout entier $n > d$, on a

$$\mu(r, f^{(n)}) \leq \frac{1}{r^n}\mu(r, f) \leq cr^{d-n} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, $f^{(n)} \equiv 0$ et f est un polynôme. ■

Lemme 3.2
Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$. S'il existe deux nombres réels $\alpha, \beta > 0$ et un entier $n \geq 2$ tels que

$$\mu(\alpha r^n, f) < \beta(\mu(r, f))^n, \text{ pour } r \text{ assez grand.}$$

Alors f est un polynôme.

Preuve.
On construit des nombres réels $c, d > 0$ tels que $\mu(r, f) \leq cr^d$, pour r assez grand.
Soit $r_0 > \max\{1, \frac{1}{\sqrt[n-1]{\alpha}}\}$. On choisit $c, d > 0$ tel que

$$\begin{cases} \mu(r_0, f) < cr_0^d \\ \beta < \dfrac{\alpha^d}{c^{n-1}}, \end{cases}$$

et posons $r_{k+1} = \alpha r_k^n$, pour $k \geq 0$. Ainsi, la suite (r_k) est strictement croissante et tend vers $+\infty$. Donc, on peut montrer par récurrence que

$$\mu(r_k, f) < c r_k^d, \quad pour \quad tout \quad k \geq 0.$$

En effet, la propriété est vraie pour $k = 0$.
Supposons qu'elle est vraie pour un entier $k \geq 0$, donc on a

$$\begin{aligned}
\mu(r_{k+1}, f) = \mu(\alpha r_k^n, f) &< \beta(\mu(r_k, f))^n \\
&< \beta c^n r_k^{dn} = c(\beta c^{n-1}) r_k^{dn} \\
&< c\alpha^d r_k^{dn} = c(\alpha r_k^n)^d \\
&= c r_{k+1}^d.
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que la propriété est vraie pour $k + 1$.
Pour tout $r \in [r_k, r_{k+1}]$, il existe $t \in [0,\ 1]$ tel que $r = r_k^t r_{k+1}^{1-t}$.
Donc d'après la convexité de $\log r \longmapsto \log \mu(r, f)$, on déduit que

$$\begin{aligned}
\mu(r, f) &\leq (\mu(r_k, f))^t (\mu(r_{k+1}, f))^{1-t} \\
&= (\mu(r_k, f))^t (\mu(\alpha r_k^n, f))^{1-t} \\
&< (\mu(r_k, f))^t (\beta(\mu(r_k, f))^n)^{1-t} \\
&< (c r_k^d)^t (\beta(c r_k^d)^n)^{1-t} \\
&= c^t r_k^{dt} c^{1-t} (\beta c^{n-1})^{1-t} (r_k^{n(1-t)})^d \\
&< c r_k^{dt} \alpha^{d(1-t)} r_k^{n(1-t)d} \\
&= c(r_k^t (\alpha r_k^n)^{1-t})^d \\
&= c(r_k^t r_{k+1}^{1-t})^d \\
&= c r^d.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mu(r_k, f) < c r_k^d \quad pour \quad tout \quad r \geq r_0.$$

Alors d'après le Lemme 3.1, f est un polynôme. ■

Preuve du Théorème 3.1.

Posons $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ où $a_0, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{C}_p$ et $a_n \neq 0$. Alors, on a

$$\begin{aligned}(f \circ P)(z) &= (P \circ f)(z)\\ &= a_0 + \cdots + a_n(f(z))^n.\end{aligned}$$

Comme $n \geq 2$, alors pour $r > 0$, on a

$$\mu(\mu(r, P), f) = \mu(\mu(r, f), P).$$

D'où, pour r assez grand on a

$$\begin{aligned}\mu(|a_n|_p r^n, f) &= |a_n|_p(\mu(r, f))^n\\ &< 2|a_n|_p(\mu(r, f))^n.\end{aligned}$$

Alors, d'après le Lemme 3.2, f est un polynôme. ■

Théorème 3.2 *[15]*

Soit P un polynôme non constant et f une fonction entière transcendante sur $\mathbb{C}_p$ telle que $P \circ f = f \circ P$. Alors le polynôme $P(z)$ est de la forme $P(z) = az$ où $a \in \mathbb{C}_p$ est une racine d'unité.

Preuve.

On suppose que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[z]$ et P un polynôme non constant, alors d'après le Théorème 3.1, $\deg(P) = k = 1$ et $P(z) = az + b$, où $a, b \in \mathbb{C}_p$ et $a \neq 0$.

Supposons que a n'est pas une racine d'unité. Alors on a $a^k \neq 1$, pour tout entier $k \geq 1$. Soit σ une fonction affine définie par

$$\sigma(z) = z + b(a - 1)^{-1}.$$

Son inverse σ^{-1} est donné par

$$\sigma^{-1}(z) = z + b(1-a)^{-1}.$$

Considérons la fonction

$$g(z) = (\sigma \circ f \circ \sigma^{-1})(z).$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}_p$, on a

$$\begin{aligned}
g(az) &= \sigma(f(az + \frac{b}{1-a})) \\
&= f(az + \frac{b}{1-a}) - \frac{b}{1-a} \\
&= f(a(z + \frac{b}{1-a}) + b) - \frac{b}{1-a} \\
&= af(z + \frac{b}{1-a}) + b - \frac{b}{1-a} \\
&= af(z + \frac{b}{1-a}) - \frac{ab}{1-a} \\
&= a(f(z + \frac{b}{1-a}) - \frac{b}{1-a}) \\
&= a(\sigma \circ f \circ \sigma^{-1})(z) \\
&= ag(z).
\end{aligned}$$

donc

$$g(az) = ag(z) \textit{ pour tout } z \in \mathbb{C}_p.$$

Si $g(z) = \sum_{n\geq 0} \beta_n z^n$, alors on a

$$g(az) = \sum_{n\geq 0} \beta_n a^n z^n.$$

D'où

$$g(az) - ag(z) = \sum_{n\geq 0} (a^n - a)\beta_n z^n = 0,$$

donc $\beta_0 = 0$ et $(a^{n-1} - 1)\beta_n = 0$, pour tout $n \geq 2$.
Et comme a n'est pas une racine d'unité, alors $a^{n-1} - 1 \neq 0$, pour tout $n \geq 2$, par conséquent $\beta_n = 0$, pour tout $n \geq 2$.
D'où

$$g(z) = \beta_1 z \ et \ f(z) = \beta_1 z + b(\beta_1 - 1)(a-1)^{-1}.$$

C'est une contradiction, car f est transcendante.
Par conséquent, a est une racine d'unité. Supposons maintenant que $b \neq 0$.
Pour tout entier positif n, on note par $P^{[n]}$, le polynôme $P \circ P \circ \cdots \circ P$, ($n$ fois).
Comme $f \circ P = P \circ f$, on a

$$f(az + b) = af(z) + b, \ pour\ tout\ z \in \mathbb{C}_p.$$

D'où

$$f'(az + b) = f'(z), \ pour\ tout\ z \in \mathbb{C}_p.$$

D'après le Théorème 2.7, il existe $\zeta \in \mathbb{C}_p$ tel que $|\zeta| > |b|$ et $f'(\zeta) = 0$.
Alors $\zeta, P(\zeta), \ldots, P^{[n]}(\zeta), \ldots$ sont des zéros de f', de plus leur nombre est infini et ils sont dans le cercle $C(0, \ |\zeta|)$. C'est une contradiction.
D'où, $b = 0$. ■

Remarque 3.1

*Le Théorème 3.2 est la version p-adique du Théorème 6 dans [2]. De plus, les deux résultats sont différents, car **Baker** montre que P est un polynôme de la forme*

$$P(z) = z \exp^{2\pi i m \backslash n} + c \ pour \ \ tout \ \ m, n \in \mathbb{Z}, \ c \in \mathbb{C}.$$

Corollaire 3.1

Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[z]$ où $F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. On suppose qu'il existe deux entiers naturels m, l premiers entre eux tels que $a_{m+1} a_{l+1} \neq 0$. Alors l'unique polynôme non constant P tel que $P \circ f = f \circ P$ est $P(z) = z$.

Preuve.

On a $P(z) = az$ où $a \in \mathbb{C}_p$ est un racine de l'unité. Alors $f(az) = af(z)$, donc

$$\sum_{n\geq 0}(a^n - a)\, a_n z^n = 0, \textit{ pour tout } z \in \mathbb{C}_p.$$

D'où

$$(a^n - 1)a_{n+1} = 0, \textit{ pour tout } n \geq 1.$$

Et comme on a $a_{m+1}a_{l+1} \neq 0$, on déduit que $a^m = a^l = 1$. De plus, m, l sont premiers entre eux, alors $a = 1$. ■

Théorème 3.3

Soit R une fraction rationnelle non constante et f une fonction méromorphe transcendante sur $\mathbb{C}_p$ telle que $R \circ f = f \circ R$. Alors $R(z)$ est un polynôme.

Pour la preuve on besoin du lemme suivant

Lemme 3.3

Soient F, f, g trois fonctions méromorphes. Si $F = f \circ g$ et f n'est pas une fraction rationnelle, alors g est entière.

Preuve.

Posons $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ avec f_1 et f_2 des fonctions entières sans zéros communs. Comme f n'est pas rationnelle, alors il existe au plus une valeur $w_0 \in \mathbb{C}_p$ telle que $f_1 - w_0 f_2$ soit un polynôme. Si w est différent de cette valeur éventuelle, alors la fonction entière $f_1(z) - wf_2(z)$ est transcendante et a une infinité de zéros que le note $c_k,\ k \in \mathbb{N}$.

Supposons que g a un pôle z_0. On pose

$$g(z) = \frac{W(z)}{(z - z_0)^n},\ n \in \mathbb{N}^*$$

où $W(z)$ est une fonction analytique qui ne s'annule en aucun point d'un disque ouvert de centre z_0 et de rayon R. Pour tout k, posons $T_k(z) = W(z) - c_k(z - z_0)^n$. Pour l'un de ces k, on choisit $\rho \in]0, R[$ tel que $|c_k|_p\rho^l = |W(z_0)|_p$. Donc, on a

$$\begin{cases} |c_k|_p r^l \leq |W(z_0)|_p & \text{si } 0 < r \leq \rho \\ |c_k|_p r^l \geq |W(z_0)|_p & \text{si } \rho \leq r < R \end{cases}$$

D'autre part, le fait que W n'ait pas de zéro dans $d^-(z_0, R)$ entraine que

$$\mu(r, W) = |W(z_0)|_p, \ \forall r \in]0, R[.$$

Donc on a

$$\mu(r, T_k)(r) = \begin{cases} |W(z_0)|_p & \text{si } 0 < r \leq \rho \\ |c_k|_p r^l & \text{si } \rho \leq r < R \end{cases}$$

et la fonction $T_k(z)$ admet au moins un zéro z_k sur le cercle $|z - z_0| = \rho$. On a donc $g(z_k) = c_k$, d'où $F(z_k) = w$. Comme les z_k sont en nombre infini, la fonction $F(z) - w$ admet une infinité de zéros dans le disque $|z - z_0|_p < R$. Ce qui est absurde. Donc g n'a aucun pôle et elle est entière. $\blacksquare$

Preuve du Théorème 3.3.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(z)$ et R une fraction rationnelle non constant. On pose $H = f \circ R = R \circ f$, donc H, f, R des fonctions méromorphes et comme $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(z)$, alors d'après le Lemme 3.3 R est entière. D'où $R \in \mathbb{C}_p[z]$. $\blacksquare$

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Amice Y.**, Les nombres p-adique. *Presses Universitaire de france* (1975).

[2] **Baker I. N.**, Zusammensetzungen ganzer Funktionen. *Math. Z.* 69, $121-163$(1958).

[3] **Baker I. N.**, Permutable entire functions. *Math. Z.* 79, $243-249$(1962).

[4] **Bézevin J. P.**, Dynamique des fractions rationnelles p-adiques. 23 mai 2005.

[5] **Bézévin J. P. and Boutabaa. A**, Decomposition of p-adic meromorphic functions. *Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 2, n° 1,p.51-60 (1995).*

[6] **Boutabaa A. and Escassut A.**, on uniquenss of p-adic meromorphic functions, *proc. Amer. Math. soc.* 126(9), $2557-2568$, (1998).

[7] **Diarra B.**, Analyse p-adique Cours de DEA Algèbre Commutative FAST, Université du Mali, (Décembre 1999-Mars 2000-Décembre 2000).

[8] **Escassut A.**, Analytic Elements in p-adic Analysis. *Word scientific publiching,(1995).*

[9] **Hayman W. K.**, Meromorphic Functions. *Clarendon Press, Oxford, 1964.*

[10] **Hu P. C. and Yang C. C.**, Meromorphic Functions over Non-Archimedean Fields. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.*

[11] **Iyer V. G.**, On permutable integral functions. *J. London Math. Soc. 34, 141-144(1959).*

[12] **Katok S.**, real and p-adic analysis. *Cours notes for math 497 C, Massprogram, fall 2000 (2002).*

[13] **Koblitez N.**, p-adic analysis and Zeta function. *Springer-verlag(1984).*

[14] **Osborne J. W. and Sixsmith D. J.**, On permutable meromorphic functions. *Aequationes mathematicae 90, 1025-1034(2016).*

[15] **Saoudi B., Boutabaa A. and Zerzaihi T.**, On factorization of p-adic meromorphic functions, *Indagationes Mathematicae 31, 921 - 933 (2020).*

[16] **Schikhof W. H.**, Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis, *Combridge University Press (1984).*