République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Mathématiques Fondamentales et Discrètes.

Thème

Quelques propriétés algébriques de C(X,Y) muni d'une topologie Set-Open

Présenté par :

Loubna Mekki

Devant le jury

Président	**I. Dekkar**	M.C.B Université de MSB-Jijel
Encadreur	**A. Bouchair**	Professeur Université de MSB- Jijel
Examinatrice	**M. Kemiha**	M.A.A Université de MSB-Jijel

Promotion **2020/2021**

REMERCIEMENTS

Louange au dieu miséricordieux qui m'a aidée à terminer ce travail.

Je tiens chaleureusement et sincèrement à remercier tous ceux qui avaient la main dans l'élaboration de ce travail, et particulièrement : mon encadreur qui a fait l'honneur de m' avoir encadrée, Monsieur ***A. BOUCHAIR****, qui n'a jamais cessé de m' aider par sa bonne intention, ses conseils et remarques constructives. qu'il soit aussi remercie pour sa gentillesse, sa patience, sa disponibilité permanente.*

Je tiens également à remercier les membres de jury, à l'examinatrice ***M. Kemiha*** *pour avoir accepté d'être membre de ce jury, et je remercie vivement* ***I. Dekkar*** *pour avoir accepté de présider le jury de soutenance.*

Mes vifs remerciements à ***Amel****,* ***Meryem*** *et* ***Ikram****, mes amies et mes collègues pour leur efficacité, amitié et encouragement tout au long de ce travail.*

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail : A celui qui m'a indiqué la bonne voie, et qui a attendu avec patience ce jour-là, à celui qui m'a initié à la vie, qui m'a appris la modestie : Mon Père.

A cette source de tendresse, qui a sacrifié sa vie pour parfaire mon éducation et qui me comble de bonheur : Ma mère.
Aux personnes les plus chères et les plus proches de mon cœur,ma famille qui me soutient et m'aide tout au long de la période d'étude et qui tenait à ma réussite, à mon fiancé qui m'appelait succès.
A tous mes amis qui m'ont accompagné le long de toutes les années d'études. Je vous souhaite du fond de mon cœur une belle vie pleine de joie, de bonheur et de succès. A tous ceux qui m'ont aidée et m'ont connue de loin ou de prés.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans l'étude d'un espace topologique on s'intéresse aux propriétés topologiques et algébriques, citons par exemple les axiomes de séparation, les propriétés de dénombrabilité, la compacité, groupes topologiques,...etc. Parmi tous ceux-ci, nous mentionnons spécifiquement les espaces des applications continues, noté $C(X,Y)$, définies d'un espace topologique X dans un autre espace topologique Y. Les topologies classique les plus connues sur les espaces des applications (fonctions) continues sont la topologie de la convergence simple et la topologie de la convergence uniforme. Les topologies set-open ont été introduites en 1951 par Arens et Dugundji[1] comme généralisation de la première citée précédemment.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons tout d'abord à l'étude de, $C_\alpha(X)$, l'espace des fonctions continues muni d'une topologie set-open engendrée par une famille de sous ensembles de X et on cherche les propriétés de la famille α qui implique que l'espace $C_\alpha(X)$ possède une structure de groupe topologique ou d'espace vectoriel topologique.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on va élaborer quelques notions de base de la topologie générale, à savoir la topologie initiale, la topologie produit et la topologie engendrée par un système fondamental de voisinages, les espaces compacts. nous donnons quelques propriétés et des résultats nécessaires par la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous allons développer la notion d'une topologie compatible avec des lois internes et externes d'une structure algébrique définie sur un ensemble X, de tel sorte que ce dernier va posséder des nouvelles structures qu'on va les connaitre après sous le nom de groupe topologique ou espace vectoriel topologique.

Dans le troisième chapitre, nous allons introduire des topologies sur l'ensemble des fonctions continues. En particulier, la topologie de la convergence simple, la topologie de la convergence uniforme (resp. de la convergence uniforme sur une famille α de sous-ensemble de X), les topologies set-open et set-open faible. Nous donnons quelques résultats dans ce cadre.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'étude des propriétés algébriques et topologiques des espaces des fonctions continues définies d'un espace topologique X dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie set-open et de la topologie set-open faible. On va étudier sous quelles conditions $C_\alpha(X)$ possède les structures de groupe topologique et d'espace vectoriel topologique. En suite, on va étudier sous quelles conditions $C_{\alpha^*}(X)$ possède les mêmes structures.

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES DE TOPOLOGIE

Dans ce chapitre nous rappelons quelques notions de base sur la topologie générale, commençant d'abord par la notion d'un espace topologique en parlant de ses propriétés. En suite, on va aborder la base et le système fondamental de voisinage d'un espace topologique. On va introduire la topologie initiale et la topologie produit. On terminera ce chapitre par la notion de la compacité. Les références utilisées dans ce chapitre sont [2], [3], [4], [10], [11].

1.1 Définition générales

Définition 1.1. *Soit X un ensemble non vide. On appelle topologie sur X, toute famille $\mathcal{T}$ de parties de X tel que :*
$A_1)$ $X, \phi \in \mathcal{T}$.
$A_2)$ *Pour tous* $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, *on a* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.
$A_3)$ *Pour tout* $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, *on a* $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.
Si $\mathcal{T}$ est une topologie sur X , alors $(X, \mathcal{T})$ est appelé un espace topologique et les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouvert de cet espace.

Remarque. *Pour un espace topologique* $(X, \mathcal{T})$ *donnée :*
1. *la partie vide* $\emptyset$ *et l'ensemble* X *sont des ouverts.*

Définition 1.2. *on appelle fermé de* X *toute partie dont le complémentaire est un ouvert de* X.

Exemple 1.3.

1. $\mathcal{T} = \{\phi, X\}$ *est une topologie sur* X*, appelée topologie grossière ou triviale.*
2. *Soit* X *un ensemble. Alors* $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$*, l'ensemble des parties de* X*, est une topologie sur* X*, appelée topologie discrète. Un ensemble muni de la topologie discrète est dit espace discret.*
3. *La famille* $\mathcal{T}$ *de tout les intervalles ouverts et réunion d'intervalles ouverts est une topologie sur* $\mathbb{R}$*, appelée topologie usuelle.*

Définition 1.4. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A \subset X$*, On appelle topologie induite par* X *sur* A *le couple* $(A, \mathcal{T}_A)$ *où*

$$\mathcal{T}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{T}\}$$

Définition 1.5. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ *. On dit que* $\mathcal{B}$ *est une base de* $\mathcal{T}$ *si tout élément de* $\mathcal{T}$ *est une réunion d'éléments de* $\mathcal{B}$ *.*

Exemple 1.6.
1. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{]a, b[, a, b \in \mathbb{R}\}$ *est une base de la topologie usuelle sur* $\mathbb{R}$.
2. *Soit* X *un ensemble. Alors* $\mathcal{B} = \{\{x\}, x \in X\}$ *est une base pour la topologie discrète sur* X *.*

Proposition 1.7. *Toute base* $\mathcal{B}$ *d'un espace topologie* X *jouit des deux propriétés suivantes :*
$B_1)$ $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}$*, si* $x \in U_1 \cap U_2, \exists U \in \mathcal{B} : x \in U \subset U_1 \cap U_2$ *.*
$B_2)$ $\forall x \in X, \exists U \in \mathcal{B} : x \in U$.

Définition 1.8. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $x \in X$*. On dit qu'un sous ensemble* $V \subset X$ *est un voisinage de* x*, s'il existe* $\Omega \in \mathcal{T}$ *tel que :*

$$x \in \Omega \subset V$$

On note $\mathcal{V}(x)$ *la famille de tous les voisinages de* x.

Proposition 1.9. *Soit X un espace topologique et $x \in X$. Alors*

1. *L'intersection finie de voisinages d'un point x est un voisinage de x.*
2. *x appartient à tous ses voisinages.*
3. *V est un ouvert si et seulement s'il est voisinage de tous ses points.*

Proposition 1.10. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout point $x \in X$ et pour tout voisinage ouvert V de x , il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U \subset V$.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$. Soient $x \in X$ et $V \in \mathcal{T}$ tel que $x \in V$. Alors :

$$\begin{aligned} V \in \mathcal{T} &\Rightarrow \exists (U_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{B} : V = \cup_{i \in I} U_i \\ &\Rightarrow x \in \cup_{i \in I} U_i \\ &\Rightarrow \exists i_0 \in I : x \in U_{i_0} \\ &\Rightarrow x \in U_{i_0} \subset V. \end{aligned}$$

Inversement, soit $\Omega \in \mathcal{T}$ et $x \in \Omega$. D'après l'hypothèse il existe $U_x \in \mathcal{B}$ tel que :

$$x \in U_x \subset \Omega$$

Alors :

$$\Omega \subset \bigcup_{x \in \Omega} U_x \subset \Omega$$

ce qui implique

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} U_x$$

D'où $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$. ■

Proposition 1.11. *Soit X un ensemble et soit $\mathcal{B}$ une famille non vide de sous ensembles de X qui possède les propriétés (B_1) et (B_2) de la Proposition 1.7. Soit*

$$\mathcal{T} = \{\Omega \subseteq X / \exists \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B} : \Omega = \cup \mathcal{B}_0\}$$

Où $\cup \mathcal{B}_0 = \cup \{A : A \in \mathcal{B}_0\}$. Alors $\mathcal{T}$ est une topologie sur X et la famille $\mathcal{B}$ est une base pour l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$.

Démonstration. Montrons que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X

1. On a $\emptyset = \cup\mathcal{B}_0$ avec $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset\}$ et $X = \cup\mathcal{B}_1$ avec $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$. donc $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. Soient $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Montrons que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ .On a :
$$U_1 = \bigcup_{x\in S} V_s \quad \text{et} \quad U_2 = \bigcup_{t\in T} W_t$$
avec $V_s, W_t \in \mathcal{B}$. Alors
$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{(s,t)\in S\times T} (V_s \cap W_t)$$
Il suffit de montrer que $V_s \cap W_t$ s'écrit sous la forme d'une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. D'après (B_1) on a :
$$\forall x \in V_s \cap W_t; \exists \Omega(x) \in \mathcal{B} : x \in \Omega(x) \subset V_s \cap W_t$$
Donc
$$V_s \cap W_t = \bigcup_{x\in V_s\cap W_t} \Omega(x)$$
Il suffit de prendre
$$\mathcal{B}_0 = \{\Omega(x) : x \in V_s \cap W_t\}$$
3. La troisième condition est satisfaite par définition de la famille $\mathcal{T}$.

Il est claire que $\mathcal{B}$ est une base pour $\mathcal{T}$. ■

Définition 1.12. *Soit $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. On dit que $\mathcal{B}(x)$ est un système fondamental de voisinages de x, noté SFV de x, si :*
$$\forall V \subset \mathcal{V}(x), \exists U \in \mathcal{B}(x) : U \subset V.$$

Proposition 1.13. *Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace topologique X. Alors la famille :*
$$\mathcal{B}(x) = \{\Omega \in \mathcal{B} / x \in \Omega\}$$
est un SFV de x.

Exemple 1.14.
1. *Dans $(\mathbb{R}, \|.\|)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la famille $\{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}^*\}$ est un SFV de x .*
2. *Si (X, d) un espace métrique et $x \in X$, alors la famille $\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est un SFV de x.*
3. *Si X est un espace discret, alors $\mathcal{B}(x) = \{\{x\} : x \in X\}$ est un SFV de x.*

Définition 1.15. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ est un système fondamental de voisinages de x .*
la collection $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ est appelée un système fondamental de voisinages pour l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$.

Proposition 1.16. *Soit $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ un système fondamental de voisinages pour l'espace topologique X. On a les propriétés suivantes :*
C_1) Pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ pour tout $U \in \mathcal{B}(x)$, $x \in U$.
C_2) Si $x \in U \in \mathcal{B}(y)$, alors il existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tel que $V \subset U$.
C_3) Pour tout $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(x)$ il existe $U \in \mathcal{B}(x)$ tel que $U \subset U_1 \cap U_2$.
la propriété (C_1) découlé directement de la définition d'un système fondamental de voisinages de x, les propriétés (C_2) et (C_3) découlent également de la définition d'un système fondamental de voisinages de x, puisque $U \in \mathcal{B}(y)$ et $U_1 \cap U_2$ sont des ensembles ouverts contenant x.

Théorème 1.17. *Soit X un ensemble et $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ une collection de familles de sous-ensembles de X qui ont des propriétés (C_2) et (C_3). Soit $\mathcal{T}$ une famille de tous les sous-ensembles de X qui sont des unions de sous-familles de $\bigcup_{x\in X} \mathcal{B}(x)$. La famille $\mathcal{T}$ satisfait les conditions (A_2) et (A_3), et la collection $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ est le système de voisinages pour l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$. La topologie $\mathcal{T}$ est appelée la topologie générée par le système de voisinages $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$.*

1.2 Applications continues

Définition 1.18. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est continue si pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage V de $f(x_0)$ dans Y, il existe un voisinage U de x_0 dans X tel que $f(U) \subseteq V$.*

Proposition 1.19. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue.*
2. *Pour tout ouvert (résp.fermé) U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert (résp.fermé) de X.*
3. *Si $\mathcal{B}$ est une base de Y, Alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X pour tout $U \in \mathcal{B}$.*
4. *Si $\mathcal{B}_s$ est une sous-base de Y, Alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X pour tout $U \in \mathcal{B}_s$.*

Définition 1.20. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est un homéomorphisme si f est bijective continue et l'application inverse f^{-1} est continue .*
On dit que X et Y sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme entre X et Y, et on note $X \simeq Y$.

Proposition 1.21. *Soient X, Y deux espace topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme. Alors :*

1. *f est ouverte.*
2. *f est fermée.*
3. *$f(A)$ est un ouvert (fermé) de $Y \Leftrightarrow A$ est un ouvert (fermé) de X.*

Définition 1.22. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On dit que f est un plongement si f est un homéomorphisme de X dans $f(X)$.*

1.3 Topologie initiale

Soient X un ensemble, $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$ soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application. La topologie discrète sur X rend continue toutes les applications f_i, mais on cherche ici à construire la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les applications f_i. Soit $\mathcal{B}$ la famille des intersections finies d'ensembles de la forme $f_i^{-1}(U_i)$ où $i \in I$ et U_i est un ouvert de Y_i. Alors $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés suivantes :
A_1) pour tout $x \in X$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U$
A_2) pour tout $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ et tout $x \in U_1 \cap U_2$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que

$$x \in U \subset U_1 \cap U_2$$

Donc il existe une topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. cette topologie est appelée la topologie initiale associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$.
Notons que si Y est un espace topologique et si $f : X \longrightarrow Y$ est une application, Alors la topologie initiale associée à f est tout simplement

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}(U), U \text{ ouvert de } Y\}$$

Dans ce cas, la topologie initiale sur X associée à f est appelée l'image réciproque par f de la topologie sur Y. On vérifie facilement la proposition suivante :

Proposition 1.23. *Soient X un ensemble et $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application et soit $\mathcal{T}$ la topologie initiale sur X associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$:*
1. *Soit $x \in X$, Alors on obtient une base de voisinages de x formée d'ensembles de la forme*

$$\bigcap_{i\in J} f_i^{-1}(U_i)$$

où J est un sous-ensemble fini de I et U_i est un ouvert de Y_i contenant $f_i(x)$.
2. *Si pour tout $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de Y_i et si $\mathcal{B}'$ est la famille des intersections finies d'ensembles de la forme $f_i^{-1}(U_i)$ où $i \in I$ et $U_i \in \mathcal{B}_i$, alors $\mathcal{B}'$ est une base d'ouverts de la topologie $\mathcal{T}$.*

1.4 Espaces topologiques produits

Soient $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques non vide et $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$.

Définition 1.24. *On appelle ouvert élémentaire de X toute partie*

$$\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$$

où $\Omega_i \in \mathcal{T}_i$ et chaque Ω_i égale à X_i sauf pour un nombre fini d'indices.
On appelle topologie produit sur X la topologie qui a comme base la famille des ouverts élémentaires de X.

Définition 1.25. *Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$. On appelle application projection de X sur X_j ,$j \in I$, l'application qui au point $x = (x_i)_{i \in I}$ associe le point $x_j \in X_j$. i.e.,*

$$P_{r_j} : X \longrightarrow X_j$$
$$(x_i)_{i \in I} \longmapsto x_j$$

Proposition 1.26. *La famille $\mathcal{B}_0 = \{P_{r_j}^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j \ , \ j \in I\}$ est une sous base pour la topologie produit sur X.*

Démonstration. On a pour tout $j \in J$

$$\begin{aligned} P_{r_j}^{-1}(U_j) &= \{x = (x_i)_{i \in I} \in X : P_{r_j}(x) \in U_j\} \\ &= \{x = (x_i)_{i \in I} \in X : x_j \in U_j\} \\ &= \prod_{i \in I} \Omega_i \end{aligned}$$

avec

$$\Omega_i = \begin{cases} X_i, & i \neq j \\ U_j, & i = j \end{cases}$$

Donc $I(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}$ où $I(\mathcal{B}_0)$ est la famille de toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ est la base de la topologie produit.
En effet,

$$\bigcap_{j=0}^{n} P_{r_j}^{-1}(U_j) = \prod_{i\in I} \Omega_i$$

avec $\Omega_i = \begin{cases} X_i, & i \neq j \\ U_j, & i = j \end{cases}$ ■

Proposition 1.27. *Soit X un espace topologique , $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application pour tout $i \in I$. On définit une application f, appelée application diagonale, comme suit :*

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \prod_{i\in I} Y_i \\ x &\longmapsto f(x) = (f_i(x))_{i\in I} \end{aligned}$$

Alors f est continue si et seulement si f_i est continue pour tout $i \in I$.

Démonstration. Supposons que pour tout $i \in I$, f_i est continue. Soit $U = \prod_{i\in I} U_i$ un ouvert élémentaire dans $\prod_{i\in I} Y_i$. On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{x \in X : (f_i(x))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} U_i\} \\ &= \{x \in X : f_i(x) \in U_i; i \in I\} \\ &= \{x \in X : x \in f_i^{-1}(U_i); i \in I\} \\ &= \bigcap_{i\in J} f^{-1}(U_i). \end{aligned}$$

où J est l'ensemble d'indices pour lesquels $U_i \neq Y_i$. Comme f_i est continue et U_i est un ouvert pour tout $i \in I$, alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert.
Inversement , il suffit de remarquer que $f_i = P_{r_j} \circ f$ avec $P_{r_i} : (y_i)_{i\in I} \longmapsto y_i$ est la projection canonique de $\prod_{i\in I} Y_i$ dans Y_i qui est continue. ■

1.5 Axiomes des séparations

Définition 1.28. *Soit X un espace topologique*

1. *On dit que X est un espace T_0 si pour tous x, y deux points distincts de X, il existe ou*

bien un voisinage de x ne contenant pas y ou bien un voisinage de y ne contenant pas x.
2. *On dit que X est un espace T_1 si pour tous x, y deux points distincts de X, il existe un voisinage de x ne contenant pas y et un voisinage de y ne contenant pas x.*
3. *On dit que X est un espace T_2(ou de Hausdorff ou séparé) si pour tous $x, y \in X$ tel que $x \neq y$, ils existent $U \in \mathcal{V}(x)$ et $V \in \mathcal{V}(y)$ avec $U \cap V = \emptyset$*

Exemple 1.29. *Soit $X = \{0, 1\}$. Alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ est une topologie sur X. L'espace X est T_0 mais n'est pas T_1.*

Définition 1.30. *Un espace topologique X est dit régulier (ou T_3) si :*
1. *X est un espace T_1.*
2. *Pour tout $x \in X$ et tout fermé F tels que $x \notin F$, ils existent deux ouverts U et V de X tel que $x \in U, F \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

Définition 1.31. *Un espace topologique X est dit complètement régulier(où bien de Tychonoff) si :*
1. *X est un espace T_1.*
2. *Pour tout $x \in X$ et tout fermé F tel que $x \notin F$, ils existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0, 1]$ avec $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$, pour tout $y \in F$.*

Exemple 1.32. $(\mathbb{R}, |.|)$ *est un espace complètement régulier.*

Définition 1.33. *Un espace normal est un espace topologie vérifiant un axiome de séparation plus fort que la condition usuelle d'être un espace séparé.*

1.6 Espaces compacts

Définition 1.34. *Soit X un espace topologique et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X. On dit que $(\Omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X , si $X = \cup_{i \in I} \Omega_i$.*
Un recouvrement est dit ouvert si tout membre de ce recouvrement est un ouvert.

Définition 1.35. *Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Exemple 1.36.

1. $[a, b]$ *est compact.* $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}$ *muni de la topologie usuelle n'est pas compact.*

3. $]0,1]$ *muni de la topologie usuelle induite de* $\mathbb{R}$ *n'est pas compact.En effet, la famille* $\{]\frac{1}{n},1]/n \in \mathbb{N}^*\}$ *est un recouvrement ouvert de* $]0,1]$ *dont on ne peut extraire aucun sous recouvrement fini.*
4. *Un espace séparé et fini est compact.*

Proposition 1.37. *Soit X un espace topologique.*

1. *Si X est compact et $A \subset X$ est fermé ,alors A est compact.*
2. *Si X est séparé et $A \subset X$ est compact, alors A est fermé.*
3. *Si X est compact, alors de toute suite infinie de points de X on peut extraire une sous suite convergente.*

Proposition 1.38. *Soit X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si $A \subset X$ est un compact et Y séparé, alors $f(A)$ est compact.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$. Alors :

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\cup_{i\in I} U_i) \subset \cup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$$

comme f est continue , alors $f^{-1}(U_i)$ est un recouvrement ouvert de A dans X. Mais A est compact, on peut extraire un sous recouvrement fini. Soit $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subset I$ tel que :

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{i=k} f^{-1}(U_{i_j})$$

alors

$$f(A) \subset \bigcup_{j=1}^{j=k} U_{i_j}$$

et donc $(U_{i_j})_{1\leq j\leq k}$ est un sous recouvrement fini de $f(A)$. D'où $f(A)$ est compact. ■

Définition 1.39. *Soient X, Y deux espaces topologiques. Un sous ensemble A de X est dit Y-compact si pour toute application continue $f : X \to Y$, $f(A)$ est compact dans Y.*

Proposition 1.40. *Soit X, Y deux espaces topologiques tel que Y est séparé. Alors tout sous ensemble compact de X est Y-compact. Tout sous-ensemble fermé d'un espace dénombrable ;ent compact est $\mathbb{R}$-compact.*

Proposition 1.41. *La fermétude d'un ensemble $\mathbb{R}$-compact et $\mathbb{R}$-compact.*

Démonstration. Soit $A \subseteq X$ un ensemble $\mathbb{R}$-compact, et soit f une fonction arbitraire de $C(X)$. Montrons que

$$f(\bar{A}) = f(A)$$

Au cas contraire, supposons qu'il existe un point $y \in f(\bar{A}) \backslash f(A)$. Soit $y = f(x)$, où $x \in \bar{A}$. Comme $f(A)$ est compact, alors $\mathbb{R} \backslash f(A)$ est un ouvert contenant y. Donc $f^{-1}(\mathbb{R} \backslash f(A))$ est un voisinage du point x n'intersect pas A. Ceci contredit le fait que $x \in \bar{A}$, et donc la proposition est prouvée. ■

Définition 1.42. *Un sous-ensemble A d'un espace normal X est un zéro-ensemble si et seulement s'il existe une fonction continue $f : X \to I$ tell que $A = f^{-1}(0)$.*

En prenant le complément, on peut reformuler la définition comme suit :

Définition 1.43. *Un sous-ensemble A d'un espace normal X est un cozéro-ensemble si et seulement s'il existe une fonction continue $f : X \to I$ tell que $A = f^{-1}(]0, 1])$.*

Proposition 1.44. *Si A est un sous-ensemble $\mathbb{R}$-compact de X et n est un nombre naturel, alors A est aussi un ensemble $\mathbb{R}^n$-compact. (i.e., pour toute fonction continue de X dans $\mathbb{R}^n$, l'image de A est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$).*

Démonstration. Soit $f \in (C(X), \mathbb{R}^n)$. Notons que la projection de l'ensemble $f(A)$ sur chacun des axes de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble compact, donc $f(A)$ réside dans le produit l'ensembles compact, ainsi, il suffit de prouver que $f(A)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$. Soit $y \in \overline{f(A)}$, considérons la fonction $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x)$ est égale à la distance entre x et y dans $\mathbb{R}^n$. cette fonction est continue et $g^{-1}(0) = y$. Alors $(g \circ f)(A)$ est un ensemble compact dans $\mathbb{R}$ et le point 0 est dans sa fermeture. Il s'ensuite que $0 \in (g \circ f)(A)$, $y \in f(x)$, et $f(A)$ est fermé. la proposition est prouvée. ■

Proposition 1.45. *L'intersection d'un ensemble $\mathbb{R}$-compact et d'un zéro-ensemble est un ensemble $\mathbb{R}$-compact .*

Démonstration. Soit $A \subseteq X$ un ensemble $\mathbb{R}$-compact et soit $B \subseteq X$ un zéro-ensemble. Soit $g \in C(X)$ tel que $g^{-1}(0) = B$, et soit f une fonction arbitraire de $C(X)$. Montrons que $f(A \cap B)$ est un ensemble compact dans $\mathbb{R}$. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto h(x) = (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

La fonction h est continue, car

$$h^{-1}(U \times V) = \{x \in X : f(x) \in U, g(x) \in V\} = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V).$$

Par la Proposition 1.44, l'ensemble $h(A)$ est compact. considérons $T = \mathbb{R} \times \{0\}$ et montrons que

$$h(A \cap B) = h(A) \cap T$$

En effet, il existe un point $x \in A \cap B$ tel que

$$y = h(x) = (f(x), g(x)) = (f(x), 0)$$

i.e., $y \in T$. Inversement, prenons $y \in h(A) \cap T$, alors

$$y = h(x) = (f(x), g(x))$$

pour un certain $x \in A$. Car $y \in T$ et $g(x) = 0$, nous avons $x \in g^{-1}(0) = B$. Donc, $x \in A \cap B$ et $y \in h(A \cap B)$. Ainsi, l'ensemble $h(A \cap B) = h(A) \cap T$ est compact comme l'intersection d'un ensemble compact avec un ensemble fermé. Finalement, il suffit de voir que $f(A \cap B)$ est la projection de l'ensemble $h(A \cap B)$ sur T, la proposition est prouvée. ■

Théorème 1.46. *(Théorème de Tychonoff)*

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques non vide, alors l'espace produit $\prod_{i \in I} X_i$ est compact si et seulement si X_i est compact pour tout $i \in I$.

1.7 Structures uniformes et espaces uniformes

Soit X un ensemble. On note par Δ la diagonale de $X \times X$, i.e., $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. Soient V, W deux sous ensembles de $X \times X$. Soit $A \subseteq X$, posons

$$VW = V \circ W = \{(x, z) : (x, y) \in W, (y, z) \in V \text{ pour certain } y \in X\}$$

$$V^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in V\}, V[x] = \{y : (x, y) \in V\}, V[A] = \bigcup_{x \in A} V[x].$$

Un ensemble V de $X \times X$ est dit symétrique si $V = V^{-1}$. On a les propriétés suivantes :

1. $(V \circ W)[A] = V[W[A]]$.
2. $(V \circ W)^{-1} = W^{-1} \circ V^{-1}$.
3. Si $V \subset X \times X$ est symétrique, alors $V \circ W \circ V = \bigcup \{V[x] \times V[y] : (x, y) \in W\}$.

Définition 1.47. *On appelle structure uniforme sur X toute famille non-vide $\mathcal{U}$ de sous-ensembles de $X \times X$ qui satisfait les axiomes suivants :*
(U1) Si $V \in \mathcal{U}$ alors $\Delta \subseteq V$;
(U2) Si $V, W \in \mathcal{U}$ alors $V \cap W \in \mathcal{U}$;
(U3) Si $V \in \mathcal{U}$ et $V \subseteq W$ alors $W \in \mathcal{U}$;
(U4) Si $V \in \mathcal{U}$ alors $V^{-1} \in \mathcal{U}$;
(U5) Si $V \in \mathcal{U}$ alors il existe $W \in \mathcal{U}$ telle que $W \circ W \subseteq V$.

La paire $(X, \mathcal{U})$ est appelée espace uniforme et les ensembles de $\mathcal{U}$ sont appelés les entourages de la structure uniforme définie sur X.

Exemple 1.48.
1. *Sur l'ensemble des nombres réel, $\mathbb{R}$, on définit la structure uniforme dite usuelle par*

$$\mathcal{U}_{\mathbb{R}} = \{V \subseteq \mathbb{R}^2 : \exists r > 0, V_r \subseteq V\}, V_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\mid x - y \mid< r\}$$

2. *Soit X un ensemble. Les familles suivantes, $\mathcal{U}_d$ et $\mathcal{U}_g$, forment des structures uniformes sur X : $\mathcal{U}_d = \{V \subseteq X \times X : \Delta \subseteq V\}$; $\mathcal{U}_g = \{X \times X\}$.*

Les conditions (U4) et (U5) sont équivalentes à la conditions suivante :

(U6) Pour tout $V \in \mathcal{U}$ alors il existe $W \in \mathcal{U}$ telle que $W \circ W^{-1} \subseteq V$.

Il est clair que (U4) et (U5) implique (U6). Supposons que (U6) est vérifiée et soit $V, W \in \mathcal{U}$ telle que $W \circ W^{-1} \subseteq V$. On a $W^{-1} = \Delta \circ W^{-1} \subset W \circ W^{-1} \subset V$. Donc $W \subset V^{-1}$. D'après (U3), on aura $V^{-1} \in \mathcal{U}$. Pour montrer (U5), posons $W' = W \cap W^{-1}$. Alors $W' \in \mathcal{U}$ et on a $W' \circ W' \subseteq W \circ W^{-1} \subseteq V$.

Définition 1.49. *Soit $\mathcal{U}$ une structure uniforme sur X. Une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ est dite base ou système fondamental d'entourages de $\mathcal{U}$ si pour tout $V \in \mathcal{U}$ il existe $W \in \mathcal{B}$ telle que $W \subset V$.*

Exemple 1.50. *La famille $\mathcal{B} = \{V_r \subset \mathbb{R}^2 : r > 0\}$ forme une base pour la structure uniforme usuelle sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.51. *Une famille $\mathcal{B}$ de sous-ensemble de $X \times X$ est une base pour une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur X si et seulement si :*
(B1) Tout élément de $\mathcal{B}$ contient Δ ;
(B2) Si $V \in \mathcal{B}$ alors V^{-1} contient un élément de $\mathcal{B}$;
(B3) Si $V \in \mathcal{B}$ alors il existe $W \in \mathcal{B}$ telle que $W \circ W \subseteq V$;
(B4) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$, il existe $V \in \mathcal{B}$ telle que $V \subset V_1 \cap V_2$.

On remarque que si V est un entourage de $\mathcal{U}$ alors $V \cap V^{-1}$ et $V^{-1} \cap V$ sont des entourages symétriques de $\mathcal{U}$. Les axiomes (U2) et (U4) montrent que les entourages symétriques forment un système fondamental d'entourages de $\mathcal{U}$.

Définition 1.52. *Soit (X, U) un espace uniforme, la famille*

$$\mathcal{T}_u = \{A \subseteq X : \forall x \in A, \exists V \in U, V[x] \subseteq A\}$$

est une topologie sur X appelée la topologie déduite de la structure uniforme $\mathcal{U}$ où la topologie uniforme.

Définition 1.53. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur X est dit compatible avec la topologie $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_u$*
L'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit uniformisable s'il existe une structure uniforme sur X compatible avec sa topologie.

Théorème 1.54. *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est uniformisable si et seulement s'il est de Tychonoff.*

CHAPITRE 2

GROUPES ET ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Dans ce chapitre nous allons munir un ensemble d'une structure algébrique et d'une topologie compatible avec ses lois internes et externes. Dans la première section, nous allons présenter la notion de groupe topologique et donner quelques propriétés topologiques. Dans la deuxiéme section, nous rappelerons les définitions d'un espace vectoriel topologique, et d'un espace vectoriel localement convexe. Nous donnerons quelques théorèmes dans ce cadre. Les références utilisées dans ce chapitre sont [2], [3], [7], [10].

2.1 Groupes topologiques

Définition 2.1. *On appelle groupe topologique tout ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une topologie satisfaisant aux axiomes suivants :*

G_1) *L'application :*

$$\begin{aligned} \varphi_1 : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x + y \ \text{ est continue.} \end{aligned}$$

G_2) L'application :

$$\varphi_2 : G \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto -x \text{ est continue.}$$

Exemple 2.2.
1. $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ *muni de la topologie usuelle sont des groupes topologiques.*
2. *Un groupe muni de la topologie discrète est un groupe topologique dit groupe discret. En effet, les applications φ_1 et φ_2 sont continues car toute application définie d'un espace topologique discret dans un espace topologique quelconque est toujours continue.*

On note par e l'élément neutre du groupe topologique G.

Théorème 2.3. *Les axiomes (G_1) et (G_2) sont équivalent à l'axiome suivant :*

G_3) L'application

$$\varphi_3 : G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, y) \mapsto x - y \text{ est continue.}$$

Démonstration. On remarque que :
$\forall (x, y) \in G \times G$, on a :

$$\varphi_3(x, y) = \varphi_1(x, \varphi_2(y))$$

Comme φ_1 et φ_2 sont des applications continues alors φ_3 l'est aussi.
Réciproquement, $\forall x \in G$ on a :

$$\varphi_3(e, x) = \varphi_2(x) = -x$$

Or, φ_3 est continue donc φ_2 est continue .
de plus, $\forall (x, y) \in G \times G$ on a :

$$\varphi_3(x, \varphi_2(y)) = x - (-y) = x + y = \varphi_1(x, y)$$

et donc φ_1 est aussi continue. ■

Théorème 2.4. *Soit G un groupe topologique et soit $a, b \in G$.*

i) La translation à gauche $l_a : x \mapsto a + x$ (resp.la translation à droite $r_a : x \mapsto x + a$) est un homéomorphisme.

ii) la symétrie $\varphi_2 : x \mapsto -x$ est un homéomorphisme

Démonstration.

i) D'après (G_1), il est évident que l_a est continue. Montrons qu'elle est bijective. Soient $x, x' \in G$ tel que :

$$\begin{aligned} l_a(x) = l_a(x') &\Rightarrow a + x = a + x' \\ &\Rightarrow (-a) + a + x = (-a) + a + x' \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

d'où l_a est injective. La surjection est vérifié car

$$\forall y \in G, \exists x = y - a \in G \text{ tel que } : y = l_a(x).$$

ii) évident.

■

Soient G un groupe topologique, $U \subseteq G, V \subseteq G$ et $a \in G$. On définit

$$a + U = \{a + u : u \in U\}$$
$$V + U = \{v + u : v \in V, u \in U\}.$$

Corollaire 2.5. *Soit G un groupe topologique et soit $a \in G$.*
1) Si U est un ensemble ouvert de G alors $a + U$ (resp. $U + a$) est un ouvert dans G.
2) Si U est un ouvert dans G alors $-U$ est un ouvert dans G.

Démonstration. Remarquons que les ensembles $a+U$, $U+a$, $-U$ sont les images directes de l'ouvert G par les homéomorphismes l_a, r_a, φ_2 respectivement, d'où le résultat. ■

Théorème 2.6. *Soit G un groupe topologique et V un ouvert de G. Alors*

- *Si $V \in \mathcal{V}(e)$, alors $\exists\ U \in \mathcal{V}(e)$ tel que $U + U \subseteq V$.*
- *Si $V \in \mathcal{V}(e)$ alors $-V \in \mathcal{V}(e)$.*
- *Si $V \in \mathcal{V}(e)$, $\exists U \in \mathcal{V}(e)$ tel que $U - U \subseteq V$*

Démonstration.

1. Soit V un voisinage ouvert de e. On a :

$$\begin{aligned} \varphi_1 : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\mapsto \varphi_1(x, y) = x + y \quad \text{est continue.} \end{aligned}$$

Donc $\varphi_1^{-1}(V)$ est un ouvert dans $G \times G$. De plus

$$e \in V \Rightarrow \varphi_1^{-1}\{e\} \subseteq \varphi_1^{-1}(V).$$

on a

$$\varphi_1^{-1}(e) = \{(x, y) \in G \times G : x + y = e\}$$

il est clair que $(e, e) \in \varphi_1^{-1}\{e\}$. Donc il existe un voisinage U de e tel que $U \times U$ soit contenu dans $\varphi_1^{-1}(V)$.

$$i.e., \quad U \times U \subseteq \varphi_1^{-1}(V) \Rightarrow \varphi_1(U \times U) \subseteq V \Rightarrow U + U \subseteq V$$

2. Soit $V \in \mathcal{V}(e)$. Alors il existe O un ouvert de G tel que $e \in O \subseteq V$. donc

$$\varphi_2(e) \in \varphi_2(O) \subseteq \varphi_2(V)$$

Alors $e \in -O \subseteq -V$.
On a vu déjà que la symétrie $\varphi_2 : x \longmapsto -x$ est un homéomorphisme de G dans G. Donc $\varphi_2(O) = -O$ est un ouvert dans G. Alors $-V \in \mathcal{V}(e)$.
3. De la même manière que dans (1). et en considérant l'application continue

$$\begin{aligned} \varphi_3 : \quad G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x - y \end{aligned}$$

On trouve que $\varphi_3(e, e) \in V$. Donc il existe un voisinage ouvert $W = W_1 \times W_2$ de (e, e) dans $G \times G$ telque $\varphi_3(W) \subseteq V$. Prenons $U = W_1 \cap W_2$ qui est un voisinage ouvert de e donc $\varphi_3(U, U) \subseteq \varphi_3(W) \subseteq V \Rightarrow U - U \subseteq V$. D'où le résultat. ∎

Proposition 2.7. *Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes topologiques. Alors $G = \prod_{i \in I} G_i$ est un groupe topologique dit produit des groupes topologiques G_i muni de la topologie produit des G_i.*

Proposition 2.8. *Soit G un groupe topologique et soient $x, y \in G$. Alors $x \in \overline{\{y\}} \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer une seule implication, l'inverse s'obtient de la même manière. Soient $x, y \in G$ tel que $x \in \overline{\{y\}}$. Donc tout voisinage de x contient le point y. Considérons l'application continue

$$\begin{aligned} \varphi_2 ; G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

Soit U un voisinage dans G du point $\varphi_2(x) = -x$. Comme φ_2 est continue, alors il existe un voisinage $U^{'}$ de x tel que

$$\varphi_2(U^{'}) \subseteq U$$

Donc

$$U^{'} \subseteq \varphi_2^{-1}(U)$$

or, $U^{'} \in \mathcal{V}(x)$, alors

$$y \in \varphi_2^{-1}(U)$$

Donc

$$\varphi_2(y) \in U \Rightarrow -y \in U.$$

Comme U est arbitraire alors tout voisinage de $-x$ contient le point $-y$. Alors

$$-x \in \overline{\{-y\}} \tag{2.1}$$

Considérons l'application continue

$$\begin{array}{rccc} \varphi_2 : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

Soit V un voisinage dans G du point $\varphi_1(-x, y) = -x + y$. Comme φ_1 est continue, alors il existe un voisinage W de $(-x, y)$ dans $G \times G$ tel que $\varphi_1(W) \subseteq V$. Soit $W = W_1 \times W_2$, avec W_1 un voisinage ouvert de $-x$ et W_2 un voisinage ouvert de y. D'aprés (2.1) on a

$$\begin{aligned} -x \in W_1 &\Rightarrow -y \in W_1 \\ &\Rightarrow (-y, y) \in W \\ &\Rightarrow \varphi_1(-y, y) \in \varphi_1(W) \subseteq V \\ &\Rightarrow -y + y \in V \\ &\Rightarrow e \in V \end{aligned}$$

Comme V est arbitraire, donc tout voisinage de $-x + y$ contient e, alors

$$-x + y \in \overline{\{e\}} \tag{2.2}$$

Soit Ω un voisinage de $\varphi_1(x, -x + y) = y$ dans G. comme φ_1 est continue, alors il existe un voisinage $\Omega^{'} = \Omega_1 \times \Omega_2$ de $(x, -x + y)$ dans $G \times G$ tel que Ω_1 est un voisinage ouvert de x dans G et Ω_2 est un voisinage ouvert de $-x+y$ dans G et $\varphi_1(\Omega^{'}) \subseteq \Omega$. De (2.2), on a

$$\begin{aligned} -x+y \in \Omega_2 &\Rightarrow e \in \Omega_2 \\ &\Rightarrow (x,e) \in \Omega^{'} \subseteq \varphi_1^{-1}(\Omega) \\ &\Rightarrow \varphi_1(x,e) \in \Omega \\ &\Rightarrow \varphi_1(x,-x+x) \in \Omega \\ &\Rightarrow x \in \Omega. \end{aligned}$$

Comme Ω est arbitraire alors tout voisinage de y contient x, donc $y \in \overline{\{x\}}$. D'où le résultat. ∎

Proposition 2.9. *Soit G un groupe topologique et soit A une partie de G. Alors, on a $\overline{A} = \cap\{A+V : V \in \mathcal{V}(e)\}$. En particulier, on a $\overline{\{e\}} = \cap\{V : V \in \mathcal{V}(e)\}$.*

Démonstration. Supposons que $b \in \overline{A}$ et montrons que $b \in \cap\{A+V : V \in \mathcal{V}(e)\}$.
Soit $b \in \overline{A}$. Alors pour tout voisinage U de b, on a $U \cap A \neq \emptyset$.
Soit $V \in \mathcal{V}(e)$, D'après le Théorème 2.6 et sans perte de généralité on peut prendre V symétrique. Si $V \in \mathcal{V}(e)$ alors $b+V \in \mathcal{V}(b)$.
En effet, Si $V \in \mathcal{V}(e)$, alors il existe O un ouvert dans G tel que $e \in O \subseteq V$.
Considérons la translation à gauche $l_b : G \longrightarrow G$, qui associe à chaque $x \in G$, l'élément $x+b$. Donc

$$l_b(e) \in l_b(O) \subseteq l_b(V)$$

D'où

$$b \in O+b \subseteq V+b$$

D'après le corollaire 2.5 . On a $O+b$ est un ouvert dans G. D'où $V+b \in \mathcal{V}(b)$.
comme $b+V \in \mathcal{V}(b)$ alors $(b+V) \cap A \neq \emptyset$
Donc, ils existent $v \in V$ et $a \in A$ tel que $a = b+v$. alors

$$\begin{aligned} a = b+v &\Rightarrow b = a-v \\ &\Rightarrow b \in A+V \\ &\Rightarrow b \in A+V, \forall V \in \mathcal{V}(e) \end{aligned}$$

D'où

$$b \in \cap\{A+V : V \in \mathcal{V}(e)\}$$

Réciproquement, soit $b \in \cap\{A + V : V \in \mathcal{V}(e)\}$ et montrons que $b \in \overline{A}$.
Considérons la translation l_b tel que

$$\begin{aligned} l_b : & G \longrightarrow G \\ & x \longmapsto b + x. \end{aligned}$$

Soit $W \in \mathcal{V}(b)$, alors on a

$$b = b + e = l_b(e) \in W$$

comme l_b est continue, il existe U un voisinage symétrique de e tel que $l_b(U) \subseteq W$.
On a

$$b \in \{A + V : V \in \mathcal{V}(e)\}$$

alors $b \in A + V$ pour tout $V \in \mathcal{V}(e)$.
En particulier, pour $V + U$, on a

$$b \in A + U \Rightarrow \exists a \in A, \exists u \in U : b = a + u$$

alors

$$b = a + u \Rightarrow a = b + u \Rightarrow a \in b + U$$

Donc

$$a \in A \cap (b + U) \subseteq A \cap W \Rightarrow b \in \bar{A}.$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.10. *Soit $(G_i)_i \in I$ une famille de groupes topologiques, alors $G = \prod_{i \in I} G_i$ muni de la loi de composition suivante*

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} G_i \times \prod_{i \in I} G_i &\longrightarrow \prod_{i \in I} G_i \\ ((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) &\longmapsto (x_i + y_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

est un groupe topologique dit produit des groupes topologiques G_i, muni de la topologie produit des G_i.

Démonstration. Montrons d'abord que $(\prod_{i \in I} G_i, +)$ a la structure d'un groupe.
Soient $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$. On a :

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$$

La loi "$+$" est associative est admet un élément neutre $e = (e_i)_{i\in I}$ tel que e_i est l'élément neutre de G_i , $\forall i \in I$.
Et tout élément $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ admet un symétrie $-x = (-x_i)_{i\in I}$ tel que $\forall i \in I$, $-x_i$ est le symétrie de x_i dans G_i. D'où $\prod_{i\in I} G_i$ est un groupe.
Maintenant il suffit de montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \phi : \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i &\longrightarrow \prod_{i\in I} G_i \\ (x, y) &\longmapsto x - y \end{aligned}$$

est continue.

Soit $U = \prod_{i\in I} U_i$ un ouvert dans $\prod_{i\in I} G_i$.

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(U) &= \Big\{(x, y) \in \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i : x - y \in \prod_{i\in I} U_i\Big\} \\ &= \Big\{(x, y) \in \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i : ((x_i) - (y_i))_i \in \prod_{i\in I} U_i\Big\} \\ &= \Big\{(x, y) \in \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i : (x_i - y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} U_i\Big\} \\ &= \Big\{(x, y) \in \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i : x_i - y_i \in U_i, \forall i \in I\Big\} \\ &= \Big\{(x, y) \in \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i : x_i \in U_i + y_i, y_i \in -U_i + x_i, \forall i \in I\Big\} \\ &= \Big\{(x, y) \in \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i : x \in \prod_{i\in I} U_i + y, y \in -\prod_{i\in I} U_i + x\Big\} \\ &= \Big(\prod_{i\in I} U_i + y\Big) \times \Big(\prod_{i\in I} -U_i + x\Big). \end{aligned}$$

Comme U_i est un ouvert de G_i alors, D'après le Corollaire 2.5, $U_i + y_i$ et $-U_i + x_i$ sont aussi des ouverts de G_i pour tout $i \in I$ et donc $\prod_{i\in I} U_i + y$ et $\prod_{i\in I} -U_i + x$ sont aussi des ouvert dans $\prod_{i\in I} G_i$. D'où $\phi^{-1}(U)$ est un ouvert de $\prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i$. Donc ϕ est continue, d'où $\prod_{i\in I} G_i$ est un groupe topologique. ∎

Exemple 2.11. *Soit X un espace topologique. L'ensemble $\mathbb{R}^X$ des applications définies de X dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie produit est un groupe topologique.*

Théorème 2.12. *Tout groupe topologique est un espace uniforme.*

Définition 2.13. *Soient $G, G^{'}$ deux groupes topologiques. On dit qu'une application $f : G \to G$ est un homomorphisme de groupes topologiques, si*

- *$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in G$.*
- *f est continue.*

Si, de plus, f est un homéomorphisme on dit que f est un isomorphisme topologique de groupes. On dit que G et $G^{'}$ sont topologiquement isomorphes, s'il existe un isomorphisme topologique de G dans $G^{'}$.

2.2 Espaces vectoriels topologiques

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Définition 2.14. *On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) un ensemble X muni de deux lois :*
• *une loi interne, notée + telle que (X,+) soit un groupe commutatif. L'élément nul est noté 0_X.*
• *une loi externe, notée $(\cdot)$ qui est une application de $\mathbb{K} \times X$ dans X vérifiant :*
$\forall (x, y) \in X^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$

1. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$
2. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x.$
3. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x.$
4. $1 \cdot x = x$ *où* 1 *est l'élément neutre pour la multiplication de* $\mathbb{K}$.

Exemple 2.15.
1. $\mathbb{R}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{Q}$.
2. *l'ensemble $C(X)$ des fonctions continues réelles ou complexes définies sur l'espace topologique X est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Définition 2.16. *Un espace vectoriel topologique X est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ muni d'une topologie pour laquelle les applications*

$$X \times X \longrightarrow X$$
$$(x, y) \longmapsto x + y$$

et

$$\mathbb{K} \times X \longrightarrow X$$
$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$$

sont continues.
On dit dans ce cas que la topologie de X est compatible avec les opérations naturelle de la structure d'espace vectoriel.

Proposition 2.17. *Soit X un espace vectoriel topologique, $a \in X$ et $\lambda \neq 0$, alors les applications suivantes*

$$\begin{aligned} T_a : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto T_a(u) = u + a \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_\lambda : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto M_\lambda(u) = \lambda u \end{aligned}$$

sont des homéomorphismes.

Démonstration.
1. Montrons que T_a et M_λ sont bijectives.

- pour T_a on a :

$$\begin{aligned} T_a(u) = T_a(v) &\Rightarrow u + a = v + a \\ &\Rightarrow u + a - a = v + a - a \\ &\Rightarrow u = v. \end{aligned}$$

donc T_a est injective
T_a est surjective puisque

$$\forall v \in X, \exists u = v - a \in X, T_a(u) = (v - a) + a = v$$

D'où T_a est bijective et $(T_a)^{-1} = T_{-a}$

$$(T_a \circ T_{-a})(u) = T_a(u - a) = (u - a) + a = u = id_X(u)$$
$$(T_{-a} \circ T_a)(u) = T_{-a}(u + a) = (u + a) - a = u = id_X(u).$$

- De la même manière, M_λ est bijective et $(M_\lambda)^{-1} = M_{\frac{1}{\lambda}}$.

2. Pour vérifiée la continuité. Il suffit de prendre les applications T_a et M_λ comme des translation à gauche. Donc, à travers ce qui précède dans la Théorème 2.4 les applications sont des homéomorphismes.

■

Corollaire 2.18. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique, $a \in X$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
1. *Soient U un ouvert de X et A un sous-ensemble de X. Alors $a + U$ et*

$$A + U = \bigcup_{x \in A} (x + U)$$

sont des ouverts de X, et $\lambda.U$ est aussi un ouvert de X si $\lambda \neq 0$.

2. *Soit F un fermé de X. Alors $a + F$ et λF sont des fermés de X.*

3. *Soit K un compact de X. Alors $a + K$ et $\lambda.K$ sont des compacts de X.*

2.2.1 Espace vectoriel topologique semi-normé

On considéré l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, où bien le corps $\mathbb{R}$ des nombres réelles.

Définition 2.19. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Soit B un sous-ensemble de X. On dit que B est borné si pour tout voisinage V de 0, il existe un réel $s > 0$ tel que*

$$B \subset s.V$$

Définition 2.20. *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une semi-norme sur X est une application $\mathcal{N} : X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes :*

- *Pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$.*
- *pour tout $x, y \in X$, on a $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(Y)$.*

Si $\mathcal{N}$ est une semi-norme sur un espace vectoriel X, Alors le couple $(X, \mathcal{N})$ est appelé espace vectoriel semi-normé, ou simplement un espace semi-normé

Remarque. *Soit $\mathcal{N}$ une semi-norme sur un espace vectoriel X. Alors*

1. $\mathcal{N}(0) = 0$.
2. *pour tout $x, y \in X$, on a $|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(Y)| \leq \mathcal{N}(x - y)$.*

Exemple 2.21. 1. *Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f : X \to F$ une application linéaire et $q : F \to \mathbb{R}_+$. Alors l'application $q \circ f$ est une semi-norme sur X.*

Définition 2.22. *Une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X est une application :*

$$\begin{aligned} \|.\| : X &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

possédant les propriétés suivantes :

N_1) pour tout $x \in X$ non nul, on a $\|x\| \neq 0$.

N_2) pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

N_3) pour tout $x, y \in X$,on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

L'espace X, muni de la norme $\|.\|$, est dit espace normé ou espace vectoriel normé. On note souvent un tel espace $(X, \|.\|)$. On déduit de la propriété (N_2) que l'on a $\|0\| = 0$.

Proposition 2.23. *(séparé d'un espace vectoriel semi-normé)*
Soient X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{P} : X \to \mathbb{R}_+$ une semi-norme sur X. Soit

$$F = \{x \in X, \mathcal{P}(x) = 0\},$$

Alors on a :

1. *Si $x, y \in X$ tels que $x - y \in F$, alors on a $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(y)$.*
2. *L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de X.*
3. *Il existe une norme $\|.\|$ sur l'espace vectoriel quotient X/F, telle que $\|\pi(x)\| = \mathcal{P}(x)$, pour tout $x \in X$, où $\pi : X \to X/F$ est l'application quotient.*

Démonstration.
1. Soients $x, y \in X$ tels que $x - y \in F$, alors on a

$$\mathcal{P}(x) \leq \mathcal{P}(x-y) + \mathcal{P}(y) = \mathcal{P}(y)$$

et

$$\mathcal{P}(y) \leq \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(y-x) = \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(x-y) = \mathcal{P}(x)$$

d'où

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(y)$$

2. On a $\mathcal{P}(0) = 0$, donc $0 \in F$. Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après 1, on a

$$\mathcal{P}(x+y) = \mathcal{P}(x) = 0$$

donc $x + y \in F$. Enfin, on a

$$\mathcal{P}(\lambda x) = |\lambda|\mathcal{P}(x) = |\lambda| 0 = 0$$

donc $\lambda x \in F$. Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de X.
3. D'après 1, l'application

$$\begin{aligned} \|.\| : X/F &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \pi(x) &\longmapsto \|\pi(x)\| = \mathcal{P}(x) \end{aligned}$$

est bien définie. il reste à montrer que $\|.\|$ est une norme sur X/Y. Soient $a, b \in X/F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $x, y \in X$ tel que $\pi(x) = a$ et $\pi(y) = b$. Si $\|a\| = 0$, alors $\mathcal{P}(x) = 0$, donc $x \in F$, d'où $a = \pi(x) = 0$. On a

$$\|\lambda a\| = \|\pi(\lambda x)\| = \mathcal{P}(\lambda x) = |\lambda|\mathcal{P}(x) = |\lambda|\|a\|$$

On a

$$\|a + b\| = \|\pi(x+y)\| = \mathcal{P}(x+y) \leq \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(y) = \|a\| + \|b\|$$

Donc $\|.\|$ est une norme sur X/Y. ■

Définition 2.24. *L'espace vectoriel normé* $(X/F, \|.\|)$ *associé à* $(X, \mathcal{P})$ *s'appelle le séparé de* X.

2.2.2 Espace vectoriel topologique localement convexe

Définition 2.25. *Un ensemble* A *dans un espace vectoriel* X *est dit convexe si quels que soient les points* x,y *appartenant à* A, *le segment fermé d'extrémités* x *et* y *est contenu dans* A.

Définition 2.26. *Un espace vectoriel topologique* X *est dit localement convexe si tout point de cet espace possède un système fondamental de voisinages convexes*

$$\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists U \quad \textit{ouvert convexe tel que} \quad x \in U \subset V$$

Définition 2.27. *Soient* X *un espace vectoriel,* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille d'espace vectoriels topologiques et pour tout* $i \in I$, *soit* $f_i : X \to F_i$ *une application linéaire. On dit que la famille* $(f_i)_{i\in I}$ *est séparante, si pour tout* $x \in X$ *tel que* $x \neq 0$, *il existe* $i \in I$ *tel que* $f_i(x) \neq 0$.

Proposition 2.28. *Soient* X *un espace vectoriel,* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille d'espace vectoriels topologiques et pour tout* $i \in I$, *soit* $f_i : X \to F_i$ *une application linéaire. On suppose de plus que la famille* $(f_i)_{i\in I}$ *est séparante. Alors* X *muni de la topologie initiale associée à la famille* $(f_i)_{i\in I}$ *est un espace vectoriel topologique. De plus, si pour tout* $i \in I$, F_i *est localement convexe, alors* X *est localement convexe.*

Définition 2.29. *Soit* X *un espace vectoriel et* $(\mathcal{P}_i)_{i\in I}$ *une famille de semi-normes sur* X. *Pour tout* $i \in I$, *soit* $(X_i, \|.\|_i)$ *le séparé de l'espace semi-normé* $(X, \mathcal{P}_i)$ *et soit*

$$\pi_i : (X, \mathcal{P}_i) \to (X_i, \|.\|_i)$$

l'application canonique, c'est une application linéaire et pour tout $x \in X$, *on a* $\|\pi_i(x)\|_i = \mathcal{P}_i(x)$, *voir la Proposition de(séparé). La topologie sur* X *associée à la famille de semi-normes* $(\mathcal{P}_i)_{i\in I}$ *est la topologie initiale sur* X *associée à la famille d'applications linéaires* $(\pi_i)_{i\in I}$.

Théorème 2.30. *Soient* X *un espace vectoriel et* $(\mathcal{P}_i)_{i\in I}$ *une famille séparante de semi-normes sur* X. *Soit* $\mathcal{T}$ *la topologie sur* X *associée à la famille* $(\mathcal{P}_i)_{i\in I}$. *Alors on a :*

1. $(X, \mathcal{T})$ *est un espace localement convexe.*
2. *Pour tout* $i \in I$ *et tout* $n \geq 1$, *soit* $V(i, n) = \{x \in X : \mathcal{P}_i(x) < \frac{1}{n}\}$. *Soit* $\mathcal{B}$ *la collection*

des intersection finies de $V(i,n)$. Alors $\mathcal{B}$ est une base locale de $(X,\mathcal{T})$ formée d'ensembles ouvert convexes.

3. *Pour tout $i \in I$, $\mathcal{P}_i$ est continue.*

4. *Soit A un sous-ensemble de X. Alors A est borné dans $(X,\mathcal{T})$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $\mathcal{P}_i$ est majorée sur A.*

Théorème 2.31. *Un espace vectoriel localement convexe est un espace vectoriel dont la topologie est définit par une famille de semi-normes.*

CHAPITRE 3

TOPOLOGIES SUR LES ESPACES DE FONCTIONS CONTENUES

Dans ce chapitre, nous allons définir différentes topologies sur l'ensemble des applications continues définies d'un espace topologique X dans un espace Y. On commence par la topologie de la convergence simple, la topologie de la convergence uniforme, la topologie de la convergence uniforme sur une famille α de sous-ensembles non vides de l'ensemble X, et on finira par les topologies set-open et set-open faible. Nous donnons aussi quelques propriétés de ces topologies. Les références utilisées dans ce chapitre sont [3], [6], [9].

Soient X et Y deux espaces topologiques.
Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ une famille finie d'ensembles, et $x \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Donc

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

où $x_i \in X_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Le point x peut être interprété comme suit :

$$\begin{aligned} x : \{1, 2, ..., n\} &\longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} X_i \\ j &\longmapsto x(j) = x_j \end{aligned}$$

Inversement, si :

$$f : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$
$$j \longmapsto f(j) \in X_j$$

Alors il existe un unique point $x_f \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, tel que

$$f(\{1, 2, ..., n\}) = x_f = (f(1), f(2), ..., f(n)).$$

A l'aide de cette interprétation on définit dans le cas où I est arbitraire :

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i / f(i) \in X_i, \forall i \in I\}$$

Soit X ,Y deux espaces topologiques. On note par Y^X l'ensemble de toutes les applications définies de X dans Y :

$$Y^X = \{f : X \to Y/f \text{ application } \}$$

que l'on munit de la topologie produit.

3.1 Topologie de la convergence simple

Soient X,Y deux espaces topologiques et $C(X, Y)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues de X vers Y. i.e.,

$$C(X, Y) = \{f : X \to Y/f \text{ est continue } \}.$$

• Si $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$, alors on note :

$$[A, B] = \{f \in C(X, Y) : f(A) \subseteq B\}$$

. • Si $A = \{x\}$ alors on écrit $[x, B]$ au lieu de $[\{x\}, B]$.

Propriétés 3.1.

1. $\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, B\right] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [A_i, B]$.

2. $\left[A, \bigcap\limits_{i=1}^{n} B\right] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [A, B_i]$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}.\ \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i, B\right] &= \{f \in C(X,Y) : f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \subset B\} \\
&= \{f \in C(X,Y) : \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i) \subset B\} \\
&= \{f \in C(X,Y) : f(A_i) \subset B, \forall i \in \{1,...,n\}\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{f \in C(X,Y) : f(A_i) \subset B\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} [A_i, B].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{2}.\ \left[A, \bigcap_{i=1}^{n} B_i\right] &= \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset \bigcap_{i=1}^{n} B\} \\
&= \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset \bigcap_{i=1}^{n} B_i\} \\
&= \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset B_i, \forall i \in \{1,...,n\}\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset B_i\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} [A, B_i].
\end{aligned}$$

■

Définition 3.2. *La famille*

$$\mathcal{B}_p = \{\bigcap_{i=1}^{n} [x_i, U_i] : x_i \in X, U_i \in \mathcal{T}_Y, \forall i = 1,...,n\}$$

est une base pour une topologie sur $C(X,Y)$ appelée la topologie de la convergence simple sur $C(X,Y)$, qu'on note par $\mathcal{T}_p$ et l'espace obtenu sera noté $C_p(X,Y)$.

Théorème 3.3. *L'espace des applications continues, $C_p(X)$, muni de la topologie de la convergence simple est un groupe topologique. En effet, $(C_p(X),+)$ est un sous groupe de $\mathbb{R}^X$. Et comme $\mathbb{R}^X$ est un groupe topologique, donc l'application*

$$\phi : \mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X \longrightarrow \mathbb{R}^X$$

définie par $\phi(f,g) = f - g$ pour tout (f,g) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{X}} \times \mathbb{R}^X$, est continue. La restriction de cette application sur l'espace $C_p(X)$ reste aussi continue.

Proposition 3.4. *Soit $x \in X$, et $U \subset Y$. Soit l'application projection*

$$\begin{aligned}
P_x : Y^X &\longrightarrow Y \\
f &\longmapsto P_x(f) = f(x)
\end{aligned}$$

Alors

$$[x, U] = C(X, Y) \cap P_x^{-1}(U)$$

Démonstration. Pour $x \in X$ et $U \subset Y$, on a

$$\begin{aligned}[x, U] &= \{f \in C(X, Y) : f(x) \in U\} \\ &= \{f \in C(X, Y) : P_x(f) \in U\} \\ &= \{f \in C(X, Y) : f \in P_x^{-1}(U)\} \\ &= C(X, Y) \cap P_x^{-1}(U).\end{aligned}$$

■

Proposition 3.5. *La topologie $\mathcal{T}_p$ coincide avec la topologie induite sur $C(X, Y)$ par la topologie produit de Y^X.*

Démonstration. Soit $\mathcal{T}_1$ la topologie induite sur $C(X, Y)$ de l'espace produit Y^X et soit $W \in \mathcal{T}_1$. Alors

$$W = A \cap C(X, Y)$$

où A est un ouvert de Y^X. (On peut prendre A un ouvert élémentaire de Y^X). On a alors :

$$A = P_{x_1}^{-1}(U_{x_1}) \cap P_{x_2}^{-1}(U_{x_2}) \cap ... \cap P_{x_n}^{-1}(U_{x_n})$$

avec $x_i \in X_i$ et $U_{x_i} \in \mathcal{T}_Y$. Donc

$$A \cap C(X, Y) = [x_1, U_{x_1}] \cap ... \cap [x_n, U_{x_n}]$$

Alors $A \cap C(X, Y) \in \mathcal{T}_p$. D'ou $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_p$

Inversement, montrons que $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_1$. Soit $W \in \mathcal{T}_p$, alors

$$W = \bigcup_{i \in I} \Omega_i \quad , \Omega_i \in B_p$$

alors $\exists x_1, x_2, ..., x_n \in X, \exists U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{T}_Y$:

$$\Omega_i = \bigcup_{j=1}^{n} [x_j, U_j], \quad \forall i \in I$$

On a

$$[x_j, U_j] = C(X, Y) \cap P_{x_j}^{-1}(U_j)$$

alors

$$\Omega_i = C(X, Y) \cap P_{x_1}^{-1}(U_1) \cap ... \cap P_{x_n}^{-1}(U_n)$$

Donc $\bigcup\limits_{i \in I} \in \mathcal{T}_1$. D'ou $W \in \mathcal{T}_1$ et donc $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_1$. ■

Proposition 3.6. *Soit X, Y deux espaces topologiques et $\mathcal{B}_Y$ une base de Y. Alors la famille*

$$\mathcal{B}_p^{'} = \{\bigcap_{i=1}^{n}[x_i, U_i]; x_i \in X; \quad U_i \in \mathcal{B}_Y\}$$

est une base de $C_p(X, Y)$.

Démonstration.
Soit $W = \bigcap\limits_{i=1}^{k}[x_i, V_i] \in \mathcal{B}_p$ avec $x_i \in X$ et V_i est un ouvert de Y pour tout $i = 1, ..., k$. Soit

$$f \in W = \bigcap_{i=1}^{k}[x_i, V_i].$$

Alors $f(x_i) \in V_i$, pour tout $i = 1, ..., k$. Comme $\mathcal{B}_Y$ est une base de Y, alors pour tout $i = 1, ..., k$ il existe $W_i \in \mathcal{B}_Y$ tel que $f(x_i) \in W_i \subset V_i$. Donc

$$f \in \bigcap_{i=1}^{k}[x_i, W_i] \subset \bigcap_{i=1}^{k}[x_i, V_i]$$

Posons $\bigcap\limits_{i=1}^{k}[x_i, W_i] = A_f \in \mathcal{B}_p^{'}$ Alors

$$\bigcap_{i=1}^{k}[x_i, V_i] = \bigcup_{f \in \bigcap\limits_{i=1}^{k}[x_i, V_i]} A_f = \bigcup_{f \in W} A_f.$$

Donc tout ouvert de $C_p(X, Y)$ s'écrit comme réunion d'élément de $\mathcal{B}_p^{'}$. D'où $\mathcal{B}_p^{'}$ est une base de $C_p(X, Y)$. ■

3.2 Topologie de la convergence uniforme

Soit X un espace topologique et $\mathbb{R}$ l'espace des nombres réels muni de la topologie usuelle.
Rappelons qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^X$ converge uniformément vers une fonction f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \forall n \geq \delta : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

où d'une manière équivalente, si :

$$\lim_{n \to \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

On écrit dans ce cas :

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f$$

Définition 3.7. *Soit $A \subset C(X,\mathbb{R})$, $f \in C(X,\mathbb{R})$. On définit l'ensemble $\overline{A}$ comme suit :*

$$f \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \text{ tel que } : \lim_{n\to\infty} f_n = f$$

Définition 3.8. *La famille*

$$\mathcal{T}_u = \{W \subset C(X,\mathbb{R}) : \overline{C^W} = C^W\}$$

est une topologie sur $C(X,\mathbb{R})$ appelée la topologie de la convergence uniforme sur $C(X,\mathbb{R})$. On note $C_u(X) = C_u(X,\mathbb{R})$ l'espace topologique obtenu.

Proposition 3.9. *Soit X un espace topologique. Alors la topologie de la convergence simple sur $C(X,\mathbb{R})$ est moins fine que la topologie de la convergence uniforme, c-à-d, $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_u$ et on écrit $C_p(X) \leq C_u(X)$.*

Démonstration. On a

$$\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_u \Leftrightarrow id : C_u(X,\mathbb{R}) \to C_p(X,\mathbb{R}) \text{ est continue.} \Leftrightarrow id(\overline{F}) \subset \overline{id(F)}, \forall F \subset C(X,\mathbb{R})$$

Soit $F \subset C(X,\mathbb{R})$. Notons par $\overline{F}^u$ la fermeture de F par rapport à la topologie $\mathcal{T}_u$, et $\overline{F}^p$ la fermeture par rapport à la topologie $\mathcal{T}_p$. Donc on va montrer que $\overline{F}^u \subset \overline{F}^p$
Soit $f \in \overline{F}^p$. Alors il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. On sait que

$$f \in \overline{F}^p \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}_p(f) : U \cap F \neq \emptyset$$

Soit $U \in \mathcal{V}_p(f)$. Alors

$$U = C(X,\mathbb{R}) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} P_{x_i}^{-1}(U_i))$$

où U_i est un ouvert de $\mathbb{R}$, $\forall i \in \{1,2,...,n\}$.
Comme U_i est un ouvert de $\mathbb{R}$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$]f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon[\subset U_i, \forall i \in \{1,2,...,n\}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ alors

$$\exists j \in \mathbb{N}^* : |f(x) - f_j(x)| < \varepsilon, \forall x \in X$$

En particulier

$$|f(x_i) - f_j(x_i)| < \varepsilon \Rightarrow f_j(x_i) \in \,]f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon[\, \subset U_i, \forall i \in \{1,2,...,n\}$$

Donc :

$$f_j \in \bigcap_{i=1}^{n} [x_i, U_i] = U \Rightarrow f_j \in U \cap F \Rightarrow U \cap F \neq \emptyset$$

D'où $f \in \overline{F}^p$ c-à-d $\overline{F}^u \subset \overline{F}^p$. ■

3.3 Topologie de la convergence uniforme sur une famille de sous ensembles

Soit X un espace topologique et α une famille de sous ensembles de X. Pour tout $A \in \alpha$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on définit

$$A_\varepsilon = \{(f,g) \in C(X) \times C(X) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \forall x \in A\}$$

Proposition 3.10. *La famille $\{A_\varepsilon; A \in \alpha, \varepsilon > 0\}$ est un système fondamental d'entourages (où base) d'une uniformité $\mathcal{U}_{C(X)}$ sur $C(X)$.*
On note par $\mathcal{T}_{\alpha,u}$ la topologie sur $C(X)$. induite par la structure uniforme $\mathcal{U}_{C(X)}$ et par $C_{\alpha,u}(X)$ l'espace topologique obtenu.

Définition 3.11. *La topologie $\mathcal{T}_{\alpha,u}$ est appelée la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de α.*

Proposition 3.12. *Soit X un espace topologique et α une famille de sous ensembles de X. Pour tout $f \in C(X), A \in \alpha, \varepsilon > 0$, soit*

$$\langle f, A, \varepsilon \rangle = \{g \in C(X) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \forall x \in A\}$$

alors la famille $\{\langle f, A, \varepsilon \rangle; A \in \alpha, \varepsilon > 0\}$ est un système fondamental de voisinage de f dans $C_{\alpha,u}(X)$.

Remarque. *Si $\alpha = \{X\}$, alors $C_{\alpha,u}(X) = C_u(X)$*

Proposition 3.13. *L'espace $C_{\alpha,u}(X)$ est complètement régulier.*

3.3.1 La topologie engendrée par la famille de pseudo-seminormes

Soit X un espace topologique et α une famille de sous-ensembles de X.

Proposition 3.14. *Pour tout $A \in \alpha$, l'application*

$$\begin{aligned} P_A : &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto P_A(f) \end{aligned}$$

tel que $P_A(f) = min\{1, sup\{|f(x)| : x \in A\}\}$ est une pseudo-semi norme sur $C(X)$.

Pour tout $A \in \alpha$ et $\varepsilon > 0$, soit

$$V_{A,\varepsilon} = \{f \in C(X) : P_A(f) < \varepsilon\}$$

et

$$\mho = \{V_{A,\varepsilon}; A \in \alpha, \varepsilon > 0\}$$

Soit $\mathcal{T}_s$ la topologie engendrée par la famille de pseudo-seminormes $\{P_A, A \in \alpha\}$.

Proposition 3.15. *Pour tout $f \in C(X)$, la famille $f + \mho = \{f + V : V \in \mho\}$ est un système fondamental de voisinages de f.*

Théorème 3.16. *Soit X un espace topologique, alors $\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_{\alpha,u}$ sur $C(X)$.*

Démonstration. Prenons $0 < \varepsilon < 1$, Soit $\langle f, A, \varepsilon\rangle$ un voisinage de f dans $C_{\alpha,u}(X)$, où $A \in \alpha$ et $\varepsilon > 0$. Montrons que $f + V_{A,\varepsilon} \subset \langle f, A, \varepsilon\rangle$.
Soit $h \in f + V_{A,\varepsilon}$. Alors il existe $g \in V_{A,\varepsilon}$ tel que $h = f + g$. Donc $P_A(g) < \varepsilon$. On obtient que $\forall x \in A : |f(x) - h(x)| = |f(x) - f(x) + g(x)| = |g(x)| < \varepsilon$. D'où $\mathcal{T}_{\alpha,u} \subset \mathcal{T}_s$.
D'autre part,
Soit $V_{A,\varepsilon}$ un voisinage de base d'un $f \in C(X)$ dans $\mathcal{T}_s$ où $A \in \alpha$ et $0 < \varepsilon < 1$. Alors

$$f \in \langle f, A, \frac{\varepsilon}{2}\rangle \subset V_{A,\varepsilon}$$

En effet, soit $g \in \langle f, A, \frac{\varepsilon}{2}\rangle$. Posons $h = f - g$, donc $|f(x) - g(x)| = |h(x)|$ ce qui nous donne $\langle f, A, \frac{\varepsilon}{2}\rangle \subset \{|h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in A\} \subset V_{A,\varepsilon}$ D'où $\mathcal{T}_s \subset \mathcal{T}_{\alpha,u}$ ∎

3.4 Topologies Set-Open et Set-open faible

Soit X ,Y deux espaces topologiques et α une famille de sous ensembles de X.

Définition 3.17. *On appelle topologie set-open sur $C(X,Y)$ la topologie notée $\mathcal{T}_\alpha$ qui a comme base la famille*

$$\mathcal{B}_\alpha = \{\cap_{i=1}^n [B_i, U_i]/B_i \in \alpha, U_i \in \mathcal{T}_Y\}.$$

On note $C(X,Y)$ muni de $\mathcal{T}_\alpha$ par $C_\alpha(X,Y)$.

Définition 3.18. *On appelle topologie set-open-faible sur $C(X,Y)$ la topologie notée $\mathcal{T}_{\alpha^*}$ qui a comme base la famille*

$$\mathcal{B}_{\alpha^*} = \{\bigcap_{i=1}^n [B_i, V_i]^* : B_i \in \alpha_i^*, V_i \in \mathcal{T}_Y\}$$

où

$$[B, V]^* = \{f \in C(X) / \overline{f(B)} \subset V\}$$

On note $C(X, Y)$ muni de $\mathcal{T}_{\alpha^*}$ par $C_{\alpha^*}(X, Y)$.

Remarque.

1. *Si α est la famille de toutes les parties finies de X alors $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}_p$.*
2. *Si $\alpha = K(X)$, la famille de toutes les parties compactes de X, alors $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}_k$ est appelée la topologie compact-open et $C_\alpha(X, Y) = C_k(X, Y)$.*

Proposition 3.19. *Soit X un espace topologique séparé. La topologie de la convergence simple est moins fine que la topologie compact-open sur $C(X, Y)$, c'est à dire $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_k$*

Démonstration.

On a $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{B}_k$ puisque tout partie fini de X est compact , d'où $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_k$. ■

Définition 3.20. *Soit α une famille de sous-ensembles d'un espace topologique X. On dit que α est un réseau de X si la condition suivante est satisfaite*

$$\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists A \in \alpha : x \in A \subset V$$

Si tous les éléments de α sont fermés (compacts) on dit alors que α est un réseau fermé (compact).

Exemple 3.21.

1. *Toute base d'une topologie est un réseau.*
2. *La famille $F(X)$, de toutes les parties finies d'un espace topologique X est un réseau fermé. En effet,*

$$\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists \{x\} \in F(X) : x \in \{x\} \subset V.$$

Si de plus X est séparé, alors $F(X)$ est un réseau compact.

Proposition 3.22. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue surjective. Si α est un réseau de X, alors $f(\alpha)$ est un réseau de Y où*

$$f(\alpha) = \{f(A) / A \in \alpha\}$$

.

Démonstration. Supposons que α est un réseau de X et montrons que $f(\alpha)$ est un réseau de Y i.e

$$\forall y \in Y, \forall U \in \mathcal{V}(y), \exists B \in f(\alpha) : y \in B \subset U$$

Soit $y \in Y$ et $U \in \mathcal{V}(y)$. Alors il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$ et $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x)$ car f est continue surjective. comme α est un réseau alors

$$\begin{aligned} \exists A \in \alpha : x \in A \subset f^{-1}(U) &\Rightarrow f(x) \in f(A) \subset U \\ &\Rightarrow y \in f(A) \subset U \end{aligned}$$

Donc il existe $B = f(A) \in f(\alpha)$ tel que $y \in B \subset U$. D'où $f(\alpha)$ est un réseau. ■

Proposition 3.23. *Soit α un réseau d'un espace topologique X et Soit V un fermé d'un espace topologique Y. Alors pour tout $B \in \alpha$, l'ensemble $[B, V]$ est un fermé de $C_\alpha(X, Y)$* .

Démonstration. Il suffit de montrer que $C_\alpha(X, Y)\backslash[B, V]$ est un ouvert de $C_\alpha(X, Y)$. Soit $f \in C_\alpha(X, Y)\backslash[B, V]$.Alors

$$\begin{aligned} f \notin [B, V] &\Rightarrow f(B) \nsubseteq V \\ &\Rightarrow \exists x_0 \in B : f(x_0) \notin V \\ &\Rightarrow f(x_0) \in Y\backslash V \\ &\Rightarrow x_0 \in f^{-1}(Y\backslash V) \end{aligned}$$

Comme α est un réseau alors

$$\exists B_0 \in \alpha : x_0 \in B_0 \subset f^{-1}(Y\backslash V) \Rightarrow f \in [B_0, Y\backslash V]$$

Montrons que $[B_0, Y\backslash V] \subset C_\alpha(X, Y)\backslash[B, V]$. Soit $g \in [B_0, Y\backslash V]$. Alors $g(x_0) \notin V$ et comme $x_0 \in B$, alors

$$\begin{aligned} g(B) \nsubseteq V &\Rightarrow g \notin [B, V] \\ &\Rightarrow g \in C_\alpha(X, Y)\backslash[B, V] \\ &\Rightarrow [B_0, Y\ V] \subset C_\alpha(X, Y)\backslash[B, V] \end{aligned}$$

Donc $C_\alpha(X, Y)\backslash[B, V]$ s'écrit comme réunion d'ouverts de $C_\alpha(X, Y)$. Alors $[B, V]$ est fermé. ■

CHAPITRE 4

STRUCTURES ALGÉBRIQUES SUR $C_\alpha(X)$ ET $C_{\alpha^*}(X)$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'ensemble des applications continues $C(X)$ muni d'une topologie set-open ou d'une topologie set open faible engendrée par une famille α de sous ensembles de X et on regardant les propriétés de la famille α qui impliquent que l'espace $C_\alpha(X)$ soit un groupe topologique ou qu'il est un espace vectoriel topologique . Dans la deuxième section, on reprend le même travail pour la topologie set-open faible. Les références utilisées dans ce chapitre sont [7], [8], [11], [12].

4.1 Propriétés algébriques de $C_\alpha(X)$

Définition 4.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, un sous-ensemble $A \subset X$ est dit borné si $f(A)$ est borné dans $\mathbb{R}$, pour toute application continue $f : X \to \mathbb{R}$.*

Proposition 4.2. *Soit $C_\alpha(X)$ un groupe topologique. Alors la famille α est constituée de sous-ensembles $\mathbb{R}$-compact X.*

Démonstration. Supposons qu'il y ait $A \in \alpha$ qui n'est pas $\mathbb{R}$-compact ; alors il y a $f \in C(X)$ tel que $f(A)$ n'est pas compact. Supposons que $f(A)$ n'est pas fermé. En effet, si $f(A)$ est fermé et non borné dans $\mathbb{R}$. Alors nous prenons l'application

$$\begin{aligned} h :\mathbb{R} &\longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ t &\longmapsto h(x) = arctg(t) \end{aligned}$$

On a $f(A) \subset \mathbb{R}$ donc $h(f(A)) \subset]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ n'est pas fermé. Contradiction.
Considérons un point $a \in \overline{f(A)} \backslash f(A)$ et l'ensemble ouvert $Of = [A, \mathbb{R}\backslash\{a\}]$ qui contient le point $f \in C(X)$. Comme $C_\alpha(X)$ est un groupe topologique son élément neutre est la fonction nulle

$$\begin{aligned} f_0 : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_0(x) = 0 \end{aligned}$$

Il existe un ensemble ouvert $[B,]-\varepsilon, \varepsilon[]$ dans $C_\alpha(X)$, $B \in \alpha$ et $\varepsilon > 0$ tel que $f_0 \in [B,]-\varepsilon, \varepsilon[]$ et $f + [B;]-\varepsilon, \varepsilon[] \subset Of$. Choisissons $x_0 \in A$ tel que $f(x_0) \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. Posons $p = f(x_0) - a \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et soit

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = -p = a - f(x_0) \end{aligned}$$

On a g est continue et

$$g(B) = \{-p\} \subset]-\varepsilon, \varepsilon[\Rightarrow g \in [B,]-\varepsilon, \varepsilon[].$$

D'autre part, on a $f + g \notin Of$ puisque

$$\begin{aligned} (f+g)(x_0) &= f(x_0) + g(x_0) \\ &= f(x_0) - p \\ &= a \notin \mathbb{R}\backslash a \end{aligned}$$

Cela contredit notre hypothèse. D'où A est $\mathbb{R}$-compact. ■

Étant donné une famille non vide α de sous-ensembles de X, Soit la famille suivante : $\alpha(C)$=$\{A \in \alpha$: pour tout sous-ensemble $\mathbb{R}$-compact B de l'espace X avec $B \subset A$ l'ensemble $[B, U]$ est ouvert en $C_\alpha(X)$ pour tout ensemble ouvert de l'espace $\mathbb{R}\}$.

Proposition 4.3. *Soit $C_\alpha(X)$ un groupe topologique. Alors $\alpha = \alpha(C)$*

Démonstration. Supposons que $A \in \alpha, B \subset A$ et B est un $\mathbb{R}$-compact de X. Montrons que $[B, U]$ est un ensemble ouvert dans $C_\alpha(X)$ pour tout ensemble ouvert U dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in [B, U]$. Comme $f(B)$ est un ensemble compact et $f(B) \subseteq U$, il y a

$$S_\varepsilon(f(B)) = \{y : y \in \mathbb{R}, \quad \rho(y, f(B)) < \varepsilon\}$$

tel que

$$S_\varepsilon(f(B)) \subseteq U.$$

L'ensemble $W = f + [A,]-\varepsilon, \varepsilon[]$ est un voisinage ouvert de f dans $C_\alpha(X)$. Il reste à prouver que $W \subset [B, U]$. Si $g \in W$ et si $x \in B$, alors

$$\rho(g(x), f(x)) = \rho(f(x) + h(x), f(x)) < \varepsilon$$

où $h \in [A,]-\varepsilon; \varepsilon[]$, il s'ensuit que $g(x) \in U$ et donc $W \subset [B, U]$. ■

Théorème 4.4. *Si α est une famille d'ensembles $\mathbb{R}$-compacts, alors $C_\alpha(X) \leq C_{\alpha,u}(X)$.*

Démonstration. Soit $[A, U]$ un ouvert de $C_\alpha(X)$, où $A \in \alpha$ et U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrons que $[A, U]$ un ouvert de $C_{\alpha,u}(X)$. Soit $f \in [A, U]$. Comme $f(A)$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}$, alors il y a une boule ouverte

$$S_\varepsilon(f(A)) = \{y : y \in \mathbb{R}, \rho(y, f(A)) < \varepsilon\}$$

tel que

$$S_\varepsilon(f(A)) \subseteq U.$$

Alors

$$\langle f, A, \varepsilon\rangle = \{g : g \in C(X) \text{ et } \rho(f(x), g(x)) < \varepsilon, \forall x \in A\} \subseteq [A, V].$$

En effet, supposons que $g \in \langle f, A, \varepsilon\rangle$ et $x \in A$, alors

$$g(x) \in S_\varepsilon(f(A)) \subseteq U$$

donc $g \in [A, V]$. le théorème est prouvée. ■

Théorème 4.5. *Soit α une famille de sous-ensembles de X telle que $C_\alpha(X) \leq C_{\alpha,u}(X)$, alors la famille α est constituée d'ensembles $\mathbb{R}$-compacts.*

Démonstration. Supposons le contraire, il existe $F \in \alpha$ et $f \in C(X)$ tel que $f(F)$ n'est pas compact. On peut supposer que $f(F)$ n'est pas fermé et soit $a \in \overline{f(F)} \backslash f(F)$. Alors $f \in [F, \mathbb{R}\backslash a]$. Comme $C_\alpha(X) \leq C_{\alpha,u}(X)$, alors f possède un voisinage uniforme Of contenu dans $[F, \mathbb{R}\backslash a]$. Soit

$$Of = \langle f, A, \varepsilon_0\rangle = \{g \in C(X) : \exists a < \varepsilon_0 : \forall x \in A, |f(x) - g(x)| < a\}$$

où $A \in \alpha$ et $\varepsilon_0 > 0$. Pour tout nombre $b < \varepsilon_0$, considérons les fonctions $f+b$ et $f-b$ comme suit :

$$\begin{aligned} f+b : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f+b)(x) = f(x)+b \\ et \quad f-b : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f-b)(x) = f(x)-b \end{aligned}$$

Alors elles appartiennent à Of.
D'autre part, comme $a \in \overline{f(F)}$, l'intersection $F \cap f^{-1}(]a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0[)$ est non vide. Soit

$$x_0 \in F \cap f^{-1}(]a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0[), \text{ et } b_0 = |f(x_0)-a|$$

Il est clair que $b_0 < \varepsilon_0$. Mais l'une des fonctions $f+b$ et $f-b$ prenait la valeur a au point x_0 et n'appartient donc pas à Of, c'est une contradiction. D'où le résultat. ■

Proposition 4.6. $C_{\alpha,u}(X) \geqslant C_\alpha(X)$ *Si et seulement si α est constitué d'ensembles $\mathbb{R}$-compacts.*

Théorème 4.7. *Soit α une famille de sous-ensembles $\mathbb{R}$-compacts de X. Supposons que α est stable pour les sous ensembles $\mathbb{R}$-compacts, i.e., si $A \in \alpha$ et $B \subseteq A$ est un sous ensemble $\mathbb{R}$-compact alors $B \in \alpha$. Alors $C_{\alpha,u}(X) = C_\alpha(X)$.*

Démonstration. l'inégalité $C_\alpha(X) \leqslant C_{\alpha,u}(X)$ est prouvée par la Proposition 4.6. Montrons que $C_\alpha(X) \geqslant C_{\alpha,u}(X)$. Soit $f \in C(X)$ et $\langle f, A, \varepsilon\rangle$ un voisinage ouvert de f dans $C_{\alpha,u}(X)$, où $A \in \alpha, \varepsilon > 0$ Trouvons un voisinage Of de la fonction f dans $C_\alpha(X)$ contenu dans l'ensemble $\langle f, A, \varepsilon\rangle$. Alors, par l'hypothèse, $f(A)$ est un ensemble compact et la famille d'intervalles

$$\{]y - \frac{\varepsilon}{3}, y + \frac{\varepsilon}{3}[: y \in f(A)\}$$

est un recouvrement ouvert de $f(A)$. Donc on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$\{]y_i - \frac{\varepsilon}{3}, y_i + \frac{\varepsilon}{3}[, i = 1, ..., n\}$$

de $f(A)$. Alors $f^{-1}([y_i - \frac{\varepsilon}{3}, y_i + \frac{\varepsilon}{3}])$ est un zéro-ensemble. Comme l'image réciproque continue d'un segment, et nous savons que l'intersection d'un ensemble $\mathbb{R}$-compact et d'un ensemble zéro est un $\mathbb{R}$-compact, alors l'ensemble

$$A_i = f^{-1}([y_i - \frac{\varepsilon}{3}, y_i + \frac{\varepsilon}{3}]) \cap A$$

est $\mathbb{R}$-compact, par hypothèse, cet ensemble est un élément de la famille α .
Par conséquent, l'ensemble

$$Of = \bigcap_{i=1}^{n} [A_i,]y_i - \frac{\varepsilon}{2}, y_i + \frac{\varepsilon}{2}[]$$

est ouvert dans la topologie set-open et que $f \in Of$. En effet, pour tout nombre $i \leq n$ et tout point $x \in A_i = f^{-1}([y_i - \frac{\varepsilon}{3}, y_i + \frac{\varepsilon}{3}]) \cap A$, on a

$$f(x) \in [y_i - \frac{\varepsilon}{3}, y_i + \frac{\varepsilon}{3}] \subseteq]y_i - \frac{\varepsilon}{2}, y_i + \frac{\varepsilon}{2}[.$$

Montrons que $Of \subseteq \langle f, A, \varepsilon \rangle$. Soit $g \in Of$ et soit x un point arbitraire de l'ensemble A . Choisissons i pour que $x \in A_i$ (c'est possible, puisque $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A$) comme $g \in Of$, alors on a

$$g(x) \in g(A_i) \subseteq]y_i - \frac{\varepsilon}{2}, y_i + \frac{\varepsilon}{2}[$$

i.e.,

$$|g(x) - y_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par le même raisonnement, on a

$$|f(x) - y_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon$$

i.e.,

$$g \in \langle f, A, \varepsilon \rangle.$$

D'où le résultat. ■

Théorème 4.8. *Soit $C_\alpha(X) = C_{\alpha,u}(X)$. Alors, la famille α est constituée de sous ensembles $\mathbb{R}$-compacts et pour tout élément $A \in \alpha$ et tout sous-ensemble $\mathbb{R}$-compact B de A, les ensembles $[B, U]$ et $\langle f, B, \varepsilon \rangle$ sont ouverts dans ces topologies pour tout ouvert U dans $\mathbb{R}$ et toute fonction $f \in C(X)$ et pour tout $\varepsilon > 0$. (i.e., la famille α contient tous les sous-ensembles $\mathbb{R}$-compacts de ses éléments)*

Démonstration. Soit $A \in \alpha$, et soit B un sous ensemble $\mathbb{R}$-compact de A. Considérons la famille $\alpha_1 = \alpha \cup \{B\}$. Il est clair que $C_\alpha(X) \leq C_{\alpha_1}(X)$. D'après la Proposition 4.6, la famille α est constituée d'ensembles $\mathbb{R}$-compacts et donc la famille α_1, également, est constituée d'ensembles $\mathbb{R}$-compacts. Donc

$$C_{\alpha_1}(X) \leq C_{\alpha_1,u}(X).$$

Il bien connu que la topologie de la convergence uniforme sur les éléments d'une famille ne change pas si l'on ajoute à cette famille des sous-ensembles d'un élément de la famille. Par conséquent,

$$C_{\alpha_1,u}(X) = C_{\alpha,u}(X).$$

Par hypothèse on a

$$C_{\alpha,u}(X) = C_\alpha(X).$$

Nous avons ainsi

$$C_\alpha(X) \leq C_{\alpha_1}(X) \leq C_{\alpha_1,u}(X) = C_{\alpha,u}(X) = C_\alpha(X).$$

Donc les quatre topologies sur $C(X)$ coïncident. D'où le résultat. ■

Théorème 4.9. *L'espace $C_{\alpha,u}(X)$ est un espace topologique vectoriel si seulement si chaque élément de α est borné.*

Démonstration. Définissons la famille des semi-normes $\{\mathcal{P}_A : A \in \alpha\}$ comme suit

$$\mathcal{P}_A(f) = sup\{|f(x)| : x \in A\}.$$

On sait que si chaque élément de α est borné alors la topologie de $C_{\alpha,u}(X)$ coïncide avec la topologie engendrée par la famille des semi-normes définie ci-dessus et donc $C_{\alpha,u}(X)$ est un espace vectoriel.

Inversement, supposons qu'il existe un $A \in \alpha$ qui n'est pas borné. Alors il existe $f \in C(X)$ et une suite $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ tel que $f(x_n) \geqslant n$ pour chaque n.

Montrons que l'application multiplication par un scalaire ne peut pas être continue dans $C_{\alpha,u}(X)$. Soit T l'opérateur de multiplication par un scalaire défini par

$$T(t, g) = t.g, \text{ pour } t \in \mathbb{R} \text{ et } g \in C_{\alpha,u}(X)$$

Nous montrons que T n'est pas continue en $(0, f)$. Soit $V_{A,\varepsilon}$ un voisinage de $f_0 = T((0, f))$ dans $C_{\alpha,u}(X)$, où $A \in \alpha$ et $0 < \varepsilon < 1$. Alors pour tout voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}$, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} \in U$. Mais $\frac{1}{n}f(x_n) \geqslant 1 > \varepsilon$, et donc $T(\frac{1}{n}, f) = \frac{1}{n}f \notin V_{A,\varepsilon^*}$. ■

Théorème 4.10. *Pour un espace X, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.$C_\alpha(X) = C_{\alpha,u}(X)$.

2.$C_\alpha(X)$ est un groupe topologique.

3.$C_\alpha(X)$ est un espace vectoriel topologique.

4.$C_\alpha(X)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe.

5.α est une famille d'ensembles $\mathbb{R}$-compact et $\alpha = \alpha(C)$.

Démonstration. (1) $\Leftrightarrow$ (5) D'après les Théorèmes 4.7 et 4.8.
(5) $\Rightarrow$ (4) Par le Théorème4.9, si α est une famille d'ensembles bornés ($\mathbb{R}$-compact), alors $C_{\alpha,u}(X)$ est un espace vectoriel topologique. Maintenant, pour chaque $A \in \alpha$, on définit $\mathcal{P}_A$ sur $C(X)$ par

$$\mathcal{P}_A(f) = sup\{|f(x)| : x \in A\}.$$

Aussi, pour tout $A \in \alpha$ et $\varepsilon > 0$, soit

$$V_{A,\varepsilon} = \{f \in C(X) : \mathcal{P}_A(f) < \varepsilon\}.$$

Soit

$$\gamma = \{V_{A,\varepsilon} : A \in \alpha, \varepsilon > 0\}.$$

Alors, pour tout $f \in C(X)$, les ensembles de la famille

$$f + \gamma = \{f + V : V \in \gamma\}$$

forment une base de voisinages de f. Puisque cette topologie est engendré par la collection des semi-normes, elle est localement convexe. Donc par (1), $C_\alpha(X)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe.
(4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2), sont évident.
(2) $\Rightarrow$ (5) par les Proposition 4.2 et 4.3 ■

4.2 Propriétés algébriques de $C_{\alpha^*}(X)$

Dans cette section, nous allons donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace topologique $C_{\alpha^*}(X)$ possède les structures de groupe topologique et d'éspace vectoriel topologique.

Proposition 4.11. *Soit $C_{\alpha^*}(X)$ un espace vectoriel topologique. Alors la famille α est constituée de sous-ensembles bornés de X.*

Démonstration. Supposons qu'il y ait un ensemble $A \in \alpha$ non borné. Alors il y a $f \in C(X)$ tel que $f(A)$ est non borné. Il s'ensuit que, pour tout $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\beta.f(A) \nsubseteq]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

L'ensemble $[A,]-\varepsilon, \varepsilon[]^*$ est un voisinage ouvert de l'application nulle f_0 dans $C_{\alpha^*}(X)$. Soit Of un voisinage arbitraire de f et $]-r, r[$ un intervalle ouvert. Alors

$$\beta.f \notin [A,]-\varepsilon, \varepsilon[]^*$$

pour chaque $\beta \in]-r, r[\setminus\{0\}$, et ceci car $\beta.f(A) \nsubseteq]-\varepsilon, \varepsilon[$. Ainsi, l'application multiplication par un scalaire ne peut pas être continue. ■

Étant donné une famille α de sous-ensembles non vides de X, et considérons la famille suivante :
$\alpha(B) = \{A \in \alpha$: pour tout sous-ensemble borné B de l'espace X avec $B \subset A$, l'ensemble $[B, U]$ est ouvert dans $C_{\alpha^*}(X)$ pour tout ouvert U de $\mathbb{R}\}$.

Proposition 4.12. *Soit $C_{\alpha^*}(X)$ un groupe topologique, alors $\alpha = \alpha(B)$.*

Démonstration. Soit $A \in \alpha$, $B \subset A$. Alors nous affiremons que $[B, U]^*$ est ouvert dans $C_{\alpha^*}(X)$ pour tout ouvert U dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $f \in [B, U]^*$. Comme A est un ensemble borné, alors l'ensemble $\overline{f(B)}$ est compact. Il y a donc

$$S_\varepsilon(\overline{f(B)}) = \{y : y \in \mathbb{R}, \rho(y, \overline{f(B)}) < \varepsilon\}$$

tel que $S_\varepsilon(\overline{f(B)}) \subseteq U$. l'ensemble $W = f + [A,]-\varepsilon, \varepsilon[]^*$ est un voisinage ouvert de f dans $C_{\alpha^*}(X)$. Montrons que $W \subset [B, U]^*$. Si $g \in W$ et si $x \in B$, alors

$$\rho(g(x), f(x)) = \rho(f(x) + h(x), f(x)) < \varepsilon$$

tel que $h \in [A,]-\varepsilon, \varepsilon[]^*$. Il s'ensuite que $g(x) \in U$ et $W \in [B, U]^*$. ■

Notons par $B(X)$ la collection de tous les sous-ensembles borné de X.

Théorème 4.13. *Si $\alpha^* \subseteq B(X)$, alors $C_{\alpha^*}(X) \leq C_{\alpha,u}(X)$.*

Démonstration. Soit $f \in [A, V]$ où $f \in C(X)$, $A \in \alpha^*$ et V un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrons alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f \in \langle f, A, \varepsilon\rangle \subseteq [A, V].$$

Comme $f(A)$ est compact, il existe $\varepsilon > 0$ et un sous-ensemble fermé C de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in \overline{f(A)}$, on a

$$[z - \varepsilon, z + \varepsilon] \subseteq C \subseteq V.$$

Soit $g \in \langle f, A, \varepsilon\rangle$. Alors $\overline{g(A)} \subseteq C \subseteq V$, ce qui implique que $g \in [A, V]$. Maintenant, si $W = \cap_{i=1}^n [A_i, V_i]$ est une voisinage ouvert de f dans $C_{\alpha^*}(X)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\langle f, A_1 \cup A_2, ..., \cup A_n, \varepsilon\rangle \subseteq W.$$

■

Définition 4.14. *Un sous-ensemble A de l'espace X est dit domaine-fermé si $A = \overline{\mathring{A}}$. La famille α^* des sous-ensembles borné de X est dite stable pour domaine-fermé si pour tout $A \in \alpha^*$ et tout B un sous-domaine fermé de A alors $B \in \alpha^*$.*

Théorème 4.15. *Soit α^* une famille de sous-ensembles bornés de X qui est stable pour domaine-fermé, alors $C_{\alpha,u}(X) \leq C_{\alpha^*}(X)$.*

Démonstration. Soit $\langle f, A, \varepsilon\rangle$ un voisinage ouvert d'un f dans $C_{\alpha^*}(X)$ tel que $A \in \alpha^*$ et $\varepsilon > 0$. Comme $f(A)$ est borné, il existe une suite finie d'intervalles ouverts $V_1, ..., V_n$ de taille $\frac{\varepsilon}{2}$ tel que

$$\overline{f(A)} \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_i$$

pour tout i. Soit

$$A_i = \overline{(A \cap f^{-1}(V_i))},$$

alors $A_i \in \alpha^*$. Supposons que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $V_i =]a_i, b_i[$. Soit

$$W_i =]a_i - \frac{\varepsilon}{4}, b_i + \frac{\varepsilon}{4}[.$$

Posons $W = \cap_{i=1}^{n} [A_i, W_i]$ qui est un voisinage ouvert de f dans $C_{\alpha^*(X)}$. On a

$$W \subseteq \langle f, A, \varepsilon\rangle.$$

■

Rappelons qu'un sous ensemble $A \subset X$ est dit zéro-ensemble s'il existe une application continue $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $A = f^{-1}(\{0\})$.

Corollaire 4.16. *Supposons que α est une famille constituée de sous-ensembles bornés de X tel que $\overline{A \cap W} \in \alpha$ pour tout $A \in \alpha$ et tout ensemble fonctionnellement ouvert (zéro-ensemble) W tel que $A \cap W \neq \varnothing$. Alors*

$$C_{\alpha^*}(X) = C_{\alpha,u}(X)$$

Théorème 4.17. *Soit X un espace de Tychonoff et (Y, ρ) un espace vectoriel topologique métrisable. Si $C_{\alpha^*}(X, Y) = C_{\alpha,u}(X, Y)$, alors la famille α constituée de sous-ensembles bornés.*

Démonstration. Soit ϕ un plongement isométrique de $\mathbb{R}$ dans Y défini par $\phi(t) = t * y_0$ où $y_0 \in Y$ telle que $0 < \rho(0, y_0) < 1$. Ainsi, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $[b, +\infty[\subseteq \overline{f(A)}$. supposons que $\phi \circ f \in [A, U]^*$, où U est un ouvert arbitraire contenant $\overline{\phi(f(A))}$, alors

$[b, +\infty[*y_0 \subseteq U$. Comme $C_{\alpha^*}(X,Y) \leq C_{\alpha,u}(X,Y)$, la fonction $\phi \circ f$ possède un voisinage de base $\langle \phi \circ f, D, \varepsilon\rangle$ dans la topologie de la convergence uniforme tel que

$$\langle \phi \circ f, D, \varepsilon\rangle \subseteq [A, U]^*.$$

La fonction $\phi \circ f$ a aussi un voisinage ouvert dans la topologie set-open faible $\bigcap\limits_{i=1}^{n}[A_i, W_i]^*$ tel que

$$\bigcap_{i=1}^{n}[A_i, W_i]^* \subseteq \langle \phi \circ f, D, \varepsilon\rangle.$$

Alors $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ et $A \subseteq D$. Pour tout $i \leq n$, ou bien l'ensemble $f(A_i)$ a une borne supérieure l_i ou bien il contient l'axe $[b_i, +\infty[$. Soit

$$m = \max_{1 \leq i \leq n}\{l_i, b_i\}$$

et soit y un point de $[m, +\infty[*y_0$, tel que $\rho(\phi(m), y) > \varepsilon$, l'ensemble $f^{-1} \circ \phi^{-1}(S_\varepsilon(y))$ est fonctionelement ouvert, on peut donc construire une fonction continue non-négative $V \in C(X)$ tel que

$$V(x) = 0 \quad pour \quad x \in f^{-1} \circ \phi^{-1}(S_\varepsilon(y)) \quad et \quad V(x_a) > sup\{\phi^{-1}(S_\varepsilon(y))\}$$

pour un point $x_a \in f^{-1} \circ \phi^{-1}(y) \cap A$. l'application $\phi(f + V) \in C(X,Y)$ n'appartient pas à $\langle \phi \circ f, D, \varepsilon\rangle$. En effet $x_a \in A \subset D$ satisfait la relation

$$\begin{aligned}\rho(\phi(f(x_a)), \phi(f+V)(x_a)) &= \rho(\phi(f(x_a)), \phi(f(x_a)) + \phi(V(x_a))) \\ &= \rho(0, \phi(V(x_a))) > \varepsilon.\end{aligned}$$

Notons que

$$\phi(f + V) \in \bigcap_{i=1}^{n}[A_i, W_i]^*.$$

En effet, pour $x \in A_i$ dans ce cas, si $x \notin f^{-1} \circ \phi^{-1}(S_\varepsilon(y))$ alors

$$\phi(f + v)(x) = \phi(f(x)) \in W_i$$

et si $x \in f^{-1} \circ \phi^{-1}(S_\varepsilon(y))$, alors

$$f(x) \in \phi^{-1}(S_\varepsilon(y)) \subseteq [m, +\infty[\subseteq f(A_i)$$

$$(f + V)(x) = f(x) + V(x) \in [m, +\infty[$$

et

$$\phi(f + V)(x) \subseteq \phi(f(A_i)) \subseteq W_i$$

Comme

$$\bigcap_{i=1}^{n}[A_i, W_i]^* \subseteq \langle \phi \circ f, D, \varepsilon \rangle$$

alors cela contredit notre hypothèse. Par conséquent, l'image $f(A)$ est bornée pour tout $A \in \alpha$ et pour tout $f \in C(X)$. Le théorème est prouvé. ■

Théorème 4.18. *Soit X un espace topologique de Tychonoff. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $C_{\alpha^*}(X) = C_{\alpha,u}(X)$.

2. $C_{\alpha^*}(X)$ est un groupe topologique.

3. $C_{\alpha^*}(X)$ est un espace vectoriel topologique.

4. $C_{\alpha^*}(X)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe.

5. α est une famille d'ensembles bornés et $\alpha = \alpha(B)$.

Démonstration. (1) $\Leftrightarrow$ (5) Ceci découle du Corollaire 4.16 et le Théorème 4.17.

(5) $\Rightarrow$ (4) D'après le Théorème 4.9, $C_{\alpha,u}(X)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe. Donc par (1), $C_{\alpha^*}(X)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe.

(4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) est évident.

(2) $\Rightarrow$ (5) D'après la Proposition 4.11, la famille α est constituée de sous-ensembles bornés de X. Par la Proposition 4.12, on a $\alpha = \alpha(B)$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ARENS, J. DUGUNDJI *"Topologies for function spaces,"*, Pacific J. Math. 1 (1951), 5-31.

[2] N. Bourbaki, Éléments de mathématique,*" Topologie générale"*, Chapitres 1 à 4. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[3] I. Chaabna, H. Zabat, *"Structures algébriques sur les espaces de fonctions"*, université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel (2019), pp 20-30.

[4] R. Engelking, *" General topology "*, Revised and completed edition. Herldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] R.H. FOX, *On topologies for function spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 429-432.

[6] John L. Kelley , *" General topology "*, Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1955.

[7] S. KUNDU , R. A. McCoy, *"Topologies Between Compact and uniform convergence on function spaces"*, Internat. J. Math. and Math. Sci.VOL. 16 N°.1 (1993) 101-110.

[8] S. Kundu and A. B. Raha, *"The bounded-open topology and its relatives"*,Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 27 (1995), 61-77.

[9] R. A. McCoy, I. Ntantu, *" Topological properties of spaces of continuous functions"*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.

[10] Nawfal El Hage Hassan, *"Topologie générale et espaces normés"*, Edition Dunod Paris (2011).

[11] S. E. Nokhrin and A. V. Osipov, *"On the Coincidence of Set-Open and Uniform Topologies"*,Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2009, Suppl. 3, pp. 184–191.

[12] A. V. Osipov, *"The set-open topology"*, Topology Proceedings, V. 37,(2011), pp 205-217.

RÉSUMÉ

Étant donné un espace topologique X et une famille α de sous-ensembles de X. Dans ce mémoire, nous étudions les propriétés topologiques et algébriques de $C_\alpha(X)$ l'espace de toutes les fonctions continues à valeurs réelles sur un espace topologique X muni d'une topologie set-open. Nos principaux résultats indiquent que $C_\alpha(X)$ est un espace vectoriel topologique si et seulement s'il est un groupe topologique, si seulement si α est une famille d'ensembles $\mathbb{R}$-compact. En particulier si $C_\alpha(X)$ est un groupe topologique, alors la topologie set-open coïncide avec la topologie de convergence uniforme sur la famille α. Par la suite, on donne les principaux résultats dans le cadre de la topologie set-open faible $C_{\alpha^*}(X)$. Alors $C_{\alpha^*}(X)$ est un espace vectoriel topologique si et seulement si groupe topologique si et seulement si α est une famille de sous-ensembles borné de X. En particulier si $C_{\alpha^*}(X)$ est un espace vectoriel topologique, alors la topologie set-open faible coïncide avec la topologie de convergence uniforme sur la famille α.