

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques



d'ordre :

de série :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.

Option Mathématiques Fondamentales et Discrète.

Thème

Étude combinatoire des polynômes orthogonaux

Présenté par :

Khadidja BOUKESSA

Devant le jury

Président	Farida BELHANNACHE	M.C.A. Université de Jijel
Encadreur	Moussa AHMIA	M.C.A. Université de Jijel
Examineur	Mourad CHELGHAM	M.C.A. Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

REMERCIEMENTS

Je remercie en premier lieu "ALLAH ", pour la foi, la confiance et la volonté qu'il nous a donné durant ces longue années d'études et le courage pour terminer ce mémoire.

Je dédie le fruit de mes efforts à l'âme de mes chers parents, que Dieu ait pitié d'eux.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon encadreur « **Mr M. AHMIA** » pour ses multiples conseils et pour m'avoir guidé qui m'a fait sur le droit chemin afin de réaliser ce modeste travail.

Je remercie « **Me F. BELHANNACHE** » qui m'a fait l'honneur en acceptant de présider notre jury de mémoire. Je remercie également « **Mr M. CHELGHAM** », pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de participer à ce jury.

Je tiens à remercier plus personnellement : ma belle fleur ma tante « **SAIAD** » qui a toujours aidé et encouragé tous ma famille, Je remercie mes sœurs « **MERIEM** », « **NOUR ELHOUDA** », « **RADIA** », « **ASMA** » et mon frère « **MOUHAMED AMINE** », pour leurs encouragements. Ainsi que les enfants « **SERIN** » et « **ANES ABDELLAH** ».

En fin, je remercie tous mes amies, ainsi que tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin.

« **Khadidja** »

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	7
1 Préliminaires	9
1.1 Définitions et notions sur les chemins	9
1.1.1 Chemins $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et diagramme	9
1.2 Comptage et dénombrement	12
1.2.1 Définitions et outils de bases	12
1.2.2 Coefficients binomiaux	16
1.3 La fonction Gamma	18
1.4 Les moments	19
1.5 Espaces de polynômes	20
2 Généralité sur les polynômes orthogonaux	22
2.1 L'orthogonalité	23
2.1.1 Définitions et outils de base	23
2.1.2 Propriétés sur les polynômes orthogonaux	23

2.2	Interprétation combinatoire des polynômes	25
2.2.1	Chemin de Favard	25
2.2.2	Les pavages	26
2.3	Interprétation combinatoire des moments	28
2.3.1	Chemin de Motzkin et chemin de Dyck	28
2.4	Preuve bijective de l'orthogonalité	30
3	Moments et polynômes orthogonaux classiques	32
3.1	Introduction	32
3.2	Polynômes de Tchebycheff	33
3.2.1	Polynômes de Tchebycheff de seconde espèce	33
3.2.2	Polynômes de Tchebycheff de première espèce	36
3.3	Polynômes de Laguerre	39
3.4	Polynômes de Hermite	42
3.5	Polynômes de Charlier	44
	Bibliographie	48

TABLE DES FIGURES

1.1	Le réseau Ω	10
1.2	Exemple d'un chemin ω	11
1.3	Une 3-permutation de [8].	14
1.4	Le diagramme représente la partition $\{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 9\}, \{3\}, \{6, 8\}\}$ de [9].	15
1.5	Un diagramme représente la permutation π	16
1.6	Triangle de Pascal	18
2.1	Un chemin de Favard valué.	26
2.2	Un pavage valué.	27
2.3	Un chemin de Motzkin valué.	29
2.4	Un chemin de Dyck valué.	29
3.1	Couplage de graphe segment associé à $F_4(x)$	36
3.2	Un exemple de la bijection ψ_L envoyant les permutations aux histoires de Laguerre.	42

3.3	Un exemple de la bijection $\psi_{\mathcal{H}}$ envoyant des correspondances parfaites aux histoires de Hermite.	44
3.4	Un exemple de la bijection $\psi_{\mathcal{C}}$ envoyant l'ensemble des partitions aux histoires de Charlier aux.	46

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Valuations des histoires et moments des polynômes orthogonaux.	47
-----	--	----

INTRODUCTION

L'intérêt de ce mémoire est l'étude combinatoire des polynômes orthogonaux classiques. En effet, ces polynômes interviennent dans des situations décrites par une seule variable. Ce domaine a été initié par les travaux fondateurs de Flajolet [3] suivis par Viennot [9] au début des années 1980. Au cours des 30 dernières années, plusieurs outils ont été conçus pour extraire la combinatoire et calculer ces moments.

Ce mémoire se compose une introduction de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous commencerons par nous outiller en établissant les définitions et les notations dont nous aurons besoin tout au long de notre parcours. On commence par présenter quelques notions sur les chemins et diagrammes, en suit un introductif des concepts et notions de base de la combinatoire énumérative. Nous rappelons quelques outils et techniques de comptage combinatoire tels les combinaisons, les permutations, les arrangements, les listes, la fonction Gamma, les moments . . . , et on termine notre chapitre par la définition des espaces de polynômes. Les références utilisés pour ce chapitre sont [1–5].

Au deuxième chapitre nous rappelant les grandes lignes de la théorie des polynômes orthogonaux. Cette théorie étant largement documentée, nous nous contenterons ici d'offrir une vue d'ensemble. Nous donnons les définitions de base et présentons les propriétés usuelles, notamment la récurrence à trois termes qui caractérise. Nous rappelons ensuite le critère d'existence pour une famille de polynômes orthogonaux associée à une fonctionnelle linéaire donnée. Nous commençons alors par démontrer combinatoirement que ces

polynômes sont orthogonaux pour une certaine suite de moments $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$. Ces moments sont interprétés par certains chemins appelés chemin de Motzkin, pavages et chemins de Favard définis par les coefficients b_n et λ_n , considérés dans un premier temps comme variables formelles. et on finit par la preuve bijective de l'orthogonalité. Le principale objectif de ce chapitre est l'interprétation combinatoire de l'orthogonalité des polynômes, ainsi les informations données dans ce chapitre sont largement puisées de les références [7] et [9].

Dans le dernier chapitre, nous donnons une interprétation générale des polynômes orthogonaux et de leurs moments en utilisant les structures combinatoire données au chapitre deux (chemin de Favard, chemin de Motzkin, chemin de Dyck et pavage d'un segment). Nous établissons quelques interprétations combinatoires aux moments des polynômes de Tchebycheff ($i^{\text{ième}}$ et $2^{\text{ième}}$ espèces), Laguerre, Hermite et Charlier. Les résultats établis dans ce chapitre sont largement puisés de l'article de Viennot [9] et de l'article de Corteel et al. [2].

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions et les définitions de base essentielles pour la compréhension des chapitres suivants. On commence par présenter quelques notions sur les chemins et les diagrammes. Ensuite nous exposons quelques notions introductives à la combinatoire énumérative. Enfin, nous terminons ce chapitre par les définitions de moments et les espaces de polynômes.

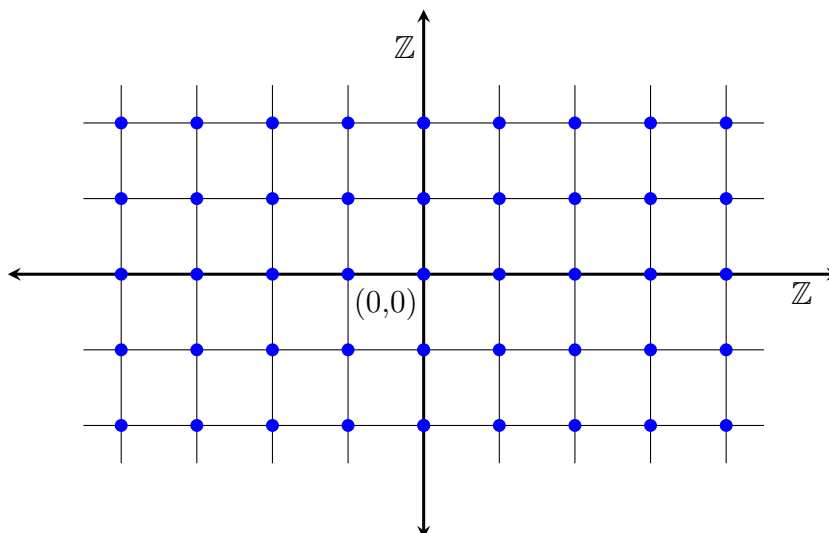
Dans tout ce travail, le symbole Ω désigne le "plan" $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ des combinatoristes.

1.1 Définitions et notions sur les chemins

1.1.1 Chemins $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et diagramme

Réseau ou plan combinatoire

Définition 1.1.1. *Le réseau (ou plan combinatoire) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est l'ensemble des points à coordonnées entières positives (resp, négatives ou nulles) du plan cartésien, comme illustré à la Figure 1.1.*

FIGURE 1.1 – Le réseau Ω .

Définition 1.1.2. *Un chemin ω de Ω est une suite $\omega = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ d'éléments $s_i = (x_i, y_i)$ de Ω pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.*

Définition 1.1.3. *Pour tout $s_i \in \Omega$, $i \in \mathbb{N}$ on a :*

- 1) *Les éléments s_i sont appelés sommets ou nœuds de ω ;*
- 2) *Le point de s_0 (resp. s_n) de chemin ω par sommet initial ou point de départ (resp. sommet final ou point d'arrivée) ;*
- 3) *Les couples (s_i, s_{i+1}) sont appelés les pas élémentaires du chemin ;*
- 4) *L'entier n est la longueur du chemin, que nous noterons $|\omega|$.*

Exemple 1.1.1. *La figure 1.2 représente un chemin ω avec $\omega = (s_0 = (0, 0), s_1 = (1, 1), s_2 = (2, 1), s_3 = (3, 2), s_4 = (4, 1), s_5 = (5, 0), s_6 = (6, 1)$ et $s_7 = (7, 0))$:*

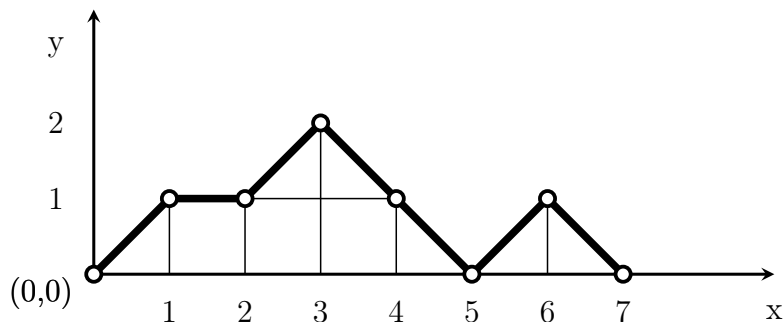
-Le sommet initial est $s_0 = (0, 0)$, et le sommet final est $s_7 = (7, 0)$.

-La longueur de ω : $|\omega| = 7$.

Définition 1.1.4. *Soient $\omega = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ et $\eta = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ deux chemins, le produit (ou concaténation) de ω et η est défini seulement si $s_n = t_0$ et le chemin de produit est noté $\xi = \omega\eta$ tel que $\xi = (s_0, s_1, \dots, s_n = t_0, t_1, \dots, t_m)$ de longueur $n + m$.*

Propriété 1.1.1. *Soit ω un chemin.*

- 1) *On peut définir ω par le produit de ses pas élémentaires : $\omega = (s_0, s_1)(s_1, s_2) \dots (s_{n-1}, s_n)$.*
- 2) *Il existe une factorisation de ω tel que $\omega = \omega_1 \dots \omega_k$ en chemins ω_i , pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq i \leq k$, où les ω_i sont appelés facteurs.*

FIGURE 1.2 – Exemple d'un chemin ω .

3) On note ω_1 (resp. ω_k) facteur gauche ou début (resp. facteur droit ou fin) du chemin ω .

Remarque 1.1.1. Pour tout $s \in \Omega$ il existe "un chemin vide", on note ce chemin par $\omega = (s, s)$.

Définition 1.1.5. Pour tout $(s_i, s_{i+1}) \in \omega$.

- Le pas (s_i, s_{i+1}) est noté Nord (resp. Sud) ssi $s_i = (x, y)$, $s_{i+1} = (x', y')$ avec $x' = x$ et $y' = y + 1$ (resp. $x' = x$ et $y' = y - 1$).
- Le pas (s_i, s_{i+1}) est noté Est (resp. Ouest) ssi $s_i = (x, y)$, $s_{i+1} = (x', y')$ avec $x' = x + 1$ et $y' = y$ (resp. $x' = x - 1$ et $y' = y$).
- Le pas (s_i, s_{i+1}) est noté Nord-Est (resp. Sud-Est) ssi $s_i = (x, y)$, $s_{i+1} = (x', y')$ avec $x' = x + 1$ et $y' = y + 1$ (resp. $x' = x + 1$ et $y' = y - 1$).
- Le pas (s_i, s_{i+1}) est noté Nord-Ouest (resp. Sud-Ouest) ssi $s_i = (x, y)$, $s_{i+1} = (x', y')$ avec $x' = x - 1$ et $y' = y + 1$ (resp. $x' = x - 1$ et $y' = y - 1$).
- Le pas (s_{i-1}, s_i, s_{i+1}) est noté Nord-Nord ssi $s_{i-1} = (x, y)$, $s_{i+1} = (x', y')$ avec $x' = x$ et $y' = y + 2$.

Définition 1.1.6. Un *diagramme* est un sous-ensemble fini $D = \{(i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)\}$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Et les éléments de D sont appelés les cases de D . Une case (i, j) d'un diagramme correspond à un point dans le plan $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1.2 Comptage et dénombrement

1.2.1 Définitions et outils de bases

Définition 1.2.1. Soient x un nombre réel et n un entier positif.

(i) La **factorielle montante (croissante)** de x d'ordre n notée $x^{\overline{n}}$ est définie par

$$x^{\overline{n}} = \begin{cases} x(x+1) \cdots (x+n-1) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

(ii) On appelle **factorielle montante** de x , de coefficient α ($\alpha \in \mathbb{N}$), et d'ordre n notée $(x|\alpha)^{\overline{n}}$, le polynôme

$$(x|\alpha)^{\overline{n}} = \begin{cases} x(x+\alpha) \cdots (x+(n-1)\alpha) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Définition 1.2.2. Soient x un nombre réel et n un entier positif.

(i) La **factorielle descendante (décroissant)** de x d'ordre n notée $x^{\underline{n}}$, définie par

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-1) \cdots (x-n+1) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

(ii) On appelle **factorielle descendante** de x , de coefficient α ($\alpha \in \mathbb{N}$), et d'ordre n notée $(x|\alpha)^{\underline{n}}$, le polynôme

$$(x|\alpha)^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-\alpha) \cdots (x-(n-1)\alpha) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Remarque 1.2.1. (i) On peut exprimer la factorielle montante en fonction de la factorielle descendante comme suit

$$x^{\overline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}},$$

$$(-x)^{\overline{n}} = (-1)^n x^{\underline{n}}.$$

(ii) Pour $x = 1$ dans l'équation (1.1), ou pour $x = n$ dans (1.3), on obtient la factorielle classique $1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}} = n!$.

Définition 1.2.3. Soit $[n] = \{1, \dots, n\}$, on appelle **arrangement** de k éléments, toute suite de k éléments distincts de $[n]$. Ou encore, ayant deux ensemble $[k]$ et $[n]$ ($k \leq n$), un arrangement est une injection de $[k]$ dans $[n]$.

Le nombre d'arrangement (d'injection) de $[k]$ dans $[n]$ noté $A_{n,k}$ est compté par la factorielle descendante, c'est-à-dire :

$$A_{n,k} = n^{\underline{k}}. \quad (1.5)$$

Définition 1.2.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **permutation** toute bijection σ de $[n]$ dans $[n]$. Une permutation σ_n peut être représentée par une forme matricielle

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

Le nombre de permutation de l'ensemble $[n]$ est $n!$.

Remarque 1.2.2. Lorsque $k = n$ le terme dédiée est "permutation" (bijection).

Exemple 1.2.1. Soit la permutation σ_8

$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.5. On appelle **orbite** de $i \in [n]$ l'ensemble des images de i , obtenues en appliquant successivement la permutation σ sur l'élément i , $\{\sigma^p(i), p \in \mathbb{N}\}$, que l'on note parfois O_i .

Si l'image de i par la permutation σ est lui même i.e $\sigma(i) = i$, on dit que i est un point fixe. Dans l'exemple précédent l'élément 7 est un point fixe puisque $\sigma(7) = 7$, et l'orbite de l'élément 1 est $O_1 = \{1, \sigma(1) = 3, \sigma^2(1) = 4\}$. Remarquez que $O_1 = O_3 = O_4$. Ces éléments $\{1, 3, 4\}$ pris dans cet ordre, forment un cycle noté $(1, 3, 4)$ où chaque élément est l'image du précédent par σ (1 est l'image de 4, 3 est l'image de 1 etc ...). A partir d'une orbite à p éléments, on peut constituer $(p-1)!$ cycles

On peut écrire une permutation σ comme un produit de cycles,

$$\sigma_8 = (1, 3, 4)(2, 8, 5, 6)(7),$$

cette représentation est appelée écriture en cycles. Nous conviendrons d'appeler k -permutation toute permutation ayant k cycles.

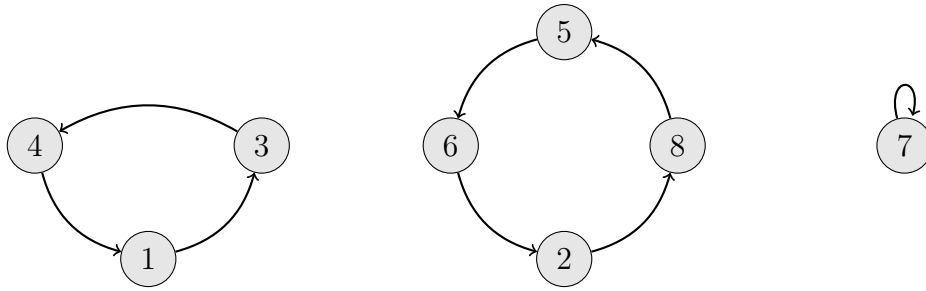


FIGURE 1.3 – Une 3-permutation de [8].

Partition et partition en listes

Définition 1.2.6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **Un block (ou part)** B de $[n]$ est un sous-ensemble non vide de $[n]$.
- **Une partition** π de $[n]$ est une famille de blocks B_1, \dots, B_k disjointes, deux à deux, telles que $\bigcup_{i=1}^k B_i = [n]$.

Remarque 1.2.3. Si l'union des blocks n'engendre pas $[n]$ on dit que B est une **partition partielle** de $[n]$.

Exemple 1.2.2. Soit l'ensemble $[3] = \{1, 2, 3\}$, les partitions de $[3]$ sont

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \quad \{\{1, 2\}, \{3\}\} \quad \{\{1, 3\}, \{2\}\} \quad \{\{2, 3\}, \{1\}\} \quad \{\{1, 2, 3\}\}.$$

Définition 1.2.7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **Une liste** L de $[n]$ est un sous-ensemble non vide ordonné de $[n]$.
- **Une partition en listes** de $[n]$ est une famille de listes ℓ_1, \dots, ℓ_k disjointes deux à deux telles que $\bigcup_{i=1}^k \ell_i = [n]$.

Exemple 1.2.3. Soit l'ensemble $[3] = \{1, 2, 3\}$, les partitions en listes possibles de $[3]$ sont :

$$\begin{aligned} & \{\{1, 2, 3\}\} \quad \{\{1, 3, 2\}\} \quad \{\{3, 2, 1\}\} \quad \{\{2, 1, 3\}\} \quad \{\{2, 3, 1\}\} \quad \{\{3, 1, 2\}\} \\ & \{\{1, 2\}, [3]\} \quad \{\{2, 1\}, [3]\} \quad \{\{1, 3\}, [2]\} \quad \{\{3, 2\}, [2]\} \quad \{\{2, 3\}, [1]\} \quad \{\{3, 2\}, [1]\} \\ & \quad \quad \quad \{\{1\}, [2], [3]\}. \end{aligned}$$

Aussi, nous conviendrons d'appeler k -partition (respectivement k -partition en listes) toute partition de $[n]$ en k parts (respectivement k listes).

Dans la Figure suivante, on va représenter l'ensemble de partition de $[n]$ sous forme d'un diagramme en plaçant les entiers $1, 2, \dots, n$ dans une ligne et en reliant i et j pour chaque arête (i, j) de l'ensemble de partition. Et on a Dans cette représentation picturale, les définitions suivantes sont triviaux.

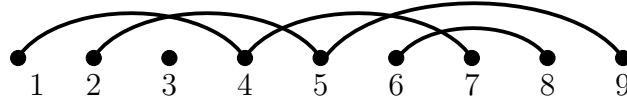


FIGURE 1.4 – Le diagramme représente la partition $\{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 9\}, \{3\}, \{6, 8\}\}$ de $[9]$.

Définition 1.2.8. Soit Π_n l'ensemble des partitions de $[n]$ et $\pi \in \Pi_n$, un entier $i \in [n]$ est dit :

- Singleton de π si i est le seul élément dans un block de taille 1.
- Ouverture de π si i est le minimum d'un block au moins de taille 2.
- Fermeture de π si i est le maximum d'un block au moins de taille 2.
- Continuation de π si i n'est singleton (resp. ouverture, fermeture).

Exemple 1.2.4. Soit π une partition dans la Figure 1.4, on a 3 est un singleton, 1, 2, 6 sont des ouvertures, 7, 8, 9 sont des fermetures et 4, 5 sont continuations.

Définition 1.2.9. Un **croisement** de π est un ensemble de deux arêtes (a, b) et (a', b') telles que $a < a' < b < b'$. On note par $\text{crois}(\pi)$ le nombre de croisements de π .

Exemple 1.2.5. Soit π la partition définie dans la Figure 1.4, alors $\text{crois}(\pi) = 4$, puisqu'il y a quatre croisements $\{(1, 4), (2, 5)\}, \{(2, 5), (4, 7)\}, \{(4, 7), (5, 9)\}, \{(4, 7), (6, 8)\}$.

Définition 1.2.10. (i) Un **couplage** est une partition définie dans laquelle chaque block a un ou deux éléments.

(ii) Un couplage est appelé **couplage parfait** si tout block a deux éléments.

Théorème 1.2.1. $[9]$ Soit \mathcal{M}_n l'ensemble de couplages parfaits de $[n]$. Alors

$$\begin{cases} |\mathcal{M}_{2n+1}| = 0, \\ |\mathcal{M}_{2n}| = (2n-1)!! = 1 \times 3 \times \dots \times (2n-1). \end{cases}$$

Définition 1.2.11. Soit S_n l'ensemble des permutations de $[n]$ et $\pi \in S_n$. Une arête supérieure (resp. inférieure) de π est un couple (i, j) telle que $i < \pi(i) = j$ (resp. $i = \pi(j) < j$).

Exemple 1.2.6. le diagramme de la Figure 1.5, représente la permutation suivante : dans la notation à deux lignes, telque on représente π à l'aide du diagramme obtenu en mettant n sommets étiquetés par $1, 2, \dots, n$ et placer un arc supérieur (resp, inférieur) reliant i et j pour chaque arête supérieur ou inférieur (i, j) .

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 9 & 4 & 3 & 5 & 11 & 8 & 1 & 2 & 14 & 10 & 6 & 12 & 13 \end{pmatrix},$$

où l'entrée dans la deuxième ligne et dans la i ème colonne signifie $\pi(i)$.

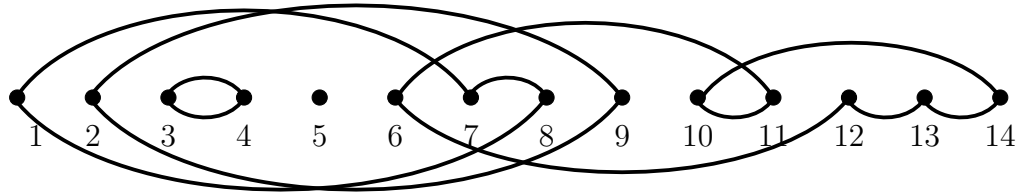


FIGURE 1.5 – Un diagramme représente la permutation π

La définition suivante est équivalente à la Definition 1.2.8.

Définition 1.2.12. Soit $\pi \in \Pi_n$, un entier $i \in [n]$ est dit :

- Singleton de π si $\pi(i) = i$.
- Ouverture de π si $i < \pi(i)$ et $i < \pi^{-1}(i)$.
- Fermeture de π si $\pi^{-1}(i) < i$ et $\pi(i) < i$.

Définition 1.2.13. • Un croisement supérieur de π est un ensemble $\{(a, b), (a', b')\}$ de deux arêtes supérieures de π avec $a < a' < b < b'$ et $b = i$.

- Un croisement inférieur de π est un ensemble $\{(a, b), (a', b')\}$ de deux arêtes inférieures de π avec $a < a' < b < b'$ et $b = i$.

1.2.2 Coefficients binomiaux

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. On appelle combinaison de $k \in \mathbb{N}$ éléments de E toute partie de E à k éléments. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k

éléments d'un ensemble contenant n éléments. Les coefficients $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux dont la formule explicite est donnée par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^k}{k!}.$$

Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(x+y)^n$ appelée relation du binôme de Newton, où x et y sont des nombres réels ou complexe

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \quad (1.6)$$

Remarque 1.2.4. (i) \emptyset est la seule partie de E à 0 éléments, donc $\binom{n}{0} = 1$,
 E est la seule partie de E à n éléments, donc $\binom{n}{n} = 1$.

(ii) Si $k > n$, il ne peut y avoir des parties de k éléments d'un ensemble en contenant n , donc si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

Proposition 1.2.1 (Formule de Pascal). *Le coefficients binomial satisfait la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (1.7)$$

Démonstration. Discutant le cas de la n -ème personne : si elle est sélectionnée (choisie), il reste à choisir $k-1$ autres personnes depuis $n-1$ personnes restantes. Ainsi, nous avons $\binom{n-1}{k-1}$ façons de le faire. Sinon, elle n'est pas sélectionnée et donc on choisit k individus parmi les $n-1$ restants. Ce qui se fait de $\binom{n-1}{k}$ façons. ■

Proposition 1.2.2 (Formule de Vandermonde ou Chu-Vandermonde). *Le coefficient binomial satisfait la relation suivante :*

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}. \quad (1.8)$$

Démonstration. Soient A et B deux ensembles tels que $|A| = n$, $|B| = m$ et $A \cap B = \emptyset$, on a alors $|A \cup B| = n + m$.

On a $\binom{n+m}{k}$ est le nombre des sous-ensembles de l'ensemble $A \cup B$ à k éléments. On choisit un certain élément j de l'ensemble A , et les $k-j$ éléments restants du l'ensemble B , puis considérer toutes les situations possibles pour $j = 1, \dots, k$, on obtient le résultat. ■

A partir de la formule de Pascal nous pouvons construire le triangle de Pascal. Voir la Figure 1.5.

				1										
				1	1									
				1	2	1								
				1	3	3	1							
				1	4	6	4	1						
				1	5	10	10	5	1					
				1	6	15	20	15	6	1				
				1	7	21	35	35	21	7	1			
				1	8	28	56	70	56	28	8	1		
				1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
				1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

FIGURE 1.6 – Triangle de Pascal

1.3 La fonction Gamma

Définition 1.3.1. *On définit la fonction Gamma par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \text{ pour } x > 0. \quad (1.9)$$

L'intégrale ci-dessus est convergente ssi si $x > 0$.

D'après l'équation (1.9) on peut déduire que :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt, \quad \text{pour } x > -1. \quad (1.10)$$

l'intégrale ci-dessus est convergente ssi $x > -1$.

Propriété 1.3.1. *La fonction Gamma a plusieurs propriétés, en particulier les propriétés suivantes :*

(i) $\Gamma(1) = 1$.

(ii) *Pour tout $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, cette équation s'appelle relation fonctionnelle.*

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n + 1) = n!$.

Démonstration. (i)

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1,$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= \int_0^{+\infty} t^{(x+1)-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= -e^{-t} t^x \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x \Gamma(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x).$$

(iii) Prenant $x = n \in \mathbb{N}$ dans la propriété précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1) &= n \Gamma(n) \\ &= n(n - 1) \Gamma(n - 1) \\ &= n(n - 1)(n - 2) \Gamma(n - 2) \\ &= n(n - 1)(n - 2) \cdots \Gamma(1) \\ &= n!. \end{aligned}$$

■

1.4 Les moments

Soit \mathbb{K} un corps, en générale le corps \mathbb{K} est le corps \mathbb{C} des nombres complexes ou le corps \mathbb{R} des nombres réels.

Définition 1.4.1. Soit $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ une suite des entiers positifs. On dit que $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ est une suite des moments si elle admet la représentation de la forme :

$$\mu_n = \int_I x^n dF(x), \quad (1.11)$$

où I

subset \mathbb{R} et $F(x)$ est une fonction intégrable sur l'intervalle $(0, 1)$.

Définition 1.4.2. Le déterminant de Hankel d'une suite des moments $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ est définie comme suit :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

1.5 Espaces de polynômes

L'étude des polynômes orthogonaux à une variable (chapitre 2 et 3) nécessite de travailler dans l'espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients dans \mathbb{K} , $\mathbb{K}[x]$. Une base de cet espace est constituée des monômes x^n , $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme $P(x)$ est de degré n s'il s'écrit de la façon suivante :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

avec $a_n \neq 0$. Les constantes non nulles sont donc des polynômes de degré 0. Différentes conventions existent lorsqu'il est temps de définir le degré du polynôme nul 0; nous n'aurons cependant pas à nous préoccuper de cette technicalité. Lorsque $a_n = 1$, nous dirons que le polynôme est unitaire. a_n est appelé le coefficient dominant de $P(x)$. Pour $m \in \mathbb{N}$ fixé, l'ensemble des polynômes $P(x)$ de degré au plus m forme bien sûr un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $m + 1$.

Définition 1.5.1. Une forme linéaire sur $\mathbb{K}[x]$ est une fonction

$$f : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\text{linéaire, i.e. : } \begin{cases} f(P + Q) = f(P) + f(Q), \\ f(PQ) = f(P)f(Q). \end{cases}$$

tels que P et Q sont des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .

Une forme linéaire peut être définie tout simplement en spécifiant la suite de moments

$$\mu_n = f(x^n) \in \mathbb{K}.$$

Dans ce cas, f s'appelle **la forme des moments**.

Classiquement, la forme linéaire f est souvent donnée comme suit :

$$f[u] = \int_a^b u(x)\phi(x)dx, \quad (1.12)$$

pour $\phi(x)$ une fonction intégrable sur l'intervalle (a, b) . La fonction $\phi(x)$ est appelée fonction de poids et on parle alors d'orthogonalité par rapport à une forme linéaire de poids $\phi(x)$ (voir chapitre 2 et 3).

Dans les études combinatoire, généralement les moments $\mu_n = f(x^n)$ sont des entiers positifs qui comptent des objets combinatoires (voir Chapitre 2 et 3).

CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉ SUR LES POLYNÔMES ORTHOOGONAUX

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et propriétés de base sur les polynômes orthogonaux. Ensuite, nous proposons des structures finies (chemins valués, chemin de Favard, chemin de Motzkin, chemin de Dyck et pavage) permettant de démontrer combinatoirement des théorèmes classiques valables pour tous les polynômes orthogonaux. Par exemple : l'équivalence entre l'orthogonalité classique et la récurrence à trois termes.

Dans notre travail on suppose que \mathbb{K} est un corps.

2.1 L'orthogonalité

2.1.1 Définitions et outils de base

Proposition 2.1.1. *Soit $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathbb{K} , il existe une unique forme linéaire*

$$f : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (2.1)$$

telle que $f(x^n) = \mu_n$ où μ_n est le moment d'ordre n .

Définition 2.1.1. *Une suite $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ est dite **suite de polynômes orthogonaux** pour la forme de moments f ssi pour tous entiers m et n positifs on a :*

- (1) $P_n(x)$ est un polynôme de degré n ,
- (2) $f(P_n(x)P_m(x)) = 0$ pour $m \neq n$,
- (3) $f(P_n(x)^2) \neq 0$.

2.1.2 Propriétés sur les polynômes orthogonaux

Théorème 2.1.1. [7] *Soit f une forme linéaire, alors il existe une suite de polynômes orthogonaux pour f ssi $\Delta_n \neq 0$ pour $n \geq 0$. En effet, les polynômes $P_n(x)$ sous forme unitaire, sont donnés explicitement par :*

$$P_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

Propriété 2.1.1. • *Si $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ est une suite de polynômes orthogonaux pour f , ils sont également orthogonaux pour la forme $g = af$, avec a élément non nul de \mathbb{K} .*

- **Réciproquement** : *Toute forme g pour laquelle les polynômes $P_n(x)$ sont orthogonaux est telle que $g = af$ avec $a \neq 0$. En effet, g est définie à un facteur multiplicatif près par la condition (2) de la Définition 2.1.1 avec $m = 0$, c'est-à-dire :*

$$g(P_n(x)) = 0, \quad \text{pour } n \geq 1. \quad (2.2)$$

Propriété 2.1.2. Si $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ est une suite de polynômes orthogonaux pour f , il en est même pour la suite $\{a_n P_n(x)\}_{n \geq 0}$ lorsque $\{a_n\}_{n \geq 0}$ est une suite arbitraire d'éléments non nuls de \mathbb{K} .

Remarque 2.1.1. D'après la Propriété 2.1.2 nous pourrons donc toujours supposer que $P_n(x)$ est unitaire.

Remarque 2.1.2. Si $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ est une suite de moments avec $\mu_0 \neq 0$, il n'existe pas nécessairement des polynômes orthogonaux pour cette suite. Par exemple il est facile de vérifier que la suite des termes $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ n'admet pas des polynômes orthogonaux.

Lemme 2.1.1. Soit $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ une suite de polynômes et $f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) La suite de polynômes $\{P_n(x)\}$ est orthogonale pour f .
- (2) Pour tout polynôme $Q_m(x)$ de degré $m < n$, $f(Q_m(x)P_n(x)) \neq 0$ et si $m = n$ alors $f(Q_m(x)P_n(x)) \neq 0$.
- (3) Pour tout m , $0 \leq m \leq n$, $f(X^m P_n(x)) = c_n \delta_{mn}$ avec $c_n \neq 0$ et δ_{mn} le symbole de Kronecker tel que :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases} \quad (2.3)$$

Démonstration. Ce lemme est élémentaire et n'a pas besoin d'une preuve combinatoire. ■

Lemme 2.1.2. Soit $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux pour f et

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x).$$

Alors

$$a_k = \frac{f(Q_n(x)P_k(x))}{f(P_k^2(x))}.$$

Démonstration. Ce lemme est aussi élémentaire. ■

D'après ces lemmes, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.1.1. Soit $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux pour f . Toute suite de $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$ orthogonale pour f se déduit de $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ par multiplication par une constante, c'est à dire :

$$Q_n(x) = a_n P_n(x), \quad \text{avec } a_n \neq 0, \text{ pour tout } n \geq 0. \quad (2.4)$$

Le théorème suivant est l'un des théorèmes les plus importants de la théorie classique des polynômes orthogonaux.

Théorème 2.1.2 (Théorème de Favard-Shohat). *Soit $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ une suite de polynômes unitaires de \mathbb{K} . On dit $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ est une suite orthogonale pour une forme linéaire f ssi il existe deux suites $\{b_n\}_{n \geq 1}$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ d'éléments de \mathbb{K} avec $\lambda_n \neq 0$ et vérifiant la condition :*

$$P_{n+1}(x) = (x - b_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), \quad \text{pour } n \geq 1, \quad (2.5)$$

avec les conditions initiales :

$$P_0(x) = 1, \quad \text{et } P_1(x) = x - b_0. \quad (2.6)$$

On va utiliser ce théorème dans la suite de ce chapitre pour montrer bijectivement l'orthogonalité des polynômes $P_n(x)$ définis par la récurrence linéaire à trois termes (2.5). Pour se faire, on va utiliser les structures combinatoires finies données dans les deux prochaines sections.

2.2 Interprétation combinatoire des polynômes

Les chemins que nous considérerons seront valués, c'est-à-dire que nous aurons une application partielle $v : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ associant à chaque pas élémentaire (s_i, s_{i+1}) un élément $v(s_i, s_{i+1})$ de l'anneau \mathbb{K} . La valuation $v(\omega)$ d'un chemin $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ est définie comme étant le produit des valuations des pas élémentaires :

$$v(\omega) = \prod_{i=1}^n v(s_{i-1}, s_i). \quad (2.7)$$

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons donnée deux suites $\{b_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ d'éléments de l'anneau \mathbb{K} .

2.2.1 Chemin de Favard

Définition 2.2.1. [9] *Un chemin de Favard est un chemin $\eta = (s_0, \dots, s_n)$ partant de point $s_0 = (0, 0)$ et ayant des pas élémentaires de l'un des trois types suivants : Nord, Nord-Nord, Nord-Est. La valuation d'un pas Nord (resp. Nord-Nord) (s_k, s_{k+1}) (resp.*

(s_{k-1}, s_k, s_{k+1}) est égale à $-b_k$ (resp. $-\lambda_k$). La valuation d'un pas Nord-Est est toujours x . On note la valuation globale du chemin de Favard η par $v_0(\eta)$, tel que

$$v_0(\eta) = v(\eta)x^{NE(\eta)}, \tag{2.8}$$

où $NE(\eta)$ est le nombre de pas Nord-Est du chemin η , et $v(\eta)$ est la valuation obtenue en remplaçant x par 1 dans $v_0(\eta)$. (Voir la Figure 2.1)

Soit Fav_n l'ensemble des chemins de Favard arrivant au niveau n . Alors, on peut interpréter combinatoirement les polynômes $P_n(x)$ par les chemins de Favard comme suit.

Lemme 2.2.1. [9] La suite de polynômes $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ satisfait les conditions (2.5) et (2.6) du théorème de Favard-Shohat (Théorème 2.1.2) ssi :

$$P_n(x) = \sum_{\eta \in Fav_n} v_0(\eta). \tag{2.9}$$

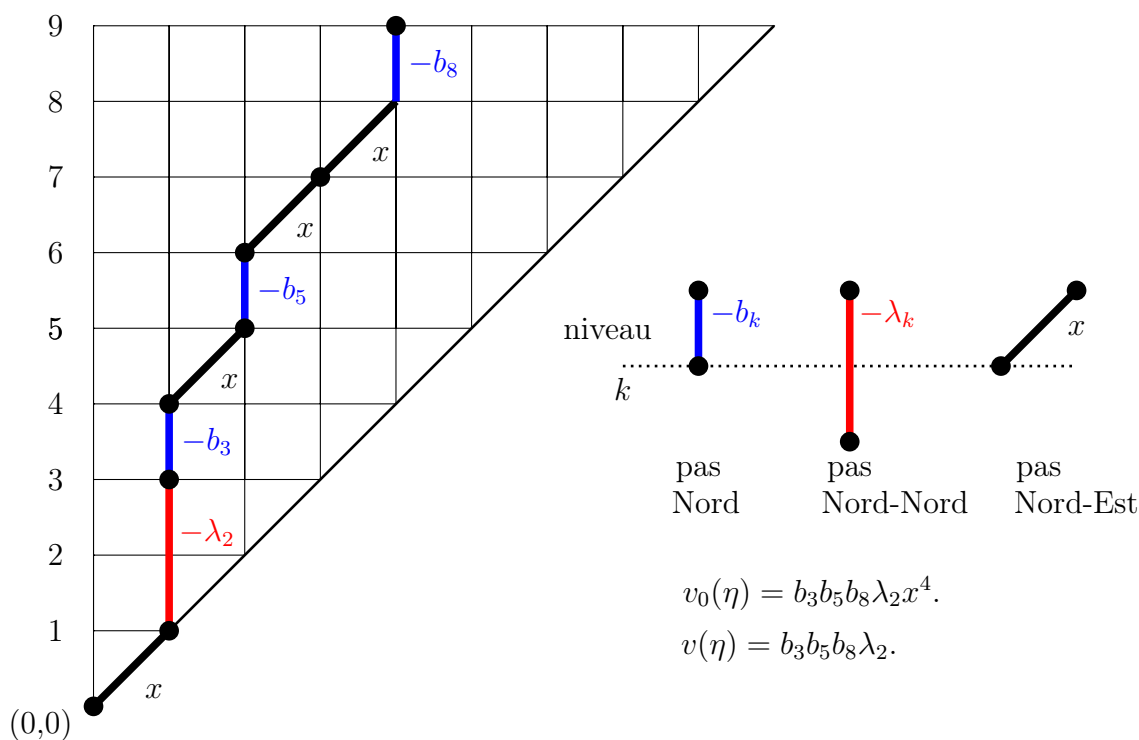


FIGURE 2.1 – Un chemin de Favard valué.

2.2.2 Les pavages

On peut interpréter aussi la récurrence linéaire (2.5) du théorème de Favard-Shohat (Théorème 2.1.2) combinatoirement par les pavages valués d'un segment.

Un pavage du segment $[n]$

Définition 2.2.2. *Un pavage du segment $[n]$ est la donnée d'un ensemble de parties de $[n]$ deux à deux disjointes et ayant l'un des deux types suivants : **monomino** et **domino**. La valuation d'un pavage α est définie comme suite : tout monomino k (resp. domino $\{k, k + 1\}$) est valué $-b_{k-1}$ (resp. $-\lambda_k$). La valuation $v(\alpha)$ de pavage α est le produit des valuations des monominos et dominos. On note $P(\alpha)$ le nombre des points isolés de α . Comme pour les chemins de Favard, notons*

$$v_0(\alpha) = v(\alpha)X^{P(\alpha)}. \tag{2.10}$$

Soit Q_n est l'ensemble des chemins des pavages du segment $[n]$. Alors, on peut interpréter combinatoirement les polynômes $P_n(x)$ par les pavages du segment $[n]$ comme suit.

Lemme 2.2.2. [9] *La suite de polynômes $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ satisfait les conditions (2.5) et (2.6) ssi :*

$$P_n(x) = \sum_{\alpha \in Q_n} v_0(\alpha). \tag{2.11}$$

Exemple 2.2.1. *Le chemin η de la Figure 2.1 correspond au pavage α de la figure suivante :*

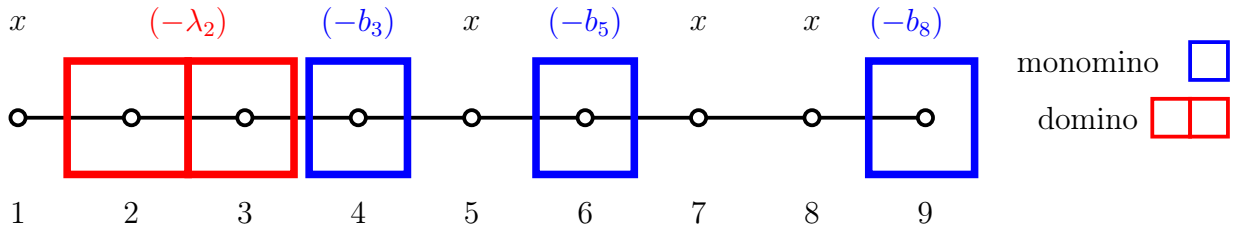


FIGURE 2.2 – Un pavage valué.

On déduit qu'il existe une bijection conservant la valuation relie les chemins de Favard η arrivant au niveau n et les pavages α de $[n]$. Tels que le pas Nord (resp. Nord-Nord) correspond à un point monomino (resp. aux deux points domino) et chaque pas Nord-Est correspond un point isolé.

Remarque 2.2.1. *Le nombre u_n de chemins de Favard arrivant au niveau n (resp. de pavages de $[n]$) satisfait la récurrence suivante :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}, \\ u_0 = 1, \\ u_1 = 2. \end{cases} \quad (2.12)$$

Les nombres de la suite $\{u_n\}_{n \geq 0}$ ici forment la suite de Pell. Les premières valeurs de cette suite sont : 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378...

2.3 Interprétation combinatoire des moments

2.3.1 Chemin de Motzkin et chemin de Dyck

Définition 2.3.1. *Un chemin de Motzkin est un chemin $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ partant de sommet $s_0 = (0, 0)$ et ayant des pas élémentaires de l'un des trois types : Nord-Est, Est et Sud-Est qui se trouvent dans le premier quadrant du plan combinatoire. La valuation d'un chemin de Motzkin est définie comme suit : tout pas élémentaire Est (resp. Sud-Est) dont le niveau du point de départ k est valué b_k (resp. λ_k). La valuation d'un pas Nord-Est est toujours égale à 1. La valuation $v(\omega)$ du chemin de Motzkin ω est le produit des valuations des pas du chemin ω .*

Soit $Mot_{n,k,l}$ l'ensemble des chemins de Motzkin partant de $(0, k)$ et allant au (n, l) , et soit $Mot_n = Mot_{n,0,0}$.

Supposons que $b = \{b_k\}$ et $\lambda = \{\lambda_k\}$ sont données. Alors, on peut interpréter combinatoirement le n -ième moment μ_n du polynôme $P_n(x)$ en terme de la valuation globale $v(\omega)$ du chemin de Motzkin. (Voir Figure 2.3)

Théorème 2.3.1. *Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\mu_n = \sum_{\omega \in Mot_n} v(\omega). \quad (2.13)$$

Remarque 2.3.1. *Le nombre de chemins de Motzkin de longueur n est le nombre de Motzkin M_n qui a la série génératrice suivante :*

$$\sum_{n \geq 0} M_n t^n = \frac{1 + t - \sqrt{1 - 2t + 3t^2}}{2t} \quad (2.14)$$

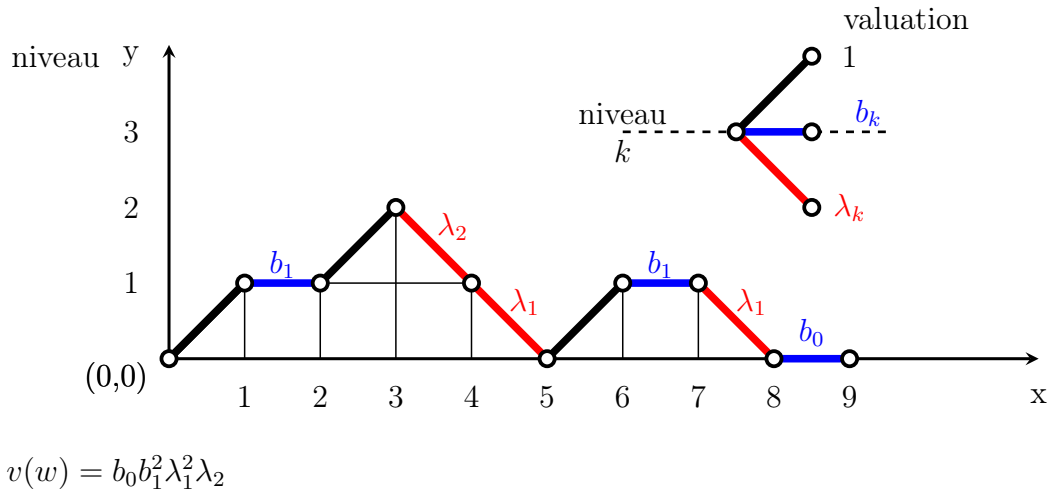


FIGURE 2.3 – Un chemin de Motzkin valué.

et qui satisfait la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} M_n = M_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} M_{j-1} M_{n-1-j}, & \text{pour } n \geq 1, \\ M_0 = 1. \end{cases}$$

Par exemple les dix premiers nombres de Motzkin sont : 1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188 et 5798.

Définition 2.3.2. Un *chemin de Dyck* est un chemin de Motzkin n'ayant pas de pas élémentaire Est. Voir la Figure 2.4.

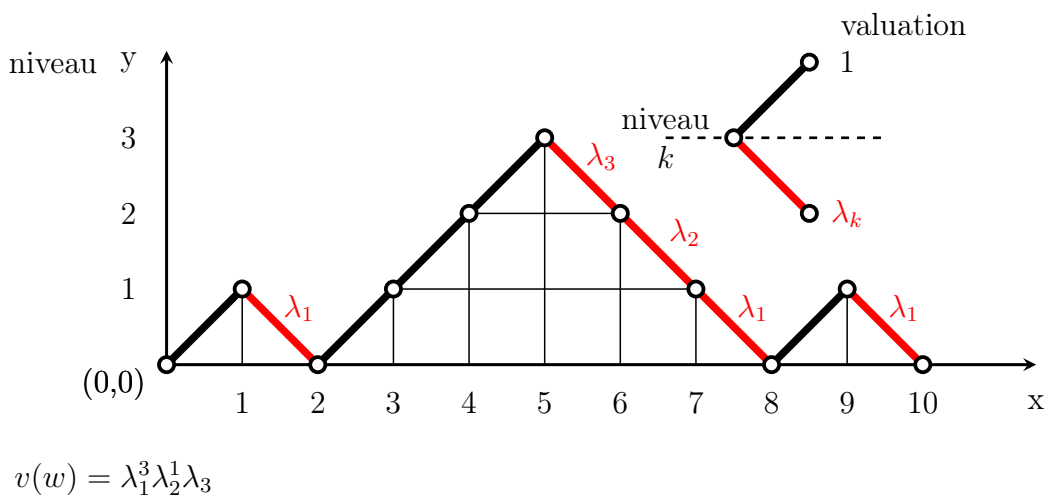


FIGURE 2.4 – Un chemin de Dyck valué.

Définition 2.3.3. *Le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ est égal le célèbre nombre de Catalan C_n .*

2.4 Preuve bijective de l'orthogonalité

Soient $\{b_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ deux suites d'éléments de l'anneau \mathbb{K} . Soient $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ la suite de polynômes de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ définie par la récurrence (2.5) du théorème de Favard-Shohat (Théorème 2.1.2), avec la condition initiale (2.6) de même théorème. Soit $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ la suite d'éléments de \mathbb{K} définie par (2.13) $f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$ est l'unique forme linéaire telle que $f(x^n) = \mu_n$.

Pour démontrer le théorème fondamental d'orthogonalité (c'est à dire Théorème de Favard-Shohat), on peut alors énoncer :

Théorème 2.4.1. [9] *Pour tous entiers positifs n, k et l . On a la relation :*

$$f(x^n P_k(x) P_l(x)) = (\lambda_1 \cdots \lambda_l) \sum_{\omega \in \text{Mot}_{n,k,l}} v(\omega). \quad (2.15)$$

Remarque 2.4.1. *Le membre droite de la relation (2.15) est la somme des valuations des chemins de Motzkin (allant du niveau 0 au niveau 0), de longueur $n+k+l$ et tels que les k premiers (resp. derniers) pas élémentaires sont des pas Nord-Est (resp. Sud-Est).*

Le Théorème 2.4.1 implique immédiatement la partie " condition nécessaire " du théorème de Favard-Shohat (Théorème 2.1.2), plus précisément.

Corollaire 2.4.1. (Théorème de Favard) *Soient $\{b_n\}_{n \geq 1}$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ deux suites de l'anneau \mathbb{K} , et $\{b_n\}_{n \geq 1}$ et f définis comme ci-dessus. On a la condition suivante, pour tous entiers $k, l \geq 0$.*

$$f(P_k(x) P_l(x)) = \lambda_1 \cdots \lambda_l \delta_{kl}. \quad (2.16)$$

Nous avons ainsi prouvé bijectivement la relation (2.15). En appliquant cette bijection au cas $n = 0$, on a une preuve bijective de la relation d'orthogonalité (2.16).

Remarque 2.4.2. *En particulier, la suite de polynômes $\{P_n(x)\}_{n \geq 1}$ est orthogonale pour la forme f dès que $\lambda_k \neq 0$ pour tout $k \geq 1$.*

En utilisant la relation (2.15) du Théorème 2.4.1, on obtient immédiatement le résultat le suivant.

Corollaire 2.4.2. *Si pour tout $k \geq 0$, $\lambda_k \neq 0$ (c'est-à-dire si la suite de polynômes $\{P_n(x)\}_{n \geq 1}$ est orthogonale pour f), on a alors les relations suivantes :*

$$\lambda_k = \frac{f(P_k^2(x))}{f(P_{k-1}^2(x))} = \frac{f(x^k P_k(x))}{f(x^{k-1} P_{k-1}(x))}, \quad (2.17)$$

$$b_k = \frac{f(x P_k^2(x))}{f(P_k^2(x))}. \quad (2.18)$$

CHAPITRE 3

MOMENTS ET POLYNÔMES ORTHOGONAUX CLASSIQUES

Ce chapitre est un chapitre d'applications du Chapitre deux, c'est à dire on va interpréter combinatoirement quelques polynômes orthogonaux classiques et leurs moments. Pour cela, nous considérons le cas des polynômes suivants : les polynômes de Tchebycheff (*1^{er}* et *2^{ime}* espèce), Laguerre, Hermite et Charlier.

3.1 Introduction

Soit $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux, on peut définir cette suite par : les coefficients $\{a_{n,k}\}_{0 \leq k \leq n}$ des polynômes eux-même où $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, la série génératrice ordinaire $\sum_{n \geq 0} P_n(x) t^n$ ou exponentielle $\sum_{n \geq 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!}$, par leur suite $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ de moments ou bien par les coefficients $\{b_k\}_{k \geq 0}$ et $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ apparaissent dans la récurrence (2.5) du Théorème 2.1.2.

Pour chacune des familles de polynômes citées dans ce chapitre, on va montrer bijectivement l'équivalence des deux dernières caractérisations (c'est à dire la suite des moments $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ et les coefficients $\{b_k\}_{k \geq 0}$ et $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$) en utilisant l'identité fondamentale donnée

au Théorème 2.3.1.

$$\mu_n = \sum_{\omega \in \text{Mot}_n} v(\omega). \quad (3.1)$$

C'est à dire on utilise la valuation des chemin de Motzkin.

Dans ce chapitre, on traite particulièrement le cas où les coefficients b_k et λ_k sont des nombres entiers, nous interprétons le produit des entiers composant la valuation $v(\omega)$ comme un certain nombre d'histoires (voir ci-dessous), une approche combinatoire proposé par Viennot basée sur les chemins de Motzkin ou de Dyck. Pour de détails sur ces histoires voir l'article [9]. A chaque histoire nous associons bijectivement un certain objet combinatoire ξ d'un ensemble fini M_n . Chacun des entiers b_k ou λ_k est considéré comme un certain nombre de choix possibles d'effectuer une étape de la construction de l'objet, chacun de ces étapes étant en correspondance avec un pas élémentaire du chemin ω . Il ne reste alors plus qu'à montrer que les objets de M_n sont dénombrés par le moment μ_n .

Par conséquent, si les polynômes $P_n(x)$, et donc les coefficients b_k et λ_k dépendent de certains paramètres, il suffira de pondérer les histoires et les objets combinatoires ξ de M_n .

3.2 Polynômes de Tchebycheff

Il existe deux suites de polynômes de Tchebycheff, l'une nommée polynômes de Tchebycheff de première espèce et notée T_n , et l'autre nommée polynômes de Tchebycheff de seconde espèce et notée U_n (dans les deux cas, l'entier naturel n correspond au degré).

3.2.1 Polynômes de Tchebycheff de seconde espèce

Définition 3.2.1. *Le Polynôme de Tchebycheff de seconde espèce $U_n(x)$ peuvent se définir par :*

- *La relation :*

$$\sin((n+1)\theta) = (\sin(\theta))(U_n(\cos\theta)), \quad n \geq 0. \quad (3.2)$$

- *La relation de récurrence :*

$$\begin{cases} U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), & n \geq 2 \\ U_0(x) = 1, \\ U_1(x) = 2x. \end{cases} \quad (3.3)$$

- La relation d'orthogonalité :

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m. \end{cases} \quad (3.4)$$

- La série génératrice :

$$\sum_{k=0}^n U_k(x)t^k = \frac{1}{1-2xt+t^2}. \quad (3.5)$$

Exemple 3.2.1. Les neuf premiers polynômes de Tchebycheff de seconde espèce sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ U_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x, \\ U_6(x) &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1, \\ U_7(x) &= 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x, \\ U_8(x) &= 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1, \\ U_9(x) &= 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x. \end{aligned}$$

Définition 3.2.2. Les polynômes unitaires correspondant $\hat{U}_n(x) = \frac{1}{2^n}U_n(x)$ se définissent par la récurrence linéaire d'orthogonalité (2.5) avec les coefficients suivants :

$$\begin{cases} b_n = 0, \\ \lambda_n = \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Cas particulier : Les polynômes de Fibonacci $F_n(x) = U_n\left(\frac{x}{2}\right)$ satisfont la récurrence linéaire d'orthogonalité (2.5) avec les conditions :

$$\begin{cases} b_n = 0, \\ \lambda_n = 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

De la relation (3.1), le moment d'ordre n des polynômes de Fibonacci est donné comme suit.

Théorème 3.2.1. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$\mu_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est impair} \\ C_n & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Démonstration. D'après la relation (3.7) on a $b_n = 0$ et $\lambda_n = 1$. Alors d'après le Théorème 2.3.1, il est clair que le moment d'ordre n des polynômes de Fibonacci est le nombre de chemins de Motzkin sans les pas Est (chemin de Dyck) de longueur n . Ainsi $\mu_{2n+1} = 0$ et $\mu_{2n} = C_n$. ■

D'après le théorème précédent et la relation (3.6), on obtient que le polynôme unitaire du polynôme de Tchebycheff de seconde espèce a le moment suivant.

Corollaire 3.2.1. *Le moment d'ordre n des $\hat{U}_n(x)$ est $\frac{C_n}{4^n}$.*

Ainsi, on peut interpréter combinatoirement le polynôme de Fibonacci comme suit.

Théorème 3.2.2. *Pour tout entier $n \geq 0$,*

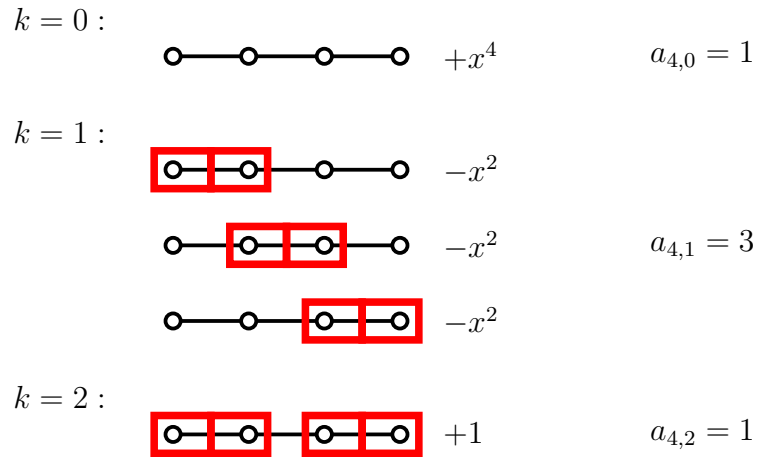
$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_{n,k} x^{n-2k}, \quad (3.8)$$

où $a_{n,k}$ est le nombre de couplages du graphe segment de longueur n ayant k arêtes. (Voir Figure 3.1).

Démonstration. D'après le Lemme 2.2.2, la suite des polynômes de Fibonacci $\{F_n(x)\}$ satisfait la relation :

$$F_n(x) = \sum_{\alpha \in Q'_n} v(\alpha) x^{P(\alpha)}$$

où Q'_n est l'ensemble des pavages sans monimos (car $b_k = 0$) du segment $[n]$, $v(\alpha)$ est la valuation de chaque pavage α et $P(\alpha)$ est le nombre des points isolés de α . Comme il y a seulement les dominos et les points isolés, alors $P(\alpha) = (-1)^k a_{n,k}$ où $a_{n,k}$ est le nombre de couplages du graphe segment de longueur n ayant k arêtes et $P(\alpha) = n - 2k$ car $\lambda = 1$. ■



$$F_4(x) = x^4 - 3x^2 + 1.$$

d' où :

$$\sin 5\theta = \sin \theta(16 \cos 4\theta - 3 \cos 2\theta + 1).$$

FIGURE 3.1 – Couplage de graphe segment associé à $F_4(x)$.

3.2.2 Polynômes de Tchebycheff de première espèce

Définition 3.2.3. *Le Polynôme de Tchebycheff de première espèce $T_n(x)$ peuvent se définir par :*

- *La relation :*

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta). \tag{3.9}$$

- *La relation de récurrence :*

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), & n \geq 2 \\ T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x. \end{cases} \tag{3.10}$$

- La relation d'orthogonalité :

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\delta_{m,n} & \text{si } n > 0, \\ \pi & \text{si } m = n = 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \pi & \text{si } n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

- La série génératrice :

$$\sum_{k=0}^n T_n(x)t^k = \frac{1-xt}{1-2xt+t^2}. \quad (3.12)$$

Exemple 3.2.2. Les neuf premiers polynômes de Tchebycheff de première espèce sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \\ T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x, \\ T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1, \\ T_9(x) &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x. \end{aligned}$$

Définition 3.2.4. Les polynômes unitaires correspondant $\hat{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ se définissent par la récurrence linéaire d'orthogonalité (2.5) avec les coefficients suivantes :

$$\begin{cases} b_n = 0 & \text{si } n \geq 0, \\ \lambda_n = \frac{1}{4} & \text{si } n \geq 2, \\ \lambda_1 = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Le moment d'ordre n de ces polynômes satisfait la relation suivante.

Théorème 3.2.3. *Pour tout entier positif n , on a*

$$\mu_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{1}{4^n} \sum_{\omega \in \text{Mot}_{2n}} 2^{k(\omega)} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}, & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases} \quad (3.14)$$

où la sommation est étendue aux chemins de Dyck de longueur $2n$ et $k(\omega)$ est le nombre de pas Sud-Est au niveau 1.

Démonstration. Tout chemin de Dyck se décompose de manière unique en produit de chemins de Dyck "primitifs" (c'est-à-dire dont les sommets autres que les extrémités sont à un niveau non nul). Le nombre de facteurs de cette décomposition est $k(\omega)$ et à chacun de ces facteurs on peut faire subir une symétrie par rapport à l'axe des y . D'autre part le binomial $\binom{2n}{n}$ est le nombre de chemins de longueur $2n$ allant du point $(0,0)$ au point $(2n,0)$ et n'utilisant que des pas Nord-Est ou Sud-Est. Il est aisé d'imaginer une preuve bijective de l'identité

$$\sum_{\omega \in \text{Mot}_{2n}} 2^{k(\omega)} = \binom{2n}{n}, \quad (3.15)$$

où la sommation est la même qu'en équation (3.14). Ainsi $\mu_{2n+1} = 0$ et $\mu_{2n} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$. ■

Cas particulier : Il existe une suite de polynômes moins classiques sont les polynômes $M_n(x)$ définis par les coefficients $b_n = \lambda_n = 1$ de la récurrence linéaire (3.7).

Soit Q_n l'ensemble des chemins des pavages du segment $[n]$. Alors, on peut interpréter combinatoirement le polynôme $M_n(x)$ comme suit.

Théorème 3.2.4. *On a*

$$M_n(x) = \sum_{\alpha \in Q_n} x^{P(\alpha)}, \quad (3.16)$$

où α est un pavage du segment $[n]$ en monominos et dominos.

Théorème 3.2.5. *Le moment d'ordre n des polynômes $M_n(x)$ est le nombre de Motzkin M_n .*

Démonstration. Comme $\lambda_k = b_k = 1$, alors d'après le Théorème 2.3.1 il est clair que le moment d'ordre n des polynômes $M_n(x)$ est le nombre des chemins de Motzkin qui est égale à M_n . ■

De plus, ce polynôme est un cas particulier du polynôme de Tchebycheff de seconde espèce, tel que :

$$M_n(x) = U_n\left(\frac{x-1}{2}\right). \quad (3.17)$$

3.3 Polynômes de Laguerre

Définition 3.3.1. [8] Soit α un nombre réel positive. Les polynômes (unitaires) de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ peut être définis par :

- Les coefficients :

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (\alpha + 1 + k)^{\overline{n-k}} (-x)^k. \quad (3.18)$$

- La relation de récurrence :

$$\begin{cases} (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = [(2n+\alpha+1) - x]L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), & n \geq 1 \\ L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \\ L_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x, \end{cases} \quad (3.19)$$

où on a :

$$b_n = 2n + \alpha + 1, \text{ et } \lambda_n = n(n + \alpha). \quad (3.20)$$

- La relation d'orthogonalité :

$$\int_0^{+\infty} L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x} dx = n!\Gamma(n + \alpha + 1)\delta_{m,n}. \quad (3.21)$$

- La fonction génératrice :

$$\sum_{k=0}^n L_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^k}{k!} = (1-t)^{-(\alpha+1)} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right). \quad (3.22)$$

Remarque 3.3.1. On peut définir aussi les polynômes de Laguerre par $\frac{(-1)^n}{n!}L_n^{(\alpha)}(x)$ ou bien par $(-1)^n L_n^{(\alpha)}(x)$, mais généralement nous parlerons des polynômes de Laguerre de la forme unitaire.

Exemple 3.3.1. Les premiers polynômes de Laguerre (pour $n = 6$ et si $\alpha=0$) sont données comme suit :

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = -x + 1,$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2),$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6),$$

$$L_4(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24),$$

$$L_5(x) = \frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120),$$

$$L_6(x) = \frac{1}{720}(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 + 4320x + 720).$$

Dans la littérature (voir par exemple, [9]), on trouve les deux polynômes de Laguerre très importants suivant :

- (i) Si $\alpha = 0$, le polynôme de Laguerre noté $L_n^{(0)}(x)$ qui est habituellement noté $L_n(x)$.
- (ii) Si $\alpha = 1$, le polynôme de Laguerre noté $L_n^{(1)}(x)$.

Dans tout ce qui suit, on va établir le moment du polynôme de premier cas (c'est à dire si $\alpha = 0$), pour le cas de $\alpha = 1$ ou le cas général voir la référence [9].

Ainsi pour établir le moment du polynôme de Laguerre $L_n(x)$, on utilise la définition suivante.

Définition 3.3.2 (Histoire de Laguerre). Une histoire de Laguerre de longueur n est un chemin de Motzkin de longueur n dans lequel chaque pas Nord-Est ou Sud-Est entre les lignes $y = i$ et $y = i - 1$ est étiqueté par un entier dans $\{0, 1, \dots, i - 1\}$, et chaque pas Est dans la ligne $y = i$ est soit non étiqueté ou soit étiqueté par un entier dans $\{-i, -i + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, i - 1\}$. On note l'ensemble des chemins de ces histoires par $\mathcal{H}_L(n)$.

Maintenant, on est prêt de donner le résultat suivant.

Théorème 3.3.1. Le $n^{\text{ième}}$ moment du polynôme de Laguerre $L_n(x)$ est égale le nombre de permutation de $[n]$, qui est, $\mu_n = n!$

Démonstration. Comme $b_n = 2n + 1$ pour $n \geq 0$ et $\lambda_n = n^2$ pour $n \geq 1$ par (3.20), alors d'après le Théorème 2.3.1 de Chapitre 2 il est clair que le moment d'ordre n des

polynômes $L_n(x)$ est égale à :

$$\mu_n = \sum_{\omega \in Mot_n} v(\omega),$$

où Mot_n est l'ensemble des chemins de Motzkin de longueur n .

Pour montrer ce théorème il suffit donc d'établir une bijection entre l'ensemble de ces chemins et l'ensemble des permutations de $[n]$ noté par S_n . Pour se faire, on va montrer la bijection suivante due à Foata et Zeilberger [4] :

$$\psi_L : S_n \rightarrow \mathcal{H}_L(n),$$

où $\mathcal{H}_L(n)$ est l'ensemble des histoires de Laguerre de longueur n .

Soit $\pi \in S_n$ est une permutation de $[n]$. Alors l'histoire de Laguerre correspondante $\psi_L(\pi) = \eta$ est définie, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, comme suit :

- Si i est une ouverture de π , alors le $i^{\text{ième}}$ pas de η est un pas Nord-Est. Et si i est une fermeture de π , alors le $i^{\text{ième}}$ pas de η est un pas Sud-Est, dans ce cas supposons que le $j^{\text{ième}}$ pas et le $i^{\text{ième}}$ pas sont les pas Nord-Est et sud-est correspondants. Alors l'étiquette du $j^{\text{ième}}$ pas (resp. $i^{\text{ième}}$ pas) est le nombre de croisements supérieurs (resp. inférieurs) $\{(a, b), (a', b')\}$ de π avec $a < a' < b < b'$ et $b = j$.
- Si i est un singleton de π , alors le $i^{\text{ième}}$ pas de η est un pas Est non étiquetée.
- Si i est une continuation de π , alors le $i^{\text{ième}}$ pas de η est un pas Est dont l'étiquette est déterminée comme suit : si le sommet i repose sur deux arêtes supérieures alors l'étiquette est $+k$, où k est le nombre de croisements supérieurs $\{(a, b), (a', b')\}$ de π avec $a < a' < b < b'$ et $b = i$, si le sommet i se trouve dans deux arêtes inférieures, alors l'étiquette est $-k$, où k est le nombre de croisements inférieurs $\{(a, b), (a', b')\}$ de π avec $a < a' \leq b < b'$ et $b = i$.

Donc ψ_L est une bijection. Pour un exemple voir la Figure 2.3 ■

Remarque 3.3.2. *Viennot [9] a montré que le n -ième moment du polynôme de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ est :*

$$\mu_n = (\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n) = (\alpha + 1)^{\overline{n}}. \quad (3.23)$$

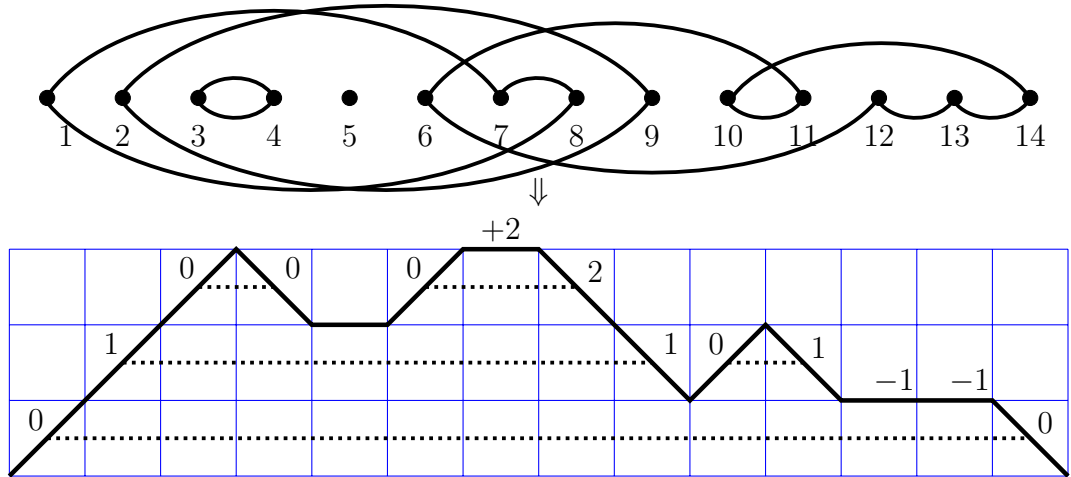


FIGURE 3.2 – Un exemple de la bijection ψ_L envoyant les permutations aux histoires de Laguerre.

3.4 Polynômes de Hermite

Les polynômes (unitaires) de Hermite $H_n(x)$ peut être définis par :

Définition 3.4.1. • *Les coefficients :*

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{n/2} (-1)^m \frac{(2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}. \quad (3.24)$$

• *La relation de récurrence :*

$$\begin{cases} H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \\ H_0(x) = 1, \\ H_1(x) = 2x. \end{cases} \quad (3.25)$$

où on a :

$$b_n = 0, \quad \lambda_n = n. \quad (3.26)$$

• *La relation d'orthogonalité :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx = n! \sqrt{\pi} \delta_{m,n}.$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ n! \sqrt{\pi} & \text{si } m = n. \end{cases} \quad (3.27)$$

- La fonction génératrice :

$$\sum_{k=0}^n H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right). \quad (3.28)$$

Exemple 3.4.1. Les six premiers polynômes de Hermite sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= x, \\ H_2(x) &= x^2 - 1, \\ H_3(x) &= x^3 - 3x, \\ H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3, \\ H_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x, \\ H_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15. \end{aligned}$$

Pour établir le moment du polynôme de Hermite $H_n(x)$, on utilise la définition suivante.

Définition 3.4.2 (Histoire de Hermite). Une histoire de Hermite de longueur n est un chemin de Dyck de longueur n dans lequel chaque pas Sud-Est entre les lignes $y = i$ et $y = i - 1$ est étiqueté par un entier dans $\{0, 1, \dots, i - 1\}$.

Maintenant, on est prêt de donner le résultat suivant.

Théorème 3.4.1. Le $n^{\text{ième}}$ moment du polynôme de Hermite $H_n(x)$ est égale au nombre de couplages parfaits de $[n]$, qui est :

$$\begin{cases} \mu_{2n+1} = 0, \\ \mu_{2n} = (2n - 1)! = 1.3 \dots (2n - 1). \end{cases} \quad (3.29)$$

Démonstration. Comme $b_n = 0$ pour $n \geq 0$ et $\lambda_n = n$ pour $n \geq 1$, alors d'après le Théorème 2.3.1 de Chapitre 2 il est clair que le moment d'ordre n des polynômes $H_n(x)$ est égale à :

$$\mu_n = \sum_{P \in Mot_n} v(\omega),$$

où Mot_n est l'ensemble des chemins de Motzkin de longueur n .

Soit $\omega \in Mot_n$. Alors $v(P\omega) = 0$ si ω a un pas Est d'après la relation (2.7). Sinon ω est un chemin de Dyck et $v(\omega)$ est égale au nombre des histoires de Hermite dont le

chemin de Dyck sous-jacent est ω . Alors μ_n est égale au nombre des histoires de Hermite de longueur n .

Pour montrer ce théorème il suffit donc d'établir une bijection entre l'ensemble de ces chemins de dyck et l'ensemble des couplages parfaits de $[n]$ noté par \mathcal{M}_n . Pour se faire, on va montrer la bijection suivante donnée dans [11, Section 2].

$$\psi_{\mathcal{H}} : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n,$$

où $\mathcal{H}_n(n)$ est l'ensemble des histoires de Hermite de longueur n . Il suffit donc de considérer le cas de n pair puisque les deux ensembles sont vides sinon. Soit $\pi \in \mathcal{M}_{2n}$ est un couplage parfait de $[2n]$, alors l'histoire de Hermite $\psi_H(\pi)$ correspondant est défini comme suit :
Pour $i = 1, 2, \dots, 2n$.

- Si i est une ouverture de π , alors le $i^{\text{ème}}$ pas de $\psi_H(\pi)$ est le pas Nord-Est.
- Si i est une fermeture de π alors le $i^{\text{ème}}$ pas de $\psi_H(\pi)$ est le pas Sud-Est étiqueté par le nombre de croisement (a, b) , (a', b') de π avec $a < a' < b < b'$ et $b = i$.

Pour un exemple voir la Figure 3.3, donc ψ_H est une bijection. ■

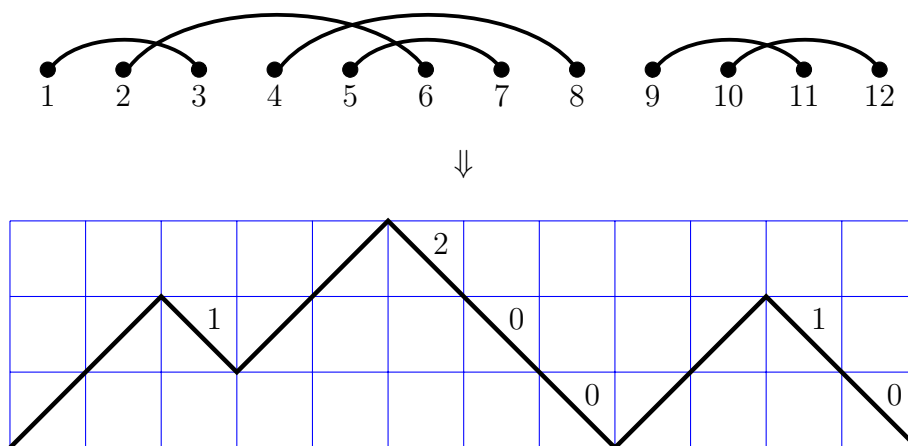


FIGURE 3.3 – Un exemple de la bijection $\psi_{\mathcal{H}}$ envoyant des correspondances parfaites aux histoires de Hermite.

3.5 Polynômes de Charlier

Les polynômes (unitaires) de Charlier $C_n^{(a)}(x)$ peut être définis par :

- Les coefficients :

$$C_n^{(a)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{x}{k} k! (-a)^{n-k}. \quad (3.30)$$

- La relation de récurrence d'orthogonalité (2.5) définie pour :

$$\begin{cases} b_n = n + a, \\ \lambda_n = an. \end{cases}$$

- La relation d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} C_m^{(a)}(x) C_n^{(a)}(x) d\psi^{(a)}(x) &= a^n n! \delta_{m,n}. \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ a^n n! & \text{si } m = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.31)$$

où $\psi^{(a)}$ est la fonction en escalier dont les sauts sont $d\psi^{(a)}(x) = \frac{e^{-a} a^x}{x!}$ aux points $x = 0, 1, 2, \dots$

- La fonction génératrice :

$$\sum_{k=0}^n C_k^{(a)}(x) \frac{t^k}{k!} = e^{-at} (1+t)^x. \quad (3.32)$$

Dans la suite, on traite les polynômes de Charlier qui ont $a = 0$ notés généralement par $C_n(x)$.

Définition 3.5.1 (Histoire de Charlier). Une histoire de Charlier de longueur n est un chemin de Motzkin de longueur n dans lequel chaque pas Sud-Est entre les lignes $y = i$ et $y = i - 1$ est étiqueté par un entier dans $\{0, 1, \dots, i - 1\}$, et chaque pas Est sur la ligne $y = i$ est soit non étiqueté, soit étiqueté par un entier dans $\{0, 1, \dots, i - 1\}$.

Théorème 3.5.1. Le $n^{\text{ième}}$ moment du polynôme de Charlier $C_n(x)$ est égale au nombre de l'ensemble des partitions de $[n]$, c'est à dire ;

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n S(n, k),$$

où $S(n, k)$ est le nombre de Stirling de seconde espèce.

Démonstration. Comme $b_n = n + a$ pour $n \geq 0$ et $\lambda_n = an$ pour $n \geq 1$, alors d'après le Théorème 2.3.1 il est clair que le moment d'ordre n des polynômes $C_n(x)$ est égale à :

$$\mu_n = \sum_{\omega \in \text{Mot}_n} v(\omega),$$

où Mot_n est l'ensemble des chemins de Motzkin de longueur n .

Pour montrer ce théorème, il suffit donc d'établir une bijection entre l'ensemble de ces chemins et l'ensemble des partitions de $[n]$ noté par S_n . Pour se faire, on va montrer la bijection suivante :

$$\psi_C : \Pi_n \rightarrow \mathcal{H}_C(n),$$

où $\mathcal{H}_C(n)$ est l'ensemble des histoires de Charlier de longueur n .

Soit $\pi \in \Pi_n$ est un ensemble de partition de $[n]$. lors l'histoire de Charlier correspondante $\mathcal{H}_C(\pi) = \eta$ est défini comme suit. Pour $i = 1, 2, \dots, n$,

- Si i est une ouverture de π , alors le $i^{\text{ième}}$ pas de η est le pas Nord-Est.
- Si i est une fermeture de π , alors le $i^{\text{ième}}$ pas de η est le pas Sud-Est étiqueté par le nombre de croisements $(a, b), (a', b')$ de π avec $a < a' < b < b'$ et $b = i$.
- Si i est un singleton de π , alors le $i^{\text{ième}}$ pas de η est le pas sans étiquette Est.
- Si i est une continuation de π , alors le $i^{\text{ième}}$ pas de η est le pas pas Est étiquetée par le nombre de croisements $(a, b), (a', b')$ de π avec $a < a' < b < b'$ et $b = i$.

Donc ψ_C est une bijection. Pour un exemple voir la Figure 3.4

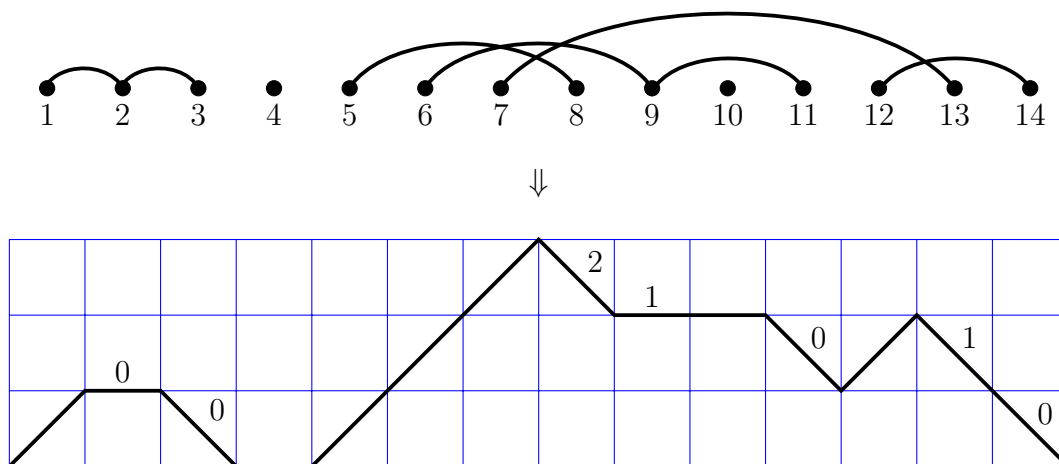


FIGURE 3.4 – Un exemple de la bijection ψ_C envoyant l'ensemble des partitions aux histoires de Charlier aux.

Remarque 3.5.1. *Viennot [9] a montré que le n -ième moment du polynôme de Charlier $C_n^{(a)}(x)$ est :*

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) a^k. \tag{3.33}$$

On termine ce chapitre par un table récapitulatif de ces polynômes.

Polynômes	b_n	λ_n	μ_n
Tchebycheff unitaire $U_n(x)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4^n} C_n$
Tchebycheff unitaire $T_n(x)$	0	$\lambda_1 = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$
Laguerre $L_n^1(x)$	$2n+2$	$n(n+1)$	$(n+1)!$
Laguerre $L_n^\alpha(x)$	$2n + \alpha + 1$	$n(n + \alpha)$	$(\alpha+1) \times (2\alpha+n) = (\alpha+1)^{\bar{n}}$.
Hermite $H_n(x)$	0	n	$\mu_{2n} = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n - 1)$ $\mu_{2n+1} = 0$
Chalier $C_n^\alpha(x)$	$n + \alpha$	αn	$\sum_{k=0}^n S(n, k) \alpha^k$

TABLE 3.1 – Valuations des histoires et moments des polynômes orthogonaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. E. Bousbaa, *Combinatoire des suites de Starling généralisé*, Thèse de doctorat en Mathématiques, Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene, 2017.
- [2] S. Corteel, J. S. KIM and D. Staton, *Moments of orthogonal polynomials ans combinatorics*, Recent Trends in Combinatorics pp 545-578, 2016.
- [3] P. Flajolet, *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Math., 32(2) :125–161, 1980.
- [4] D. Foata and D. Zeilberger, *Denert's permutation statistic is indeed Euler-Mahonian*, Stud. Appl. Math., 83(1) :31–59, 1990.
- [5] M. Pagé, *Polynômes orthogonaux et polynômes de Mackdonal*, Mémoire de la Maitrise en Mathématiques, Université de Quebec à Montréal, 2006.
- [6] N. J. A. Sloane, *The On line Encyclopedia of Integer Sequences*, Published electronically at <https://oeis.org>, 2021.
- [7] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Fourth edition. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975. xiii+432 pp.
- [8] L. Valet , *Généralités sur les polynômes orthogonaux*.DEA. Polynômes orthogonaux, 2000, pp.49. cel-00661847. <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00661847/document>
- [9] X. G. Viennot, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux* Lecture Notes, UQ'AM, 1984. <http://www.xavierviennot.org/xavier/livres.html>