République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales et discrètes

Thème

Sur le calcul fractionnaire discret

Présenté par : Sarra Bounefikha

Devant le jury :

Président	: N. Touafek	Prof. Université de Jijel
Encadreur	: F. Belhannache	M.C.A Université de Jijel
Examinateur	: M. Ahmia	M.C.A Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

Remerciements

Avant d'ouvrir ce mémoire,
*je remercie **Dieu** tout puissant de m'avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail. Je voudrais d'abord adresser mes toutes gratitudes à mon encadreur de ce mémoire **Mme. Farida BELHANNACHE** pour sa patience, ses orientations, ses précieuses informations et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion, pour le temps qui m'a consacré et pour son aide à surmonter les difficultés rencontrées.*

Je présente mes sincères remerciements aux membres de jury de soutenance
***Mr. Nouressadat TOUAFEK** et **Mr. Moussa AHMIA** pour l'enrichissement qu'ils vont m'apporter à l'occasion de la discussion de la présente recherche.*

*Mes sincères remerciements vont également à **Mme. Imen BOUTHANA** qui ma baucoup aider à surmonter les difficultés rencontrées et je veux remercier aussi tous les enseignants qui ont contribué à notre formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématique.*

Merci à tous et à toutes.

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'études :

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur. Celui qui n'a pas pus voir l'aboutissement de ce travail. Je sais que tu aurais pu être fière de moi. Que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi ***mon père Mahmoud*** *je t'aime.*

A la lumière de ma vie, la source de mes efforts et mon bonheur, ***maman Maria*** *que j'adore.*

A mes belles fréres ***Rabah, Mohamed et Chaabane****, sa femme et ses enfants* ***Tamer et Anfal*** *que le bon Dieu vous protège et vous dirige vers le mieux.*

A mes adorables ***soeurs et leurs enfants*** *que Dieu tout puissant vous protège, vous bénir, vous apporte le bonheur, les aides à réaliser toute vos voeux et vous offre un avenir plein de succès.*

A ***mes tants, mes oncles, leurs épouses****, mes cousins et cousines et leurs enfants.*

Aux personnes qui m'ont soutenue tout au long de ce travail.

Sarra Bounefikha

Table des matières

Notations

Dans ce mémoire on désignera par
$\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels positifs non nuls.
$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres naturels non nuls.
$\mathbb{Z}_-$ l'ensemble des nombres entiers négatifs.
$\mathbb{N}_b = \{b, b+1....\}$ où $b \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$.
$f : \mathbb{N}_b \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle.
$C_j^i = \frac{j!}{i!(j-i)!}, \forall j, i \in \mathbb{N}, i \leq j$.
$r \in \mathbb{N}$.
$m \in \mathbb{N}^*$.

Introduction

Le calcul aux différence est l'analogue discret du calcul différentiel. L'opérateur de différences Δ défini par $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ a des propriétés similaires que celles de l'opérateur différentiel $D = d/dx$. Le calcul fractionnaire est une branche de mathématiques appliqués très importante grâce à ses plusieurs applications dans différents domaines tels que l'économie, la biologie, la physique,.......

Dans ce mémoire on s'intéresse à donner des définitions et des propriétés essentielles qui sont utilisées dans le calcul fractionnaire discret pour étudier des équation aux différences fractionnaires.

Ce mémoire est organisé de la maniére suivante :

Dans le premier chapitre nous commençons par introduire des notions préliminaires utilisées dans le calcul aux différences. Puis nous donnons la définition de la fonction gamma dans le dommaine réel et quelques propriétès de cette fonction. Enfin nous présentons la factorielle décroissante.

Le deuxième chapitre est consacré à donner les différentes compositions entre une somme fractionnaire et un opérateur de différence fractionnaire.

Dans le troisième chapitre nous nous intéressons à la résolution de quelques équations aux différences fractionnaires.

Chapitre 1

Calcul aux différences

Dans ce chapitre nous commençons par introduire des notions préliminaires utilisées dans le calcul aux différences, puis nous donnons la définition de la fonction gamma dans le dommaine réel et quelques propriétés de cette fonction. Enfin, nous présentons la factorielle décroissante. Les notion de ce chapitre sont de [4,5,6,7].

1.1 Opérateur de différence Δ

Définition 1.1.1. *On définit l'opérateur de différence Δ et l'opérateur de décalage E respectivement par*

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n),\ n \in \mathbb{N}_b, \tag{1.1}$$

$$Ef(n) = f(n+1),\ n \in \mathbb{N}_b. \tag{1.2}$$

Définition 1.1.2. *Soit $h : \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_b \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On définit l'opérateur de différence par rapport à la première variable Δ_n par*

$$\Delta_n h(n,s) = h(n+1,s) - h(n,s),\ \forall\ (n,s) \in \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_b. \tag{1.3}$$

Remarque 1.1.1. *1. Δ et E sont des opérateurs linéaires.*

2. Δ et E commutent, c'est à dire $\Delta E = E\Delta$.

3. *$\Delta = E - I$ où I est l'opérateur identité, c'est à dire $If(n) = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}_b$.*

4. *Si $c \in \mathbb{R}$ est une constante, alors $\Delta c = 0$.*

Définition 1.1.3. *En général, on définit Δ^r et E^r respectivement par*

$$\Delta^r f(n) = \Delta(\Delta^{r-1} f(n)), \; n \in \mathbb{N}_b, \tag{1.4}$$

$$E^r f(n) = f(n+r), \; n \in \mathbb{N}_b. \tag{1.5}$$

Lemme 1.1.1. *Soient Δ et E les opérateurs définis par (1.1) et (1.2) respectivement. Alors*

$$\Delta^r f(n) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} C_r^i E^i. \tag{1.6}$$

$$E^r f(n) = \sum_{i=0}^{r} C_r^i \Delta^i. \tag{1.7}$$

où $C_0^0 = 1$ et $C_i^0 = 0$ si $i \neq 0$.

Démonstration. D'après la Remarque 1.1.1, on a

$$\Delta = E - I \text{ et } E = \Delta + I,$$

donc

$$\Delta^r = (E - I)^r \text{ et } E^r = (\Delta + I)^r.$$

Mais Δ commute avec E, alors

$$\Delta^r f(n) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} C_r^i E^i,$$

et

$$E^r f(n) = \sum_{i=0}^{r} C_r^i \Delta^i,$$

d'où (1.6) et (1.7). ■

Théorème 1.1.1. *Soit $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $f(0) = f_0$. Alors*

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \Delta^i f_0. \tag{1.8}$$

$$\Delta^n f_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i E^i f_0. \tag{1.9}$$

Démonstration. D'après (1.5) on a

$$f(n) = f(0+n) = E^n f_0.$$

En appliquant (1.6) et (1.7) à f_0 on trouve (1.8) et (1.9). ■

Proposition 1.1.1. *Soientt Δ et E les opérateurs définis par (1.1) et (1.2) respectivement, $g : \mathbb{N}_b \to \mathbb{R}^*$ une fonction réelle et $P(n) = \sum\limits_{i=0}^{k} b_i n^{k-i}$ un polynôme de degré k (i.e $b_0 \neq 0$) où b_i, $i \in \{0, 1, ...k\}$, sont des nombres réels, alors*

$$\sum_{i=b}^{n-1} \Delta f(i) = f(n) - f(b),\ n \in \mathbb{N}_b. \tag{1.10}$$

$$\Delta\left(\sum_{i=b}^{n-1} f(i)\right) = f(n),\ n \in \mathbb{N}_b. \tag{1.11}$$

$$\Delta(f(n)g(n)) = Ef(n)\Delta g(n) + g(n)\Delta f(n),\ n \in \mathbb{N}_b. \tag{1.12}$$

$$\Delta\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = \frac{g(n)\Delta f(n) - f(n)\Delta g(n)}{g(n)Eg(n)},\ n \in \mathbb{N}_b \tag{1.13}$$

et $g(n)$ est non nulle sur $\mathbb{N}_b$.

$$\Delta^k P(n) = b_0 k!. \tag{1.14}$$

$$\Delta^{k+i} P(n) = 0,\ \forall i \geq 1. \tag{1.15}$$

Démonstration. En utilisant (1.1) et (1.2) on trouve

1.

$$\begin{aligned}\sum_{i=b}^{n-1}\Delta f(i) &= \sum_{i=b}^{n-1}(f(i+1)-f(i))\\ &= \sum_{i=b+1}^{n} f(i) - \sum_{i=b}^{n-1} f(i)\\ &= f(n)-f(b).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\Delta\left(\sum_{i=b}^{n-1} f(i)\right) &= \sum_{i=b}^{n} f(i) - \sum_{i=b}^{n-1} f(i)\\ &= f(n).\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\Delta(f(n)g(n)) &= f(n+1)g(n+1)-f(n)g(n)\\ &= f(n+1)(g(n+1)-g(n))+g(n)(f(n+1)-f(n))\\ &= Ef(n)\Delta g(n)+g(n)\Delta f(n).\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) &= \frac{f(n+1)}{g(n+1)}-\frac{f(n)}{g(n)}\\ &= \frac{f(n+1)g(n)-f(n)g(n+1)}{g(n+1)g(n)}\\ &= \frac{g(n)(f(n+1)-f(n))-f(n)(g(n+1)-g(n))}{g(n+1)g(n)}\\ &= \frac{g(n)\Delta f(n)-f(n)\Delta g(n)}{g(n)Eg(n)}.\end{aligned}$$

5.

$$\Delta P(n) = \sum_{i=0}^{k} b_i(n+1)^{k-i} - \sum_{i=0}^{k} b_i n^{k-i}.$$

D'autre part on a

$$(n+1)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i n^i = 1 + kn + \frac{k(k-1)}{2!} n^2 + \cdots + kn^{k-1} + n^k.$$
$$(n+1)^{k-1} = 1 + (k-1)n + \frac{(k-1)(k-2)}{2!} n^2 + \cdots + (k-1)n^{k-2} + n^{k-1}.$$

.

.

Donc

$$\begin{aligned}
\Delta P(n) &= \sum_{i=0}^{k} b_i (n+1)^{k-i} - \sum_{i=0}^{k} b_i n^{k-i} \\
&= b_0((n+1)^k - n^k) + \sum_{i=1}^{k-1} b_i (n+1)^{k-i} - n^{k-i} \\
&= b_0 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} n^j + \sum_{i=1}^{k-1} b_i \sum_{j=0}^{k-1-i} \binom{k-i}{j} n^j \\
&= b_0 k n^{k-1} + \left(b_0 \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} n^j + \sum_{j=1}^{k-i} b_i \sum_{j=0}^{k-1-i} \binom{k-i}{j} n^j \right),
\end{aligned}$$

alors $\Delta P(n) = b_0 k n^{k-1} + P_1(n)$,

où P_1 est un polynôme de degré inférieur strictement à $k-1$, (i.e) $deg\ P_1 < k-1$.

De la même manière on peut montrer que

$$\Delta^2 P(n) = b_0 k(k-1) n^{k-2} + P_2(n) \text{ avec } deg\, P_2 < k-2,$$

$$\Delta^3 P(n) = b_0 k(k-1)(k-2) n^{k-3} + P_3(n) \text{ avec } deg\ P_3 < k-3,$$

d'où (1.14).

Pour montrer (1.15) il suffit d'utiliser (1.4) et (1.14).

■

Lemme 1.1.2. *Soient Δ l'opérateur défini par (1.1) et $g : \mathbb{N}_b \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors*

$$\sum_{k=b}^{n-1} g(k)\Delta f(k) = [f(n)g(n) - f(b)g(b)] - \sum_{k=b}^{n-1} E(f(k))\Delta g(k) \tag{1.16}$$

Démonstration. En utilisant (1.12) on trouve

$$g(k)\Delta f(k) = \Delta\left(f(k)g(k)\right) - Ef(k)\Delta g(k),$$

donc

$$\sum_{k=b}^{n-1} g(k)\Delta f(k) = \sum_{k=b}^{n-1} \Delta\left(f(k)g(k)\right) - \sum_{k=b}^{n-1} Ef(k)\Delta g(k).$$

De (1.10) on obtient

$$\sum_{k=b}^{n-1} g(k)\Delta f(k) = f(n)g(n) - f(b)g(b) - \sum_{k=b}^{n-1}(f(k+1))\Delta g(k),$$

d'où (1.16). ■

Lemme 1.1.3. *(Relation de Leibniz) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{N}_{b+\alpha} \times \mathbb{N}_b \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, alors pour tout $n \in \mathbb{N}_{b+\alpha}$ on a*

$$\Delta\left(\sum_{s=b}^{n-\alpha} h(n,s)\right) = \sum_{s=b}^{n-\alpha} \Delta_n h(n,s) + h(n+1, n+1-\alpha). \tag{1.17}$$

Démonstration. En utilisant (1.1) on trouve

$$\begin{aligned}\Delta\left(\sum_{s=b}^{n-\alpha} h(n,s)\right) &= \sum_{s=b}^{n+1-\alpha} h(n+1,s) - \sum_{s=b}^{n-\alpha} h(n,s) \\ &= \sum_{s=b}^{n-\alpha} \left[h(n+1,s) - h(n,s)\right] + h(n+1,n+1-\alpha) \\ &= \sum_{s=b}^{n-\alpha} \Delta_n h(n,s) + h(n+1,n+1-\alpha).\end{aligned}$$

d'où (1.17). ■

1.2 La fonction gamma dans le domaine réel

Définition 1.2.1. *On appelle fonction gamma d'Euler, noté* Γ*, la fonction définie par*

$$\forall z \in \left]0, +\infty\right[, \ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{1.18}$$

Théorème 1.2.1. *Soient* Γ *la fonction définie par* (1.18) *et* $z \in \left]0, +\infty\right[$*. Alors*

$$\Gamma(1) = 1, \tag{1.19}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{1.20}$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.21}$$

$$\Gamma(z+n+1) = \Gamma(z) \prod_{j=0}^{n} (z+j), \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.22}$$

Démonstration.

1. En utilisant (1.18) on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt \\ &= \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1, \end{aligned}$$

   d'où (1.19).

2. D'après (1.18) on a

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt.$$

   En intégrant par parties on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z), \end{aligned}$$

car $\lim_{t\to+\infty}(-t^z e^{-t}) = 0$.

3. Montrons par récurrence (1.21)

   - Supposons que $\Gamma(n+1) = n!$ et montrons que $\Gamma(n+2) = (n+1)!$.

     Posons dans (1.20), $z = n$ on trouve

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1).$$

   - En utilisant l'hypothèse on obtient (1.21).

4. Montrons par récurrence (1.22)

   - Pour $n = 0$, c'est (1.21).

   - Supposons que

$$\Gamma(z+n+1) = \Gamma(z)\prod_{j=0}^{n}(z+j),$$

     et montrons que

$$\Gamma(z+n+2) = \Gamma(z)\prod_{j=0}^{n+1}(z+j).$$

     En utilisant (1.20) on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(z+n+2) &= (z+n+1)\Gamma(z+n+1)\\ &= \Gamma(z+n+1)\Gamma(z)\prod_{j=0}^{n}(z+j)\\ &= \Gamma(z)\prod_{j=0}^{n+1}(z+j).\end{aligned}$$

■

Remarque 1.2.1. • $\lim_{z \overset{>}{\to} 0}\Gamma(z) = +\infty$,

- $\Gamma(-n) = \infty, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1.3 La factorielle décroissante

Définition 1.3.1. *Soient* $z \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ *et* Γ *la fonction définie par* (1.18).
On définit la factorielle décroissante par

$$z^{(k)} = z(z-1)\cdot \dots \cdot (z-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1}(z-j). \tag{1.23}$$

Remarque 1.3.1.

- *Si* $k \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$z^{(k)} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-k+1)}. \tag{1.24}$$

- *Si* $z-k+1=0$ *alors* $z^{(k)}=0$.

Proposition 1.3.1. *Soit* $z,\ k,\ l \in \mathbb{R}$ *et* Δ *l'opérateur défini par* (1.1), *alors*

$$\Delta z^{(k)} = kz^{(k-1)}, \tag{1.25}$$

$$(z-k)z^{(k)} = z^{(k+1)}, \tag{1.26}$$

$$k^{(k)} = \Gamma(k+1), \tag{1.27}$$

$$z^{(k+l)} = (z-k)^{(l)}z^{(k)}. \tag{1.28}$$

Démonstration.

1. En utilisant (1.1), (1.22) et (1.24), on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta z^{(k)} &= \Delta\left(\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-k+1)}\right)\\
&= \frac{\Gamma(z+2)}{\Gamma(z-k+2)} - \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-k+1)}\\
&= \frac{(z+1)\Gamma(z+1)}{(z-k+1)\Gamma(z-k+1)} - \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-k+1)}\\
&= \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-k+1)}\left[\frac{(z+1)}{(z-k+1)} - 1\right]\\
&= \frac{k\Gamma(z+1)}{(z-k+1)\Gamma(z-k+1)},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\Delta z^{(k)} &= k\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-k+2)},\\ &= kz^{(k-1)},\end{aligned}$$

d'où (1.25).

2. En utilisant (1.20) et (1.24), on obtient

$$\begin{aligned}(z-k)z^{(k)} &= (z-k)\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-k+1)}\\ &= (z-k)\frac{\Gamma(z+1)}{(z-k)\Gamma(z-k)}\\ &= \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-k)}\\ &= z^{(k+1)}.\end{aligned}$$

3. D'après la définition 1.3.1, on a

$$\begin{aligned}k^{(k)} &= \prod_{i=0}^{k-1}(k-i)\\ &= k(k-1).....2.1\\ &= k!\\ &= \Gamma(k+1).\end{aligned}$$

4. De (1.24), on a

$$z^{(k+l)} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1-k-l)}. \tag{1.29}$$

Multiplions et divisons (1.29) par $\Gamma(z-k+1)$, on trouve

$$z^{(k+l)} = \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(z-k+1)}{\Gamma(z+1-k-l)\Gamma(z-k+1)}.$$

En utilisant (1.24), on obtient (1.28).

■

Proposition 1.3.2. *Soit $n,\ k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$. Alors*

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n^{(k)}}{\Gamma(k+1)} = \frac{n^{(k)}}{k^{(k)}}. \tag{1.30}$$

Démonstration. En utilisant (1.21) et (1.24) on trouve

$$\begin{aligned} C_n^k = \binom{n}{k} &= \frac{n!}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \\ &= \frac{n^{(k)}}{\Gamma(k+1)}. \end{aligned}$$

D'ou (1.30) ■

Chapitre 2

Somme fractionnaire et opérateur de différence fractionnaire

Ce chapitre est consacré à donner les différentes compositions entre une somme fractionnaire et un opérateur de différence fractionnaire. Les notions de ce chapitre sont de [1,2,3,4,5,6,7].

2.1 Généralités

Définition 2.1.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.*

On définit la somme fractionnaire d'ordre α de f par

$$\Delta_b^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=b}^{x-\alpha} (x - \sigma(s))^{(\alpha-1)} f(s), \ \forall x \in \mathbb{N}_{b+\alpha} \tag{2.1}$$

où $\sigma(s) = s + 1$ et

$$\Delta_b^{-0} f(x) = f(x).$$

Remarque 2.1.1. *1. Si f est définie sur $\mathbb{N}_b$ alors $\Delta_b^{-\alpha} f$ est définie sur $\mathbb{N}_{b+\alpha}$.*

2. Si $\alpha = 1$, alors $\Delta_b^{-\alpha} f(x) = \Delta_b^{-1} f(x) = \sum\limits_{s=b}^{x-1} f(s)$.

Lemme 2.1.1. ([5]) *Soit $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et supposons que $\beta + \alpha + 1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$.*

Alors

$$\Delta^{-\alpha}x^{(\beta)} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}x^{(\beta+\alpha)}.$$

Lemme 2.1.2. ([5]) *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors*

$$\Delta_b^{-\alpha}f(b+\alpha-m) = \Delta_b^{-\alpha}f(b+\alpha-m+1) = \cdots = \Delta_b^{-\alpha}f(b+\alpha-1) = 0$$

et

$$\Delta_b^{-\alpha}f(b+\alpha) = f(b).$$

Définition 2.1.2. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ avec $m-1 < \alpha \leqslant m$.*

On définit l'opérateur de différence fractionnaire $\Delta_b^{\alpha}f : \mathbb{N}_{b+m-\alpha} \to \mathbb{R}$ d'ordre α par

$$\left(\Delta_b^{\alpha}f\right)(x) = \Delta_b^{\alpha}f(x) = \Delta^m\Delta_b^{-(m-\alpha)}f(x),\ \forall x \in \mathbb{N}_{b+m-\alpha}. \tag{2.2}$$

Proposition 2.1.1. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ avec $m-1 < \alpha \leq m$. Alors*

$$\Delta_b^{\alpha}f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\sum\limits_{s=b}^{x+\alpha}(x-\sigma(s))^{(-\alpha-1)}f(s),\ \alpha \notin \mathbb{N},\ x \in \mathbb{N}_{b+m-\alpha}, \\ \\ \Delta^m f(x),\ \alpha = m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Démonstration. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ avec $m-1 < \alpha \leq m$.

- Supposons que $\alpha = m$, alors

$$\begin{aligned} \Delta_b^{\alpha}f(x) &= \Delta^m\Delta_b^{-(m-\alpha)}f(x) \\ &= \Delta^m\Delta_b^{-0}f(x) \\ &= \Delta^m f(x). \end{aligned}$$

- Soit $m-1 < \alpha < m$, alors

$$\Delta_b^{\alpha}f(x) = \Delta^m\Delta_b^{-(m-\alpha)}f(x)$$

$$= \Delta^m \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{s=b}^{x-(m-\alpha)} (x-\sigma(s))^{(m-\alpha-1)} f(s) \right]$$
$$= \frac{\Delta^{m-1}}{\Gamma(m-\alpha)} \Delta \left[\sum_{s=b}^{x-(m-\alpha)} (x-\sigma(s))^{(m-\alpha-1)} f(s) \right].$$

De (1.17) et (1.25) on obtient

$$\Delta_b^\alpha f(x) = \frac{\Delta^{m-1}}{\Gamma(m-\alpha)} \left[\sum_{s=b}^{x-(m-\alpha)} ((m-\alpha-1)(x-\sigma(s))^{(m-\alpha-2)} f(s)) \right.$$
$$\left. + (x+1-\sigma(x+1-(m-\alpha)))^{(m-\alpha-1)} f(x+1-(m-\alpha)) \right].$$

En utilisant (1.27) et (1.20) on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta_b^\alpha f(x) &= \Delta^{m-1} \left[\sum_{s=b}^{x-(m-\alpha)} \frac{(x-\sigma(s))^{m-\alpha-2}}{\Gamma(m-\alpha-1)} f(s) + f(x+1-(m-\alpha)) \right] \\
&= \Delta^{m-1} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha-1)} \sum_{s=b}^{x+1-(m-\alpha)} (x-\sigma(s))^{(m-\alpha-2)} f(s) \right] \\
&= \Delta^{m-1} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha-1)} \sum_{s=b}^{x-(m-\alpha-1)} (x-\sigma(s))^{(m-\alpha-2)} f(s) \right] \\
&= \Delta^{m-2} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha-2)} \sum_{s=b}^{x-(m-\alpha-2)} (x-\sigma(s))^{(m-\alpha-3)} f(s) \right] \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \Delta^{m-m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha-m)} \sum_{s=b}^{x-(m-\alpha-m)} (x-\sigma(s))^{(m-\alpha-(m+1))} f(s) \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{s=b}^{x+\alpha} (x-\sigma(s))^{(-\alpha-1)} f(s).
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.2. *Si $c \in \mathbb{R}^*$ est une constante, alors $\Delta^\alpha c \neq 0$ où $\alpha \in \left]0,1\right[$.*

En effet

$$\Delta\Delta^{-(1-\alpha)} c = \Delta\Delta^{-(1-\alpha)} x^{(0)}.$$

En utilisant le Lemme 2.1.1 on trouve

$$\Delta^{\alpha} c = \Delta \frac{c}{\Gamma(2-\alpha)} x^{(1-\alpha)} = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} x^{(-\alpha)} \neq 0.$$

Exemple 2.1.1. *1.*

$$\begin{aligned}\Delta^{-1/2} x^{(0)} &= \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+1/2+1)} x^{(0+1/2)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-1/2)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1/2)}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\Delta^{-1/2} x^{(1)} &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} x^{(3/2)} \\ &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-1/2)}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\Delta^{-1/2} x^{(2)} &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(7/2)} x^{(5/2)} \\ &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(7/2)} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-3/2)}.\end{aligned}$$

.

.

.

.

4.

$$\begin{aligned}\Delta^{-1/2} x^{(n)} &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} x^{(n+1/2)} \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1/2)}.\end{aligned}$$

Théorème 2.1.1. *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *avec* $m-1<\alpha\leqslant m$. *Alors*

$$\Delta_b^{\alpha} f(x)=\sum_{k=0}^{\alpha+x-b}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x+\alpha-k),\ x\in\mathbb{N}_{b+m-\alpha} \tag{2.4}$$

et

$$\Delta_b^{-\alpha} f(x)=\sum_{k=0}^{-\alpha+x-b}(-1)^k\binom{-\alpha}{k}f(x-\alpha-k),\ x\in\mathbb{N}_{b+\alpha}. \tag{2.5}$$

Démonstration. Soient $\alpha>0$ avec $m-1<\alpha\leqslant m$.

Montrons (2.4).

Soit $x\in\mathbb{N}_{b+m-\alpha}$, alors $x=b+m-\alpha+n$ avec $n\in\mathbb{N}$. Donc

$$\Delta_b^{\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\sum_{s=b}^{x+\alpha}(x-\sigma(s))^{(-\alpha-1)}f(s).$$

En utilisant (1.21) on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta_b^{\alpha} f(x)&=\sum_{s=b}^{x+\alpha}\frac{\Gamma(x-s)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(x-s+\alpha+1)}f(s)\\
&=\sum_{s=b}^{b+n+m}\frac{\Gamma(b+m-\alpha+n-s)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(b+n+m-s+1)}f(s)\\
&=\sum_{s=0}^{n+m}\frac{\Gamma(n+m-\alpha-s)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+m-s+1)}f(s+b)\\
&=f(b+n+m)+\sum_{s=0}^{n+m-1}\frac{(n+m-1-s-\alpha)\dots(-\alpha)}{\Gamma(n+m-s+1)}f(s+b)\\
&=f(b+n+m)+\sum_{s=0}^{n+m-1}\frac{(-1)^{(m+n-s)}\alpha\dots(\alpha-(m+n-s)+1)}{\Gamma(n+m-s+1)}f(s+b)\\
&=\sum_{s=0}^{n+m}(-1)^{n+m-s}\binom{\alpha}{n+m-s}f(s+b)\\
&=\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(b+n+m-k)\\
&=\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f((b+m-\alpha+n)+\alpha-k)\\
&=\sum_{k=0}^{\alpha+x-b}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x+\alpha-k),
\end{aligned}$$

d'ou (2.4).

De la même manière on peut montrer (2.5). ■

Corollaire 2.1.1. *De* (2.5) *et* $\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k\binom{\alpha+k-1}{k}$ *on trouve*

$$\Delta_b^{-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{x-\alpha-b} \binom{\alpha+k-1}{k} f(x-\alpha-k). \tag{2.6}$$

Lemme 2.1.3. ([5])

- *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$, *on a*

$$\Delta_{b+\beta}^{-\alpha}(x-b)^{(\beta)} = \beta^{(-\alpha)}(x-b)^{(\beta+\alpha)},\ \forall\, x \in \mathbb{N}_{b+\beta+\alpha} \tag{2.7}$$

et

$$\Delta_{b+\beta}^{\alpha}(x-b)^{(\beta)} = \beta^{(\alpha)}(x-b)^{(\beta-\alpha)},\ \forall\, x \in \mathbb{N}_{b+\beta+m-\alpha}. \tag{2.8}$$

Démonstration. 1. Soit $\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$.

- Supposons que $\alpha = 1$, donc d'aprés (1.25) on a

$$\Delta_{b+\beta}^{-1}(x-b)^{(\beta)} = \Delta_{b+\beta}^{-1}\Delta\left(\frac{(x-b)^{(\beta+1)}}{\beta+1}\right).$$

En utilisant la définition de l'opérateur Δ et la Remarque 2.1.1 on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_{b+\beta}^{-1}(x-b)^{(\beta)} &= \sum_{s=b+\beta}^{x-1}\left(\frac{(s+1-b)^{(\beta+1)}}{\beta+1} - \frac{(s-b)^{(\beta+1)}}{\beta+1}\right)\\ &= \frac{(x-b)^{(\beta+1)}}{\beta+1} - \frac{\beta^{(\beta+1)}}{\beta+1}\\ &= \beta^{(-1)}(x-b)^{(\beta+1)}.\end{aligned}$$

- Maintenant supposons que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\alpha \neq 1$ et on définit les deux fonctions g_1 et g_2 par

$$g_1(x) = \Delta_{b+\beta}^{-\alpha}(x-b)^{(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-1)}(s-b)^{(\beta)},$$

et

$$g_2(x) = \beta^{(-\alpha)}(x-b)^{(\beta+\alpha)}, \ \forall x \in \mathbb{N}_{b+\beta+\alpha}.$$

Nous allons montrer que g_1 et g_2 sont des solutions du problème suivant

$$(x - b - (\beta+\alpha) + 1)\Delta g(x) = (\beta+\alpha)g(x), \ x \in \mathbb{N}_{b+\beta+\alpha} \tag{2.9}$$

$$g(b+\beta+\alpha) = \Gamma(\beta+1). \tag{2.10}$$

On a

$$\begin{aligned} g_1(b+\beta+\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=b+\beta}^{b+\beta} (b+\beta+\alpha-\sigma(s))^{(\alpha-1)}(s-b)^{(\beta)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\alpha-1)^{(\alpha-1)}\beta^{(\beta)}. \end{aligned}$$

En utilisant (1.27) on obtient

$$g_1(b+\beta+\alpha) = \Gamma(\beta+1).$$

On a aussi

$$g_2(b+\beta+\alpha) = \beta^{(-\alpha)}(\beta+\alpha)^{(\beta+\alpha)}.$$

En utilisant (1.24) et (1.27) on trouve

$$g_2(b+\beta+\alpha) = \Gamma(\beta+1),$$

alors g_1 et g_2 vérifient (2.10).

Montrons Maintenant que g_1 et g_2 vérifiant l'equation aux différences (2.9).

Soient $x \in \mathbb{N}_{b+\beta+\alpha}$, en utilisant (1.17) on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta g_1(x) &= \Delta\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-1)}(s-b)^{(\beta)}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(\alpha-1)(x-\sigma(s))^{(\alpha-2)}(s-b)^{(\beta)} \\
&+ \frac{(x+1-(x+2-\alpha))^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}(x+1-\alpha-b)^{(\beta)}.
\end{aligned}$$

De (1.24) on trouve

$$\Delta g_1(x) = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-2)}(s-b)^{(\beta)} + (x+1-\alpha-b)^{(\beta)}. \tag{2.11}$$

D'autre part, en utilisant (1.26) on obtient

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s)-(\alpha-2))(x-\sigma(s))^{(\alpha-2)}(s-b)^{(\beta)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}\Big[(x-b-(\beta+\alpha)+1)-(s-b-\beta)\Big](x-\sigma(s))^{(\alpha-2)}(s-b)^{(\beta)} \\
&= \frac{x-b-(\beta+\alpha)+1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-2)}(s-b)^{(\beta)} \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-2)}(s-b)^{(\beta+1)} \\
&= h(x)-k(x),
\end{aligned}$$

où

$$h(x) = \frac{x-b-(\beta+\alpha)+1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-2)}(s-b)^{(\beta)} \tag{2.12}$$

et

$$k(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-2)}(s-b)^{(\beta+1)}. \tag{2.13}$$

De (2.11) on obtient

$$(x-b-(\beta+\alpha)+1)\Delta g_1(x) = (x-b-(\beta+\alpha)+1)\frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \times \sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-2)}(s-b)^{(\beta)} + (x+1-\alpha-b)^{(\beta)}.$$

En utilisant (1.26) et (2.12) on trouve

$$(x-b-(\beta+\alpha)+1)\Delta g_1(x) = (\alpha-1)h(x) + (x+1-\alpha-b)^{(\beta+1)}. \tag{2.14}$$

De (2.13) et (1.25) on obtient

$$k(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\sum_{s=b+\beta}^{(x-\alpha+1)-1}(s-b)^{(\beta+1)}\Delta\left(-\frac{(x-s)^{(\alpha-1)}}{\alpha-1}\right)\right].$$

En appliquant le Lemme 1.1.2, (1.25) et (1.26) on trouve

$$\begin{aligned}
k(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\left((s-b)^{(\beta+1)}\left(-\frac{(x-s)^{(\alpha-1)}}{\alpha-1}\right)\right)\Bigg|_{s=b+\beta}^{s=x-\alpha+1} \\
&- \sum_{s=b+\beta}^{(x-\alpha+1)-1}\left(-\frac{(x-\sigma(s))^{(\alpha-1)}}{\alpha-1}(\beta+1)(s-b)^{(\beta)}\right)\Bigg] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[-\frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}(x-\alpha+1-b)^{(\beta+1)} \\
&+ \frac{\beta+1}{\alpha-1}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-1)}(s-b)^{(\beta)}\Bigg] \\
&= \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{\beta+1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-1)}(s-b)^{(\beta)} - (x-\alpha+1-b)^{(\beta+1)}\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$(\beta+1)g_1(x) - (\alpha-1)k(x) = (x+1-\alpha-b)^{(\beta+1)}. \tag{2.15}$$

De (2.14) et (2.15) on obtient

$$\begin{aligned}(x-b-(\beta+\alpha)+1)\Delta g_1(x) &= (\alpha-1)h(x)+(\beta+1)g_1(x)-(\alpha-1)k(x)\\ &= (\alpha-1)g_1(x)+(\beta+1)g_1(x)\\ &= (\beta+\alpha)g_1(x).\end{aligned}$$

D'où g_1 satisfait le problème (2.9)-(2.10).

Maintenant montrons que g_2 satisfait aussi l'équation aux différences (2.9). En appliquant (1.25) on obtient

$$\begin{aligned}(x-b-(\beta+\alpha)+1)\Delta g_2(x) &= (x-b-(\beta+\alpha)+1)\left[\beta^{(-\alpha)}(\beta+\alpha)(x-b)^{(\beta+\alpha-1)}\right]\\ &= (\beta+\alpha)\beta^{(-\alpha)}\left[(x-b-(\beta+\alpha-1))(x-b)^{(\beta+\alpha-1)}\right]\\ &= (\beta+\alpha)\beta^{(-\alpha)}(x-b)^{(\beta+\alpha)}\\ &= (\beta+\alpha)g_2(x).\end{aligned}$$

Alors g_1 et g_2 vérifient la même équation avec une condition initiale, donc $g_1 = g_2$ en $\mathbb{N}_{b+\beta+\alpha}$.

2. Montrons (2.8).

   Pour tout $x \in \mathbb{N}_{b+\beta+m-\alpha}$, on a

$$\begin{aligned}\Delta_{b+\beta}^{\alpha}(x-b)^{(\beta)} &= \Delta^m\left[\Delta_{b+\beta}^{-(m-\alpha)}(x-b)^{(\beta)}\right]\\ &= \Delta^m\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(x-b)^{(\beta+m-\alpha)}\right],\end{aligned}$$

   en appliquant (2.7) on trouve

$$\Delta_{b+\beta}^{\alpha}(x-b)^{(\beta)} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\left((\beta+m-\alpha)\cdots(\beta+1-\alpha)\right)(x-b)^{(\beta-\alpha)}.$$

En utilisant (1.25) on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_{b+\beta}^{\alpha}(x-b)^{(\beta)} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-b)^{(\beta-\alpha)} \\ &= \beta^{(\alpha)}(x-b)^{(\beta-\alpha)}.\end{aligned}$$

■

2.2 Composition de deux sommes fractionnaires

Théorème 2.2.1. *Soient* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, *alors*

$$\Delta_{b+\beta}^{-\alpha}\Delta_{b}^{-\beta}f(x) = \Delta_{b}^{-\alpha-\beta}f(x) = \Delta_{b+\alpha}^{-\beta}\Delta_{b}^{-\alpha}f(x),\ \forall x \in \mathbb{N}_{b+\alpha+\beta}. \tag{2.16}$$

Démonstration. Soit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_{+}^{*}$.

En utilisant la définition de la somme fractionnaire on trouve

$$\begin{aligned}\Delta_{b+\beta}^{-\alpha}\Delta_{b}^{-\beta}f(x) &= \Delta_{b+\beta}^{-\alpha}\left[\Delta_{b}^{-\beta}f(x)\right],\ x \in \mathbb{N}_{b+\alpha+\beta} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-1)}\left(\Delta_{b}^{-\beta}f(s)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-1)}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{r=b}^{s-\beta}(s-\sigma(r))^{(\beta-1)}f(r)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{s=b+\beta}^{x-\alpha}\sum_{r=b}^{s-\beta}(x-\sigma(s))^{(\alpha-1)}(s-\sigma(r))^{(\beta-1)}f(r) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{r=b}^{x-(\beta+\alpha)}\sum_{s=r+\beta}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-1)}(s-\sigma(r))^{(\beta-1)}f(r).\end{aligned}$$

Soit $y = s-\sigma(r)$, alors si $s = x-\alpha,\ y = x-\alpha-\sigma(r)$ et $x-\sigma(s) = x-y-r-2$. Donc

$$
\begin{aligned}
\Delta_{b+\beta}^{-\alpha}\Delta_b^{-\beta}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{r=b}^{x-(\beta+\alpha)}\left[\sum_{y=r+\beta-\sigma(r)}^{x-\alpha-\sigma(r)}(x-y-r-2)^{(\alpha-1)}y^{(\beta-1)}\right]f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{r=b}^{x-(\beta+\alpha)}\left[\sum_{y=\beta-1}^{x-\alpha-r-1}\left[x-\sigma(r)-\sigma(y)\right]^{(\alpha-1)}y^{(\beta-1)}\right]f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{r=b}^{x-(\alpha+\beta)}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{y=\beta-1}^{x-\sigma(r)-\alpha}\left[x-\sigma(r)-\sigma(y)\right]^{(\alpha-1)}y^{(\beta-1)}\right]f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{r=b}^{x-(\alpha+\beta)}\left(\Delta_{\beta-1}^{-\alpha}(t^{(\beta-1)})|_{x-r-1}f(r)\right).
\end{aligned}
$$

En utilisant le Lemme 2.1.3 on obtient

$$
\begin{aligned}
\Delta_{b+\beta}^{-\alpha}\Delta_b^{-\beta}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{r=b}^{x-(\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-r-1)^{(\beta-1+\alpha)}f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\sum_{r=b}^{x-(\alpha+\beta)}(x-\sigma(r))^{((\alpha+\beta)-1)}f(r)\\
&= \Delta_b^{-(\alpha+\beta)}f(x).
\end{aligned}
$$

Comme α et β sont arbitraires, donc

$\Delta_{b+\beta}^{-\alpha}\Delta_b^{-\beta}f(x) = \Delta_b^{-\alpha-\beta}f(x) = \Delta_{b+\alpha}^{-\beta}\Delta_b^{-\alpha}f(x), \ \forall x \in \mathbb{N}_{b+\alpha+\beta}.$ ∎

2.3 Composition d'un opérateur de différence fractionnaire avec une somme fractionnaire

Lemme 2.3.1. *Soient pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta > 0$ avec $n-1 < \beta \leq n$. Alors*

$$\Delta^k\Delta_b^{-\beta}f(x) = \Delta_b^{k-\beta}f(x), \ x \in \mathbb{N}_{b+\beta}. \tag{2.17}$$

$$\Delta^k\Delta_b^{\beta}f(x) = \Delta_b^{k+\beta}f(x), \ x \in \mathbb{N}_{b+n-\beta}. \tag{2.18}$$

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta > 0$, avec $n-1 < \beta \leq n$.

cas 1 : Supposons que $\beta = n$, alors pour tout $x \in \mathbb{N}_{b+1}$ on a

$$\Delta\Delta_b^{-1} f(x) = \Delta \left[\sum_{s=b}^{x-1} f(s)\right].$$

En utilisant (1.11) on trouve

$$\Delta\Delta_b^{-1} f(x) = f(x).$$

Maintenant soit $k \in \mathbb{N}$, donc

$$\begin{aligned}
\Delta^k \Delta_b^{-k} f(x) &= \Delta^{k-1}\left[\Delta\Delta_{b+k-1}^{-1}\left(\Delta_b^{-(k-1)} f(x)\right)\right] \\
&= \Delta^{k-1}\Delta_b^{-(k-1)} f(x) \\
&= \cdots\cdots \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{N}_{b+n}$,

$$\begin{cases}
\Delta^k \Delta_b^{-n} f(x) = \Delta^{k-n}\left[\Delta^n \Delta_b^{-n} f(x)\right] = \Delta^{k-n} f(x), \text{ si } k \geq n, \\
\\
\Delta^k \Delta_b^{-n} f(x) = \Delta^k \Delta_{b+n-k}^{-k}\left[\Delta_b^{-(n-k)} f(x)\right] = \Delta_b^{k-n} f(x), \text{ si } k < n.
\end{cases}$$

Pour (2.18). Il est clair que les opérateurs de différence d'ordre entier commutent.

cas 2 : Supposons que $n-1 < \beta < n$. Tout d'abord montrons que

$$\Delta\Delta_b^{\beta} f(x) = \Delta_b^{1+\beta} f(x), \forall x \in \mathbb{N}_{b+n-\beta}.$$

En utilisant (2.3) on trouve

$$\Delta\Delta_b^{\beta} f(x) = \Delta\left[\frac{1}{\Gamma(-\beta)} \sum_{s=b}^{x+\beta} (x-\sigma(s))^{(-\beta-1)} f(s)\right].$$

En appliquant (1.17) et(1.26) on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta_b^{\beta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \sum_{s=b}^{x+\beta} (-\beta-1)(x-\sigma(s))^{(-\beta-2)} f(s) + f(x+\beta+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\beta-1)} \sum_{s=b}^{x+\beta} (x-\sigma(s))^{(-\beta-2)} f(s) + f(x+\beta+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\beta-1)} \sum_{s=b}^{x+\beta+1} (x-\sigma(s))^{(-\beta-2)} f(s) \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\beta-1)} \sum_{s=b}^{x-(-\beta-1)} (x-\sigma(s))^{(-\beta-1)-1} f(s) \\
&= \Delta_b^{-(-\beta-1)} f(x) \\
&= \Delta_b^{1+\beta} f(x).
\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\Delta^k \Delta_b^{\beta} f(x) &= \Delta^{k-1} \left[\Delta\Delta_b^{\beta} f(x) \right] \\
&= \Delta^{k-1} \Delta_b^{1+\beta} f(x) \\
&= \cdots\cdots\cdots \\
&= \Delta_b^{k+\beta} f(x), \ \forall x \in \mathbb{N}_{b+n-\beta}.
\end{aligned}$$

D'où (2.18).

De la même manière on peut montrer (2.17). ■

Théorème 2.3.1. *Soient $\alpha,\ \beta > 0$ avec $m-1 < \alpha \leq m$. Alors*

$$\Delta_{b+\beta}^{\alpha} \Delta_b^{-\beta} f(x) = \Delta_b^{\alpha-\beta} f(x), \ \forall x \in \mathbb{N}_{b+\beta+m-\alpha}. \tag{2.19}$$

Démonstration. soient $\alpha,\ \beta > 0$ avec $m-1 < \alpha \leq m$ et $x \in \mathbb{N}_{b+\beta+m-\alpha}$,

$$\begin{aligned}
\Delta_{b+\beta}^{\alpha} \Delta_b^{-\beta} f(x) &= \Delta^m \Delta_{b+\beta}^{-(m-\alpha)} \Delta_b^{-\beta} f(x) \\
&= \Delta^m \Delta_b^{-(m-\alpha+\beta)} f(x).
\end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.2.1 on obtient

$$\Delta_{b+\beta}^{\alpha}\Delta_b^{-\beta}f(x) = \Delta_b^{m-(m-\alpha+\beta)}f(x).$$

En utilisant le Lemme 2.3.1 on trouve

$$\Delta_{b+\beta}^{\alpha}\Delta_b^{-\beta}f(x) = \Delta_b^{\alpha-\beta}f(x).$$

$\blacksquare$

2.4 Composition d'une somme fractionnaire avec un opérateur de différence fractionnaire

Théorème 2.4.1. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha,\ \beta > 0$ avec $n-1 < \beta \leq n$. Alors*

$$\Delta_b^{-\alpha}\Delta^k f(x) = \Delta_b^{k-\alpha}f(x) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Delta^j f(b)}{\Gamma(\alpha-k+j+1)}(x-b)^{(\alpha-k+j)},\ \forall x \in \mathbb{N}_{b+\alpha}, \tag{2.20}$$

et

$$\Delta_{b+n-\beta}^{-\alpha}\Delta_b^{\beta}f(x) = \Delta_b^{\beta-\alpha}f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_b^{j-(n-\beta)}f(b+n-\beta)}{\Gamma(\alpha-n+j+1)}(x-b-n+\beta)^{(\alpha-n+j)},\ \forall x \in \mathbb{N}_{b+n-\beta+\alpha}. \tag{2.21}$$

Démonstration. 1. Montrons (2.20)

i) Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \{1, 2, 3, ..., k-1\}$.

En utilisant la Définition 2.1.1 on trouve

$$\begin{aligned}\Delta_b^{-\alpha}\Delta^k f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b}^{x-\alpha}(x-\sigma(s))^{(\alpha-1)}\left[\Delta^k f(s)\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=b}^{(x-\alpha+1)-1}(x-\sigma(s))^{(\alpha-1)}\Delta\left(\Delta^{k-1}f(s)\right).\end{aligned}$$

En appliquant (1.16) on obtient

$$
\begin{aligned}
\Delta_b^{-\alpha}\Delta^k f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[(x-s)^{(\alpha-1)}\Delta^{k-1}f(s)\Big|_{s=b}^{s=x-\alpha+1}\right.\\
&\left.-\sum_{s=b}^{x-\alpha}\left(-(\alpha-1)(x-\sigma(s))^{(\alpha-2)}\Delta^{k-1}f(s)\right)\right]\\
&= \Delta^{k-1}f(x-\alpha+1)-\frac{(x-b)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{k-1}f(b)\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{s=b}^{x-\alpha}\left((x-\sigma(s))^{(\alpha-2)}\Delta^{k-1}f(s)\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{s=b}^{x-\alpha+1}\left((x-\sigma(s))^{(\alpha-2)}\Delta^{k-1}f(s)\right)-\frac{\Delta^{k-1}f(b)}{\Gamma(\alpha)}(x-b)^{(\alpha-1)}\\
&= \Delta_b^{-(\alpha-1)}\left[\Delta^{k-1}f(x)\right]-\frac{\Delta^{k-1}f(b)}{\Gamma(\alpha)}(x-b)^{(\alpha-1)}\\
&= \Delta_b^{1-\alpha}\Delta^{k-1}f(x)-\frac{\Delta^{k-1}f(b)}{\Gamma(\alpha)}(x-b)^{(\alpha-1)}\\
&= \Delta_b^{2-\alpha}\Delta^{k-2}f(x)-\frac{\Delta^{k-1}f(b)}{\Gamma(\alpha)}(x-b)^{(\alpha-1)}-\frac{\Delta^{k-2}f(b)}{\Gamma(\alpha-1)}(x-b)^{(\alpha-2)}\\
&= \cdots\cdots\cdots\\
&= \Delta_b^{k-\alpha}f(x)-\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta^{k-i}f(b)}{\Gamma(\alpha-i+1)}(x-b)^{(\alpha-i)},\ \forall x\in\mathbb{N}_{b+\alpha}.
\end{aligned}
$$

D'ou (2.20).

ii) Supposons que $k\in\mathbb{N}$, $\alpha>0$ avec $\alpha\in\{1,2,3,......,k-1\}$, alors $k-\alpha\in\mathbb{N}$.

Donc pour $x\in\mathbb{N}_{b+\alpha}$ on a

$$\Delta_b^{-\alpha}\Delta^k f(x)=\Delta^{k-\alpha}\Delta_{b+\alpha}^{-(k-\alpha)}\Delta_b^{-\alpha}\Delta^k f(x).$$

En utilisant le Théorème 2.3.1 on obtient

$$\Delta_b^{-\alpha}\Delta^k f(x)=\Delta^{k-\alpha}\left[\Delta_b^{-k}\Delta^k f(x)\right].$$

En appliquant le Théorème 2.2.1 on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta_b^{-\alpha}\Delta^k f(x) &= \Delta^{k-\alpha}\left[f(x) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Delta^j f(b)}{\Gamma(j+1)}(x-b)^{(j)}\right].\\
&= \Delta^{k-\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Delta^j f(b)}{\Gamma(j+1)}\left[\Delta^{k-\alpha}(x-b)^{(j)}\right]\\
&= \Delta^{k-\alpha} f(x) - \sum_{j=k-\alpha}^{k-1}\frac{\Delta^j f(b)}{\Gamma(j+1)}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-k+\alpha)}(x-b)^{(j-k+\alpha)}\\
&= \Delta^{k-\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Delta^j f(b)}{\Gamma(j+1-k+\alpha)}(x-b)^{(j-k+\alpha)}.
\end{aligned}$$

D'où (2.20).

2. Montrons maintenant (2.21).

Soit $\alpha,\ \beta > 0$ avec $n-1 < \beta \leq n$. Supposons que $g(x) = \Delta_b^{-(n-\beta)} f(x)$ et $a = b+n-\beta$, alors pour $x \in \mathbb{N}_{b+n-\beta+\alpha}$ on a

$$\Delta_{b+n-\beta}^{-\alpha}\Delta_b^{\beta} f(x) = \Delta_{b+n-\beta}^{-\alpha}\Delta^n(g(x)).$$

En appliquant (2.20) on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_{b+n-\beta}^{-\alpha}\Delta_b^{\beta} f(x) &= \Delta_{b+n-\beta}^{n-\alpha} g(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta^j g(a)}{\Gamma(\alpha-n+j+1)}(x-a)^{(\alpha-n+j)}\\
&= \Delta_{b+n-\beta}^{n-\alpha}\Delta_b^{-(n-\beta)} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta^j\Delta_b^{-(n-\beta)} f(a)}{\Gamma(\alpha-n+j+1)}(x-a)^{(\alpha-n+j)}.
\end{aligned}$$

En appliquons le Théorème 2.3.1 on trouve (2.21).

■

Remarque 2.4.1. • *Si $k=1$, alors (2.20) devient*

$$\Delta_b^{-\alpha}\Delta f(x) = \Delta_b^{1-\alpha} f(x) - \frac{f(b)}{\Gamma(\alpha)}(x-b)^{(\alpha-1)},\ \forall x \in \mathbb{N}_{b+\alpha}.$$

- *Le Théorème 2.3.1 permet d'écrire* (2.21) *sous la forme*

$$\Delta_{b+n-\beta}^{-\alpha}\Delta_b^{\beta}f(x) = \Delta_{b+\alpha}^{\beta}\Delta_b^{-\alpha}f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_b^{j-(n-\beta)}f(b+n-\beta)}{\Gamma(\alpha-n+j+1)}(x-b-n+\beta)^{(\alpha-n+j)},$$

$$\forall x \in \mathbb{N}_{b+n-\beta+\alpha}.$$

Plus généralement pour tout $n-1<\beta\leq n$, *nous avons pour* $j\in\{0,.....,n-1\}$

$$\begin{aligned}
\Delta_b^{j-(n-\beta)}f(b+n-\beta) &= \frac{1}{\Gamma(n-\beta-j)}\sum_{s=b}^{\alpha+j-(n-\beta)}(x-\sigma(s))^{(n-\beta-j-1)}f(s)|_{x=b+n-\beta}\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\beta-j)}\sum_{s=b}^{b+j}(b+n-\beta-\sigma(s))^{(n-\beta-j-1)}f(s)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\beta-j)}\sum_{k=0}^{j}(n-\beta-\sigma(k))^{(n-\beta-j-1)}f(k+b)\\
&= \sum_{k=0}^{j}\binom{n-\beta-\sigma(k)}{j-k}f(k+b).
\end{aligned}$$

2.5 Composition de deux opérateurs fractionnaires

Théorème 2.5.1. *Soient* $\alpha,\ \beta>0$ *avec* $n-1<\beta\leq n$ *et* $m-1<\alpha\leq m$. *Alors si* $x\in\mathbb{N}_{b+n-\beta+m-\alpha}$ *on a*

$$\Delta_{b+n-\beta}^{\alpha}\Delta_b^{\beta}f(x) = \Delta_b^{\alpha+\beta}f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_b^{j-n+\beta}f(b+n-\beta)}{\Gamma(-\alpha-n+j+1)}(x-b-n+\beta)^{(-\alpha-n+j)}. \quad (2.22)$$

Démonstration. Posons que $\alpha,\ \beta>0$ avec $n-1<\beta\leq n$ et $m-1<\alpha\leq m$.

- Supposons que $\alpha=m$, alors d'après le Lemme 2.3.1 on a (2.22).

- Si $m-1<\alpha<m$, alors pour $x\in\mathbb{N}_{b+n-\beta+m-\alpha}$ on a

$$\begin{aligned}\Delta^{\alpha}_{b+n-\beta}\Delta^{\beta}_{b}f(x) &= \Delta^{m}\left[\Delta^{-(m-\alpha)}_{b+n-\beta}\Delta^{\beta}_{b}f(x)\right]\\ &= \Delta^{m}\left[\Delta_b^{-m+\alpha+\beta}f(x)\right.\\ &\left.-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_b^{j-n+\beta}f(b+n-\beta)}{\Gamma(m-\alpha-n+j+1)}(x-b-n+\beta)^{(m-\alpha-n+j)}\right],\end{aligned}$$

En utilisant (2.21) on trouve

$$\begin{aligned}\Delta^{\alpha}_{b+n-\beta}\Delta^{\beta}_{b}f(x) &= \Delta_b^{\alpha+\beta}f(x)\\ &-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_b^{j-n+\beta}f(b+n-\beta)}{\Gamma(m-\alpha-n+j+1)}\Delta^{m}\left[(x-b-n+\beta)^{(m-\alpha-n+j)}\right]\\ &= \Delta_b^{\alpha+\beta}f(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_b^{j-n+\beta}f(b+n-\beta)}{\Gamma(-\alpha-n+j+1)}(x-b-n+\beta)^{(-\alpha-n+j)},\end{aligned}$$

d'où (2.22).

De la même manière que la démonstration de (2.22) on peut trouver

$$\begin{aligned}&\Delta^{\beta}_{b+m-\alpha}\Delta^{\alpha}_{b}f(x) =\\ &\qquad\Delta_b^{\beta+\alpha}f(x)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\Delta_b^{j-m+\alpha}f(b+m-\alpha)}{\Gamma(-\beta-m+j+1)}(x-b-m+\alpha)^{(-\beta-m+j)}.\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.5.1. *Soient $\alpha,\ \beta>0$ avec $n-1<\beta\leq n$ et $m-1<\alpha\leq m$. Alors*

$$\begin{aligned}\Delta^{\alpha}_{b+n-\beta}\Delta^{\beta}_{b}f(x) &= \Delta^{\beta}_{b+m-\alpha}\Delta^{\alpha}_{b}f(x)\\ &+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\Delta_b^{j-m+\alpha}f(b+m-\alpha)}{\Gamma(-\beta-m+j+1)}(x-b-m+\alpha)^{(-\beta-m+j)}\\ &-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_b^{j-n+\beta}f(b+n-\beta)}{\Gamma(-\alpha-n+j+1)}(x-b-n+\beta)^{(-\alpha-n+j)},\ \forall x\in\mathbb{N}_{b+n-\beta+m-\alpha},\end{aligned}$$

et

$$\Delta_{b+m-\alpha}^{\alpha}\Delta_b^{\alpha}f(x)=\Delta_b^{2\alpha}f(x)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\Delta_b^{j-m+\alpha}f(b+m-\alpha)}{\Gamma(-\alpha-n+j+1)}(x-b-m+\alpha)^{(-\alpha-n+j)},\ \forall x\in\mathbb{N}_{b+2(m-\alpha)}.$$

Chapitre 3

Résolution de quelques équations aux différences fractionnaires

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la résolution de quelques équations aux différences fractionnaires. Les notions de ce chapitre sont de [1,5,8].

3.1 Résolution d'une équation aux différences fractionnaire d'ordre $\alpha \in (0, 1]$

On considère l'équation aux différences suivante :

$$\Delta^{\alpha}_{\alpha-1} y(x) = f(x),\ x \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

où $\alpha \in (0, 1]$ et $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle.

Théorème 3.1.1. *Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit la fonction $y : \mathbb{N}_{\alpha-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$y(x) = cx^{(\alpha-1)} + \Delta_0^{-\alpha} f(x), \tag{3.2}$$

où c est une constante réelle.

Alors y est une solution de l'équation (3.1).

Démonstration. En appliquant l'opérateur $\Delta^{\alpha}_{\alpha-1}$sur les deux membres de (3.2) on trouve

$$\begin{aligned}\Delta^{\alpha}_{\alpha-1}y(x) &= \Delta^{\alpha}_{\alpha-1}\left[cx^{\alpha-1} + \Delta_0^{-\alpha}f(x)\right] \\ &= c\Delta^{\alpha}_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \Delta^{\alpha}_{\alpha-1}\Delta_0^{-\alpha}f(x).\end{aligned}$$

En utilisant (2.8) et (2.19) on trouve

$$\begin{aligned}\Delta^{\alpha}_{\alpha-1}y(x) &= c(\alpha-1)^{(\alpha)}x^{(-1)} + \Delta_0^{\alpha-\alpha}f(x) \\ &= f(x).\end{aligned}$$

■

Théorème 3.1.2. *Toute solution de l'équation* (3.1) *s'écrit sous la forme* (3.2).

Démonstration. Soit $y : \mathbb{N}_{\alpha-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation (3.1). Alors

$$\Delta^{\alpha}_{\alpha-1}y(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

En appliquant $\Delta_0^{-\alpha}$ sur les deux membres de (3.3) on trouve

$$\Delta_0^{-\alpha}\Delta^{\alpha}_{\alpha-1}y(x) = \Delta_0^{-\alpha}f(x),\ \forall x \in \mathbb{N}_{\alpha-1}.$$

En utilisant le Théorème 2.4.1 on obtient

$$\Delta^{0}_{\alpha-1}y(x) - \frac{\Delta^{-(1-\alpha)}_{\alpha-1}y(0)x^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} = \Delta_0^{-\alpha}f(x),$$

alors

$$y(x) = \frac{\Delta^{\alpha-1}_{\alpha-1}y(0)x^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} + \Delta_0^{-\alpha}f(x).$$

Donc

$$y(x) = cx^{(\alpha-1)} + \Delta_0^{-\alpha} f(x),$$

avec $c = \frac{\Delta_{\alpha-1}^{\alpha-1}\, y(0)}{\Gamma(\alpha)}$. ■

Corollaire 3.1.1. *La fonction* $y : \mathbb{N}_{\alpha-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* (3.2) *avec* $c = \frac{\Delta_{\alpha-1}^{\alpha-1}\, y(0)}{\Gamma(\alpha)}$ *est la solution générale de* (3.1).

Maintenant on considère l'équation (3.1) *avec*

$$y(\alpha - 1) = c_1 \tag{3.4}$$

où $c_1 \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.1.3. *L'équation* (3.1) *admet une solution unique* $y : \mathbb{N}_{\alpha-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant la condition* (3.4).

Démonstration. Soit $y : \mathbb{N}_{\alpha-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation (3.1), alors d'après le Corollaire 3.1.1 on a

$$y(x) = cx^{(\alpha-1)} + \Delta_0^{-\alpha} f(x)$$

avec $c = \frac{\Delta_{\alpha-1}^{\alpha-1}\, y(0)}{\Gamma(\alpha)}$, donc

$$y(x) = \frac{\Delta_{\alpha-1}^{\alpha-1}\, y(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{(\alpha-1)} + \Delta_0^{-\alpha} f(x).$$

En utilisant (2.4) on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta_{\alpha-1}^{\alpha-1} y(0) &= \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{0+\alpha-1}{k} y(0+0+\alpha-1-k) \\
&= \binom{\alpha-1}{0} y(\alpha-1) \\
&= (\alpha-1) y(\alpha-1).
\end{aligned}$$

Alors $y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} y(\alpha-1) x^{(\alpha-1)} + \Delta_0^{-\alpha} f(x)$. ■

3.2 Existence et unicité de la solution d'une équation aux différences fractionnaire d'ordre $\alpha \in (0, 1]$

Cosidère l'équation aux diffirence suivante :

$$\Delta_b^\alpha y(x) = f(x + \alpha - 1, y(x + \alpha - 1)), \ x \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

$$\Delta_b^{\alpha-1} y(x)|_{x=0} = b_0, \ b_0 \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

où $\alpha \in$ (0,1], $f : \mathbb{N}_{\alpha-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle. En appliquant l'opérateur $\Delta_b^{-\alpha}$ sur les deux membres de (3.5) et en utilisant (2.20) pour k=1 on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta_b^{-\alpha}\Delta_b^\alpha y(x) &= \Delta_b^{-\alpha}\Delta\Delta_b^{-(1-\alpha)} y(x) \\
&= \Delta\Delta_b^{-\alpha}\Delta_b^{-(1-\alpha)} y(x) - \frac{x^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} y(\alpha - 1) \\
&= \Delta_b^{-\alpha} f(x + \alpha - 1, y(x + \alpha - 1)).
\end{aligned}$$

Donc on a le théorème suivant.

Théorème 3.2.1. *Le problème* (3.5)-(3.6) *admet l'unique solution suivante :*

$$y(x) = \frac{x^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} b_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{x-\alpha} (x - \sigma(s))^{(\alpha-1)} f(s + \alpha - 1, y(s + \alpha - 1)), \ \forall x \in \mathbb{N}_{\alpha-1}. \tag{3.7}$$

Exemple 3.2.1. *On considère le problème suivant :*

$$\Delta_b^\alpha y(x) = \lambda y(x + \alpha - 1), \ x \in \mathbb{N} \tag{3.8}$$

$$\Delta_b^{\alpha-1} y(x)|_{x=0} = b_0, \ b_0 \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

D'après le Théorème 3.2.1 on trouve que la solution de (3.8)-(3.9) *est*

$$y(x) = \frac{x^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} b_0 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{x-\alpha} (x - \sigma(s))^{(\alpha-1)} y(s + \alpha - 1).$$

3.3 Résolution d'une équation aux différences fractionnaire d'ordre $\alpha \in (m-1, m]$

On considère l'équation aux différences suivante :

$$\Delta^{\alpha}_{b+\alpha-m} y(x) = f(x),\ x \in \mathbb{N}_b, \tag{3.10}$$

où $f : \mathbb{N}_b \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle.

Théorème 3.3.1. *Soit $f : \mathbb{N}_b \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit la fonction $z : \mathbb{N}_{b+\alpha-m} \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$z(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i (x-b)^{(i+\alpha-m)} + \Delta_b^{-\alpha} f(x),\ x \in \mathbb{N}_{b+\alpha-m} \tag{3.11}$$

où $\beta_i \in \mathbb{R}$. Alors z est une solution de l'équation (3.10).

Démonstration. En appliquant l'opérateur $\Delta^{\alpha}_{b+\alpha-m}$sur les deux membres de (3.11) on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta^{\alpha}_{b+\alpha-m} z(x) &= \Delta^{\alpha}_{b+\alpha-m}\left[\sum_{i=0}^{m-1} \beta_i (x-b)^{(i+\alpha-m)} + \Delta_b^{-\alpha} f(x)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i \Delta^{\alpha}_{b+\alpha-m} (x-b)^{(i+\alpha-m)} + \Delta^{\alpha}_{b+\alpha-m}\Delta_b^{-\alpha} f(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{s=b+\alpha-m}^{x+\alpha} (x-\sigma(s))^{(-\alpha-1)} (s-b)^{(i+\alpha-m)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{s=b+\alpha-m}^{x+\alpha} (x-\sigma(s))^{(-\alpha-1)} \Delta_b^{-\alpha} f(s) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{s=b+\alpha-m+i}^{x+\alpha} (x-\sigma(s))^{(-\alpha-1)} (s-b)^{(i+\alpha-m)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{s=b+\alpha}^{x+\alpha} (x-\sigma(s))^{(-\alpha-1)} \Delta_b^{-\alpha} f(s) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i \Delta^{\alpha}_{b+i+\alpha-m} (x-b)^{(i+\alpha-m)} + \Delta^{\alpha}_{b+\alpha}\Delta_b^{-\alpha} f(x).
\end{aligned}$$

En appliquant le Théorème 2.2.1 et le Théorème 2.3.1 on obtient

$$\Delta^{\alpha}_{b+\alpha-m} z(x) = f(x).$$

■

Théorème 3.3.2. *Toute solution de l'équation* (3.10) *s'écrit sous la forme* (3.11).

Démonstration. Soit $y : \mathbb{N}_{b+\alpha-m} \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation (3.10). Alors

$$\Delta^{\alpha}_{b+\alpha-m} y(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{N}_b. \tag{3.12}$$

En appliquant $\Delta_b^{-\alpha}$ sur les deux membres de (3.12) on trouve

$$\Delta_b^{-\alpha} \Delta^{\alpha}_{b+\alpha-m} y(x) = \Delta_b^{-\alpha} f(x),\ \forall x \in \mathbb{N}_{b+\alpha-m}.$$

En utilisant le Théorème 2.4.1 on obtient

$$\Delta^{0}_{b+\alpha-m} y(x) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\Delta^{i-(m-\alpha)}_{b+\alpha-m} y(b)}{\Gamma(\alpha - m + i + 1)} (x-b)^{(\alpha-m+i)} = \Delta_b^{-\alpha} f(x),$$

alors

$$y(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{\Delta^{i+\alpha-m}_{b+\alpha-m} y(b)}{\Gamma(i+\alpha-m+1)} \right) (x-b)^{(i+\alpha-m)} + \Delta_b^{-\alpha} f(x).$$

Donc

$$y(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i (x-b)^{(i+\alpha-m)} + \Delta_b^{-\alpha} f(x),\ x \in \mathbb{N}_{b+\alpha-m}$$

avec $\beta_i = \frac{\Delta^{i+\alpha-m}_{b+\alpha-m}\, y(b)}{\Gamma(i+\alpha-m+1)}$, $i \in \{0, ...m-1\}$. ■

Corollaire 3.3.1. *La fonction* $z : \mathbb{N}_{b+\alpha-m} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* (3.11) *avec* $\beta_i = \frac{\Delta^{i+\alpha-m}_{b+\alpha-m}\, y(b)}{\Gamma(i+\alpha-m+1)}$, $i \in \{0, ...m-1\}$ *est la solution générale de* (3.10).

Maintenant on considère l'équation (3.10) *avec*

$$\Delta^{i}\, y(b+\alpha-m) = \theta_i,\ i \in \{0, 1, ...m-1\},\ \theta_i \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Théorème 3.3.3. *L'équation* (3.10) *admet une solution unique* $y : \mathbb{N}_{b+\alpha-m} \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant la condition* (3.13).

Démonstration. Soit $y : \mathbb{N}_{b+\alpha-m} \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation (3.10), alors d'après le Corollaire 3.3.1 on a

$$y(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i (x-b)^{(i+\alpha-m)} + \Delta_b^{-\alpha} f(x), \ x \in \mathbb{N}_{b+\alpha-m},$$

avec $\beta_i = \frac{\Delta_{b+\alpha-m}^{i+\alpha-m} y(b)}{\Gamma(i+\alpha-m+1)}$, $i \in \{0, ...m-1\}$.
Déterminant $\Delta_{b+\alpha-m}^{i+\alpha-m} y(b)$.
En utilisant (2.4) on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta_{b+\alpha-m}^{i+\alpha-m} y(b) &= \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{i+\alpha-m}{k} y(b+i+\alpha-m-k) \\
&= \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{i+\alpha-m}{k} y((b+\alpha-m)+(i-k)).
\end{aligned}$$

En combinant (1.5) et (1.7) on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_{b+\alpha-m}^{i+\alpha-m} y(b) &= \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{i+\alpha-m}{k} \sum_{p=0}^{i-k} \binom{i-k}{p} \Delta^p y(b+\alpha-m) \\
&= \sum_{k=0}^{i} \sum_{p=0}^{i-k} (-1)^k \binom{i+\alpha-m}{k} \binom{i-k}{p} \theta_p \\
&= \sum_{p=0}^{i} \sum_{k=0}^{i-p} (-1)^k \binom{i-k-m}{p} \binom{i-k}{p} \theta_p \\
&= \sum_{p=0}^{i} \sum_{k=0}^{i-p} (-1)^k \frac{\Gamma(i+\alpha-m+1)}{k!\Gamma(i+\alpha-m-k+1)} \frac{(i-k)!}{p!(i-k-p)!} \theta_p \\
&= \Gamma(i+\alpha-m+1) \\
&\times \sum_{p=0}^{i} \sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} \frac{\Gamma(i-k+1)}{\Gamma(i-k+1+\alpha-m)} \frac{i!}{p!(i-p)!} \frac{(i-p)!}{k!(i-p-k)!} \theta_p \\
&= \Gamma(i+\alpha-m+1) \sum_{p=0}^{i} \sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} (i-k)^{(m-\alpha)} \binom{i}{p} \binom{i-p}{k} \theta_p,
\end{aligned}$$

d'où

$$\beta_i = \sum_{p=0}^{i} \left(\sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} (i-k)^{(m-\alpha)} \binom{i}{p} \binom{i-p}{k} \right) \theta_p, \; i \in \{0, 1, ...m-1\}. \tag{3.14}$$

■

Exemple 3.3.1. *Considérons l'équation suivante*

$$\Delta_{-0,3}^{2,7} \, y(x) = x^{(2)}, \tag{3.15}$$

où

$$y(-0,3) = 2, \; \Delta y(-0,3) = 3, \; \Delta^2 y(-0,3) = 5. \tag{3.16}$$

On a l'équation (3.15) *est de la forme* (3.12) *avec* $b = 0, \; m = 3, \; \alpha = 2,7$ *et* $f(x) = x^{(2)}$. *En utilisant* (3.14) *on obtient*

$$\beta_0 = 0^{(0,3)} \, \theta_0.$$

$$\beta_1 = 1^{(0,3)} \, \theta_1 - (0^{(0,3)} - 1^{(0,3)}) \, \theta_0.$$

$$\beta_2 = \frac{2^{(0,3)}}{2} 0^{(0,3)} \theta_2 - (1^{(0,3)} - 2^{(0,3)}) \, \theta_1 + \frac{0^{(0,3)} - 2 \times 1^{(0,3)} + 2^{(0,3)}}{2} \, \theta_0.$$

D'après (3.13) *on trouve*

$$\Delta^0 y(-0,3) = \theta_0 = 2, \; \theta_1 = 3, \; \theta_2 = 5.$$

Donc

$$\beta_0 \simeq 1,541, \; \beta_1 \simeq 3,962, \; \beta_2 \simeq 3,684.$$

Alors la solution de (3.15) *est*

$$y(x) = \sum_{i=0}^{2} \beta x^{(i-0,3)} + \Delta_0^{-2,7} x^{(2)}.$$

Maintenant, on va déterminer $\Delta_0^{-2,7} x^{(2)}$. *En utilisant la définition de la somme fractionnaire* $\Delta_0^{-2,7}$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
\Delta_0^{-2,7} x^{(2)} &= \frac{1}{\Gamma(2,7)} \sum_{s=0}^{x-2,7} (x-\sigma(s))^{(1,7)} s^{(2)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(2,7)} \sum_{s=2}^{x-2,7} (x-\sigma(s))^{(1,7)} s^{(2)} \\
&= \Delta_2^{-2,7} x^{(2)} \\
&= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5,7)} x^{(4,7)} \\
&\simeq 0,0276 x^{(4,7)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$y(x) = 1,541\, x^{(-0,3)} + 3,962\, x^{(0,7)} + 3,684\, x^{(1,7)} + 0,0276\, x^{(4,7)}, \ \forall x \in \mathbb{N}_{-0,3}.$$

Conclusion

Dans ce travaill, on a commencé dans le premier chapitre, par donner les notions préliminaires utilisées dans le calcul de différence, ensuite dans le deuxième chapitre on a présenté les différentes compositions entre une somme fractionnaire et un opérateur de différence fractionnaire.

Enfin on a donné des résultats d'existence et d'unicité de quelques équations aux différences d'ordre fractionnaires.

Bibliographie

[1] F. M. Atici, P. W. Eloe, **Initial Value Problems in Discrete Fractional Calculus**, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137 (2009) 981-989.

[2] F. M. Atici, S. Sengul, **Modeling with fractional difference equations**. *J. Math. Anal. App.*, 369 (2010) 1-9.

[3] M. Bohner, A. Peterson, **Dynamic Equation on Time Scales Abstract and Applied Analysis**, *Art. id 58373.*, (2007), 24 PP.

[4] S. Elaydi, **An Introduction to Difference Equations**, *3rd ed, Springer.*, New York, 1999.

[5] M. Holm, **Sum and Difference Compositions in Discrete fractional Calculus**. *CUBO, vol. 13, N$\underline{0}$ 03.*, (2011) 153-184.

[6] W. G. Kelley, A. C. Peterson, **Difference Equations : An Introduction With Application**, *Harcourt/Academic Press, San Diego, CA.*, 2001.

[7] M. Marjan, F. A. Wahbi, **The Delta Discrete Fractional Calculus**, *Int. J. C. Eng. Tech.*, 9(13) (2018) 1905-1912.

[8] K. S. Miller, B. Ross, **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations**, *John Wiley and Sons, Inc.*, New York, 1993.