

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

N d'ordre :

N de séries :

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques Appliquées

Option EDP et applications

Thème

**Analyse des modèles
épidémiologiques**

Présenté par

Nemmour Amina

Devant le jury composé de

Président	T.Haddad	Prof.	Université de Jijel
Encadreur	W. Khellaf	M.C.B.	Université de Jijel
Examineur	C.Arroud	M.C.A.	Université de Jijel

Promotion 2020/2021

Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remercions **ALLAH** qui nous a aidé et nous a donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire et particulièrement notre encadreur **W. Khellaf**. D'avoir voulu proposer et assurer la direction de ce mémoire, pour sa confiance et ses conseils judicieux et sa totale disponibilité.

Nous tenons à remercier sincèrement les membres de jury **T.Haddad** et **C.Arroud** qui ont accepté de jurer notre travail.

On n'oublie pas nos parents, membres de nos familles pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Dédicace

C'est avec grand respect et gratitude que de tiens à exprimer toute ma reconnaissance

et ma sympathie et dédier ce travail modeste à :

Mes chers parents qui ont toujours été présents pour me protéger, m'encourager et me

soutenir tant moralement que matériellement pour que je puisse atteindre mon but.

Merci mes parents, que Dieu vous protège.

Mon encadreur W.Khellaf.

Mes chères frères Oussama et Mohamed el Amine.

Mes chères soeurs Asma, Sara, Marwa et Chayma.

Tous les membres de ma promotion.

Tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.

Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux que j'aime.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	5
1 Systèmes dynamiques et stabilité	8
1.1 Notations et définitions	8
1.1.1 Théorème d'existence et d'unicité	10
1.1.2 Flot et trajectoires	11
1.1.3 Classifications des solutions des systèmes dynamiques	13
1.2 Stabilité des systèmes dynamiques	14
1.2.1 Stabilité des systèmes linéaires	14
1.2.2 Stabilité des systèmes non linéaires_Linéarisation	16
1.2.3 Fonction de Lyapunov	17
1.3 Sous-variété centrale et formes normales	18
1.3.1 Sous-variété centrale	19
1.3.2 Formes normales	20
1.4 Théorie des bifurcation	23
1.4.1 Types de bifurcation	23
2 Modélisation en épidémiologie	29
2.1 Modèle endémique SIS	29
2.2 Modèle épidémique SIR	33
2.3 Modèle endémique SIR	35

2.3.1	Présentation du modèle mathématique	35
2.4	Étude de la persistance du modèle	36
2.5	Stabilité locale et bifurcations	39
2.5.1	Étude de la stabilité de point d'équilibre trivial	39
2.5.2	Étude la stabilité du point d'équilibre intérieur	41
3	Modèle endémique SIR avec vaccination	47
3.1	Modèle endémique SIR avec vaccination constante	48
3.1.1	Présentation du modèle	48
3.1.2	Stabilité locale et bifurcation	48
3.2	Simulation numérique	56
	Conclusion	59
	Bibliographie	60

TABLE DES FIGURES

1.1	Diagramme de la stabilité pour la dimension deux.	15
1.2	Portrait de phase d'un système linéaire hyperbolique, de dimension 3.	19
1.3	Diagramme de la bifurcation fourche.	25
1.4	Diagramme de la bifurcation noeud-col.	26
1.5	Diagramme de la bifurcation transcritique.	26
1.6	Diagramme de la bifurcation de Hopf.	28
2.1	Diagramme de modèle épidémique SIR.	34
2.2	Diagramme de modèle endémique SIR.	36
3.1	Diagramme de modèle endémique SIR avec vaccination.	48
3.2	Simulation du Modèle endémique SIR sans vaccination $p=0$	57
3.3	Simulation du Modèle endémique SIR avec la vaccination constante $p=0.4$	57
3.4	Simulation du Modèle endémique SIR avant et après la vaccination.	57

INTRODUCTION

Ce mémoire est consacrée à l'étude de quelques modèles mathématiques pour une population humaine atteinte d'une maladie infectieuse donnée ce qu'on appelle modèles épidémiologiques. Les modèles mathématiques sont de plus en plus fréquemment utilisés en médecine, et même en biologie dans des domaines d'application de plus en plus variés.

Un modèle mathématique représente par des équations une vision "simplifiée" de la réalité, en particulier la modélisation en épidémiologie est à la croisée des chemins de l'épidémiologie, la médecine, le biologie et les mathématiques. La motivation principale, au départ fut d'étudier pour comprendre la dynamique temporelle d'une épidémie, puis pour appliquer une stratégie thérapeutique ou de lutte contre les maladies infectieuses, c'est à dire utiliser cette connaissance pour le *contrôle* des problèmes de santé.

Une maladie est dite endémique si elle persiste dans une population. Elle est dite épidémique si elle apparaît pendant une période relativement courte dans une population (moins d'une année).

L'épidémiologie théorique des maladies transmissibles est devenue une discipline à part entière, distincte de la démographie théorique et de l'écologie théorique est un terrain fertile en applications et en problèmes pour les mathématiques.

Les premiers bribes de modélisation en épidémiologie sont quant à eux dus à Bernoulli 1766, mais les bases solides de l'épidémiologie mathématiques ont pour point de départ l'œuvre de sir Ronald Ross (prix Nobel 1902), qui en 1911 donna le premier modèle mathématique de la transmission de la maladie

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = mab_1x_2(1 - x_1) - \gamma x_1, \\ \dot{x}_2 = b_2a(1 - x_2) - \mu x_2. \end{cases}$$

x_1 représente la proportion des humaines infectieux et x_2 est celle des moustiques infectieux. Il a aboutit au résultat surprenant et inattendu, il affirma qu'il n'était pas nécessaire d'éliminer tout les moustiques pour éradiquer l'épidémie ; mais il suffisait de réduire la quantité des moustiques infectieux d'un certain seuil critique[12].

En 1927, W.O.Kermack et A.G.McKendrick ont appliqué les idées de Ronald Ross pour étudier la dynamique de la transmission des maladies infectieuses humaines. Plus précisément, Kermack et McKendrick ont appliqué les idées de Ross pour les maladie dont la dynamique de transmission dépend de la fréquence et de l'intensité des interactions entre individus susceptibles (sains) et individus infectés et infectieux. Leur résultat fondamental publié en 1927 continue à jouer, comme le modèle de LotkaVolterra en dynamique des populations, un rôle central dans la théorie mathématique des maladies infectieuses. En notant S la population des susceptible, I celle des infectées et pa R la population de guéris ou " removed/recovered", le modèle de Kermack et McKendrick de base s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{S} = \frac{-\beta SI}{N}, \\ \dot{I} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I. \end{cases}$$

Dans les années 1930, la démarche de test d'hypothèse, indispensable à la recherche des facteurs de risque est mise au point par Neyman et pearson. A'après la Seconde Guerre mondiale verra naitre et croitre l'épidémiologie analytique. les années 1980 verront renaître la crainte des maladies infectieuses. les années 1990 seront celles des promesses du décryptage du génome. Mais surtout depuis les années 1990, la puissance des moyens de calculs et de recueil de l'information permet de développer à un tout autre niveau les recherches des cause génétiques et environnementales des maladies qui avaient été initiées par les pionniers des siècles passés. L'objectif de ce mémoire est d'étudier des systèmes de type SIS , SIR épidémique et SIR endémique et analyser qualitativement les points d'équilibre sans maladie et endémique[13].

Le mémoire que nous présentons est rédigé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à quelques rappels et définitions sur la notion de stabilité locale et globale au sens de Lyapunov et l'algorithme de la forme normale, ainsi que des outils mathématiques dont nous aurons besoin.

Dans *le deuxième chapitre* on a présente les modèles mathématiques SIS et SIR, et donne l'étude qualitative des populations sans et avec maladie. Une attention très particulière sera accordée sur la notion du "taux de reproduction de base".

Finalement dans *le troisième chapitre* on introduit la problématique de modèle endémique SIR avec vaccination, nous nous concentrons essentiellement sur la vaccination constante. Nous étudierons la stabilité locale des points d'équilibres trivial et intérieur ainsi que les bifurcations locales de ces derniers.

CHAPITRE 1

SYSTÈMES DYNAMIQUES ET STABILITÉ

La modélisation épidémiologique conduit à l'analyse des systèmes dynamiques. Ces systèmes pouvant être différentiels, discret ou à dérivées partielles. Les systèmes étudiés dans ce mémoire sont non linéaires continus. Donc dans ce chapitre nous exposons les outils mathématiques, dont nous aurons besoin par la suite.

On commence par définir les systèmes dynamiques, et on examinera :

- Les notions de flot et trajectoire, point d'équilibre, orbite périodique.
- La stabilité des systèmes linéaire et la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires.
- La stabilité aux sens de Lyapunov.

On appellera les théorèmes fondamentaux :

- Le théorème d'existence et d'unicité.
- Théorème de Grobman-Hartman.

Enfin, on terminera ce chapitre par un rappel sur les modèles paramétrés et l'intérêt de l'analyse de la bifurcation dans le cas de ces modèles, ainsi que les différents types de bifurcations.

Pour les preuves des théorèmes et des propositions énoncés dans ce chapitre, le lecteur peut consulter par exemple [4, 9, 10].

1.1 Notations et définitions

Nous traiterons notre sujet sous les hypothèses suivantes :

- (1) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un élément de \mathbb{R}^n , sa norme $\|x\|_{\mathbb{R}^n}$ sera l'une quelconque des normes usuelles sur \mathbb{R}^n .
- (2) (a, b) recouvre tous les intervalles de \mathbb{R} de la forme $[a, b],]a, b], [a, b[$ ou $]a, b[$.

Définition 1.1.1. (*Systèmes dynamiques*)

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant.

Donc, on peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps (système continu), ou par rapport à une autre variable (système discret).

Un système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types des variable : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques encore, appelés paramètres du système sont fixes.

- (i) Dans le cas où la composante temps est continue le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme (**cas continue**) :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p. \quad (1.1)$$

Avec f un champ de vecteurs, \mathbb{R}^n est l'espace des phases, \mathbb{R}^p est l'espace des paramètres et t la variable temporelle.

- (ii) Dans le cas où le temps est discret, le système dynamique est présenté par une application (fonction itérative) (**cas discret**) :

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Avec $k \in \mathbb{N}$ représente le temps discrétise, f la fonction de récurrence, \mathbb{R}^n est l'espace des phases, \mathbb{R}^p est l'espace des paramètres.

Remarque 1.1.1. Quand f ne dépend pas explicitement du temps, le système est dit autonome et on a :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Remarque 1.1.2. à tout temps on peut transformer un système dynamique non autonome de dimension n en un système dynamique autonome équivalent de dimension $n + 1$ par un changement de variable.

1.1.1 Théorème d'existence et d'unicité

Définition 1.1.2. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{PC})$$

consiste à déterminer un couple (φ, J) où J est un intervalle de \mathbb{R} contenant t_0 et φ est une fonction dérivable de J dans \mathbb{R}^n , telle que

- 1) $(t, \varphi(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in J$.
- 2) $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t))$, pour tout $t \in J$ et $\varphi(t_0) = x_0$.

Théorème 1.1.1. (Cauchy-Lipschitz)

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et soit $a > 0$ et $b > 0$ tels que le cylindre $C = \{|t - t_0| \leq a, \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq b\}$ soit inclus dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. on note

$$M = \sup_{(t,x) \in C} \|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad \alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

telle que f est continue et lipschitzienne en x .

Alors il **existe** une unique solution **maximale** ϕ du problème de Cauchy (PC) sur l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

On donne aussi un lemme technique qui sera très utile dans la suite.

Lemme 1.1.2. (Lemme de Gronwall)

Soit ϕ une fonction absolument continue vérifiant l'inégalité différentielle suivante :

$$\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1 \phi(t) \leq \alpha_2, \quad t > 0, \quad ((\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1 \neq 0),$$

alors, pour tout $t \geq \tilde{T} \geq 0$, on a :

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \phi(\tilde{T})\right)e^{-\alpha_1(t-\tilde{T})}.$$

Démonstration

On a

$$\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1\phi(t) \leq \alpha_2, \quad t > 0,$$

multiplions les deux côtés par $e^{\alpha_1 t}$

$$\left(\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1\phi(t)\right)e^{\alpha_1 t} \leq \alpha_2 e^{\alpha_1 t},$$

$$\left(\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1\phi(t) - \alpha_2\right)e^{\alpha_1 t} \leq 0,$$

$$\frac{d\phi}{dt}e^{\alpha_1 t} + \alpha_1\phi(t)e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t} \leq 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\phi(t)e^{\alpha_1 t}) - \frac{d}{dt}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}e^{\alpha_1 t} \leq 0,$$

ou de manière équivalente

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 t}\right) \leq 0.$$

Donc, la fonction $\left(\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 t}\right)$ a une dérivée négative et elle est donc décroissante pour $t \geq 0$. Par conséquent, pour tout $t \geq \tilde{T} \geq 0$.

$$\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 t} \leq \left(\phi(\tilde{T}) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)e^{\alpha_1 \tilde{T}},$$

d'où, il résulte

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \phi(\tilde{T})\right)e^{-\alpha_1(t-\tilde{T})},$$

pour $\tilde{T} = 0$, cette expression devient :

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1 - e^{-\alpha_1 t}) + \phi(0)e^{-\alpha_1 t}.$$

ce qui démontre l'inégalité de l'énoncé. \blacksquare

Définition 1.1.3. (Système déterministe)

Soit U l'ensemble des conditions initiales et $x_0 \in U$. Alors, si pour tout x_0 , $x(t, x_0)$ existe et est unique, le système est dit déterministe.

1.1.2 Flot et trajectoires

Soit le système dynamique autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Définition 1.1.4. L'application $(t, x) \rightarrow \phi(t, x)$ est appelée le flot du champ de vecteurs f (ou de l'équation (1.4))

telle que, l'application partielle à x fixé, $t \rightarrow \phi(t, x)$ est une solution maximale de l'équation.

Pour une étude qualitative de l'équation différentielle, il est important d'étudier plutôt l'autre application partielle, $\phi : x \rightarrow \phi(t, x)$, pour t fixé. De façon imagée, $\phi_t(x)$ est la position à l'instant t d'un corps transporté par l'équation différentielle qui se trouvait à la position x en $t = 0$.

Remarque 1.1.3. Si f est linéaire, i.e, $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, le flot est donné par l'exponentielle de A :

$$\phi_t(x) = e^{tA}x, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Ainsi, le flot est une généralisation de l'exponentielle d'une matrice. Il possède des propriétés similaires.

Proposition 1.1.3. La formule du flot peut aussi se lire de la façon suivante :

Si $x(\cdot)$ est une solution de (1.4), alors

$$x(t) = \phi_{t-t_0}(x(t_0)),$$

pour tout t_0 et t dans l'intervalle de définition de $x(\cdot)$.

Proposition 1.1.4. Pour tous $t, s \in \mathbb{R}$ on a les propriétés suivantes :

1) $\phi_{-t} \circ \phi_t = id$, c'est -à-dire $(\phi)^{-1} = \phi_{-t}$,

2) $\phi_0 = id$,

3) $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = f \circ \phi_t$,

4) $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$.

Définition 1.1.5. On appelle trajectoire passant par x_0 l'ensemble :

$$\vartheta_{x_0} = \{\phi_t(x_0) : t \in I_x\}.$$

Autrement dit, la trajectoire passant par x_0 est la courbe tracée sur \mathbb{R}^n par la solution maximale de l'équation (1.4) passant par x_0 en $t = 0$.

Définition 1.1.6. *Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est dit invariant par un champ de vecteur si toute solution $x(t)$ du système différentiel associée au champ de vecteurs issu de A vérifie $x(t) \in A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ pour lequel cette solution est définie.*

Remarque 1.1.4. *la trajectoire d'un système autonome dans l'espace d'état est un ensemble invariant.*

Définition 1.1.7. *Soient X un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . Soit Γ l'orbite de X passant par x_0 . Elle est paramétrisée par une solution maximale $x(t)$ du problème de Cauchy associé : $\Gamma = \{x(t) | t \in (\alpha, \beta)\}$.*

- 1) *L'ensemble ω -limite de l'orbite (ou de x_0) noté $\omega(x_0)$ est défini par si $\beta = +\infty$, $\omega(x_0) = \{q \in U | \exists (t_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, t_n \rightarrow +\infty \text{ et } (x(t_n) \rightarrow q)\}$.*
- 2) *L'ensemble α -limite de l'orbite (ou de x_0) noté $\alpha(x_0)$ est défini par si $\alpha = -\infty$, $\alpha(x_0) = \{q \in U | \exists (t_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, t_n \rightarrow -\infty \text{ et } (x(t_n) \rightarrow q)\}$.*

Tous les points d'une même orbite ont les mêmes ensembles α -limite et ω -limite.

1.1.3 Classifications des solutions des systèmes dynamiques

Définition 1.1.8. (Point d'équilibre)

On appelle point d'équilibre (ou point fixe ou stationnaire ou point critique) de (1.4), le point \bar{x} de l'espace des phases qui vérifie (1.4) :

$$f(\bar{x}) = 0. \tag{1.5}$$

Par le changement de variable $\xi = x - \bar{x}$, on peut ramener le point \bar{x} à l'origine.

Définition 1.1.9. (Solutions périodiques)

Soit $x(t, x_0)$ la solution d'un système dynamique autonome ou non autonome. Elle représente une solution périodique si et seulement si :

$$\exists \tau > 0, \forall t, \quad x(t + \tau, x_0) = x(t, x_0). \tag{1.6}$$

La plus petite valeur de τ si elle existe, est appelée période. On la note généralement T .

Remarque 1.1.5. 1) *Une solution périodique d'un système dynamique quelconque est dite solution isolée s'il existe un voisinage ne comporte aucune autre solution périodique.*

2) Si de plus le système est autonome, alors la solution isolée est appelée un cycle limite.

Définition 1.1.10. (Solutions quasi périodiques)

Soit $x(t, x_0)$ une solution du système dynamique (1.1) et soit $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble fini de réels linéairement indépendants.

On dit que $x(t, x_0)$ est une solution quasi périodique de (1.1) si elle est périodique pour chacune des périodes T_i de T . La solution $x(t, x_0)$ est également dite n -périodique.

1.2 Stabilité des systèmes dynamiques

Dans cette section nous nous intéressons à la stabilité d'un système autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.7)$$

Définition 1.2.1. (Notion de la stabilité)

1) Nous dirons qu'un équilibre \bar{x} de (1.7) est stable si pour tout $\varepsilon > 0$, $\forall t_0$ il existe $\sigma_{t_0, \varepsilon}$ tel que :

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \sigma_{t_0} \Rightarrow \|\phi(t, x_0) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

2) Nous dirons qu'un équilibre \bar{x} de (1.7) est uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et s'il existe un voisinage de \bar{x} où $\phi(t, x_0)$ a pour limite \bar{x} , c'est-à-dire qu'il existe $\rho > 0$: $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (\phi(t, x_0)) = \bar{x}$.

3) Un équilibre qui n'est pas uniformément stable est dit instable.

1.2.1 Stabilité des systèmes linéaires

Considérons le cas particulier d'une équation différentielle autonome linéaire

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $A \in M_n(\mathbb{R})$. L'origine est toujours un équilibre de cette équation (mais il peut y en avoir d'autres tout élément de $\text{Ker}(A)$ est un équilibre).

Théorème 1.2.1. Soit $\frac{dx}{dt} = Ax$, soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de A .

1) L'origine est un équilibre uniformément stable si et seulement si $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$, $\forall i = \overline{1, n}$.

2) L'origine est un équilibre uniformément asymptotiquement stable si et seulement si $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $\forall i = \overline{1, n}$. Dans ce cas on dit que l'origine est un équilibre hyperbolique.

3) S'il existe une valeur propre λ telle que $\text{Re}(\lambda) > 0$, l'origine est instable.

Le cas affine

Considérons maintenant l'équation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B, \tag{1.8}$$

où $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{R}^n$ un vecteur constant.

Proposition 1.2.2. *La stabilité et la stabilité asymptotique d'un équilibre de l'équation (1.8) sont équivalentes respectivement à celles de l'origine pour l'équation $\frac{dy}{dt} = Ay$.*

Dans la pratique pour un système de dimension deux on a le diagramme suivante :

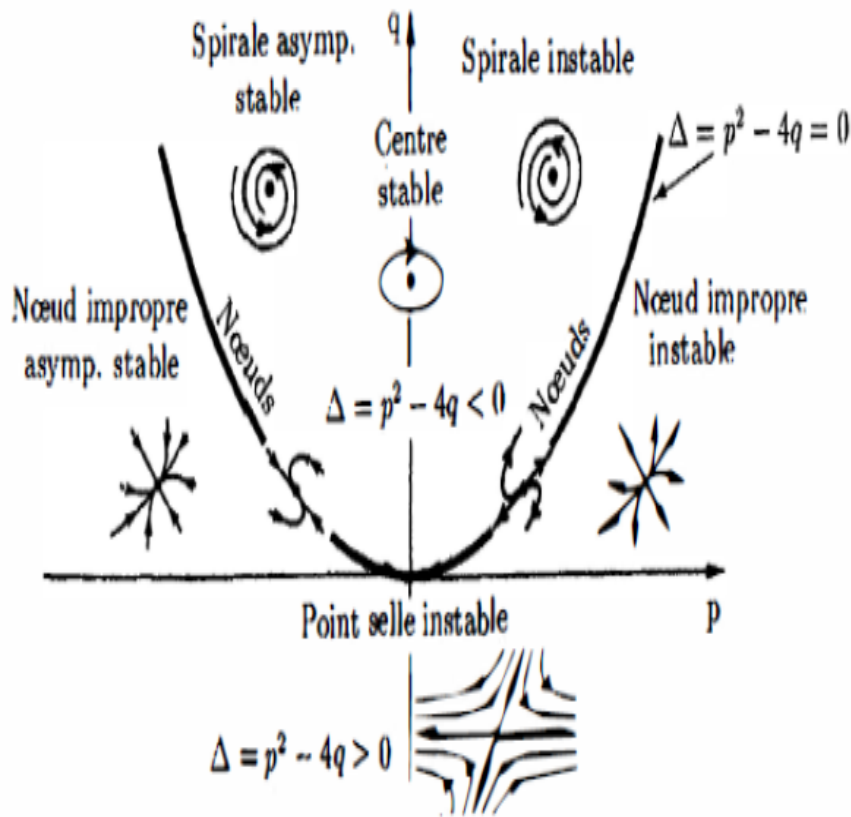


FIGURE 1.1 – Diagramme de la stabilité pour la dimension deux.

1.2.2 Stabilité des systèmes non linéaires Linéarisation

Le développement de Taylor du champ de vecteurs f de (1.7) en \bar{x} s'écrit :

$$f(x) = df(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!}d^2f(\bar{x})(x - \bar{x}, x - \bar{x}) + \frac{1}{3!}d^3f(\bar{x})(x - \bar{x}, x - \bar{x}, x - \bar{x}) + \dots \quad (1.9)$$

où l'on a posé $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$,

$$\begin{aligned} df(x)x &= \sum_j \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right) x_j, & d^2f(x)(x, x) &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) x_i x_j, \\ d^3f(x)(x, x, x) &= \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) x_i x_j x_k. \end{aligned} \quad (1.10)$$

La matrice

$$df(x) = \left(\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_j} \right),$$

s'appelle matrice jacobienne de f (son déterminant est le jacobien). Pour x petit, (1.9) montre que le comportement du système au voisinage de \bar{x} est celui du système linéarisé :

$$\dot{x} = df(\bar{x})(x - \bar{x}). \quad (1.11)$$

Dans le cas où la matrice $df(\bar{x})$ possède n valeurs propres λ_i , $i = 1, \dots, n$ distinctes, la solution de (1.11) est :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i a^{(i)} e^{\lambda_i t}, \quad (1.12)$$

où $a^{(i)}$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i et les c_i , $i = 1, \dots, n$ sont des constantes (déterminées par les conditions initiales).

On peut énoncer le théorème d'équivalence topologique suivant :

Théorème 1.2.3. (Hartman-Grobman)

Soit D un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0 et f une fonction de classe C^1 sur D à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Pour tout $x \in D$, on note $\phi(t, x)$ la solution de l'équation autonome

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

qui vérifie $\phi(t, \bar{x}) = \bar{x}$. On suppose que $f(\bar{x}) = 0$ et que pour toute valeur propre λ de la matrice $A = df(\bar{x})$, $Re(\lambda) \neq 0$. Alors il existe deux ouverts U et V de \mathbb{R}^n contenant \bar{x} et un homéomorphisme H de U dans V tel que, pour tout $x \in U$

$$H(\phi(t, x)) = e^{tA} H(x), \quad \forall t \in I_x,$$

où I_x est un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant \bar{x} . En particulier H envoie les trajectoires du système

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

sur les trajectoires du système linéaire à coefficients constants

$$\frac{dx}{dt} = A(x - \bar{x}).$$

Corollaire 1.2.4. (Stabilité en première approximation)

Soit $\frac{dx}{dt} = f(x)$ un système d'équations différentielles, $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ un équilibre de f . Si \bar{x} est un équilibre asymptotiquement stable du système linéarisé

$$\dot{x} = df(\bar{x})(x - \bar{x}),$$

alors c'est un équilibre asymptotiquement stable du système

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Si on suppose que $df(\bar{x})$ a une valeur propre de partie réelle strictement positive. Alors, \bar{x} n'est pas un équilibre stable pour le système

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

1.2.3 Fonction de Lyapunov

Définition 1.2.2. Une **fonction de Lyapunov** est une fonction qui permet d'estimer la stabilité d'une solution d'une équation différentielle.

Définition 1.2.3. Soit \bar{x} un point fixe de (1.7). Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction différentiable définie sur un voisinage Ω de \bar{x} telle que $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq \bar{x}$. Posons :

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x), \quad (1.13)$$

alors on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.5. (Lyapunov)

- 1) Si $\dot{V}(x) \leq 0$ dans Ω alors \bar{x} est stable.
- 2) Si $\dot{V}(x) < 0$ dans Ω alors \bar{x} est asymptotiquement stable.

3) Si $\dot{V}(x) > 0$ dans Ω alors \bar{x} est instable.

On dit aussi que la fonction \dot{V} est semi-définie négative dans le premier cas, définie négative dans le deuxième cas et définie positive dans le troisième cas.

Remarque 1.2.1. Il n'y a pas de règle générale pour trouver une fonction de Lyapunov, cependant, dans des problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat.

1.3 Sous-variété centrale et formes normales

Cette sous section est consacrée aux méthodes qui permettent d'étudier le portrait de phases autour d'un point d'équilibre, ou d'un point fixe, non hyperbolique. Considérons le système continu $\frac{dx}{dt} = f(x)$ et supposons qu'il admet un point d'équilibre non hyperbolique \bar{x} . Voyons d'abord ce que l'on peut dire sur le linéarisé tangent en \bar{x} et plus généralement sur tout système linéaire non hyperbolique.

Proposition 1.3.1. Tout système linéaire continu, $\frac{dx}{dt} = Ax$ est décomposable de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c, \\ \frac{dx^h}{dt} = A^h x^h. \end{cases} \quad (1.14)$$

Avec $x = (x^c, x^h)$, $A = \begin{pmatrix} A^c & 0 \\ 0 & A^h \end{pmatrix}$ et où A^h correspond aux valeurs propres à partie réelle non nulle (la partie hyperbolique de A) et A^c aux valeurs propres sur l'axe imaginaire (la partie centrale de A). Les ensembles (espaces vectoriels) définis par $x^c = 0$ (resp. $x^h = 0$) sont invariants par le flot de (1.14). L'ensemble $x^c = 0$ n'est autre que la somme directe des espaces vectoriels rentrant et sortant, $E^s \oplus E^i$, figure 1.2.

Remarque 1.3.1. 1) Une telle séparation entre la partie hyperbolique et la partie centrale du linéarisé tangent se prolonge également au non linéaire, de la même façon que les espaces vectoriels stable et instable, E^s et E^i , s'étendent aux sous-variétés invariantes stable et instable, W_{loc}^s et W_{loc}^i . Comme pour le linéaire, si la partie hyperbolique est stable asymptotiquement, la stabilité autour de \bar{x} peut être directement analysée à partir de la dynamique sur une sous-variété (non nécessairement unique comme nous le verrons plus loin), appelée sous-variété centrale, dont l'espace tangent en \bar{x} est égal à E^c .

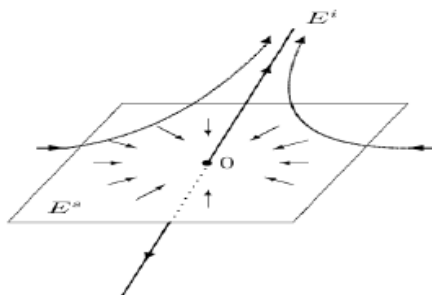


FIGURE 1.2 – Portrait de phase d'un système linéaire hyperbolique, de dimension 3.

2) En linéaire, tous les calculs, changement de base et matrices A^c et A^h , sont explicites et reposent sur la décomposition d'une matrice en sa forme de Jordan. En non linéaire, les calculs sont nécessairement approchés et donnent, de manière itérative, les termes des développements limités autour de \bar{x} des équations de la sous-variété centrale et de la dynamique sur cette sous-variété. En pratique, on arrête les calculs à l'ordre à partir duquel le portrait de phases n'est plus modifié de manière qualitative par les termes d'ordre supérieur.

1.3.1 Sous-variété centrale

Nous énonçons d'abord les résultats généraux, dont les démonstration se trouvent, pour l'essentiel.

Le théorème de décomposition en sous-variétés stable et instable autour d'un point d'équilibre hyperbolique, ainsi que le théorème de Grobman-Hartman se généralise comme suit aux points d'équilibre non hyperboliques [5].

Théorème 1.3.2. (Sous-variété centrale pour les systèmes continus)

Soient un champ de vecteurs f sur un ouvert U de \mathbb{R}^n , r fois continûment dérivable s'annulant en $\bar{x} \in U$, V un petit voisinage de \bar{x} dans U , et ϕ_t le flot. Considérons E^s , E^c et E^i , les espaces propres généralisés correspondants aux valeurs propres de $df(\bar{x})$ à partie réelle strictement négative, nulles et strictement positive, respectivement : E^s , E^c et E^i sont des espaces vectoriels stable par $df(\bar{x})$ et $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^i$.

- les sous-espaces rentrant,

$$W_{loc}^s = \{x \in V : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ et } \forall t \geq 0 \quad \phi_t(x) \in V\},$$

et sortant,

$$W_{loc}^i = \{x \in V : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ et } \forall t \leq 0 \ \phi_t(x) \in V\},$$

possèdent des structures de sous-variétés différentiables de classe C^r autour de \bar{x} et admettent pour espaces vectoriels tangentes en \bar{x} , E^s et E^i , respectivement.

- Il existe aussi une sous-variété différentiable de classe C^{r-1} , W_{loc}^c , (non nécessairement unique contrairement à W_{loc}^s et W_{loc}^i), invariante par le flot, et dont l'espace tangent en \bar{x} est égal à E^c . W_{loc}^c est appelée sous-variété centrale. Elle est définie localement autour de \bar{x} .
- Soient x^c des coordonnées locales sur W_{loc}^c et $f^c(x^c)$ le champ de vecteurs induit par f sur W_{loc}^c (cela a un sens car f est tangent à W_{loc}^c). Alors $\frac{dx}{dt} = f(x)$ est, autour de \bar{x} , topologiquement équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = f^c(x^c), \\ \frac{dx^s}{dt} = -x^s, \\ \frac{dx^i}{dt} = x^i, \end{cases} \quad (1.15)$$

où les dimensions de x^s et x^i sont égales à celles de E^s et E^i .

Remarque 1.3.2. En particulier, le théorème précédent implique que, si $df(\bar{x})$ n'a pas de valeurs propres à partie réelle strictement positive, la stabilité de \bar{x} est alors conditionnée par celle la dynamique sur la sous-variété centrale, plus précisément :

- 1) Si $\frac{dx^c}{dt} = f^c(x^c)$, est stable (resp. asymptotiquement stable) au sens de Lyapounov en \bar{x} , alors le système complet $\frac{dx}{dt} = f(x)$ est aussi stable (asymptotiquement stable) au sens de Lyapounov.
- 2) Si $\frac{dx^c}{dt} = f^c(x^c)$ n'est pas stable au sens de Lyapounov en \bar{x} , alors le système complet $\frac{dx}{dt} = f(x)$ n'est pas stable au sens de Lyapounov.

1.3.2 Formes normales

Approximation de la partie centrale Il ne reste plus qu'à compléter les résultats précédents par le calcul de f^c sur la sous-variété centrale. Pour cela, il suffit de connaître les équations de W_{loc}^c , étant donné que le champ de vecteurs f restreint à W_{loc}^c n'est autre que f^c . Il est, en général, impossible d'obtenir les équations exactes définissant W_{loc}^c , d'autant

plus que cette sous-variété n'est pas unique. Ainsi, on peut se contenter d'une connaissance approximative, au sens des développements limités, des équations de W_{loc}^c et donc de f^c . pour cela , on procède de la manière suivante :

Étape 1

Considérons donc le système $\frac{dx}{dt} = f(x)$, pour $x \in U$, un ouvert de \mathbb{R}^n et un point d'équilibre \bar{x} . On note $A = df(\bar{x})$ la matrice jacobienne de f en \bar{x} . La décomposition en blocs de Jordan de A conduit à la factorisation suivante

$$A = P \begin{pmatrix} A^c & 0 & 0 \\ 0 & A^s & 0 \\ 0 & 0 & A^i \end{pmatrix} P^{-1},$$

où A^c a ses valeurs propres sur l'axe imaginaire, A^s a ses valeurs propres stables aux parties réelles négatives, A^i a ses valeurs propres instables aux parties réelles positives et P est une matrice inversible.

Étape 2

Par un changement affine de coordonnées,

$$x \longrightarrow P^{-1}(x - \bar{x}),$$

nous permet de se ramener au voisinage de 0 et de découpler le linéarise tangent.

Étape 3

Sans changer de notation, on peut donc supposer que $\frac{dx}{dt} = f(x)$ s'écrit, au voisinage du point d'équilibre $\bar{x} = 0$, de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + g^c(x^c, (x^s, x^i)), \\ \frac{dx^s}{dt} = A^s x^s + g^s(x^c, (x^s, x^i)), \\ \frac{dx^i}{dt} = A^i x^i + g^i(x^c, (x^s, x^i)). \end{cases} \quad (1.16)$$

Avec $x = (x^c, x^s, x^i)$ et où g^c, g^s, g^i sont des fonctions régulières de x , nulles ainsi que leurs dérivées en 0. On note $x^h = (x^s, x^i)$ la partie hyperbolique de x et

$$A^h = \begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & A^i \end{pmatrix},$$

Le système (1.16) s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + g^c(x^c, x^h), \\ \frac{dx^h}{dt} = A^h x^h + g^h(x^c, x^h). \end{cases} \quad (1.17)$$

Avec $g^h = (g^s, g^i)$.

Étape 4

On a W_{loc}^c est, par définition, tangente en 0 à E^c , l'espace vectoriel d'équation $x^h = 0$. Il est donc normal de chercher une équation de W_{loc}^c sous la forme de $x^h = h(x^c)$ avec $h(0) = 0$ ($0 \in W_{loc}^c$) et $dh(0) = 0$ (E^c tangente en 0 à W_{loc}^c). La dynamique sur la sous-variété centrale est alors, dans les coordonnées locales x^c , donnée par :

$$\frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + g^c(x^c, h(x^c)) = f^c(x^c).$$

Comme $h(x^c) = O(\|x^c\|^2)$ et $g^c(x^c, h(x^c)) = O(\|x^c\|^2 + \|x^h\|^2)$, on a

$$f^c(x^c) = A^c x^c + g^c(x^c, 0) + O(\|x^c\|^3).$$

Ainsi, la projection de f sur le plan $x^h = 0$ fournit une approximation jusqu'à l'ordre 2 inclus de dynamique sur la sous-variété centrale.

Étape 5

Comme le vecteur f est tangent à W_{loc}^c cette condition de tangence s'exprime par les égalités suivantes où intervient le Jacobien dh de h :

d'une part on a :

$$\frac{dx^h}{dt} = \frac{d}{dt}(h(x^c)) = dh(x^c) \frac{dx^c}{dt} = dh(x^c)(A^c x^c + g^c(x^c, h(x^c))),$$

et autre part de (1.18) :

$$\frac{dx^h}{dt} = A^h x^h + g^h(x^c, x^h) = A^h h(x^c) + g^h(x^c, h(x^c)).$$

Ainsi, h vérifie l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\mathcal{N}(h(x^c)) = dh(x^c)(A^c x^c + g^c(x^c, h(x^c))) - A^h h(x^c) - g^h(x^c, h(x^c)) = 0. \quad (1.18)$$

Cette équation aux dérivées partielles ne peut pas, en général, être résolue de manière exacte. En revanche, elle permet de calculer de façon récurrence les termes successifs du développement limité de h en $x^c = 0$ grâce au résultat d'approximation suivant :

Théorème 1.3.3. (Approximation de la sous-variété centrale)

Si une fonction $\rho(x^c)$, telle que $\rho(0) = 0$ et $d\rho(0) = 0$, est autour de x^c de l'équation aux dérivées partielles(1.18)

$$\mathcal{N}(\rho(x^c)) = O(\|x^c\|^k),$$

alors ρ est également une approximation à l'ordre k de h :

$$h(x^c) = \rho(x^c) + O(\|x^c\|^k).$$

1.4 Théorie des bifurcation

L'aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques est la notion de bifurcation. Un terme qui a été introduit par Henri Poincaré au début du XX^e siècle dans ces travaux sur les systèmes différentiels. Pour certaines valeur critique des paramètres de contrôle du système, la solution de l'équation différentielle change qualitativement : on dit qu'il ya bifurcation. Une première approche pour l'étude des systèmes dynamiques consiste à rechercher les points d'équilibre, c'est-à-dire les solutions stationnaire ne présentant pas l'évolution temporelle. L'étape suivante consiste à faire varier les paramètre de contrôle du système. On regarde alors que deviennent les point d'équilibre, en particulier ceux qui étaient stables avant de modifier les paramètres du système et les bifurcation qui apparaissent. Pour les valeurs des paramètres aux quelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, la construction du portrait de phase nécessite des outils adoptés [14].

Soit le système dynamique non linéaire de dimension n :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (1.19)$$

tel que μ est un paramètre de contrôle, et x_μ la solution de se système.

Définition 1.4.1. *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x_μ du système (1.19) lorsqu'on modifie μ et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.*

1.4.1 Types de bifurcation

Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, la construction du portrait de phases nécessite des outils adaptés. Nous nous intéressons ici aux bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre. L'étude de ce type de bifurcation repose sur deux méthodes importantes, présentées dans cette partie et qui se ramènent à l'utilisation de bonnes coordonnées :

- 1) La méthode de la sous-variété centrale qui permet d'isoler la partie non hyperbolique, dite centrale.
- 2) La méthode des formes normales de Poincaré où ne subsistent que les vraies non linéarités, c'est à dire celles que l'on ne peut pas faire disparaître par changement régulier de coordonnées.

La théorie des bifurcation s'intéresse aux familles d'équations différentielles dépendant de paramètres μ :

$$\frac{dx}{dt} = f_\mu(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p. \quad (1.20)$$

Le terme bifurcation a été introduit pour la première fois par H.Poincaré pour décrire l'apparition ou la disparition, pour certaines valeurs du paramètres μ , de points d'équilibre du système (1.20).

- a) bifurcation noeud-col.
- b) bifurcation transcritique.
- c) bifurcation fourche.
- d) bifurcation hopf.

qui correspondent toutes à des comportements génériques, avec des formes normales :

$$\dot{x} = G(x, \mu).$$

On note

$$G_\mu = \frac{\partial G}{\partial \mu}, \quad G_{xx} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad G_{\mu\mu} = \frac{\partial^2 G}{\partial \mu^2}, \quad G_{\mu x} = \frac{\partial^2 G}{\partial \mu \partial x}.$$

a) Bifurcation fourche

Un équilibre stable se déstabilise en un équilibre instable, et deux équilibres stables sont créés. Cette transition peut se faire de façon supercritique (de façon continue et prévisible) ou sous-critique (discontinue, avec des phénomènes d'hystérèse).

La forme normale est :

$$\dot{x} = G(x, \mu) = x(G_{\mu x}\mu + \frac{1}{6}G_{xx}x^2) + O(2),$$

avec $x \sim \mu^{\frac{1}{2}}$, et

$$G_\mu(0, 0) = G_{xx}(0, 0) = 0.$$

Exemple

L'équation générique d'une bifurcation fourche est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu x - x^3.$$

On donne le diagramme de cette bifurcation

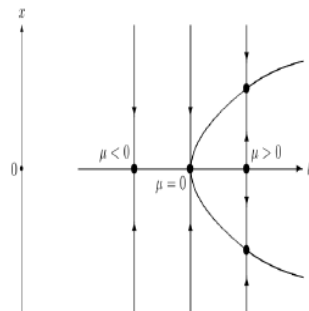


FIGURE 1.3 – Diagramme de la bifurcation fourche.

b) Bifurcation noeud-col

Deux points d'équilibres existent (un stable et un instable) avant la bifurcation. Après la bifurcation, plus aucun équilibre n'existe.

$$\dot{x} = G(x, \mu) = G_{xx}x + G_{\mu x}\mu + O(2),$$

où

$$G_{\mu}(0, 0) \neq 0 \text{ et } G_{xx}(0, 0) \neq 0.$$

Exemple

L'équation générique d'une bifurcation noeud-col est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu + \alpha x^2.$$

On donne le diagramme de cette bifurcation

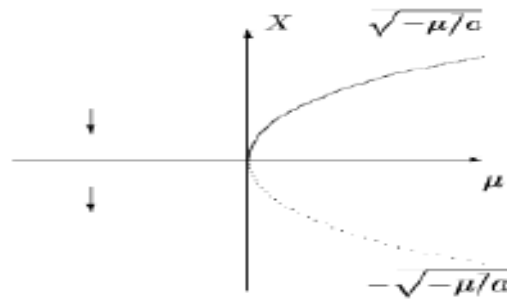


FIGURE 1.4 – Diagramme de la bifurcation noeud-col.

c) Bifurcation transcritique

Une bifurcation transcritique est une bifurcation de la solution triviale. Elle a lieu quand une raison physique impose $x = 0$ à être solution pour tout μ .

La forme normale est

$$\dot{x} = G(x, \mu) = \frac{1}{2}(G_{xx}x^2 + G_{\mu x}\mu x + G_{\mu\mu}\mu^2 + O(3)),$$

avec

$$G_{\mu}(0, 0) = 0 \text{ et } G_{xx}(0, 0) \neq 0.$$

Exemple

L'équation générique d'une bifurcation transcritique est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu x - x^2.$$

On donne le diagramme de cette bifurcation

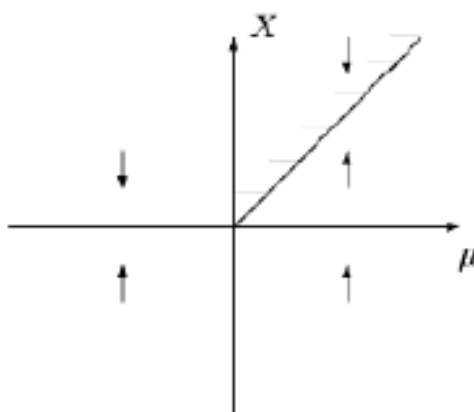


FIGURE 1.5 – Diagramme de la bifurcation transcritique.

d) Bifurcation de Hopf

est une bifurcation locale dans laquelle un point fixe d'un système dynamique perd sa stabilité tandis qu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées de la linéarisation autour du point fixe franchissent l'axe imaginaire du plan complexe.

Supposons que le système dynamique

$$\dot{z} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad n \geq 3, \quad \mu : \text{paramètre réel},$$

ait un point stationnaire $x = x^*(\mu)$ et que

- la matrice jacobienne

$$A(\mu) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right)_{z=z^*},$$

possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées λ_1 et λ_2 ,

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

telles que :

- 1) pour une certaine valeur $\mu = \mu_c$,

$$\alpha(\mu_c) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) \Big|_{\mu=\mu_c} \neq 0,$$

- 2) Les $(n - 2)$ autres valeurs propres de $A(\mu_c)$ aient leur partie réelle strictement négative.

Alors, il existe une bifurcation de Hopf.

Exemple

L'équation générique d'une bifurcation de Hopf est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu x - |x|^2 x.$$

On donne le diagramme de cette bifurcation

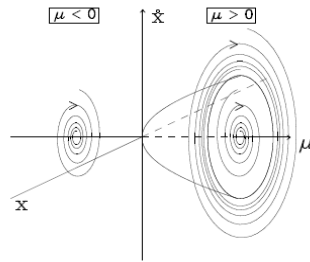


FIGURE 1.6 – Diagramme de la bifurcation de Hopf.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION EN ÉPIDÉMIOLOGIE

Dans ce chapitre, On va donner quelques modèles en épidémiologies, en particulier, le modèle SIS et le modèle SIR endémique et épidémique. Le but essentiel de tout les modèles proposés, est de comprendre et par la suite contrôler dans la mesure du possible l'évolution du chaque maladie. Nous commençons par donner la définition du nombre de base R_0 , nombre qui on le verra par la suite est essentiel pour assimiler l'évolution de toute maladie infectieuse.

Définition 2.0.1. *Le nombre de reproduction de base R_0 est un concept clé en épidémiologie et sans conteste une idées importantes que les mathématiques ont apporté à la théorie des épidémies. Cette quantité, est le nombre moyen de cas secondaires, engendré par un individu infectieux typique durant sa période d'infectiosité, quand il est introduit dans une population constituée entièrement de susceptibles[12].*

2.1 Modèle endémique SIS

Le modèle de base SIS est le plus simple modèle de maladie infectieuse qui ne confère pas d'immunité, ainsi les susceptibles peuvent être infectés et redevenir susceptibles après rétablissement. C'est un modèle endémique parce qu'il peut arriver que la maladie peut persister. Le modèle avec la dynamique vitale est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \beta SI/N - \mu S + gI, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI/N - (\mu + g)I, \end{cases} \quad (2.1)$$

où

- $N = S + I$ est la taille de la population.
- β est la paramètre de transmission.
- μ est le taux de natalité suppose égale au taux de mortalité.
- g le taux de perte d'infection.

La quantité seuil $R_0 = \frac{\beta}{g+\mu}$, est le produit du taux de contact par la période moyenne d'infection ajustées par les décès $\frac{1}{g+\mu}$.

Les nouveaux nés sont tous supposés susceptibles. Les naissances équilibrent les décès de telle sorte que la taille de la population N soit constante.

Remarque 2.1.1. *Par un changement de variable on peut écrire le système précédent sous la forme suivante :*

$$\frac{di}{dt} = \beta(1-i)i - (\mu + g)i. \quad (2.2)$$

En effet, posant

$$i(t) = \frac{I(t)}{N}, s(t) = \frac{S(t)}{N} = 1 - i(t),$$

en divisant la première équation de système (2.1) sur N ,

on obtient

$$\frac{1}{N} \frac{d(iN)}{dt} = \frac{\beta SI}{N^2} - (\mu + g) \frac{I}{N},$$

donc

$$\frac{di}{dt} = \beta \underbrace{\frac{S}{N}}_{1-i} \underbrace{\frac{I}{N}}_i - (\mu + g) \underbrace{\frac{I}{N}}_i,$$

d'où

$$\frac{di}{dt} = \beta(1-i)i - (\mu + g)i. \quad (2.3)$$

Cette équation contient la fraction infectée i , mais ne contient pas la taille N de la population.

C'est une équation de Bernoulli de degré deux la substitution $y = \frac{1}{i}$ la transforme en l'équation différentielle linéaire.

On a

$$y = \frac{1}{i},$$

alors

$$y' = \frac{-i'}{i^2}.$$

De (2.3) on a

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{i^2}(\beta(1-i)i - (\mu + g)i).$$

d'où

$$\frac{dy}{dt} = (g + \mu - \beta)y + \beta. \quad (2.4)$$

On a le résultat suivant

Théorème 2.1.1. *la solution $i(t)$ de l'équation (2.2) approche 0 quand $t \rightarrow +\infty$ si $R_0 \leq 1$ et approche $1 - \frac{1}{R_0}$ quand $t \rightarrow +\infty$ si $R_0 > 1$.*

Ce théorème signifie que pour une maladie sans immunité quelle que soit la fraction infectée initiale positive, la fraction infectée approche une valeur constante endémique si le nombre de contacts dépasse 1. Sinon, la maladie a tendance à disparaître.

Démonstration

$$\frac{dy}{dt} = (g + \mu - \beta)y + \beta,$$

c'est une équation différentielle ordinaire linéaire non homogène .

Premièrement, on va résoudre l'équation homogène :

$$\frac{dy}{dt} = -(\beta - g - \mu)y.$$

La solution générale de cette équation est,

$$y(t) = ke^{-(\beta-g-\mu)t}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Deuxièmement, on utilise la méthode de la variation de la constante $k \equiv k(t)$:

On a

$$y(t) = ke^{-\alpha t} \quad \text{avec} \quad \alpha = \beta - g - \mu,$$

alors

$$\dot{y} = \dot{k}e^{-\alpha t} - \alpha ke^{-\alpha t},$$

Si on remplace y et \dot{y} dans l'équation(2.4) on trouve

$$\dot{k}e^{-\alpha t} = \beta.$$

donc

$$k(t) = \frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha t} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$y(t) = \left(\frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha t} + c\right)e^{-\alpha t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Pour $t = t_0$; $C = \frac{1}{i_0} - \frac{\beta}{\alpha}$.

D'ou, la solution générale de l'équation (2.4) est :

$$y(t) = \frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{1}{i_0} - \frac{\beta}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}.$$

Maintenant revenons à la variable i ,

$$\frac{1}{i(t)} = \frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{1}{i_0} - \frac{\beta}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}$$

$$\frac{1}{i(t)} = \frac{\beta}{\beta - \mu - g} + \left(\frac{1}{i_0} - \frac{\beta}{\beta - \mu - g}\right)e^{-(\beta - \mu - g)t}$$

$$\frac{1}{i(t)} = \left(\frac{1}{i_0} - \frac{\beta}{g + \mu} \frac{1}{\frac{\beta}{g + \mu} - 1}\right)e^{-(g + \mu)\left(\frac{\beta}{g + \mu} - 1\right)t}.$$

On a $R_0 = \frac{\beta}{g + \mu}$, alors

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{\left(\frac{1}{i_0} - \frac{R_0}{R_0 - 1}\right)e^{-(g + \mu)(R_0 - 1)t} \frac{R_0}{R_0 - 1}} \quad \text{avec } R_0 \neq 1, \\ &= \frac{e^{(g + \mu)(R_0 - 1)t}}{\left(\frac{R_0}{R_0 - 1}\right)e^{(g + \mu)(R_0 - 1)t} + \frac{1}{i_0} - \frac{R_0}{R_0 - 1}}, \\ &= \frac{e^{(g + \mu)(R_0 - 1)t}}{\left(\frac{R_0}{R_0 - 1}\right)(e^{(g + \mu)(R_0 - 1)t} - 1) + \frac{1}{i_0}}. \end{aligned}$$

• Pour $R_0 = 1$: l'équation (2.4) devient

$$\frac{dy}{dt} = \beta,$$

et la solution est

$$y = \beta t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

donc

$$i(t) = \frac{1}{\beta t + c},$$

avec $c = \frac{1}{i_0}$, alors

$$i(t) = \frac{1}{\beta t + \frac{1}{i_0}}.$$

Finalement, la solution générale de l'équation (2.2) est :

$$i(t) = \begin{cases} \frac{e^{(g+\mu)(R_0-1)t}}{\left(\frac{R_0}{R_0-1}\right)(e^{(g+\mu)(R_0-1)t}-1)+\frac{1}{i_0}}, & \text{si } R_0 \neq 1 \\ \frac{1}{\beta t + \frac{1}{i_0}}, & \text{si } R_0 = 1 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{R_0}, & \text{si } R_0 > 1 \\ 0, & \text{si } R_0 \leq 1 \end{cases}$$

■

2.2 Modèle épidémique SIR

Le modèle SIR divise la population en trois catégories sont :

- les individus susceptible de ce faire infecter.
- les individus infectieux (infectés et contagieux).
- les individus ne pouvant plus transmettre la maladie (guérison, immunité, décès).

Nous noterons $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ la taille de la population faisant partie de chacune de ces trois catégories. Le modèle SIR est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI/N, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI/N - gI, \\ \frac{dR}{dt} = gI. \end{cases} \quad (2.5)$$

Remarque 2.2.1. * $N=S+I+R$ est la taille de population.

* Les condition initiales $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ et $R(0) = 0$.

* Les paramètre β et g ont les mêmes significations que le modèle SIS.



FIGURE 2.1 – Diagramme de modèle épidémique SIR.

Ce modèle épidémique est utilisé pour des périodes de temps relativement courtes, il n'a pas de dynamique vitale (e.g influenza).

La première question qu'un acteur en santé publique se pose est de savoir si l'épidémie d'une maladie donnée peut apparaître dans une population naive.

Répondre à cette question peut se faire aisément en examinant la deuxième équation du système (2.5). Cette équation nous informe sur le nombre de malades qui augmente dans la population dès que $\frac{dI}{dt} > 0$; c'est à dire dès que $\frac{\beta S}{N} - g > 0$, ou encore dès que $R_0 > 1$, R_0 étant défini le taux de reproduction de la maladie.

Pour savoir si une maladie donnée peut apparaître dans une population naive, il suffit donc de regarder la valeur de R_0 lorsque tous les individus sont sains, c'est à dire lorsque $S = N$.

Dans ce cas le taux de reproduction de base prend la valeur initiale $R_0 = \frac{\beta}{g}$.

2.3 Modèle endémique SIR

Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés à une seule épidémie. Une épidémie dure généralement quelques semaines à quelques mois, laps de temps au cours duquel les variations démographiques de la population hôte sont négligeables. C'est pour cette raison que la démographie de l'hôte n'est pas incluse dans le modèle précédent. Si maintenant nous nous intéressons à ce qui se passe sur le plus long terme pour les épidémies récurrentes par exemple, nous devons prendre en compte la démographie de la population hôte.

2.3.1 Présentation du modèle mathématique

Le modèle SIR endémique qu'on va étudier est donné par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \beta SI/N - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI/N - (g + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} = gI - \mu I - \mu R, \end{cases} \quad (2.6)$$

avec $S(t)$, $I(t)$ et R , β , N , μ , g sont les paramètres. Ces paramètres sont définis de la manière suivante :

- $S(t)$ représente la densité des individus susceptibles d'être infectés par la maladie à un instant t ,
- $I(t)$ représente la densité des individus infectés par la maladie et infectieux à un instant t ,
- $R(t)$ représente la densité des individus guéris, ou réfractaire,
- β rend compte du taux de contact infectieux,
- μ le taux de natalité et de mortalité des individus,
- g le taux des individus infectés guérissent.

Remarque 2.3.1. – *Le modèle SIR endémique est différent du modèle SIR épidémique par l'arrivée des nouveaux nés dans la classe des susceptibles au taux μN et les décès dans les classes aux taux μS , μI et μR .*

– *Le taux de natalité est égal au taux de mortalité ainsi la taille N de la population est constante.*

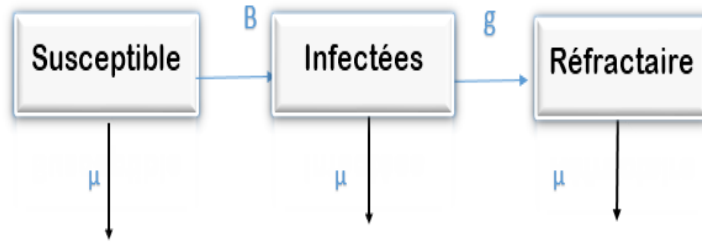


FIGURE 2.2 – Diagramme de modèle endémique SIR.

Remarque 2.3.2. Par le changement de variable $i(t) = \frac{I(t)}{N}$, $s(t) = \frac{S(t)}{N}$, $r(t) = \frac{R(t)}{N}$, on peut écrire le système (2.6) sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s, \\ \frac{di}{dt} = (\beta s - (g + \mu))i, \end{cases} \quad (2.7)$$

et

$$r(t) = 1 - s(t) - i(t).$$

2.4 Étude de la persistance du modèle

Notons \mathbb{R}_+^2 le quadrant positif, et $Int(\mathbb{R}_+^2)$ le quadrant strictement positif.

Lemme 2.4.1. *Le quadrant strictement positif $Int(\mathbb{R}_+^2)$ est invariant par le système (2.7).*

Démonstration

Remarquons, tout d'abord, que les frontières du quadrant positif \mathbb{R}_+^2 sont invariantes, cela est immédiat à partir des équations du système (2.7). De plus, les densités $s(t)$ et $i(t)$ sont strictement positives : pour $t \geq 0$, si $s(0) > 0$ et $i(0) > 0$ alors $s(t) > 0$ et $i(t) > 0$ car le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles assure que les solutions sont strictement positives et les axes ne peuvent se couper. ■

Nous montrerons que, sous certaines conditions, les solutions du système (2.7) issues de \mathbb{R}_+^2 sont semi bornées pour t suffisamment grand.

Définition 2.4.1. Une solution $\phi(t, t_0, s_0, i_0)$ du système (2.7) est dite bornée dans \mathbb{R}_+^2 s'il existe une région compacte $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+^2$ et un temps fini $T(T = T(t_0, s_0, i_0))$ tels que, pour tous $(t_0, s_0, i_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$, $\phi(t, t_0, s_0, i_0) \in \mathcal{A}$ pour tout $t > T$.

Théorème 2.4.2. Soit \mathcal{A} l'ensemble défini par :

$$\mathcal{A} = \{(s, i) \in \mathbb{R}_+^2; s \geq 0; i \geq 0; s + i \leq 1\}.$$

Alors

- a) \mathcal{A} est positivement invariant par le champ (2.7).
- b) toutes les solutions de (2.7) issues de \mathbb{R}_+^2 convergent vers l'ensemble attracteur \mathcal{A} .
- c) le système est dissipatif.

Démonstration

a) Soient $(s(0), i(0)) \in \mathcal{A}$, nous allons montrer que $(s(t), i(t)) \in \mathcal{A}$ pour tout $t \geq 0$.

Il est évident, à partir du lemme 2.2.1, que $(s(t), i(t))$ restent positifs, puisque $(s(0), i(0)) \in \mathcal{A}$.

- Nous devons montrer que pour tout $t > 0$, $s + i \leq 1$.

Posons

$$\sigma(t) = s(t) + i(t),$$

donc la dérivée

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} \\ &= -\mu(s + i) + \mu - gi \\ &\leq -\mu\sigma + \mu. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, (avec $\alpha_1 = \mu$ et $\alpha_2 = \mu$), nous obtenons, pour tout, $t \geq \tilde{T} \geq 0$.

$$\sigma(t) \leq 1 - (1 - \sigma(\tilde{T}))e^{-\mu(t-\tilde{T})}. \quad (2.8)$$

Pour $\tilde{T} = 0$, on obtient

$$\sigma(t) \leq 1 - (1 - \sigma(0))e^{-\mu}.$$

Finalement, il reste juste à remarquer que $(1 - \sigma(0)) > 0$ car $(s(0), i(0)) \in \mathcal{A}$ et on conclut que pour tout $t \geq 0$;

$$\sigma(t) = s(t) + i(t) \leq 1.$$

b) Nous montrons que, pour $(s(0), i(0)) \in \mathbb{R}_+^2$, $(s(t), i(t)) \rightarrow A$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Nous allons montrer que $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (s(t) + i(t)) \leq 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe T_1 , de l'expression (2.7) avec $\tilde{T} = T_1$; nous obtenons, pour tout $t \geq T_1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= s(t) + i(t) \\ &\leq 1 - (1 - \sigma(T_1))e^{-\mu(t-T_1)} \\ &\leq 1 - [e^{\mu T_1} - (s(T_1) + i(T_1))e^{\mu T_1}]e^{-\mu t} \\ &\leq 1 - [1 - (s(T_1) + i(T_1))e^{\mu T_1}]e^{-\mu t}, \end{aligned}$$

alors

$$\sigma(t) = s(t) + i(t) \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2}) - [(1 + \frac{\varepsilon}{2}) - (s(T_1) + i(T_1))e^{\mu T_1}]e^{-\mu t},$$

pour tout $t \geq T_1 \geq 0$.

Posons $T_2 \geq T_1$ tel que;

$$|[(1 + \frac{\varepsilon}{2}) - (s(T_1) + i(T_1))e^{\mu T_1}]e^{-\mu t}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $t \geq T_2$, alors;

$$s(t) + i(t) \leq 1 + \varepsilon.$$

Donc

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (s(t) + i(t)) \leq 1.$$

c) Le système (2.7) est évidemment dissipatif dans \mathbb{R}_+^2 , puisque toutes les solutions positives sont bornées. ■

2.5 Stabilité locale et bifurcations

Dans cette partie nous allons étudier l'existence et la stabilité des points d'équilibre qu'ils soient triviaux (i.e. appartenant à la frontière de \mathbb{R}_+^2) ou intérieure (i.e, appartenant à $Int(\mathbb{R}_+^2)$). Les différents points fixes sont donnés par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mu - \mu s - \beta si = 0, \\ \beta si - (g + \mu)i = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

On va résoudre d'abord la deuxième équation :

$$i(\beta s - (\mu + g)) = 0.$$

Si $i = 0$; ça veut dire le cas sans épidémie. On aura $s=1$ cela revient à trouver un équilibre sans maladie (un équilibre trivial)

$$E_0 = (s_0^*, i_0^*) = (1, 0).$$

Donc pour $i=0$, s représente tout la population qui est une population saine.

Par contre, dans le cas ou la population représente une épidémie (i.e : $i \neq 0$), on trouve :

$$s = \frac{\mu + g}{\beta} = \frac{1}{R_0},$$

et on remplaçant ce dernier dans la première équation de (2.9) qui donne :

$$i = \frac{\mu(R_0 - 1)}{\beta}.$$

Par conséquent, le point d'équilibre est donné par :

$$E_1 = (s_1^*, i_1^*) = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu(R_0 - 1)}{\beta} \right).$$

2.5.1 Étude de la stabilité de point d'équilibre trivial

Nous allons analyser la stabilité locale de point d'équilibre E_0 .

On pose,

$$f_1(s, i) = -\beta si + \mu - \mu s,$$

$$f_2(s, i) = \beta si - (\mu + g)i.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{ds} &= -\beta i - \mu, \\ \frac{df_1}{di} &= -\beta s, \\ \frac{df_2}{ds} &= \beta i, \\ \frac{df_2}{di} &= \beta s - (\mu + g). \end{aligned}$$

Donc la matrice jacobienne à un point d'équilibre $E(s, i)$ est

$$J(s, i) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{ds} & \frac{df_1}{di} \\ \frac{df_2}{ds} & \frac{df_2}{di} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta i - \mu & -\beta s \\ \beta i & \beta s - (\mu + g) \end{pmatrix}.$$

on a Pour le point trivial $E_0 = (1, 0)$:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - (\mu + g) \end{pmatrix}.$$

$J(E_0)$ est triangulaire donc, il y a deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = -\mu < 0, \quad \lambda_2 = \beta \left(1 - \frac{1}{R_0}\right),$$

Ce qui conduit aux trois possibilités suivantes :

a) cas 1 : si $R_0 < 1$

Dans ce cas la partie réel des deux valeurs propre λ_1 et λ_2 sont de signe négatif, alors E_0 est localement asymptotiquement stable.

b) cas 2 : si $R_0 > 1$

On obtient que $Re(\lambda_2) > 0$

alors E_0 est un point d'équilibre instable.

c) cas 3 : si $R_0 = 1$, on ne pas conclure.

2.5.2 Étude la stabilité du point d'équilibre intérieur

De même manière pour E_1 on trouve :

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -\mu R_0 & -(g + \mu) \\ \mu(R_0 - 1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, l'étude de la stabilité du point d'équilibre se fait suivant la trace et le déterminant de la matrice jacobienne noté $J(E_1)$

avec

$$\begin{cases} \text{tr}J(E_1) = \lambda_1 + \lambda_2, \\ \text{det}J(E_1) = \lambda_1 \cdot \lambda_2. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \text{tr}J(E_1) = -\mu R_0, \\ \text{det}J(E_1) = \mu(R_0 - 1)(g + \mu). \end{cases}$$

Ainsi on a :

a) cas 1 Si : $R_0 < 1$

$$\begin{cases} \text{tr}J(E_1) < 0, \\ \text{det}J(E_1) < 0. \end{cases}$$

On en déduit que les deux valeur propre sont du signe opposé, i.e, le point d'équilibre E_1 est instable.

b) cas 2 Si : $R_0 > 1$

$$\begin{cases} \text{tr}J(E_1) < 0, \\ \text{det}J(E_1) > 0. \end{cases}$$

On déduit que les deux valeur propre sont du même signe négatif, i.e, le point d'équilibre E_1 est un nœud asymptotiquement stable.

c) **cas 3 Si** : $R_0 = 1$

$$\begin{cases} \text{tr}J(E_1) < 0, \\ \det J(E_1) = 0. \end{cases}$$

On déduit que $\mathcal{R}(\lambda_1) = 0$. donc on ne peut pas conclure par la méthode de linéarisation donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\mu$.

Remarque 2.5.1. Dans le cas de $R_0 = 1$, le point intérieur E_1 coïncide avec le point trivial E_1 .

Et en a le résultat suivant

Lemme 2.5.1. Si $R_0 = 1$, le système (2.7) admet une bifurcation de type transcritique.

Démonstration

Dans ce cas de R_0 , le point E_0 possède une valeur propre négative $\lambda_2 = -\mu$ et l'autre nulle. Et nous ne pourrons pas conclure qu'après l'étude de la **variété centrale**. Premièrement ramenons le système à l'origine par le changement de coordonnées suivant :

$$s \longrightarrow s + 1, \quad i \longrightarrow i,$$

et posons

$$\varepsilon = R_0 - 1.$$

En ajoutant l'équation triviale $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ et en notant que $R_0 = \varepsilon + 1$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\mu s - \beta(s + 1)i, \\ \frac{di}{dt} = \beta i \left(s + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}\right), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Maintenant, on applique l'algorithme de l'approximation de la partie centrale.

Étape 1

Nous allons étudier la dynamique de (2.10) au voisinage de l'origine $(0, 0, 0)$. Nous allons commencer par mettre la matrice Jacobienne du champ de vecteur sous la forme de Jordan.

On a :

$$J(s, i, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta i & -\beta(s+1) & 0 \\ \beta i & \beta(s + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}) & \frac{\beta i}{(\varepsilon+1)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Étape 2

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont les suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\mu} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On complète la base par le vecteur canonique :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta}{\mu} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Prenons le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} s \\ i \\ \varepsilon \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} s \\ i \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{\mu} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{cases} u = s + \frac{\beta}{\mu}i, \\ v = i, \\ \eta = \varepsilon, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} s = u - \frac{\beta}{\mu}i, \\ i = v, \\ \varepsilon = \eta, \end{cases}$$

Étape 3

Ce qui nous permet d'écrire le système, en gardant la notation en ε .

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\mu u + \left(\frac{\beta^2}{\mu} - \beta\right)uv + \left(\frac{\beta^2}{\mu} - \frac{\beta^3}{\mu^2}\right)v^2 + \left(\frac{\beta^2\varepsilon}{\mu(\varepsilon+1)}\right)v = f(u, v, \varepsilon). \\ \frac{dv}{dt} = \beta v \left(u - \frac{\beta}{\mu}v + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) = g(u, v, \varepsilon). \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Étape 4

Avant de chercher la variété centre associée à E_0 et E_1 , nous allons écrire chaque équation du système (2.11) sous la forme d'un développement de Taylor et calculer ensuite la forme normale.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & \alpha_{000} + \alpha_{100}u + \alpha_{200}u^2 + \alpha_{110}uv + \alpha_{101}u\varepsilon + \alpha_{010}v + \alpha_{020}v^2 \\ & + \alpha_{011}v\varepsilon + \alpha_{001}\varepsilon + \alpha_{001}\varepsilon^2 + O(3). \end{aligned}$$

Après calculs, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_{000} = f(0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{100} = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 0) = -\mu, \\ \alpha_{200} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{110} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(0, 0, 0) = \frac{\beta^2}{\mu} - \beta, \\ \alpha_{101} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{010} = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0, 0) = 0, \\ \alpha_{020} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0, 0, 0) = 2\left(\frac{\beta^2}{\mu} - \frac{\beta^3}{\mu^2}\right), \\ \alpha_{011} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial \varepsilon}(0, 0, 0) = \frac{\beta^2}{\mu}, \end{aligned}$$

$$\alpha_{001} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 0, \quad \alpha_{002} = \frac{\partial f^2}{\partial \varepsilon^2}(0, 0, 0) = 0.$$

Pour la seconde équation, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = & \beta_{000} + \beta_{100}u + \beta_{200}u^2 + \beta_{110}uv + \beta_{101}u\varepsilon + \beta_{010}v + \beta_{020}v^2 \\ & + \beta_{011}v\varepsilon + \beta_{001}\varepsilon + \beta_{002}\varepsilon^2 + O(3), \end{aligned}$$

où les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned} \beta_{000} = g(0, 0, 0) = 0, \quad \beta_{100} = \frac{\partial g}{\partial u}(0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{200} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) = 0, \quad \beta_{110} = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) = \beta, \\ \beta_{101} = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 0, \quad \beta_{010} = \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{020} = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0, 0, 0) = -2\frac{\beta^2}{\mu}, \quad \beta_{011} = \frac{\partial g^2}{\partial v \partial \varepsilon}(0, 0, 0) = \beta, \\ \beta_{001} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 0, \quad \beta_{002} = \frac{\partial g^2}{\partial \varepsilon^2}(0, 0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Ce développement nous conduit au système :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\mu u + \left(\frac{\beta^2}{\mu} - \beta\right)uv + 2\left(\frac{\beta^2}{\mu} - \frac{\beta^3}{\mu^2}\right)v^2 + \frac{\beta^2}{\mu}v\varepsilon + O(3), \\ \frac{dv}{dt} = \beta uv - 2\frac{\beta^2}{\mu}v^2 + \beta v\varepsilon + O(3), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Étape 5

Nous savons que la variété centrale est l'ensemble :

$$W^c = \{(u, v, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3 / u = h(v, \varepsilon), |v| < \delta_1, |\varepsilon| < \delta_2, h(0, 0) = \partial_v h(0, 0) = 0\},$$

où

$$u = h(v, \varepsilon) = lv^2 + mv\varepsilon + \theta\varepsilon^2 + O(3), \quad l, \quad m, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Puisque $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$, on a

$$\frac{du}{dt} = \frac{dh(v, \varepsilon)}{dv} \frac{dv}{dt}.$$

Cette équation nous permet de calculer les coefficients l, m et θ on a :

$$\frac{dh(v, \varepsilon)}{dv} \frac{dv}{dt} - \frac{du}{dt} = 0,$$

où

$$\frac{dh(v, \varepsilon)}{dv} = 2lu + m\varepsilon + O(2).$$

Après simplification et identification on obtient les valeurs des coefficients l , m et θ :

$$\begin{cases} l = 2\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^2\left(1 - \frac{\beta}{\mu}\right), \\ m = \left(\frac{\beta}{\mu}\right)^2, \\ \theta = 0. \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$u = h(v, \varepsilon) = \frac{2}{\mu}\left(\frac{\beta^2}{\mu} - \frac{\beta^3}{\mu^2}\right)v^2 + \left(\frac{\beta}{\mu}\right)^2v\varepsilon + O(3).$$

En reportant la valeur de u dans la deuxième équation de système précédent, on obtient de u le long de la variété centrale et donc le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -2\frac{\beta^2}{\mu}v^2 + \beta v\varepsilon + O(3) = G(v, \varepsilon), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases}$$

on a les conditions suivantes :

$$G(0, 0) = G_u(0, 0) = 0.$$

la variété centrale est tangente à la l'axe (ov) à l'origine, de plus :

$$G_\varepsilon(0, 0) = 0,$$

et

$$G_{vv}(0, 0) = -2\frac{\beta^2}{\mu} \neq 0.$$

Pour $R_0 = 1$ alors le système (2.6) présente une bifurcation transcritique aux points E_0 . ■

CHAPITRE 3

MODÈLE ENDÉMIQUE SIR AVEC VACCINATION

Il existe deux politiques de vaccination, à savoir la vaccination par pulsation. Dans cette section, est consacrée à la vaccination de type constante.

La vaccination constante :

Selon la stratégie de vaccination constante, tous les nouveau-nés doivent être vaccinés et p est la proportion de ceux vaccinés avec succès ($0 \leq p \leq 1$).

Si la population est vacciné avec une couverture vaccinale de p alors la condition pour qu'il n'y ait pas d'épidémie devient :

$$R = R_0(1 - p) < 1.$$

soit

$$p > 1 - \frac{1}{R_0}.$$

cette dernière relation nous donne la couverture vaccinale minimale qu'il faut appliquer pour empêcher le démarrage d'une épidémie dans une population. On remarque que cette couverture est inférieure à 100 pour cent ce qui veut dire qu'il n'est pas nécessaire de vacciner tous les individus de la population pour protéger entièrement cette population contre une maladie. On remarque aussi que la couverture minimale à appliquer dépend du taux de reproduction de base R_0 , d'où l'importance cruciale de ce paramètre en épidémiologie.

En pratique, des couvertures de vaccination élevées (supérieure à 75 pour cent) sont difficile

a atteindre et ce d'autant plus que la superficie sur laquelle est appliquée la politique de vaccination est élevée.

C'est pour cette raison la variole est à ce jour, la seule maladie infectieuse que l'on ait réussi à éradiquer de la surface du globe. C'est aussi pour cette raison que, malgré les efforts fournis, on n'a toujours pas réussi à éradiquer la rougeole [11].

3.1 Modèle endémique SIR avec vaccination constante

3.1.1 Présentation du modèle

Du point de vue d'un individu, il semble que la prévention de la maladie passe toujours par la vaccination. Cette stratégie consiste à vacciner une proportion désignée p des nouveaux nés de la population.

Cela est formalisée conventionnellement dans le modèle SIR, en réduisant le taux de naissance des susceptibles de μ à $(1 - p)\mu$.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu(1 - p) - \beta I - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu + g)I, \\ \frac{dR}{dt} = gI - \mu R + p\mu. \end{cases} \quad (3.1)$$

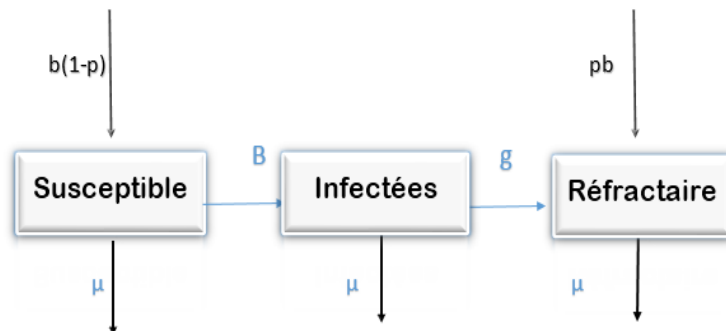


FIGURE 3.1 – Diagramme de modèle endémique SIR avec vaccination.

3.1.2 Stabilité locale et bifurcation

Dans cette partie nous allons étudier l'existence et la stabilité des points d'équilibre, qu'ils soient triviaux ou intérieurs.

Les différents points fixes sont donnés par le système suivant :

$$\begin{cases} \mu(1-p) - \beta I - \mu S = 0, \\ \beta SI - (\mu + g)I = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $R = 1 - S - I$, et $R_1 = \frac{(1-p)\beta}{\mu+g}$,

le système (3.2) admet deux points d'équilibres, l'un trivial et l'autre épidémique.

Par la deuxième équation de système (3.2) on obtient :

$$I(\beta S - (\mu + g)) = 0.$$

• Si $I = 0$ d'où, $S = (1 - p)$.

On conséquence, le point d'équilibre trivial est :

$$\tilde{E}_0 = (S_0^*, I_0^*) = (1 - p, 0).$$

• Si $I \neq 0$ on trouve, $S = \frac{\mu+g}{\beta}$.

En remplaçant S dans la première équation de système (3.2), on trouve :

$$\mu(1-p) - \frac{\mu+g}{\beta}(\beta I + \mu) = 0.$$

alors

$$I = \frac{\mu}{\beta}(R_1 - 1),$$

donc, le point d'équilibre est :

$$\tilde{E}_1 = (S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\mu+g}{\beta}, \frac{\mu}{\beta}(R_1 - 1)\right).$$

qui est un point d'équilibre épidémique.

Théorème 3.1.1. *Le point d'équilibre sans maladie $((1-p), 0)$ est localement stable ssi $R_1 < 1$.*

Le point d'équilibre endémique $(\frac{\mu+g}{\beta}, \frac{\mu}{\beta}(R_1 - 1))$ stable si $R_1 > 1$.

Démonstration

La matrice jacobienne à un point d'équilibre $\tilde{E}(s, i)$.

On pose

$$f(S, I) = \mu(1-p) - \beta I - \mu S.$$

$$g(S, I) = \beta SI - (\mu + g)I.$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{df}{dS} &= -\beta I - \mu, \\ \frac{df}{dI} &= -\beta s, \\ \frac{dg}{dS} &= \beta I, \\ \frac{dg}{dI} &= \beta S - (\mu + g).\end{aligned}$$

Donc

$$J(s, i) = \begin{pmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ \beta I & \beta S - (\mu + g) \end{pmatrix}.$$

• **La stabilité des point d'équilibre sans maladie (point trivial)**

Il'ya une seule point trivial $\tilde{E}_0 = (1 - p, 0)$.

Aux se point la matrice est :

$$J(\tilde{E}_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta(1 - p) \\ 0 & \beta(1 - p) - (\mu + g) \end{pmatrix}.$$

La matrice triangulaire supérieure alors, les valeurs propres sont les éléments diagonaux de cette matrice :

$$\lambda_1 = -\mu < 0, \quad \lambda_2 = (\mu + g)(R_1 - 1),$$

Nous étudions la stabilité suivants la signe de λ_2 , on distingue trois cas :

a) cas 1 : si $R_1 < 1$

alors $Re(\lambda_2) < 0$, puisque les deux valeurs propre sont de signe négatif, on conclut quelque le point \tilde{E}_0 est localement asymptotiquement stable.

b) cas 2 : si $R_1 > 1$

on obtient que $Re(\lambda_2) > 0$,

alors les valeurs propre sont de signe opposé alors, \tilde{E}_0 est un point d'équilibre instable.

c) cas 3 : si $R_1 = 1$, On ne pas conclure.

• **Étude la stabilité des points d'équilibre intérieurs**

De même manière pour \tilde{E}_1 on trouve la matrice :

$$J(\tilde{E}_1) = \begin{pmatrix} -\mu R_1 & -(g + \mu) \\ \mu(R_1 - 1) & 0 \end{pmatrix}.$$

L'étude de la stabilité du point d'équilibre se fait suivant la trace et le déterminant de la matrice jacobienne noté $J(\tilde{E}_1)$.

On obtient

$$\begin{cases} \text{tr}J(\tilde{E}_1) = -\mu R_1 < 0, \\ \text{det}J(\tilde{E}_1) = \mu(R_1 - 1)(g + \mu). \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité des points d'équilibre suivant le signe de R_1 :

a) cas 1 : $R_1 < 1$, donc

$$\text{det}J(\tilde{E}_1) < 0,$$

on en déduit que les deux valeurs propres sont du signe opposé, alors le point d'équilibre \tilde{E}_1 est instable.

b) cas 2 : $R_1 > 1$, donc

$$\text{det}J(\tilde{E}_1) > 0,$$

on déduit que les deux valeurs propres sont du même signe, i.e, le point d'équilibre \tilde{E}_1 est un nœud asymptotiquement stable.

c) cas 3 : $R_1 = 1$, donc

$$\text{det}J(\tilde{E}_1) = 0.$$

On déduit que $\text{Re}(\lambda_1) = 0$, donc on ne peut pas conclure.

On peut remarquer que le point intérieur \tilde{E}_1 coïncide avec le point trivial \tilde{E}_0 . Dans ce cas, le point \tilde{E}_0 possède une première valeur propre négative $\lambda_1 = -\mu$, et la seconde est nulle $\lambda_2 = 0$. Et nous ne pourrions conclure qu'après l'étude de la **variété centrale**. Pour cela, ramenons le système à l'origine par le changement de coordonnées suivant :

$$S \longrightarrow S + (1 - p),$$

$$I \longrightarrow I,$$

et posons

$$\varepsilon = R_1 - 1.$$

En ajoutant l'équation triviale $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ et en notant que $R_0 = \varepsilon + 1$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta I(S + (1-p)) - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} = (\mu + g)I\left(\frac{\beta S}{\mu+g} + \varepsilon\right), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Nous allons étudier la dynamique de (3.3) au voisinage de $\varepsilon = 0$, puisque les $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < 0$.

Étape 1

Nous allons commencer par mettre la matrice Jacobienne du champ de vecteur sous la forme de Jordan. On a :

$$J(s, i, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\beta I - \mu & -\beta(S + (1-p)) & 0 \\ \beta I & (\mu + g)\left(s + \frac{\beta S}{\mu+g} + \varepsilon\right) & (\mu + g) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta(1-p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Étape 2

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont les suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\beta(1-p)}{\mu} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On complète la base par le vecteur canonique :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta(1-p)}{\mu} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Prenons le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} S \\ I \\ \varepsilon \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ \xi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ \xi \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} S \\ I \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta(1-p)}{\mu} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{cases} x = s + \frac{\beta(1-p)}{\mu} I, \\ y = I, \\ \xi = \varepsilon, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} S = x - \frac{\beta(1-p)}{\mu} I, \\ I = y, \\ \varepsilon = \xi, \end{cases}$$

Étape 3

Ce qui nous permet d'écrire le système, en gardant la notation en ε .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \beta y x - \beta^2 y^2 \frac{(1-p)}{\mu} + \varepsilon y (\mu + g) = f(x, y, \varepsilon). \\ \frac{dy}{dt} = \left(\frac{\beta^2(1-p)}{\mu} - \frac{\beta^3(1-p)^2}{\mu^2} \right) y^2 + \left(\frac{\beta^2(1-p)}{\mu} x - \beta x + \frac{\beta(1-p)}{\mu} \varepsilon (\mu + g) \right) y - \mu x = g(x, y, \varepsilon). \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Étape 4

Avant de chercher la variété centre associée à \tilde{E}_0 et \tilde{E}_1 , nous allons écrire chaque équation du système (2.11) sous la forme d'un développement de Taylor et calculer ensuite la forme normale.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_{000} + \alpha_{100}x + \alpha_{200}x^2 + \alpha_{110}xy + \alpha_{101}x\varepsilon + \alpha_{010}y + \alpha_{020}y^2$$

$$+\alpha_{011}y\varepsilon + \alpha_{001}\varepsilon + \alpha_{001}\varepsilon^2 + O(3).$$

Après calculs, on obtient

$$\begin{aligned}\alpha_{000} &= f(0, 0, 0) = 0, & \alpha_{100} &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = -\mu, \\ \alpha_{200} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) = 0, & \alpha_{110} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0, 0) = -\beta + \frac{\beta^2(1-p)}{\mu}, \\ \alpha_{101} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 0, & \alpha_{010} &= \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = 0, \\ \alpha_{020} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0, 0) = 2\left(\frac{\beta^2(1-p)}{\mu} - \frac{\beta^3(1-p)^2}{\mu^2}\right), \\ \alpha_{011} &= \frac{\partial f^2}{\partial y \partial \varepsilon}(0, 0, 0) = \frac{\beta^2(1-p)}{\mu}(\mu + g), \\ \alpha_{001} &= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 0, & \alpha_{002} &= \frac{\partial f^2}{\partial \varepsilon^2}(0, 0, 0) = 0,\end{aligned}$$

pour la seconde équation, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \beta_{000} + \beta_{100}x + \beta_{200}x^2 + \beta_{110}xy + \beta_{101}x\varepsilon + \beta_{010}y + \beta_{020}y^2 \\ &\quad + \beta_{011}y\varepsilon + \beta_{001}\varepsilon + \beta_{002}\varepsilon^2 + O(3),\end{aligned}$$

où les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned}\beta_{000} &= g(0, 0, 0) = 0, & \beta_{100} &= \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{200} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0, 0) = 0, & \beta_{110} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0, 0) = \beta, \\ \beta_{101} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 0, & \beta_{010} &= \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0, 0) = 0, \\ \beta_{020} &= \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0, 0, 0) = -2\frac{\beta^2(1-p)}{\mu}, & \beta_{011} &= \frac{\partial g^2}{\partial y \partial \varepsilon}(0, 0, 0) = (\mu + g), \\ \beta_{001} &= \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(0, 0, 0) = 0, & \beta_{002} &= \frac{\partial g^2}{\partial \varepsilon^2}(0, 0, 0) = 0.\end{aligned}$$

Ce développement nous conduit au système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\mu x + \left(\frac{\beta^2(1-p)}{\mu} - \beta\right)xy + 2\left(\frac{\beta^2(1-p)}{\mu} - \frac{\beta^3(1-p)^2}{\mu^2}\right)y^2 + \frac{\beta^2(1-p)}{\mu}(\mu + g)\varepsilon y + O(3), \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - 2\frac{\beta^2(1-p)}{\mu}y^2 + (\mu + g)\varepsilon y + O(3), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Étape 5

Nous savons que la variété centrale est l'ensemble :

$$W^c = \{(x, y, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3 / x = h(y, \varepsilon), |y| < \delta_1, |\varepsilon| < \delta_2, h(0, 0) = \partial_y h(0, 0) = 0\},$$

où

$$x = h(y, \varepsilon) = \alpha_1 y^2 + \alpha_2 y \varepsilon + \gamma \varepsilon^2 + O(3).$$

Puisque $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dh(y, \varepsilon)}{dy} \frac{dy}{dt}.$$

Cette équation nous permet de calculer les coefficients α_1, α_2 et γ on a :

$$\frac{dh(y, \varepsilon)}{dy} \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = 0,$$

où

$$\frac{dh(y, \varepsilon)}{dy} = 2\alpha_1 y + \alpha_2 \varepsilon + O(2).$$

Après simplification et identification on obtient les valeurs des coefficients α_1, α_2 et γ :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2}{\mu} \left(\frac{\beta^3(1-p)^2}{\mu^2} \right), \\ \alpha_2 = \frac{\beta^2(1-p)}{\mu^2} (\mu + g), \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$x = h(x, \varepsilon) = 2 \left(\frac{2}{\mu} \left(\frac{\beta^3(1-p)^2}{\mu^2} \right) \right) y^2 + \frac{\beta^2(1-p)}{\mu^2} (\mu + g) y \varepsilon + O(3).$$

En reportant la valeur de v dans la première équation de système précédente, on obtient de u le long de la variété centrale et donc le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2}{\mu} \left(\frac{\beta^3(1-p)^2}{\mu^2} \right) - \beta^2(1-p) y^2 + \left(\frac{\beta^3(1-p)}{\mu^2} + 1 \right) y \varepsilon + O(3) = G(y, \varepsilon), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases}$$

On a les conditions suivantes :

$$G(0, 0) = 0, G_y(0, 0) = 0.$$

La variété centrale est tangente à la l'axe (oy) à l'origine, de plus :

$$G_\varepsilon(0, 0) = 0.$$

et

$$G_{yy}(0,0) = -\frac{2}{\mu} \left(\left(\frac{\beta^3(1-p)^2}{\mu^2} \right) - \beta^2(1-p) \right) \neq 0.$$

Pour $R_0 = 1$ alors le système(3.5) présente une bifurcation transcritique aux points \tilde{E}_0 . ■

Remarque 3.1.1. Si R_1 implique que $p > 1 - \frac{1}{R_0}$ avec $R_0 = \frac{\beta}{\mu+g}$ est le taux de reproduction de base pour le modèle SIR. Cela veut dire que la vaccination constante révèle qu'il ya une proportion critique p_c qu'il faut la vacciner afin d'éradiquer la maladie. Le seuil est donné par

$$p_c = 1 - \frac{1}{R_0}.$$

la conclusion finale est la suivante

* Pour les taux de vaccination relativement importantes, à savoir, $p \geq p_c$, l'équilibre sans maladie est stable.

* Pour les taux de vaccination relativement faible, c'est à dire, $p \leq p_c$, l'équilibre endémique est stable.

Par conséquent, augmenter la proportion de vaccination p réduit à l'équilibre et de façon linéaire le nombre d'individus susceptibles reste inchangé.

Le seuil de vaccination concernant la rougeole est,

$$p_c = 0.95$$

Alors pour que la stratégie de vaccination constante devienne faible, il faut vacciner au moins 95 de tout les enfants peu après leur naissance. Comme déjà mentionner, dans la pratique, il est à la fois difficile et coûteux de mettre en uvre la vaccination pour une telle couverture importante de la population. Nous sommes donc conduit à examiner le potentiel d'autres stratégies telle que la vaccination par pulsation.

3.2 Simulation numérique

Le comportement qualitatif des solution du modèle SIR avec vaccination constante change en fonction des paramètres β , μ et g et de plus le taux de vaccination p .

Dans cette section, on a fait une simulation numérique du système (3.1) par la méthode de Euler explicite et programmé en Matlab.

Les valeurs des paramètres prise sont $\beta = 2$, $\mu = 0.5$, $p = 0.4$ et $g = 0.5$.

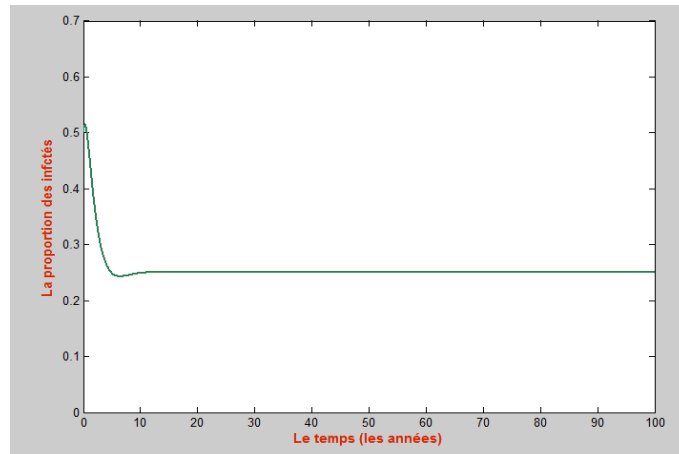
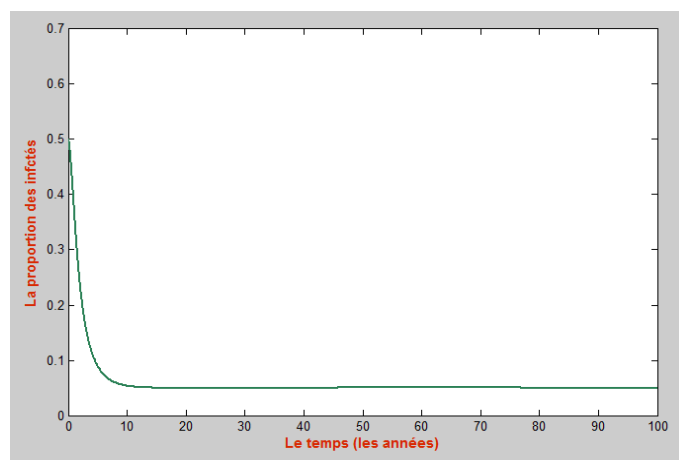
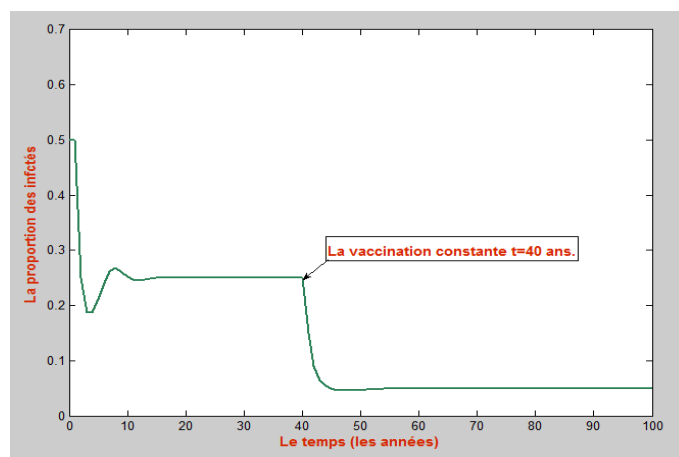
FIGURE 3.2 – Simulation du Modèle endémique SIR sans vaccination $p=0$.FIGURE 3.3 – Simulation du Modèle endémique SIR avec la vaccination constante $p=0.4$.

FIGURE 3.4 – Simulation du Modèle endémique SIR avant et après la vaccination.

Une simple comparaison des figures précédentes, donne que l'application d'une vaccination à un temps convenable ($t = 40 \text{ ans}$) à réduit le nombre des infectés par la parution d'un nouvel équilibre, donc on a le taux de production $R_0 = 2 > 1$.

Ce qui montre que la stratégie de la vaccination constante et fiable.

CONCLUSION

Les modèles présentes dans ce mémoire font partie du cadre général de l'étude de la dynamique des systèmes d'équations différentielles ordinaires qui modélisent la propagation d'une épidémie avec et sans vaccination.

En premier lieu, nous avons présenté deux types des modèles sans vaccination : SIS et SIR. Nous avons montré l'existence d'une solution unique et positive, de plus nous avons donné une étude qualitative des points d'équilibres trivial et endémique. Pour cela nous avons constaté l'existence d'un changement du comportement détecter par l'existence d'une bifurcation transcritique.

Une simulation numérique a été établie pour le modèle avec vaccination et d'un point de vue biologique, nous avons constaté qu'une stratégie d'une vaccination peut réduire considérablement le nombre de cas infectés et ainsi réduire la propagation d'une épidémie.

L'étude qualitative des systèmes dynamiques est devenu un outil indispensable pour contrôler et panifier les épidémies par les autorités sanitaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Abdallaoui., Modélisation et étude mathématique de quelques problèmes de dynamique des populations., *Thèse de doctorat Rebat*, (2007).
- [2] A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon and A. G. Maier, Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane, Program for Scientific Translations, (1971).
- [3] V.I. Arnold., Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires., *MIR*, Moscou, (1980).
- [4] E.A. Conddington and N. Levinson., Theory of ordinary differential equations, Mc Graw-Hill book Company, New York (1995).
- [5] H. Dang-Vu et C. Delcarte., Bifurcation et Chaos., *Ellipses*, Paris, (2000).
- [6] M. W. Hirsch et S. Smale., Differential equations, dynamical systems and linear algebra., *Academic Press*, New York, (1974).
- [7] W. Khellaf., Systèmes dynamiques et modèles d'évaluation des actifs naturels et environnementaux : Application aux problèmes de dynamique des populations., *Thèse de doctorat en science*, Université de Constantine, (2013).
- [8] J . E. Marsden et M. McCracken., The Hopf bifurcation and its applications., *Springer*, Berlin, (1976).
- [9] L. Perko., Differential equations and dynamical systems., *Springer*, New York, (2000).
- [10] H. Reinhard., Equations différentielles fondements et applications., *Bords*, Paris, (1989).
- [11] S. Bentout., Application de la Vaccination par Pulsation à quelques Modèles Épidémiologiques., *Mémoire de master en Mathématique*, Université de Telemcen, (2012).

- [12] S.Bentout., Mathématiques Appliquée à Quelques Modèles épidémiologiques., *Thèse de doctorat en Mathématique*, Université de Tlemcen.
- [13] A. Oucha., Analyse d'un modèle épidémiologique de type SEIR avec vaccination., *Mémoire de master en Mathématique*, Université de Tlemcen, (2016).
- [14] A. Gasri., Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques., *Thèse de doctorat en science de Mathématique*, Université de constantine, (2018).
- [15] Y. Hamadi., Analyse et contrôle de quelques problèmes non linéaires singuliers en épidémiologie., *Thèse de doctorat en science*, Université de Mostaganem, (2019).
- [16] M. Boulahyouné et S. Boudraa., Contrôle des Systèmes Dynamiques Chaotiques., *Mémoire de master en Mathématique*, Université de jijel, (2018).
- [17] O. Diekmann and J.A.P. Heesterbeek., *Mathematical epidemiology of infectious diseases : model building, analysis and interpretation.*, wiley, (2002).