

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET
POPULAIRE**

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université de Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de mathématiques

N d'ordre : ...
N de série : ...

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : Master
Spécialité : Mathématiques
Option : EDP et Applications

Thème

Étude Qualitative d'un Système Dynamique Non-Linéaire.

Présenté par :

Brella Imane
Chelli Selma

Devant le jury :

Président	Wahiba Khellaf	M.C.B	U. de Jijel.
Encadreur	Assia Zazoua	M.C.B	U. de Jijel.
Examineur	Hani Benhassine	M.C.B	U. de Jijel.

Promotion **2020-2021**

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier *Dieu*, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Nous tenons aussi à remercier notre encadreur " **Dr.Assia Zazoua**", pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury " **Dr.Wahiba Khellaf**" et "**Dr.Hani Benhassine**" pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous voulons exprimer nos remerciements et notre gratitude à tous nos enseignants pour leurs efforts fournis durant toute la période d'étude, ainsi qu'à toutes les personnes qui nous ont apportés l'aide et l'assistance nécessaire et qui ont collaboré d'une façon ou d'une autre à l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A

Maman AICHA la femme la plus affectueuse et la plus douce au monde, ma très chère Mère, pour son amour et tous son sacrifice, encouragement, et son soutien qui ont été la raison de ma réussite.

A Mon Père Abd Arazzak, pour m'avoir toujours soutenu et pour ses nombreux sacrifices.

Mes Sœurs : Hadjer et Yousra.

Mon seul Frère : Yacine.

*A toutes mes amies proche que j'aime.
A toutes mes collègues de mathématique
que j'aime.
et tous ceux que j'aime et qui m'aiment.*

IMANE

Dédicace

Du profond du mon coeur, je dédie ce modeste travail :

À la personne la plus précieuse et la plus chère, ma mère "Malika rabi yarhamha".

À ceux qui ont fait de moi une bonne personne et une femme forte dans ce monde, mon père "SAID" et Ma chère tante "Djamaa".

À Mes chers frères et sœurs "Yasser", "Sami", "Djihed", "Mariem" et "Imene".

À Mon Mari "Fares" et tout sa famille.

À les enfants "Issra", "Abd-Moaiz", "Kossay", "Oumayma" et "Teym".

*À tous mes amies de promotion 2^{eme} année master **EDP** et **Applications**.*

*À mes amies avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables .
"IKRAM", "NEGJLA", "SAWSEN ", "SAMIRA", je leur souhaite de ma part la réussite.*

À tous ceux qui ont une place dans mon coeur.

*À toutes les membres de ma famille et toute personne porte le nom
"CHELLI" et "CHERIET".*

*Enfinement, je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à **ma réussite**.
Merci d'être toujours là pour moi.*

SELMA

Table des matières

Introduction	6
1 Préliminaires	8
1.1 systèmes dynamiques	8
1.2 Théorème d'existence et d'unicité	9
1.3 État d'équilibre	12
1.3.1 Stabilité des équilibres	12
1.3.2 Méthode indirecte de Lyapunov	13
1.3.3 Méthode direct de Lyapunov	13
2 Le modèle "SIR"	15
2.1 Présentation du modèle	15
2.2 Existence et unicité de la solution	17
2.3 Calcul des équilibres	20
2.4 Stabilité locale des équilibres	22
2.5 Stabilité globale	24
2.6 Simulations numériques	25
3 Le modèle "SIRV"	29
3.1 Existence et unicité de la solution	30
3.2 Calcul des équilibres	31
3.3 Stabilité locale des équilibres	33
3.4 Stabilité globale	35
3.5 Simulations numériques	38
Conclusion	40
Bibliographie	41

Introduction

Depuis plusieurs décennies, la théorie des systèmes dynamiques est un sujet de recherche vaste et actif qui consiste à étudier des modèles mathématiques qui ont été proposés par des experts créatifs dans plusieurs domaines tels que la physique, la chimie, la biologie, l'économie, etc.

Un système dynamique est écrit comme un système d'équations différentielles où ce système peut être utilisé comme un outil pour analyser l'environnement qui nous entoure et donc l'étude qualitative d'un modèle mathématique d'un phénomène peut être défini comme une méthode efficace utilisée pour s'attendre le comportement futur de ce phénomène. Par exemple, en épidémiologie les modèles mathématiques sont utilisés pour analyser et étudier la propagation des maladies infectieuses et donc pour répondre à quelques questions concernant le contrôle de ces épidémies .

L'objectif de ce mémoire est l'analyse qualitative d'un système dynamique non-linéaire où les solutions exactes de ces systèmes complexes sont souvent difficiles à résoudre. Pour mieux comprendre cette méthode on a choisit de détailler un article de Chauhan *et al.* [6] intitulé : "*stability analysis of SIR model with vaccination*". Dans cet article, l'auteur s'intéresse à l'étude de la stabilité locale et globale des équilibres de deux modèles de propagation d'une épidémie avec et sans vaccination.

Notre travail est composé de trois chapitres :

Le but du premier chapitre est de donner un cadre fonctionnel commode pour notre étude. Nous en rappelons les définitions et les propriétés principales des systèmes dynamiques, nous rappelons aussi quelques notions et théorèmes de stabilité qui nous servirons de référence aux chapitres 2 et 3.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du modèle de propagation d'une épidémie "**SIR**" sans vaccination. On montre que ce problème admet une unique solution positive. De plus, on trouve que le nombre de reproduction de base noté par R_0 détermine la stabilité locale et globale des équilibres, précisément, on aura l'apparition d'une épidémie si $R_0 > 1$, et on aura la disparition de l'épidémie lorsque $R_0 \leq 1$.

Au troisième chapitre, on présente le modèle "**SIRV**" qui est un modèle

de propagation d'une épidémie avec vaccination. L'existence et l'unicité de la solution positive est achevée. De plus un nouveau nombre de reproduction de base noté par $R_v = R_0(1 - p)$ qui détermine la stabilité locale et globale des équilibres est obtenu. De cette étude nous avons constaté que le paramètre " p " (taux de vaccination) peut réduire considérablement le nombre de cas confirmés et donc empêcher la propagation d'une épidémie.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle les notions de base utilisées tout au long du mémoire. En particulier, les définitions et les propriétés des systèmes dynamiques. Pour les preuves des propositions et des théorèmes énoncés dans les sections suivantes, le lecteur peut consulter par exemple [5, 7, 10, 12].

1.1 systèmes dynamiques

Définition 1.1.1. *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant.*

Donc, on peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps (système continu), ou par rapport à une autre variable (système discret).

Un système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types des variable : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques encore, appelés paramètres du système sont fixes.

(i) *Dans le cas ou la composante temps est continue le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme (**cas continue**) :*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p. \quad (1.1)$$

Avec f un champ de vecteurs, \mathbb{R}^n est l'espace des phases, \mathbb{R}^p est l'espace des paramètres et t la variable temporelle.

(ii) Dans le cas où le temps est discret, le système dynamique est présenté par une application (fonction itérative) (**cas discret**) :

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Avec $k \in \mathbb{N}$ représente le temps discrétisé, f la fonction de récurrence, \mathbb{R}^n est l'espace des phases, \mathbb{R}^p est l'espace des paramètres.

Remarque 1.1.1. Quand f ne dépend pas explicitement du temps, le système est dit autonome et on a :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Remarque 1.1.2. à tout temps on peut transformer un système dynamique non autonome de dimension n en un système dynamique autonome équivalent de dimension $n + 1$ par un changement de variable.

1.2 Théorème d'existence et d'unicité

Le but de cette section est de donner des définitions et des théorèmes fondamentaux concernant l'existence et l'unicité d'une solution maximale et globale d'un système dynamique.

Définition 1.2.1. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{PC})$$

consiste à déterminer un couple (φ, J) où J est un intervalle de \mathbb{R} contenant t_0 et φ est une fonction dérivable de J dans \mathbb{R}^n , telle que

- 1) $(t, \varphi(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in J$.
- 2) $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t))$, pour tout $t \in J$ et $\varphi(t_0) = x_0$.

Définition 1.2.2. (Prolongement). Soient (x, I) et (\tilde{x}, \tilde{I}) deux solutions d'une même équation différentielle. On dira que (\tilde{x}, \tilde{I}) est un prolongement de (x, I) si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{x}|_I = x$.

Définition 1.2.3. (Solution maximale). Soient I_1 et I_2 , deux intervalles sur \mathbb{R} , tels que $I_1 \subset I_2$.

On dit qu'une solution (x, I_1) est maximale dans I_2 si et seulement si x n'admet pas de prolongement (\tilde{x}, \tilde{I}) solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subsetneq \tilde{I} \subset I_2$ (on verra même plus tard que I_1 est nécessairement ouvert).

Définition 1.2.4. (Solution globale). Soit I un intervalle inclus dans \mathbb{R} . Une solution (x, I) est dite globale dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.

Définition 1.2.5. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que $f_u : I \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$ est **globalement lipschitzienne** en sa seconde variable sur E s'il existe une constante $L > 0$ tel que

$$\forall (t, x), (t, y) \in I \times E, \|f_u(t, x) - f_u(t, y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Définition 1.2.6. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que $f_u : I \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$ est **localement lipschitzienne** en sa seconde variable sur E si pour tout $x_0 \in E$, il existe un ouvert U de E contenant x_0 tel que f_u est lipschitzienne sur U , c'est-à-dire il existe une constante $L > 0$ tel que

$$\forall (t, x), (t, y) \in I \times U, \|f_u(t, x) - f_u(t, y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Théorème 1.2.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz local). On suppose que la champ de vecteurs $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continu et localement lipschitzien par rapport à la variable d'état. Alors, pour toute donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe une constante $\delta > 0$ tel qu'il existe une unique solution x du problème de Cauchy (1.1) définie sur $J_\delta :=]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap I$.

Le théorème local de Cauchy-Lipschitz (Théorème 1.2.1) assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale à un problème de Cauchy mais ne nous donne aucune information sur l'intervalle J sur lequel elle est définie. Alors, la question qui se pose est de savoir si la solution maximale est globale. Généralement, nous avons besoin d'autres critères pour répondre à cette question, pour cela nous donnons un résultat dans le cas où l'espace d'états est tout l'espace \mathbb{R}^d .

Théorème 1.2.2 (Théorème d'explosion en temps fini). Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu et localement lipschitzien par rapport à la variable d'état et soit (t_0, x_0) une donnée de Cauchy associée. Soit (J, x) l'unique solution maximale du problème de Cauchy (1.1). On rappelle que J est nécessairement ouvert; on le note $J =]\alpha, \beta[$ avec $\alpha \in]-\infty, t_0]$ et $\beta \in]t_0, +\infty[$.

- Si $\beta < +\infty$, alors $\sup_{t \in [t_0, \infty[} \|x(t)\| = +\infty$.
- Si $\alpha > -\infty$, alors $\sup_{t \in]\alpha, t_0[} \|x(t)\| = +\infty$.

On donne aussi un lemme technique qui sera très utile dans la suite.

Lemme 1.2.1. (Lemme de Gronwall)

Soit ϕ une fonction absolument continue vérifiant l'inégalité différentielle suivante :

$$\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1 \phi(t) \leq \alpha_2, \quad t > 0, \quad ((\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha_1 \neq 0),$$

alors, pour tout $t \geq \tilde{T} \geq 0$, on a :

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \phi(\tilde{T}) \right) e^{-\alpha_1(t-\tilde{T})}.$$

Démonstration. On a

$$\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1 \phi(t) \leq \alpha_2, \quad t > 0,$$

multiplions les deux côtés par $e^{\alpha_1 t}$

$$\left(\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1 \phi(t) \right) e^{\alpha_1 t} \leq \alpha_2 e^{\alpha_1 t},$$

$$\left(\frac{d\phi}{dt} + \alpha_1 \phi(t) - \alpha_2 \right) e^{\alpha_1 t} \leq 0,$$

$$\frac{d\phi}{dt} e^{\alpha_1 t} + \alpha_1 \phi(t) e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t} \leq 0,$$

$$\frac{d}{dt} (\phi(t) e^{\alpha_1 t}) - \frac{d}{dt} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{\alpha_1 t} \leq 0,$$

ou de manière équivalente

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) e^{\alpha_1 t} \right) \leq 0.$$

Donc, la fonction $\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) e^{\alpha_1 t}$ a une dérivée négative et elle est donc décroissante pour $t \geq 0$. Par conséquent, pour tout $t \geq \tilde{T} \geq 0$.

$$\left(\phi(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) e^{\alpha_1 t} \leq \left(\phi(\tilde{T}) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) e^{\alpha_1 \tilde{T}},$$

d'où, il résulte

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \phi(\tilde{T}) \right) e^{-\alpha_1(t-\tilde{T})},$$

pour $\tilde{T} = 0$, cette expression devient :

$$\phi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1 - e^{-\alpha_1 t}) + \phi(0)e^{-\alpha_1 t}.$$

ce qui démontre l'inégalité de l'énoncé. \square

Maintenant on va donner un résultat très utile dans l'étude qualitative des EDOs autonomes et non-autonomes en dimension 1.

Théorème 1.2.3 (Théorème de comparaison pour équations différentielles ordinaires 1-dim). *Soient $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions Lipschitz. On considère les solutions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ des problèmes de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) &= g(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

Supposons que $f(t, x) \leq g(t, x)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et que $x_0 \leq y_0$. Alors $x(t) \leq y(t)$ pour tout $t \geq t_0$.

1.3 État d'équilibre

Généralement, il est difficile de trouver la solution explicite du système (1.1), il faut alors étudier le système de manière qualitative qui commence d'abord par la recherche des points d'équilibres (points singuliers, critiques, fixes, stationnaires). Pour cela on considère dans la suite de ce chapitre un champ de vecteurs autonome $f_u : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 .

Définition 1.3.1. *On dit que $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ est un point d'équilibre du système (1.1) s'il vérifie $f_{\bar{u}}(\bar{x}) = 0$.*

1.3.1 Stabilité des équilibres

Dans la suite de cette partie, on cite des notions de stabilité et quelques techniques de base pour étudier le comportement d'une solution d'un système dynamique où le concept utilisé dans cette partie est la stabilité au sens de Lyapunov.

Définition 1.3.2. *L'équilibre \bar{x} est un équilibre **stable** du système (1.1) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t, \bar{u}) - \bar{x}\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

Définition 1.3.3. *L'équilibre \bar{x} est un équilibre **attracteur** de (1.1) si*

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \bar{u}) - \bar{x}\| = 0.$$

Autrement dit si la condition initiale x_0 est suffisamment près de \bar{x} , alors les solutions $x(t)$ convergent vers ce point \bar{x} .

Notez que les deux définitions précédentes sont différentes et ne s'impliquent pas l'une l'autre.

Définition 1.3.4. *L'équilibre \bar{x} est un équilibre **asymptotiquement stable** s'il est stable et attracteur.*

1.3.2 Méthode indirecte de Lyapunov

Soit \bar{x} un point d'équilibre du système (1.1) et soit

$$A = D_x f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Définition 1.3.5. *On dit que λ est une valeur propre de A , s'il existe un vecteur x non-nul telle que : $Ax = \lambda x$. Les valeurs propres de A sont donc les scalaires λ telle que $A - \lambda Id$ n'est pas injectif (autrement dit son noyau n'est pas réduit au vecteur nul).*

Théorème 1.3.1. 1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne ont une partie réelle strictement négative, alors \bar{x} est un équilibre asymptotiquement stable du système (1.1).*

2. *Si la matrice Jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, alors \bar{x} est un équilibre instable du système (1.1).*

3. *Si la matrice Jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle et aucune valeur propre à partie réelle strictement positive, alors on ne peut pas conclure.*

1.3.3 Méthode direct de Lyapunov

Définition 1.3.6. *Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0, et soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .*

1. V est dite définie positive si :

(i) $V(0) = 0$, et

(ii) $V(u) > 0$ pour $u \in \Omega \setminus \{0\}$.

2. V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.

3. V est dite semi-définie positive si :

(i) $V(0) = 0$, et

(ii) $V(u) \geq 0$ pour tout $u \in \Omega$.

4. V est dite semi-définie négative si $-V$ est semi-définie positive .

Théorème 1.3.2. [*Théorème de Lyapunov*] Soit $x(t)$ une solution du système (1.1), et soit V une fonction de classe C^1 définie positive sur Ω un voisinage de $\bar{x} = 0$ (sans perte de généralité on prend l'équilibre exactement l'origine).

(i) Si $\frac{dV}{dt}$ est semi-définie négative, alors \bar{x} est stable.

(ii) Si $\frac{dV}{dt}$ est définie négative, alors \bar{x} est asymptotiquement stable.

Dans le cas (i) $V(x)$ est dite fonction de Lyapunov faible, et dans le

cas (ii) $V(x)$ est dite fonction de Lyapunov stricte .

Remarque 1.3.1. Il n'y a pas de règle générale pour trouver une fonction de Lyapunov, cependant, dans des problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat.

Chapitre 2

Le modèle "SIR"

Nous présentons dans ce chapitre le modèle "SIR" qui joue un rôle important dans la transmission des maladies infectieuses. Dans une première étape on définit le modèle, ensuite nous effectuons une analyse qualitative du modèle.

2.1 Présentation du modèle

Dans ce travail nous sommes intéressé par le modèle "SIR" suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\beta I(t)S(t)}{N} - \mu S(t), \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

qui est un modèle classique en épidémiologie mathématique, utilisé pour calculer le nombre des personnes "*susceptibles*", "*infectés*" et "*rétablis*" dans une population. On note par

- $S(t)$: le nombre au temps t des individus qui sont "*susceptibles*" de contracter la maladie. "les individus qui ne sont pas malades et qui ne sont pas immunisés".
- $I(t)$: le nombre au temps t des individus qui sont "*infectés*" par la maladie. "Ces individus sont par ailleurs contagieux et sont le vecteur de la propagation de la maladie".
- $R(t)$: le nombre des individus au temps t qui sont "*rétablis*" et sont maintenant immunisés.

Dans le système (2.1) les paramètres β , μ , et γ sont positives représentent respectivement :

- le taux de la transmission de la maladie, c'est-à-dire le facteur de contamination,
- le taux de mortalité et natalité
- le taux moyen de guérison d'un patient infecté .

Ce modèle est approprié à utiliser sous les hypothèses suivantes :

1. La population est constante où N est la taille totale de la population, c'est-à-dire :

$$N = S(t) + I(t) + R(t), \quad \forall t \geq 0.$$

2. Une fois qu'un individu a contracté la maladie et qu'il est guéri, il sera immunisé.
3. La probabilité d'être infecté est constante.
4. Il n'y a pas d'immunité héréditaire.
5. Le taux de mortalité est constant (pour les trois classes).

Afin de faire une simplification dans notre problème, on choisit le changement de variable suivant

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N} \text{ et } r = \frac{R}{N}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{S}{N} \right) = \frac{1}{N} \left(\frac{dS}{dt} \right) = \frac{1}{N} \left(\mu N - \frac{\beta IS}{N} - \mu S \right) \\ &= \mu - \beta \left(\frac{I}{N} \right) \left(\frac{S}{N} \right) - \frac{\mu S}{N} \\ &= \mu - \beta i s - \mu s. \end{aligned}$$

De même, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{I}{N} \right) = \frac{1}{N} \left(\frac{dI}{dt} \right) = \frac{1}{N} \left(\frac{\beta IS}{N} - \gamma I - \mu I \right) \\ &= \frac{\beta I S}{N N} - \frac{\gamma I}{N} - \frac{\mu I}{N} \\ &= \beta i s - \gamma i - \mu i, \end{aligned} \tag{2.2}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{R}{N}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{dR}{dt}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{dR}{dt}\right) \\
&= \frac{1}{N}(\gamma I - \mu R) \\
&= \gamma \frac{I}{N} - \mu \frac{R}{N} \\
&= \gamma i - \mu r.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Alors, le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \mu - \beta i s - \mu s, \\ \frac{di}{dt} = \beta i s - \gamma i - \mu i, \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r. \end{cases} \tag{2.4}$$

D'autre part, on remarque que les deux premières équations du système (2.4) sont indépendantes de $r(t)$. De plus, on a l'hypothèse

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1.$$

Alors, il suffit de considérer le système suivant

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \mu - \beta i s - \mu s, \\ \frac{di}{dt} = \beta i s - \gamma i - \mu i, \end{cases} \tag{2.5}$$

au lieu du système (2.4) avec

$$r(t) = 1 - s(t) - i(t), \quad \forall t > 0.$$

2.2 Existence et unicité de la solution

Notons \mathbb{R}_+^2 le quadrant positif, et $Int(\mathbb{R}_+^2)$ le quadrant strictement positif.

Lemme 2.2.1. *Le quadrant strictement positif $Int(\mathbb{R}_+^2)$ est invariant par le système (2.5).*

Démonstration

Remarquons, tout d'abord, que les frontières du quadrant positif \mathbb{R}_+^2 sont

invariantes, cela est immédiat à partir des équations du système (2.5). De plus, les densités $s(t)$ et $i(t)$ sont strictement positives : pour $t \geq 0$, si $s(0) > 0$ et $i(0) > 0$ alors $s(t) > 0$ et $i(t) > 0$ car le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles assure que les solutions sont strictement positives et les axes ne peuvent se couper.

Nous montrerons que, sous certaines conditions, les solutions du système (2.5) issues de \mathbb{R}_+^2 sont semi bornées pour t suffisamment grand. Une solution $\phi(t, t_0, s_0, i_0)$ du système (2.5) est dite bornée dans \mathbb{R}_+^2 s'il existe une région compacte $\Omega \subset \mathbb{R}_+^2$ et un temps fini T ($T = T(t_0, s_0, i_0)$) tels que, pour tous $(t_0, s_0, i_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$, $\phi(t, t_0, s_0, i_0) \in \Omega$ pour tout $t > T$.

Théorème 2.2.1. *Soit Ω l'ensemble défini par :*

$$\Omega = \{(s, i) \in \mathbb{R}_+^2; s \geq 0; i \geq 0; s + i \leq 1\}.$$

Alors

- a) Ω est positivement invariant par le champ (2.5).
- b) toutes les solutions de (2.5) issues de \mathbb{R}_+^2 convergent vers l'ensemble attracteur Ω .
- c) le système est dissipatif.

Démonstration. a) Soient $(s(0), i(0)) \in \Omega$, nous allons montrer que $(s(t), i(t)) \in \Omega$ pour tout $t \geq 0$.

Il est évident, à partir du lemme 2.2.1, que $(s(t), i(t))$ restent positifs, puisque $(s(0), i(0)) \in \Omega$.

- Nous devons montrer que pour tout $t > 0$, $s + i \leq 1$.

Posons

$$\sigma(t) = s(t) + i(t),$$

donc la dérivée

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} \\ &= -\mu(s + i) + \mu - \gamma i \\ &\leq -\mu\sigma + \mu. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, (avec $\alpha_1 = \mu$ et $\alpha_2 = \mu$), nous obtenons, pour tout, $t \geq \tilde{T} \geq 0$.

$$\sigma(t) \leq 1 - (1 - \sigma(\tilde{T}))e^{-\mu(t-\tilde{T})}. \quad (2.6)$$

Pour $\tilde{T} = 0$, on obtient

$$\sigma(t) \leq 1 - (1 - \sigma(0))e^{-\mu}.$$

Finalement, il reste juste à remarquer que $(1 - \sigma(0)) > 0$ car $(s(0), i(0)) \in \Omega$ et on conclut que pour tout $t \geq 0$;

$$\sigma(t) = s(t) + i(t) \leq 1.$$

b) Nous montrons que, pour $(s(0), i(0)) \in \mathbb{R}_+^2$, $(s(t), i(t)) \rightarrow \Omega$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Nous allons montrer que $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (s(t) + i(t)) \leq 1$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe T_1 , de l'expression (2.6) avec $\tilde{T} = T_1$; nous obtenons, pour tout $t \geq T_1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= s(t) + i(t) \\ &\leq 1 - (1 - \sigma(T_1))e^{-\mu(t-T_1)} \\ &\leq 1 - [e^{\mu T_1} - (s(T_1) + i(T_1))e^{\mu T_1}]e^{-\mu t} \\ &\leq 1 - [1 - (s(T_1) + i(T_1))e^{\mu T_1}]e^{-\mu t}, \end{aligned}$$

alors

$$\sigma(t) = s(t) + i(t) \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2}) - [(1 + \frac{\varepsilon}{2}) - (s(T_1) + i(T_1))e^{\mu T_1}]e^{-\mu t},$$

pour tout $t \geq T_1 \geq 0$.

Posons $T_2 \geq T_1$ tel que;

$$|[(1 + \frac{\varepsilon}{2}) - (s(T_1) + i(T_1))e^{\mu T_1}]e^{-\mu t}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $t \geq T_2$, alors;

$$s(t) + i(t) \leq 1 + \varepsilon.$$

Donc

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (s(t) + i(t)) \leq 1.$$

c) Le système (2.5) est évidemment dissipatif dans \mathbb{R}_+^2 , puisque toutes les solutions positives sont bornées.

Maintenant nous vérifions l'existence d'une solution maximale et globale du problème de Cauchy du système.

Démonstration. On commence dans une première étape par l'existence et l'unicité d'une solution maximale $(J, (s, i))$. En effet, le champ de vecteurs autonome f est polynomiale en ses variables s et i , donc de classe \mathcal{C}^1 et par conséquent f est localement lipschitzienne. En appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz local "Théorème 1.2.1", on obtient l'existence d'une unique solution maximale $(J, (s, i))$ au problème de Cauchy du système. De plus, on a

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1, \text{ pour tout } t \geq 0,$$

ce qui signifie que $s(t)$, $i(t)$ et $r(t)$ sont bornés sur $[0, +\infty[\cap J$. Par conséquent, une application du théorème d'explosion en temps fini "Théorème 1.2.2" permet de déduire l'existence globale en temps positif de la solution, c'est-à-dire que $[0, +\infty[\subset J$. \square

2.3 Calcul des équilibres

Dans cette section nous cherchons les équilibres du système (2.5) .

Proposition 2.3.1. 1. Le point d'équilibre sans maladie $E_0 = (s = 1, i = 0)$ toujours existe.

2. Le point d'équilibre endémique $E_1 = (s = \frac{\gamma + \mu}{\beta}, i = \frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\beta(\gamma + \mu)})$ existe si et seulement si $R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu} > 1$.

Démonstration. Pour obtenir les points d'équilibres du système (2.5), nous résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = 0 \\ \frac{di}{dt} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu - \beta is - \mu s = 0, \\ \beta is - \gamma i - \mu i = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

À partir de la deuxième équation du système (2.7) nous avons :

$$\begin{aligned} \beta is - \gamma i - \mu i = 0 & \quad \text{alors } i(\beta s - \gamma - \mu) = 0 \\ & \quad \text{donc } i = 0 \vee \beta s - \gamma - \mu = 0. \end{aligned}$$

i.e,

$$i = 0 \text{ où } s = \frac{\gamma + \mu}{\beta}.$$

1^{er} cas : $i = 0$

En remplaçant $i = 0$ dans la première équation du système (2.7), nous obtenons

$$\begin{aligned}\mu(1 - s) = 0 & \text{ alors } 1 - s = 0 \\ & \text{ donc } s = 1.\end{aligned}$$

Donc le point d'équilibre sans maladie : $E_0 = (s = 1, i = 0)$ existe sans contrainte.

2^{eme} cas : $s = \frac{\gamma + \mu}{\beta}$.

À partir de la première équation du système (2.7), nous avons :

$$i = \frac{\mu(1 - s)}{\beta s}. \quad (2.8)$$

Donc, en remplaçant $s = \frac{\gamma + \mu}{\beta}$ dans (2.8) on obtient

$$i = \frac{\mu(1 - \frac{\gamma + \mu}{\beta})}{\gamma + \mu} = \frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\beta(\gamma + \mu)}.$$

D'autre part, nous savons que i doit être positive, alors le point d'équilibre endémique existe si et seulement si

$$\mu(\beta - \gamma - \mu) > 0,$$

c'est-à-dire

$$\beta > \gamma + \mu,$$

i.e

$$R_0 := \frac{\beta}{\gamma + \mu} > 1.$$

En conclusion, le point d'équilibre endémique $E_1 = (i^*, s^*)$ existe si et seulement si $R_0 > 1$ où

$$E_1 = (i^*, s^*) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\beta(\gamma + \mu)} \right).$$

□

2.4 Stabilité locale des équilibres

Nous allons maintenant établir les conditions de stabilité des équilibres. Plus précisément, nous s'intéressons au comportement des solutions du système (2.5) au voisinage des équilibres.

Dans une première étape, on commence par calculer la matrice jacobienne associé au système (2.5).

La matrice jacobienne est donné par

$$J = \begin{pmatrix} \beta i - \mu & -\beta s \\ \beta i & \beta s - \gamma - \mu \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.4.1. 1. *Le point d'équilibre sans maladie $E_0 = (1, 0)$ est stable si $R_0 < 1$.*

2. *Le point d'équilibre E_1 est stable s'il existe. Autrement dit :
Si $R_0 > 1$ Le point d'équilibre endémique E_1 du système (2.5) existe et stable.*

Démonstration. 1- Pour étudier la stabilité du point d'équilibre $E_0 = (1, 0)$ nous utilisons la matrice jacobienne évaluée au point $E_0 = (1, 0)$.

$$J = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - \gamma - \mu \end{pmatrix}.$$

La stabilité dépend du signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice J qui sont les solutions de l'équation :

$$P(\lambda) = \det(J - \lambda I) = 0.$$

i.e,

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\beta \\ 0 & \beta - \gamma - \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Alors, les valeurs propres de J sont les racines du polynôme du deuxième degré suivant

$$(-\mu - \lambda)(\beta - \gamma - \mu - \lambda) = 0.$$

Par conséquent, les valeurs propres de J sont données par

$$\lambda_1 = -\mu \vee \lambda_2 = \beta - \gamma - \mu.$$

Il est claire que $\lambda_1 < 0$. D'autre part, On voit que $\lambda_2 < 0$ si $\beta - \mu - \gamma < 0$, i.e $R_0 < 1$ et $\lambda_2 > 0$ si $R_0 > 1$. Alors d'après le Théorème 1.3.1 le point

d'équilibre sans maladie $E_0 = (1, 0)$ est asymptotiquement stable si $R_0 < 1$ et instable si $R_0 > 1$.

2- Notons que le point d'équilibre endémique $E_1 = (s = \frac{\gamma + \mu}{\beta}, i = \frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\beta(\gamma + \mu)})$ existe si $R_0 > 1$. Dans ce cas, la matrice jacobienne est donnée par

$$J_f(s^*, i^*) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\gamma + \mu}\right) - \mu & -(\gamma + \mu) \\ \left(\frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\gamma + \mu}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \det(J_f - \lambda I) &= \left(\frac{-\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\gamma + \mu} - \mu - \lambda\right)(-\lambda) + (\gamma + \mu)\frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{(\gamma + \mu)} \\ &= \mu\lambda\left(\frac{\beta - \gamma - \mu}{\gamma + \mu}\right) + \mu\lambda + \lambda^2 + \mu(\beta - \gamma - \mu) \\ &= \lambda^2 + \lambda\mu R_0 + \mu(\beta - \gamma - \mu). \end{aligned}$$

Le discriminant Δ est

$$\Delta = (\mu R_0)^2 - 4\mu(\beta - \gamma - \mu).$$

On remarque que μ et $\mu(\beta - \gamma - \mu)$ sont positives donc les racines du polynôme caractéristique sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[-\mu R_0 \pm \sqrt{\mu^2 R_0^2 - 4\mu(\beta - \gamma - \mu)}].$$

On sait que $\mu(\beta - \gamma - \mu) > 0$, par conséquent on distingue deux cas :

1^{er} cas :

Si $\mu^2 R_0^2 - 4\mu(\beta - \gamma - \mu) \geq 0$, alors $\sqrt{\mu^2 R_0^2 - 4\mu(\beta - \gamma - \mu)} \leq \mu R_0$ et donc les valeurs propres sont réelles et négatives.

2^{ème} cas :

Si $\mu^2 R_0^2 - 4\mu(\beta - \gamma - \mu) < 0$, alors les valeurs propres sont complexes avec des parties réelles $-\mu R_0$ négatives .

Alors dans tous les cas les parties réelles des valeurs propres sont négatives. Par conséquent, à partir du Théorème 1.3.1, nous concluons que le point d'équilibre endémique est asymptotiquement stable. \square

2.5 Stabilité globale

Théorème 2.5.1. *Si $R_0 \leq 1$, alors E_0 est globalement asymptotiquement stable sur Ω .*

Démonstration. On considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{telle que } V(s, i) = i(t).$$

Calculons maintenant sa dérivée par rapport à t , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(s, i) &= \frac{di}{dt}(t) \\ &= \beta i s - (\gamma + \mu) i \\ &= i(\gamma + \mu)[R_0 s - 1]. \end{aligned}$$

Il est clair que sous l'hypothèse $R_0 \leq 1$, on a

$$\frac{dV}{dt}(s, i) \leq 0.$$

De plus

$$\text{Si } R_0 < 1 \text{ alors } \frac{dV}{dt}(s, i) = 0 \Leftrightarrow i(t) = 0,$$

et

$$\text{Si } R_0 = 1 \text{ alors } \frac{dV}{dt}(s, i) = 0 \Leftrightarrow s(t) = 1.$$

Par conséquent grâce au Théorème 1.3.2, le point d'équilibre sans maladie $E_0 = (1, 0)$ est globalement asymptotiquement stable. \square

Théorème 2.5.2. *Si $R_0 > 1$, le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration. Soit $L : \Omega_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Lyapunov telle que :

$$\Omega_+ = \{s(t), i(t) \in \Omega, \quad s(t) > 0, \quad i(t) > 0\}.$$

On considère sur Ω_+ la fonction de Lyapunov définie par :

$$L(s, i) = W_1 \left[s - s^* \ln\left(\frac{s}{s^*}\right) \right] + W_2 \left[i - i^* \ln\left(\frac{i}{i^*}\right) \right],$$

où W_1 et W_2 sont des constantes positives seront déterminées dans la suite.

L est une fonction définie positive, c'est-à-dire $L(s, i) \geq 0$. Calculons maintenant sa dérivée le long des trajectoires du système, nous obtenons

$$\frac{dL}{dt}(s, i) = W_1(s - s^*)(-\beta i - \mu + \frac{\mu}{s}) + W_2(i - i^*)(\beta s - (\gamma + \mu)).$$

Considérons le point d'équilibre $E_1(s^*, i^*)$, nous obtenons

$$\mu = \frac{\mu}{s^*} - \beta i^* \text{ et } \gamma + \mu = \beta s^*.$$

Par conséquent, nous avons

$$\frac{dL}{dt}(s, i) = \beta(s - s^*)(i - i^*)(w_2 - w_1) - \mu w_1 \frac{(s - s^{*2})}{s s^*}.$$

Posons maintenant $W_1 = W_2 = 1$ on obtient

$$\frac{dL}{dt}(s, i) = -\mu \frac{(s - s^{*2})}{s s^*} \leq 0.$$

De plus si $s = s^*$, alors $\frac{dL}{dt}(s, i) = 0$. Alors, par le Théorème 1.3.2 nous concluons que le point endémique E_1 est globalement asymptotiquement stable . \square

2.6 Simulations numériques

Pour illustrer les résultats donnés dans les sections précédentes, nous effectuons une simulation numérique où nous posons $\mu = 0.5$, $\gamma = 0.5$ et changeons les valeurs de β pour voir comment le taux d'infection affecte l'existence et la stabilité du point d'équilibre positive.

Dans la FIGURE 2.1. On pose $\beta = 1.98$, alors, $R_0 = 1.98 > 1$ ce qui implique d'après le Théorème 1.2.2 l'existence d'un point d'équilibre positive globalement asymptotiquement stable donné par

$$E^* = (s = \frac{\gamma + \mu}{\beta}, i = \frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\beta(\gamma + \mu)}).$$

Effectivement, la FIGURE 2.1 montre que la solution $(s(t), i(t))$ tend vers le point d'équilibre endémique

$$E^* = (0.5052, 0.2470)$$

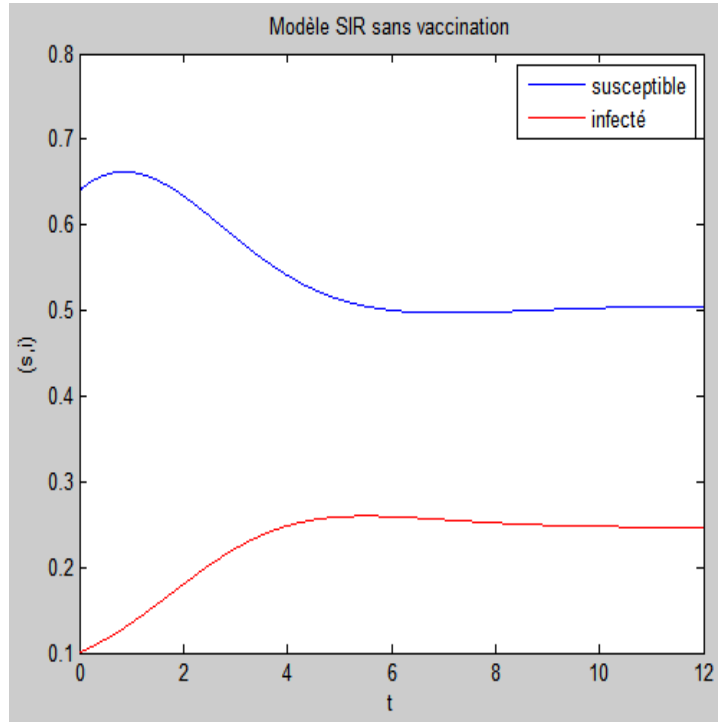


FIGURE 2.1 – Le modèle SIR sans vaccination avec $\beta = 1.98$ et $\mu = \gamma = 0.5$.

qui est exactement le point endémique trouvé théoriquement et qui est globalement asymptotiquement stable. De plus, les résultats de la stabilité local sont aussi vérifiés où l'équation caractéristique du point d'équilibre endémique est donné par

$$\lambda^2 + 0.99\lambda + 0.49 = 0$$

dont les valeurs propres de la matrice jacobienne sont

$$\lambda_{1,2} = -0.495 \pm 0.4949i,$$

ce qui entraîne la stabilité locale du point d'équilibre endémique car les parties réelles des deux valeurs propres sont strictement négatives.

D'un point de vue biologique, on constate que la population susceptible diminue à un niveau inférieur en raison de l'effet du taux d'infection β .

Pour montrer l'influence du taux d'infection β sur le point d'équilibre positive, on augmente la valeur du β , et on garde les mêmes valeurs pour les autres paramètres utilisés dans la FIGURE 2.1.

La solution correspondante à $\beta = 2.5$ et $\beta = 3.5$ apparaît dans la FIGURE 2.2.

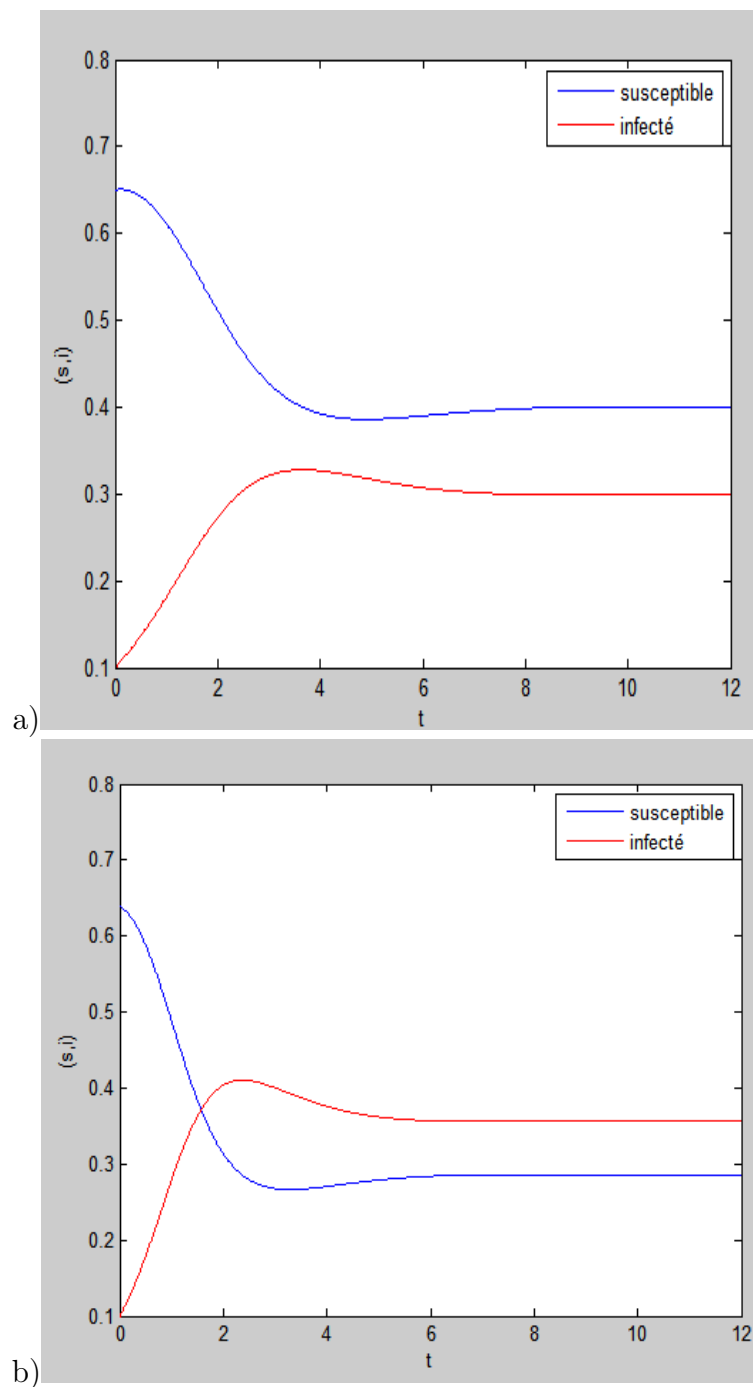


FIGURE 2.2 – Le modèle SIR sans vaccination : a) $\beta = 2.5$, b) $\beta = 3.5$.

Alors, on remarque qu'une augmentation du taux d'infection β entraîne une augmentation de la population infectée et une diminution de la population

susceptible où le point d'équilibre endémique correspondant à $\beta = 2.5$ est donné par $E^* = (0.4002, 0.2999)$ et celui correspondant à $\beta = 3.5$ est donné par $E^* = (0.2857, 0.3572)$. De plus, la population infectée devient dominante par rapport à la population susceptible.

D'autre part, dans la figure ci-dessus le nombre de reproduction R_0 est toujours supérieur à 1 ce qui confirme à nouveau nos résultats théorique dans la section 2.5 où les trajectoires ne peuvent pas s'approcher vers le point d'équilibre sans maladie si $R_0 > 1$.

Chapitre 3

Le modèle "SIRV"

Dans ce chapitre, nous présentons le deuxième modèle "SIRV" dans lequel la vaccination est également induite où nous considérons toujours les personnes : "*susceptibles*" $s(t)$, "*infectés*" $i(t)$, "*rétablis*" $r(t)$ et "*vaccinés*" $v(t)$, dans une population.

Le modèle suggéré est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt} = (1-p)\mu - \beta is - \mu s, \\ \frac{di}{dt} = \beta is - \gamma i - \mu i, \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r, \\ \frac{dv}{dt} = p\mu - \mu v, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où Dans le système (3.1) les paramètres p, β, μ , et γ sont positives représentent respectivement :

- le taux de vaccination.
- le taux de la transmission de la maladie, c'est-à-dire le facteur de contamination,
- le taux de mortalité et natalité
- le taux moyen de guérison d'un patient infecté .

. On remarque que les deux premières équations du système (3.1) et la quatrième sont indépendantes de $r(t)$, de plus nous avons l'hypothèse :

$$s(t) + i(t) + r(t) + v(t) = 1,$$

alors, nous considérons le système

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = (1-p)\mu - \beta is - \mu s, \\ \frac{di}{dt} = \beta is - \gamma i - \mu i, \\ \frac{dv}{dt} = p\mu - \mu v, \end{cases} \quad (3.2)$$

au lieu du système (3.1) avec

$$r(t) = 1 - s(t) - i(t) - v(t), \quad \forall t > 0.$$

3.1 Existence et unicité de la solution

Théorème 3.1.1. *Pour toutes données initiales positive (s_0, i_0, v_0) , il existe une unique solution du système (3.2) définie sur $[0, +\infty[$. De plus, celle-ci vérifie*

$$s(t) \geq 0, \quad i(t) \geq 0, \quad v(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad s(t) + i(t) + v(t) \leq 1.$$

Autrement dit, l'ensemble

$$\Omega_1 = \{(s(t), i(t), v(t)) \in \mathbb{R}_+^3, \quad s(t) + i(t) + v(t) \leq 1\}$$

est positivement invariant pour le système (3.2).

Démonstration. On commence dans une première étape par l'existence et l'unicité d'une solution maximale notée par $(J, (s, i, v))$. En effet, le champ de vecteurs autonome f est polynomiale en ses variables $s(t)$, $i(t)$ et $v(t)$, donc de classe \mathcal{C}^1 et par conséquent f est localement lipschitzienne. En appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz local (Théorème 1.2.1), on obtient l'existence d'une unique solution maximale $(J, (s, i, v))$ au problème de Cauchy du système.

Maintenant on montre que la solution reste positive. À partir de la deuxième équation du système (3.2), on a

$$\frac{di}{dt} = i(\beta s(t) - \gamma - \mu),$$

qui est une équation différentielle homogène linéaire du premier ordre dont sa solution est donnée par

$$i(t) = i_0 e^{\int_0^t (\beta s(\tau) - \gamma - \mu) d\tau}.$$

On sait bien que $i_0 > 0$, alors la solution $i(t)$ est bien positive i.e,

$$i(t) > 0 \text{ pour tout } t \in J.$$

D'autre part, on a

$$\frac{ds}{dt} \geq -(\mu + \beta i(t))s.$$

Par conséquent, la Proposition ?? permet de déduire que pour $t \in J$, $t \geq 0$ on a l'inégalité

$$s(t) \geq s_0 e^{-\int_0^t (\mu + \beta i(\tau)) d\tau},$$

et donc $s(t)$ est positive sur $[0, +\infty[\cap J$ pour toute condition initiale $s_0 > 0$. Passons maintenant à la troisième équation du système (3.2) qui est une équation différentielle non homogène du premier ordre dont sa solution est donné par

$$v(t) = (v_0 - p)e^{-\mu t} + p = p(1 - e^{-\mu t}) + v_0.$$

Par conséquent, on déduit que $v(t)$ est positive sur $[0, +\infty[\cap J$ pour toute condition initiale $v_0 > 0$.

À partir de la discussion ci-dessus, nous concluons que la solution $(s(t), i(t), v(t))$ est positive sur tout $[0, +\infty[\cap J$. De plus, on a

$$s(t) + i(t) + r(t) + v(t) = 1, \text{ pour tout } t \geq 0,$$

ce qui signifie que $s(t)$, $i(t)$ et $v(t)$ sont bornés sur $[0, +\infty[\cap J$. Par conséquent, une application du théorème d'explosion en temps fini "Théorème 1.2.2" permet de déduire l'existence globale en temps positif de la solution, c'est-à-dire que $[0, +\infty[\subset J$. \square

3.2 Calcul des équilibres

Dans cette section nous cherchons les équilibres du système (3.2).

Proposition 3.2.1. 1. *Le point d'équilibre sans maladie $E_0 = (s = 1 - p, i = 0, v = p)$ toujours existe.*

2. *Le point d'équilibre endémique $E_e = (s = \frac{\gamma + \mu}{\beta}, i = \frac{\mu\beta(1-p) - \gamma - \mu}{\beta(\gamma + \mu)}, v = p)$ existe si et seulement si $R_v = \frac{\beta(1-p)}{\gamma + \mu} > 1$.*

Démonstration. Pour obtenir les points d'équilibres du système (3.2), nous

résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = 0 \\ \frac{di}{dt} = 0, \\ \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (1-p)\mu - \beta is - \mu s = 0, \\ \beta is - \gamma i - \mu i = 0 \\ p\mu - \mu v = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

D'après la troisième équation du système (3.3) on a :

$$p\mu - \mu v = 0 \quad \text{alors} \quad \mu(p - v) = 0 \\ \text{donc} \quad v = p.$$

Passons maintenant à la deuxième équation du système (3.3) alors nous avons :

$$\beta is - \gamma i - \mu i = 0 \quad \text{alors} \quad i(\beta s - \gamma - \mu) = 0 \\ \text{donc} \quad i = 0 \vee \beta s - \gamma - \mu = 0.$$

1^{er} cas : $i = 0$

En remplaçant $i = 0$ dans la première équation du système (3.3), nous obtenons

$$(1 - p - s)\mu = 0 \quad \text{alors} \quad 1 - p - s = 0 \\ \text{donc} \quad s = 1 - p.$$

Donc le point d'équilibre sans maladie : $E_0 = (s = 1 - p, i = 0, v = p)$ existe sans contrainte.

2^{me} cas : $s = \frac{\gamma + \mu}{\beta}, v = p$. À partir de la première du système (3.3), nous avons :

$$i = \frac{\mu(1 - p - s)}{\beta s}. \quad (3.4)$$

En remplaçant $s = \frac{\gamma + \mu}{\beta}$ dans (3.4), on obtient

$$i = \frac{\mu(\beta - \beta p - \gamma - \mu)}{\beta(\gamma + \mu)}.$$

D'autre part, nous savons que i doit être positive, alors le point d'équilibre endémique existe si et seulement si

$$\mu(\beta - \beta p - \gamma - \mu) > 0,$$

c'est-à-dire

$$\beta(1 - p) > \gamma + \mu,$$

i.e

$$R_v := \frac{\beta(1 - p)}{\gamma + \mu} > 1.$$

En conclusion, le point d'équilibre endémique $E_e = (i^*, s^*, v^*)$ existe si et seulement si $R_v > 1$ où

$$E_e = (i^*, s^*, v^*) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu(\beta(1 - p) - \gamma - \mu)}{\beta(\gamma + \mu)}, v = p \right).$$

□

L'effet de la vaccination est facilement visible sur l'existence du point d'équilibre sans maladie et le point d'équilibre endémique. La population susceptible a diminué d'un paramètre p (taux de vaccination). En outre, un impact majeur est sur le nouveau nombre de reproduction après l'induction de la vaccination dans le modèle " $R_v = R_0(1 - p)$ " où le point d'équilibre endémique n'existera que si $R_v > 1$ et donc la condition est plus faible!

3.3 Stabilité locale des équilibres

Nous allons maintenant établir les conditions de stabilité des équilibres en suivant les mêmes étapes du premier modèle dans le chapitre précédent.

La matrice jacobienne associée au système (3.2) est donnée par

$$J(s, i, v) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta i & -\beta s & 0 \\ \beta i & \beta s - \gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.3.1. 1. *Le point d'équilibre sans maladie $E_0 = (1 - p, 0, p)$ est localement asymptotiquement stable si $R_v < 1$.*

2. *Le point d'équilibre E_e est localement asymptotiquement stable s'il existe. Autrement dit :*

Si $R_v > 1$ le point d'équilibre endémique E_e du système (3.2) existe et localement asymptotiquement stable.

Démonstration. 1- Pour étudier la stabilité du point d'équilibre $E_0 = (1 - p, 0, p)$ nous utilisons la matrice jacobienne évaluée au point $E_0 = (1 - p, 0, p)$.

$$J = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta(1-p) & 0 \\ 0 & \beta(1-p) - \gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

On sait que la stabilité dépend du signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice J qui sont les solutions de l'équation :

$$P(\lambda) = \det(J - \lambda I) = 0.$$

i.e,

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\beta(1-p) & 0 \\ 0 & \beta(1-p) - \gamma - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Alors, les valeurs propre de J sont les racines du polynôme suivant

$$(\mu + \lambda)^2(\beta(1-p) - \gamma - \mu - \lambda) = 0.$$

Par conséquent, les valeurs propres de J sont données par

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu \text{ et } \lambda_3 = \beta(1-p) - \gamma - \mu.$$

Il est claire que λ_1 et λ_2 sont strictement négatives. D'autre part, on voit que $\lambda_3 < 0$ si

$$\beta(1-p) - \mu - \gamma < 0, \text{ i.e } R_v < 1$$

et $\lambda_3 > 0$ si $R_v > 1$. Alors d'après le Théorème 1.3.1 le point d'équilibre sans maladie $E_0 = (1 - p, 0, p)$ est localement asymptotiquement stable si $R_v < 1$ et instable si $R_v > 1$.

2- Notons que le point d'équilibre endémique

$$E_e = (s = \frac{\gamma + \mu}{\beta}, i = \frac{\mu(\beta(1-p) - \gamma - \mu)}{\beta(\gamma + \mu)}, v = p)$$

existe si $R_v > 1$. Dans ce cas, la matrice jacobienne est donnée par

$$J_f(s^*, i^*, v^*) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu(\beta(1-p)}{(\gamma+\mu)} & -(\gamma + \mu) & 0 \\ \frac{\mu[\beta(1-p) - \gamma - \mu]}{\gamma + \mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \det(J_f - \lambda I) &= -(\mu + \lambda) \left((\mu R_v + \lambda) \lambda + (\gamma + \mu) \frac{\mu(\beta(1-p) - \gamma - \mu)}{(\gamma + \mu)} \right) \\ &= -(\mu + \lambda) (\lambda^2 + \mu R_v \lambda + \mu[(\beta(1-p) - \gamma - \mu)]). \end{aligned}$$

Le discriminant Δ est

$$\Delta = (\mu R_v)^2 - 4\mu(\beta(1-p) - \gamma - \mu).$$

On remarque que μR_v et $\mu(\beta(1-p) - \gamma - \mu)$ sont positives donc les racines du polynôme caractéristiques sont

$$\lambda_1 = -\mu$$

qui est négative et

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} [-\mu R_v \pm \sqrt{\mu^2 R_v^2 - 4\mu(\gamma + \mu)(R_v - 1)}].$$

On sait que $\mu(\beta(1-p) - \gamma - \mu) > 0$, par conséquent on distingue deux cas :

1^{er} cas :

Si $\mu^2 R_v^2 - 4\mu(\beta(1-p) - \gamma - \mu) \geq 0$, alors $\sqrt{\mu^2 R_v^2 - 4\mu(\beta(1-p) - \gamma - \mu)} \leq \mu R_v$ et donc les valeurs propres sont réelles et négatives.

2^{ème} cas :

Si $\mu^2 R_v^2 - 4\mu(\beta(1-p) - \gamma - \mu) < 0$, alors les valeurs propres sont complexes avec des parties réelles $-\mu R_v$ négatives .

Alors dans tous les cas les parties réelles des valeurs propres sont négatives. Par conséquent, à partir du Théorème 1.3.1, nous concluons que le point d'équilibre endémique est asymptotiquement stable. \square

3.4 Stabilité globale

Théorème 3.4.1. *Si $R_v \leq 1$, alors E_0 est globalement asymptotiquement stable sur Ω_1 .*

Démonstration. On considère la fonction suivante :

$$V : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{telle que } V(s, i, v) = s(t) + i(t).$$

Calculons maintenant sa dérivée par rapport à t , on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}(s, i, v) &= \frac{ds}{dt}(t) + \frac{di}{dt}(t) \\
&= (1-p)\mu - \beta is - \mu s + \beta is - \gamma i - \mu i \\
&= (1-p)\mu - \mu(s+i) - \gamma i \\
&= (1-p)\mu - \mu v - \gamma i \\
&\leq (1-p)\mu - \mu v.
\end{aligned}$$

Alors, le Théorème de comparaison des équations différentielles ordinaires (Théorème 1.2.3) permet de déduire que

$$s(t) + i(t) \leq (1-p).$$

D'autre part, on a

$$i'(t) = i(\beta s(t) - (\gamma + \mu)).$$

Par conséquent on a

$$i'(t) \leq i(\beta(1-p-i(t)) - (\gamma + \mu)), \quad (3.5)$$

ce qui implique

$$i'(t) \leq i(\gamma + \mu)[R_0(1-p) - 1],$$

i.e si $R_v < 1$ on a

$$i'(t) \leq i(\gamma + \mu)[R_v - 1] < 0. \quad (3.6)$$

Alors de l'inégalité (3.6) on déduit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0.$$

Par conséquent on a aussi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 1-p.$$

Revenant maintenant à l'inégalité (3.5) où $R_v = 1$ i.e si $\beta(1-p) = \gamma + \mu$ on obtient

$$i'(t) \leq -\beta i^2(t),$$

qui est une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 dont sa solution est donné par :

$$i(t) = \frac{1}{1/i_0 + \beta t}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0 \text{ et donc } \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 1 - p.$$

□

Théorème 3.4.2. *Si $R_v > 1$, le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration. Soit $L : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Lyapunov telle que :

$$\Omega_+ = \{s(t), i(t), v(t) \in \Omega_1, s(t) > 0, i(t) > 0, v(t) > 0\}.$$

On considère sur Ω_+ la fonction de Lyapunov définie par :

$$L_1(s, i, v) = W_1[s - s^* \ln(\frac{s}{s^*})] + W_2[i - i^* \ln(\frac{i}{i^*})] + W_3[v - v^* \ln(\frac{v}{v^*})],$$

où W_1 , W_2 et W_3 sont des constantes positives seront déterminées dans la suite.

L_1 est définie positive, c'est-à-dire $L_1(s, i, v) \geq 0$.

Calculons maintenant sa dérivée le long des trajectoires du système, nous obtenons

$$\frac{dL_1}{dt}(s, i, v) = W_1(s - s^*)[\frac{(1-p)\mu}{s} - \beta i - \mu] + W_2(i - i^*)[\beta s - \gamma - \mu] + W_3(v - v^*)[\frac{p\mu}{v} - \mu].$$

Considérons le point d'équilibre $E_e(s^*, i^*, v^*)$, nous obtenons

$$\mu = \frac{(1-p)\mu}{s^*} - \beta^* i^*, \quad \gamma + \mu = \beta s^* \text{ et } v^* = p.$$

Par conséquent, nous avons

$$\frac{dL_1}{dt}(s, i, v) = \beta(s - s^*)(i - i^*)(W_2 - W_1) - \mu W_1(1-p)\frac{(s - s^{*2})}{ss^*} - W_3\mu(v - v^*)^2.$$

Posons maintenant $W_1 = W_2 = W_3 = 1$ on obtient

$$\frac{dL_1}{dt}(s, i, v) = -\mu W_1(1-p)\frac{(s - s^{*2})}{ss^*} - W_3\mu(v - v^*)^2 < 0.$$

De plus si $s = s^*$ et $v = v^*$, alors $\frac{dL_1}{dt}(s, i, v) = 0$. Alors, par le théorème du Lyapunov Théorème 1.3.2 on déduit que le point endémique E_e est globalement asymptotiquement stable. □

3.5 Simulations numériques

Dans cette section, la simulation numérique du système (3.1) est effectuée où les valeurs de $\beta = 1.98$, $\gamma = 0.5$ et $\mu = 0.5$, c'est-à-dire sont les mêmes dans la FIGURE 2.1. De plus, on pose $p = 0.7$ (taux de vaccination). D'après l'analyse qualitative ci-dessus du système (3.1), les valeurs propres de la matrice jacobienne évaluées au point d'équilibre sans maladie $E_0 \simeq (0.2999, 0.0001, 0.7)$ sont données par

$$\lambda_1 = -0.5, \quad \lambda_2 = -0.1 \text{ et } \lambda_3 = -0.6,$$

ce qui signifie la stabilité locale du point d'équilibre. De plus, $R_v = 0.594 < 1$ ce qui implique la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie. Ces résultats sont confirmés par la FIGURE 3.1.

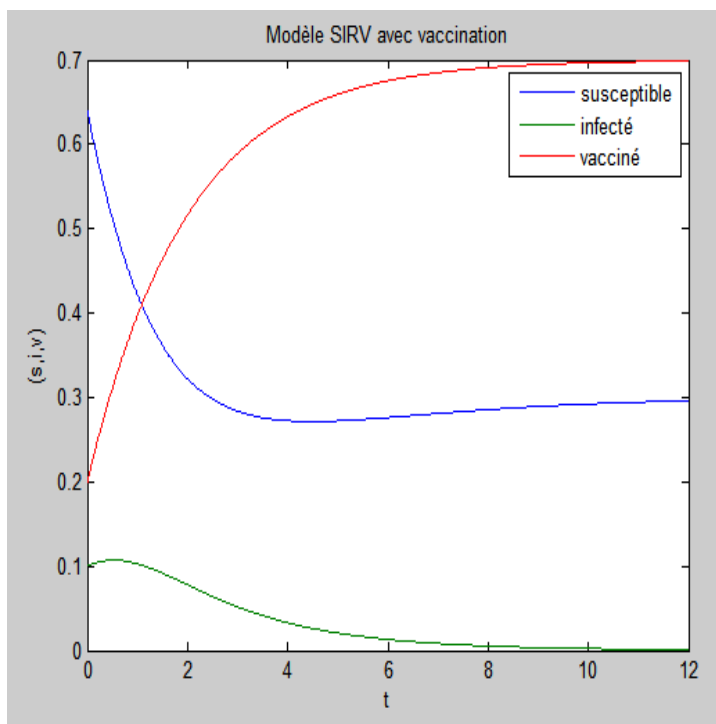


FIGURE 3.1 – Le modèle SIR avec vaccination. $\mu = \gamma = 0.5$, $\beta = 1.98$ et $p = 0.7$.

La comparaison des deux figures (FIGURE 2.1 et FIGURE 3.1) conduit à conclure que le vaccin peut empêcher la propagation de l'épidémie où nous avons utilisé les mêmes paramètres μ, β et γ dans les deux modèles, nous avons la stabilité du point d'équilibre endémique dans le cas du modèle sans vaccination "modèle (2.1)" et par contre nous avons la stabilité du point d'équilibre sans maladie dans le cas du modèle avec vaccination "modèle (3.1)".

Conclusion

Notre mémoire est consacrée à l'étude d'un système dynamique non-linéaire qui représente la propagation d'une épidémie avec et sans vaccination. Ce problème admet une solution unique et positive, de plus nous avons présenté en détail les résultats établis concernant la stabilité locale et globale des équilibres de ce système avec et sans vaccination. Ces résultats affirment qu'une petite perturbation d'un ou plusieurs paramètres d'un système dynamique peut provoquer un changement du nombre de points fixes et de leur stabilité où à un moment donné le comportement des solutions change drastiquement.

D'un point de vue biologique, nous avons constaté que le paramètre " p " (taux de vaccination) peut réduire considérablement le nombre de cas confirmés et donc empêcher la propagation d'une épidémie ce qui confirme que l'étude des systèmes dynamiques est un outil très important qui peut aider les autorités sanitaires à planifier, préparer et prendre les mesures et décisions appropriées pour contrôler les épidémies.

Bibliographie

- [1] J. Airino, C. Mcluskey, P. V. Driessche. "*Global result for an epidemic model with vaccination that exhibits backward bifurcation*". Siam journal of Applied Mathematics, 2003.
- [2] R. M. Anderson, R. M. May. "*The population Dynamics Of Microparasites and their Invertebrate Hosts*". Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B, Biological Sciences 1981.
- [3] S. Bentout. "*Mathématiques Appliquées à quelques modèles Épidémiologiques*". Thèses De Doctorat En Mathématiques, Université Abou Baker Bel Kaid, Telemcen.
- [4] M. Boots, R. Norùman, "*Sublethal infection and the population dynamics of host-microparasite interactions*". J. Animal Ecology, 2000.
- [5] F. Boyer. "*Equations Différentielles Ordinaires, Equations aux Dérivées Partielles*". Université Paul Sabatier - Toulouse, 2021.
- [6] S. Chauhan, O. P. Misra, J. Dhar. "*Stability Analysis Of Sir Model With Vaccination*". American Journal Of computational And Applied Mathematic, 2014.
- [7] M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney. "*Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos*". Elsevier, Academic Press, 2ème édition, 2003.
- [8] W. Khellaf, "*Systèmes dynamiques et modèles d'évaluation des actifs naturels et environnementaux : Application aux problèmes de dynamique des populations*"., Thèse de doctorat en science, Université de Constantine, 2013.
- [9] A. d'Onofrio, P. Manfredib, E. Salinelli. "*Vaccinating behaviour, information, and the dynamics of SIR vaccine preventable diseases*". Theoretical Population Biology, 71 2007.
- [10] N. Petit, P. Rouchon. "*Automatique : Dynamique et contrôle des systèmes*". Engineering school. MINES ParisTech, pp.236, 2009.

- [11] L. Pujo-Menjouet. "*Equations Différentielles Ordinaires et Partielles.*"
Licence Sciences, Technologies Spécialité Mathématiques Université
Claude Bernard, Lyon I, France, novembre 1918.
- [12] H. Reinhard. "*Equation différentielles Fondement et applica-
tions*", BORDAS, 1982 .
- [13] M. Zhien, J. Liu, J. Li. "*Stability analysis for differential infectivity
epidemic models*". Nonlinear Analysis Real World Application, 2003.