

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia- Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

N° d'ordre :.....

N° de Série :.....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : EDP et Applications

Thème

**Analyse mathématique et numérique d'un
problème d'évolution**

Présenté par :

Bouzelak Nourelhouda

Mhamdioua Meriem

Devant le jury

Président : Yasmina DAIKH Université de Jijel

Encadreur : Fatiha BEKKOUCHE Université de Jijel

Examineur : Hassina ZERROUG Université de Jijel



Remerciements



En premier lieu, nous remercions ALLAH le tout puissant pour la volonté et la santé qu'il nous a donné tout au long des années de nos études pour terminer ce mémoire.

Nous voudrions présenter nos sincères remerciements à notre encadreur Mme. Fatima Bekkouché, pour ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion, et surtout pour sa disponibilité et sa gentillesse. Nous exprimons notre gratitude et nos remerciements aux membres du jury Mme Daïf Yasmina et Mme Zerroug Hassina, qui nous ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail.

Bien évidemment, ce mémoire n'aurait pu voir le jour sans l'enseignement de qualité reçu tout au long de notre formation. Nous remercions donc très sincèrement tous les enseignants du département de mathématiques.

Enfin, nous souhaitons remercier nos familles. Elles ont toujours cru en nous. Elles nous ont toujours soutenues au fil des années. Ce soutien sans faille est l'élément le plus précieux à nos yeux.

Meriem Mhamdioua & Nourelhouda Bouzelak

Résumé

Dans ce travail, on considère un problème d'évolution (équation de la chaleur) et on s'intéresse à la dérivation d'estimations d'erreur a posteriori pour la discrétisation de cette équation par la méthode des éléments finis non-conforme de Crouzeix-Raviart en espace et un schéma d'Euler implicite en temps. La borne supérieure est globale en espace et en temps et permet le contrôle effectif de l'erreur globale. À la fin, on présente également des tests numériques.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Notions préliminaires	5
1.1 Notations	5
1.2 Les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$	6
1.2.1 Formules de Green sur un polygone	8
1.3 Le lemme de Lax-Milgram	8
1.4 Discrétisations : (Triangulation)	9
1.4.1 Triangulation conforme	9
2 Analyse a posteriori pour un problème d'évolution	11
2.1 Présentation du problème	11
2.1.1 La formulation variationnelle	12
2.2 La discrétisation en temps par le schéma d'Euler implicite	12
2.3 La discrétisation totale	13
2.4 Quelques outils d'analyse	17
2.5 Analyse d'erreur a posteriori pour le problème semi-discrétisé	24
2.6 Analyse a posteriori de la discrétisation spatiale	28
2.6.1 Borne supérieure de l'erreur	28
2.6.2 Borne inférieure de l'erreur	34
2.7 Analyse a posteriori pour le problème totalement discrétisé	38
3 Quelques résultats numériques	41
3.1 Exemple 1	41
3.1.1 Fiabilité de l'estimateur spatial	43
3.1.2 Efficacité de l'estimateur spatial	44
3.2 Exemple 2 (Maillage non structuré)	45
3.3 Exemple 3 (Dépendance de l'erreur)	46
3.4 Algorithme adaptatif	48
3.4.1 Structure globale de l'algorithme en espace	50
3.4.2 Exemple 4	52

Bibliographie

54

Introduction générale

Un grand nombre de phénomènes environnementaux et physiques sont décrits par des équations aux dérivées partielles. Les situations dépendant du temps se traduisent plus particulièrement par des **problèmes d'évolution** tenant compte d'éventuelles interactions entre objets et évènements.

Dans la plupart des cas, il n'est pas possible de trouver des solutions exactes, analytiques de ces équations. Par conséquent, des méthodes numériques, c'est-à-dire des algorithmes mathématiques évalués à l'aide d'ordinateurs, sont utilisées pour des simulations.

A part des cas très particuliers, les méthodes numériques fournissent seulement des solutions approchées, le plus souvent des fonctions définies dans un espace de dimension finie, différentes des solutions exactes. Deux questions d'une importance essentielle sont :

1. Quelle est la grandeur de l'erreur entre les solutions exacte et approchée ?
2. Où l'erreur est-elle localisée ?

Traditionnellement, la qualité des solutions numériques approchées est exprimée à l'aide des estimations d'erreur a priori. Ces estimations peuvent être évaluées avant le début du calcul et donnent des bornes sur la différence entre la solution exacte et la solution approchée. Cette borne dépend typiquement de la taille des mailles (qui tend vers zéro avec le raffinement du maillage) et une constante inconnue qui dépend de la solution exacte. Ces estimations sont utilisées afin de justifier théoriquement la convergence de la méthode numérique concernée. Malheureusement, en pratique la borne supérieure ne peut quasiment jamais être évaluée et ne peut donc pas donner une réponse aux deux questions énumérées ci-dessus.

Le but des estimations d'erreur a posteriori est de donner des bornes sur l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte qui peuvent être calculées en pratique, une fois que la solution approchée est connue. Par conséquent, en principe, les estimations d'erreur a posteriori peuvent être utilisées pour donner des réponses aux questions 1 et 2 ci-dessus.

Pour les estimations d'erreur a posteriori, on peut formuler les propriétés

- i) fournir une borne supérieure d'erreur entre la solution exacte et approchée qui soit entièrement (sans aucune constante inconnue) calculable à partir de la solution approchée,
- ii) donner une expression de cette estimation localement, par exemple dans chaque élément du maillage, et garantir que cette estimation est aussi localement une borne inférieure, de l'erreur à une constante multiplicative près,
- v) garantir que l'index d'efficacité, donné comme le rapport entre l'erreur estimée et l'erreur actuelle, tend vers 1 en augmentant le coût du calcul (exactitude asymptotique),
- iv) garantir les trois propriétés précédentes indépendamment des paramètres et de leur variation (robustesse) ;
- v) donner des estimations pouvant être évaluées localement (coût négligeable).

Dans ce travail, nous nous intéressons à la discrétisation par la méthode des éléments finis non conforme et l'analyse d'erreur a posteriori de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega, 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Où u_t est la dérivée de u par rapport à t : On suppose que la fonction f satisfait $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et la donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Pour les problèmes d'évolution, plusieurs travaux ont été effectués dans le cadre de la méthode des éléments finis conformes. On cite entre autres, [1], [2] et [3] pour l'équation de la chaleur et [4] pour l'équation de convection-diffusion-réaction. Cascón, Ferragut, et Asensio [5] obtiennent une estimation d'erreur a posteriori pour l'équation de la chaleur discrétisée par des éléments finis mixtes et Nicaise et Soualem [6] pour la méthode des éléments finis non conformes. Dans le cadre des méthodes de Galerkin discontinues, on cite Sun et Wheeler [7], Ern et Proft [8], Yang et Chen [9], et Chen et Yang [10], qui dérivent des estimations d'erreur a posteriori pour le problème de convection-diffusion instationnaire, et Georgoulis, Lakkis, et Virtanen [11] qui présentent une estimation d'erreur a posteriori pour un problème de diffusion instationnaire. Houston et Süli [12] dérivent des estimations d'erreur a posteriori pour un problème de convection-diffusion instationnaire par la méthode de Lagrange-Galerkin.

Amara, Nadau et Trujillo [13] présentent une estimation d'erreur a posteriori pour l'équation de la chaleur discrétisée par la méthode des volumes finis centrés par maille sur un maillage rectangulaire en utilisant les schémas à 5 ou 9 points. Ces estimations sont

établies en utilisant une interprétation du schéma volumes finis en termes d'une méthode d'éléments finis mixtes. L'étude est basée sur les travaux de Bergam, Bernardi et Mghazli [3] où l'erreur est décomposée en erreur temporelle et erreur spatiale et ensuite chacune de ces composantes est bornée par un indicateur. Cette technique de séparation des erreurs est également utilisée par Aboulaich, Achchab et Darouichi [14] qui considèrent un problème de transport unidimensionnel discrétisé par les volumes finis centrés par sommets. Ces estimations d'erreur a posteriori sont dérivées pour la norme d'énergie de l'erreur.

Ce travail comporte principalement trois chapitres

- Dans le premier chapitre, nous donnons les définitions des espaces de Sobolev et les résultats que nous utilisons tout au long de ce mémoire.
- Dans le Chapitre 2, nous effectuons une analyse d'erreur a-posteriori pour la discrétisation de l'équation de la chaleur par la méthode des éléments finis non-conformes de Crouzeix-Raviart et le schéma d'Euler implicite.
- et dans le chapitre 3, nous effectuons quelques tests numériques sur les éléments finis non-conformes de Crouzeix-Raviart.

Notions préliminaires

Résumé

Dans ce chapitre, on rappelle les notions de base utilisées tout au long du mémoire. En particulier, les définitions et les propriétés de base des espaces de Sobolev usuels. Pour les preuves des propositions et des théorèmes énoncés dans ce chapitre, le lecteur peut consulter par exemple [15, 16, 17].

Sommaire

1.1	Notations	5
1.2	Les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$	6
1.2.1	Formules de Green sur un polygone	8
1.3	Le lemme de Lax-Milgram	8
1.4	Discretisations : (Triangulation)	9
1.4.1	Triangulation conforme	9

1.1 Notations

Soit Ω un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n de point générique (x_1, x_2, \dots, x_n) . ∂_i désigne la dérivée partielle par rapport à la variable x_i , $1 \leq i \leq n$ et pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on a $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}$.

On note aussi par $\mathcal{D}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$) l'espace de toutes les fonctions indéfiniment continûment différentiables et à support compact dans Ω (resp. l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$). Pour tout entier k , on désigne par $C^k(\overline{\Omega})$ l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions de classe C^k sur \mathbb{R}^n et par $C_0^k(\overline{\Omega})$ le sous-espace de $C^k(\overline{\Omega})$ formé par les fonctions ayant un support borné dans Ω (rappelons que Ω peut être non borné).

On note $L^2(\Omega)$ l'espace de toutes les fonctions de carré intégrable sur Ω - par rapport à la mesure de Lebesgue dx dans \mathbb{R}^n - muni de son produit scalaire usuel $(u, v) =$

$\int_{\Omega} u(x) v(x) dx$, la norme associée sera notée par $\|\cdot\|_{0,\Omega}$.

1.2 Les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$

Définition 1.2.1. On note $H^s(\Omega)$ l'espace des distributions u définies dans Ω telles que

- i) $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$ lorsque $s = m$ est un entier positif.
- ii) $u \in H^m(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\sigma}} dx dy < +\infty,$$

pour $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier et positif avec m entier et σ la partie fractionnaire de s , $0 < \sigma < 1$.

$H^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme définie par

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

dans le cas 1, et par

$$\|u\|_{s,\Omega} = \left(\|u\|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\sigma}} dx dy \right)^{1/2},$$

dans le cas 2.

Définition 1.2.2. $H_0^s(\Omega)$ note l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.

Remarque 1.2.3. $H_0^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_{s,\Omega}$, car $H_0^s(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^s(\Omega)$ donc complet.

Théorème 1.2.4. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n à frontière lipschitzienne. Alors $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^s(\Omega)$ quel que soit $s \geq 0$.

Définition 1.2.5. Pour $s < 0$, $H^s(\Omega)$ est le dual de $H_0^{-s}(\Omega)$.

Théorème 1.2.6. (Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 dx \right\}^{1/2} \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega). \quad (1.1)$$

Corollaire 1.2.7. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné dans au moins une direction de l'espace on a :

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{1 + C^2} \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega),$$

où C est la constante de l'inégalité de Poincaré.

Un corollaire important de l'inégalité de Poincaré est le résultat suivant qui fournit une norme équivalente plus simple dans $H_0^1(\Omega)$.

Corollaire 1.2.8. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme*

$$|u|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Corollaire 1.2.9. *L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 1.2.10. (Théorème de trace) *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C(\Gamma) \\ u &\longrightarrow u|_{\Gamma}, \end{aligned}$$

s'étend en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, appelée opérateur de trace et notée γ . En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{0,\Gamma} \leq C \|v\|_{1,\Omega}.$$

Corollaire 1.2.11. *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , à frontière Γ lipschitzienne, alors*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Définition 1.2.12. *Pour $u \in H^2(\Omega)$, sa dérivée normale sur Γ est définie par*

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^n n_i \gamma \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

où n_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de la fonction n (exprimée dans les coordonnées cartésiennes $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$) définie presque partout par

$$n : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto n(x)$$

et $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$. Remarquons que $\gamma \frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma)$, puisque, grâce au Théorème 1.2.10, tous les $\gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}$ sont dans $L^2(\Gamma)$ et que $|n| \leq 1$. Ceci prouve aussi que l'application

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial}{\partial n} : H^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ u &\longmapsto \gamma \frac{\partial u}{\partial n}, \end{aligned}$$

est linéaire continue.

1.2.1 Formules de Green sur un polygone

Rappelons d'abord les formules de Green usuelles qui sont valides dans tout domaine lipschitzien borné suivant [16].

Théorème 1.2.13. *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à frontière lipschitzienne Γ . Alors pour $u, v \in H^1(\Omega)$, on a :*

$$\int_{\Omega} v \partial_i u \, dx = \int_{\Omega} u \partial_i v \, dx + \int_{\Gamma} \gamma u \gamma v n_i \, d\sigma.$$

Par conséquent, sous les mêmes hypothèses sur Ω , on a la demi-formule de Green

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\sigma \quad \forall u \in H^1(\Omega) \text{ et } v \in H^2(\Omega). \quad (1.2)$$

Lorsque Ω est un ouvert polygonal borné de \mathbb{R}^2 , la formule précédente s'énonce de la façon suivante :

$$(u, \Delta v) + (\nabla u, \nabla v) = \sum_j \langle \gamma_j u, \gamma_j \partial_{n_j} v \rangle_{\Gamma_j} \quad \forall u \in H^1(\Omega) \text{ et } v \in H^2(\Omega), \quad (1.3)$$

où $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_j}$ désigne le produit scalaire dans Γ_j .

1.3 Le lemme de Lax-Milgram

Soit V un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire notée (\cdot, \cdot) , de norme associée notée $\|\cdot\|$.

Définition 1.3.1. *Une application*

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v), \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire sur V si elle est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables.

Définition 1.3.2. *On dit qu'une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est*

1. *Continue sur $V \times V$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

2. *Coercive (ou V -elliptique) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V.$$

Lemme 1.3.3 (Lemme de Lax-Milgram). *Soient :*

- *Une forme bilinéaire $(u, v) \longmapsto a(u, v)$ continue sur $V \times V$ et coercive.*

- Une forme linéaire L continue sur V .

Alors le problème variationnel suivant :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V, \quad (1.4)$$

admet une solution unique $u \in V$.

1.4 Discrétisations : (Triangulation)

Définition 1.4.1. Soit Ω un connexe de \mathbb{R}^d . On suppose que le bord $\partial\Omega$ est polygonal (si $d = 2$) ou polyédral (si $d = 3$). Une triangulation (ou maillage) τ_h sur $\bar{\Omega}$ est une partition finie de $\bar{\Omega}$ formée des éléments de formes simples, par exemple des triangles (si $d = 2$) ou des tétraèdres (si $d = 3$). Pour $K \in \tau_h$, on note h_K le diamètre de K et ρ_K le diamètre du cercle inscrit ($d = 2$) ou de la sphère inscrite ($d = 3$) dans K .

1.4.1 Triangulation conforme

Définition 1.4.2. On suppose que le bord $\partial\Omega$ est polygonal (si $d = 2$) ou polyédral (si $d = 3$). On dit qu'une triangulation τ_h sur $\bar{\Omega}$ est admissible ou conforme si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit un sommet, soit un côté entier ou une face entière.

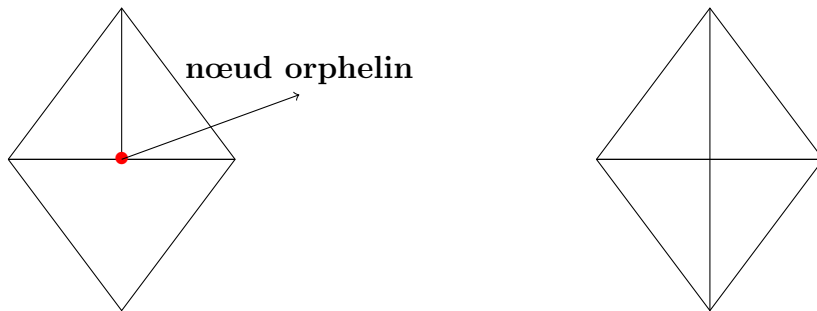


FIGURE 1.1 – à gauche : maillage non conforme en 2d, à droite : maillage conforme en 2d.

Chapitre 2

Analyse a posteriori pour un problème d'évolution

Résumé

On considère une équation de la chaleur et on s'intéresse à la dérivation d'estimations d'erreur a posteriori pour la discrétisation de cette équation par la méthode des éléments finis non-conforme de Crouzeix-Raviart en espace et la méthode d'Euler implicite en temps.

Sommaire

2.1	Présentation du problème	11
2.1.1	La formulation variationnelle	12
2.2	La discrétisation en temps par le schéma d'Euler implicite	12
2.3	La discrétisation totale	13
2.4	Quelques outils d'analyse	17
2.5	Analyse d'erreur a posteriori pour le problème semi-discrétisé	24
2.6	Analyse a posteriori de la discrétisation spatiale	28
2.6.1	Borne supérieure de l'erreur	28
2.6.2	Borne inférieure de l'erreur	34
2.7	Analyse a posteriori pour le problème totalement discrétisé	38

2.1 Présentation du problème

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou $d = 3$, à frontière $\partial\Omega$ polygonale ($d=2$) ou polyédrale ($d=3$). Soit T un nombre réel positif fixé. Nous nous intéressons à la discrétisation et à l'analyse d'erreur du problème suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Où u_t est la dérivée de u par rapport à t . On suppose que la fonction f satisfait $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et la donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$.

2.1.1 La formulation variationnelle

Vu que l'on cherche une solution nulle sur le bord, l'espace à considérer est l'espace $H_0^1(\Omega)$. La formulation variationnelle de ce problème s'obtient en multipliant la première équation de (2.1) par une fonction test v de $H_0^1(\Omega)$ en intégrant en espace et en intégrant par parties. En effet, la formule d'intégration par parties s'écrit dans un ouvert Ω comme

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \partial_n u(x)v(x)dx.$$

La formulation variationnelle associée au problème (2.1) est alors la suivante

Définition 2.1.1. *Supposons que $u_0 \in L^2(\Omega)$ et que $f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$. On dit qu'une fonction u est solution variationnelle au problème (2.1) si elle vérifie*

1. $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$ et $\partial_t u \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$,
2. $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, on a pour presque tout $t \in]0, T[$

$$\int_{\Omega} u_t(x, t)v(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx. \quad (2.2)$$

Remarque 2.1.2. *La formulation variationnelle prend cette forme après intégration par partie car la quantité*

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n u(x)v(x)dx$$

s'annule pour $u \in H_0^1(\Omega)$.

On a le résultat suivant d'existence et d'unicité pour le problème (2.1) (voir [18]).

Théorème 2.1.3. *Le problème (2.1) admet une unique solution variationnelle*

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$$

au sens de la Définition 2.1.1.

2.2 La discrétisation en temps par le schéma d'Euler implicite

On suppose maintenant que $f \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$. On considère une suite croissante de temps discrets noté $\{t_p\}_{0 \leq p \leq N}$ tel que $t_0 = 0$ et $t_N = T$ et on définit, pour tout

$1 \leq p \leq N$, l'intervalle discret $I_p = [t_{p-1}, t_p]$ et le pas de temps $\tau_p = t_p - t_{p-1}$. On note par $\tau = \max_{1 \leq p \leq N} \tau_p$ le pas global de discrétisation en temps.

L'approximation semi-discrète du problème continu (2.1) par le schéma d'Euler implicite consiste à trouver une suite $(u^p)_{0 \leq p \leq N}$ solution de

$$\begin{cases} \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} - \Delta u^p = f^p, & \text{dans } \Omega, \quad 1 \leq p \leq N, \\ u^0 = u_0, & \text{dans } \Omega, \\ u^p = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \quad 1 \leq p \leq N. \end{cases} \quad (2.3)$$

avec $f^p = f(\cdot, t_p)$. Ce problème admet une unique solution faible $u^p \in H_0^1(\Omega)$, dont la formulation variationnelle est

$$\int_{\Omega} u^p(x)v(x)dx + \tau_p \int_{\Omega} \nabla u^p(x)\nabla v(x)dx = \int_{\Omega} u^{p-1}(x)v(x)dx + \tau_p \int_{\Omega} f^p(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.4)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (2.4) est une conséquence directe du lemme de Lax-Milgram.

2.3 La discrétisation totale

On discrétise maintenant le problème (2.4) en espace. Pour cela, on définit un ensemble de maillages $\{T_{ph}\}_{0 \leq p \leq N}$ de Ω correspondant aux différents pas de temps $\{t_p\}_{0 \leq p \leq N}$. Ces maillages sont tels que, pour tout $0 \leq p \leq N$, $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in T_{ph}} K$. Les éléments du maillage sont par convention des fermés et ils sont tels que l'intersection des intérieurs de deux éléments distincts est vide. Pour simplifier, on suppose que les maillages sont triangulaires et conformes (dans le sens où ils ne contiennent pas des "nœuds orphelins", voir Figure 1.1). Ces maillages sont supposés réguliers dans le sens de la Définition 1.4.2. Le maillage initial T_{0h} désigne le maillage utilisé pour approcher la condition initiale alors que les maillages T_{ph} , pour tout $0 \leq p \leq N$, désignent les maillages utilisés pour passer du temps t_{p-1} au temps t_p . Pour chaque $0 \leq p \leq N$, on associe à chaque maillage T_{ph} son pas noté $h_p = \max_{K \in T_{ph}} h_K$.

Pour tout $K \in T_{ph}$, on désigne par \mathcal{E}_K l'ensemble de ses arêtes/faces. Ensuite, on désigne par \mathcal{E}_{ph} l'ensemble de toutes les arêtes/faces de T_{ph} , par \mathcal{E}_{ph}^{int} l'ensemble des arêtes/faces situées à l'intérieur de T_{ph} . Enfin, pour deux éléments K et $L \in T_{ph}$ et pour une arête/face $E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L$ on désigne par

$$h_E = \frac{d}{2} \left(\frac{|K|}{|E|} + \frac{|L|}{|E|} \right),$$

sa hauteur moyenne.

Pour tout $0 \leq p \leq N$, l'espace des élément finis non conforme de Crouzeix-Raviart est noté X_{ph}^0 et est défini par :

$$X_{ph}^0 = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in T_{ph} \right. \\ \left. \int_E v|_K = \int_E v|_L, \quad \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_{ph}^{int}, K, L \in T_{ph} \right. \\ \left. \int_E v|_K = 0, \quad \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \partial\Omega, K \in T_{ph} \right\}.$$

L'approximation totalement discrète du problème (2.1) en utilisant le schéma d'Euler implicite et la méthode des élément finis non conforme de Crouzeix-Raviart est donnée par : étant donné une approximation $u_h^0 \in X_{0h}^0$ de u_0 , trouver $u_h^p \in X_{ph}^0$, $1 \leq p \leq N$ tel que

$$\int_{\Omega} u_h^p v_h + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla u_h^p \nabla v_h = \int_{\Omega} u_h^{p-1} v_h + \tau_p \int_{\Omega} f^p v_h, \quad (2.5)$$

pour tout $v_h \in X_{ph}^0$.

Définition 2.3.1. Soit u^p la solution du problème (2.4) et u_h^p la solution de (2.5), alors on désigne l'erreur spatiale par

$$e^p = u^p - u_h^p.$$

Rappelons maintenant quelques notations utiles et propriétés utilisées ci-dessous.

Pour une arête/face E , on désigne le vecteur normal orienté vers l'extérieur par n_E . Étant donnée une arête/face intérieure E , nous choisissons une direction normale arbitraire n_E et on désigne par K_{int} et K_{ext} les deux éléments partageant cette arête/face. Dans toute la suite on suppose que n_E pointe vers K_{ext} comme dans la Figure 2.1

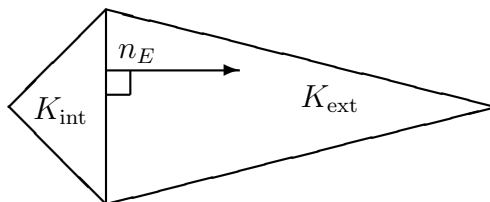


FIGURE 2.1 – Exemple de deux éléments partageant le bord E et de normale n_E .

Pour l'analyse de l'approximation non conforme, nous utiliserons la propriété de Crouzeix-Raviart suivante :

$$\int_E \llbracket u_h \rrbracket_E = 0 \quad \forall E \in \mathcal{E}_{ph}, \quad \forall u_h \in X_{ph}^0. \quad (2.6)$$

Où le saut d'une fonction v à travers une arête/face E à un point x est défini par

$$\llbracket v(x) \rrbracket_E = \begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} v(x + \alpha n_E) - v(x - \alpha n_E), & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}, \\ v(x), & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph} \setminus \mathcal{E}_{ph}^{int}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Notons que le signe de $\llbracket v(x) \rrbracket_E$ dépend de l'orientation de n_E . Toutefois, une quantité comme un saut de gradient $\llbracket \nabla v \cdot n_E \rrbracket_E$ est indépendante de cette orientation.

Dans la suite, nous utiliserons les patches locaux : pour un élément K , on définit le patch de K (noté ω_K) par l'ensemble de tous les éléments qui ont une arête/face commune avec K (voir la Figure 2.2). Pour une arête/face E , soit ω_E l'union des deux éléments ayant E comme arête/face et enfin pour un nœud x , on note par ω_x l'union des deux éléments ayant x comme nœud. De même, on note par $\tilde{\omega}_K$ (resp. $\tilde{\omega}_E$) l'union de tous les triangles partageant un nœud avec K (resp. E).

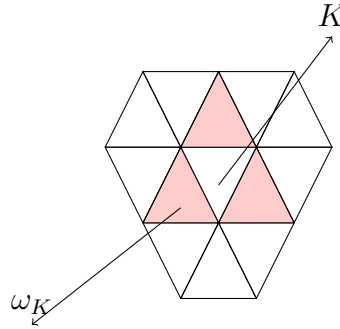


FIGURE 2.2 – Patch d'un élément K .

Pour une fonction $v \in X_{ph}^0$ on définit son gradient brisé $\nabla_h v$ par :

$$(\nabla_h v)|_K = \nabla(v|_K), \quad \forall K \in T_{ph}.$$

Nous avons en outre besoin des espaces d'éléments finis conformes \mathbb{P}_1 standard

$$V_{ph} = \{v \in H^1(\Omega) : v|_K \in \mathbb{P}_1, \quad \forall K \in T_{ph}\},$$

$$V_{ph}^0 = V_{ph} \cap H_0^1(\Omega).$$

Pour notre analyse d'erreur, nous avons besoin d'un interpolant qui mappe $X_{ph}^0 \oplus H_0^1(\Omega)$ à V_{ph}^0 . D'où l'opérateur d'interpolation de Clément est plus approprié que l'opérateur d'interpolation de Lagrange. Pour écrire les résultats dans le plus grand paramètre possible, définissons

$$\begin{aligned}
 Y_{ph} &= \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^1(K), \forall K \in T_{ph}, \\
 &\quad \int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_{ph}^{int}, K, L \in T_{ph}\}, \\
 Y_{ph}^0 &= \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^1(K), \forall K \in T_{ph}, \\
 &\quad \int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_{ph}^{int}, K, L \in T_{ph}, \\
 &\quad \int_E v|_K = 0, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \partial\Omega, K \in T_{ph}\}.
 \end{aligned}$$

Notons que $H^1(\Omega) \subset Y_{ph}$ et $X_{ph}^0 \oplus H_0^1(\Omega) \subset Y_{ph}^0$.

Nous définissons maintenant l'opérateur d'interpolation de Clément. Pour cela on introduit les notations suivantes :

- On note par \mathcal{N}_{ph} l'ensemble des nœuds de la triangulation T_{ph} et par \mathcal{N}_{ph}^{int} l'ensemble des nœuds intérieurs de la triangulation T_{ph} . Pour chaque nœud $x \in \mathcal{N}_{ph}^{int}$.
- On note plus loin par λ_x la fonction chapeau standard associée à x , c'est à dire $\lambda_x \in V_{ph}$ et satisfait

$$\lambda_x(y) = \delta_{x,y}, \quad \forall y \in \mathcal{N}_{ph}.$$

L'opérateur d'interpolation de Clément est défini par

$$I_C v = \sum_{x \in \mathcal{N}_{ph}} |\omega_x|^{-1} \left(\int_{\omega_x} v \right) \lambda_x, \quad (2.8)$$

pour tout $v \in Y_{ph}$ et $\omega \in Y_{ph}^0$.

$$I_C^0 \omega = \sum_{x \in \mathcal{N}_{ph}^{int}} |\omega_x|^{-1} \left(\int_{\omega_x} \omega \right) \lambda_x. \quad (2.9)$$

Notez que $I_C v$ appartient à V_{ph} , tandis que $I_C^0 \omega$ appartient à V_{ph}^0 .

On rappelle quelques inégalités basées sur l'opérateur d'interpolation de Clément.

Lemme 2.3.2. *Pour tout $v \in Y_{ph}$ et $\omega \in Y_{ph}^0$ on a :*

$$\|v - I_C v\|_K \lesssim h_K \|\nabla_h v\|_{\tilde{\omega}_K}, \quad \forall K \in T_{ph}, \quad (2.10)$$

$$\|v - I_C v\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla_h v\|_{\tilde{\omega}_E}, \quad \forall E \in \mathcal{E}_{ph}, \quad (2.11)$$

$$\|\omega - I_C^0 \omega\|_K \lesssim h_K \|\nabla_h \omega\|_{\tilde{\omega}_K}, \quad \forall K \in T_{ph}, \quad (2.12)$$

$$\|v - I_C^0 \omega\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla_h \omega\|_{\tilde{\omega}_E}, \quad \forall E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}, \quad (2.13)$$

$$\|\nabla I_C^0 \omega\| \lesssim \|\nabla_h \omega\|_{\tilde{\omega}_K}, \quad \forall K \in T_{ph}, \quad (2.14)$$

- La valeur moyenne d'une fonction v sur une arête / face E est définie par :

$$\mathcal{M}_E(v) = \frac{1}{|E|} \int_E v.$$

Dans la suite, nous avons souvent besoin des formules de Green suivantes : si D est un sous-ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^2 et $v, w \in H^1(D)$, alors nous avons :

$$\int_D \nabla v \cdot \mathbf{curl} \omega = \int_{\partial D} v \mathbf{curl} \omega \cdot n = \int_{\partial D} \nabla v \cdot t \omega. \quad (2.15)$$

où t est le vecteur tangent unitaire le long de ∂D et $\mathbf{curl} \omega$ est la courbe vectorielle de w , à savoir $\mathbf{curl} \omega = \begin{pmatrix} \partial_2 \omega \\ -\partial_1 \omega \end{pmatrix}$

De même si D est un sous-ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^3 et $v \in H^1(D)$, $\omega \in H^1(D)^3$ alors nous avons

$$\int_D \nabla v \cdot \mathbf{curl} \omega = \int_{\partial D} v \mathbf{curl} \omega \cdot n = \int_{\partial D} (\nabla v \times n) \cdot \omega. \quad (2.16)$$

Nous introduisons enfin le saut de gradient de u_h^p dans la direction normale et tangentielle par :

$$J_{E,n}^p = \begin{cases} \llbracket \nabla u_h^p \cdot n_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{\text{int}}, \\ 0 & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph} \setminus \mathcal{E}_{ph}^{\text{int}}. \end{cases}$$

Si $d = 2$, alors

$$J_{E,t}^p = \begin{cases} \llbracket \nabla u_h^p \cdot t_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{\text{int}}, \\ -\nabla u_h^p \cdot t_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph} \setminus \mathcal{E}_{ph}^{\text{int}}. \end{cases}$$

Si $d = 3$, alors

$$J_{E,n}^p = \begin{cases} \llbracket \nabla u_h^p \cdot n_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{\text{int}}, \\ -\nabla u_h^p \times n_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph} \setminus \mathcal{E}_{ph}^{\text{int}}. \end{cases}$$

2.4 Quelques outils d'analyse

Dans cette section, on donne quelques propriétés satisfaites par l'erreur spatiale e^p que nous utiliserons dans la preuve des estimations d'erreur spatiale.

Lemme 2.4.1. (Orthogonalité de Galerkin) . L'erreur e^p satisfait la relation d'orthogonalité de Galerkin

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} \frac{e^{p-1} - e^p}{\tau_p} v_h, \forall v_h \in V_{ph}^0. \quad (2.17)$$

Preuve : Il suffit de soustraire (2.4) avec $v = v_h \in V_{ph}^0$ à l'identité (2.5). ■

Lemme 2.4.2. Soit $\varphi \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi \in H^1(\Omega)^3$ si $d = 3$. Alors l'erreur satisfait l'identité suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot \varphi. \quad (2.18)$$

Preuve : Soit $u^p \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$

On suppose $d = 2$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi &= \int_{\Omega} \nabla_h (u^p - u_h^p) \cdot \mathbf{curl} \varphi \\ &= \int_{\Omega} \nabla u^p \cdot \mathbf{curl} \varphi - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla u_h^p \cdot \mathbf{curl} \varphi. \end{aligned}$$

En intégrant par partie sur Ω et sur chaque élément K et en utilisant (2.15), on trouve

$$\int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi = \int_{\partial\Omega} u^p \mathbf{curl} \varphi \cdot n - \sum_{K \in T_{ph}} \int_{\partial K} \nabla u_h^p \cdot t_k \cdot \varphi.$$

Comme $u^p \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$, nous concluons en utilisant la définition de $J_{E,t}^p$.

La preuve est similaire en utilisant (2.16) lorsque $d = 3$. ■

Lemme 2.4.3. (Orthogonalité de l'erreur). L'erreur satisfait

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h = 0, \forall \varphi_h \in V_{ph} \text{ si } d = 2 \text{ et } \varphi_h \in (V_{ph})^3 \text{ si } d = 3. \quad (2.19)$$

Preuve : Considérons un élément arbitraire φ_h dans V_{ph} si $d = 2$ ou dans $(V_{ph})^3$ si $d = 3$. Comme précédemment, en intégrant par parties (cf. les identités (2.15) et (2.16)), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h &= \int_{\Omega} \nabla_h (u^p - u_h^p) \cdot \mathbf{curl} \varphi_h \\ &= \int_{\Omega} \nabla u^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla u_h^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h \\ &= \int_{\partial\Omega} u^p \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n - \sum_{K \in T_{ph}} \int_{\partial K} u_h^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_K. \end{aligned}$$

Comme $u^p \in H_0^1(\Omega)$, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h &= - \sum_{K \in T_{ph}} \int_{\partial K} u_h^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_K \\ &= - \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E \llbracket u_h^p \rrbracket_E \cdot \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_E \\ &= - \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} (\mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_E) \int_E \llbracket u_h^p \rrbracket_E. \end{aligned}$$

puisque la fonction ($\mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_E$) est constante sur $E \in E_{ph}$. Le résultat se déduit donc en utilisant la propriété de Crouzeix-Raviart (2.6) (comme $u_h^p \in X_{ph}^0$). ■

Lemme 2.4.4. *L'erreur e^p satisfait*

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla \omega = \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) \omega + \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p \omega,$$

pour tout $\omega \in H_0^1(\Omega)$.

Preuve : Par définition, on a

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla \omega &= \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h u^p \cdot \nabla \omega - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h u_h^p \cdot \nabla \omega \\ &= \int_{\Omega} \nabla u^p \cdot \nabla \omega - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h u_h^p \cdot \nabla \omega. \end{aligned}$$

En intégrant par parties sur Ω (resp. sur chaque élément K) le premier terme (le deuxième) du membre de droite de la dernière égalité, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K -\nabla_h e^p \cdot \nabla \omega &= - \int_{\Omega} \Delta u^p \omega + \int_{\partial \Omega} n \cdot \nabla u^p \omega d\Gamma \\ &\quad - \sum_{K \in T_{ph}} \left(\int_K \Delta u_h^p \omega + \int_{\partial K} n \cdot \nabla u_h^p \omega \right). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\omega \in H_0^1(\Omega)$ et $-\Delta u^p = f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p}$, et $u_h^p \in X_{ph}^o$ (donc $\Delta u_h^p = 0$), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla \omega &= \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) \omega - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h u_h^p \cdot \nabla \omega \\ &\quad - \sum_{K \in T_{ph}} \left(\int_K \Delta u_h^p \omega + \int_{\partial K} n \cdot \nabla u_h^p \omega \right). \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la définition de $J_{E,n}^p$ et la continuité de w à travers les arêtes/faces. ■

Corollaire 2.4.5. *Pour tout $\omega \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et on a $\varphi \in H^1(\Omega)^3$ si $d = 3$, on a :*

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot (\nabla \omega + \mathbf{curl} \varphi) = \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) \omega + \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p \omega + J_{E,t}^p \varphi). \quad (2.20)$$

Preuve : Conséquence directe des Lemmes 2.4.1 et 2.4.4. ■

Lemme 2.4.6. (La décomposition de Helmholtz de l'erreur). On a la décomposition de l'erreur suivante :

$$\nabla_h e^p = \nabla \omega^p + \mathbf{curl} \varphi^p, \quad (2.21)$$

avec $\varphi^p \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi^p \in (H^1(\Omega))^3$ si $d = 3$ et $\omega^p \in H_0^1(\Omega)$. De plus, on a les estimations suivantes :

$$|\omega^p|_{1,\Omega} \leq \|\nabla_h e^p\|, \quad (2.22)$$

$$|\varphi^p|_{1,\Omega} \lesssim \|\nabla_h e^p\|. \quad (2.23)$$

Preuve : On considère le problème de Dirichlet suivant : trouver $\omega^p \in H_0^1(\Omega)$ tel que,

$$\begin{cases} \mathbf{div} (\nabla_h e^p - \nabla \omega^p) = 0, & \text{dans } \Omega \\ \omega^p = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.24)$$

La formulation variationnelle de ce problème est :

$$\int_{\Omega} \nabla \omega^p \cdot \nabla v = \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \nabla v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.25)$$

Comme la divergence de vecteur $\nabla_h e^p - \nabla \omega^p$ est nulle sur Ω , i.e.,

$$\mathbf{div} (\nabla_h e^p - \nabla \omega^p) = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

D'après le Théorème I.3.1 de [?] si $d = 2$ ou le Théorème I.3.4 de [?] si $d = 3$, il existe $\varphi^p \in H_0^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi^p \in (H^1(\Omega))^3$ si $d = 3$ tel que

$$\mathbf{curl} \varphi^p = \nabla_h e^p - \nabla \omega^p.$$

En posant $v = \omega^p$ dans (2.25) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|\nabla \omega^p\| \leq |\omega^p|_{1,\Omega}.$$

D'où l'estimation (2.22). On passe maintenant à démontrer la deuxième estimation (2.23).

D'après (2.21), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{curl} \varphi^p|^2 &= \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi^p \cdot \mathbf{curl} \varphi^p \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi^p \cdot (\nabla_h e^p - \nabla \omega^p) \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi^p \cdot \nabla_h e^p - \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi^p \cdot \nabla \omega^p. \end{aligned}$$

On utilise la formule de Green sur le deuxième terme de membre droite de cette dernière égalité et la condition sur le bord de Ω , (i.e : $\omega^p = 0$ sur $\partial\Omega$). Ce qui donnent

$$\int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi^p \cdot \nabla \omega^p = \int_{\partial\Omega} \omega^p \cdot t \cdot \mathbf{curl} \varphi^p = 0,$$

alors

$$\int_{\Omega} |\mathbf{curl} \varphi^p|^2 = \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi^p \cdot \nabla_h e^p. \quad (2.26)$$

Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{curl} \varphi^p\|^2 &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi^p \cdot \nabla_h e^p \right| \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\mathbf{curl} \varphi^p|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|\mathbf{curl} \varphi^p\| \|\nabla_h e^p\|, \end{aligned}$$

alors

$$\|\mathbf{curl} \varphi^p\| \leq \|\nabla_h e^p\|, \quad (2.27)$$

- Si $d = 2$, l'estimation (2.23) découle directement de l'estimation ci-dessus puisque $\|\varphi^p\|_{1,\Omega} = \|\mathbf{curl} \varphi^p\|$.
- Si $d = 3$, on peut remarquer que l'application du théorème du graphe fermé donne un champ vectoriel φ^p satisfaisant

$$\|\varphi^p\|_{1,\Omega} \lesssim \|\mathbf{curl} \varphi^p\| \quad (2.28)$$

En effet, il suffit de considérer l'application

$$\begin{aligned} F : H^1(\Omega)_{|K}^3 &\rightarrow \{\omega \in L^2(\Omega)^3 : \mathbf{div} \omega = 0\} \\ \varphi &\rightarrow \mathbf{curl} \varphi, \end{aligned}$$

où $K = \{\varphi \in H^1(\Omega)^3 : \mathbf{curl} \varphi = 0\}$. Cette application est continue et bijective (par Théorème. I.3.4 de [?]) ce qui implique par le théorème du graphe fermé que son application inverse est également continue. Par conséquent, nous pouvons conclure comme avant en utilisant les estimations ci-dessus (2.27) et (2.28). ■

Les lemmes ci-dessus nous permettent de prouver le

Lemme 2.4.7. *On a les identités suivantes :*

$$\tau_p \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \nabla \omega^p = \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (\omega^p - I_C^0 \omega^p) \quad (2.29)$$

$$+ \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p (\omega^p - I_C^0 \omega^p) - \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1}) \omega^p,$$

$$\int_{\Omega} \nabla_h e^p \mathbf{curl} \varphi^p = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p (\varphi^p - I_C \varphi^p), \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \|e^p\|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &= (e^{p-1}, e^p) + (e^{p-1} - e^p, e^p - \omega^p - I_C^0(e^p - \omega^p)) \\ &+ \tau_p \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \nabla I_C^0(e^p - \omega^p) + \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (\omega^p - I_C^0 \omega^p) \\ &+ \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p (\omega^p - I_C^0 \omega^p) + J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p)). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Preuve : On a, pour $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) \omega + \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p \omega \\ &= \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} + \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) \omega + \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p \omega \\ &= \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} + \frac{(e^{p-1} - e^p)}{\tau_p} \right) \omega + \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p \omega. \end{aligned} \quad (2.32)$$

D'une part, le Lemme 2.4.1 avec $v_h = I_c^0 \omega^p \in V_{ph}^0$ implique

$$\tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \nabla I_c^0 \omega^p = \int_{\Omega} (e^{p-1} - e^p) I_c^0 \omega^p$$

d'autre par, en utilisant le Lemme 2.4.4 et (2.32) avec $w = I_c^0 \omega^p \in H_0^1(\Omega)$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (e^{p-1} - e^p) I_c^0 \omega^p &= \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) I_c^0 \omega^p + \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p I_c^0 \omega^p \\ &= \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) I_c^0 \omega^p + \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p I_c^0 \omega^p \\ &\quad + \sum_{K \in T_{ph}} \int_K (e^{p-1} - e^p) I_c^0 \omega^p. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) I_c^0 \omega^p + \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p I_c^0 \omega^p = 0. \quad (2.33)$$

Encore une fois le Lemme 2.4.4 et (2.32) avec $\omega = \omega^p$ impliquent

$$\begin{aligned} \tau_p \sum_{k \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \nabla \omega^p &= \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) \omega^p + \int_{\Omega} (e^{p-1} - e^p) \omega^p \\ &\quad + \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p \omega^p \end{aligned} \quad (2.34)$$

D'où (2.29) via la soustraction de (2.34) à (2.32). On passe maintenant à démontrer l'égalité (2.30). D'une part, par le Lemme 2.4.3 avec $\varphi_h = I_C \varphi^p \in V_{ph}$, on a

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \ I_C \varphi^p = 0$$

D'autre part, le Lemme 2.4.2 avec $\varphi = \varphi^p \in H^1(\Omega)$ donne

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \ \varphi^p &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_E^p \cdot \varphi^p \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_E^p \cdot \varphi^p - 0 \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_E^p \cdot \varphi^p - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \ I_C \varphi^p. \end{aligned}$$

Encore une fois on utilise le Lemme 2.4.2, on obtient (2.30). Pour le premier terme du membre de gauche de (2.31)

$$\begin{aligned} \|e^p\|^2 &= \int_{\Omega} e^p \cdot e^p = \int_{\Omega} e^{p-1} \cdot e^p + e^p \cdot e^p - e^p \cdot \omega^p + e^p \cdot \omega^p - e^p \cdot I_C^0(e^p - \omega^p) \\ &\quad - e^{p-1} \cdot e^p + e^{p-1} \cdot \omega^p - e^{p-1} \cdot \omega^p + e^{p-1} \cdot I_C^0(e^p - \omega^p) \\ &\quad + e^p \cdot I_C^0(e^p - \omega^p) - e^{p-1} \cdot I_C^0(e^p - \omega^p). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|e^p\|^2 &= \int_{\Omega} e^{p-1} \cdot e^p + \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1})(e^p - \omega^p - I_C^0(e^p - \omega^p)) + \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1})(I_C^0(e^p - \omega^p)) \\ &\quad + \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1}) \omega^p \\ &= (e^{p-1} \cdot e^p) + (e^p - e^{p-1}, e^p - \omega^p - I_C^0(e^p - \omega^p)) + (e^p - e^{p-1}, I_C^0(e^p - \omega^p)) \\ &\quad + \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1}) \omega^p. \end{aligned}$$

Et d'après la relation de Galerkin orthogonale (2.17)

$$(e^p - e^{p-1}, I_C^0(e^p - \omega^p)) = \tau_p \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \nabla I_C^0(e^p - \omega^p).$$

D'où

$$\|e^p\|^2 = (e^{p-1}, e^p) + (e^p - e^{p-1}, e^p - \omega^p - I_C^0(e^p - \omega^p)) + \tau_p \int_{\Omega} \nabla e^p \cdot \nabla I_C^0(e^p \omega^p) + \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1}) \omega^p.$$

Et en fin pour le deuxième terme du membre de gauche de (2.31), et par la décomposition de l'erreur dans l'équation (2.21)

$$\tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 = \tau_p \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot (\nabla \omega^p + \mathbf{curl} \varphi^p).$$

$$\tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 = \tau_p \int_{\Omega} (\nabla_h e^p \nabla \omega^p + \tau_p) + \int_{\Omega} (\nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi^p)$$

Et par les identités (2.29) et (2.30)

$$\begin{aligned} \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &= - \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1}) \omega^p + \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (\omega^p - I_C^0 \omega^p) \\ &\quad + \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p (\omega^p - I_C^0 \omega^p) + J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p)). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|e^p\|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &= (e^{p-1}, e^p) + (e^{p-1} - e^p, e^p - \omega^p - I_C^0(e^p - \omega^p)) \\ &\quad + \tau_p \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \nabla I_C^0(e^p - \omega^p) + \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (\omega^p - I_C^0 \omega^p) \\ &\quad + \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p (\omega^p - I_C^0 \omega^p) + J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p)). \end{aligned}$$

■

2.5 Analyse d'erreur a posteriori pour le problème semi-discrétisé

Inspiré par [19, 1, 3, 20, 6], on définit l'indicateur d'erreur en temps par

$$\eta_t^p = \tau_p^{1/2} \|\nabla_h (u_h^p - u_h^{p-1})\|, \quad 1 \leq p \leq N. \quad (2.35)$$

La seule différence avec les papiers cités ci-dessus repose sur le fait que $u_h^p - u_h^{p-1}$ n'est pas dans $H^1(\Omega)$.

Par souci de brièveté, on introduit les notations suivantes

- $\pi_{\tau} f$ désigne la fonction en escalier qui est constante et est égale à $f(t_p)$ sur chaque intervalle $[t_{p-1}, t_p]$, $1 \leq p \leq N$

- Pour une suite $v^p \in X_{ph}^0 \oplus H_0^1(\Omega)$, $0 \leq p \leq N$, , on note v_τ l'interpolant de "Lagrange" qui est affine sur chaque intervalle $[t_{p-1}, t_p]$, $1 \leq p \leq N$ et égale à v_p en t_p , i.e., défini par

$$v_\tau(t) = \frac{t_p - t}{\tau_p} v^{p-1} + \frac{t - t_{p-1}}{\tau_p} v^p, \quad \forall t \in [t_{p-1}, t_p], \quad 1 \leq p \leq N.$$

- Enfin, on note $e_\tau = u - u_\tau$, l'erreur temporelle. Comme

$$\partial_t u_\tau = \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \text{ sur } [t_{p-1}, t_p],$$

l'équation semi-discrète (2.4) est alors équivalente à

$$(\partial_t u_\tau(t), v) + (\nabla u^p, \nabla v) = (f^p, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall t \in [t_{p-1}, t_p]. \quad (2.36)$$

En prenant la différence avec (2.2), on dérive l'équation résiduelle

$$(\partial_t e_\tau(t), v) + (\nabla e_\tau(t), \nabla v) = ((f - f^p)(t), v) + (\nabla(u^p - u_\tau(t)), \nabla v), \quad (2.37)$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $t \in [t_{p-1}, t_p]$.

Cette identité permet de prouver l'estimation d'erreur suivante

Théorème 2.5.1 (Borne supérieure de l'erreur en temps). *On a l'estimation suivante*

$$\begin{aligned} \|e_\tau(t_n)\|^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(s)\|^2 ds &\lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds \\ &+ \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Preuve : Comme $(\partial_t e_\tau(t), e_\tau(t)) = \frac{1}{2} \partial_t (e_\tau(t), e_\tau(t))$, alors l'équation résiduelle (2.37) avec $v = e_\tau(t)$ donne

$$\frac{1}{2} \partial_t \|e_\tau(t)\|^2 + \|\nabla e_\tau(t)\|^2 = ((f - f^p)(t), e_\tau(t)) + (\nabla(u^p - u_\tau(t)), \nabla e_\tau(t)).$$

En intégrant l'identité ci dessus en temps sur l'intervalle $[t_{p-1}, t_p]$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|e_\tau(t_p)\|^2 &- \frac{1}{2} \|e_\tau(t_{p-1})\|^2 + \frac{1}{2} \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla e_\tau(t)\|^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|e_\tau(t_p)\|^2 - \frac{1}{2} \|e_\tau(t_{p-1})\|^2 + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla e_\tau(t)\|^2 dt \\ &= \int_{t_{p-1}}^{t_p} ((f - \pi_\tau f)(t), e_\tau(t)) dt + \int_{t_{p-1}}^{t_p} (\nabla(u^p - u_\tau(t)), \nabla e_\tau(t)) \\ &\leq \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|(f - \pi_\tau f)(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau(t))\|^2 dt. \end{aligned} \quad (2.39)$$

On estime maintenant le second terme du membre de droite de cette dernière inégalité.

On note que, pour tout $t \in [t_{p-1}, t_p]$,

$$(u^p - u_\tau)(t) = \frac{t_p - t}{\tau_p}(u^p - u^{p-1}),$$

alors

$$\int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(t)\|^2 dt = \frac{\tau_p}{3} \|\nabla(u^p - u^{p-1})(t)\|^2. \quad (2.40)$$

Deuxièmement, en utilisant l'inégalité triangulaire, on écrit simplement

$$\begin{aligned} \tau_p^{1/2} \|\nabla(u^p - u^{p-1})(t)\| &= \|\nabla(u^p - u^{p-1} + u_h^p - u_h^p + u_h^{p-1} - u_h^{p-1})(t)\| \\ &\leq \eta_t^p + \tau_p^{1/2} \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \tau_p^{1/2} \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Montrons maintenant que

$$\tau_p \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 + \tau_p \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|^2 \lesssim \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(t)\|^2 dt. \quad (2.42)$$

En effet, par définition, on a

$$(u_\tau - u_{h\tau})(t) = \frac{t_p - t}{\tau_p}(u^{p-1} - u_h^{p-1}) + \frac{t - t_{p-1}}{\tau_p}(u^p - u_h^p), \quad \forall t \in [t_{p-1}, t_p],$$

et, alors

$$\begin{aligned} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})\|^2 &= \left(\frac{t_p - t}{\tau_p}\right)^2 \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|^2 + \left(\frac{t - t_{p-1}}{\tau_p}\right)^2 \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 \\ &\quad + 2\frac{(t_p - t)(t - t_{p-1})}{\tau_p^2} (\nabla_h(u^p - u_h^p), \nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})), \quad \forall t \in [t_{p-1}, t_p]. \end{aligned}$$

En intégrant cette expression en $t \in [t_{p-1}, t_p]$, on trouve après des calculs simples

$$\begin{aligned} \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(t)\|^2 dt &= \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|^2 \int_{t_{p-1}}^{t_p} \left(\frac{t_p - t}{\tau_p}\right)^2 dt \\ &\quad + \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 \int_{t_{p-1}}^{t_p} \left(\frac{t - t_{p-1}}{\tau_p}\right)^2 dt \\ &\quad + 2(\nabla_h(u^p - u_h^p), \nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})) \int_{t_{p-1}}^{t_p} \frac{(t_p - t)(t - t_{p-1})}{\tau_p^2} dt \\ &= \frac{\tau_p}{3} \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|^2 + \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 \\ &\quad + (\nabla_h(u^p - u_h^p), \nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})). \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de conclure (2.42). Par conséquent, l'identité (2.40)

et les estimations (2.41), (2.42) impliquent que

$$\int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h(u^p - u_\tau)(t)\|^2 dt \lesssim (\eta_t^p)^2 + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(t)\|^2 dt. \quad (2.43)$$

Cette estimation dans (2.39) donne

$$\begin{aligned} \|e_\tau(t_n)\|^2 + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla e_\tau(t)\|^2 dt &\lesssim (\eta_t^p)^2 + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|(f - \pi_\tau f)(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h(u^p - u_{h\tau}(t))\|^2 dt. \end{aligned}$$

En sommant cette estimation sur p pour $1 \leq p \leq n$, on conclut le résultat. \blacksquare

Corollaire 2.5.2. (*Seconde borne supérieure de l'erreur en temps*) On a l'estimation suivante

$$\|\partial_t e_\tau\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 \lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2. \quad (2.44)$$

Preuve : L'équation résiduelle (2.37) donne directement

$$\|\partial_t e_\tau\|_{H^{-1}(\Omega)} \lesssim \|f - \pi_\tau f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla e_\tau(s)\| + \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|.$$

En intégrant le carré de cette inégalité en $t \in [t_{p-1}, t_p]$ et en sommant sur p , on obtient

$$\|\partial_t e_\tau\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 \lesssim \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(s)\|^2 ds + \sum_{p=1}^n \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 ds.$$

Le deuxième terme du membre de droite de cette inégalité est estimé dans (2.38), tandis que le troisième terme est estimé via (2.43). \blacksquare

Passons maintenant à la borne inférieure de l'erreur en temps.

Théorème 2.5.3 (Borne inférieure de l'erreur en temps). Pour chaque $p = 1, \dots, N$, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \eta_t^p &\lesssim \|\nabla_h e_\tau\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; L^2(\Omega))} + \|\partial_t e_\tau\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; H^{-1}(\Omega))} \\ &\quad + \tau_p^{1/2} (\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|) \\ &\quad + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; H^{-1}(\Omega))}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Preuve : Par l'inégalité triangulaire, on peut écrire

$$\eta_t^p \lesssim \tau_p^{1/2} (\|\nabla(u^p - u^{p-1})\| + \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|). \quad (2.46)$$

Il reste donc à estimer le terme $\tau_p^{1/2} \|\nabla(u^p - u^{p-1})\|$. Nous rappelons d'abord l'identité (2.40)

$$\int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(t)\|^2 dt = \frac{\tau_p}{3} \|\nabla(u^p - u^{p-1})(t)\|^2.$$

En prenant $v = (u^p - u_\tau)(t)$ comme fonction test dans (2.37), avec $t \in [t_{p-1}, t_p]$, on obtient

$$\begin{aligned} (\partial_t e_\tau(t), (u^p - u_\tau)(t)) + (\nabla e_\tau(t), \nabla(u^p - u_\tau)(t)) &= ((f - f^p), (u^p - u_\tau)(t)) \\ &+ (\nabla(u^p - u_\tau)(t), \nabla(u^p - u_\tau)(t)), \quad \forall a.e. t \in [t_{p-1}, t_p]. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|\nabla(u^p - u_\tau)(t)\|^2 \lesssim \|\partial_t e_\tau(t)\|^2 + \|\nabla e_\tau(t)\|^2 + \|(f - \pi_\tau f)\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2, \quad \forall a.e. t \in [t_{p-1}, t_p].$$

En intégrant cette estimation en $t \in [t_{p-1}, t_p]$, on en déduit

$$\frac{\tau_p}{3} \|\nabla(u^p - u^{p-1})(t)\|^2 \lesssim \int_{t_{p-1}}^{t_p} \left(\|\partial_t e_\tau(t)\|^2 + \|\nabla e_\tau(t)\|^2 + \|(f - \pi_\tau f)\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 \right) dt.$$

Le résultat découle en insérant cette estimation dans l'estimation dans (2.46). \blacksquare

2.6 Analyse a posteriori de la discrétisation spatiale

2.6.1 Borne supérieure de l'erreur

L'élément résiduel exact est donné par

$$f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}.$$

Comme d'habitude le résidu d'élément exact R_K^p , est remplacé par le résidu d'élément approché

$$f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p},$$

où f_h^p est une approximation de f^p . Par exemple

$$(f_h^p)|_K := \frac{1}{|K|} \int_K f(x, t_p) dx,$$

pour tout $K \in T_{ph}$.

Définition 2.6.1. Soit $p \geq 1$. L'estimateur d'erreur local η_K^p est défini par

$$\eta_K^p = h_K \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_K} h_E^{1/2} (\|J_{E,n}^p\|_E + \|J_{E,t}^p\|_E),$$

tandis que l'estimateur d'erreur spatial global η^p est défini par

$$(\eta^p)^2 = \sum_{K \in T_{ph}} (\eta_K^p)^2.$$

Les termes d'approximations locales et globales sont définis par

$$\xi_K^p = h_K \|f^p - f_h^p\|_{\omega_K}, \quad (\xi^p)^2 = \sum_{K \in T_{ph}} (\xi_K^p)^2.$$

Théorème 2.6.2 (Borne supérieure de l'erreur). *On a l'estimation suivante :*

$$\|e^n\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 \lesssim \sum_{p=1}^n \max\{h_p^2, \tau_p\} (\eta^p)^2 + \|e^0\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2. \quad (2.47)$$

Preuve : Cette estimation est une conséquence des Lemmes 2.4.6 et 2.4.7 en estimant de manière appropriée chaque terme du membre de droite de l'identité (2.31) du Lemme 2.4.7. En utilisant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité (2.12) et la définition 2.6.1 de l'estimateur locale, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (\omega^p - I_c^0 \omega^p) &\leq \sum_{K \in T_{ph}} \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K \|\omega^p - I_c^0 \omega^p\|_K \\ &\leq \sum_{K \in T_{ph}} \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K \|\nabla_h \omega^p\|_{\tilde{\omega}_K} \\ &\leq \sum_{K \in T_{ph}} \eta_K^p |w^p|_{1, \tilde{\omega}_K}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, on a

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (\omega^p - I_c^0 \omega^p) &\leq \sum_{K \in T_{ph}} \eta_K^p |w^p|_{1, \tilde{\omega}_K} \\ &\leq \left(\sum_{K \in T_{ph}} (\eta_K^p)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in T_{ph}} (|w^p|_{1, \tilde{\omega}_K})^2 \right)^{1/2} \\ &= \eta^p |w^p|_{1, \Omega}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

De même, en utilisant (2.13) et (2.11) on estime le terme résiduel de bord

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_K J_{E,n}^p (\omega^p - I_c^0 \omega^p) &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,n}^p\|_E \|\omega^p - I_c^0 \omega^p\|_E \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,n}^p\|_E h_E^{1/2} |\omega^p|_{\tilde{\omega}_K} \\ &\lesssim \sum_{K \in T_{ph}} \eta_K^p \cdot |\omega^p|_{1, \tilde{\omega}_K}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p) &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,t}^p\|_E \cdot \|\varphi^p - I_C \varphi^p\|_E \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,t}^p\|_E \cdot h_E^{1/2} |\varphi^p|_{1, \tilde{\omega}_E} \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \eta_K^p \cdot |\varphi^p|_{1, \tilde{\omega}_K}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, l'inégalité de Cauchy Schwarz discrète implique que

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_K J_{E,n}^p (\omega^p - I_c^0 \omega^p) \lesssim \eta^p \cdot |\omega^p|_{1,\Omega}. \quad (2.49)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p) \lesssim \eta^p |\varphi^p|_{1,\Omega}. \quad (2.50)$$

Encore une fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'estimation (2.12) et la définition 2.6.1 permettent d'estimer le terme

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K (f^p - f_h^p) (\omega^p - I_c^0 \omega^p) &\leq \sum_{K \in T_{ph}} \|f^p - f_h^p\|_K \|\omega^p - I_c^0 \omega^p\|_K \\ &\lesssim \sum_{K \in T_{ph}} h_K \|f^p - f_h^p\|_K |\omega^p|_{1,\tilde{\omega}_K} \\ &= \sum_{K \in T_{ph}} \xi_K^p |\omega^p|_{1,\tilde{\omega}_K} \\ &\lesssim \left(\sum_{K \in T_{ph}} |\xi_K^p|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in T_{ph}} |\omega^p|_{1,\tilde{\omega}_K}^2 \right)^{1/2} \\ &= \xi^p |\omega^p|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (2.12), On trouve

$$\begin{aligned} |(e^p - e^{p-1}, e^p - \omega^p - I_c^0(e^p - \omega^p))| &\leq \|e^p - e^{p-1}\| \|e^p - \omega^p - I_c^0(e^p - \omega^p)\| \\ &\lesssim h_p \|e^p - e^{p-1}\| \|\nabla_h(e^p - \omega^p)\|. \end{aligned}$$

L'inégalité (2.14) implique

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \nabla I_c^0(e^p - \omega^p) &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla I_c^0(e^p - \omega^p)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|\nabla_h e^p\| \cdot \|\nabla I_c^0(e^p - \omega^p)\| \\ &\lesssim \|\nabla_h e^p\| \cdot \|\nabla_h(e^p - \omega^p)\| \end{aligned}$$

Les estimation ci-dessus dans l'identité (2.31) donnent

$$\begin{aligned} \|e^p\| + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &\leq (e^{p-1}, e^p) + C h_p \|e^p - e^{p-1}\| \|\nabla_h(e^p - \omega^p)\| \\ &\quad + C \tau_p \|\nabla_h e^p\| \|\nabla_h(e^p - \omega^p)\| \\ &\quad + C \tau_p \eta^p |\varphi^p|_{1,\Omega} + C \tau_p (\eta^p + \xi^p) |\omega^p|_{1,\Omega} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Pour une certaine constante $C > 0$ qui dépend seulement de l'angle minimal de T_{ph} .

Cette estimation ne donne pas directement l'estimation souhaitée en raison des facteurs

$\| \nabla_h(e^p - \omega^p) \|$, $|\omega^p|_{1,\Omega}$ et $|\varphi^p|_{1,\Omega}$. Il faut donc estimer ces facteurs. Nous commençons d'abord par ce dernier. En utilisant les identités (2.26) et (2.30), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{curl} \varphi^p| &= \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi^p \nabla_h e^p \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p (\varphi^p - I_c \varphi^p). \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation d'erreur d'approximation (2.11) et la définition de l'estimateur d'erreur a posteriori, on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{curl} \varphi^p\|^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p (\varphi^p - I_c \varphi^p) \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \left(\int_E |J_{E,t}^p|^2 \right)^{1/2} \left(\int_E |\varphi^p - I_c \varphi^p|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,t}^p\|_E \|\varphi^p - I_c \varphi^p\|_E \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,t}^p\|_E h_E^{1/2} \|\nabla_h \varphi^p\|_{\tilde{\omega}_E} \\ &\lesssim \eta_K^p |\varphi^p|_{1,\tilde{\omega}_E} \\ &\lesssim \eta^p |\varphi^p|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

A l'aide de (2.28) si $d = 3$, on conclut que

$$\begin{aligned} |\varphi^p|_{1,\Omega}^2 &\leq \|\mathbf{curl} \varphi^p\|^2 \\ &\lesssim \eta^p |\varphi^p|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Alors

$$|\varphi^p|_{1,\Omega} \lesssim \eta^p \tag{2.53}$$

Pour l'estimation de la norme de $\nabla_h(e^p - \omega^p)$ on commence par

$$\|\nabla_h(e^p - \omega^p)\|^2 = \int_{\Omega} \nabla_h(e^p - \omega^p) \cdot \nabla_h(e^p - \omega^p)$$

En utilisant la décomposition de Helmholtz (2.21), nous écrivons alors

$$\begin{aligned} \|\nabla_h(e^p - \omega^p)\|^2 &= \int_{\Omega} \nabla_h(e^p - \omega^p) \cdot (\nabla_h e^p - \nabla_h \omega^p) \\ &= \int_{\Omega} \nabla_h(e^p - \omega^p) \cdot (\nabla \omega^p + \mathbf{curl} \varphi^p - \nabla_h \omega^p) \\ &= \int_{\Omega} \nabla_h(e^p - \omega^p) \cdot \mathbf{curl} \varphi^p \end{aligned}$$

Par le Lemme 2.4.7 et la formule de Green (rappelant que $\omega^p = 0$ sur $\partial\Omega$), on arrive à

$$\begin{aligned}
 \|\nabla_h(e^p - \omega^p)\|^2 &= \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi^p - \int_{\Omega} \nabla_h \omega^p \cdot \mathbf{curl} \varphi^p \\
 &= \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi^p - \int_{\partial\Omega} \omega^p \cdot \mathbf{curl} \varphi^p \cdot \eta_i \\
 &= \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi^p \\
 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p(\varphi^p - I_c \varphi^p).
 \end{aligned}$$

En utilisant les estimations (2.50) et (2.53), on obtient

$$\begin{aligned}
 \|\nabla_h(e^p - \omega^p)\|^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p(\varphi^p - I_c \varphi^p) \\
 &\lesssim \eta^p |\varphi^p|_{1,\Omega} \\
 &\lesssim (\eta^p)^2.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\|\nabla \omega^p\| \leq \|\nabla_h(\omega^p - e^p)\| + \|\nabla_h e^p\|,$$

il est bien connu que $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, pour tout $a, b \geq 0$, alors

$$\|\nabla \omega^p\|^2 \leq 2 \|\nabla_h(\omega^p - e^p)\|^2 + 2 \|\nabla_h e^p\|^2.$$

Par l'estimation (2.54), on trouve

$$\|\nabla \omega^p\|^2 \leq C (\eta^p)^2 + 2 \|\nabla_h e^p\|^2. \tag{2.55}$$

ou une certaine constante $C > 0$ dépendant uniquement de l'angle minimal de T_{ph} .

Nous pouvons maintenant conclure : en utilisant les estimations (2.53), (2.54) et l'inégalité de Young dans (2.52), on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |e^p|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &\leq (e^{p-1}, e^p) + C h_p \|e^p - e^{p-1}\| \eta^p + C \tau_p \|\nabla_h e^p\| \eta^p \\
 &\quad + C \tau_p ((\eta^p)^2 + (\xi^p)^2) + \frac{1}{8} \tau_p |w^p|_{1,\Omega}^2,
 \end{aligned}$$

Pour une certaine constante $C > 0$ dépendant seulement de l'angle minimal de T_{ph} .

Nous utilisant à nouveau l'inégalité de Young et l'estimation (2.55) pour estimer le terme

$|\omega^p|_{1,\Omega}^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |e^p|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &\leq (e^{p-1}, e^p) + Ch_p \|e^p - e^{p-1}\| \eta^p \\
&\quad + C \tau_p \|\nabla_h e^p\| \eta^p \\
&\quad + C \tau_p ((\eta^p)^2 + (\xi^p)^2) + \frac{1}{2} C \tau_p (\eta^p)^2 + C \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 \\
&\leq \|e^{p-1}\| \cdot \|e^p\| + \frac{1}{2} \|e^p - e^{p-1}\|^2 + \frac{1}{2} Ch_p^2 (\eta^p)^2 \\
&\quad + C \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 + C \tau_p (\eta^p)^2 \\
&\quad + C \tau_p ((\eta^p)^2 + (\xi^p)^2) + \frac{1}{2} C \tau_p (\eta^p)^2 + \frac{1}{2} \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \|e^{p-1}\|^2 + \frac{1}{2} \|e^p\|^2 + Ch_p^2 (\eta^p)^2 \\
&\quad + C \tau_p ((\eta^p)^2 + (\xi^p)^2) + \frac{1}{2} \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \|e^{p-1}\|^2 + \frac{1}{2} \|e^p\|^2 + C(\max\{h_p^2, \tau_p\} + (\xi^p)^2) + \frac{1}{2} \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2
\end{aligned}$$

Pour une certaine constante $C > 0$ dépendant seulement de l'angle minimal de T_{ph} . Cette estimation est équivalente à

$$\|e^p\|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 \leq \|e^{p-1}\|^2 + 2C \max\{h_p^2, \tau_p\} ((\eta^p)^2 + \tau_p (\xi^p)^2).$$

le résultat se déduit donc en prenant la somme sur $p = 1, \dots, n$. ■

Corollaire 2.6.3. [*Deuxième borne supérieure de l'erreur*] On a l'estimation suivantes

$$\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 \lesssim \sum_{p=1}^n \max\{h_p^2, \tau_p\} (\eta^p)^2 + \|e^0\|^2 + \|\nabla_h e^0\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2. \quad (2.56)$$

Preuve : Par définition, on a

$$\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v)}{\|v\|_{1,\Omega}}.$$

En utilisant la propriété

$$\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t) = \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}, \forall t \in [t_{p-1}, t_p],$$

et l'équation semi-discrète (2.4), pour tout $t \in [t_{p-1}, t_p]$ on peut écrire

$$(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v) = R^p(v) - (\nabla_h e^p, \nabla v),$$

où le résidu R^p est défini par

$$R^p(v) = (f^p, v) - \left(\frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}, v \right) - (\nabla_h u_h^p, \nabla v), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme l'égalité (2.5) implique que

$$R^p(v_h) = 0, \forall v_h \in V_{nh}^0,$$

l'identité ci-dessus devient

$$(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v) = R^p(v - v_h) - (\nabla_h e^p, \nabla v), \forall v_h \in V_{ph}^0, t \in [t_{p-1}, t_p].$$

Prenant $v_h = I_c v$, en appliquant la formule de Green, et en utilisant l'estimation (2.13), on obtient

$$|(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v)| \lesssim (\eta^p + \|\nabla_h e^p\|) \|\nabla v\|, \forall t \in [t_{p-1}, t_p].$$

Cette estimation et l'inégalité de Poincaré-Friedrich donnent

$$\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \lesssim \eta^p + \|\nabla_h e^p\|, \forall t \in [t_{p-1}, t_p].$$

En intégrant le carré de cette estimation en $t \in [t_{p-1}, t_p]$ et en sommant sur $p = 1, \dots, n$, le résultat découle de l'estimation (2.47). \blacksquare

2.6.2 Borne inférieure de l'erreur

Nous établissons maintenant la borne de l'erreur inférieure de l'estimateur η_K^p de manière plus au moins standard (voir [21]). Puisque nous considérons un problème non stationnaire, Nous avons besoin de l'hypothèse suivante (voir [20, 2]), qui est facile à vérifier dans un contexte adaptatif :

Hypothèse 2.6.4. *Pour tout $1 \leq p \leq N$, il existe une triangulation conforme \tilde{T}_{ph} telle que, chaque K de $T_{(p-1)h}$ ou de T_{ph} est l'union d'éléments \tilde{K} de \tilde{T}_{ph} tel que $h_K \sim h_{\tilde{K}}$.*

Lemme 2.6.5. *Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi \in H^1(\Omega)^3$ si $d = 3$ on a l'identité suivante :*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1})v + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot (\nabla v + \mathbf{curl} \varphi) &= \tau_p \int_{\Omega} (f^p - f_h^p)v \\ &+ \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) v + \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p v + J_{E,t}^p \varphi). \end{aligned}$$

Preuve : Par l'égalité (2.32), on a

$$\int_{\Omega} (e^p - e^{p-1})v + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) v = \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) v.$$

Et d'après le Corollaire 2.4.5, on a

$$\begin{aligned} \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) v &= \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) v \\ &\quad - \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p v + J_{E,t}^p \varphi), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1})v + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) v &= \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) v \\ &\quad + \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p v + J_{E,t}^p \varphi). \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Théorème 2.6.6 (Borne inférieure locale de l'erreur). *Sous l'hypothèse 2.6.4, alors pour tout $1 \leq p \leq N$ et tout $K \in T_{ph}$, on a l'estimation suivante*

$$\eta_K^p \lesssim h_K \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_K} + \|\nabla_h e^p\|_{\omega_K} + \xi_K^p. \quad (2.57)$$

Preuve :

Résidu d'élément fixons un élément arbitraire $K \in \tilde{T}_{ph}$ et on définit un résidu d'élément approché

$$r_K^p := \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) \Big|_K,$$

on pose

$$\omega_K^p := b_K r_K^p,$$

où $b_K = \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K$ est la fonction de bulle standard associée à K (voir par exemple [21]). Les inégalités inverses standards (cf. [21]) et le Lemme 2.6.5 avec $v = \omega_K^p$ et $\varphi = 0$ donnent

$$\begin{aligned} \|r_K^p\|_K^2 &\sim \int_K r_K^p \omega_K^p = \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) \omega_K^p \\ &= \int_K \left(\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \omega_K^p + \nabla_h e^p \cdot \nabla \omega_K^p - (f^p - f_h^p) \omega_K^p \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant encore une fois les inégalités inverse standards (rappelons que u_h^{p-1} et u_h^p sont des polynômes d'ordre 1 en K), on obtient

$$\|r_K^p\|_K^2 \lesssim \left(\left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K + h_K^{-1} |e^p|_{1,K} + \|f^p - f_h^p\|_K \right) \|r_K^p\|_K.$$

Cela prouve l'estimation

$$h_K \|r_K^p\|_K \lesssim h_K \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K + |e^p|_{1,K} + h_K \|f^p - f_h^p\|_K, \quad \forall K \in \tilde{T}_{ph}. \quad (2.58)$$

Maintenant pour $K \in T_{ph}$, l'hypothèse 2.6.4 implique que

$$h_K^2 \|r_K^p\|_K^2 \lesssim \sum_{\tilde{K} \in \tilde{T}_{ph}: \tilde{K} \subset K} h_{\tilde{K}}^2 \|r_{\tilde{K}}^p\|_{\tilde{K}}^2.$$

En utilisant l'estimation (2.58) et le fait que $h_{\tilde{K}} \leq h_K$ pour $\tilde{K} \subset K$, on trouve

$$h_K \|r_K^p\|_K \lesssim h_K \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K + |e^p|_{1,K} + \xi_K, \quad \forall K \in T_{ph}. \quad (2.59)$$

Résidu d'arête

Ensuite, on considère une arête/face arbitraire E de \tilde{T}_{ph} et on définit

$$\omega_E^p := b_E J_{E,t}^p,$$

où b_E est la fonction bulle standard associée à E (voir e.g.[21]).

En utilisant le Lemme 2.6.5 avec $v = 0$ et $\varphi = \omega_E^p$ et les inégalités inverses, on obtient

$$\begin{aligned} \|J_{E,t}^p\|_E^2 &\sim \sum_{K \subset \omega_E} \int_K \nabla_h e^p \mathbf{curl} \omega_E^p \\ &\lesssim \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E} \|\nabla \omega_E^p\|_{\omega_E} \\ &\lesssim h_E^{-1/2} \|J_{E,t}^p\|_E \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E}. \end{aligned}$$

cela implique que

$$h_E^{1/2} \|J_{E,t}^p\|_E \lesssim \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E}. \quad (2.60)$$

Saut normal

De même pour une arête (ou une face) intérieure arbitraire E de T_{ph} et on définit

$$\omega_E^p := b_E J_{E,n}^p.$$

En utilisant les estimations inverse et le Lemme 2.6.5 avec $v = \omega_E^p$ et $\varphi = 0$, on obtient

$$\|J_{E,n}^p\|_E \lesssim h_E^{1/2} \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_E} + h^{-1/2} \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|f^p - f_h^p\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_E}.$$

Grâce à (2.59), on a

$$h_E^{1/2} \|J_{E,n}^p\|_E \lesssim h_E \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_E} + \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E} + h_E \|f^p - f_h^p\|_{\omega_E}. \quad (2.61)$$

la conclusion découle des estimations (2.59), (2.60) et (2.61). \blacksquare

Corollaire 2.6.7 (Deuxième borne inférieure locale de l'erreur). . Sous l'hypothèse 2.6.4, on a l'estimation suivante

$$(\eta^p)^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla_h e^p\|^2 + (\xi^p)^2, \quad (2.62)$$

pour tout $1 \leq p \leq N$.

Preuve : Comme

$$\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t) = \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}, \forall t \in [t_{p-1}, t_p],$$

dans la preuve ci-dessus, nous devons remplacer la norme locale L^2 de $\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}$ par la norme global $H^{-1}(\Omega)$ pour ce cela, on va prendre $\varphi = 0$ dans Lemme 2.6.5 et

$$v = \sum_{\tilde{K} \in \tilde{T}_{ph}} h_{\tilde{K}}^2 r_{\tilde{K}}^p b_{\tilde{K}},$$

ce qui donne, à l'aide de l'hypothèse 2.6.4,

$$\sum_{K \in T_{ph}} h_K^2 \|r_K^p\|_K^2 \lesssim (\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla_h e^p\|) \|\nabla_h v\| + \sum_{K \in T_{ph}} \|f^p - f_h^p\|_K \|v\|_K.$$

les inégalités inverses standard impliquent

$$\sum_{K \in T_{ph}} h_K^2 \|r_K^p\|_K^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla_h e^p\|^2 + (\xi^p)^2.$$

De même pour l'estimation du saut normal, on utilise le Lemme 2.6.5 avec $\varphi = 0$ et

$$v = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}} h_E J_{E,n}^p b_E,$$

on trouve

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}} h_E \|J_{E,n}^p\|_E^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla_h e^p\|^2 + (\xi^p)^2.$$

Ces estimations et (2.60) permettent de conclure. \blacksquare

2.7 Analyse a posteriori pour le problème totalement discrétisé

Pour tout $n = 1, \dots, N$, on note l'erreur globale $E(t_n)$ au temps t_n par

$$\begin{aligned} E(t_n)^2 &= \|u(t_n) - u_h^n\|^2 + \|u^n - u_h^n\|^2 + \|\partial_t(u - u_\tau)\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 \\ &\quad + \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u - u_\tau)(\cdot, s)\|^2 ds \\ &\quad + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(\cdot, s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

En combinant les résultats des sections précédentes, on obtient les borne supérieures et inférieures globales suivantes ■

Théorème 2.7.1 (Bornes d'erreur globales). *Pour tout $n = 1, \dots, N$, on a la borne supérieure suivante*

$$\begin{aligned} E(t_n)^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n ((\eta_t^p)^2 + \max\{h_p^2, \tau_p\}(\eta^p)^2) + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 \\ &\quad + \sum_{p=1}^n \tau_p(\xi^p)^2 + \|e^0\|^2 + \tau_0 \|\nabla_h e^0\|^2. \end{aligned} \quad (2.63)$$

De plus, sous l'hypothèse 2.6.4, pour $n = 1, \dots, N$, on a la borne d'erreur inférieure suivante

$$\sum_{p=1}^n ((\eta_t^p)^2 + \tau_p(\eta^p)^2) \lesssim E(t_n)^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p(\xi^p)^2. \quad (2.64)$$

Preuve : commençons par la borne supérieure de l'erreur. D'abord par le Théorème 2.5.1 et le Corollaire 2.5.2, on a

$$\begin{aligned} E(t_n)^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 + \|(u_\tau - u_{h\tau})(t_n)\|^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds \\ &\quad + \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Comme $(u_\tau - u_{h\tau})(t_n) = u^n - u_h^n = e^n$ et

$$|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)| \leq |\nabla_h e^{p-1}| + |\nabla_h e^p|, \forall s \in [t_{p-1}, t_p],$$

l'estimation ci-dessus peut être transformée en

$$E(t_n)^2 \lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 + \|e^n\|^2 + \sum_{p=0}^n \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 + \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2.$$

. On conclut par l'application du Théorème 2.6.2 et le Corollaire 2.6.3.

On passe maintenant à la borne inférieure de l'erreur. En sommant le carré de (2.45) sur $p = 1, \dots, N$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 &\lesssim \int_0^{t_n} \|\nabla_h e_\tau(s)\|^2 ds + \|\partial_t e_\tau\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 \\ &+ \sum_{p=0}^n \tau_p (\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 + \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|^2) + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Par l'estimation (2.42) on obtient

$$\sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 \lesssim E(t_n)^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2. \quad (2.65)$$

d'autre part et par le Corollaire 2.6.7 on obtient

$$\sum_{p=1}^n \tau_p (\eta^p)^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 + (\xi^p)^2).$$

Encore une fois par (2.42), on obtient

$$\sum_{p=1}^n \tau_p (\eta^p)^2 \lesssim E(t_n)^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2. \quad (2.66)$$

l'estimation (2.64) découle directement de (2.65) et (2.66). ■

Remarque 2.7.2. *Si on suppose que*

$$h_p^2 \lesssim \tau_p, \quad \forall 1 \leq p \leq N, \quad (2.67)$$

Alors le Théorème 2.7.1 implique que l'erreur $E(t_n)$ est équivalente à l'estimateur d'erreur global

$$\left(\sum_{p=1}^n ((\eta_t^p)^2 + \tau_p (\eta^p)^2) \right)^{1/2},$$

à des termes approximatifs près. Dés lors, cet estimateur d'erreur global peut être utilisé pour un algorithme adaptatif.

Quelques résultats numériques

Résumé

Notre but est de confirmer les résultats du Chapitre 2 par quelques tests numériques. Comme notre contribution principale concerne l'estimateur de l'erreur spatiale, nous concentrons uniquement nos efforts sur sa validité.

Sommaire

3.1	Exemple 1	41
3.1.1	Fiabilité de l'estimateur spatial	43
3.1.2	Efficacité de l'estimateur spatial	44
3.2	Exemple 2 (Maillage non structuré)	45
3.3	Exemple 3 (Dépendance de l'erreur)	46
3.4	Algorithme adaptatif	48
3.4.1	Structure globale de l'algorithme en espace	50
3.4.2	Exemple 4	52

Considérons l'équation de la chaleur (2.1). Dans chaque test proposé, on commence par choisir dans (2.1) le domaine Ω . Et ensuite comme la recherche de la solution exacte pour ce type de problème n'est pas triviale, la vérification des résultats abstraits se fera en choisissant une solution exacte arbitraire, notée u , de façon à obtenir la fonction f (second membre) et u_0 (donnée initiale).

3.1 Exemple 1

Le domaine Ω sera le carré $]0, 1[^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Fixons $T = 1s$ et prenons comme solution exacte, la fonction

$$u(t, x, y) = e^{-t}xy(x-1)(y-1), \text{ sur } \Omega \times]0, 1[, x, y \in]0, 1[.$$

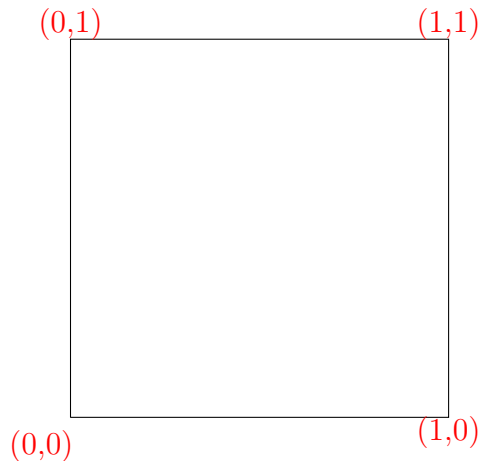


FIGURE 3.1 – Le domaine Ω en $2d$.

u satisfait clairement la condition aux limites $u = 0$ sur la frontière du domaine, i.e., sur chaque côté du carré. En calculant directement le second membre f , on obtient

$$\begin{aligned} f(t, x, y) &= u_t - \Delta u \\ &= e^{-t}xy(x-1)(y-1) - 2e^{-t}[x(x-1) + y(y-1)], \end{aligned}$$

avec la condition initiale

$$u_0(x, y) = xy(x-1)(y-1), \text{ dans } \Omega.$$

Ici, nous utilisons l'élément de Crouzeix-Raviart sur un maillage régulier $T_{ph} = T_h$ obtenu en divisant chaque segment par $n, 1 \leq n \leq N$, sous intervalles et divisant chaque carré obtenu en deux triangles (voir Figure 3.2).

Tout d'abord, nous vérifions que la solution numérique u_h^N converge vers la solution exacte. Pour cela, nous avons tracé $\|\nabla_h e^N\|$ par rapport aux degrés de liberté (DoF = $3n^2 - 4n + 2$ avec $h = 1/n$). Pour construire la courbe d'erreur à l'instant final en espace, on fixe le pas de temps en prenant $\Delta t = 0.001$ (i.e., on choisit le pas de temps Δt suffisamment petit de sorte que l'erreur due à la discrétisation en temps soit négligeable) et on calcule l'erreur avec différents pas d'espace. De même, pour construire la courbe d'erreur en temps à l'instant final, on fixe le pas d'espace en prenant $h = 0.00625$ de sorte que l'erreur due à la discrétisation en espace soit négligeable et on calcule l'erreur avec différents pas de temps. Les résultats numériques sont résumés dans la Figure 3.4. Donc d'après les résultats obtenus, l'ordre de convergence est un en espace et en temps. La solution approchée obtenue par le schéma numérique (2.5) est illustrée dans la Figure 3.3.

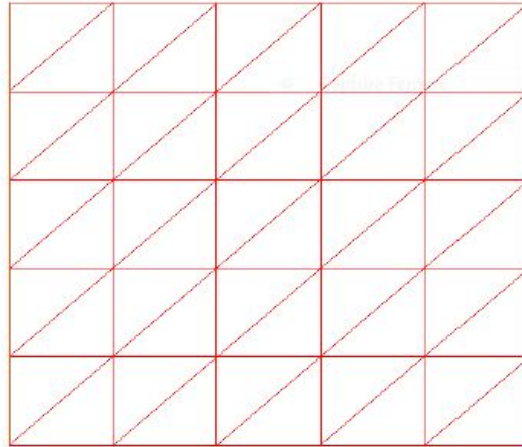


FIGURE 3.2 – Maillage régulier du carré $\Omega = (0, 1)^2$ pour $n = 5$.

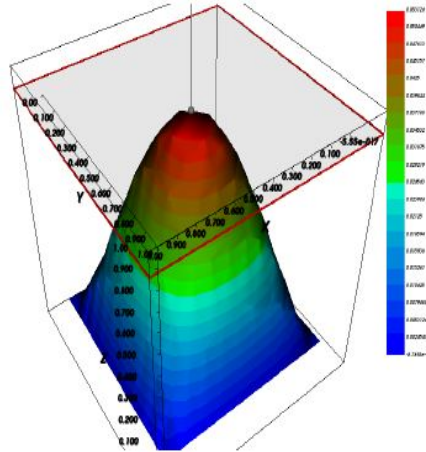


FIGURE 3.3 – La solution approchée par le schéma d’Euler implicite (2.5) au temps final $T = 1$ avec $\Delta t = h = 0.1$.

Nous étudions maintenant les principaux résultats théoriques qui sont les bornes d’erreur supérieure et inférieure (2.47) et (2.57). On fixe $\tau_p = 0.1s$, alors $N = T/\tau_p = 10$. Les tests numériques sont effectués pour $T = 1s$ ($N = 10$).

3.1.1 Fiabilité de l’estimateur spatial

On rappelle la borne supérieure de l’erreur obtenue dans le Théorème 2.6.2

$$\|e^n\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 \lesssim \sum_{p=1}^n \max\{h_p^2, \tau_p\} (\eta^p)^2 + \|e^0\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2, \quad (3.1)$$

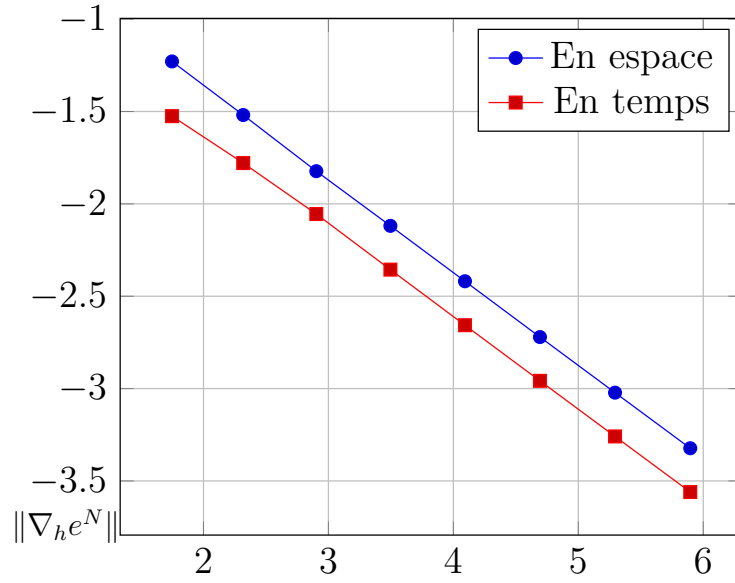


FIGURE 3.4 – L’erreur $\|u(t_N) - u_h^N\|_{1,\Omega}^2$ par rapport à Dof pour un maillage uniforme.

où, pour tout $1 \leq p \leq N$

$$(\eta^p)^2 = \sum_{K \in T_{ph}} (\eta_K^p)^2 = \left(h_K \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_K} (\|J_{E,n}^p\|_E + \|J_{E,t}^p\|_E) \right)^2,$$

$$(\xi^p)^2 = \sum_{K \in T_{ph}} (\xi_K^p)^2 = \sum_{K \in T_{ph}} h_K^2 \|f(\cdot, t_p) - f_h^p\|_{\omega_K}^2.$$

On définit donc le rapport entre le membre de gauche et le membre de droite de l’inégalité (2.47) à l’instant final $T = 1s$:

$$q_{up}^N = \frac{\|e^N\|^2 + \sum_{p=1}^N \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2}{\|e^0\|^2 + \sum_{p=1}^N \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} ((\eta_K^p)^2 + h_K^2 \|f^p - f_h^p\|_K^2)},$$

qui est appelé **l’indice d’efficacité**. Il mesure la fiabilité de l’estimateur et est lié à l’estimation d’erreur supérieure globale. Le Théorème 2.6.2, montre que q_{up}^N est majoré par une constante. Cela est confirmé par nos résultats numériques présentés au Tableau 3.1 et à la Figure 3.5.

3.1.2 Efficacité de l’estimateur spatial

Nous rappelons maintenant la borne inférieure locale de l’erreur du Théorème 2.6.6

$$\eta_K^p \lesssim h_k \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_K} + \|\nabla_h e^p\|_{\omega_K} + \xi_K^p,$$

p	DoF	q_{up}^N	q_{low}^N
4	56	0.21768	2.0782
8	208	0.22413	2.5714
16	800	0.22847	2.9010
32	3136	0.23180	3.1265
64	12416	0.23406	3.2208
128	49408	0.23543	3.2843
256	197120	0.23604	3.2930
512	787456	0.23617	3.2975

Tableau 3.1 – q_{up}^N et q_{low}^N par rapport à DoF pour un maillage uniforme.

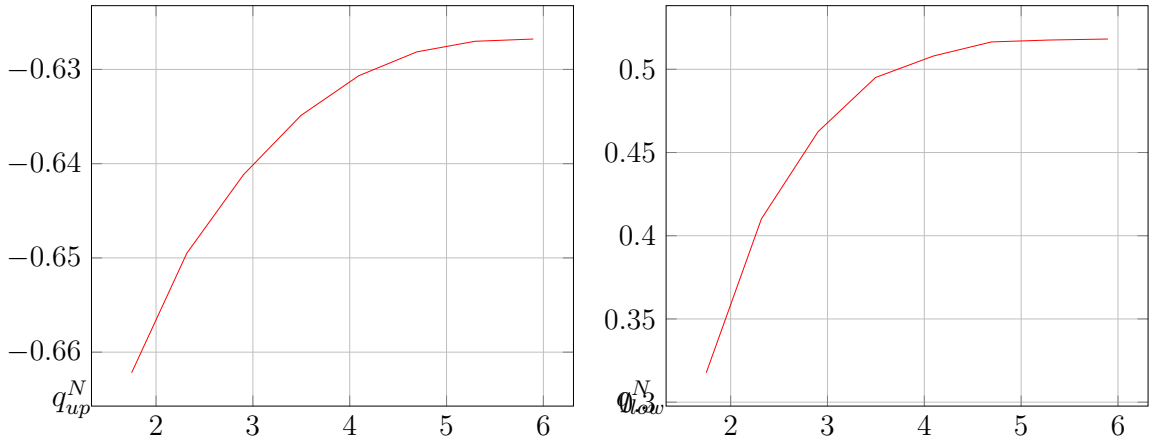


FIGURE 3.5 – q_{up}^N et q_{low}^N par rapport à DoF pour un maillage uniforme.

Maintenant, nous définissons le rapport (le plus grand) du côté gauche et du côté droit de l'inégalité 2.57 au temps final $T = 1$:

$$q_{low}^N = \max_{K \in T_{ph}} \frac{\eta_K^N}{h_k \left\| \frac{e^N - e^{N-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_K} + \|\nabla_h e^N\|_{\omega_K} + h_K \|f^N - f_h^N\|_{\omega_K}}.$$

qui est lié à la borne inférieure de l'erreur locale et mesure l'efficacité de l'estimateur. Selon la Figure 3.5 (voir aussi le Tableau 3.1), q_{low}^N est borné par une constante comme on l'a montré au Théorème 2.6.6. Donc notre estimateur spatial est également efficace.

3.2 Exemple 2 (Maillage non structuré)

Afin de valider la fiabilité et l'efficacité de notre estimateur d'erreur spatial, on approxime le même problème que précédemment avec les mêmes éléments mais sur différents

maillages non structurés en partant d'un maillage non structuré de 0.2 pas de maillage (voir la Figure 3.6) et en divisant chaque triangle en 4 triangles par un raffinement régulier [21]. La Figure 3.7 (voir aussi le Tableau 3.2) représente les indices q_{up}^N et q_{low}^N par rap-

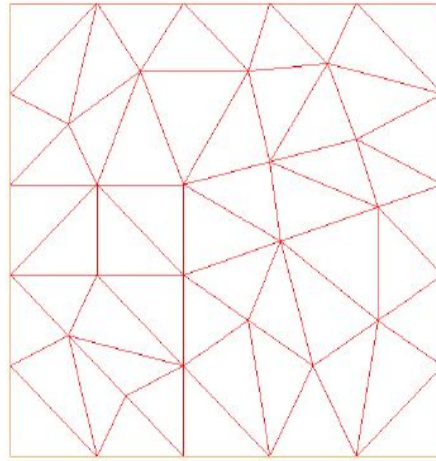


FIGURE 3.6 – Maillage non structuré avec $h = 0.2$.

port aux degrés de liberté. Les résultats obtenus sont cohérents comme dans l'exemple précédent.

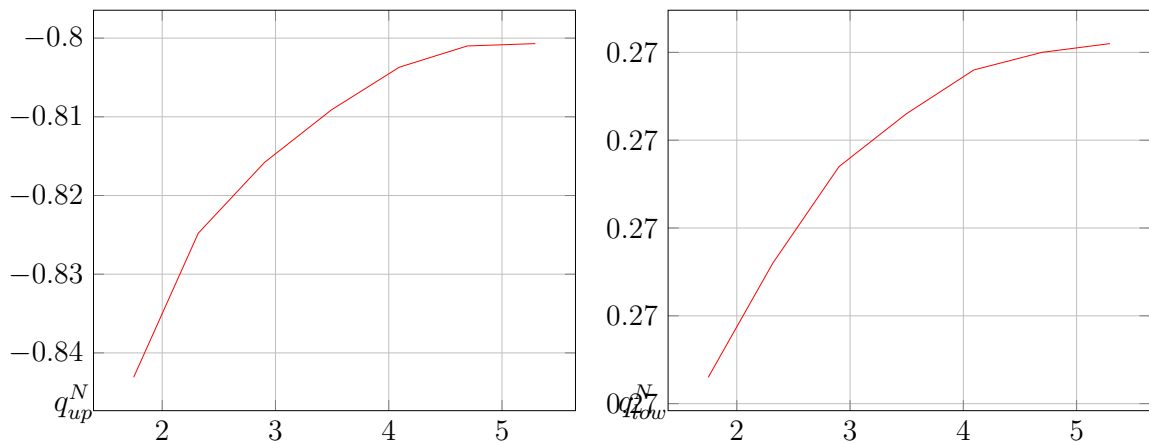


FIGURE 3.7 – q_{up}^N et q_{low}^N par rapport à Dof pour un maillage non structuré.

3.3 Exemple 3 (Dépendance de l'erreur)

De nos considérations précédentes, l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée dépend du pas de maillage et/ou du pas de discrétisation en temps. Afin d'illustrer ce phénomène, comme dans [1], on considère un exemple où l'erreur due à la discrétisation

h	DoF	q_{up}^N	q_{low}^N
0.2	139	0.14351	1.8506
0.1	512	0.14967	1.8561
0.05	2008	0.15282	1.8612
0.025	7952	0.15520	1.8636
0.0125	31648	0.15713	1.8658
0.00625	126272	0.15811	1.8667
0.003125	504448	0.15823	1.8669

Tableau 3.2 – q_{up}^N et q_{low}^N par rapport à DoF pour un maillage non structuré.

en temps est plus importante que l'erreur due à la discrétisation en espace, et un autre exemple où le contraire apparaît. Pour cela, on considère le problème (2.1) pour un $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ et $T = 1s$, avec les solutions exactes u_1 et u_2 définies par

$$u_1(t, x, y) = \sin(10\pi t/2) \sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2),$$

$$u_2(t, x, y) = \sin(10\pi t/2) \sin(10\pi x/2) \sin(10\pi y/2).$$

Les résultats numériques sont présentés dans les tableaux 3.3 et 3.4, où nous présentons les valeurs de l'indicateur spatial η , l'indicateur temporel η_t , l'erreur $\|e\| = (\sum_{p=1}^N \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2)^{1/2}$ et l'indice d'efficacité spatiale q_{up}^N pour différents pas de maillage et un pas de temps fixé.

Dans le premier exemple, le Tableau 3.3 montre que l'erreur est principalement due à la discrétisation en temps. En effet, pour un pas de temps fixé et différents pas de maillage, l'erreur est presque constante. Tandis que pour un pas de maillage fixé, l'erreur est diminuée pour différents pas de temps. Nous remarquons en outre une relation étroite entre l'erreur et l'indicateur temporel.

Pour le deuxième exemple et à partir du Tableau 3.4, l'erreur est principalement due à la discrétisation en espace, puisque nous voyons des relations inverses entre l'erreur et le pas de temps et la taille de maillage, alors qu'on détecte une relation étroite entre l'erreur et l'indicateur spatial. Dans le premier exemple q_{up}^N est corrélée à l'erreur, tandis que pour le second, la distorsion vient des termes d'approximation. Observons en outre que ces tests numériques montrent que l'indicateur temporel η_t est indépendant de h , tandis que l'indicateur spatial η est principalement indépendant de τ_p .

Cette propriété très importante de découplage des deux parties de l'erreur est utilisée efficacement dans notre algorithme adaptatif décrit ci-dessous, car les raffinements par rapport au temps (resp. par rapport à l'espace) ou les déraffinements sont basés sur η_t (resp. η).

$h = 1/n$	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.1	0.05	0.025	0.0125
dt	0.1	0.1	0.1	0.1	0.025	0.025	0.025	0.025
η	0.096	0.051	0.025	0.012	0.043	0.022	0.011	0.005
η_t	0.65	0.65	0.65	0.65	0.18	0.18	0.18	0.18
$\ e\ $	0.31	0.31	0.31	0.30	0.11	0.10	0.10	0.10
q_{up}^N	3.6	3.6	3.6	3.7	3.0	3.1	3.1	3.1
$h = 1/n$	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.1	0.05	0.025	0.0125
dt	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0125	0.0125	0.0125	0.0125
η	0.062	0.031	0.016	0.008	0.041	0.021	0.010	0.005
η_t	0.34	0.34	0.34	0.34	0.09	0.09	0.09	0.09
$\ e\ $	0.19	0.19	0.19	0.19	0.06	0.06	0.05	0.05
q_{up}^N	3.3	3.3	3.3	3.3	2.7	2.7	2.8	2.8

Tableau 3.3 – Résultats de convergence où on a utilisé une triangulation uniforme et un pas de temps constant pour le premier exemple.

3.4 Algorithme adaptatif

A partir de nos considérations théoriques et des exemples précédents, un algorithme adaptatif doit utiliser de manière appropriée l'indicateur spatial η , l'indicateur temporel η_t et l'erreur d'approximation ξ . Pour concevoir cet algorithme, on définit l'indicateur d'erreur global $\bar{\eta}$ suivant :

$$\bar{\eta} := \left(\sum_{n=1}^N ((\eta_t^n)^2 + \tau_n(\eta^n)^2 + \tau_n(\xi^n)^2) \right)^{1/2}.$$

Pour la solution approchée $u_{h\tau}$, nous définissons l'estimateur d'erreur relative **Ind** par

$$\mathbf{Ind}^2 = \frac{\bar{\eta}}{\int_0^T \|\nabla u_{h\tau}(\cdot, t)\|^2 dt}. \quad (3.2)$$

Soient une tolérance δ et un paramètre $0 < \alpha < 1$ donnés. L'objectif de notre schéma adaptatif est de générer une séquence de sous-intervalles $[t_{n-1}, t_n]$ et de construire le maillage $T_{nh}, n = 1, \dots, N$ de façon que **Ind** défini par (3.2), est proche de δ . Ceci se traduit par l'inégalité suivante :

$$(1 - \alpha)\delta \leq \mathbf{Ind} \leq (1 + \alpha)\delta. \quad (3.3)$$

Pour cela, pour $n = 1, \dots, N$, on définit les deux bornes locales suivantes :

- Celle de gauche \mathbf{Gb}^n définie par

$h = 1/n$	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.1	0.05	0.025	0.0125
dt	0.1	0.1	0.1	0.1	0.025	0.025	0.025	0.025
η	4.8	2.6	1.3	0.65	4.8	2.6	1.3	0.65
η_t	7.5	7.2	7.2	7.2	1.9	1.9	1.9	1.9
$\ e\ $	5.2	2.9	2.1	1.6	5.4	2.7	1.3	0.69
q_{up}^N	2.9	5.8	7.9	8.4	0.7	1.5	2.8	5.5
$h = 1/n$	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.1	0.05	0.025	0.0125
dt	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0125	0.0125	0.0125	0.0125
η	4.8	2.6	1.3	0.65	4.8	2.6	1.3	0.65
η_t	3.9	3.8	3.8	3.8	1.0	1.0	1.0	1.0
$\ e\ $	4.9	2.5	1.4	0.83	5.4	2.7	1.3	0.68
q_{up}^N	1.4	2.9	7.9	8.1	0.5	0.8	1.3	2.8

Tableau 3.4 – Résultats de convergence où on a utilisé une triangulation uniforme et un pas de temps constant pour le deuxième exemple.

$$\mathbf{Gb}^n := (1 - \alpha)^2 \delta^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla u_{h\tau}(\cdot, t)\|^2 dt. \quad (3.4)$$

- Celle de droite \mathbf{Db}^n définie par

$$\mathbf{Db}^n := (1 + \alpha)^2 \delta^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla u_{h\tau}(\cdot, t)\|^2 dt. \quad (3.5)$$

Si, pour tout $n = 1, \dots, N$, la condition

$$\mathbf{Gb}^n \leq (\eta_t^n)^2 + \tau_n (\eta^n)^2 + \tau_n (\xi^n)^2 \leq \mathbf{Db}^n, \quad (3.6)$$

est satisfaite, alors en sommant sur n , $n = 1, \dots, N$, on obtient (3.3). Donc pour un temps discret t_{n-1} , notre algorithme consiste à choisir le pas de temps t_p et le maillage de façon à vérifier (3.6) pour tout n . Ceci sera réalisé en utilisant les éléments η^n et ξ^n pour contrôler la taille du maillage et en utilisant η_t^n et ξ^n pour contrôler le pas de temps. En d'autres termes, on cherche à construire le maillage T_{nh} et à choisir le pas de temps τ_n de façon à vérifier les inégalités suivantes :

$$\mathbf{Gb}^p \leq (\eta_t^p)^2 + \tau_p \frac{(\xi^p)^2}{2} \leq \mathbf{Db}^p, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{Gb}^p \leq \tau_p \left((\eta^p)^2 + \frac{(\xi^p)^2}{2} \right) \leq \mathbf{Db}^p. \quad (3.8)$$

3.4.1 Structure globale de l'algorithme en espace

A un temps discret t_{p-1} donné, l'algorithme adaptatif en espace possède la structure générale suivante :

étape 1 : Considérer un maillage initial T_{nh} , poser $n := 1$.

étape 2 : Résoudre le problème sur T_{nh} et pour tout $K \in T_{nh}$, calculer les indicateurs d'espace locaux η_K^p , l'indicateur d'espace global η_p ainsi que ξ_p .

étape 3 : Si l'inégalité (3.7) est satisfaite, alors **arrêter** et poser $T_{ph} = T_{nh}$. Sinon, choisir les éléments à raffiner (ou déraffiner) et construire le nouveau maillage $T_{(n+1)h}$. Remplacer dans ce cas n par $(n + 1)$ et reprendre à l'étape 2.

Cette boucle est destinée à être répétée jusqu'à ce que la condition (3.7) soit assurée. Ce principe est présenté par la Figure 3.8.

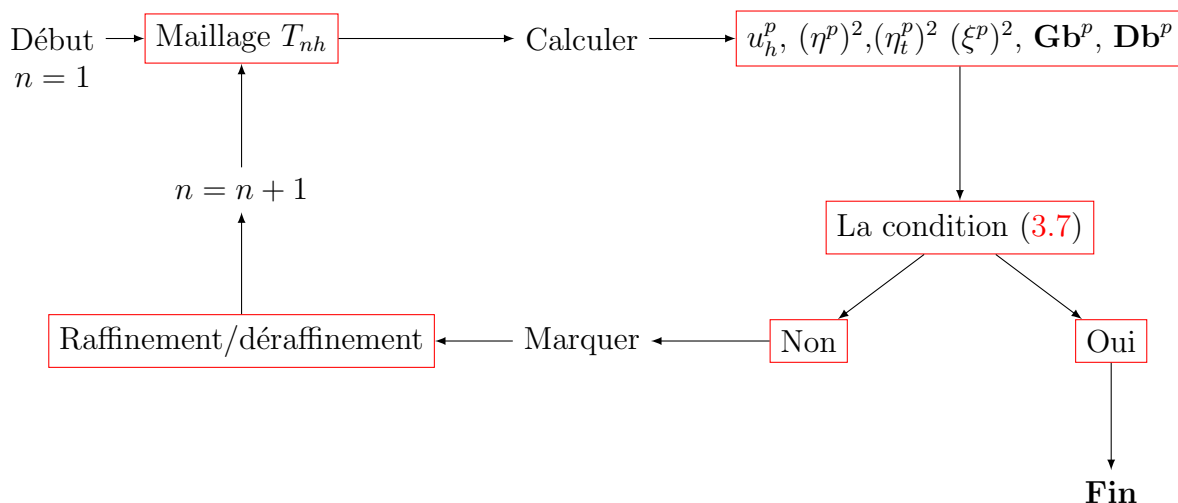


FIGURE 3.8 – Schéma d'une boucle d'adaptation de maillage.

Comme le problème est instationnaire, le processus de raffinement doit combiner le contrôle du pas d'espace et du pas de temps. On va alors considérer la stratégie globale suivante :

- (t1) Pour un pas de temps donné, si (3.6) est vérifiée, raffiner (ou déraffiner) le maillage en utilisant les étapes 1- 3. Sinon, raffiner (ou déraffiner) le pas de temps et reprendre les étapes (e1)-(e3). Cet algorithme est présenté dans le Programme 3.4.1. Notons qu'il est similaire à celui proposé dans [1, 6].

Remarque 3.4.1. (Critères de marquage) À l'étape 3 et si la condition (3.7) n'est pas satisfaite, la question qui se pose est de décider quels éléments du maillage doivent être raffinés ou déraffinés : on parle de technique de marquage. On trouve dans la littérature

plusieurs techniques de marquage [22, 23, 24, 25, 26]. Dans ce travail, on a utilisé la stratégie du **maximum** qui se décrit comme suit :

- Un élément $K \in T_{ph}$ est marqué pour raffinement si

$$\eta_K^p \geq \gamma_{\text{ref}} \max_{K \in T_{ph}} \eta_K^p,$$

où $\gamma_{\text{ref}} \in (0, 1)$ est donné. Cette stratégie sélectionne les éléments dont la valeur de l'indicateur est plus grande que l'indicateur maximal multiplié par γ_{ref} .

Pour des valeurs élevées de γ_{ref} (proches de 1), la stratégie devient très sélective alors que les valeurs petites de γ_{ref} (proche de 0) correspondent au choix d'une grande partie des éléments du maillage. Typiquement, une valeur de $\gamma_{\text{ref}} = 0.5$ est utilisée ; voir par exemple, Verfürth [22].

- Inversement, un élément K est marqué pour déraffinement si $\eta_K^p \leq \gamma_{\text{deref}} \eta_{\text{max}}^p$, avec $0 < \gamma_{\text{deref}} < \gamma_{\text{ref}}$.

Remarque 3.4.2. (Techniques de raffinement et de déraffinement) Pour des maillages triangulaires, il existe essentiellement deux stratégies de raffinement permettant de préserver la régularité du maillage [27, 28, 29, 30, 31, 32] :

- R1 : Diviser les triangles en joignant le milieu de l'arête la plus longue au sommet opposé à cette arête (longest edge bisection) (voir la Figure 3.9 à gauche).
- R2 : Diviser les triangles en 4 en joignant les milieux des 3 arêtes (regular refinement)(voir la Figure 3.9 à droite).

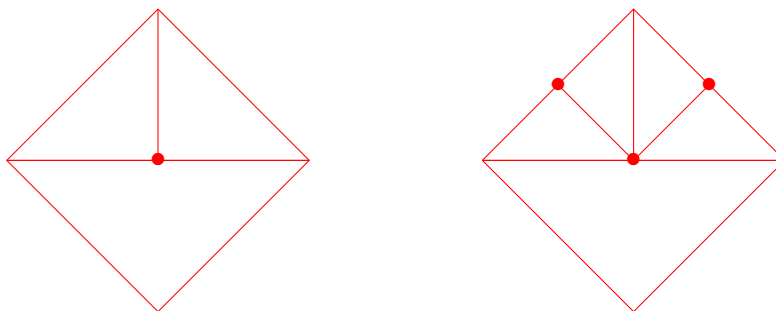


FIGURE 3.9 – Raffinement R1 à gauche et R2 à droite.

En ce qui concerne le déraffinement, les raffinements sont inversés. Dans ce travail on utilise la technique R2.

Programme 3.4.1. (L'algorithme adaptatif)

Poser $n = 1, T_{0h}, \tau, \dots$

On initialise tous les paramètres utilisés.

```

while  $t \leq T$  do
  Calculer  $(\eta^n)^2, (\eta_t^n)^2,$ 
   $(\xi^n)^2, \mathbf{Db}^n, \mathbf{Gb}^n$ 
  if  $\tau_n \frac{\xi^n}{2} + (\eta_t^n) < \mathbf{Gb}^n$  then
    Le pas temps actuel est de taille petite
    Déraffiner le pas de temps
     $\tau := 2\tau$ 
  else if  $\tau_n \frac{\xi^n}{2} + (\eta_t^n) \leq \mathbf{Db}^n$  then
    if  $\tau_n((\eta^n) + \frac{\xi^n}{2}) < \mathbf{Gb}^n$  then
      Continuer avec le critère
      La triangulation est trop fine
       $\eta_K^n \leq 1.5 \min \eta_K^n$ 
    else if  $\tau_n(\eta^n + \frac{\xi^n}{2}) < \mathbf{Db}^n$  then
      La triangulation est correcte
      passer au temps discret suivant
       $t := t + \tau$ 
       $n := n + 1$ 
    else
      Continuer avec le critère
      La triangulation est trop grossière
       $\eta_K^n \geq 0.5 \min \eta_K^n$ 
      Raffiner le maillage
    end if
  else
    Le pas de temps est trop grand
    Raffiner le pas de temps
     $\tau := \tau/2$ 
  end if
  Construire le nouveau maillage
end while

```

Afin de tester notre schéma adaptatif, nous considérons l'exemple suivant

3.4.2 Exemple 4

Dans cet exemple, on considère le problème modèle sur le carré unité $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. On prend comme solution exacte

$$u(t, x, y) = \beta(t) * \exp(-50 * r^2(t, x, y)), \quad (3.9)$$

avec $r^2(t, x, y) = (x - 0.4 * t - 0.3)^2 + (y - 0.4 * t - 0.3)^2$, et

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-50 * (0.98 * t + 0.01)^2) & \text{si } t < 1/1.96, \\ 1 - \exp(-50 * (1 - 0.98 * t + 0.01)^2) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Cette solution correspond à une Gaussienne dont le centre se déplace du point (0.3, 0.3) au temps $t = 0s$ au point (0.7, 0.7) au temps $t = 1s$. La Figure 3.10 représente la solution

approchée aux temps $t = 0.1$, $t = 0.5$ et $t = 1$ et la Figure 3.11 représente à ces même temps les maillages adaptatifs avec $\alpha = 0.5$ et $\delta = 0.25$. On observe que le raffinement adaptatif suit bien le déplacement de la solution.

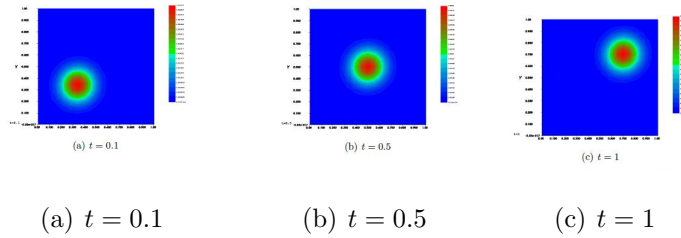


FIGURE 3.10 – La solution approchée après un raffinement adaptatif aux temps $t = 0.1$, $t = 0.5$ et $t = 1$ respectivement avec $\alpha = 0.5$ et $\delta = 0.25$.

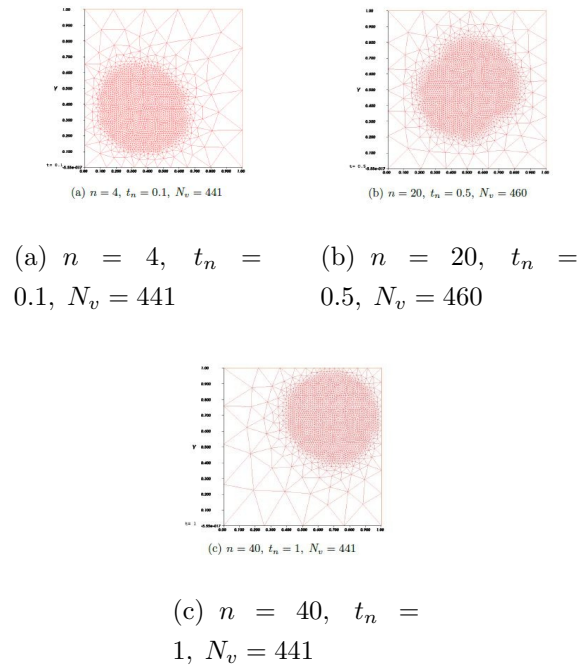


FIGURE 3.11 – Maillage après le raffinement adaptatif à $t = 0, 1$, $t = 0.5$ et $t = 1$ avec $\alpha = 0.5$ et $\delta = 0.25$.

Bibliographie

- [1] Marco Picasso. Adaptive finite elements for a linear parabolic problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 167(3-4) :223–237, 1998.
- [2] R. Verfürth. A posteriori error estimates for finite element discretization of the heat equation. *Calcolo*, pages 40 :195–212, 2003.
- [3] A. Bergam, C. Bernardi, and Z. Mghazli. A posteriori analysis of the finite element discretization of a nonlinear parabolic equations. *Math. Comp.*, 74(251) :1117–1138, 2005.
- [4] Rüdiger Verfürth. Error estimates for some quasi-interpolation operators. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(4) :695–713, 1999.
- [5] J. M. Cascón, L. Ferragut, and M. I. Asensio. Space-time adaptive algorithm for the mixed parabolic problem. *Numer. Math.*, 103(3) :367–392, 2006.
- [6] Serge Nicaise and Nadir Soualem. A posteriori error estimates for a nonconforming finite element discretization of the heat equation. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(2) :319–348, 2005.
- [7] Shuyu Sun and Mary F. Wheeler. $L^2(H^1)$ norm a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin approximations of reactive transport problems. *J. Sci. Comput.*, 22/23 :501–530, 2005.
- [8] Alexandre Ern and Jennifer Proft. A posteriori discontinuous Galerkin error estimates for transient convection-diffusion equations. *Appl. Math. Lett.*, 18(7) :833–841, 2005.
- [9] Ji-ming Yang and Yan-ping Chen. A unified a posteriori error analysis for discontinuous Galerkin approximations of reactive transport equations. *J. Comput. Math.*, 24(3) :425–434, 2006.
- [10] Yanping Chen and Jiming Yang. A posteriori error estimation for a fully discrete discontinuous Galerkin approximation to a kind of singularly perturbed problems. *Finite Elem. Anal. Des.*, 43(10) :757–770, 2007.

- [11] Emmanuil H. Georgoulis, Omar Lakkis, and Juha M. Virtanen. A posteriori error control for discontinuous Galerkin methods for parabolic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(2) :427–458, 2011.
- [12] Paul Houston and Endre Süli. Adaptive Lagrange-Galerkin methods for unsteady convection-diffusion problems. *Math. Comp.*, 70(233) :77–106, 2001.
- [13] Mohamed Amara, Lionel Nadau, and David Trujillo. *A posteriori error estimator for finite volume schemes*, volume 31 of *Monogr. Semin. Mat. García Galdeano*. Prensas Univ. Zaragoza, Zaragoza, 2004.
- [14] Rajaa Aboulaich, Boujemâa Achchab, and Aziz Darouichi. A posteriori error estimate for a one-dimensional pollution problem in porous media. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(19-20) :1217–1222, 2009.
- [15] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation*, volume 785 of *Mathématiques appliquées*. Les éditions de l’Ecole polytechnique, Paris, 2005.
- [16] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman, Boston–London–Melbourne, 1985.
- [17] Jean-Marie Thomas Pierre-Arnaud Raviart. *Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivés partielles*, volume 375 of *Sciences sup.* Masson, 2004.
- [18] Vidar Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, volume 25 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.
- [19] Claes Johnson, Yi Yong Nie, and Vidar Thomée. An a posteriori error estimate and adaptive timestep control for a backward Euler discretization of a parabolic problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(2) :277–291, 1990.
- [20] Christine Bernardi and Rüdiger Verfürth. A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 38(3) :437–455, 2004.
- [21] R. Verfürth. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. *Wiley-Teubner, Chichester; Stuttgart*, 1996.
- [22] R. Verfürth. A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. In *Proceedings of the Fifth International Congress on Computational and Applied Mathematics (Leuven, 1992)*, volume 50, pages 67–83, 1994.
- [23] Willy Dörfler. A convergent adaptive algorithm for Poisson’s equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(3) :1106–1124, 1996.
- [24] I. Babuv ska and W. C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15(4) :736–754, 1978.

-
- [25] Kenneth Eriksson and Claes Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems. I. A linear model problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(1) :43–77, 1991.
- [26] Helmut Jarausch. On an adaptive grid refining technique for finite element approximations. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7(4) :1105–1120, 1986.
- [27] Randolph E. Bank. The efficient implementation of local mesh refinement algorithms. In *Adaptive computational methods for partial differential equations (College Park, Md., 1983)*, pages 74–81. SIAM, Philadelphia, PA, 1983.
- [28] Randolph E. Bank. *PLTMG : a software package for solving elliptic partial differential equations*, volume 7 of *Frontiers in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1990. Users’ guide 6.0.
- [29] Randolph E. Bank, Andrew H. Sherman, and Alan Weiser. Refinement algorithms and data structures for regular local mesh refinement. In *Scientific computing (Montreal, Que., 1982)*, IMACS Trans. Sci. Comput., I, pages 3–17. IMACS, New Brunswick, NJ, 1983.
- [30] María-Cecilia Rivara. Mesh refinement processes based on the generalized bisection of simplices. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21(3) :604–613, 1984.
- [31] R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Stokes equations. *Numer. Math.*, 55(3) :309–325, 1989.
- [32] Igor Kossaczky. A recursive approach to local mesh refinement in two and three dimensions. *J. Comput. Appl. Math.*, 55(3) :275–288, 1994.