République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématique

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et Application.

Thème

Sur une classe d'inégalités variationnelles non-linéaires

Présenté par :

- Boulkerara Djennat.

Devant le jury :

Président	: Haddad Tahar	Prof Université de Jijel
Encadreur	: Kecis Ilyas	M.C.A Université de Jijel
Examinateur	: Lounis Sabrina	M.C.A Université de Jijel

Promotion **2020-2021**

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents ma mère et mon père

Pour leur amour, leur encouragement et leur sacrifice et soutien qu'ils m' ont donné pendant tout les moments de ma vie.

A mes très chères frères, pour leurs conseils, leurs aides, leur soutien qui m'ont permis de surmonter mes difficultés et de m'encourager afin d'arriver.

A mes sœurs **Sabah** et **Zineb**, pour l'amour qu'elles me réservent, je leurs souhaite une vie pleine du bonheur et de succès.

A tous mes chers amis.

Et tous ce qui aiment.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie **ALLAH** le tout puissant qui ma donné la santé, la patience et la capacité d'entamer et de terminer ce mémoire.

Je tiens à remercier Monsieur **Kecis Ilyas** pour tout le soutien et l'encadrement qu'il ma donné.

Aux membres du jury

Je remercie Monsieur **Haddad Tahar**, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Madame **Lounis Sabrina** pour avoir accepté d'examiner mon travail.

En fin, je remercie ma famille pour donner tout ce que j'en avais besoin pour réussir dans mes études.

Merci à tous et à toutes.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'établir le résultats d'existence et d'unicité pour une classe d'inclusions non linéaires gouvernées par le cône normal à un ensemble convexe dans un espace de Hilbert. Ces résultats ont été obtenue en utilisant des ingrédients de l'analyse convexe, la théorie des opérateur monotones et les opérateur avec retard et un résultat du point fixe. Cette étude a permit de démontrer l'existence et l'unicité de la solution pour une nouvelle variante du processus de rafle du premier ordre. Finalement, ce résultat abstrait a été utilisé pour étudier une loi de comportement viscoélastique.

Abstract

The main purpose of this work is to establish an existence and uniqueness result for a new class of nonlinear inclusions in Hilbert space. The proof is based on arguments of monotonicity, convexity and fixed point. We use this result to establish the unique solvability of an associated class of Moreau's sweeping processes. Next, we give an application in solid mechanics which consists in studying a time-dependent constitutive law with unilateral constraints and memory term.

Table des matières

Introduction **ii**

1 Préliminaires **1**

1.1 Notations générales 1

1.2 Définitions et première propriétés 2

1.3 Quelque rappels d'analyse convexe 4

1.4 Autres définitions et résultats 10

2 Problèmes d'inclusions gouvernées par des opérateurs non-linéaires **12**

2.1 Opérateur avec mémoire (avec retard) 13

2.2 Résultat d'existence et d'unicité 17

2.3 Processus de rafle comme un exemple 27

2.4 Hypothèse $(\mathcal{K})$: quelques exemples 29

3 Application : une loi de comportement viscoélastique **36**

Introduction

Les inclusions non-linéaires, données généralement par des opérateurs multivoques $-u(t) \in A(u(t))$, jouent un rôle considérable dans la résolution de certaines problèmes aux limites. Elles sont également utilisées pour modéliser plusieurs phénomènes en mécanique, physique, économie... etc. Ces inclusions représentent un outil très important pour étudier une classe assez vaste d'inégalités variationelles et hemi-variationnelles, dans cet égard, plusieurs travaux ont été réalisés dans les livres [3, 11, 13, 12, 15, 16]. Dans la littérature, la majorité des résultats d'existence, et parfois d'unicité, ont été obtenus en utilisant les propriétés de surjectivité de la classe des opérateurs pseudo-monotones.

La notion de processus de rafle, sweeping process en anglais, a été introduite en 1971 dans un célèbre exposé de J.J. Moreau [10]. Ce type de problèmes consiste à étudier l'existence d'une trajectoire $u : [0, T] \to H$ telle que $u(t) \in C(t)$ et

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)), \quad \text{presque pour tout } t \in [0, T] \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

où H est un espace de Hilbert, $C : [0, T] \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs convexes fermées, $N_{C(t)}(\cdot)$ représente le cône normal à $C(t)$ au point $u(t)$ au sens d'analyse convexe et $\dot{u}(t)$ est la dérivée de u au point t.

Un tel problème a été utilisé pour étudier une large classe de modèles mathématiques notamment en mécanique et en ingénierie, citons par exemple, les modèles de contact unilatéral

en élasticité, les problèmes d'optimisation, la dynamique des corps rigides avec frottement, le contrôle optimal, modélisation de mouvement de foule, ...etc, pour plus d'information, le lecteur se réfère à [7, 8].

L'objectif de ce mémoire est de détailler l'article de Florent Nacry et Mircea Sofonea intitulé " A class of Non linear inclusions and sweeping processes in solid Mechanics ". Dans un espace de Hilbert, les auteurs de ce dernier article ont étudié une inclusion non-linéaire gouvernée par le cône normal à un ensemble convexe de la forme

$$-u(t) \in N_{K(t)}(Au(t) + \mathcal{S}u(t)), \text{ pour tout } t \in I, \tag{2}$$

où $A : H \to H$ un opérateur fortement monotone et Lipschitzien, $\mathcal{S} : C(I;H) \to C(I;H)$ est un opérateur presque avec mémoire (almost history-dependent **AHD**) et l'ensemble des contraintes $K(t)$ est convexe fermé et vérifie certaine condition de convergence. Les résultats obtenus lors de l'étude du problème (2) ont été utilisés pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution pour une nouvelle variante du processus de rafle de premier ordre donnée par l'inclusion suivante :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{K(t)}(A\dot{u}(t) + Bu(t) + \mathcal{S}\dot{u}(t)), \text{ pour tout } t \in I. \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3}$$

où $B : H \to H$ est un opérateur Lipschitzien.

On peut décrire le matériel présenté dans ce travail en trois chapitres, on commence par un chapitre introductif qui rappelle et présente les résultats fondamentaux et les concepts de base que l'on va utiliser dans les autres chapitres, notamment les notions de l'analyse convexe. Le deuxième chapitre commence par un petit rappel sur la théorie des opérateurs monotones, ensuite, on introduit la classe des opérateurs avec mémoire (avec retard) et presque avec mémoire en citant quelques exemples illustratifs. Puis, on passe à la démonstration du théorème principal de ce chapitre qui consiste à prouver le résultat d'existence et d'unicité du problème 2. Ce résultat vient après une série de lemmes auxiliaires qui sont également démontrés. On donne également quelques exemples sur les ensembles $(K(t))_t$ qui vérifient la condition de convergence

($\mathcal{K}$). Finalement dans le troisième chapitre, on utilise ce résultat abstrait pour étudier une loi de comportement viscoélastique.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre introductif a pour but de rappeler les résultats fondamentaux et les concepts de base que l'on va utiliser dans les autres chapitres. Selon les problèmes auxquels nous sommes confrontés au cours de ce travail, on est amené à utiliser quelques résultats et outils auxiliaires que l'on accepte (souvent) sans démonstration. Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, X désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et X^* représente son dual topologique formé de toutes les formes linéaires $x^* : X \to \mathbb{R}$.

1.1 Notations générales

- p.p : presque partout.
- i.e. : c'est-à-dire.
- s.e.v : sous espace vectoriel.
- resp. : respectivement.
- min,max,inf,sup minimum,maximum,infimum et supremum respectivement.
- H : représente un espace de Hilbert.
- X^* : dual topologique d'un espace topologique X.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$: produit scalaire sur H.
- $\overline{\mathbb{B}}_X$ la boule unité fermée de X .

- C° : cône polaire de l'ensemble C.
- $N_C(x)$: cône normal à un ensemble convexe C au point x.
- $\mathrm{Proj}_C(\cdot)$ l'application de projection sur C .
- $\mathrm{Int}(A), \bar{A}$: l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble A respectivement .
- $d(\cdot, C)$ ou $d_C(\cdot)$: la fonction distance .
- $F : X \rightrightarrows Y$: désigne une application à valeurs ensemblistes (multi-application) de X dans Y.
- $\mathrm{co}(\Omega)$: enveloppe convexe d'un ensemble Ω.
- I : l'opérateur d'identité.
- $$C([0,T];X) := \{f : [0,T] \to X : f \text{ est continue }\}.$$
- f^* : la conjuguée de Fenchel d'une fonction f.
- $\psi_C(\cdot)$: la fonction indicatrice d'un ensemble C.
- $\partial f(x)$: sous-différentiel d'une fonction convexe f au point x.

1.2 Définitions et première propriétés

Définition 1.1. *On appelle produit scalaire sur X, toute forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ possédant les propriétés supplémentaires suivantes*

$$\langle x, y \rangle \geq 0 \text{ (positivité)}$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \text{ (symétrie).}$$

À titre d'exemple, sur l'espace $L^2(\Omega)$ de fonctions de carrée intégrable, on définit le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

dont la norme associée est

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire permet de mesurer l'angle formé par deux vecteurs x et y via l'équivalence suivante

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \Leftrightarrow \theta = \arccos\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Cette dernière expression est bien définie grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz qui donne

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \Rightarrow |\cos(\theta)| = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

cela conduit à dire que

$$\begin{aligned}
&x \text{ et } y \text{ forment un angle aigu si } \langle x, y\rangle > 0, (0 \leq \theta < \tfrac{\pi}{2})\\
&x \text{ et } y \text{ forment un angle obtus si } \langle x, y\rangle < 0, (\theta > \tfrac{\pi}{2})\\
&x \text{ et } y \text{ forment un angle droit si } \langle x, y\rangle = 0, (\theta = \tfrac{\pi}{2}).
\end{aligned}$$

L'application $\|\cdot\| : x \in X \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme sur X appelée la norme hilbertienne ou la norme associée (induite) au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. L'espace X muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ s'appelle un espace pré-hilbertien. Si de plus, X est complet pour la norme induite, dans ce cas, $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est dit un espace de Hilbert que l'on note généralement H.

Définition 1.2. *Étant donné un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et un réel $r > 0$, les sous ensembles de X notés*

$$\begin{aligned}
B[x_0, r] &:= \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}\\
B(x_0, r) &:= \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}\\
S[x_0, r] &:= \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}
\end{aligned}$$

sont appelés, respectivement

boule fermée de centre x_0 et de rayon r

boule ouverte de centre x_0 et de rayon r

sphère de centre x_0 et de rayon r.

En particulier, si $r = 1$ et $x_0 = 0$ alors $\overline{\mathbb{B}}$ (resp. $\mathbb{B}$) représente la boule unité fermée (resp. ouverte).

1.3 Quelque rappels d'analyse convexe

Définition 1.3.

1. *On appelle segment joignant ou reliant deux points $x, y \in X$ l'ensemble*

$$[x, y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda \in [0,1]\}.$$

2. *Un sous ensemble $C \subset X$ est dit convexe si pour tous $x, y \in C$ le segment reliant x à y reste dans C, i.e.,*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \subset C \text{ pour tout } \lambda \in [0,1].$$

3. *Une fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite convexe si, pour tous $x, y \in \operatorname{dom} f$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ l'inégalité suivante, dite "l'inégalité de convexité "est vérifiée*

$$\forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

où $\operatorname{dom} f$ est le domaine de f défini par

$$\operatorname{dom} f = \{x \in X, f(x) < +\infty\}.$$

La fonction f est dite strictement convexe si l'inégalité de convexité est stricte. La définition de la convexité signifie que le segment reliant les deux points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ se trouve toujours au dessus de la courbe de f.

4. *On appelle épigraphe de $f : X \to \mathbb{R}$ le sous-ensemble de $X \times \mathbb{R}$ noté et défini comme suit*

$$\operatorname{epi}(f) = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

5. *Soit Ω un sous ensemble de X. L'enveloppe convexe (convex hull) de Ω, que l'on note $\operatorname{co}(\Omega)$, est le plus petit ensemble convexe contenant Ω, i.e.,*

$$\operatorname{co}(\Omega) = \bigcap \{C : C \text{ convexe et } \Omega \subset C\}.$$

Dans ce cas, le plus petit ensemble convexe **fermé** *contenant Ω, noté $\overline{\operatorname{co}}(\Omega)$, s'appelle l'enveloppe convexe fermé de Ω.*

Exemple 1.4.

1. *Les boules* $\mathbb{B}[x_0, r]$ *et* $\mathbb{B}(x_0, r)$ *sont des ensembles convexe pour tous* $x_0 \in X$ *et* $r \in \mathbb{R}_+$.
2. *Tout sous espace vectoriel de* X *est convexe.*
3. *Les fonctions* $x \mapsto x^2$ *et* $x \mapsto |x|$ *sont convexes.*

Définition 1.5. *Soit* C *un ensemble non vide de* X.

(a) *La fonction distance associée à* C, *notée* $d(\cdot, C)$ *ou* $d_C(\cdot)$, *est définie par*

$$X \ni x \mapsto d(x, C) := \inf_{y \in C} d(x, y) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Les deux propriétés suivantes ont lieu

$$x \in \overline{C} \Leftrightarrow d(x, C) = 0.$$

La fonction distance est Lipschitzienne de rapport 1, *i.e.,*

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leq \|x - y\| \text{ pour tous } x, y \in X. \tag{1.1}$$

(b) *Un élément* $y \in C$ *est une projection (ou un projeté) de* $x \in X$ *sur* C *si*

$$d(x, C) = \|x - y\|.$$

Cet élément y *se note* $\mathrm{Proj}\,(x, C)$ *ou* $P_C(x)$, *autrement dit*

$$P_C(x) = \operatorname{argmin}\Big(C \ni z \mapsto \|x - z\|\Big) = \{v \in C : \|x - v\| = \min_{z \in C} \|x - z\|\}.$$

Le Théorème suivant donne les conditions d'existence et d'unicité de la projection dans un espace de Hilbert. On rappelle que ce théorème n'est plus valable dans un espace normé général.

Théorème 1.6 (Théorème de la projection sur un convexe fermé)**.**
Soit C *un ensemble convexe fermé de* H, *alors pour tout* $x \in H$, *il existe une et une seule projection de* x *sur* C, *i.e.,*

$$\forall x \in H, \exists!\, y = \mathrm{Proj}\,(x, C) \in C : d(x, C) = \|x - y\|.$$

De plus, la projection sur C *se caractérise par l'équivalence suivante*

$$y = \mathrm{Proj}\,(x, C) \Leftrightarrow y \in C \text{ et } \forall z \in C, \langle z - y, x - y\rangle \leq 0. \tag{1.2}$$

Il est à noter que si l'ensemble C est convexe alors, l'application de projection $\mathrm{Proj}\,(\cdot, C)$ est lipschitzienne de rapport 1, i.e.,

$$\|\mathrm{Proj}\,(x, C) - \mathrm{Proj}\,(y, C)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in H. \tag{1.3}$$

En se basant sur la caractérisation de la projection sur un convexe fermé donnée dans (1.2), on va étendre ce résultat au cas des sous espaces vectoriels.

Théorème 1.7. *Soient F un sous espace vectoriel fermé non vide de H et $x \in H$, le point de projection de x sur F se caractérise via l'équivalence suivante*

$$y = \mathrm{P}_F(x) \Leftrightarrow y \in F \text{ et } \langle x - y, z\rangle = 0, \forall z \in F. \tag{1.4}$$

Autrement dit, y est la projection de x sur F si et seulement si le vecteur $x - y$ est orthogonal à F : $(x - y)\perp F$.

La proposition suivante collecte les propriétés fondamentales de la projection sur un sous espace vectoriel.

Proposition 1.8. *Soit F un sous espace vectoriel fermé de H.*

(a) Chaque élément $x \in H$ se décompose sous la forme

$$x = \mathrm{P}_F(x) + \mathrm{P}_{F^\perp}(x) \quad \text{c-à-d, } Id = \mathrm{P}_F + \mathrm{P}_{F^\perp},$$

de plus cette décomposition est unique dans le sens : si $x = y + z$ avec $y \in F, z \in F^\perp$ alors $y = \mathrm{P}_F(x)$ et $z = \mathrm{P}_{F^\perp}(x)$, on écrit également : $H = F \oplus F^\perp$.

(b) $\mathrm{P}_F(\cdot)$ est linéaire continue avec $\|\mathrm{P}_F\| = 1$.

(c) $\|x\|^2 = \|\mathrm{P}_F(x)\|^2 + \|\mathrm{P}_{F^\perp}(x)\|^2$, pour tout $x \in H$.

(d)

$$\|\mathrm{P}_F(x)\| \leq \|x\| \quad \text{et} \quad \langle P_F(x), x\rangle = \|\mathrm{P}_F(x)\|^2, \forall x \in H$$

(e) $\mathrm{P}_F(\cdot)$ est auto-adjoint, c-à-d, $\langle \mathrm{P}_F(x), y\rangle = \langle x, \mathrm{P}_F(y)\rangle$, pour tout $x \in H$.

(f) $\mathrm{P}_F^2 = \mathrm{P}_F$ (P_F est idempotent) et $\ker \mathrm{P}_F = \mathrm{P}_F^{-1}(\{0\}) = F^\perp$.

Définition 1.9.

- *Étant donné deux ensembles E et Y. Si à chaque élément x de E, on associe un sous ensemble éventuellement non vide de Y noté $F(x)$, on définit une application multivoque F de E vers Y et on note $F : E \rightrightarrows Y$. Dans la littérature, les applications multivoques sont aussi appelées multi-applications, multifonctions, relations ou correspondances.*

  1. *Le domaine de F noté* $\operatorname{Dom} F$ *est l'ensemble*

  $$\operatorname{Dom} F = \{x \in E \ : \ F(x) \neq \emptyset\}.$$

  2. *Si A est un sous ensemble de E alors $F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x)$, en particulier, si $A = \operatorname{Dom} F$ alors,* $\mathrm{R}\,(F) := F(\operatorname{Dom} F)$ *est l'image de F.*

  3. *L'image de F noté* $\mathrm{R}\,(F)$ *est*

  $$\mathrm{R}\,(F) = \bigcup_{x \in E} F(x).$$

  4. *Le graphe de F noté* $\mathrm{Gr}\,(F)$ *est*

  $$\mathrm{Gr}\,(F) = \{(x, y) \in E \times Y \ : \ y \in F(x)\}.$$

  5. *On appelle image réciproque d'une partie non vide D de Y par F l'ensemble*

  $$F^{-1}(D) := \{x \in E, F(x) \cap D \neq \emptyset\},$$

  d'autre part, pour tout $y \in Y$ on a

  $$F^{-1}(y) := \{x \in X : y \in F(x)\}.$$

  6. *On note $F^{-1} : Y \rightrightarrows E$ la multi-application inverse de F définie par*

  $$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x).$$

- *Un sous ensemble $K \subset X$ est dit un cône si $\lambda K \subset K$ pour tout $\lambda \geq 0$; autrement dit, K est stable par rapport à la multiplication par un scalaire positif. Si de plus K est convexe alors K est dit cône convexe, il est clair qu'un cône contient toujours l'origine ($\lambda = 0 : 0K = \{0\} \subset K$).*

- *Le cône polaire (ou cône polaire négatif, ou cône dual) de $K \subset X$ est l'ensemble*

$$K^\circ := \{y \in X^*, \langle y, x\rangle \leq 0 \text{ pour tout } x \in K\},$$

d'autres notations sont également utilisées pour le cône polaire de K : K^-, $K^\ominus$,...,etc. Citons par exemple, le cône de Pareto de $\mathbb{R}^n$ (orthant positif)

$$K := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n\} = \mathbb{R}^n_+,$$

alors

$$K^\circ = -K = \{-x = (-x_1, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n_-.$$

En analyse convexe, les cônes les plus couramment utilisés sont le cône tangent et le cône normal. Soit C un ensemble convexe non vide de X. Le cône tangent à C au point $x \in C$ que l'on note $T(C; x)$ ou $T_C(x)$, est le cône fermé (de sommet 0) engendré par $C - x$, i.e.,

$$T(C; x) := \overline{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \lambda\big(C - x\big)}.$$

Puisque C est convexe, il est évident que $T(C; x)$ est un cône convexe fermé. On remarque que $C \subset x + T(C; x)$, et si $x \in \mathrm{Int}\,(C) \neq \emptyset$ alors $T(C; x) = X$.

On introduit maintenant la notion du cône normal à C au point x, noté $N(C; x)$ ou $N_C(x)$, comme étant le cône polaire du cône tangent, i.e.,

$$N_C(x) := (T_C(x))^\circ = \{x^* \in X^* : \langle x^*, z\rangle \leq 0, \forall z \in T(C; x)\}.$$

La définition de $T_C(x)$, nous permet de conclure que

$$N_C(x) = \{x^* \in X^*, \langle x^*, y - x\rangle \leq 0, \text{ pour tout } y \in C\}. \tag{1.5}$$

Il est facile de vérifier que si $x \in \mathrm{Int}\,(C)$ avec $\mathrm{Int}\,(C) \neq \emptyset$ alors $N_C(x) = \{0\}$. De plus pour tout $x \in -C$ et $y, z \in X$ tels que $y + z \in C$

$$N_C(-x) = -N_{-C}(x), N_C(y + z) = N_{C-z}(y). \tag{1.6}$$

Exemple 1.10. *Sur* $\mathbb{R}$ *on considère l'ensemble* $C = [0,1]$ *alors*

$$T_{[0,1]}(1) =]-\infty, 0], \quad N_{[0,1]}(1) = [0, +\infty[.$$

En effet

$$\begin{aligned} C - \{1\} &= \{x - 1, x \in [0,1]\} = [-1, 0] \\ &\Rightarrow \mathbb{R}_+(C - \{1\}) = \{\lambda x, x \in C - \{1\}, \lambda > 0\} \\ &= \{\lambda x, x \in [-1, 0], \lambda > 0\} =]-\infty, 0] \\ &\Rightarrow T_{[0,1]}(1) = \overline{\mathbb{R}_+(C - \{1\})} = \overline{]-\infty, 0]} =]-\infty, 0]. \end{aligned}$$

Alors

$$N_{[0,1]}(1) = \big(T_{[0,1]}(1)\big)^\circ = \{v \in \mathbb{R} : v(\underbrace{y-1}_{\leq 0}) \leq 0, \forall y \in [0,1]\} = [0, +\infty[.$$

Dans un espace de Hilbert, le cône normal à un ensemble convexe (fermé) C est fortement lié à l'application de projection, ce que l'on peut voir clairement dans l'équivalence suivante

$$y = \mathrm{Proj}_C(x) \Leftrightarrow x - y \in N_C(y). \tag{1.7}$$

Définition 1.11. *Soit* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction convexe et finie en* $\overline{x} \in X$*. Le sous-différentiel (de Fenchel) de* f *au point* $\overline{x}$*, noté* $\partial f(\overline{x})$*, est le sous ensemble de* X^* *défini par*

$$\partial f(\overline{x}) := \{v \in X^* : \langle v, x - \overline{x}\rangle \leq f(x) - f(\overline{x}) \text{ pour tout } x \in X\}. \tag{1.8}$$

Si $\overline{x} \notin \mathrm{dom}\, f$ *alors* $\partial f(\overline{x}) = \emptyset$*. Par exemple, si* $f(x) = |x|$ *alors*

$$\partial f(a) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{si } a = 0 \\ \{1\} & \text{si } a > 0 \\ \{-1\} & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Le sous-différentiel peut être défini de manière équivalente géométriquement via le cône normal à l'épigraphe comme suit

$$\partial f(\overline{x}) := \{v \in X^* : (v, -1) \in N_{\mathrm{epi}\, f}(\overline{x}, f(\overline{x}))\}.$$

Réciproquement, On peut également donner la définition du cône normal à un ensemble $C \subset X$ au point $x \in C$ en utilisant la fonction indicatrice de C notée $\psi_C(\cdot)$ comme suit

$$N(x; C) = \partial\psi_C(x),$$

avec $\psi_C(x) = 0$ si $x \in C$ et $\psi_C(x) = +\infty$ sinon.

1.4 Autres définitions et résultats

Lemme 1.12. *Soient $x, \Psi : [T_0, T] \to \mathbb{R}$ et $g : [T_0, T] \to \mathbb{R}_+$ trois fonctions continues. On suppose que*

$$x(t) \leq \Psi(t) + \int_{T_0}^{t} g(s)x(s)ds,$$

alors

$$x(t) \leq \Psi(t) + \int_{T_0}^{t} g(s)\Psi(s)e^{\int_{T_0}^{s} g(r)dr}ds.$$

Théorème 1.13 (Théorème du point fixe de Banach)**.**
Soit K un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Soit $\mathcal{A} : K \to K$ un opérateur contractant, i.e., il existe un réel $\alpha \in [0, 1[$ tel que

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|_X \leq \alpha\|x - y\|_X \text{ pour tous } x, y \in X,$$

alors, $\mathcal{A}$ admet un seul point fixe sur K, i.e.,

$$\exists! \overline{x} \in K : \mathcal{A}\overline{x} = \overline{x}.$$

Soit J un sous intervalle de $\mathbb{R}_+$, pour un espace normé $(X, \|\cdot\|)$, on note par $C(J; X)$ l'espace des fonctions continues définies sur J à valeurs dans X ,i.e.,

$$C(J; X) = \{u : J \to X : u \text{ est continue }\}.$$

Soit $S \in \mathbb{R}$ alors $C([0, S]; X)$ est muni de la norme, dite de convergence uniforme

$$\|u\|_{C([0,S];X)} = \max_{t\in[0,S]} \|u(t)\|, \text{ pour toute } u \in C([0, S]; X).$$

Il est connu que si X est un espace de Banach alors $C([0,S];X)$ l'est aussi. On note par $C^1(J;X)$ l'espace des fonctions continument différentiables sur J à valeurs dans X. Pour toute fonction $f \in C(J;X)$, la fonction $g : J \to X$ définie par

$$g(t) = \int_0^t f(s)ds, \text{ pour tout } t \in J \tag{1.9}$$

appartient à $C^1(J,X)$, de plus $\dot{g} = f$. Aussi, pour toute fonction $v \in C^1(I;X)$ l'égalité suivante est vérifiée

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \dot{v}(s)ds, \text{ pour tout } t \in I.$$

.

Chapitre 2

Problèmes d'inclusions gouvernées par des opérateurs non-linéaires

On commence ce chapitre par un petit rappel sur la théorie des opérateurs monotones, ensuite, on introduit la classe des opérateurs avec mémoire (avec retard, history dependent operators en anglais) en citant quelques exemples illustratifs. Puis, on passe à la démonstration du résultat principal de ce chapitre qui donne l'existence et l'unicité de la solution pour un problème donné sous la forme d'une inclusion dépendante du temps. Ce résultat vient après une liste des lemmes auxiliaires qui sont également démontrés.

Tout d'abord, on rappelle quelques définitions et résultats sur les opérateurs dont les valeurs sont univoques. On dit qu'un opérateur $A : H \to H$ est

(a) Lipschitzien, s'il existe une constante $L_A > 0$ telle que

$$\|Au - Av\| \leq L_A \|u - v\|, \quad \forall u, v \in H.$$

(b) Monotone si

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in H.$$

(c) Fortement monotone, s'il existe une constante $m_A > 0$ telle que

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq m_A \|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in H.$$

Théorème 2.1 ([15], Théorème 1.24)**.** *Soit $A : H \to H$ un opérateur Lipschitzien fortement monotone. Alors, pour tout $y \in H$, il existe un seul élément $x \in H$ tel que $Ax = y$, cela implique implicitement que A est inversible.*

Proposition 2.2 ([15], Proposition 1.25)**.** *Soit $A : H \to H$ un opérateur L_A-Lipschitzien fortement monotone. Alors, $A^{-1} : H \to H$ est $\frac{1}{L_A}$-Lipschitzien fortement monotone.*

2.1 Opérateur avec mémoire (avec retard)

Pour un réel positif étendu $T \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on définit l'ensemble, éventuellement non borné, $I := [0, T] \cap \mathbb{R}$.

Définition 2.3. *Soient $(X, \|\cdot\|)$ et $(Y, \|\cdot\|)$ deux espaces normés. Un opérateur $\mathcal{S} : C(I; X) \to C(I; Y)$ est dit*

1. *Opérateur avec mémoire ou avec retard, history-dependent operator en anglais,* **HD** *en abrégé, si pour tout ensemble compact non vide $\mathcal{J} \subset I$, il existe une constante $L_{\mathcal{J}} > 0$ telle que pour tous $u_1, u_2 \in C(I; X)$ et tout $t \in \mathcal{J}$*

$$\|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\| \leq L_{\mathcal{J}} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| ds. \tag{2.1}$$

2. *Opérateur presque avec mémoire, almost history-dependent operator en anglais,* **AHD** *en abrégé, si pour tout ensemble compact non vide $\mathcal{J} \subset I$, il existe deux réels $l_{\mathcal{J}} \in [0, 1[$ et $L_{\mathcal{J}} > 0$ tels que, pour tous $u_1, u_2 \in C(I; X)$ et tout $t \in \mathcal{J}$*

$$\|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\| \leq l_{\mathcal{J}} \|u_1(t) - u_2(t)\| + L_{\mathcal{J}} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| ds.$$

Il est clair que tout opérateur **HD** *est un opérateur* **AHD**.

Pour clarifier cette définition, on considère un point $u_0 \in H$ et un opérateur $\mathcal{R} : C(I; H) \to C(I; H)$ défini par

$$\mathcal{R}u(t) = \int_0^t u(s)\, ds + u_0, \quad u \in C(I; H), t \in I, \tag{2.2}$$

alors, pour tous $u, v \in C(I;H)$ et tout $t \in I$

$$\|\mathcal{R}u(t) - \mathcal{R}v(t)\| \leq \int_0^t \|u(s) - v(s)\|,$$

ce qui signifie que $\mathcal{R}$ vérifie l'inégalité (2.1) avec $L_{\mathcal{J}} = 1$ et par conséquent $\mathcal{R}$ est opérateur avec retard **HD**.

Le terme "Hisory-dependent operator" a été introduit pour la première fois dans l'article de Sofonea et Matei [14], et depuis ce travail, ce concept a fait l'objet de plusieurs étude notamment [2, 1]. Cette terminologie se justifie à partir de l'exemple donné par l'égalité (2.2) où on voit que la nouvelle valeur $\mathcal{R}u(t)$ dépend de toutes les valeurs antérieures $u(s), 0 \leq s \leq t$, ce qui montre bien l'existence d'une mémoire ou d'un retard. Voilà quelques autres exemples de cette classe d'opérateurs.

Exemple 2.4. *1. Soient $u_0 \in X$ et $R : X \to Y$ un opérateur L_R-Lipschitzien. Alors, l'opérateur $S : C(I;X) \to C(I;Y)$ défini par*

$$Su(t) = R\Big(\int_0^t u(s)ds + u_0\Big), u \in C(I;X), t \in I,$$

est avec retard. En effet, soient $u_1, u_2 \in C(I;X)$, alors

$$\begin{aligned}\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_Y &= \Big\|R\Big(\int_0^t u_1(s)ds + u_0\Big) - R\Big(\int_0^t u_2(s)ds + u_0\Big)\Big\|_Y,\\ &\leq L_R\Big\|\int_0^t u_1(s)ds - \int_0^t u_2(s)ds\Big\|_X,\\ &\leq L_R\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds,\end{aligned}$$

dans ce cas, l'inégalité (2.1) est vérifiée avec $L_{\mathcal{J}} = L_R$.

2. Soient $R \in C\big(I;\mathcal{L}(X,Y)\big)$ et $\mathcal{S} : C(I;X) \to C(I;Y)$, on définit l'opérateur dit de Volterra par

$$\mathcal{S}u(t) = \int_0^t R(t-s)u(s)ds, u \in C(I;X),\ t \in I.$$

Soient $\mathcal{J}$ un sous-ensemble compact de I, $u_1, u_2 \in C(I;X)$ et $t \in \mathcal{J}$, alors

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_Y &= \| \int_0^t R(t-s)u_1(s)\ ds - \int_0^t R(t-s)u_2(s)\ ds\| \\
&\leq \int_0^t \|R(t-s)(u_1(s) - u_2(s))\|\ ds, \\
&\leq \int_0^t \|R(t-s)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|u_1(s) - u_2(s)\| ds, \\
&\leq \int_0^t \max_{r\in\mathcal{J}} \|R(r)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|u_1(s) - u_2(s)\| ds, \\
&= \|R\|_{C(J;\mathcal{L}(X,Y))} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|\ ds,
\end{aligned}$$

par conséquent, $\mathcal{S}$ est **HD** *avec $L_{\mathcal{J}} = \|R\|_{C(J;\mathcal{L}(X,Y))}$.*

Le théorème suivant montre une propriété fondamentale pour les opérateurs **AHD**.

Théorème 2.5. *Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $\mathcal{S} : C(I;X) \to C(I;X)$ un opérateur* **AHD** *alors, $\mathcal{S}$ admet un seul point fixe sur $C(I;X)$, i.e.,*

$$\exists! \eta^* \in C(I;X) : \mathcal{S}\eta^* = \eta^*.$$

D*émonstration*. On montre seulement le cas où l'intervalle I est borné, i.e., $I = [0, K]$ avec $K \in]0, +\infty[$. À cette fin, on utilise la norme dite de Bielecki $\|\cdot\|_\beta$ définie sur l'espace de Banach $C([0,K];X)$ par

$$\|\eta\|_\beta = \max_{t\in[0,K]} \{e^{-\beta t}\|\eta(t)\|\} \text{ pour tout } \eta \in C([0,K];X),$$

où $\beta > 0$ est un réel positif. Il est clair que l'application $\|\cdot\|_\beta$ définit une norme sur $C([0,K];X)$, en effet, pour tous $u, v \in C([0,K];X)$ et tout réel α

$$\|u\|_\beta = 0 \Leftrightarrow \max_{t\in[0,K]} \{e^{-\beta t}\|u(t)\|\} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-\beta t}}_{\neq 0}\|u(t)\| = 0, \forall t \in [0,K]$$

$$\Leftrightarrow \|u(t)\| = 0, \forall t \in [0,K] \Leftrightarrow u = 0.$$

$$\|\alpha u\|_\beta = \max_{t\in[0,K]} \{e^{-\beta t}\|\alpha u(t)\|\} = |\alpha|\|u\|_\beta$$

$$\begin{aligned}\|u+v\|_\beta &= \max_{t\in[0,K]}\{e^{-\beta t}\|u(t)+v(t)\|\} \leq \max_{t\in[0,K]}\{e^{-\beta t}\big(\|u(t)\|+\|v(t)\|\big)\}\\ &= \max_{t\in[0,K]}\left(e^{-\beta t}\|u(t)\|+e^{-\beta t}\|v(t)\|\right) \leq \max_{t\in[0,K]}\left(e^{-\beta t}\|u(t)\|\right)+\max_{t\in[0,K]}\left(e^{-\beta t}\|v(t)\|\right)\\ &= \|u\|_\beta+\|v\|_\beta.\end{aligned}$$

De plus, la normes $\|\cdot\|_\beta$ et celle de la convergence uniforme $\|\cdot\|_{C([0,K];X)}$ sont équivalentes. En effet, pour tout $0\leq t\leq K$ et tout $u\in C([0,K];X)$

$$\begin{aligned}0\leq \beta t\leq \beta K &\Rightarrow e^{-\beta K}\leq e^{-\beta t}\leq 1\\ &\Rightarrow e^{-\beta K}\|u(t)\|\leq e^{-\beta t}\|u(t)\|\leq \|u(t)\|\\ &\Rightarrow e^{-\beta K}\|u\|_{C([0,K];X)}\leq \|u\|_\beta\leq \|u\|_{C([0,K];X)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'espace $(C([0,K];X),\|\cdot\|_\beta)$ est un espace de Banach. Comme $\mathcal{S}$ est un opérateur **AHD** alors, il existe deux constantes $l\in[0,1[$ et $L>0$ telles que pour tous $u,v\in C([0,K];X)$ et tout $t\in[0,K]$

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{S}u(t)-\mathcal{S}v(t)\|\leq l\|u(t)-v(t)\|+L\int_0^t\|u(s)-v(s)\|ds\\ \Rightarrow\ & e^{-\beta t}\|\mathcal{S}u(t)-\mathcal{S}v(t)\|\leq le^{-\beta t}\|u(t)-v(t)\|+Le^{-\beta t}\int_0^t\big(e^{-\beta s}\|u(s)-v(s)\|\big)e^{\beta s}ds,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,K]}\left(e^{-\beta t}\|\mathcal{S}u(t)-\mathcal{S}v(t)\|\right) &\leq l\max_{t\in[0,K]}\left(e^{-\beta t}\|u(t)-v(t)\|\right)+\\ &\quad Le^{-\beta t}\int_0^t\left(\max_{s\in[0,K]}\big(e^{-\beta s}\|u(s)-v(s)\|\big)\right)e^{\beta s}ds\\ &= l\|u-v\|_\beta+Le^{-\beta t}\|u-v\|_\beta\int_0^t e^{\beta s}ds\\ &= l\|u-v\|_\beta+\frac{L}{\beta}\underbrace{(1-e^{-\beta t})}_{\leq 1}\|u-v\|_\beta,\end{aligned}$$

d'où

$$\|\mathcal{S}u-\mathcal{S}v\|_\beta\leq\Big(l+\frac{L}{\beta}\Big)\|u-v\|_\beta,\ \text{pour tous } u,v\in C([0,K];X).$$

Grâce à la condition $l\in[0,1[$, on peut choisir $\beta>0$ tel que $\beta>\frac{L}{1-l}$, ce qui assure l'inégalité $l+\frac{L}{\beta}<1$ et par suite, montre la propriété contractante de l'opérateur $\mathcal{S}$ défini de $(C([0,K];X),\|\cdot\|_\beta)$ dans $(C([0,K];X),\|\cdot\|_\beta)$. Finalement, pour déduire l'existence d'un point fixe pour $\mathcal{S}$, il suffit d'utiliser le théorème du point fixe de Banach (voir le Théorème1.13). ■

Nous terminons cette partie par une propriété sur l'existence de l'inverse de la somme de deux opérateurs où l'un d'eux est supposé être avec retard.

Théorème 2.6. *Soient* $(X, \|\cdot\|_X)$ *et* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *deux espaces de Banach. On se donne deux opérateurs* $\mathcal{S} : C(I;X) \to C(I;Y)$ *et* $A : X \to Y$ *tels que*

- $\mathcal{S}$ *est un opérateur avec retard,*
- A *est linéaire, continu et inversible tel que*

$$\exists m_A > 0 : \|Ax\|_Y \geq m_A \|x\|_X \text{ pour tout } x \in X,$$

alors l'opérateur $A + \mathcal{S} : C(I;X) \to C(I;Y)$ *défini par* $(A+\mathcal{S})(x)(t) := Ax(t) + \mathcal{S}x(t)$ *est inversible avec*

$$(A+\mathcal{S})^{-1} = A^{-1} + \mathcal{R} : C(I;Y) \to C(I;X),$$

où $\mathcal{R} : C(I;Y) \to C(I;X)$ *est un opérateur avec retard.*

2.2 Résultat d'existence et d'unicité

On considère une multi-application $K : I \rightrightarrows H$ et deux opérateurs $A : H \to H$ et $\mathcal{S} : C(I;H) \to C(I;H)$. L'objectif principal de cette section est de démontrer le caractère bien posé du problème suivant

$$\begin{cases} \text{trouver une application } u : I \to H \text{ telle que :} \\ -u(t) \in N_{K(t)}(Au(t) + \mathcal{S}u(t)), \text{ pour tout } t \in I. \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour étudier le problème (2.3), on considère la liste des hypothèses suivantes

($\mathcal{K}$) $K : I \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et fermées telle que pour tout $t \in I$ et toute suite $(t_n)_n \subset I$ convergente vers t, on a

$$P_{K(t_n)}u \to P_{K(t)}u, \text{ pour tout } u \in H.$$

($\mathcal{A}$) A est un opérateur m_A-fortement monotone et L_A-Lipschitzien avec $m_A, L_A > 0$.

($\mathcal{H}$) Pour tout compact non vide $\mathcal{J} \subset I$, il existe deux réels $l^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}} > 0$ et $L^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}} > 0$ tels que pour

touts $u_1, u_2 \in C(I;H)$ et tout $t \in \mathcal{J}$

$$\|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\| \leq l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}}\|u_1(t) - u_2(t)\| + L_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| ds.$$

On note que, à la fin de ce chapitre, une section sera dédiée à présenter quelques exemples d'ensembles qui vérifient la condition $(\mathcal{K})$.

Après avoir donné la liste des hypothèses nécessaires, on arrive à énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.7. *Étant donné un espace de Hilbert H. On suppose que les conditions $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{H})$ et $(\mathcal{K})$ soient satisfaites. On suppose également que pour tout compact $\mathcal{J} \subset I$ non vide, la condition (technique) de petitesse suivante*

$$l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}} < m_A \tag{2.4}$$

soit vérifiée. Alors l'inclusion (2.3) admet une solution unique $u \in C(I;H)$.

La preuve de ce théorème est constructive et se décompose en plusieurs parties données sous forme de lemmes que l'on va établir par la suite.

Lemme 2.8. *Soient K un sous-ensemble convexe fermé non vide de H, $B : H \to H$ un opérateur et $z, \eta \in H$, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) $z = P_K(z - B(z - \eta))$;

(b) il existe un réel $\rho > 0$ tel que $z = P_K(z - \rho B(z - \eta))$;

(c) $z = P_K(z - \rho B(z - \eta))$, *pour tout* $\rho > 0$.

D*émonstration*. Selon la caractérisation (1.2), on a les équivalences suivantes

$$\underbrace{z = P_K(z - B(z - \eta))}_{(a)} \Leftrightarrow \underbrace{z \in K \text{ et } \langle B(z - \eta), v - z\rangle \geq 0, \forall v \in K}_{(a')}$$

$$\underbrace{\forall \rho > 0 : z = P_K(z - \rho B(z - \eta))}_{(c)} \Leftrightarrow \underbrace{\forall \rho > 0 : z \in K \text{ et } \rho\langle B(z - \eta), v - z\rangle \geq 0, \forall v \in K}_{(c')}$$

en particulier, pour $\rho = 1$ on obtient

$$\underbrace{\exists \rho > 0, (\rho = 1) : z = P_K(z - B(z - \eta))}_{(b)} \Leftrightarrow \underbrace{\exists \rho > 0 : z \in K \text{ et } \langle B(z - \eta), v - z\rangle \geq 0, \forall v \in K}_{(b')}$$

Alors, pour démontrer l'équivalence entre (a), (b) et (c), il suffit de la démontrer entre (a'), (b') et (c') ce qu'est évident. ■

Lemme 2.9. *Soient K un sous-ensemble non vide convexe fermé de H et $B : H \to H$ un opérateur m_B-fortement monotone et L_B-Lipschitzien. Alors, pour tout $\eta \in H$, il existe un seul élément $z_\eta \in H$ tel que*

$$z_\eta = P_K\big(z_\eta - B(z_\eta - \eta)\big).$$

D*émonstration*. Soit $\eta \in H$, la monotonie forte et la Lipschitzité de B assure que pour tous $u, v \in H$

$$\langle Bu - Bv, u - v\rangle \geq m_B\|u - v\|^2 \quad \text{et} \quad \|Bu - Bv\| \leq L_B\|u - v\|. \tag{2.5}$$

On choisit une constante positive $\rho > 0$ assez petite telle que

$$0 < \rho < \frac{2m_B}{L_B^2}, \tag{2.6}$$

et on considère l'opérateur $\Lambda_\rho : H \to H$ défini comme suit

$$H \ni z \mapsto \Lambda_\rho z := P_K\big(z - \rho B(z - \eta)\big).$$

En vertu de l'inégalité (2.6), on obtient

$$0 < \rho^2 L_B^2 < 2m_B\rho \Rightarrow 1 - 2m_B\rho < 1 + \rho^2 L_B^2 - 2m_B\rho < 1,$$

en choisissant $\rho > 0$ assez petit de manière à assurer que $1 - 2m_B\rho > 0$. Cela nous permet de déduire l'inclusion suivante

$$k_\rho := \sqrt{1 + \rho^2 L_B^2 - 2\rho m_B} \in]0, 1[. \tag{2.7}$$

Selon la définition de l'opérateur Λ_ρ, pour terminer la preuve, il suffit de prouver que Λ_ρ admet un seul point fixe. À cet égard, on va montrer que Λ_ρ est contractante. Fixons deux éléments $z_1, z_2 \in H$ et posons $u_i = z_i - \eta$, $i = 1, 2$. La définition de Λ_ρ, la 1-Lipschitzité de l'application

de projection P_K (voir (1.3)) et l'inégalité (2.5) donnent

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_\rho z_1 - \Lambda_\rho z_2\|^2 &= \|P_K(z_1 - \rho B(z_1 - \eta)) - P_K(z_2 - \rho B(z_2 - \eta))\|^2 \\
&\leq \|z_1 - \rho B(z_1 - \eta) - (z_2 - \rho B(z_2 - \eta))\|^2 \\
&\leq \|u_1 - u_2 - \rho(Bu_1 - Bu_2)\|^2 \\
&= \|u_1 - u_2\|^2 + \rho^2\|Bu_1 - Bu_2\|^2 - 2\rho\langle Bu_1 - Bu_2, u_1 - u_2\rangle \\
&\leq (1 + \rho^2 L_B^2 - 2\rho m_B)\|\underbrace{u_1 - u_2}_{=z_1 - z_2}\|^2, \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\|\Lambda_\rho z_1 - \Lambda_\rho z_2\| \leq \underbrace{k_\rho}_{<1} \|z_1 - z_2\|,$$

ce qui traduit la propriété contractante de Λ_ρ. En tenant compte du théorème du point fixe de Banach (voir Théorème 1.13), on déduit l'existence d'un seul élément $z_\eta \in H$ tel que

$$\Lambda_\rho z_\eta = z_\eta = P_K\big(z_\eta - \rho B(z_\eta - \eta)\big), \text{ pour tout } \rho > 0 \text{ vérifie (2.6).}$$

En combinant cette dernière égalité avec l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ du Lemme 2.8, on obtient l'égalité souhaitée. ■

Lemme 2.10. *Soit $B : H \to H$ un opérateur m_B-fortement monotone et L_B-Lipschitzien. On suppose que la condition $(\mathcal{K})$ soit vérifiée, alors pour tout $\eta \in C(I; H)$, il existe une seule fonction $z_\eta \in C(I; H)$ telle que*

$$z_\eta(t) = P_{K(t)}\Big(z_\eta(t) - B(z_\eta(t) - \eta(t))\Big), \text{ pour tout } t \in I. \qquad (2.9)$$

D*émonstration*. On fixe une application $\eta(\cdot) \in C(I; H)$. Soit $t \in I$, alors $\eta(t) \in H$, donc selon le Lemme 2.9 il existe **un seul élément** $z_{\eta(t)} \in H$ tel que

$$z_{\eta(t)} = P_{K(t)}\Big(z_{\eta(t)} - B(z_{\eta(t)} - \eta(t))\Big).$$

Lorsque le parcourt tout l'intervalle I alors, on obtient une fonction $z_\eta(\cdot) : I \to H$ définie par

$$I \ni t \mapsto z_\eta(t) := z_{\eta(t)}.$$

Par conséquent, pour tout $\eta \in C(I;H)$, il existe une **seule fonction** $z_\eta : I \to H$ telle que

$$z_\eta(t) = P_{K(t)}\Big(z_\eta(t) - B(z_\eta(t) - \eta(t))\Big).$$

Ce qui montre l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation (2.9). Pour terminer la preuve, il suffit de démontrer que $z_\eta(\cdot)$ est continue. Pour cela, on considère une suite $(t_n)_n \subset I$ telle que $(t_n)_n$ converge vers $t \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\rho > 0$, on pose

$$K_n := K(t_n), \quad \sigma_n := \eta(t_n), \quad z_n := z_\eta(t_n), \quad \omega_n := z_n - \rho B(z_n - \sigma_n), \quad \rho > 0$$
$$K := K(t), \quad \sigma := \eta(t), \quad z := z_\eta(t), \quad \omega := z - \rho B(z - \sigma).$$

D'après le Lemme 2.8, on obtient

$$z = P_K\omega \quad \text{et} \quad z_n = P_{K_n}\omega_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Soit $\rho > 0$ un réel tel que la condition (2.6) soit satisfaite et soit $k_\rho \in]0,1[$ la constante définie dans (2.7) alors

$$\begin{aligned} \|z_n - z\| &= \|P_{K_n}\omega_n - P_{K_n}\omega + P_{K_n}\omega - P_K\omega\| \\ &\leq \|P_{K_n}\omega_n - P_{K_n}\omega\| + \|P_{K_n}\omega - P_K\omega\|. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pour simplifier les calculs, on pose $u := z - \sigma$ et $u_n := z_n - \sigma_n$ alors

$$\begin{aligned} \|P_{K_n}\omega_n - P_{K_n}\omega\| \leq \|\omega_n - \omega\| &= \|z_n - \rho B(z_n - \sigma_n) - (z - \rho B(z - \sigma))\| \\ &= \|u_n - u - \rho(Bu_n - Bu) + \sigma_n - \sigma\| \\ &\leq \|u_n - u - \rho(Bu_n - Bu)\| + \|\sigma_n - \sigma\|, \end{aligned} \tag{2.12}$$

en utilisant un raisonnement similaire à celui utilisé pour démontrer (2.8), on obtient

$$\|u_n - u - \rho(Bu_n - Bu)\| \leq k_\rho\|u_n - u\|, \tag{2.13}$$

la combinaison de (2.11),(2.12) et (2.13) donne

$$\|z_n - z\| \leq k_\rho\|u_n - u\| + \|\sigma_n - \sigma\| + \|P_{K_n}\omega - P_K\omega\|,$$

mais

$$\|u_n - u\| \leq \|z_n - z\| + \|\sigma_n - \sigma\|,$$

alors

$$\underbrace{(1-k_\rho)}_{<1}\|z_n - z\| \leq \|P_{K_n}\omega - P_K\omega\| + (1+k_\rho)\|\sigma_n - \sigma\|,$$

ce qu'est équivalent à

$$\|z_\eta(t_n) - z_\eta(t)\| \leq \frac{1}{1-k_\rho}\Big(\|P_{K(t_n)}\omega - P_{K(t)}\omega\| + (1+k_\rho)\|\eta(t) - \eta(t_n)\|\Big),$$

en vertu de l'hypothèse $(\mathcal{K})$ et la continuité de $\eta : I \to H$ on déduit la continuité de $z_\eta(\cdot)$. ■

Lemme 2.11. *Supposons que les conditions* $(\mathcal{K})$ *et* $(\mathcal{A})$ *soient vérifiées. Alors, pour tout* $\eta \in C(I;H)$*, il existe une seule application* $u_\eta \in C(I;H)$ *telle que*

$$-u_\eta(t) \in N_{K(t)}(Au_\eta(t) + \eta(t)) \text{ pour tout } t \in I. \tag{2.14}$$

D*émonstration*. On fixe une application $\eta \in C(I;H)$ et on considère le problème

$$\begin{cases} \text{trouver une application } z_\eta(\cdot) \in C(I;H) \text{ telle que} \\ z_\eta(t) = P_{K(t)}\Big(z_\eta(t) - A^{-1}(z_\eta(t) - \eta(t))\Big), \text{ pour tout } t \in I \end{cases} \tag{2.15}$$

où A^{-1} est l'opérateur inverse de A (l'existence de A^{-1} revient à la condition $(\mathcal{A})$ et le Théorème 2.1). La proposition 2.2 assure la monotonie forte et la Lipschitzité de l'opérateur A^{-1}. Par conséquent, le problème (2.15) admet une solution unique $z_\eta(\cdot) \in C(I;H)$ grâce au Lemme 2.10 (en prenant $B = A^{-1}$). Soit $u_\eta(\cdot)$ l'application définie par $u_\eta(t) := A^{-1}(z_\eta(t) - \eta(t))$, $t \in I$ alors $u_\eta(\cdot) \in C(I;H)$ grâce à la continuité de A^{-1}, $z_\eta(\cdot)$ et $\eta(\cdot)$, on a aussi $z_\eta(t) = P_{K(t)}\Big(z_\eta(t) - u_\eta(t)\Big)$. En combinant cette dernière égalité avec (1.7) on obtient

$$-u_\eta(t) \in N_{K(t)}(\underbrace{Au_\eta(t) + \eta(t)}_{z_\eta(t)}) \text{ pour tout } t \in I.$$

En ce qui concerne l'unicité, on suppose l'existence de deux solutions u_η^1 et $u_\eta^2 \in C(I;H)$ telles que

$$-u_\eta^i(t) \in N_{K(t)}(Au_\eta^i(t) + \eta(t)) \text{ pour tout } t \in I, i = 1, 2.$$

Alors

$$Au_\eta^i(t) + \eta(t) \in K(t) \quad \text{et} \quad \langle u_\eta^i(t), Au_\eta^i(t) + \eta(t) - v\rangle \leq 0 \quad \forall t \in I, \forall v \in K(t).$$

En choisissant $i = 1$ (resp. $i = 2$) et $v = Au_\eta^2(t) + \eta(t)$ (resp. $v = Au_\eta^1(t) + \eta(t)$) on obtient

$$\langle u_\eta^1(t), Au_\eta^1(t) - Au_\eta^2(t)\rangle \leq 0,$$

$$\langle u_\eta^2(t), Au_\eta^2(t) - Au_\eta^1(t)\rangle \leq 0.$$

L'addition de ces dernières inégalités donne

$$\begin{aligned} 0 \leq m_A\|u_\eta^1(t) - u_\eta^2(t)\|^2 \leq \langle u_\eta^1(t) - u_\eta^2(t), Au_\eta^1(t) - Au_\eta^2(t)\rangle \leq 0 \\ \Rightarrow \|u_\eta^1(t) - u_\eta^2(t)\| = 0, \forall t \in I, \end{aligned}$$

d'où $u_\eta^1(t) = u_\eta^2(t)$, pour tout $t \in I$. ■

Le résultat d'existence et d'unicité établi dans le dernier lemme nous permet de définir l'opérateur

$$\begin{aligned} \Lambda : C(I; H) &\to C(I; H) \\ \eta &\mapsto \mathcal{S}u_\eta, \end{aligned}$$

où u_η est la seule solution de l'inclusion (2.14). L'opérateur Λ vérifie une propriété importante que l'on va énoncer dans le lemme suivant.

Lemme 2.12. *Supposons que* $(\mathcal{K}), (\mathcal{A}), (\mathcal{H})$ *et* (2.4) *soient satisfaites. Alors, l'opérateur* Λ *admet un seul point fixe* $\eta^* \in C(I; H)$.

D*émonstration*. Selon le Théorème 2.5, il suffit de démonter que Λ est un opérateur **AHD**. Soient $\eta_1, \eta_2 \in C(I; H)$, d'après le Lemme 2.11, il existe deux applications $u_1 := u_{\eta_1} : I \to H$ et $u_2 := u_{\eta_2} : I \to H$ telles que

$$-u_i(t) \in N_{K(t)}(Au_i(t) + \eta_i(t)) \quad i = 1, 2, \text{ pour tout } t \in I. \tag{2.16}$$

Soit $\mathcal{J}$ un sous-ensemble compact non vide de I et soit $t \in \mathcal{J}$. Il résulte de l'hypothèse $(\mathcal{H})$ que

$$\begin{aligned} \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\| &= \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\| \\ &\leq l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}}\|u_1(t) - u_2(t)\| + L_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|ds, \end{aligned} \tag{2.17}$$

on obtient aussi de (2.16) que

$$Au_i(t) + \eta_i(t) \in K(t) \quad \text{et} \quad \langle u_i(t), Au_i(t) + \eta_i(t) - v\rangle \leq 0, \quad \forall v \in K(t), i = 1, 2. \tag{2.18}$$

En prenant, $i = 1$ (resp. $i = 2$) et $v = Au_2(t) + \eta_2(t)$ (resp. $v = Au_1(t) + \eta_1(t)$) dans (2.18) on obtient

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \langle u_1(t), Au_1(t) + \eta_1(t) - Au_2(t) - \eta_2(t)\rangle \leq 0 \\ \langle u_2(t), Au_2(t) + \eta_2(t) - Au_1(t) - \eta_1(t)\rangle \leq 0, \end{cases} \\
&\Rightarrow \langle u_1(t) - u_2(t), Au_1(t) - Au_2(t) + \eta_1(t) - \eta_2(t)\rangle \leq 0 \\
&\Rightarrow \langle u_1(t) - u_2(t), Au_1(t) - Au_2(t)\rangle + \langle u_1(t) - u_2(t), \eta_1(t) - \eta_2(t)\rangle \leq 0 \\
&\Rightarrow \langle Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle \leq \langle u_1(t) - u_2(t), \eta_2(t) - \eta_1(t)\rangle, \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

la monotonie forte de A et l'inégalité de Cauchy-Schwartz donnent

$$\begin{aligned}
\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 &\leq \frac{1}{m_A}\langle Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle \\
&\overset{(2.19)}{\leq} \frac{1}{m_A}\langle u_1(t) - u_2(t), \eta_2(t) - \eta_1(t)\rangle \\
&\leq \frac{1}{m_A}\|u_1(t) - u_2(t)\|\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|,
\end{aligned}$$

d'où (en supposant que $u_1(t) \neq u_2(t)$)

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \frac{1}{m_A}\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|.$$

L'inégalité (2.17) devient

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\| \leq \frac{l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}}}{m_A}\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\| + \frac{L_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}}}{m_A}\int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|ds,$$

grâce à l'hypothèse de petitesse (2.4), l'opérateur Λ est un opérateur **AHD**, alors il admet un seul point fixe $\eta^* \in C(I; H)$. ■

Après avoir donné tous les résultats auxiliaires nécessaires, on arrive à démontrer le résultat principale de ce chapitre énoncé dans le Théorème 2.7

D*émonstration*. Soit $\eta^* \in C(I;H)$ le seul point fixe de Λ, i.e., $\Lambda\eta^* = \eta^*$ et soit $u^* := u_{\eta^*}$ la seule solution du problème (2.14) associée à la fonction $\eta := \eta^*$. Alors, selon l'égalité $\eta^* = \Lambda\eta^* = \mathcal{S}u^*$ on obtient

$$-u^*(t) \in N_{K(t)}(Au^*(t) + \mathcal{S}u^*(t)) \text{ pour tout } t \in I,$$

ce qui signifie que $u^* : I \to H$ est une solution de problème (2.3). Pour terminer la preuve, il suffit de démontrer l'unicité de la solution. Pour cela, on utilise deux méthodes, la première est une conséquence directe de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ. La deuxième repose sur une variante du lemme de Gronwall. On suppose que le problème (2.3) admette deux solutions $u_1, u_2 \in C(I;H)$. Soit $\mathcal{J}$ un sous-ensemble compact non-vide de I. Alors, pour tout $t \in \mathcal{J}$

$$-u_i(t) \in N_{K(t)}(Au_i(t) + \mathcal{S}u_i(t)), i = \overline{1,2},$$

cela donne

$$i = 1,2 : \begin{cases} Au_i(t) + \mathcal{S}u_i(t) \in K(t) \\ \langle u_i(t), Au_i(t) + \mathcal{S}u_i(t) - v\rangle \leq 0, \quad \forall v \in K(t), \end{cases}$$

en prenant $i = 1$ (resp. $i = 2$) et $v = Au_2(t) + \mathcal{S}u_2(t)$ (resp. $v = Au_1(t) + \mathcal{S}u_1(t)$), on obtient

$$\begin{aligned} &\langle u_1(t) - u_2(t), Au_1(t) - Au_2(t) + \mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \langle Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle \leq \langle u_1(t) - u_2(t), \mathcal{S}u_2(t) - \mathcal{S}u_1(t)\rangle, \end{aligned}$$

comme l'opérateur A est m_A-fortement monotone, alors

$$m_A\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leq \langle Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle \leq \|u_1(t) - u_2(t)\|\|\mathcal{S}u_2(t) - \mathcal{S}u_1(t)\|,$$

d'où

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \frac{1}{m_A}\|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|,$$

en tenant compte de l'hypothèse $(\mathcal{H})$ on obtient

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \frac{l^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}}}{m_A}\|u_1(t) - u_2(t)\| + \frac{L^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}}}{m_A}\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|ds,$$

ce qui donne

$$(1 - \frac{l^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}}}{m_A})\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \frac{L^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}}}{m_A}\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|ds,$$

en vertu de l'hypothèse (2.4), on déduit l'existence d'une constante $C := \frac{L^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}}}{m_A - l^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}}} > 0$ telle que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| ds, \text{ pour tout } t \in \mathcal{J}.$$

En utilisant le Lemme 1.12 avec

$$T_0 = 0, \quad \Psi(t) = 0, \quad g(t) = c > 0, \quad x(t) = \|u_1(t) - u_2(t)\|,$$

on obtient

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq 0 \Rightarrow u_1(t) = u_2(t), \quad \forall t \in \mathcal{J},$$

Comme $\mathcal{J}$ a été choisi arbitrairement dans I, on déduit que $u_1(\cdot) = u_2(\cdot)$ sur I, ce qui traduit l'unicité de la solution. ■

Il est clair que la classe des opérateurs **AHD** est une version affaiblie de celle des opérateur avec retard, de plus, chaque opérateur avec retard $\mathcal{B}$ vérifie implicitement la condition de petitesse (2.4) (il suffit de prendre $l^{\mathcal{B}}_{\mathcal{J}} = 0$). Cela nous a permet de conclure le résultat suivant.

Corollaire 2.13. *Supposons que les hypothèses* $(\mathcal{K})$ *et* $(\mathcal{A})$ *soient satisfaites. On suppose également que l'opérateur* $\mathcal{S} : C(I; H) \to C(I; H)$ *est avec retard* **HD**. *Alors, le Problème* (2.3) *admet une solution unique* $u \in C(I; H)$.

Proposition 2.14. *La condition de petitesse* (2.4) *est une condition suffisante pour l'existence et l'unicité de la solution du problème* (2.3) *(elle ne représente pas un condition nécessaire)*

D*émonstration*. La preuve de cette propriété se donne via le contre-exemple suivant : on suppose que

$$H = \mathbb{R}, \quad K(t) =]-\infty, 0] \text{ pour tout } t \in I, \quad \mathbb{R} \ni x \mapsto Ax := x,$$
$$\mathcal{S}u = 2u \text{ pour tout } u \in C(I; H).$$

Il est clair que la multi-application $K(\cdot)$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{K})$, l'opérateur A vérifie la condition $(\mathcal{A})$ avec $m_A = 1, L_A = 1$ et l'opérateur $\mathcal{S}$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H})$ avec $l^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}} = 2$. Alors, la

condition de petitesse (2.4) n'est pas vérifiée car $l^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}} > m_A$. Cependant, avec les notations données ci-dessus, la fonction $u(t) = 0, t \in I$ est une solution de l'inclusion (2.3). En effet

$$N_{K(t)}\big(Au(t) + \mathcal{S}u(t)\big) = N_{K(t)}(3u(t)) = N_{]-\infty,0]}(0) = [0, +\infty[\ni 0 = u(t), \text{ pour tout } t \in I.$$

■

2.3 Processus de rafle comme un exemple

Cette section est consacrée à étudier l'existence et l'unicité de la solution pour variante du processus de rafle de premier ordre. Cette étude se base sur le résultat qui donne le caractère bien posé du Problème (2.3) établi précédemment. En plus des donnée $K(\cdot), A(\cdot)$ et $\mathcal{S}$ déjà définies dans la section précédente, on considère un autre opérateur $B : H \to H$ et un élément $u_0 \in H$ tels que :

($\mathcal{B}$) l'opérateur B est L_B-Lipschitzien avec $L_B > 0$.

Nous allons maintenant introduire une nouvelle variante du processus de rafle dont la forme est : **trouver une fonction** $u : I \to H$ **telle que**

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{K(t)}(A\dot{u}(t) + Bu(t) + \mathcal{S}\dot{u}(t)), \text{ pour tout } t \in I, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Théorème 2.15. *On suppose que les hypothèses* $(\mathcal{K}), (\mathcal{A}), (\mathcal{H}), (\mathcal{B})$ *et* (2.4) *soient vérifiées. Alors le Problème*(2.20) *admet une solution unique* $u \in C^1(I; H)$.

D*émonstration*. La preuve se base sur le résultat d'existence donné dans le Théorème 2.7. Afin d'appliquer ce dernier théorème, on introduit le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver une fonction } v : I \to H \text{ telle que} \\ -v(t) \in N_{K(t)}(Av(t) + \widetilde{\mathcal{S}}v(t)), \quad \text{pour tout } t \in I, \end{cases} \tag{2.21}$$

où $\widetilde{\mathcal{S}} : C(I; H) \to C(I; H)$ est l'opérateur défini par

$$\widetilde{\mathcal{S}}v(t) := B\left(\int_0^t v(s)ds + u_0\right) + \mathcal{S}v(t), \quad \text{pour tous } t \in I, v \in C(I; H). \tag{2.22}$$

Il est clair que $\widetilde{\mathcal{S}}$ est un opérateur **AHD** grâce à l'Exemple 2.4, alors il vérifie implicitement l'hypothèse $(\mathcal{H})$, plus précisément, on obtient

$$\|\widetilde{\mathcal{S}}v_1(t) - \widetilde{\mathcal{S}}v_2(t)\| \leq l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}}\|v_1(t) - v_2(t)\| + (L_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}} + L_B)\int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|ds,$$

pour tous $v_1, v_2 \in C(I;H)$. Cela signifie que

$$l_{\mathcal{J}}^{\widetilde{\mathcal{S}}} = l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}} < m_A \text{ selon (2.4)}$$

En appliquant le Théorème 2.7, on déduit que le problème 2.21 admet une solution unique $v \in C(I;H)$. Soit $u : I \to H$ la fonction définie par

$$u(t) := u_0 + \int_0^t v(s)ds \quad \forall t \in I. \tag{2.23}$$

alors $u \in C^1(I;H)$ et $\dot{u} = v$ sur I et $u(0) = u_0$ grâce à (1.9), par conséquent la fonction u vérifie l'inclusion (2.21) qui s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{K(t)}(A\dot{u}(t) + Bu(t) + \mathcal{S}\dot{u}(t)), \text{ pour tout } t \in I, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

ce qui montre bien que $u \in C^1(I;H)$ est la solution désirée. En ce qui concerne l'unicité de la solution, on suppose que le problème 2.20 admette deux solutions $u_i \in C^1(I;H), i = 1,2$ alors, les fonction u_i vérifient les inclusions

$$-\dot{u}_i(t) \in N_{K(t)}(A\dot{u}_i(t) + \widetilde{\mathcal{S}}\dot{u}_i(t)), \quad \text{pour tout } t \in I, i = 1,2, \tag{2.24}$$

avec

$$\widetilde{\mathcal{S}}\dot{u}_i(t) = B\left(\int_0^t \dot{u}_i(s) + u_0\right) = Bu_i(t).$$

D'après le Théorème 2.7, l'inclusion (2.24) admet une seule solution appartient à $C(I;H)$ alors, les deux fonctions $\dot{u}_1$ et $\dot{u}_2$ sont égales sur I. Par conséquent $u_1 = u_2$ sur I et par suite l'unicité de la solution. ■

Corollaire 2.16. *Soit $\mathcal{S} : C(I;H) \to C(I;H)$ un opérateur avec retard* **HD**. *On suppose queles hypothèses $(\mathcal{K}), (\mathcal{A})$ et $(\mathcal{B})$ soient vérifiées. Alors le Problème* (2.20) *admet une solution unique $u \in C^1(I;H)$.*

2.4 Hypothèse $(\mathcal{K})$: quelques exemples

Dans cette partie, on va donner quelques familles d'ensembles dépendantes du temps afin de garantir que l'hypothèse $(\mathcal{K})$ est vérifiable.

D*émonstration*.

Proposition 2.17. *Soient M un sous espace vectoriel fermé de H, $A : H \to M$ l'opérateur de projection sur M, i.e., $A = P_M(\cdot)$ et $k : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Soit $K : I \rightrightarrows H$ la multi-application définie par*

$$K(t) := \{u \in H : \|Au\| \leq k(t)\}, \text{ pour tout } t \in I.$$

Alors, $K(\cdot)$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{K})$.

Tout d'abord, on va montrer la non-vacuité, la fermeture et la convexité de $\big(K(t)\big)_{t\in I}$. Il est à noter que A est linéaire et continue grâce à l'assertion (b) de la Proposition 1.8.

- $K(t) \neq \emptyset$ pour tout $t \in I$: Pour cela, il suffit de prouver que $0 \in K(t)$ pour tout $t \in I$. On a, d'après l'inclusion $0 \in M$ (car M est un s.e.v)

$$\|A(0)\| = \|0\| = 0 \leq k(t) \Rightarrow 0 \in K(t), \forall t \in I.$$

- $K(t)$ fermé pour tout $t \in I$.

  Soient $t \in I$ et $(u_n)_n \subset K(t)$ une suite qui converge vers un élément $u \in H$. Alors

$$\begin{aligned}\|Au\| &= \|Au - Au_n + Au_n\| \leq \|A(u_n - u)\| + \|Au_n\| \\ &\leq \|A\|\|u_n - u\| + \|Au_n\| \\ &\underset{\|A\|=1}{\leq} \|u_n - u\| + k(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

  En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on trouve

$$\|Au\| \leq k(t), \quad \forall t \in I,$$

  ce qui donne $u \in K(t)$ et par suite $K(t)$ est fermé.

- $K(t)$ convexe pour tout $t \in I$.

  Soient $t \in I$, $\lambda \in [0,1]$ et $u, v \in K(t)$, alors

$$\begin{aligned}\|A(\lambda u + (1-\lambda)v)\| &= \|\lambda Au + (1-\lambda)Av\| \\ &\leq \lambda\|Au\| + (1-\lambda)\|Av\| \\ &\leq \lambda k(t) + (1-\lambda)k(t) = k(t),\end{aligned}$$

  ce qui traduit la convexité de $K(t)$.

On va établir le reste de la preuve en deux étapes. Tout d'abord, grâce à la Proposition 1.8, on a $H = M \oplus M^{\perp}$ et $A = A^2$.

Étape 1 : Pour tout $t \in I$ et tout $u \in H$, on montre que

$$P_{K(t)}u = \begin{cases} u - Au + \frac{k(t)}{\|Au\|}Au & \text{si} \quad u \notin K(t), \\ u & \text{sinon .} \end{cases} \tag{2.25}$$

On fixe $t \in I$ et $u \in H$ et on pose $K := K(t)$. On suppose que $u \notin K$ (cela entraine que $u \neq 0$ car $0 \in K$), et on prend $v := u - Au + \frac{k(t)}{\|Au\|}Au$, alors

$$\begin{aligned} &Av = Au - A^2u + \frac{k(t)}{\|Au\|}A^2u = Au - Au + \frac{k(t)}{\|Au\|}Au = \frac{k(t)}{\|Au\|}Au, \\ &\Rightarrow \|Av\| = k(t) \\ &\Rightarrow v \in K. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'égalité $v = P_K(u)$, il suffit d'utiliser la caractérisation (1.2) en prouvant l'égalité $\langle v-u, w-v\rangle \geq 0$ pour tout $w \in K$. À cette fin, on prend un élément $w \in K$, alors

$$\begin{aligned}\langle v-u, w-v\rangle &= \langle u - Au + \frac{k(t)}{\|Au\|}Au - u, w-v\rangle \\ &= \Big(\frac{k(t)}{\|Au\|} - 1\Big)\langle Au, w-v\rangle,\end{aligned} \tag{2.26}$$

mais

$$\begin{aligned}\langle Au, w-v\rangle &= \langle Au, w - Aw + Aw - u + Au - \frac{k(t)}{\|Au\|}Au\rangle \\ &= \langle Au, w-Aw\rangle + \langle Au, Aw\rangle - \langle Au, u-Au\rangle - \langle Au, \frac{k(t)}{\|Au\|}Au\rangle,\end{aligned}$$

d'autre part

$$u = u - Au + Au = (u - Au) + P_M(u),$$

mais $H = M \oplus M^\perp$, i.e,

$$\begin{cases} \text{si } \alpha = P_M(\alpha) + \beta & \text{alors } \beta = P_{M^\perp}(\alpha) \in M^\perp \\ \text{si } \alpha = \beta + P_{M^\perp}(\alpha) & \text{alors } \beta = P_M(\alpha) \in M. \end{cases}$$

Par conséquent $u - Au = P_{M^\perp}(u) \in M^\perp$ donc $\langle Au, u - Au\rangle = \langle P_M(u), P_{M^\perp}(u)\rangle = 0$, aussi

$$\begin{aligned} & w = w - Aw + Aw = w - Aw + P_M(w) \\ & \Rightarrow w - Aw = P_{M^\perp}(w) \in M^\perp \\ & \Rightarrow \langle Au, w - Aw\rangle = \langle P_M(u), P_{M^\perp}(w)\rangle = 0, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \langle Au, w - v\rangle &= \langle Au, Aw\rangle - \langle Au, \frac{k(t)}{\|Au\|}Au\rangle = \langle Au, Aw\rangle - \frac{k(t)}{\|Au\|}\langle Au, Au\rangle \\ &\leq \|Au\|\|Aw\| - k(t)\|Au\| \\ &= (\|Aw\| - k(t))\|Au\|, \end{aligned}$$

comme $w \in K$ alors $\|Aw\| - k(t) \leq 0$ donc

$$\langle Au, w - v\rangle \leq 0, \text{ pour tout } w \in K. \tag{2.27}$$

On a également

$$\begin{aligned} u \notin K &\Rightarrow \|Au\| > k(t) \\ &\Rightarrow \frac{k(t)}{\|Au\|} - 1 < 0, \end{aligned} \tag{2.28}$$

il résulte de (2.26), (2.27) et (2.28) que

$$\langle v - u, w - v\rangle = \Big(\frac{k(t)}{\|Au\|} - 1\Big)\langle Au, w - v\rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } w \in K.$$

Ce qui donne le résultat désiré.

Étape 2. On montre que pour tout $u \in H$

$$\|P_{K(s)}u - P_{K(t)}u\| \leq |k(t) - k(s)|, \text{ pour tous } t, s \in I. \tag{2.29}$$

Si $k(t) = k(s)$, alors $K(t) = K(s)$ et par conséquent (2.29) est vérifiée. Supposons maintenant que $k(t) \neq k(s)$, sans perdre la généralité, on peut supposer que $k(s) < k(t)$. On distingue trois cas :

a) $\|Au\| \leq k(s) < k(t)$, alors $u \in K(s)$ et $u \in K(t)$ et par suite $P_{K(t)}u = P_{K(s)}u = u$, ce qui implique (2.29).

b) $k(s) < \|Au\| \leq k(t)$ alors

$$u \notin K(s) \text{ et } u \in K(t),$$

en vertu de (2.25) on obtient

$$P_{K(s)}u = u - Au + \frac{k(s)}{\|Au\|}Au \quad \text{et} \quad P_{K(t)}u = u,$$
$$\Rightarrow \|P_{K(s)}u - P_{K(t)}u\| = \left|\frac{k(s)}{\|Au\|} - 1\right| \|Au\| = \Big(1 - \frac{k(s)}{\|Au\|}\Big)\|Au\| = \|Au\| - k(s),$$

d'où

$$\|P_{K(s)}u - P_{K(t)}u\| \leq |k(t) - k(s)|.$$

c) $k(s) < k(t) < \|Au\|$ alors $u \notin K(s)$ et $u \notin K(t)$. Donc

$$P_{K(s)}u = u - Au + \frac{k(s)}{\|Au\|}Au \quad \text{et} \quad P_{K(t)}u = u - Au + \frac{k(t)}{\|Au\|}Au,$$

cela donne

$$\|P_{K(s)}u - P_{K(t)}u\| = \Big\|\frac{k(s)}{\|Au\|}Au - \frac{k(t)}{\|Au\|}Au\Big\| = |k(t) - k(s)|,$$

ce qui termine la preuve de l' étape 2. Finalement, pour tout suite $(t_n)_n \subset I$ convergeant vers $t \in I$, on a

$$\|P_{K(t_n)}u - P_{K(t)}u\| \leq |k(t) - k(t_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où cette dernière convergence est due à la continuité de $k(\cdot)$. ■

À la lumière de ce qu'est présenté par la Proposition 2.17, nous allons donner un exemple illustratif qui montre la vérifiabilité de l'hypothèse ($\mathcal{K}$). Avant d'aller plus loin, on introduit la liste des notations suivante : Pour un entier $d \in \{1, 2, 3\}$, on note par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs

symétriques d'ordre deux, ce qu'est équivalent à l'espace des matrices symétriques d'ordre d. Sur cet espace, on définit le produit scalaire et la norme :

$$\begin{cases} \sigma \cdot \tau = \sigma_{ij}\tau_{ij} := \sum\limits_{1\leq i,j\leq d} \sigma_{ij}\tau_{ij}, \\ \|\tau\| = \sqrt{\tau \cdot \tau} \end{cases} \quad \text{pour tous } \sigma = (\sigma_{ij}), \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, 1 \leq i, j \leq d.$$

Aussi, on définit le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ ainsi que la norme associée :

$$u \cdot v = u_i v_i := \sum_{i=1}^{d} u_i v_i, \quad \|v\| = \sqrt{v \cdot v} \quad \text{pour } u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^d.$$

Pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{S}^d$, on note par ε^D la projection orthogonale de ε, appelé aussi le déviateur de ε (ε^D est un opérateur matriciel utilisé en mécanique des milieux continus, plus précisément en plasticité) que l'on définit par

$$\varepsilon^D = \varepsilon - \frac{\operatorname{tr}(\varepsilon)}{d} I_d.$$

où $\operatorname{tr}(\varepsilon) = \varepsilon_{ii} := \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_{ii}$ est la trace de ε et I_d représente la matrice identité d'ordre d. On définit également l'ensemble M par

$$M = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \quad \sigma_{ii} = 0\}. \tag{2.30}$$

Corollaire 2.18. *Soit $k : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et $K : I \rightrightarrows \mathbb{S}^d$ la multi-application définie par*

$$K(t) = \{\varepsilon \in \mathbb{S}^d : \quad \|\varepsilon^D\| \leq k(t)\}, \text{ pour tout } t \in I. \tag{2.31}$$

Alors, $K(\cdot)$ vérifie l'hypothèse ($\mathcal{K}$) sur l'espace $H = \mathbb{S}^d$. L'ensemble $K(t)$ définie dans (2.31) s'appelle **The Von Mises convex**, *il est très utilisé dans la mécanique des solides.*

D*émonstration*. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{S}^d$, les élément diagonaux de ε^D ont la forme

$$\varepsilon^D_{ii} = \varepsilon_{ii} - \frac{\operatorname{tr}(\varepsilon)}{d},$$

alors

$$\operatorname{tr}(\varepsilon^D) = \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_{ii} - d\frac{\operatorname{tr}(\varepsilon)}{d} = \operatorname{tr}(\varepsilon) - \operatorname{tr}(\varepsilon) = 0$$

donc $\varepsilon^D \in M$ où M est l'ensemble défini dans (2.30) et par suite la projection de ε^D sur M est ε^D lui-même, i.e., $P_M(\varepsilon^D) = \varepsilon^D$. En appliquant la Proposition 2.17 avec $H = \mathbb{S}^d$ et l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} A: & \mathbb{S}^d & \to & M \\ & \varepsilon & \mapsto & A\varepsilon = \varepsilon^D = P_M(\varepsilon^D), \end{array}$$

on déduit que la multi-application $K(\cdot)$ vérifie l'hypothèse ($\mathcal{K}$). ■

Le deuxième exemple qui montre la vérifiabilité de la condition ($\mathcal{K}$) se donne par la proposition suivante.

Proposition 2.19. *Soient K_0 un sous-ensemble convexe fermé non vide de H, $a : I \to]0, +\infty[$ une fonction continue et $f \in C(I; H)$. Soit $K : I \rightrightarrows H$ la multi-application définie par*

$$K(t) := a(t)K_0 + f(t), \qquad \textit{pour tout } t \in I, \tag{2.32}$$

alors, $K(\cdot)$ vérifie l'hypothèse ($\mathcal{K}$).

D*émonstration*. Il clair que les ensembles $\big(K(t)\big)_{t\in I}$ héritent la non-vacuité, la fermeture et la convexité de K_0. Soient $t \in I$ et $u \in H$, soit $z_t \in K(t)$ la projection de u sur $K(t)$ alors, il existe un seul élément $z_0 \in K_0$ tel que $z_t = a(t)z_0 + f(t)$. Cela donne, d'après la définition de la projection, que

$$\begin{aligned}
&\|z_t - u\| \le \|v_t - u\|, \text{ pour tout } v_t \in K(t) \\
&\Rightarrow \|a(t)z_0 + f(t) - u\| \le \|\underbrace{a(t)v_0 + f(t)}_{v_t} - u\|, \quad \forall v_0 \in K_0 \\
&\overset{a(t)\neq 0}{\Longrightarrow} \|z_0 - \frac{u - f(t)}{a(t)}\| \le \|v_0 - \frac{u - f(t)}{a(t)}\|, \quad \forall v_0 \in K_0 \\
&\overset{z_0\in K_0}{\Longrightarrow} \|z_0 - \frac{u - f(t)}{a(t)}\| = \min_{v_0\in K_0} \|v_0 - \frac{u - f(t)}{a(t)}\| \\
&\Leftrightarrow z_0 = P_{K_0}\Big(\frac{u - f(t)}{a(t)}\Big).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$P_{K(t)}u = z_t = a(t)P_{K_0}\Big(\frac{u - f(t)}{a(t)}\Big) + f(t).$$

Soit $(t_n)_n \subset I$ une suite qui converge vers $t \in I$, alors

$$\begin{aligned}
\left\|P_{K(t_n)}u - P_{K(t)}u\right\| &= \left\|a(t_n)P_{K_0}\left(\frac{u-f(t_n)}{a(t_n)}\right) + f(t_n) - a(t)P_{K_0}\left(\frac{u-f(t)}{a(t)}\right) - f(t)\right\| \\
&= \left\|a(t_n)P_{K_0}\left(\frac{u-f(t_n)}{a(t_n)}\right) - a(t_n)P_{K_0}\left(\frac{u-f(t)}{a(t)}\right)\right. \\
&\left. + a(t_n)P_{K_0}\left(\frac{u-f(t)}{a(t)}\right) - a(t)P_{K_0}\left(\frac{u-f(t)}{a(t)}\right) + f(t_n) - f(t)\right\| \\
&\leq a(t_n)\left\|P_{K_0}\left(\frac{u-f(t_n)}{a(t_n)}\right) - P_{K_0}\left(\frac{u-f(t)}{a(t)}\right)\right\| \\
&+ \left|a(t_n) - a(t)\right|\left\|P_{K_0}\left(\frac{u-f(t)}{a(t)}\right)\right\| + \|f(t_n) - f(t)\| \\
&\leq a(t_n)\left\|\frac{u-f(t_n)}{a(t_n)} - \frac{u-f(t)}{a(t)}\right\| + \|f(t_n) - f(t)\| + \left|a(t_n) - a(t)\right|\|z_0\|.
\end{aligned}$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ tout en utilisant le fait que $a(\cdot)$ et $f(\cdot)$ sont continues, on déduit la convergence

$$P_{K(t_n)}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P_{K(t)}u.$$

■

De la proposition 2.19, on dérive le résultat suivant.

Corollaire 2.20. *Soient K_0 un sous-ensemble convexe fermé non vide de H et $f \in C(I;H)$. Soit $K : I \rightrightarrows H$ la multi-application définie par*

$$K(t) := K_0 + f(t), \text{ pour tout } t \in I.$$

Alors, $K(\cdot)$ vérifié l'hypothèse ($\mathcal{K}$).

Chapitre 3

Application : une loi de comportement viscoélastique

Ce chapitre est consacré à étudier une loi de comportement viscoélastique. Cette étude est une application du résultat abstrait donné par le Corollaire 2.13. Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute un série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Dans l'espace $(\mathbb{S}^d, \|\cdot\|)$, la loi que l'on va étudier dans ce chapitre est de la forme

$$\sigma(t) \in \mathcal{A}\varepsilon(t) + \int_0^t b(t-s)\varepsilon(s)ds + \partial\psi_{K(t)}(\varepsilon(t)), \text{ pour tout } t \in I, \tag{3.1}$$

où

- $\sigma : I \to \mathbb{S}^d$ représente le tenseur des contraintes,
- $\varepsilon : I \to \mathbb{S}^d$ le tenseur des déformations,
- $\mathcal{A}$ est un tenseur d'ordre 4, ses composantes (a_{ijkl}) s'appellent "coefficients de viscosité",
- $b : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dite de relaxation et $\psi_{K(t)}$ la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé $K(t) \subset \mathbb{S}^d$,
- $\partial\psi_{K(t)}$ représente le sous-différentiel de la fonction $\psi_{K(t)}$ au sens d'analyse convexe.

Afin d'étudier l'inclusion (3.1), on considère la liste des hypothèses suivante

$$(\mathcal{H}_1)\begin{cases} \mathcal{A} \text{ est symétrique défini positif, i.e.,} \\ (a)\, \mathcal{A} : \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\ (b)\, \mathcal{A}\varepsilon = (a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) \quad \text{pour tout } \varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \quad 1 \leq i,j,k,l \leq d. \\ (c)\, a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij} \in \mathbb{R}. \\ (d) \text{ il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \quad \mathcal{A}\varepsilon \cdot \varepsilon \geq m_{\mathcal{A}}\|\varepsilon\|^2, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \end{cases}$$

$$(\mathcal{H}_2) \quad b : I \to \mathbb{R} \quad \text{est une fonction continue.}$$

$$(\mathcal{H}_3)\begin{cases} K(t) = \{\varepsilon \in \mathbb{S}^d : \|\varepsilon^D\| \leq k(t)\} \quad \forall t \in I. \\ k : I \to \mathbb{R}_+ \text{ est une fonction continue .} \end{cases}$$

Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, le tenseur $\mathcal{A}$ est inversible et son inverse, noté $\mathcal{A}^{-1}$, est aussi symétrique défini positif, de plus il est linéaire continue. Il résulte aussi de $(\mathcal{H}_3)$ que la famille $(K(t))_{t\in I}$ est Von Mises convex grâce au corolaire 2.18.

D'après l'inclusion (3.1), le tenseur des contraintes $\sigma(\cdot)$ peut s'écrire sous la forme

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t), \text{ pour tout } t \in I$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(t) + \int_0^t b(t-s)\varepsilon(s)ds, \\ \sigma_2(t) &\in \partial\psi_{K(t)}(\varepsilon(t)) = N_{K(t)}(\varepsilon(t)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Il est à noter que $\sigma_1(\cdot)$ et $\sigma_2(\cdot)$ s'appellent la partie régulière et la partie non-régulière de $\sigma(\cdot)$ respectivement. Soit $\widetilde{\mathcal{S}} : C(I;\mathbb{S}^d) \to C(I;\mathbb{S}^d)$ l'opérateur défini par

$$\widetilde{\mathcal{S}}\varepsilon(t) = \int_0^t b(t-s)\varepsilon(s)ds, \quad \text{pour tout } t \in I,$$

alors, $\widetilde{\mathcal{S}}$ est un opérateur avec retard **HD**. En effet, soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in C(I;\mathbb{S}^d)$ et soit $\mathcal{J}$ un

sous-ensemble compact de I alors, pour tout $t \in \mathcal{J}$

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\mathcal{S}}\varepsilon_1(t) - \widetilde{\mathcal{S}}\varepsilon_2(t)\| &= \Big\| \int_0^t b(t-s)\varepsilon_1(s)ds - \int_0^t b(t-s)\varepsilon_2(s)ds \Big\| \\
&= \Big\| \int_0^t b(t-s)(\varepsilon_1(s) - \varepsilon_2(s))ds \Big\| \\
&\leq \int_0^t \|b(t-s)(\varepsilon_1(s) - \varepsilon_2(s))\|ds \leq \int_0^t |b(t-s)|\|\varepsilon_1(s) - \varepsilon_2(s)\|ds \\
&\leq \max_{r\in\mathcal{J}} |b(r)| \int_0^t \|\varepsilon_1(s) - \varepsilon_2(s)\|ds \\
&= \underbrace{\|b\|_{C(\mathcal{J};\mathbb{R})}}_{L_{\mathcal{J}}>0} \int_0^t \|\varepsilon_1(s) - \varepsilon_2(s)\|ds.
\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 2.6, on obtient que l'opérateur $\mathcal{A} + \widetilde{\mathcal{S}} : C(I;\mathbb{S}^d) \to C(I;\mathbb{S}^d)$ est inversible et

$$(\mathcal{A} + \widetilde{\mathcal{S}})^{-1} = \mathcal{A}^{-1} + \mathcal{R} : C(I;\mathbb{S}^d) \to C(I;\mathbb{S}^d)$$

où $\mathcal{R} : C(I;\mathbb{S}^d) \to C(I;\mathbb{S}^d)$ est un opérateur avec retard. D'après la définition de $\widetilde{S}$, on a

$$\sigma_1(t) = \mathcal{A}\varepsilon(t) + \widetilde{\mathcal{S}}\varepsilon(t) = (\mathcal{A} + \widetilde{\mathcal{S}})\varepsilon(t)$$

alors

$$\varepsilon(t) = \mathcal{A}^{-1}\sigma_1(t) + \mathcal{R}\sigma_1(t), \tag{3.3}$$

on pose $\omega(\cdot) := -\sigma_2(\cdot)$ alors

$$\sigma_1(t) = \sigma(t) - \sigma_2(t) = \sigma(t) + \omega(t),$$

il s'ensuit de (3.3) que

$$\varepsilon(t) = \mathcal{A}^{-1}\sigma(t) + \mathcal{A}^{-1}\omega(t) + \mathcal{R}\big(\sigma(t) + \omega(t)\big),$$

en tenant compte de (3.2) et l'égalité $\omega(\cdot) := -\sigma_2(\cdot)$ on obtient

$$-\omega(t) \in N_{K(t)}\Big(\mathcal{A}^{-1}\omega(t) + \mathcal{A}^{-1}\sigma(t) + \mathcal{R}\big(\sigma(t) + \omega(t)\big)\Big), \text{ pour tout } t \in I.$$

Par conséquent, notre problème consiste à chercher une fonction $\omega : I \to \mathbb{S}^d$ telle que

$$-\omega(t) \in N_{K(t)}\Big(\mathcal{A}^{-1}\omega(t) + \mathcal{A}^{-1}\sigma(t) + \mathcal{R}\big(\sigma(t) + \omega(t)\big)\Big), \text{ pour tout } t \in I. \tag{3.4}$$

Théorème 3.1. *Supposons que* $(\mathcal{H}_1), (\mathcal{H}_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$ *soient satisfaites. On suppose également que* $\sigma \in C(I;\mathbb{S}^d)$ *alors, le problème* (3.4) *admet une solution unique* $\omega \in C(I;\mathbb{S}^d)$.

D*émonstration*. Il suffit d' utiliser le corollaire 2.13 avec $H = \mathbb{S}^d$, $A = \mathcal{A}^{-1}$,

$$K(t) = \begin{cases} \{\varepsilon \in \mathbb{S}^d : \|\varepsilon^D\| \leq k(t)\} \quad \forall t \in I. \\ \\ k : I \to \mathbb{R}_+ \text{ est une fonction continue} \end{cases}$$

et $\mathcal{S} : C(I;\mathcal{S}^d) \to C(I;\mathbb{S}^d)$ avec

$$\mathcal{S}v(t) = \mathcal{A}^{-1}\sigma(t) + \mathcal{R}(\sigma(t) + v(t)), \text{ pour tous } v \in C(I;\mathbb{S}^d) \text{ et } t \in I.$$

Avec ces notations, le problème (3.4) devient

$$-\omega(t) \in N_{K(t)}\Big(\mathcal{A}^{-1}\omega(t) + \mathcal{S}\omega(t)\Big), \text{ pour tout } t \in I.$$

- l'hypothèse $(\mathcal{K})$ est satisfaite grâce à la condition $(\mathcal{H}_3)$ et le corollaire 2.18.
- pour tout compact $\mathcal{J} \subset I$ et tous $v_1, v_2 \in C(I;\mathbb{S}^d)$ et tout $t \in \mathcal{J}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}v_1(t) - \mathcal{S}v_2(t)\| &= \big\|\mathcal{A}^{-1}\sigma(t) + \mathcal{R}\big(\sigma(t) + v_1(t)\big) - \mathcal{A}^{-1}\sigma(t) + \mathcal{R}\big(\sigma(t) + v_2(t)\big)\big\| \\ &= \big\|\mathcal{R}\big(\sigma(t) + v_1(t)\big) - \mathcal{R}\big(\sigma(t) + v_2(t)\big)\big\| \\ &\leq L^{\mathcal{R}}_{\mathcal{J}} \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\| ds, \end{aligned}$$

  donc $\mathcal{S}$ est **HD**.

Par conséquent, toutes les conditions du corollaire 2.13 sont vérifiées, alors le problème (3.4) admet une solution unique $\omega \in C(I;\mathbb{S}^d)$. ■

Bibliographie

[1] S. Migorski, A. Ochal, M. Sofonea, A class of variational-hemivariational inequalities in relexive Banach spaces, Journal of Elasticity 127(2017), 151–178.

[2] S. Migorski, A. Ochal, M. Sofonea, History-dependent variationalhemivariational inequalities in contact mechanics, Nonlinear Anal. Real World Appl., 22(2015), 604–618.

[3] S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Nonlinear Inclusions and Hermivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems. Advances in Mechanics and Mathimatics, vol. 26. Springer, New York (2013).

[4] S. Migórski, M. Sofonea, S. Zeng, Well-posedness of history-dependent sweeping processes. SIAMJ. Math. Anal. **51**, 1082-1107 (2019).

[5] M.D.P Monteiro Marques, Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems. Shocks and Dry friction. PProgress in Nonlinear Differential Equations and Their Application, vol. 9. Birkhäuser, Basel (1993).

[6] J.J. Moreau, Evolution Problem associated with a moving convex in a Hilbert space. J. Differ. Equ. **26**, 347-374 (1977).

[7] J. J. Moreau, On unilateral constraints, friction and plasticity, in New Variational Techniques in Mathematical Physics, G. Capriz and G. Stampacchia, eds., C.I.M.E. II Ciclo 1973, Edizioni Cremonese, Rome, (1974), 171–322.

[8] J. J. Moreau, Standard Inelastic Shocks and the Dynamics of Unilateral Constraints, Unilateral Problems in Structural Analysis, Springer, Vienna, (1985), 173–221.

[9] J.J. Moreau, On unilateral constraints, friction and plasticity. In : Capriz, G., Stampacchia, G. (eds.) New Variational Techniques in Mathimatical Physics. C.I.M.E. II, Ciclo 1973, pp. 173-322. Edizione Cremonese, Roma (1974).

[10] J.J. Moreau, Rafle par un convexe variable I. Travaux Sém. Anal. Convexe Montpellier (1971). Exposé 15.

[11] Z. Naneiwicz, P.D. Panagiotopoulos, Mathematical theory of Hermivariationat Inequalities and Applications. Dekker, New York (1995).

[12] P.D. Panagiotopoulos, Hermivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering . Springer, Berlin (1993).

[13] P.D. Panagiotopoulos, Inequality Problems in Mechanics and Applications. Birkhäuser, Boston (1985).

[14] M. Sofonea and A. Matei, History-dependent quasivariational inequalities arising in Contact Mechanics, European Journal of Applied Mathematics 22 (2011), 471-491.

[15] M. Sofonea, A. Matei, Mathematical Models in Contact Mechanics, London Math. Soc. Lecture Notes, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (2012).

[16] M. Sofonea, S. Migórski, Variational-Hermivariational Inequalilities with Applications. Pure and Applied Mathematics. Chapman & Hall/CRC Press, London/Boca Raton (2018).

[17] A.A. Tolstonogov, Sweeping process with unbounded nonconvex perturbation. Nonlinear Anal. **108**, 291-301 (2014).