République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre :
№ de série :

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Relaxation et densité

par

Belal Kaouter

Soutenu le **09/09/2021**

Devant le jury

Président	F. Aliouane	MCA. Université de Jijel
Encadreur	W. Boukrouk	MCB. Université de Jijel
Examinateur	N. Fetoussi	MCB. Université de Jijel

Promotion **2020/2021**

Remerciements

Avant tout, je remercie Allah le tout puissant qui m’ a guidé tout au long de ma vie, qui m’ a permis de m’ instruire et d’arriver aussi loin dans les études, qui m’ a donné le courage et la patience pour traverser tous les moments difficiles, et qui m’ a permis d’achever ce travail.

C’est avec un grand honneur que je remercie mon enseignante et directrice Madame ***Wafiya Boukrouk***, Maitre de conférence à l’université de Jijel, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter mes réflexions.

Je tiens à remercier Madame ***Aliouane Fatine***, Maitre de conférence à l’université de Jijel, d’avoir accepté la présidence du jury de mon travail, qu’elle trouve ici toutes mes expressions respectueuses.

Je remercie également Madame ***Fetoussi Noura*** Maitre de conférence à l’université de Jijel, de m’ avoir fait l’honneur de faire partie des membres du jury et d’examiner ce travail. Je tiens à vous remercier.

Mes remerciements les plus sincères s’adressent à ma familles pour son soutien sans faille pour l’équilibre qu’elle m’a apporté et pour ses encouragements.

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'études

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur. à toi ***mon père*** *je t'aime.*

A la lumière de ma vie, la source de mes efforts et mon bonheur, ***maman*** *que j'adore.*

A mes grands parents ***Alarbi, Warda*** *pour leur soutien moraux et pour leurs encouragements, que Dieu nous protège.*

Aux personnes dont j'ai bien aimé leur présence dans ce jour, à tous mes très chers frères : ***Abdelbari, Abdalwadoud, Abdelbadie,Abdeladime****. A ma sœure* ***Tessnime****.*

A ***mes tantes, mes oncles et leurs enfants****. A toutes mes amies :* ***Nousiba, Meriem, Chaima, Nessrine, Fatima et Houda****. Elles n'ont cessé de consentir pour moi, par leur encouragement et leur profonde affection. Qu'elles m'ont donné l'avantage de me consacrer entièrement et uniquement à mes études. Je vous souhaite du fond de mon cœur une belle vie plein de joie, de bonheur et de succès. A toute personne que j'ai une place dans son cœur que je connais, j'estime et j'aime.*

A tous qui m'aiment et que j'aime.

......

Table des matières

Introduction

En mathématiques, une méthode de "*relaxation*" est une méthode d'optimisation qui consiste à remplacer une contrainte stricte en contrainte moins stricte, voir à la supprimer, et ils existent plusieurs techniques pour faire cela. Dans ce mémoire, nous nous intéressons justement à la relaxation d'une inclusion différentielle du premier ordre, à travers l'enveloppe convexe fermée en convexifiant le second membre. Le problème traité a été étudié dans [11] en 1987, où l'auteur a considéré l'inclusion

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad p.p.\ t \in I \\ x(0) = a, \end{cases}$$

où E est un espace de Banach séparable de dimension quelconque, $F : I \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application, $a \in E$, et $I = [0, T[$ un intervalle pas forcément borné, puis il a considéré l'inclusion

$$(2)\begin{cases} \dot{x}(t) \in \overline{co}F(t, x(t)), \quad p.p.\ t \in I \\ x(0) = a, \end{cases}$$

où $\overline{co}$ est l'enveloppe convexe fermée. Le problème (2) représente une forme relaxée du problème (1) : on est plus à l'aise, voir plus relaxés, face au problème (2) du fait d'avoir la convexité qui facilite les choses. Eu même temps, on est pas loin du problème (1) car justement il y a une relation entre les solutions des deux : l'auteur dans [11] a pu montrer que sous certaines conditions l'ensemble, S_1, des solutions de (1) est non vide et il est "dense" dans, S_2, celui des solutions de (2), pour la topologie de la convergence uniforme sur chaque sous-intervalle compact de I. Ceci veut dire qu'en fait, toute solution du problème relaxé peut être approchée autant que souhaité par une solution du problème principal. L'étude détaillée de ce résultat de relaxation fait l'objet principal de ce mémoire, et que nous avons abordé au dernier chapitre.

Pour la preuve, l'auteur dans [11] s'est basé sur un théorème de densité qui généralise en fait, dans la dimension quelconque, des résultats classiques dans la dimension finie ([14], [26]), et aussi d'autres dans le cas général ([6], [25] et [23]). Ce dernier dit que pour une multi-application mesurable $\Gamma : I \rightrightarrows E$, si l'ensemble des sélections intégrables de Γ, S^1_Γ est non vide, alors il est dense dans son enveloppe convexe fermée $\overline{co}S^1_\Gamma$ pour la norme $\|f\|_{max} = \max\limits_{t',t''\in I} \parallel \int_{t'}^{t''} f(s)ds \parallel_E$, Le théorème de densité en question a été largement traité au cours du deuxième chapitre de ce mémoire.

Dans ce papier, on procède comme suit : on commence par rappeler des notions de base à travers un premier chapitre, puis le théorème de densité comme résultat intermédiaire à travers le deuxième chapitre, et on termine par le théorème de relaxation principal au dernier chapitre.

Notons que des résultats de relaxation similaires ont été établis en dimension finie (voir exemple [12]), où le second membre F est supposé à valeurs compactes, et où les preuves se basent sur la dimension finie contrairement à [11].

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous précisons nos notations et rappelons certaines définitions, propositions et théorèmes dont on aura besoin tout au long de ce mémoire.

1.1 Notations générales

On note

• $I = [0, T]$ un intervalle de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
• $\mathbb{R}^d$ l'ensemble des vecteurs de dimension d, à coordonnées réelles.
• $1\!\!\mathrm{I}_A$ ou χ_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$1\!\!\mathrm{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A; \\ 0 & si\ x \notin A. \end{cases}$$

• (X, θ) un espace topologique.
• (X, d) un espace métrique.
• $B_X(y, r)$ la boule ouverte de X de centre y et de rayon r.
• $\overline{B}_X(y, r)$ la boule fermée de X de centre y et de rayon r.
• (X, Σ) un espace mesurable.
• (X, Σ, μ) un espace mesuré.

Soit X un espace topologique. On note

• $\mathcal{B}(X)$ la tribu Borélienne sur X.
• $\mathcal{P}_{cl}(X)$ l'ensemble des parties fermées de X.

Soit E un espace de Banach et $\|\cdot\|$ la norme de E. On note par

• $C(I, E)$ l'espace de Banach de toutes les applications continues définies sur I à valeurs dans E, muni de la distance de la convergence uniforme d_u définie par $d_u(f, g) = \max\limits_{t\in I} \|f(t) - g(t)\|_E$, et qui est issue de la norme $\|f(\cdot)\| = \sup\limits_{t\in I} \|f(t)\|_E$.
• $L^1_E(I)$ l'espace de Banach de toutes les applications intégrables au sens de Bochner définies sur I à valeurs dans E, muni de la norme usuelle $\|f(\cdot)\|_1 = \int\limits_I \|f(s)\|_E \, ds$ et de la norme $\|f(\cdot)\|_{max} = \max\limits_{t',t"\in I} \| \int_{t'}^{t"} f(s)ds \|_E$.
• $AC^{1,1}(I, E)$ l'espace des applications absolument continues définies sur I à valeurs dans E, dérivable presque partout avec $f' \in L^1_E(I)$.
• $co(A)$ l'enveloppe convexe de A $(A \subset E)$.
• $\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermée de A.

1.2 Espace topologique, espace normé et espace métrique

Définition 1.1. *Soit X un ensemble non vide. Soit θ une famille de parties de $X(\theta \subset \mathcal{P}(X))$. On dit que θ est une topologie sur X si et seulement si*

1. $\emptyset \in \theta$, $X \in \theta$.
2. $\forall (A_i)_{i\in I} \subset \theta \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \theta$ *(stabilité par union quelconque).*
3. $\forall (A_i)_{i=1,\cdots,n} \subset \theta \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \theta$ *(stabilité par intersection finie).*

Définition 1.2. *Soit θ une topologie sur X. Alors (X, θ) est appelé un espace topologique. On appelle ensemble ouvert de X tout ensemble appartenant à θ, c'est-à-dire*

$$A \text{ est ouvert dans } X \Leftrightarrow A \in \theta.$$

Définition 1.3. *Soit (X, θ) un espace topologique et $B \subset X$. On dit que B est fermé dans X si et seulement si son complémentaire C_X^B est ouvert.*

Définition 1.4. *Soient (X_1, θ_1) et (X_2, θ_2) deux espaces topologiques et soit*

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2)/x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}.$$

1. *On appelle ouvert premier tout ensemble*

$$O = \{O_1 \times O_2/ \ O_1 \in \theta_1, O_2 \in \theta_2\}.$$

2. On appelle ouvert de X tout union d'ouverts premier, i.e.

$$\theta = \{\cup_k (O_1^k \times O_2^k) / \ O_1^k \in \theta_1, O_2^k \in \theta_2\}$$

est une topologie sur X appelée la topologie produit de $\theta_1 \times \theta_2$ et le couple (X, θ) est appelée l'espace topologique produit de (X_1, θ_1) et (X_2, θ_2).

Définition 1.5. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ et soit*

$$\begin{aligned} \varphi : & E \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

On dit que φ est une norme sur E si et seulement si

1. *Pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.*

2. *Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$.*

3. *Pour tout $x, y \in E$, on a $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$.*

$(E, \varphi(x))$ est appelé espace normé.

Définition 1.6. *Soit X un ensemble non vide quelconque. On appelle distance sur X une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ qui à $(x, y) \in X \times X$ fait correspondre le nombre réel fini positif $d(x, y)$ appelé distance de x à y, et satisfaisant aux trois conditions suivantes*

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$ *(relation de symétrie),*

(iii) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, x)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.7. *On appelle espace métrique le couple (X, d) formé d'un ensemble X et une distance d définie sur X.*

Définition 1.8. *Soit (X, d) un espace métrique, soient $x_0 \in X$ et $r > 0$. On appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r, notée $B_X(x_0, r)$ l'ensemble*

$$\{x \in X / \ d(x_0, x) < r\}.$$

Définition 1.9. *Soient (X, d_X) un espace métrique, et A une partie non vide de X.*
La distance d'un point $x \in X$ à l'ensemble A est donnée par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d_X(x, a).$$

Définition 1.10. ***(L'adhérence)****. Soient (X, d_X) un espace métrique, et A une partie non vide de X. On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$, le sous-ensemble de X défini par*

$$\overline{A} = \{x \in X,\ d(x, A) = 0\}.$$

Proposition 1.11. *Soient A une partie non vide d'un espace métrique (X, d_X) et $x \in X$. Alors*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0.$$

Définition 1.12. *Soit (E, d_X) un espace métrique et soit $(x_n)_n \subset E$. On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}; \quad p > q \geqslant n_0 \Rightarrow d_X(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Définition 1.13. *Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (X, d_X), Soit $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in N}$ converge vers $x \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow d_X(x_n, x) < \varepsilon.$$

Définition 1.14. *Un espace métrique (X, d_X) est dit complet lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente dans X.*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tout $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$. On vérifie facilement que d est une distance sur E, appelée distance associée à la norme. La topologie correspondante sera appelée topologie normique.

Définition 1.15. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.*

Définition 1.16. *Soient A, B deux parties d'un espace métrique X.*
- *On dit que A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$.*
- *On dit que A est partout dense dans X si $\overline{A} = X$.*

1.3 Ensembles convexes

Définition 1.17. *Soit E un espace vectoriel, et soit $a, b \in E$.*
- *On appelle segment fermé d'extrémités a et b (ou tout simplement segment) que l'on note $[a, b]$, l'ensemble $\{\lambda a + (1 - \lambda)b \quad \text{tel que} \quad \lambda \in [0, 1]\}$.*
- *On appelle segment ouvert que l'on note $]a, b[$ l'ensemble $\{\lambda a+(1-\lambda)b \text{ tel que } \lambda \in]0, 1[\}$. De la même manière, on définit les segments $]a, b]$ et $[a, b[$.*

Définition 1.18. *Une partie A de l'espace vectoriel E est dite convexe si à chaque fois que deux points a, b appartiennent à A le segment $[a, b]$ est contenu dans A, i.e. ,*

$$\lambda A + (1-\lambda)A \subset A, \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

ou encore

$$\forall a, b \in A, \forall \lambda \in [0,1], \lambda a + (1-\lambda)b \in A.$$

On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ le sous ensemble Δ_n, tel que

$$\Delta_n = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_i \geq 0\ ,\ i = 1...n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Définition 1.19. *Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tout élément x qui s'écrit comme suit*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \textit{tel que} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_n\,.$$

Proposition 1.20. *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Alors A est convexe si et seulement si n'importe quelle combinaison convexe des vecteurs de A est un vecteur de A.*

Définition 1.21. *Soit A un sous ensemble de l'espace vectoriel E. On appelle enveloppe convexe de A, qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les convexes de E contenant A. C'est en fait le plus petit convexe de E contenant A.*

Définition 1.22. *Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle enveloppe convexe fermée de A, qu'on note $\overline{co}(A)$, le plus petit convexe fermé de E contenant A.*

Théorème 1.23. *(Théorème 1.4, [19], p. 14) Si $A \subset E$. Alors,*

$$\overline{co}(A) = \overline{co(A)}.$$

Démonstration. Soit $A \subset E$. L'ensemble $\overline{co(A)}$ est un fermé convexe (car $co(A)$ est convexe) contenant A. Mais $\overline{co}(A)$ est le plus petit convexe fermé contenant A.
Donc

$$\overline{co}(A) \subset \overline{co(A)}.$$

D'autre part, $co(A)$ est contenu dans tout ensemble convexe contenant A (car c'est le plus petit d'entre eux), d'où

$$co(A) \subset \overline{co}(A).$$

Par conséquent,

$$\overline{co(A)} \subset \overline{\overline{co}(A)} = \overline{co}(A).$$

On conclut que $\overline{co(A)} = \overline{co}(A)$. ■

Proposition 1.24. *Soient E un espace vectoriel, $A, B \subset E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *si $A \subset B$ alors $co(A) \subset co(B)$.*
2. *$co(\alpha A) = \alpha co(A)$.*
3. *$co(A + B) = co(A) + co(B)$.*
   Si E un espace vectoriel topologique, alors
4. *Si A est un sous ensemble convexe de E alors $\overline{A}$ et $\overset{\circ}{A}$ le sont aussi.*
5. *$\overline{co}(\alpha A) = \alpha\overline{co}(A)$.*

Théorème 1.25. *Si $A \subset E$. Alors,*

$$\overline{co}(A) = \overline{co}(\overline{A}).$$

Démonstration. Comme $A \subset \overline{A}$ alors $co(A) \subset co(\overline{A})$ (propriété), d'où

$$\overline{co(A)} \subset \overline{co(\overline{A})},$$

autrement dit, d'après le théorème précédent,

$$\overline{co}(A) \subset \overline{co}(\overline{A}). \tag{1.1}$$

D'autre part, par définition de l'enveloppe convexe fermée, nous avons

$$A \subset \overline{co}(A),$$

d'où

$$\overline{A} \subset \overline{\overline{co}(A)} = \overline{co}(A)$$

(car ce dernier est fermé).
Donc $\overline{co}(A)$ est un convexe fermé qui contient $\overline{A}$. Or, $\overline{co}(\overline{A})$ est le plus petit ensemble de ces ensembles, d'où

$$\overline{co}(\overline{A}) \subset \overline{co}(A). \tag{1.2}$$

Combinant (1.1) et (1.2) on conclut que $\overline{co}(\overline{A}) = \overline{co}(A)$. ∎

Définition 1.26. *Soient X, Y deux espaces vectoriels. Une application $\varphi : X \to Y$ est affine si*

$$\varphi((1-t)x + ty) = (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y) \text{ pour chaque } t \in \mathbb{R} \text{ et } x, y \in X.$$

1.4 Distance de Hausdorff

Les définitions et résultats de cette section ont été pris de [3] et [19]. Dans la suite on considère un espace métrique (X, d) et $A, B, C \subset X$.

Définition 1.27. *On appelle écart entre A et B la quantité notée $e(A, B)$ et définie par*

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} d(x, y) \right).$$

Définition 1.28. *On appelle distance de Hausdorff entre A et B la quantité $\mathcal{H}(A, B)$ définie par*

$$\mathcal{H}(A, B) = \max \Big(e(A, B), e(B, A) \Big),$$

avec la convention

$$\sup \emptyset = 0 \text{ et } \inf \emptyset = +\infty.$$

Propriétés

1. $e(A, \emptyset) = +\infty$ si $A \neq \emptyset$
2. $e(\emptyset, B) = 0$
3. $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$
4. $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
5. $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$
6. $\mathcal{H}(A, C) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$.

Soit $\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties fermées de X. Alors $\mathcal{P}_f(X)$, muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$, est un espace métrique.

1.5 Quelques notions de mesurabilité

Les définitions et résultats de cette section ont été pris de [2] et [19].

Définition 1.29. ***(Tribu, espace mesurable)*** *Soient X un ensemble non vide et Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est une tribu sur X si*

1. $\emptyset \in \Sigma$.

2. $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 1)$, $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \Sigma$

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables
Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur X.

Proposition 1.30. ***(Tribu engendrée)*** *Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties de X. L'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, est appelée tribu engendrée par $\mathcal{A}$, et est usuellement notée $\sigma(\mathcal{A})$.*
$\sigma(\mathcal{A})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$ au sens d'une inclusion.

Proposition 1.31. ***(Propriétés des tribus engendrées)*** *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux familles de parties de X. Alors,*

(a) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$

(b) Pour toute tribu Σ sur X , $\mathcal{A} \subset \Sigma \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \Sigma$.

Définition 1.32. ***(La tribu borélienne)*** *Soit (X, τ) un espace topologique. On appelle tribu borélienne la tribu engendrée par τ, on la note $\mathcal{B}(X)$.*
Les éléments de la tribu borélienne sont appelés ensembles boréliens.

Définition 1.33. ***(Fonction mesurable)*** *Soient (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables et f une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2. On dit que f est (Σ_1, Σ_2)-mesurable si pour tout $A \in \Sigma_2$, $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*
Si X_2 est un espace topologique, une application $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X_2))$-mesurable est dite application Borélienne ou Σ_1-mesurable.

Proposition 1.34. *Soient X_1, X_2 deux espaces topologiques et $f : X_1 \to X_2$. Si f est continue alors $f : (X_1, \mathcal{B}(X_1)) \to (X_2, \mathcal{B}(X_2))$ est mesurable.*

Proposition 1.35. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'applications mesurables définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge simplement vers f alors f est mesurable.*

Définition 1.36. *Soit* (X, Σ) *un espace mesurable. Alors l'application* $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ *est une mesure si*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n \mu(A_n)$, *pour toute suite dénombrable* (A_n) *d'éléments de* Σ *deux à deux disjoints.*

- *Le triplet* (X, Σ, μ) *est appelé espace mesuré.*
- *Si* $\mu(A) \geq 0$, *pour tout* $A \in \Sigma$, *on dit que* μ *est une mesure positive et on note* $\mu \geq 0$, *ou que l'espace* (X, Σ, μ) *est positif.*
- *Si* $\mu(A) < \infty$, *pour tout* $A \in \Sigma$, *on dit que* μ *est une mesure finie ou que l'espace* (X, Σ, μ) *est fini.*
- *Si* X *est un espace topologique, la mesure* $\mu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ *est appelée mesure Borélienne.*

Proposition 1.37. *(Croissance et mesure d'une différence)*
Soit (X, Σ, μ) *un espace mesuré. Soit* $A, B \in \Sigma$ *tels que* $B \subset A$. *Alors*
$\mu(B) \leq \mu(A)$.
Si, de plus $\mu(A) < +\infty$, *alors* $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B)$.

Définition 1.38. X *un espace topologique séparé si :*

$$\forall\, x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists\, v \in v(x),\ \exists\, w \in v(y) \text{ tel que } : v \cap w = \emptyset.$$

Définition 1.39. *Soit* X *un espace topologique séparé et* μ *une mesure Borélienne. Alors* μ *est dite régulière si pour tout* $A \in \mathcal{B}(X)$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* C *et un fermé* G *de* X, *tels que* $G \subset A \subset C$ *et* $\mu(C \backslash G) \leq \varepsilon$.

Une mesure Borélienne finie et régulière est appelée mesure de Radon.

Définition 1.40. *Soient* (X, Σ, μ) *un espace mesuré positif et* A *un sous ensemble de* X. *On dit que* A *est* μ*-négligeable ou négligeable, s'il existe* $B \in \Sigma$ *tel que* $A \subset B$ *et* $\mu(B) = 0$.
- *On dit qu'une propriété sur* X *est vraie* μ*-presque partout* (μ*.p.p.*)*, si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est* μ*-négligeable.*

Définition 1.41. *(**Fonction simple**). Soient* (X, Σ) *un espace mesurable,* E *un espace de Banach et* $f : X \to E$. *On dit que* f *est une application simple si elle mesurable et prend un nombre fini de valeurs.*
Cette notion est la généralisation d'une fonction en escalier (on dit "en escalier" lorsque on départ d'un réel). Toute fonction simple peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E_i}(x) y_i,$$

où les $E_i = f^{-1}(y_i),\ i \in \{1, \cdots, n\}$, sont des éléments deux à deux disjoints de Σ et les $y_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}$, sont des éléments distincts de E.
Cette formule est appelée la représentation canonique de f.

Théorème 1.42. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et E un espace de Banach séparable. Si $f : X \to E$ est mesurable, alors il existe une suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ d'application simples telles que $f_n \to f$ μ-p.p, et pour μ-presque tout $x \in E$, $\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

- *La tribu μ-complétée de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ-négligeables, c'est à dire*

$$\Sigma_\mu = \{A \cup Z;\ A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \mu - \text{négligeable}\}.$$

- *La tribu Σ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c'est à dire, si tout ensemble μ-négligeable appartient à Σ.*

Soit l'ensemble de parties de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ suivant

$$\mathcal{A} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\}$$

(c'est l'ensemble des intervalles ouverts). La tribu $\sigma(\mathcal{A})$ s'appelle la tribu des Boréliens et se note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Définition 1.43. *(**Tribu de Lebesgue**). La tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ notée $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est la tribu complétée de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour la mesure de Lebesgue.*

Théorème 1.44. *(**Mesure de Lebesgue**). Il existe une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant*

1. *pour tout intervalle $]a, b[, \lambda(]a, b[) = b - a$*
2. *$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(\{y : y - x \in A\}) = \lambda(A)$.*

Cette mesure λ s'appelle la mesure de Lebesgue.

Proposition 1.45. *([10](**Castaing**), Proposition VII-4, p. 198) Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré positif σ-fini, et μ-complet, E un espace de Banach séparable et soit $f : T \to E$ une application mesurable de T dans E. Alors, il existe une suite $(T_n)_n$ de sous-ensembles mesurables de T, deux à deux disjoints telle que :*

$$\mu(T \setminus \bigcup_n T_n) = 0, \qquad \overline{f(T_n)} \text{ est compact dans } E \quad \forall n.$$

1.6 Intégrale de Bochner

Il s'agit de l'intégrale d'une application à valeurs dans un Banach. Dans toute cette section, E est un espace de Banach séparable que l'on munit de sa tribu borélienne et un espace mesuré (T, Σ, μ).

Les notions de cette section ont été prise de [18].

Définition 1.46. *Soit* (X, Σ) *un espace mesurable et* M *un espace métrique. Alors une fonction* $g : X \to M$ *est dite fortement mesurable ou Bochner mesurable si* g *est* $(\Sigma, \mathcal{B}(M))$*-mesurable et* $g(X)$ *est séparable.*

Lorsque $f = \sum\limits_{i=1}^{n} 1\!\!1_{E_i} y_i$ est une fonction simple, on définit l'intégrale de Bochner de f comme suit

$$\int\limits_T f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) y_i.$$

Définition 1.47. *Une application mesurable* $f : T \to E$ *est dite intégrable au sens de Bochner, s'il existe une suite d'applications simples* $(f_n)_n$ *telle que*

- $f_n \to f$ μ *p.p.* ,
- $\forall n$, $\|f_n - f\|_E(\cdot)$ *est intégrable au sens de Lebesgue et*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_T \|f_n - f\|(t) d\mu = 0.$$

avec

$$\begin{aligned} \|f\| : T &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|f\|(t) = \|f(t)\|_E. \end{aligned}$$

Et on pose

$$\int_T f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_T f_n d\mu.$$

Dans ce cas, $\int_A f d\mu$ *est défini pour tout* $A \in \Sigma$ *par* $\int\limits_A f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.

Théorème 1.48. *Une application mesurable* $f : T \to E$ *est intégrable au sens de Bochner si et seulement si* $\int\limits_T \|f\| d\mu < \infty$.

Corollaire 1.49. *Si* $f : T \to E$ *est une application intégrable au sens de Bochner et* $A \in \Sigma$*, Alors*

$$\Big\| \int\limits_A f(t) d\mu \Big\|_E \leqslant \int\limits_A \|f(t)\|_E d\mu.$$

Corollaire 1.50. *Si* $f, g : T \to E$ *sont deux applications intégrables au sens de Bochner telles que pour tout* $A \in \Sigma$, $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A g d\mu$*, alors*

$$f(t) = g(t) \quad \text{pour} \quad \mu - \text{presque} \quad \text{tout} \quad t \in T.$$

Proposition 1.51. *([19], Lemme 1.1) Nous avons les caractérisations suivantes :*

- *f est Bochner mesurable ;*
- *il existe une suite de fonctions simples définies sur T à valeurs dans E, convergeant simplement vers f ;*
- *il existe une suite de fonctions dénombrable-ment Σ-étagées définies sur T à valeurs dans E, convergeant uniformément sur T vers f.*

On note $L^1_E(T)$ l'ensemble des applications mesurables $f : T \to E$ intégrables au sens de Bochner.

Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : T \to E$ telles que $f(x) = 0$ μ-p.p. sur T, l'espace des classes d'équivalence $L^1_E(T)\backslash\mathcal{N}$ est noté par $L^1_E(T)$, c'est un espace de Banach muni de la norme $\|f\|_1 = \|f\|_{L^1(T,E)} = \int_T \|f(t)\|_E d\mu$.

Dans l'espace $L^1_E(T)$ on considère la norme "faible"

$$\|f\|_{max} = \max_{0\leq t'\leq t''\leq 1} \| \int_{t'}^{t''} f(s)ds\|. \tag{1.3}$$

Cette norme est équivalente á la norme ([8])

$$|||f||| = \max_{0\leq t\leq T} \| \int_0^t f(s)ds\|. \tag{1.4}$$

En effet, pour tout $t \in [0, T]$, et en prenant $t' = 0$ et $t'' = t$,

$$\| \int_0^t f(s)ds\| \leq \max_{0\leq t'\leq t''\leq T} \| \int_{t'}^{t''} f(s)ds\| = \|f\|_\omega.$$

D'où,

$$|||f||| \leq \|f\|_\omega. \tag{1.5}$$

D'autre part, pour tout $a, b \in [0, T]$, $a \leq b$,

$$\begin{aligned}\| \int_{t'}^{t''} f(s)ds\| &= \| \int_0^{t''} f(s)ds - \int_0^{t'} f(s)ds\| \\ &\leq \| \int_0^{t''} f(s)ds\| + \| \int_0^{t'} f(s)ds\| \\ &\leq 2|||f|||.\end{aligned}$$

D'où,

$$\|f\|_\omega \leq 2|||f|||. \tag{1.6}$$

De (1.5) et (1.6), on déduit que $\| \cdot \|_\omega$ et $||| \cdot |||$ sont équivalentes.

Définition 1.52. *([27]) Une fonction est dite "localement intégrable" si, autour de chaque point de son domaine, il existe un voisinage sur lequel la fonction est intégrable.*

L'espace des fonctions localement intégrable est noté L^1_{loc}.

Toute fonction intégrable est localement intégrable.

1.7 Applications continues et absolument continues

Pour plus de détails concernant les notions et les résultats énoncés dans cette section, voir [3], [13], [5] et [28].

Définition 1.53. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue si pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage V de $f(x_0)$ dans Y, il existe un voisinage U de x_0 dans X, tel que $f(U) \subset V$. Ou encore, si pour tout ouvert (resp.fermé) V de Y, $f^{-1}(V)$ est un ouvert (resp.fermé) de X.*

Définition 1.54. *Une application f définie sur T à valeur dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\zeta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de T ; $(]a_i, b_i[)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, nous avons*

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \zeta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon\,.$$

Définition 1.55. *Soit E un espace de Banach. On définit*
$AC^{1,1}(T, E) = \{f : T \to E : \; f$ est absolument continue, dérivable p.p. avec $f' \in L^1_E(T)\}$.

Proposition 1.56. *Soient E un espace de Banach et $f : T \to E$. S'il existe une application $g \in L^1_E(T)$ telle que*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds, \quad \forall\, t \in T.$$

Alors, $f \in AC^{1.1}(T, E)$ et $\dot{f}(t) = g(t)$ p.p sur T.

Proposition 1.57. *Soit $\varphi : T \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue, et $E = \{t \in T : \varphi(t) = 0\}$. Alors $mes(\{t \in T : \dot{\varphi}(t) \neq 0\}) = 0$, i.e., $\dot{\varphi}(t) = 0$ p.p sur E.*

Théorème 1.58. *([20], Théorème 6.5, p.29) Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ avec*

$$\mu(E) \leq \delta$$

on a

$$\int_E \| f \| \leq \varepsilon.$$

Cette dernière condition est connue sous le nom d'absolue continuité de l'intégrale d'une fonction par rapport à la mesure de Lebesgue.

Définition 1.59. *[22] Soient X un espace topologique et M un espace métrique. On dit que la fonction $u : X \to M$ est localement bornée si $\forall x \in X$ il existe un ouvert U contenant x tel que u est bornée sur U.*

Proposition 1.60. *Soit $\varphi : X \to Y$.*
(a) φ est linéaire si et seulement si φ est affine et $\varphi(0) = 0$.
(b) φ est affine si et seulement si s'il existe une application linéaire $T : X \to Y$ et un vecteur $y_0 \in Y$ tel que $\varphi(x) = Tx + y_0$ $(x \in X)$. De plus c'est unique dans ce cas.

Proposition 1.61. *Si $\varphi : A \to Y$ est affine, alors*

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i), \quad \forall x_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$

1.8 Multi-applications et sélections

Les définitions de cette section ont été prises de [3].

Définition 1.62. *Soient X, Y deux ensembles non vides. On appelle multi-application F définie sur X à valeurs dans Y toute application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous-ensemble $F(x)$ de Y, et on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : Y \to \mathcal{P}(Y)$.*

- *On appelle domaine (effectif) de la multi-application F qu'on note $dom(F)$, le sous-ensemble de Y défini par*

$$dom(F) = \{x \in X;\ F(x) \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle graphe de F, qu'on note $gph(F)$, le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y;\ y \in F(x)\}.$$

- *On appelle image de F, qu'on note $Im(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$Im(F) = \{y \in Y;\ \exists x \in X, y \in F(x)\}.$$

- *Si $A \subset X$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$ le sous-ensemble de Y défini par $F(A) = \underset{x \in A}{\cup} F(x)$, et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y\ ;\ \exists\, x \in A, y \in F(x)\}.$$

- *On définit la multi-application inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par*

$$x \in F^{-1}(y) \ \Leftrightarrow\ y \in F(x).$$

- *Pour tout $V \subset Y$, on appelle image réciproque large de F, le sous-ensemble défini par*
$$F^{-1}(V) = \{x \in X;\ F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Définition 1.63. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : dom(F) \to Y$ vérifiant*
$$f(x) \in F(x), \forall\, x \in dom(F).$$

1.9 Mesurabilité des multi-applications

Les notions de cette section ont été prises de [3] et [19].

Définition 1.64. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace topologique et $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application.*

1. *On dit que F est Σ-mesurable ou mesurable, si pour tout ouvert V de Y*
$$F^{-1}(V) = \{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

2. *On dit que F est fortement mesurable, si pour tout fermé W de Y*
$$F^{-1}(W) = \{t \in T : F(t) \cap W \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.65. *Si $F : T \rightrightarrows Y$ est fortement mesurable, alors F est mesurable.*

Proposition 1.66. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et soit $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *F est Σ-mesurable.*

(ii) *Pour chaque $y \in Y$, la fonction $d_y : T \to \mathbb{R}$ définie par $d_y(t) = d(y, F(t))$ est Σ-mesurable.*

Théorème 1.67. *Soient (T, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach séparable et soient $F : T \times E \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable et $u : T \to E$ une application Σ-mesurable. Alors, la multi-application $t \mapsto F(t, u(t))$ est mesurable.*

Définition 1.68. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y et E deux espaces métriques et soit $f : T \times Y \to E$ une application.*

On dit que f est de Carathéodory si elle est mesurable par rapport à t et continue par rapport à y, c'est à dire pour tout $x \in X$ fixé l'application

$$\begin{aligned} f_y :& T \to E \\ & t \mapsto f_y(t) = f(t, y) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable, et pour tout $t \in T$ fixé l'application

$$\begin{aligned} f_t :& Y \to E \\ & y \mapsto f_t(y) = f(t, y) \end{aligned}$$

est continue.
On dit aussi que f est séparément mesurable, séparément continue.

Proposition 1.69. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et E un espace métrique et soit $f : T \times Y \to E$ une application de Carathéodory. Alors f est mesurable.*

Lemme 1.70. *Soit (Y, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-finie et Σ est μ-complète. Soient E un espace métrique séparable et $F : Y \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées, alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) F est Σ-mesurable.

(b) $gphF \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$.

(c) F est fortement mesurable.

Théorème 1.71. *(**Théorème d'existence de sélections mesurables**). Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides. Alors, F admet au moins une sélection mesurable.*

Théorème 1.72. *[28] Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré positif avec Σ μ-complète et $\mu - \sigma$ finie. Soient E un espace de Banach séparable, $\Gamma : T \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs non vides fermées, $f : T \rightrightarrows E$ une application mesurable. Alors, la multi-application*

$$\begin{aligned} H :& T \rightrightarrows E \\ & t \mapsto H(t) = \{x \in \Gamma(t); \quad d(f(t), x) \leq d(f(t), \Gamma(t))\}. \end{aligned}$$

est à valeurs non vides, fermées et elle est mesurable.

1.10 Multi-applications Lipschitziennes

Définition 1.73. *([19]) Soient Y, E deux espaces normés et soit $F : Y \rightrightarrows E$ une multi-application. On dit que F est Lipschitzienne autour de $y \in Y$ s'il existe une constante positive l et un voisinage $U \subset dom(F)$ de y tels que*

$$\forall y_1, y_2 \in U,\ F(y_1) \subset F(y_2) + l \left\|y_1 - y_2\right\|_E \overline{B}_E$$

Dans ce cas on dit aussi que F est Lipschitzienne sur U.
Elle est Lipschitzienne s'il existe l positive tel que

$$\forall y_1, y_2 \in dom(F),\ F(y_1) \subset F(y_2) + l \left\|y_1 - y_2\right\|_E \overline{B}_E$$

Proposition 1.74. *([19]) Soient Y, E deux espaces de dimension finie et soit $F : Y \rightrightarrows E$ une multi-application Lipschitzienne avec la constante de Lipschitz l. Alors la multi-application $y \mapsto \overline{co}(F(y))$ est Lipschitzienne avec la même constante l.*

Théorème 1.75. *(**Représentation de Castaing**). Soient (T, Σ) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique séparable complet. Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application mesurable à valeurs fermées.*
Alors, F et Σ-mesurable si et seulement si $dom(F) \in \Sigma$ et il existe une suite $(f_n)_n$ d'applications Σ-mesurable ($f_n : dom(F) \to X$) telle que pour chaque $t \in dom(F)$ on ait $F(t) = \overline{(f_n(t))_n}$.
On dit que $(f_n)_n$ est une représentation de Castaing de F.

Chapitre 2

Un théorème général de densité

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach séparable (de dimension quelconque), et $\Gamma : I \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable. Il est connu que si l'ensemble des sélections intégrables de Γ, S^1_Γ, est non vide alors il est dense dans son enveloppe convexe fermée $\overline{co}S^1_\Gamma$ pour la topologie $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'})$ (voir les travaux [6], [14], [23], [25] et [26]). Dans [11], l'auteur a prouvé que sous certaines conditions, S^1_Γ est dense dans $\overline{co}S^1_\Gamma$ pour une norme plus faible notée ici $\|.\|_{max}$. L'objectif de ce chapitre est de détailler tous les arguments relatifs à ce résultat. La densité en question va servir lors de la relaxation abordée au dernier chapitre.
Dans sa preuve du théorème de densité, l'auteur s'est basé sur deux lemmes, nous commençons d'abord par bien détailler la preuve de l'un des deux, ceci fait partie de notre contribution, et c'est une partie importante de ce travail.

2.1 Deux lemmes

Lemme 2.1. *([11], Lemma* 1.1*, p. 3) Soit J un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ mesurable et borné, soit $(b_i)_i \subset L^1_E(J)$ et $(\varphi_i)_i \subset L^1_{\mathbb{R}_+}(J), i = 1, 2, \cdots, n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s) = 1, \forall s \in J$.*
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition mesurable $\{M_i\}_{i=1}^n$ de J telle que

$$\sup_{[t',t'']\subset\mathbb{R}} \left\| \int_{[t',t'']\cap J} \Big[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s) b_i(s) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(s) b_i(s) \Big] ds \right\|_E < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Démonstration. Pour une preuve bien détaillée, voir [17]. ■

Lemme 2.2. *([11], Lemma 1.2, p. 5) Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, $(c_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite* *d'applications mesurables de Ω dans E, et $c : \Omega \to E$ une application mesurable telles que*

$$c(t) \in \overline{co}\{c_i(t),\ i \in \mathbb{N}^*\},\quad \forall t \in \Omega.$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une suite croissante $(\Omega^n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \Sigma$ avec $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega^n = \Omega$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n fonctions positives mesurables $\varphi_i^n : \Omega^n \to \mathbb{R}^+$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ telles que

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^n(t) = 1,\ \forall t \in \Omega^n$$

$$\|c(t) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^n(t) c_i(t)\|_E < \epsilon,\quad \forall t \in \Omega^n.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\left((\lambda_1^{n,i}, \lambda_2^{n,i}, ..., \lambda_n^{n,i})\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la suite des vecteurs rationnels positifs de dimensions n satisfaisant $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{n,i} = 1,\ \forall i$. C'est à dire :

- pour $n = 1$: on considère la suite (constante) des nombres réels $\{1, 1, , 1, ...\}$, on peut l'écrire $\{\lambda_1^1, \lambda_1^2, \lambda_1^3,\ ... , \lambda_1^i,\ ... \}$ ou bien $(\lambda_1^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ avec $\lambda_1^i = 1,\ \forall i$,
- pour $n = 2$: on considère la suite des couples

$$\{(\lambda_1^1, \lambda_2^1), (\lambda_1^2, \lambda_2^2), (\lambda_1^3, \lambda_2^3),\ ... , (\lambda_1^i, \lambda_2^i),\ ... \}$$

telle que $\lambda_1^i + \lambda_2^i = 1\ \forall i$, c.à.d. $\sum\limits_{k=1}^{2} \lambda_k^i = 1,\ \forall i$.

- pour $n = 3$: on considère la suite des triplets

$$\{(\lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1), (\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2), (\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3),\ ... , (\lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i),\ ... \}$$

telle que $\lambda_1^i + \lambda_2^i + \lambda_3^i = 1\ \forall i$ c.à.d. $\sum\limits_{k=1}^{3} \lambda_k^i = 1,\ \forall i$.

... et ainsi de suite, i.e.,

- pour n en général on considère la suite des n-uplets

$$\{(\lambda_1^{n,1}, \lambda_2^{n,1}, ..., \lambda_n^{n,1}), (\lambda_1^{n,2}, \lambda_2^{n,2}, ..., \lambda_n^{n,2}), (\lambda_1^{n,3}, \lambda_2^{n,3}, ..., \lambda_n^{n,3}),\ ... , (\lambda_1^{n,i}, \lambda_2^{n,i}, ..., \lambda_n^{n,i}),\ ... \}$$

telle que $\lambda_1^i + \lambda_2^1 + ... + \lambda_n^i = 1\ \forall i$,   c.à.d. $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^i = 1,\ \forall i$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, pour chaque terme i on construit l'ensemble

$$\Omega^{n,i} = \{t \in \Omega :\ \|c(t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{n,i} c_k(t)\|_E < \epsilon\}.$$

L'ensemble $\Omega^{n,i}$ est mesurable, en effet :

si on pose $f(t) := c(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{n,i} c_k(t)$ et $g(t) = (\|.\| \circ f)(t) = \|f(t)\|_E$, alors

$$\begin{aligned}\Omega^{n,i} &= \{t \in \Omega :\ g(t) < \epsilon\}\\ &= \{t \in \Omega :\ g(t) \in] - \infty, \epsilon[\}\\ &= g^{-1}(] - \infty, \epsilon[)\end{aligned}$$

et comme la norme ($\|.\|_E$) est une fonction mesurable et f aussi car les fonctions ($c(.)$ et les $c_i(.)$) le sont, alors g est mesurable, d'où $\Omega^{n,i} \in \Sigma$. Posons

$$\Omega^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega^{n,i} = \Omega^{n,1} \cup \Omega^{n,2} \cup ... \cup \Omega^{n,i} \cup ...$$

(donc $\Omega^n \in \Sigma$). Alors, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega^n = \Omega$. En effet,

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega^n \subset \Omega$, car

$$\begin{aligned} \forall n,\ \forall i,\ \Omega^{n,i} \subset \Omega &\Rightarrow \forall n,\ \bigcup_{i=1}^{n} \Omega^{n,i} \subset \Omega \\ &\Leftrightarrow \forall n,\ \Omega^n \subset \Omega \\ &\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega^n \subset \Omega. \end{aligned}$$

- $\Omega \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega^n$, car par l'hypothèse du Lemme,

$$\begin{aligned} t \in \Omega &\Rightarrow c(t) \in \overline{co}\{c_i(t), i \in \mathbb{N}^*\} \\ &\Leftrightarrow c(t) \in \overline{co\{c_i(t), i \in \mathbb{N}^*\}} \\ &\Leftrightarrow d(c(t),\ co\{c_i(t), i \in \mathbb{N}^*\}) = 0 \\ &\Rightarrow d(c(t),\ co\{c_i(t), i \in \mathbb{N}^*\}) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \inf_{y \in co\{c_i(t), i \in \mathbb{N}^*\}} d(c(t), y) < \epsilon \\ &\Rightarrow \exists y_{t,\epsilon} \in co\{c_i(t), i \in \mathbb{N}^*\};\ d(c(t), y_{t,\epsilon}) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \exists y_{t,\epsilon} \in co\{c_i(t), i \in \mathbb{N}^*\};\ \|c(t) - y_{t,\epsilon}\|_E < \epsilon, \end{aligned}$$

et comme $y_{t,\epsilon} \in co\{c_i(t), i \in \mathbb{N}^*\}$, alors il peut s'écrire sous la forme d'une combinaison convexe

$$y_{t,\epsilon} = \sum_{k=1}^{N_{t,\epsilon}} \beta_k . c_k(t),$$

avec $\sum_{k=1}^{N_{t,\epsilon}} \beta_k = 1$ et $\beta_k \geq 0$, $\forall k$. En fait, le $N_{t,\epsilon}$-uplet

$$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{N_{t,\epsilon}})$$

ce n'est qu'un terme d'indice j de la suite des $N_{t,\epsilon}$-uplets, de la forme

$$(\lambda_1^{N_{t,\epsilon},j}, \lambda_2^{N_{t,\epsilon},j}, ..., \lambda_{N_{t,\epsilon}}^{N_{t,\epsilon},j}).$$

Donc

$$\begin{aligned} t \in \Omega &\Rightarrow \|c(t) - \sum_{k=1}^{N_{t,\epsilon}} \beta_k c_k(t)\|_E < \epsilon \\ &\Rightarrow \|c(t) - \sum_{k=1}^{N_{t,\epsilon}} \lambda_k^{N_{t,\epsilon},j} c_k(t)\|_E < \epsilon \\ &\Rightarrow t \in \Omega^{N_{t,\epsilon},j} \\ &\Rightarrow t \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega^{N_{t,\epsilon},i} \\ &\Leftrightarrow t \in \Omega^{N_{t,\epsilon}} \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \ \ (n = N_{t,\epsilon});\ t \in \Omega^n \\ &\Rightarrow t \in \bigcup_n \Omega^n, \end{aligned}$$

d'où l'égalité.

Maintenant montrons que la suite d'ensembles $(\Omega^n)_n$ est croissante, c.à.d.

$$\Omega^n \subset \Omega^{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Fixons le n. Nous avons,

$$\begin{aligned} t \in \Omega^n \Leftrightarrow t &\in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega^{n,i} \\ &\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}^*, t \in \Omega^{n,i} \\ &\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}^*, \|c(t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{n,i} c_k(t)\|_E < \epsilon \\ &\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}^*, \|c(t) - (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{n,i} c_k(t) + 0 \times c_{n+1}(t))\|_E < \epsilon \\ &\Rightarrow \exists j \in \mathbb{N}^*, \|c(t) - \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k^{n+1,j} c_k(t)\|_E < \epsilon \\ &\Rightarrow \exists j \in \mathbb{N}^*, t \in \Omega^{n+1,j} \\ &\Rightarrow t \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega^{n+1,i} \\ &\Rightarrow t \in \Omega^{n+1}, \end{aligned}$$

car en fait, le n+1-uplet

$$(\lambda_1^{n,i}, \lambda_2^{n,i}, ..., \lambda_n^{n,i}, 0)$$

ce n'est qu'un terme d'indice j de la suite des n+1-uplets, de la forme

$$(\lambda_1^{n+1,j}, \lambda_2^{n+1,j}, ..., \lambda_n^{n+1,j}, \lambda_{n+1}^{n+1,j}).$$

Maintenant, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in \Omega^n = \Omega^{n,1} \cup \Omega^{n,2} \cup ... \cup \Omega^{n,i} \cup ...$ Notons par i_t l'indice i du "premier" ensemble $\Omega^{n,i}$ auquel t appartient, c.à.d.

$$(t \notin \Omega^{n,j},\ \forall j < i_t) \ \ et \ \ t \in \Omega^{n,i_t},$$

autrement dit

$$t \notin \bigcup_{\substack{j<i_t \\ j\in\mathbb{N}^*}} \Omega^{n,j} \; et \; t \in \bigcup_{\substack{j\geq i_t \\ j\in\mathbb{N}^*}} \Omega^{n,j}.$$

$$\Omega^n = \Big(\bigcup_{j<i_t} \Omega^{n,j}\Big) \cup \Big(\bigcup_{i_t\leq j} \Omega^{n,j}\Big)$$

Rappelons que l'indice i_t correspond au n-uplet $(\lambda_1^{n,i_t}, \lambda_2^{n,i_t}, ..., \lambda_n^{n,i_t})$. Pour ce $t \in \Omega^n$, posons

$$(\varphi_1^n(t), \varphi_2^n(t), ..., \varphi_n^n(t)) = (\lambda_1^{n,i_t}, \lambda_2^{n,i_t}, ..., \lambda_n^{n,i_t}).$$

Vérifions les deux estimations du lemme :

- Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^n(t) &= \varphi_1^n(t) + \varphi_2^n(t) + ... + \varphi_n^n(t) \\ &= \lambda_1^{n,i_t} + \lambda_2^{n,i_t} + ... + \lambda_n^{n,i_t} \\ &= 1,\end{aligned}$$

- d'autre part,

$$\begin{aligned}\|c(t) - \sum_{i=1}^{n}\varphi_i^n(t)c_i(t)\|_E &= \|c(t) - (\varphi_1^n(t)c_1(t) + \varphi_2^n(t)c_2(t) + ... + \varphi_n^n(t)c_n(t))\,\|_E \\ &= \|c(t) - \Big(\lambda_1^{n,i_t}c_1(t) + \lambda_2^{n,i_t}c_2(t) + ... + \lambda_n^{n,i_t}c_n(t)\Big)\,\|_E \\ &= \|c(t) - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{n,i_t}c_k(t)\|_E < \epsilon \; (car \; t \in \Omega^{n,i_t}).\end{aligned}$$

■

2.2 Théorème de densité

Soit $I = [0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $\Gamma : I \rightrightarrows E$ une multi-application et

$$\begin{aligned}\varphi :& I \times E \to E \\ &(s, y) \mapsto \varphi(s, y)\end{aligned}$$

une application.

Soit

$$S_\Gamma = \{f : I \to E; f(t) \in \Gamma(t), \forall t \in I\},$$

$$S_\Gamma^1 = \{f \in S_\Gamma : f \in L_E^1(I)\},$$

$$\begin{aligned} S_\Gamma^{1,\varphi} &= \{f \in S_\Gamma : t \mapsto \varphi(t, f(t)) \text{ } est \text{ } intégrable\} \\ &= \{f \in S_\Gamma; \varphi_f \in L_E^1(I)\}, \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \overline{co}\Gamma : I &\rightrightarrows E \\ s &\mapsto (\overline{co}\Gamma)(s) = \overline{co}(\Gamma(s)). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_{\overline{co}\Gamma}^1 &= \{f \in S_{\overline{co}\Gamma} : f \in L_E^1(I)\} \\ &= \{f \in L_E^1(I); f(t) \in \overline{co}(\Gamma(t)), \forall t \in I\} \\ &= \overline{co} S_\Gamma^1. \end{aligned}$$

Notons que

$$S_\Gamma^1 \subset S_{\overline{co}\Gamma}^1 \subset (L_E^1(I), \|.\|_{max})$$

avec

$$\|f\|_{max} = \max_{t',t''\in I} \| \int_{t'}^{t''} f(s)ds\|_E, \forall f \in L_E^1(I).$$

Théorème 2.3. *([11], Theorem 1.1, p. 3) Supposons que :*

(1) φ est mesurable en s, continue et affine en y, c.à.d.

- $\forall y \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi_y : I &\to E \\ s &\mapsto \varphi_y(s) = \varphi(s, y) \end{aligned}$$

est mesurable, et

- $\forall s \in I$,

$$\begin{aligned} \varphi_s : E &\to E \\ y &\mapsto \varphi_s(y) = \varphi(s, y) \end{aligned}$$

est continue et affine.

(2) Γ est mesurable, à valeurs non vides fermée (admet une représentation de Castaing), et que $S_\Gamma^{1,\varphi} \neq \emptyset$.

Alors, pour chaque $a \in S_{\overline{co}\Gamma}^{1,\varphi}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $b_\varepsilon \in S_\Gamma^{1,\varphi}$ telle que

$$\sup_{[t',t'']\subset I} \| \int_{t'}^{t''} [\varphi_a(s)) - \varphi_{b_\varepsilon}(s))]ds\|_E < \varepsilon.$$

De plus, b_ε peut être considéré comme étant de la forme

$$b_\varepsilon(s) = \sum_{i=0}^{n} \chi M_i(s) a_i(s)$$

où $\{M_i\}_{i=0}^n$ est une partition mesurable de I, a_0 est une application fixée dans S_Γ^1, et $\{a_i\}_{i=1}^n \subset S_\Gamma^1$ est telle que l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{n} a_i(\bigcup_{i=1}^{n} M_i)$ est relativement compact dans E.

Démonstration. Soit $a \in S_{\overline{co}\Gamma}^{1,\varphi}$ (on sait que $S_\Gamma^{1,\varphi} \subset S_{\overline{co}\Gamma}^{1,\varphi}$, et comme, par hypothèse, est non vide, alors le deuxième n'est pas vide non plus) et soit $\varepsilon > 0$. $\exists$? $b_\varepsilon \in S_\Gamma^{1,\varphi}$ tels que $\|\varphi_a - \varphi_{b(\varepsilon)}\|_{max} < \varepsilon$? .
Soit $a_0 \in S_\Gamma^{1,\varphi}$. Nous avons réparti la démonstration en cinq étapes.
Étape 1.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact $J \subset I$ et $\delta > 0$ tels que pour tout ensemble mesurable M dans J avec $\mu(M) < \delta$

$$\int_{(I \setminus J) \bigcup M} \Big[\|\varphi_a(s)\|_E + \|\varphi_{a_0}(s)\|_E\Big] ds < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.7}$$

En effet, d'une part comme la fonction $\|\varphi_a(\cdot)\|_E + \|\varphi_{a_0}(\cdot)\|_E$ est Lebesgue intégrable sur I(car φ_a, φ_{a_0} sont Bochner intégrables), alors considérons la mesure σ associée à l'intégrale,

$$\begin{aligned} &\sigma : L_I \to \mathbb{R} \\ &\quad A \mapsto \sigma(A) = \int_A \Big[\|\varphi_a(s)\|_E + \|\varphi_{a_0}(s)\|_E\Big] ds. \end{aligned}$$

Puisqu'elle est régulière, alors pour $\frac{\varepsilon}{6} > 0$ il existe un intervalle compact $J \subset I$ tel que

$$\sigma(I \setminus J) = \int_{I \setminus J} \Big[\|\varphi_a(s)\|_E + \|\varphi_{a_0}(s)\|_E\Big] ds < \frac{\varepsilon}{6},$$

d'autre part, comme la fonction $\|\varphi_a(\cdot)\|_E + \|\varphi_{a_0}(\cdot)\|_E$ est Lebesgue intégrable sur J ($J \subset I \subset \mathbb{R}$), alors par le Théorème 1.58 ([20]), pour $\frac{\varepsilon}{6} > 0$ il existe $\delta > 0$ tels que pour tout ensemble mesurable M dans J avec $\mu(M) < \delta$

$$\int_M \Big[\|\varphi_{a\varphi}(s)\|_E + \|\varphi_{a_0}(s)\|_E\Big] ds < \frac{\varepsilon}{6}.$$

On conclut que

$$\begin{aligned} \int_{(I \setminus J) \cup M} \Big[\|\varphi_a(s)\|_E + \|\varphi_{a_0}(s)\|_E\Big] ds &= \int_{I \setminus J} \Big[\|\varphi_a(s)\|_E + \|\varphi_{a_0}(s)\|_E\Big] ds \\ &\quad + \int_M \Big[\|\varphi_a(s)\|_E + \|\varphi_{a_0}(s)\|_E\Big] ds \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} \\ &= \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Étape 2.

Par les hypothèses, Γ admet une représentation de Castaing $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$.

$$\forall s \in I, \quad \Gamma(s) = \overline{\{a_i\}_{i=1}^{\infty}}.$$

et donc d'après la propriété démontrée

$$\forall s \in I, \ \ \overline{co}(\Gamma(s)) = \overline{co}(\overline{\{a_i\}_{i=1}^{\infty}}) = \overline{co}(\{a_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

et comme $\varphi_a \in S^1_{\overline{co}\Gamma}$, alors $\forall s \in I$ (*en particulier sur* J),

$$a(s) \in (\overline{co}\Gamma)(s) = \overline{co}(\Gamma(s)) = \overline{co}(\{a_i(s),\ i = 1, 2, ...\}),$$

d'où

$$\varphi_a(s) \in \overline{co}(\{\varphi_{a_i}(s),\ i = 1, 2, ...\}) = \overline{co(\{\varphi_{a_i}(s),\ i = 1, 2, ...\})}.$$

En effet,

$$a(s) \in \overline{co}\{a_i(s),\ i = \overline{1, +\infty}\} = \overline{co\{a_i(s),\ i = \overline{1, +\infty}\}}$$

$$\Rightarrow a(s) = \lim_{n \to +\infty} a_{n,s} \ \ tel\ que\ \ \forall n,\ a_{n,s} \in co\{a_i(s), i = \overline{1, +\infty}\}$$

donc

$$\begin{aligned}
\varphi_a(s) &= \varphi(s, a(s)) \\
&= \varphi(s, \lim_{n \to +\infty} a_{n,s}) \\
&= \varphi_s(\lim_{n \to +\infty} a_{n,s}) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \varphi(s, a_{n,s}) \ (car\ \varphi_s\ est\ continue) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \varphi_s(a_{n,s})
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\forall n,\ a_{n,s} \in co\{a_i(s)\ ; i = \overline{1, +\infty}\} \Rightarrow\ a_{n,s} &= \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_j a_j(s)\ (\forall j\ \lambda_j \geq 0\ et\ \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_j = 1) \\
\Rightarrow \varphi_n(s) &= \varphi(s, a_{n,s}) = \varphi(s, \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_j a_j(s))
\end{aligned}$$

comme φ_{a_n} est affine alors

$$\begin{aligned}
\varphi_{a_n}(s) &= \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_j \varphi(s, a_j(s)) \\
&= \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_j \varphi_{a_j}(s)
\end{aligned}$$

i.e. $\varphi_{a_n}(s)$ est une combinaison convexe des éléments $\varphi_{a_j}(s)$
i.e. $\varphi_{a_n}(s) \in co\{\varphi_{a_i}(s)\ , i = \overline{1,+\infty}\}$
alors

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{a_n}(s) \in \overline{co\{\varphi_{a_i}(s)\ , i = \overline{1,+\infty}\}} = \overline{co}\{\varphi_{a_i}(s)\ , i = \overline{1,+\infty}\}$$

On conclut que

$$\varphi_a(s) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_{a_n}(s) \in \overline{co}\{\varphi_{a_i}(s)\ , i = \overline{1,+\infty}\}$$

On peut donc appliquer le Lemme 2.2, avec $\Omega := J$, $c := \varphi_a : \Omega \to E$, $c_i := \varphi_{a_i} : \Omega \to E$, $i = 1, +\infty$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3\mu(J)}$. Il vient qu'il existe un ensemble mesurable J_ε^1 avec $\mu(J \setminus J_\varepsilon^1) < \frac{\delta}{2}$ (à vrai dire, on en déduit l'existence d'une suite croissante d'ensembles mesurables $(\Omega^n)_n$, d'où la suite $(\Omega \setminus \Omega^n)_n = (J \setminus \Omega^n)_n$ est décroissante et donc la suite des mesures $\mu(J \setminus \Omega^n)_n$ est décroissante, dès qu'on arrive à $\mu(J \setminus \Omega^{n_0}) < \frac{\delta}{2}$ on prend $J_\varepsilon^1 := \Omega^{n_0}$) avec n fonctions mesurables positives $\varphi_1^n, \varphi_2^n, ..., \varphi_n^n$ avec $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^n(s) = 1\ , \forall s \in J_\varepsilon^1$ (donc chaque fonction est bornée, $0 \le \varphi_i^n(s) \le 1,\ \forall s \in J_\varepsilon^1$) tel que

$$\left\| \varphi_a(s) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n(s) \varphi_{a_i}(s) \right\|_E < \frac{\varepsilon}{3\mu(J)},\ \forall s \in {J_\varepsilon}^1. \tag{2.8}$$

Étape 3.

En outre, il existe un ensemble mesurable $J_\varepsilon^2 \subset J_\varepsilon^1$ avec $\mu(J_\varepsilon^1 \setminus J_\varepsilon^2) < \frac{\delta}{2}$ tel que chaque $\varphi_{a_i}(J_\varepsilon^2)$ est inclut dans un compact de E. En effet, puisque E^n est un espace de Banach séparable, et la fonction

$$\begin{aligned} f : J_\varepsilon^1 &\to E^n \times E^n \\ s &\mapsto f(s) = (\varphi_{a_1}(s), \varphi_{a_2}(s), ..., \varphi_{a_n}(s);\ a_1(s), a_2(s), ..., a_n(s)) \end{aligned}$$

est mesurable ([2]), alors d'après la Proposition 1.45, il existe une suite croissante $(N_j)_{j=1}^{\infty}$ de sous-ensembles mesurables de J_ε^1 tel que $\lim\limits_{j\to\infty} \mu(J_\varepsilon^1 \setminus N_j) = 0$ et pour chaque j, $f(N_j)$ est inclus dans un compact de $E^n \times E^n$. Donc

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists j_0 \in \mathbb{N}^* : \quad (j \ge j_0) \Rightarrow (\mu(J_\varepsilon^1 \setminus N_j) < \varepsilon')$$

pour $\varepsilon' = \frac{\delta}{2}$,

$$\exists p \in \mathbb{N}^* : \quad (j \ge p) \Rightarrow (\mu(J_\varepsilon^1 \setminus N_j) < \frac{\delta}{2}).$$

Alors, on prend l'ensemble $J_\varepsilon^2 := N_p$,

$$f(J_\varepsilon^2) = (\varphi_{a_1}(J_\varepsilon^2), \varphi_{a_2}(J_\varepsilon^2), ..., \varphi_{a_n}(J_\varepsilon^2);\ a_1(J_\varepsilon^2), a_2(J_\varepsilon^2), ..., a_n(J_\varepsilon^2))$$

est inclus dans un compact de $E^n \times E^n$ (chaque composante est incluse dans un compact de E).

Étape 4.

En résumé, nous avons

• J_ε^2 est borné (car inclus dans $I=[0,T]$), il est mesurable (car $J_\varepsilon^2 := N_p$),

• $\forall s \in J_\varepsilon^1$, en particulier, $\forall s \in J_\varepsilon^2$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n(s) = 1$,

• Toutes les λ_i^n sont mesurables et bornées donc Lebesgue intégrables sur J_ε^1, (et en particulier sur J_ε^2). Toutes les φ_{a_i} sont mesurables sur I, en particulier sur J_ε^2, mais pour $i=\overline{1,n}$, elles sont bornées sur J_ε^2 car pour chacune d'entre elles $\varphi_{a_i}(J_\varepsilon^2)$ est inclut dans un compact (donc borné) de E. Donc pour $i=\overline{1,n}$, les φ_{a_i} sont Bochner intégrables sur J_ε^2.

On peut appliquer le Lemme 2.1, avec $J := J_\varepsilon^2$, $\lambda_i := \lambda_i^n : J_\varepsilon^2 \to \mathbb{R}^+$, $\varphi_{b_i} := \varphi_{a_i} : J_\varepsilon^2 \to E$, $i=\overline{1,n}$, et on l'applique pour $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3}$, nous obtenons une partition mesurable $\{M_i\}_{i=1}^n$ de J_ε^2 tel que

$$\sup_{[t',t'']\subset\mathbb{R}} \left\| \int_{[t',t'']\cap J_\varepsilon^2} \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(s)\varphi_{a_i}(s) \right] ds \right\|_E < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.9}$$

Soit $M_0 = I \setminus J_\varepsilon^2$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} b_\varepsilon &: I \to E \\ s &\mapsto b_\varepsilon(s) = \sum_{i=0}^{n} \chi_{M_i}(s) a_i(s). \end{aligned}$$

C'est une fonction somme finie de produit d'applications mesurables sur I : les $a_i, i=\overline{1,n}$ et a_0 et les fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables χ_{M_i},(remarquez que les a_i ne sont pas forcément Bochner intégrables sur I contrairement aux autres) donc elle est mesurable sur I. Mais elle est aussi bornée sur I par conséquent, elle est Bochner intégrable sur I. En plus, b_ε appartient à S_Γ car

$$\forall s \in I, \quad b_\varepsilon(s) = \begin{cases} a_0(s) \in \Gamma(s) \text{ (sélection de } \Gamma \text{)} & si\ s \in M_0 \\ a_i(s) \in \Gamma(s) \text{ (représentation de Castaing)} & si\ s \in M_i\ avec\ i \in \overline{1,n}. \end{cases}$$

donc $b_\varepsilon \in S_\Gamma^1$.

De plus, $\varphi_{b_\varepsilon} \in L^1_E(I)$ car $\forall s \in I$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{b_\varepsilon}(s) &= \varphi(s, \sum_{i=0}^{n} \chi_{M_i}(s) a_i(s)) \\
&= \varphi_s(\sum_{i=0}^{n} \chi_{M_i}(s) a_i(s)) \\
&\overset{\varphi_s\ affine}{=} \sum_{i=0}^{n} \chi_{M_i}(s) \varphi_s(a_i(s)) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \chi_{M_i}(s) \varphi(s, a_i(s)) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \chi_{M_i}(s) \varphi_{a_i}(s)
\end{aligned}$$

et $\forall i$, $\varphi_{a_i} \in L^1_E(I)$ car $a_i \in L^1_E(I)$ et φ est une fonction de Carathodory.

On conclut que $b_\varepsilon \in S^{1,\varphi}_\Gamma$.

Étape 5.

Soit $[t', t''] \subset I$. Il nous reste qu'à montrer que

$$\psi(t', t'') := \left\| \int_{[t',t'']} [\varphi_{b_\varepsilon}(s) - \varphi_a(s)] ds \right\|_E < \varepsilon.$$

Notons que comme $[t', t''] \subset I$, alors

$$\begin{aligned}
[t', t''] = [t', t''] \cap I = [t', t''] \cap ((I \setminus J^2_\varepsilon) \cup J^2_\varepsilon) &= ([t', t''] \cap (I \setminus J^2_\varepsilon)) \cup ([t', t''] \cap J^2_\varepsilon) \\
&= ([t', t''] \setminus J^2_\varepsilon) \cup ([t', t''] \cap J^2_\varepsilon)
\end{aligned}$$

et ces deux derniers ensembles sont disjoints, d'où

$$\int_{[t',t'']} [\varphi_{b_\varepsilon}(s) - \varphi_a(s) r] ds = \int_{[t',t''] \setminus J^2_\varepsilon} [\varphi_{b_\varepsilon}(s) - \varphi_a(s)] ds + \int_{[t',t''] \cap J^2_\varepsilon} [\varphi(s)_{b_\varepsilon} - \varphi_a(s)] ds$$

donc

$$\begin{aligned}
\psi(t', t'') &= \left\| \int_{[t',t''] \setminus J^2_\varepsilon} [\varphi_{b_\varepsilon}(s) - \varphi_a(s)] ds + \int_{[t',t''] \cap J^2_\varepsilon} [\varphi_{b_\varepsilon}(s) - \varphi_a(s)] ds \right\|_E \\
&\leq \left\| \int_{[t',t''] \setminus J^2_\varepsilon} [\varphi_{b_\varepsilon}(s) - \varphi_a(s)] ds \right\|_E + \left\| \int_{[t',t''] \cap J^2_\varepsilon} [\varphi_{b_\varepsilon}(s) - \varphi_a(s)] ds \right\|_E
\end{aligned}$$

• Par les propriétés de l'intégrale et la norme

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{[t',t'']\setminus J_\varepsilon^2} [\varphi_{b_\varepsilon}(s) - \varphi_a(s)]ds \right\|_E &\leq \int_{[t',t'']\setminus J_\varepsilon^2} \|\varphi_{b_\varepsilon}(s) - \varphi_a(s)\|_E \, ds \\
&= \int_{[t',t'']\setminus J_\varepsilon^2} \|\varphi_{a_0}(s) - \varphi_a(s)\|_E \, ds \\
&\leq \int_{[t',t'']\setminus J_\varepsilon^2} (\|\varphi_{a_0}(s)\|_E + \|\varphi_a(s)\|_E) ds \\
&\overset{[t',t'']\setminus J_\varepsilon^2 \subset I\setminus J_\varepsilon^2}{\leq} \int_{I\setminus J_\varepsilon^2} (\|\varphi_{a_0}(s)\|_E + \|\varphi_a(s)\|_E) ds \\
&= \int_{(I\setminus J)\cup(J\setminus J_\varepsilon^2)} (\|\varphi_{a_0}(s)\|_E + \|\varphi_a(s)\|_E) ds \\
&= \int_{(I\setminus J)\cup M} (\|\varphi_{a_0}(s)\|_E + \|\varphi_a(s)\|_E) ds \\
&\overset{(2.7)}{<} \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

car $[t',t''] \setminus J_\varepsilon^2 \subset M_0$ d'où $\forall s \in [t',t''] \setminus J_\varepsilon^2$,

$$\begin{aligned}
b_\varepsilon(s) &= \sum_{i=0}^{n} \chi_{M_i}(s)\varphi_{a_i}(s) \\
&= \chi_{M_0}(s)\varphi_{a_0}(s) + \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(s)\varphi_{a_i}(s) \\
&= 1.\varphi_{a_0}(s) + \sum_{i=1}^{n} 0.\varphi_{a_i}(s) \\
&= \varphi_{a_0}(s) + 0_E \\
&= \varphi_{a_0}(s).
\end{aligned}$$

Pour $M = (J \setminus J_\varepsilon^2)$

$\mu(M) = \mu(J \setminus J_\varepsilon^2) = \mu((J \setminus J_\varepsilon^1) \cup (J_\varepsilon^1 \setminus J_\varepsilon^2)) = \mu(J \setminus J_\varepsilon^1) + \mu(J_\varepsilon^1 \setminus J_\varepsilon^2) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$ (disjoints).

• Pour la deuxième quantité $Q := \left\|\int_{[t',t'']\cap J_\varepsilon^2}[\varphi_{b_\varepsilon}(s)-\varphi_a(s)]ds\right\|_E$,

$$\begin{aligned}
Q &= \left\|\int_{[t',t'']\cap J_\varepsilon^2}[\varphi_{b_\varepsilon}(s)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s)-\varphi_a(s)]ds\right\|_E \\
&= \left\|\int_{[t',t'']\cap J_\varepsilon^2}[\varphi_{b_\varepsilon}(s)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s)]ds+\int_{[t',t'']\cap J_\varepsilon^2}[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s)-\varphi_a(s)]ds\right\|_E \\
&\leq \left\|\int_{[t',t'']\cap J_\varepsilon^2}[\varphi_{b_\varepsilon}(s)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s)]ds\right\|_E+\left\|\int_{[t',t'']\cap J_\varepsilon^2}[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s)-\varphi_a(s)]ds\right\|_E \\
&\leq \left\|\int_{[t',t'']\cap J_\varepsilon^2}[\varphi_{b_\varepsilon}(s)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s)]ds\right\|_E+\int_{[t',t'']\cap J_\varepsilon^2}\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s)-\varphi_a(s)\right\|_E ds \\
&= \left\|\int_{[t',t'']\cap J_\varepsilon^2}[\sum_{i=1}^{n}\chi_{M_i}(s)\varphi_{a_i}(s)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s)]ds\right\|_E \\
&+ \int_{[t',t'']\cap J_\varepsilon^2}\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s)-\varphi_a(s)\right\|_E ds \\
&\overset{(2.9)}{<} \frac{\varepsilon}{3}+\int_{[t',t'']\cap J_\varepsilon^2}\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s)-\varphi_a(s)\right\|_E ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3}+\int_{J_\varepsilon^1}\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(s)\varphi_{a_i}(s)-\varphi_a(s)\right\|_E ds \\
&\overset{(2.8)}{<} \frac{\varepsilon}{3}+\int_{J_\varepsilon^1}\frac{\varepsilon}{3\mu(J)}ds \\
&= \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3\mu(J)}\mu(J_\varepsilon^1) \\
&\overset{J_\varepsilon^1\subset J}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3\mu(J)}\mu(J) \\
&= \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

car $[t',t'']\cap J_\varepsilon^2 \subset J_\varepsilon^2$ d'où $\forall s\in[t',t'']\cap J_\varepsilon^2, s\in J_\varepsilon^2$, s n'appartient pas à M_0

$$b_\varepsilon(s)=\chi_{M_0}(s)a_0(s)+\sum_{i=1}^{n}\chi_{M_i}(s)a_i(s)=0.a_0(s)+\sum_{i=1}^{n}\chi_{M_i}(s)a_i(s)=0_E+\sum_{i=1}^{n}\chi_{M_i}(s)a_i(s).$$

On conclut que

$$\psi(t',t'')<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

ceci complète la preuve. ■

Corollaire 2.4. *([11], Corollary 1.1, p.7) Supposons que Γ admet une représentation de Castaing et que $S_\Gamma^{1,\varphi}\neq\emptyset$. Alors, pour chaque $a\in S^1_{\overline{co}\Gamma}$ et $\varepsilon>0$ il existe $b_\varepsilon\in S^1_\Gamma$ tel que*

$$\sup_{[t',t'']\subset I}\left\|\int_{I'}^{I''}[a(s))-b_\varepsilon(s))]ds\right\|_E<\varepsilon,$$

autrement dit, S^1_Γ est "dense" dans $S^1_{\overline{co}\Gamma}$ pour $\|.\|_{max}$.

Démonstration. Il suffit de prendre $\varphi(t,y)=y$ et appliquer le théorème précédent. ■

Chapitre 3

Relaxation

Il s'agit ici d'une application du théorème de densité du chapitre précédent dans le domaine des inclusions différentielles. Considérons les deux inclusions différentielles du premier ordre

$$(1)\begin{cases}\dot{x}(t)\in F(t,x(t)),\ t\in I\\ x(0)=a,\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\dot{x}(t)\in \overline{co}F(t,x(t)),\ t\in I\\ x(0)=a,\end{cases}$$

où $I=[0,T[$, $a\in E$ et $F:I\times E\rightrightarrows E$ une multi-application, avec $(E,\|.\|)$ un espace de Banach séparable de dimension quelconque. $\overline{co}$ désigne l'enveloppe convexe fermée.
Le problème (2) représente une forme relaxée du problèmes (1). Il est clair que l'ensemble des solutions de (2), notée S_2 est plus large que celui de (1), noté S_1.
On aimerai comparer et chercher une relation topologique entre S_1 et S_2.

Dans [11], à travers le Théorème 2.1 (p.10), l'auteur a montré que si I est compacte ($I=[0,T]$),alors sous deux conditions ((a) et (b) p. 9), S_1, est dense dans S_2, pour d_u la distance de la convergence uniforme sur le compact $[0,T]$. C'est un résultat de relaxation. Ce Théorème a fait l'objet d'étude et d'analyse du dernier chapitre dans [17].
Puis, dans [11], à travers le Théorème 2.2 (p. 12), l'auteur s'est placé dans un cadre plus général, le cadre d'un intervalle pas forcément borné de la forme $[0,T[$ où $T\in\mathbb{R}$ ou $T=+\infty$. Sous deux nouvelles conditions ($(a)'$,$(b)'$ p.12), il arrive à prouver que non seulement S_1 est non vide, mais aussi qu'il est dense dans S_2 pour d_u sur chaque sous-intervalle compact de $[0,T[$. Ce théorème de relaxation fait l'objet principal de ce chapitre

dans ce mémoire, notre contribution est de bien analyser et détailler sa preuve.

Pour la preuve du théorème de la relaxation, nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 3.1. *([11], p. 10) Soit $F : I \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées, vérifiant la condition (b) et la première partie de la condition (a), c'est à dire $\forall y \in E$, la multi-application*

$$F(.,y) = F_y : I \rightrightarrows E$$
$$t \mapsto F_y(t) = F(t,y)$$

est mesurable.
Soit $\varphi : I \to E$ une application mesurable. Alors, la multi-application

$$\Gamma : I \rightrightarrows E$$
$$S \mapsto \Gamma(s) = F(s, \varphi(s))$$

est mesurable.

Nous aurons aussi besoin du Lemme 2.1 du papier [11] (c'est le théorème 2.4, p 44 dans [17]) pour le problème (1) considéré sur un intervalle compact $J = [0, B]$. Nous préférons reformuler son énoncé comme suit :
On suppose que F est à valeurs non vides, fermées et que $\forall y \in E, F_y : J \rightrightarrows E$ est mesurable

Lemme 3.2. *Soit $\tilde{x} : J \to E$ une application continue.*
- *On suppose qu'il existe $L(.) \in L^1_{\mathbb{R}}(J)$ et $\rho > 0$ tels que p.p. $t \in J$,*

$$\mathcal{H}(F(t,x_1), F(t,x_2)) \leq L(t)\|x_1 - x_2\|, \ \forall x_1, x_2 \in B(\bar{x}, \rho) \text{ avec } \bar{x} \in \tilde{x}(J).$$

- *On suppose aussi qu'il existe une application $f_1(t) \in L^1_E(J)$ et un réel $r > 0$ tels que*

$$f_1(t) \in F(t, \tilde{x}(t)), \ \ p.p. \ t \in J$$

et
$$d_u(\tilde{x}, u_{f_1}) = \max_{t \in J} \|\tilde{x}(t) - (a + \int_0^t f_1(s)ds)\|_E \leq \frac{1}{2} min(\rho, \epsilon) \exp - \int_{[a,b]} \mathbf{L}(s)ds.$$
Alors, le problème (1), considéré sur J, admet une solution $x(.)$ sur J vérifiant

$$d_u(\tilde{x}, s) \leq \frac{1}{2} min(\rho, r).$$

3.1 Théorème de relaxation

On considère le problème (1) mais pour $I = [0, T[$ avec $T \leq +\infty$,

Théorème 3.3. *On suppose que la multi-application F est à valeurs non vides fermées et que*

(*a*) $\forall y \in E$, *la multi-application*

$$\begin{aligned} F(.,y) = F_y : I &\rightrightarrows E \\ t &\mapsto F_y(t) = F(t,y). \end{aligned}$$

est mesurable et admet une sélection intégrable,

(*b*) *p.p.* $t \in I$ *la multi-application* $F(t,.) = F_t$ *est localement Lipschitzienne avec coefficient* L_t *tel que la fonction* $L(t) = L_t$ *est intégrable sur* I.

Autrement dit, $\forall K \subset E$ *compact,* $\exists \rho_{(K)} > 0$, $\exists L_{(K)}(.) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$ *tels que p.p.* $t \in I$,

$$\mathcal{H}(F(t,y_1), F(t,y_2)) \leq L(t)\|y_1 - y_2\|_E$$

$\forall y_1, y_2 \in B_E(y, \rho)$, $\forall y \in K$.

Alors, S_1 *est dense dans* S_2 *pour la topologie (issue de la distance* d_u*) de la convergence uniforme sur* I.

$$\begin{aligned} S_1 \text{ dense dans } S_2 \text{ pour la distence } d_u &\Leftrightarrow S_2 \subset \overline{S_1} \\ &\Leftrightarrow \forall \tilde{x} \in S_2, \tilde{x} \in \overline{S_1} \\ &\Leftrightarrow \forall \tilde{x} \in S_2, d(\tilde{x}, S_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \tilde{x} \in S_2, \inf_{x \in S_1} d_u(\tilde{x}, x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \tilde{x} \in S_2, \forall \epsilon > 0, \inf_{x \in S_1} d_u(\tilde{x}, x) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \tilde{x} \in S_2, \forall \epsilon > 0, \exists x(\epsilon) \in S_1, d_u(\tilde{x}, x) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \tilde{x} \in S_2, \forall \epsilon > 0, \exists x(\epsilon) \in S_1, \max_{t \in I} \|x(t) - \tilde{x}(t)\|_E < \epsilon. \end{aligned}$$

Théorème 3.4. *On Suppose que la multi-application F est à valeurs non vides fermés et que*

(a') *Pour chaque* $y \in E, F(.,y)$ *est mesurable, et il existe une application mesurable* $\bar{u} : I \to E$ *localement bornée telle que la multi-application* $t \mapsto F_{\bar{u}}(t) = F(t, \bar{u}(t))$ *admet une sélection localement intégrable* $\bar{f}$,

(b') *il existe une fonction* $L : [0, T[\to \mathbb{R}$ *localement intégrable, telle que pour presque tout* $t \in [0, T[$,

$$\mathcal{H}(F(t,y_1), F(t,y_2)) \leq L(t)\|y_1 - y_2\|, \quad \forall y_1, y_2 \in E.$$

Alors S_1 est non vide, et il est dense dans S_2 pour la distance de la convergence uniforme sur chaque sous-intervalle compact de I.

Démonstration. **Partie 1** : Montrons que $S_1 \neq \emptyset$, c'est à dire que le problème (1) admet une solution sur $I = [0, T[$, c'est à dire qu'il existe une application $x : [0, T[\to E$ qui est :
• définie et continue sur $[0, T[$ ($x \in C([0, T[, E))$,
• vérifie $x(0) = a$,
• dérivable presque partout sur $[0, T[$, et sa dérivée $\dot{x}(.)$ vérifie $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ au moins pour presque tout $t \in [0, T[$. Tout d'abord, nous remarquons que la condition $(a)' \Rightarrow (a'')$ telles que
$(\mathbf{a}'')$: pour toute application mesurable $u : [0, T[\to E$ localement bornée, la multi-application $t \mapsto F(t, u(t))$ admet une sélection localement intégrable.
En effet, on suppose que (a') est vérifiée. Soit $u : [0, T[\to E$ une application mesurable et localement bornée. Notons par

$$\begin{aligned} F_u :& I \rightrightarrows E \\ & t \mapsto F_u(t) = F(t, u(t)). \end{aligned}$$

Alors F_u admet une sélection (qu'on va noter $\bar{f}$) localement intégrable. En effet,
•F_u est à valeurs non vides fermées car F l'est,
•F_u est mesurable car F l'est (par le Lemme 3.1),
définissons la multi-application

$$\begin{aligned} H :& I \rightrightarrows E, \\ & t \mapsto H(t) = \{v \in F_u(t); \|\bar{f}(t) - v\|_E \leq d(\bar{f}(t), F_u(t))\}. \end{aligned}$$

Par le Théorème 1.73 ([24]), la multi-application H est mesurable et elle est à valeurs fermées non vides. Donc grâce au théorème d'existence de sélection mesurable (1.72) H admet une sélection mesurable $\bar{\bar{f}}$, c'est à dire il existe une application mesurable $\bar{\bar{f}} : I \to E$ qui vérifie $\bar{\bar{f}}(t) \in H(t), \ \ \forall t \in I$ ce qui est équivalent à

$$\bar{\bar{f}} \in F(t, u(t)), \ \ \forall t \in I$$

(ce qui veut dire implicitement que $\bar{\bar{f}}$ est une sélection pour F_u en plus d'être mesurable) et

$$\|f\bar{(t)} - f\bar{\bar{(t)}}\| \leq d(\bar{f}(t), F(t, u(t))), \ \ \forall t \in I.$$

On peut montrer que $\bar{\bar{f}}$ est localement intégrable sur I. Soit $t \in I$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \|\bar{\bar{f}}(t)\|_E & = & \|\bar{\bar{f}}(t) - \bar{f}(t) + \bar{f}(t)\|_E \\ & \leq & \|\bar{\bar{f}}(t) - \bar{f}(t)\|_E + \|\bar{f}(t)\|_E, \end{array}$$

or

$$\begin{array}{rcl} \|\bar{\bar{f}}(t) - \bar{f}(t)\|_E & \leq & d(\bar{f}(t), F(t, u(t))) \\ & \overset{car\ \bar{f}(t) \in F_{\bar{u}}(t)}{\leq} & \sup\limits_{y \in F_{\bar{u}}(t)} d(y, F_u(t)); \\ & = & e(F_{\bar{u}}(t), F_u(t)) \\ & \leq & \mathcal{H}(F_{\bar{u}}(t), F_u(t)) \\ & = & \mathcal{H}(F(t, \bar{u}(t)), F(t, u(t))) \\ & \overset{(b'),\ p.p.\ t \in I}{\leq} & L(t)\|u(t) - \bar{u}(t)\|. \end{array}$$

On conclut que pour presque tout $t \in I$,

$$\|\bar{\bar{f}}(t)\|_E \leq L(t)\|u(t) - \bar{u}(t)\|_E + \|\bar{f}(t)\|_E,$$

or, u est localement bornée sur I, d'où pour le t fixé, il existe un voisinage V_u, il existe $M_t > 0$ tel que $\|u(t)\|_E \leq M_t$, $\forall t \in V_u$ (c'est à dire u est bornée sur V_u).
D'autre part, $\bar{u}$ est localement bornée sur I, d'où pour le t, il existe aussi un voisinage $V_{\bar{u}}$, il existe $\overline{M_t} > 0$ tel que $\|\bar{u}(t)\|_E \leq \overline{M_t}$, $\forall t \in V_{\bar{u}}$ (c'est à dire $\bar{u}$ est bornée sur $V_{\bar{u}}$).
Pour presque tout $t \in I$, $\exists V_u, \exists V_{\bar{u}} \in V_I(t)$, il suffit donc de prendre $V = V_u \cap V_{\bar{u}}$, alors u et $\bar{u}$ seront bornées sur V,

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_E \leq M_t + \overline{M_t} = M$$

d'où

$$\|\bar{\bar{f}}(t)\|_E \leq L(t)M + \|\bar{f}(t)\|_E.$$

Comme $\bar{f}$ et L sont localement intégrables sur I, alors $\bar{\bar{f}}$ l'est aussi. Maintenant, montrons que $S_1 \neq \emptyset$, c'est à dire que (1) admet au moins une solution sur l'intervalle globale $I = [0, T[$. Nous allons d'abord montrer que (1) admet une solution sur chaque sous-intervalle compact de I, particulièrement de la forme $[0, T_1]$. Soit donc $I' = [0, T_1] \subset I$ un intervalle ($T_1 \in \mathbb{R}$). Définissons l'application F_a par :

$$\begin{aligned} F_a : & I \rightrightarrows E \\ & t \mapsto F_a(t) = F(t, a). \end{aligned}$$

F_a admet une sélection intégrable f_1, en effet, en considérant l'application

$$u : I \to E$$
$$t \mapsto u(t) = a,$$

u est bornée étant constante ($0 \le \|u(t)\|_E = \|a\|_E \le \|a\|_E$), et donc elle est localement bornée. u est mesurable étant continue en étant constante. Alors d'après (a''), la multi-application F_a admet une sélection f_1 localement intégrable sur I, et qui est donc intégrable sur le compact $I' \subset I$. Nous pouvons appliquer le Lemme 3.2 pour :

• $J = I' = [0, T_1]$,

• $\tilde{x} \equiv a$,

• $L(.) = L(.)$, car nous avons pour presque tout $t \in I'$,

$$\mathcal{H}(F(t, y_1), F(t, y_2)) \le L(t)\|y_1 - y_2\|_E, \ \ \forall y_1, y_2 \in B(\bar{x}, \rho)$$

avec $\bar{x} = a$, puisque

$$\tilde{x}(J) = \tilde{x}(I') = \{\tilde{x}(t);\ t \in I'\} = \{a;\ t \in I'\} = \{a\}.$$

• $f_1 = f_1$

•$\rho = r = 2(\int_{I'} \|f_1(s)\|_E ds)\ e^{\int_{I'} L(s)ds}$, $f_1 \in F(t, a) = f_a(t)$ p.p $t \in I'$. En plus on peut Vérifier que

$$d_u(\tilde{x}, f_1) = \max_{t \in I'} \|\tilde{x}(t) - (a + \int_0^t f_1(s)ds)\|_E \le \frac{1}{2} \min(\rho, r) \exp^{-\int_{I'} L(s)ds},$$

en effet,

$$\begin{aligned}
\max_{t \in I'} \|\tilde{x}(t) - a - \int_0^t f_1(s)ds\|_E &= \max_{t \in I'} \|a - a - \int_0^t f_1(s)ds\|_E \\
&= \max_{t \in I'} \| \int_0^1 f_1(s)ds\|_E \\
&\le \frac{1}{2}.2 \int_{I'} \|f_1(s)\|_E ds \times e^{\int_{I'} L(s)ds} \times e^{-\int_{I'} L(s)ds} \\
&= \int_{I'} \|f_1(s)\|_E ds \\
&= \int_0^{T_1} \|f_1(s)\|_E ds.
\end{aligned}$$

Alors d'après le Lemme 3.2, le problème (1) admet une solution x sur $I' = [0, T_1]$ et qui vérifie de plus

$$\begin{aligned}
d_u(\tilde{x}, x) = \max_{t \in I'} \|\tilde{x}(t) - x(t)\| &\le \frac{1}{2} \min(\rho, r) \exp^{\int_{I'} L(s)ds} \\
&= (\int_{I'} \|f_1(s)\|_E ds) \exp^{\int_{I'} L(s)ds}.
\end{aligned}$$

Nous allons généraliser l'existence de solution sur $I = [0, T[$ globalement. Nous avons,

$$I = [0, T[= [0, T_1] \cup [T_1, T_2] \cup ... \cup [T_n, T_{n+1}] \cup ...$$

• Sur le compact $[0, T_1]$: le problème (1) admet une solution c.à.d, $\exists x^{(0)} : [0, T_1] \to E$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(0)} \in F(t, x^{(0)}(t)) \ \ p.p.\ t \in [0, T_1] \\ x^{(0)}(0) = a. \end{cases}$$

• Sur le compact $[0, T_2]$: le problème (1) admet aussi une solution c.à.d, $\exists x^{(1)}{}_{temp}$: $[0, T_2] \to E$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)}_{temp} \in F(t, x^{(1)}{}_{temp}(t)) \ \ p.p.\ t \in [0, T_2]\ (disant\ qu'elle\ est\ vérifiée\ sur\ \mathcal{A}_1) \\ x^{(1)}{}_{temp}(0) = a. \end{cases}$$

On définit $x^{(1)} : [T_1, T_2] \to E$ par

$$x^{(1)}(t) = \begin{cases} x^{(1)}_{temp}(t), & si\ t \in]T_1, T_2] \\ x^{(0)}(T_1), & si\ t = T_1. \end{cases}$$

L'application $x^{(1)}$ est dérivable p.p. sur $[T_1, T_2]$:
si $t \in [T_1, T_2]$, alors $t \in \mathcal{A}$, ou $t \in C^{\mathcal{A}}_{[T_1,T_2]}$ $(\mu(C) = 0)$
si $t \in \mathcal{A}_2$: $\dot{x^{(1)}}(t) = \dot{x_\rho^{(1)}}(t) \in F(t, x_\rho{}^{(1)}(t)) = F(t, x^{(1)}(t))$

• Sur le compact $[0, T_3]$: le problème (1) admet aussi une solution c.à.d, $\exists x^{(2)}{}_{temp}$: $[0, T_3] \to E$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(2)}_{temp} \in F(t, x^{(2)}{}_{temp}(t)) \ \ p.p.\ t \in [0, T_3] \\ x^{(2)}{}_{temp}(0) = a. \end{cases}$$

On définit $x^{(2)} : [T_1, T_2] \to E$ par

$$x^{(2)}(t) = \begin{cases} x^{(2)}_{temp}(t), & si\ t \in]T_2, T_3] \\ x^{(1)}(T_2), & si\ t = T_2. \end{cases}$$

Soit $t \in [T_1, T_2]$, alors $t \in \mathcal{A}$, ou $t \in C^{\mathcal{A}}_{[T_1,T_2]}$ $(\mu(C) = 0)$
• Si $t \in \mathcal{A}_3$: $\dot{x^{(2)}}(t) = \dot{x_\rho^{(2)}}(t) \in F(t, x_\rho{}^{(2)}(t)) = F(t, x^{(2)}(t))$
puisque $T_1 \in [T_1, T_2]$ alors, $x^{(1)}(T_1) = x_\rho^{(1)}(T_1)$

.

.

.

et ainsi de suite, c.à.d, en général pour tout $n \geq 1$ on obtient une application $x^{(n)} : [T_n, T_{n+1}] \to E$ dérivable et vérifiant $\dot{x}^{(n)} \in F(t, x^{(n)}(t))$ *p.p.* $t \in [T_n, T_{n+1}]$ ($\forall t \in \mathcal{A}_n$), avec $x^{(n)}(T_n) = x^{(n-1)}(T_n)$. Nous avons obtenu une suite d'applications $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Maintenant, définissons l'application

$$\begin{aligned} x : [0, T[&\to E \\ t &\mapsto x(t) = x^{(n)}(t), \forall t \in [T_n, T_{n+1}[,\ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

i.e.

$$x(t) = \begin{cases} x^{(0)}(t), \ si\ t \in [0, T_1[\\ x^{(1)}(t), \ si\ t \in [T_1, T_2[\\ x^{(2)}(t), \ si\ t \in [T_2, T_3[\\ . \\ . \\ . \end{cases}$$

On peut voir que $x \in S_1$. En effet,

• comme $0 \in [0, T_1[$, alors $x(0) = x^0(0) = a$,

• x est dérivable p.p. sur I,

$$\begin{aligned} I &= [0, T_1] \cup [T_1, T_2] \cup ... \cup [T_n, T_{n+1}] \cup ... \\ &= (\mathcal{A}_1 \cup C^{\mathcal{A}_1}_{[0,T_1]}) \cup (\mathcal{A}_2 \cup C^{\mathcal{A}_2}_{[T_1,T_2]}) \cup (\mathcal{A}_3 \cup C^{\mathcal{A}_3}_{[T_2,T_3]}) \cup ... \\ &= (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup ...) \cup (C^{\mathcal{A}_1}_{[0,T_1]} \cup C^{\mathcal{A}_2}_{[0,T_2]} \cup C^{\mathcal{A}_3}_{[0,T_3]} \cup ...) \\ &= \mathcal{A} \cup C^{\mathcal{A}}_I, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} si\ t \in \mathcal{A} &\Rightarrow \exists!\ n \in \mathbb{N}^* : t \in \mathcal{A}_n \\ &\Rightarrow \exists!\ n \in \mathbb{N}^* : x(t) = x^{(n)}(t)\ et\ \dot{x}^{(n)}(t) \in F(t, x^{(n)}(t)) \\ &\Rightarrow \exists!\ n \in \mathbb{N}^* : \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \\ &\Rightarrow \dot{x}(t) \in F(t, x(t)). \end{aligned}$$

Partie 2 : Densité

On veut montrer que S_1 est dense dans S_2 pour " la topologie de la convergence uniforme sur chaque sous-intervalle compact de la forme $[T', T'']$ de I ". Pour cela, il suffit de le montrer sur chaque sous-intervalle compact de I de la forme $[0, T_1]$ en particulier. Soit donc $[0, T_1] \subset I$ ($T_1 \in \mathbb{R}$). Il faut montrer que

$$\forall x(.) \in S_2, \forall \epsilon > 0,\ \exists x_\epsilon(.) \in S_1 : \max_{t\in[0,T_1]} \|x(t) - x_\epsilon(t)\|_E < \epsilon.$$

Soit $x(.) \in S_2$ (une solution du problème (2) sur l'intervalle global I) et soit $\epsilon > 0$. Alors $x(.)$ sera évidemment, une solution pour (2) sur $[0, T_1]$ en particulier (car $[0, T_1] \subset I$, on garde donc la dérivabilité p.p. sur lui, l'appartenance et bien sur $x(0) = a$), on peut écrire $x(.) \in S_{2,T_1}$, i.e.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \ p.p. \ t \in [0, T_1] \\ x(0) = a. \end{cases}$$

Comme $[0, T_1]$ est un intervalle compact, on peut appliquer le Théorème 3.3 (le Théorème2.1 dans [11]), d'après ce dernier pour $x(.) \in S_{2,T_1}$ et pour $\epsilon > 0$, il existe $y_{\epsilon,T_1}(.) \in S_{1,T_1}$ tel que

$$\max_{t \in [0,T_1]} \|x(t) - y_{\epsilon,T_1}(t)\|_E < \epsilon \tag{Δ}$$

autrement dit, S_{1,T_1} est dense dans S_{2,T_1} pour la topologie de la convergence uniforme sur $[0, T_1]$. Considérons le problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \ t \in [T_1, T[\\ x(T_1) = y_{\epsilon,T_1}(T_1), \end{cases}$$

mieux noté

$$(P) \begin{cases} \dot{z}(t) \in F(t, z(t)), \ t \in [T_1, T[\\ z(T_1) = y_{\epsilon,T_1}(T_1). \end{cases}$$

D'après la partie 1 de la démonstration, ce problème admet au moins une solution, i.e. il existe une application $z_p : [T_1, T[\to E$ vérifiant (P). En effet, if suffit de considérer le problème

$$(*) \begin{cases} \dot{z}(t) \in F(t, z(t)), \ t \in [0, T[\\ z(0) = y_{\epsilon,T_1}(T_1), \end{cases}$$

qui en fait, d'après la partie1, admet une solution $z_* : [0, T[\to E$. Puis, on définit l'application

$$z_p : [T_1, T[\to E$$

$$t \mapsto z_p(t) = \begin{cases} z_*(t), t \in]T_1, T[\\ y_{\epsilon,T_1}(T_1), t = T_1. \end{cases}$$

Enfin, maintenant, définissons l'application

$$x_\epsilon : [0, T[\to E$$

$$t \mapsto x_\epsilon(t) = \begin{cases} y_{\epsilon,T_1}(t), \ \forall t \in [0, T_1] \\ z_p(t), \ \forall t \in [T_1, T[. \end{cases}$$

Ainsi x_ϵ définie une solution pour (1) ($x_\epsilon \in S_1$) car :

- $x_\epsilon(0) \overset{0\in[0,T_1]}{=} y_{\epsilon,T_1}(0) \overset{y_{\epsilon,T_1}\in S_1}{=} a$,
- p.p. $t \in [0, T_1]$,

$$\dot{x}_\epsilon(t) = \dot{y}_{\epsilon,T_1}(t) \in F(t, y_{\epsilon,T_1}(t)) = F(t, x_\epsilon(t)),$$

- p.p. $t \in [T_1, T[$,

$$\dot{x}_\epsilon(t) = \dot{z}_p(t) = \dot{z}_*(t) \in F(t, z_*(t)) = F(t, z_p(t)) = F(t, x_\epsilon(t)),$$

de plus, si on calcule :

$$d_u(x(t), x_\epsilon(t)) = \underset{t\in[0,T_1]}{max} \|x(t) - x_\epsilon(t)\|_E = \underset{t\in[0,T_1]}{max} \|x(t) - y_{\epsilon,T_1}(t)\|_E \overset{(\Delta)}{<} \epsilon.$$

$\blacksquare$

Bibliographie

[1] A.R. Aftabizadeh, S. Aizicovici and N.H. Pavel, On a class of second-order anti-periodic boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 171, (1992), 301-320.

[2] D. Azzam-Laouir, *Cours de mesure et intégration*, polycopié,, Département de Mathématiques, Université de Jijel (2009).

[3] D. Azzam-Laouir, *Cours d'analyse multivoque*, polycopié, Département de Mathématiques, Université de Jijel (2009).

[4] D. Azzam-Laouir, *Cours d'analyse convexe*, polycopié, Département de Mathématiques, Université de Jijel (2014).

[5] S. Bechani et S. Djihal, *Quelques propriétés topologique des espaces de fonctions*, mémoire de Master, Université Med Seddik Benyahia-Jijel (2017-2018).

[6] M. Benamara, *Sélections mesurables extrêmales d'une multi-application*, C.R. Acad. Sci. Paris 278 (1974), 1249-1252.

[7] F. Bienvenu, *Notes de Cours, Math-Bio, Introduction à la topologie*, Université de Montpellier (2015).

[8] N. Boudjerida et K. Dib, *Théorèmes d'existence et de relaxation pour des inclusions différentielles non bornées dans un espace de Banach*, mémoire de Master, Université Med Seddik Benyahia-Jijel (2018-2019).

[9] F. Bouguettouche et I. Boumezbeur, *Sur un théorème de mesurabilité pour les applications multivoques*, mémoire de Master, Université Med Seddik Benyahia-Jijel (2018-2019).

[10] C. Castaing et M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lectures Notes in Math., 580 Springer-Verlag, Berlin (1977).

[11] P.V. Chuong, *A density theorem with an application in relaxation of nonconvex-valued differential equations*, Journal of Mathematical analysis and applications. 124, (1987) 1-14.

[12] A.F. Filippov, *Differential equatons with discontinuous rjghthand side*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. 2 42 (1964), 199-231 (English transl.).

[13] L. Gasinski et N. S. Papageorgiou, *Series in Mathematical Analysis and Applications, Volume 9 :Nonlinear analysis*, National University of Ireland, (2005).

[14] A. Ghouila-Houri, *Sur la généralisation de la notion de commande d'un système guidable*, Rev. Inform. Rech. Opérationnelle 4 (1976), 7-32.

[15] N.EL Haga Hassan, *Topologie générale et espace normés*, Université d'Orléans, août (2011).

[16] C.J. Himmelberg, *Measurable relations*, Fund. Math. 87, (1975)53–72.

[17] M. Lamara et M. Bahri, *Sur un théorème de densité*, mémoire de Master, Université Med Seddik Benyahia-Jijel (2019-2020).

[18] P. Laurain , *Extrait d'un cours de M2, Compléments d'analyse : Théorie de la mesure et analyse spectrale* , l'IMJ (2013).

[19] A. Makhlouf, *Etude d'une classe d'inclusions différentielles avec second membre pseudo-Lipschitzien*, mémoire de Magister, Université Med Seddik BenYahia-Jijel (2010).

[20] F. Marçay, *Théorie de l'intégration de Lebesgue,* polycopié, Département de Mathématiques d'Orsay Université Paris-Sud, France.

[21] K. S. Papageorgiou et S. T. Kiritsy-Yaillourou, *Handbook of Applied Analysis*, Volume 19 (2008).

[22] Roy A.Mimna ,*Real Analysis Exchange* Vol. 23(1), 1998-99, pp. 251-258

[23] R.T. Rockafellar, *Integrals which are convex functionals*, Pacific J. Math. 24 (1968) 525-539.

[24] A. A. Tolstonogov et D. A. Tolstonogov, *Lp-Continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values, Relaxation theorems*, Set-Valued Anal., vol. 87, no. 4, (1996) 237–269.

[25] M. Valadier, *Semi-continuité de fonctionnelles intégrales*, Sém. Anal. Convexe, (1977), Exp. No. 2.

[26] J. Warga, *Functions of relaxed controls*, SIAM J. Control Optim. 5, No. 4 (1967), 628-641.

[27] Eric.W.Weisstein, *http ://mathworld.wolfram.com/Locallyintegrable.html*

[28] Q. Zhang et G. Li, *Nonlinear boundary value problems for second order differential inclusions.* Nonlinear Analysis, 70 (2009) 3390–3406.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons principalement à la ‘’ **relaxation** ‘’ d’une inclusion différentielle du premier ordre, via l’enveloppe convexe fermée. Nous présentons un résultat qui assure que sous certaines conditions l’ensemble des solutions du problème relaxé est ‘’ **dense** ‘’ dans celui du problème principal. Ceci dans un espace de Banach de dimension quelconque et surtout sur un intervalle pas forcément borné.

Abstract

In this work, we are mainly interested in the ‘’**relaxation**’’ of a first order differential inclusion, thanks to the closed convex hull. We present a result which ensures that under certain condition, the set of solution of the relaxed problem is dense in that of the main problem. This in a Banach space of any dimension and especially on an interval not necessarily bounded.

ملخص

في هذا العمل نحن مهتمون بشكل أساسي ب "**استرخاء**" احتوائية تفاضلية من الدرجة الأولى عن طريق الغلاف المحدب المغلق. نقوم بعرض نتيجة تضمن أنه تحت شروط معينة تكون مجموعة الحلول الخاصة بالمشكلة المسترخية "كثيفة" في مجموعة حلول المشكلة الأصلية. هذا في فضاء باناخ ذو بعد كيفي بل و على مجال ليس بالضرورة أن يكون محدودا.