REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammad Seddik Ben Yahai -Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématiques

$N°$ d'ordre : ....

$N°$ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Mathématiques fondamentales et Discrètes.

Thème

Sur quelques suites et polynômes remarquables sur l'algèbre des quaternions

Présenté par :

Meryem Boudechicha

Devant le jury :

Président : **A.Bouchair** Prof. Université M.S.B de Jijel

Encadreur **:** **N . Touafek** Prof. Université M.S.B de Jijel

Examinatrices : **I .Dekkar** Prof. Université M.S.B de Jijel

Promotion 2020/2021

Table des matières

Remerciements.

Je tiens tout d'abord à remercier vivement" **le bon dieu"**, pour me donne la force de continuer ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés, grâce à son aide que je fait ce modeste travail. Je tiens à adresser mes premiers remerciements à mon encadreur Monsieur **N.Touafek**, pour l'avoir suivi de près la réalisation de ce travail et pour ses précieux conseils, pour son encadrement de qualité, ses précieuses suggestions scientifiques, et sa patience tout au long de ce travail. Merci également à tous les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail. Merci pour votre précieuse expertise, pour votre regard critique, et pour leséchanges lors de la soutenance.

Je remercie de fond du coeur ma mère et mon père pour avoir cru en moi, et qui m'ont soutenu pendant toute la durée de mes études et de m'avoir encouragé pour en arriver là aujourd´hui. Je prie Dieu de vous garder.

Pour terminer, merci pour tous ceux qui leurs remarques et leurs conseils, ont

Dédicace

Je dédie ce travail. A mes très chers parents.

"***BOUDECHICHA HOUCINE, BOUABSA WARDA***"

Pour leur sacrifices et leur encouragements, et qui grâce à eux j'ais pu continuer mes études. Merci pour votre compréhension, et votre soutien permanent. Merc d'avoirtoujour été là. A mes très chers soeurs et frères "*Amina, Souad, FatimaZohra, kawter, Sara ,Nassime et Ayoub*"

A tous les membres de ma famille, petits et grands notamment. .A tous mes amis, de tout le long cycle d'étude, pour leurs présences et leurs,encouragements.A tous ceux qui de près ou de loin, ont contribués à la réalisation,de ce travail et à ce qui me son chers.

BOUDECHICHA MERYEM

Introduction

Un grand intérêt est accordé aux suites des nombres de Fibonacci et Lucas ainsi que les polynômes associés, et le grand nombre de travaux sur ce sujet en témoigne. Ses suites célèbres sont des cas particuliers des suites récurrentes linéaires d'ordres deux, mais à coefficients et valeurs initiales entiers. Notons que plusieurs généralisations de ces suites ont été proposées et à chaque généralisation des suites de polynômes associées ont été aussi proposé. Le présent mémoire est une contribution à cet axe de recherche. Ici, on se propose de présenter d'autres suites et polynômes reliées aux suites de Fibonacci et Lucas sur l'ensemble des quaternions. Le mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier est consacré essentiellement aux nombres de Fibonacci et Lucas ainsi que leurs généralisations. Des résultats sur la forme générale (formules de Binet) fonctions génératrices ont été donnés. Dans le but d'introduire de nouvelles généralisations, on introduit à la fin de ce chapitre l'ensemble des quaternions introduit pour la première fois par le mathématicien irlandais W. R. Hamilton en 1843.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse aux suites des quaternions de Fibonacci est Lucas et leurs généralisations, comme le premier chapitre on présente principalement leurs formules de Binet ainsi que les fonctions génératrices.Notons que Les quaternions de Fibonacci ont été introduits pour la première fois par A. Horadam , 1963.

Le dernier chapitre, se compose de trois partie, la première est réservé aux h(x)-polynômes de Fibonacci comme généralisation des polynômes de Fibonacciintroduit par Byrd, par contre et comme généralisation des polynômes de Lucas introduit par Bicknell la deuxième partie de ce chapitre est consacré aux h(x)-polynômes de Lucas. Enfin dans la dernière partie et encore comme généralisation des h(x)-polynômes de Lucas, on étudie les h(x) polynômes des quaternions de Lucas.

Notons que les notions et résultats présentés dans ce travail ne sont pas originaux et le contenu de ce travail se trouve dans la liste des références donnée à la fin de ce mémoire.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré essentiellement aux nombres de Fibonacci et Lucas ainsi que leurs généralisations. Des résultats sur la forme générale (formules de Binet) fonctions génératrices ont été donnés. Dans le but de définir dans les autres chapitres de nouvelles généralisations, on introduit à la fin de ce chapitre l'ensemble des quaternions.

1.1 Les suites des nombers de Fibonacci et généralisations

Définition 1.1.1 *On définit la suite des nombres de Fibonacci,notée* $(F_n)_{n\geq 0}$ *par la relation de récurrence suivante*

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n = 0, 1, ..., \\ \qquad F_0 = 0, F_1 = 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Les premiers termes de cette suite sont $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...\}$

Proposition 1.1.2 ***(Formule de Binet pour les nbrs de Fibonacci)*** *Le terme général de la suite des nombes de Fibonacci est donné par la formule suivante :*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ n = 0, 1, 2... \tag{1.2}$$

Preuve. Le polynome caractéristique de cette relation est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

il admet deux racines :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

donc la solution générale s'écrit sous forme

$$F_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Les constantes c_1, c_2 sont déterminées par les valeurs initiales comme suit

$$\begin{cases} F_0 = c_1 + c_2 = 0 \\ F_1 = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

En résolvant ce systéme ,on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

D'ou'

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\ .$$

■

Dans la litérature, il existe plusieurs généralisations des suites de Fibonacci, ici on s'intéresse à la généralisation suivante.

Définition 1.1.3 *On définit la suite de Fibonacci généralisée, notée* $(F_{p,n})_{n=0}^{+\infty}$ *par*

$$F_{p,n+2} = pF_{p,n+1} + F_{p,n},\ n = 0, 1, 2..., \tag{1.4}$$

avec

$$p \in \mathbb{N}^*,\ F_{p,0} = 0, F_{p,1} = 1$$

Lemme 1.1.4 ***(Formule de Binet pour les nbrs de Fibonacci généralisées)*** *Le terme général de la suite de Fibonacci* ($F_{p,n})_{n=0}^{+\infty}$ *est donné par*

$$F_{p,n} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{p^2+4}} \left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} \right)^n - \left(\frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2} \right)^n \right\} , n = 0, 1, 2..., \tag{1.5}$$

Preuve. Le polynôme caractéristique de cette la relation est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda - 1$$

il admet deux racines

$$\lambda = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}, \ \mu = \frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}$$

donc la solution générale s'écrit

$$F_{p,n} = c_1\lambda^n + c_2\mu^n,$$

les constantes c_1, c_2 sont déterminées par les valeurs initiales comme suit,

$$\begin{cases} F_{p,0} = c_1 + c_2 = 0 \\ F_{p,1} = c_1\lambda + c_2\mu = 1. \end{cases}$$

En résolvant le système, on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{p^2+4}}, \ c_2 = \frac{-1}{\sqrt{p^2+4}}.$$

D'ou',

$$F_{p,n} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{p^2+4}} \left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} \right)^n - \left(\frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2} \right)^n \right\} = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}.$$

■

1.2 Les suites des nombres de Lucas et généralisations

Définition 1.2.1 *On définit la suite de Lucas, notée* $(L_n)_{n\geq 0}$ *par la relation de récurrence suivante*

$$\begin{cases} L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, n = 0, 1, ..., \\ L_0 = 2, L_1 = 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Les premiers termes de cette suite sont $\{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29...\}$

Proposition 1.2.2 ***(Formule de Binet)*** *Le terme général de la suite de Lucas est donnée par la formule suivante :*

$$L_n = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}, n = 0, 1, 2... \tag{2.2}$$

Preuve. L'équation de polynome caractéristique de cette relation est,

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

il admet deux racines :

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

la solution générale s'écrit sous forme,

$$L_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Les constantes c_1, c_2 sont déterminées par les valeurs initiales comme suite

$$\begin{aligned} L_0 &= c_1 + c_2 = 2, \\ L_1 &= c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

En résolvant ce système, on obtient

$$c_1 = c_2 = 1.$$

Ainsi,

$$L_n = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} = \alpha^n + \beta^n.$$

■

Définition 1.2.3 *On définit la suite de Lucas généralisée, notée* $(L_{p,n})_{n=0}^{+\infty}$

$$L_{p,n+2} = pL_{p,n+1} + L_{p,n} \quad , \; n = 0, 1, 2... \tag{2.4}$$

avec

$$p \in \mathbb{N}^*, \; L_{p,0} = 2, L_{p,1} = 1.$$

Lemme 1.2.4 ***(Formule de Binet)*** *Le terme général de la suite de Lucas généralisée* ($L_{p,n}$) *est donné par*

$$L_{p,n} = \left\{ \left(\frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2} \right)^n + \left(\frac{p - \sqrt{p^2 + 4}}{2} \right)^n \right\} \; , \; n = 0, 1, 2...,$$

Preuve. Le polynome caractéristique de cette la relation est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda - 1$$

il admet deux racines

$$\lambda = \frac{(p + \sqrt{p^2 + 4})}{2}, \; \mu = \frac{(p - \sqrt{p^2 + 4})}{2}$$

donc la solution générale s'écrit

$$L_{p,n} = c_1 \lambda^n + c_2 \mu^n \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

les constantes c_1, c_2 sont déterminées par les valeurs initiales comme suit,

$$\begin{cases} L_{p,0} = c_1 + c_2 = 2 \\ L_{p,1} = c_1 \lambda + c_2 \mu = 1 \end{cases}$$

En résolvant le systéme ,On obtient

$$c_1 = 2 - c_2$$

$$c_1 = 1 + \frac{1 - p}{\sqrt{p^2 + 4}}, \quad c_2 = 1 + \frac{p - 1}{\sqrt{p^2 + 4}}$$

D'ou'

$$L_{p,n} = \left\{ \left(1 + \frac{1 - p}{\sqrt{p^2 + 4}} \right) \left(\frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2} \right)^n + \left(1 + \frac{p - 1}{\sqrt{p^2 + 4}} \right) \left(\frac{p - \sqrt{p^2 + 4}}{2} \right)^n \right\}$$

■

Remarque 1.2.5 *Les suites de Fibonacci et de Lucas anisi que leurs généralisations sont des cas particulier de la suite plus générale définit par la relation de recurrence lineaire d'ordre* 2

$$\begin{cases} U_{n+2} = pU_{n+1} + qU_n \quad, n = 0, 1, ..., \\ U_0 = \alpha \ , \ U_1 = \beta \quad , \quad \alpha, \ \beta \in \mathbb{N} \ , \ p, q \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{2.5}$$

En effet :

Si $p = q = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, on a la suite $(F_n)_{n \geq 0}$

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad , \ n = 0, 1, ... \\ F_0 = 0, \ F_1 = 1. \end{cases}$$

Si $q = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, on a la suite $(F_{p,n})_{n \geq 0}$

$$\begin{cases} F_{p,n+2} = pF_{p,n+1} + F_{p,n}, \quad , n = 0, 1, ... \\ F_{p,0} = 0, F_{p,1} = 1. \end{cases}$$

Si $p = q = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, on a la suite $(L_n)_{n \geq 0}$

$$\begin{cases} L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad , \ n = 0, 1, ... \\ L_0 = 2, \ L_1 = 1, \end{cases}$$

Si $q = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, on a la suite $(L_{p,n})_{n \geq 0}$

$$\begin{cases} L_{p,n+2} = pL_{n+1} + L_n \quad , \ n = 0, 1, ... \\ L_{p,0} = 2, \ L_{p,1} = 1. \end{cases}$$

Définition 1.2.6 *La fonction génératrice ordinaire associée à une suite* $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est donnée par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n, \tag{2.6}$$

et sa fonction génératrice exponetielle est

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{x^n}{n!}. \tag{2.7}$$

Théorème 1.2.7 *Soit* $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite définit par la relation de récurrence* (2.5) *. Alors sa fonction génératrice est donnée par*

$$f(x) = \frac{\alpha + (\beta - \alpha p)x}{1 - px - qx^2} \tag{2.8}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} U_n x^n \\
&= U_0 + U_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (pU_{n-1} + qU_{n-2}) x^n \\
&= \alpha + \beta x + \sum_{n=2}^{+\infty} (pU_{n-1} + qU_{n-2}) x^n \\
&= \alpha + \beta x + p \sum_{n=2}^{+\infty} U_{n-1} x^n + q \sum_{n=2}^{+\infty} U_{n-2} x^n \\
&= \alpha + \beta x + px \sum_{n=1}^{+\infty} U_n x^n + qx^2 \sum_{n=0}^{+\infty} U_n x^n \\
&= \alpha + \beta x + px \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n x^n - \alpha \right) + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} U_n x^n \\
&= \alpha + \beta x - px\alpha + pxf(x) + qx^2 f(x),
\end{aligned}$$

donc

$$f(x) - pxf(x) - qx^2 f(x) = \alpha + \beta x - px\alpha$$

D'ou'

$$f(x)\left(1 - px - qx^2\right) = \alpha + (\beta - p\alpha)x,$$

ainsi

$$f(x) = \frac{\alpha + (\beta - p\alpha)x}{(1 - px - qx^2)}.$$

Il résulte du théorème précédent que : ■

La fonction génératrice des nombres de Fibonacci généralisés $(\alpha = 0, \beta = 1, p = q = 1)$ est

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

La fonction génératrice des nombres de Fibonacci $(\alpha = 0, \beta = 1, q = 1)$ est

$$f(x) = \frac{1}{1 - px - x^2}.$$

La fonction génératrice des nombres de Lucas généralisés $(\alpha = 2, \beta = 1, p = q = 1)$ est

$$f(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}.$$

La fonction génératrice des nombres de Lucas $(\alpha = 2, \beta = 1, q = 1)$ est

$$f(x) = \frac{2 - x}{1 - px - x^2}.$$

1.3 Les quaternions

Définition 1.3.1 *L'ensemble des quaternions noté H et par définition*

$$H := \{q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k\}$$

avec a_0, a_1, a_2, a_3 sont des réels et 1, i, j et k satisfaisant les relations quaternioniques

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j. \tag{1.1}$$

Maintenat, on donne les opérations sur l'ensemble des quaternions.

Soit

$$q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \ \ q_2 = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

deux quaternions.

Egalité entre deux quaternions :

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow (a_0, a_1, a_2, a_3) = (b_0, b_1, b_2, b_3).$$

L'addition de deux quaternions :

$$q_1 + q_2 = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1) i + (a_2 + b_2) j + (a_3 + b_3) k$$

La soustraction de deux quaternions :

$$q_1 - q_2 = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1) i + (a_2 - b_2) j + (a_3 - b_3) k$$

La multiplication de deux quaternions :

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i + \\ &\quad (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)k \end{aligned}$$

La multiplication par un scalaire :

$$r.q_1 = r.a_0 + r.a_1i + r.a_2j + r.a_3k.$$

Le conjugué d'un quaternion :

$$\overline{q_1} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k.$$

L'inverse d'un quaternion

$$q_1^{-1} = \frac{\overline{q_1}}{\|q_1\|^2},\ q_1 \neq 0$$

avec

$$\|q_1\| = \sqrt{q_1\overline{q_1}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_3^2 + a_4^2}$$

la norme du quaternion q_1.

Remarque 1.3.2 *L'ensemble H des quaternions est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 4 muni de la base*

$$\{1,\ i,\ j,\ k\}.$$

Aussi l'ensemble H des quaternions, peut être décrit comme l'algèbre associative unifère sur le corps des nombres réels engendrée par $\{1,\ i,\ j,\ k\}$.

Chapitre 2

Les quaternions de Fibonacci et Lucas et leurs génralisations

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux suites des quaternions de Fibonacci et Lucas et leurs généralisations, comme dans le premier chapitre on présente principalement leurs formules de Binet ainsi que les fonctions génératrices.

2.1 Les quaternions de Fibonacci

Définition 2.1.1 *La suite des quaternions de Fibonacci, notée* $(Q_n)_{n\geq 0}$ *est definit par,*

$$Q_n = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3} \tag{1.1}$$

avec $(F_n)_{n\geq 0}$ est la suite de Fibonacci .

Dans le résultat suivant, on montre que la suite des quaternions de Fibonacci satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre deux.

Proposition 2.1.2 *La suite* $(Q_n)_{n\succeq 0}$ *satisfait la relation de recurrence*

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n, \ n = 0, 1.... \tag{1.2}$$

Preuve. On a

$$Q_n = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3},$$

ainsi

$$Q_{n+1} = F_{n+1} + iF_{n+2} + jF_{n+3} + kF_{n+4},$$

et

$$Q_{n+2} = F_{n+2} + iF_{n+3} + jF_{n+4} + kF_{n+5}.$$

En utilisant la relation de recurrence satisfaite par la suite $(F_n)_{n\geq 0}$, on obtient

$$\begin{aligned} Q_{n+2} &= (F_{n+1} + F_n) + (iF_{n+2} + iF_{n+1}) + (jF_{n+2} + jF_{n+3}) + (kF_{n+4} + kF_{n+3}) \\ &= (F_n + +iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}) + (F_{n+1} + iF_{n+2} + jF_{n+3} + kF_{n+4}) \\ &= Q_n + Q_{n+1} \end{aligned}$$

D'ou' le résultat ■

Remarque 2.1.3 *Parfois, on écrit :*

$$Q_n = (F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}).$$

Ainsi

$$Q_0 = (F_0, F_1, F_2, F_3) = (0, 1, 1, 2)\,,,\;\; Q_1 = (F_1, F_2, F_3, F_4) = (1, 1, 2, 3).$$

Théorème 2.1.4 *La fonction génératrice de la suite des quaternions de Fibonacci $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donnée par*

$$F(t) = \frac{Q_0 + (Q_1 - Q_0)t}{1 - t - t^2} = \frac{t + i + j(t+1) + k(t+2)}{1 - t - t^2} \qquad (1.3)$$

Preuve. Soit

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n t^n$$

la fonction génératrice de la suite $(Q_n)_{n\geq 0}$.

On a

$$\begin{aligned}
F(t)(1-t-t^2) &= F(t)-tF(t)-t^2F(t)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n t^{n+2}\\
&= Q_0 + Q_1 t + \sum_{n=2}^{+\infty} Q_n t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} Q_{n-1} t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} Q_{n-2} t^n\\
&= Q_0 + Q_1 t - Q_0 t + \sum_{n=2}^{+\infty} (Q_n - Q_{n-1} - Q_{n-2}) t^n\\
&= Q_0 + Q_1 t - Q_0 t + \sum_{n=2}^{+\infty} (Q_n - Q_n) t^n\\
&= Q_0 + (Q_1 - Q_0)t
\end{aligned}$$

Donc

$$F(t) = \frac{Q_0 + (Q_1 - Q_0)t}{1-t-t^2}$$

En remplacant Q_0 et Q_1par leurs valeurs, on obtient

$$F(t) = \frac{t + i + j(1+t) + k(2+t)}{1-t-t^2}$$

■

Définition 2.1.5 *On defint le conjugué du terme général Q_n de la suite des quaternions de Fibonacci par,*

$$Q_n^* = F_n - iF_{n+1} - jF_{n+2} - kF_{n+3} \tag{1.4}$$

Proposition 2.1.6 *La suite des quaternions de Fibonacci satisfait les relations suivantes*

1 $\cdot\ Q_n Q_n^* = \sum_{i=0}^{3} F_{n+i}^2$,

2 $\cdot\ Q_n^2 = 2F_n Q_n - Q_n Q_n^*$.

3 $\cdot\ 2F_n = Q_n + Q_n^*, Q_n \neq 0$.

Preuve. On a

$$
\begin{aligned}
1 \cdot Q_nQ_n^* &= (F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3})(F_n - iF_{n+1} - jF_{n+2} - kF_{n+3}) \\
&= F_n^2 - iF_nF_{n+1} - jF_nF_{n+2} - kF_nF_{n+3} \\
&\quad +iF_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 - ijF_{n+1}F_{n+2} - ikF_{n+1}F_{n+3} \\
&\quad -jF_{n+2}F_n - jiF_{n+2}F_{n+1} + F_{n+2}^2 - jkF_{n+2}F_{n+3} \\
&\quad +kF_{n+3}F_n - kiF_{n+3}F_{n+1} - kjF_{n+3}F_{n+2} + F_{n+3}^2 \\
&= F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 + (-ijF_{n+1}F_{n+2} + ijF_{n+1}F_{n+2}) \\
&\quad +(-jkF_{n+2}F_{n+3} + jkF_{n+2}F_{n+3}) + (-kiF_{n+3}F_{n+1} + kiF_{n+3}F_{n+1}) \\
&= F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 \\
&= \sum_{i=0}^{3} F_{n+i}^2.
\end{aligned}
$$

D'ou' le résultat.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot Q_n^2 &= (F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3})(F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}) \\
&= F_n^2 + iF_nF_{n+1} + jF_nF_{n+2} + kF_nF_{n+3} + iF_{n+1}F_n - F_{n+1}^2 \\
&\quad +ijF_{n+1}F_{n+2} + ikF_{n+1}F_{n+3} + jF_{n+2}F_n + jiF_{n+2}F_{n+1} - F_{n+1}^2 \\
&\quad +jkF_{n+2}F_{n+3} + kF_{n+3}F_n + kiF_{n+3}F_{n+1} + kjF_{n+3}F_{n+2} - F_{n+3}^2 \\
&= F_n^2 + 2iF_nF_{n+1} + 2jF_nF_{n+2} + 2kF_nF_{n+3} - F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 - F_{n+3}^2 \\
&= 2F_n^2 + 2iF_nF_{n+1} + 2jF_nF_{n+2} + 2kF_nF_{n+3} - F_n^2 - F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 - F_{n+3}^2 \\
&= 2F_n(F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}) - (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2) \\
&= 2F_nQ_n - (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2)
\end{aligned}
$$

D'aprés 1) ,on obtient

$$Q_n^2 = 2F_nQ_n - Q_nQ_n^* \ .$$

On a

$$
\begin{aligned}
3 \cdot Q_n + Q_n^* &= F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3} + F_n - iF_{n+1} - jF_{n+2} - kF_{n+3} \\
&= 2F_n \ .
\end{aligned}
$$

D'ou' le résultat. ■

Les quaternions de Fibonacci satisfont les relations suivantes.

Proposition 2.1.7 *Les relations suivant sont vraies*

a ·

$$\sum_{i=0}^{n} Q_i = Q_{n+2} - Q_1.$$

b ·

$$\sum_{i=0}^{n} Q_{2i} = Q_{2n+1} - (1,0,1,1).$$

c ·

$$\sum_{i=0}^{n-1} Q_{2i+1} = Q_{2n} - Q_0.$$

Preuve. a. Montrons par récurrence que

$$\sum_{i=0}^{n} Q_i = Q_{n+2} - Q_1.$$

Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{i=0}^{0} Q_i = Q_0 = Q_2 - Q_1.$$

Donc la propriété est satisfaite pour $n = 0$. Supposons que la proprété est satisfaite pour n, et montrons pour $n + 1$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} Q_i &= \sum_{i=0}^{n+1} Q_i + Q_{n+1} \\
&= Q_{n+2} - Q_1 + Q_{n+1} \\
&= Q_{n+2} + Q_{n+1} - Q_1 \\
&= Q_{n+3} - Q_1.
\end{aligned}$$

b. Montrons que

$$\sum_{i=0}^{n} Q_{2i} = Q_{2n+1} - (1,0,1,1).$$

Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{i=0}^{0} Q_{2i} = Q_0 = Q_1 - (1,0,1,1),$$

Donc la propriété est satisfaite pour $n = 0$. Supposons que la proprité est satisfaite pour n, et montrons pour $n+1$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} Q_{2i} &= \sum_{i=0}^{n} Q_{2i} + Q_{2n+2} \\
&= Q_{2n+1} - (1,0,1,1) + Q_{2n+2} \\
&= Q_{2n+1} + Q_{2n+2} - (1,0,1,1) \\
&= Q_{2n+3} - (1,0,1,1).
\end{aligned}$$

c.Montrons que

$$\sum_{i=0}^{n-1} Q_{2i+1} = Q_{2n} - Q_0.$$

Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{i=0}^{-1} Q_{2i+1} = 0 = Q_0 - Q_0$$

Donc la propriété est satisfaite pour $n = 0$.Supposons que la proprété est satisfaite pour n, et montrons pour $n+1$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} Q_{2i+1} &= \sum_{i=0}^{n-1} Q_{2i+1} + Q_{2n+1} \\
&= Q_{2n} - Q_0 + Q_{2n+1} \\
&= Q_{2n+2} - Q_0.
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.8 ***(Formule de Binet)*** *: Soit $(Q_n)_{n\geq 0}$ la suite des quaternions de Fibonacci Alors,Ona*

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3\right) \alpha^n - \left(1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3 \ \ \right) \beta^n \right] \ , \quad n = 0, 1, ..., \tag{1.5}$$

ou d'une manière équivalente

$$Q_n = \frac{A.\alpha^n - B.\beta^n}{\alpha - \beta}$$

avec

$$A = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3, \ B = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3, \ \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Preuve. Le polynôme caractéristique de cette relation est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

et il admet deux racines

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Donc la solution générale s'écrit

$$Q_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$$

Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions initiales comme suit

$$\begin{cases} Q_0 = i + j + 2k = c_1 + c_2 \\ Q_1 = 1 + i + 2j + 3k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) c_2 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient

$$c_1 = \frac{1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3}{\sqrt{5}}, \ c_2 = -\frac{1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3}{\sqrt{5}} = -\frac{B}{\alpha - \beta}.$$

D'ou'

$$\begin{aligned} Q_n &= \left(\frac{1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3}{\sqrt{5}}\right) \alpha^n - \left(\frac{1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3}{\sqrt{5}}\right) \beta^n \\ &= \frac{A.\alpha^n - B.\beta^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

avec

$$A = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3,\ B = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3.$$

■

Théorème 2.1.9 *La suite des quaternions de Fibonacci $(Q_n)_{n\geq 0}$ satisfait la relation suivante*

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i Q_i = Q_{2n}. \tag{1.6}$$

Preuve. De la formule de Binet, théorème précédent, on a

$$Q_i = \frac{A.\alpha^i - B.\beta^i}{\alpha - \beta}$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} C_n^i Q_i &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(\frac{A\alpha^i - B\beta^i}{\alpha - \beta}\right) \\ &= \frac{A}{\alpha - \beta}\sum_{i=0}^{n} C_n^i (\alpha)^i - \frac{B}{\alpha - \beta}\sum_{i=0}^{n} C_n^i (\beta)^i.\end{aligned}$$

En utilsant le fait que

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i (\alpha)^i = (1+\alpha)^n,\ \ \sum_{i=0}^{n} C_n^i (\beta)^i = (1+\beta)^n,\ 1+\alpha = \alpha^2,\ 1+\beta = \beta^2,$$

on obtient,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} C_n^i Q_i &= \frac{A}{\alpha - \beta}[(1+\alpha)^n] - \frac{B}{\alpha - \beta}[(1+\beta)^n] \\ &= \frac{A}{\alpha - \beta}\left(\alpha^{2n}\right) - \frac{B}{\alpha - \beta}(\beta^{2n}) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[A\alpha^{2n} - B\beta^{2n}\right] \\ &= Q_{2n}\end{aligned}$$

D'ou le résultat ■

Théorème 2.1.10 *La fonction génératrice exponentielle des quaternions de Fibonacci est donnée par*

$$Q_e\left(t\right) = \frac{Ae^{\alpha t} - Be^{\beta t}}{\alpha - \beta} \tag{1.7}$$

Preuve. Soit

$$Q_e(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Q_n}{n!}t^n$$

la fonction génératrice expontielle des quaternions de Fibonacci. En utilisant le fait que

$$Q_n=\frac{A\alpha^n-B\beta^n}{\alpha-\beta}$$

on trouve que

$$\begin{aligned}
Q_e(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Q_n}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{A\alpha^n-B\beta^n}{\alpha-\beta})\frac{t^n}{n!}\\
&= \frac{A}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\alpha t)^n}{n!}-\frac{B}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\beta t)^n}{n!}\\
&= \frac{Ae^{\alpha t}-Be^{\beta t}}{\alpha-\beta}.
\end{aligned}$$

■

Définition 2.1.11 *La suite des quaternions de Fibonacci généralisée, notée* $(Q_{p,n})_{n\geq 0}$ *est definit par,*

$$Q_{p,n}=F_{p,n}+iF_{p,n+1}+jF_{p,n+2}+kF_{p,n+3},p\in\mathbb{N}^*,$$

avec $(F_{p,n})_{n\geq 0}$ est la suite de Fibonacci .

Dans le résultat suivant, on montre que la suite des quaternions de Fibonacci satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre deux.

Proposition 2.1.12 *La suite* $(Q_{p,n})_{n\succeq 0}$ *satisfait la relation de r'ecurrence*

$$Q_{p,n+2}=pQ_{p,n+1}+Q_{p,n},n=0,1,...$$

Preuve. On a

$$Q_{p,n}=F_{p,n}+iF_{p,n+1}+jF_{p,n+2}+kF_{p,n+3},$$

ainsi

$$Q_{p,n+1}=F_{p,n+1}+iF_{p,n+2}+jF_{p,n+3}+kF_{p,n+4},$$

et

$$Q_{p,n+2} = F_{p,n+2} + iF_{p,n+3} + jF_{p,n+4} + kF_{p,n+5}.$$

En utilisant la relation de r'ecurrence satisfaite par la suite $(F_{p,n})_{n\geq 0}$, on obtient

$$\begin{aligned}
Q_{p,n+2} &= (pF_{p,n+1} + F_n) + (piF_{p,n+2} + iF_{p,n+1}) + (pjF_{p,n+3} + jF_{p,n+2}) + (pkF_{n+4} + kF_{n+3}) \\
&= (F_{p,n} + iF_{p,n+1} + jF_{p,n+2} + kF_{p,n+3}) + p(F_{p,n+1} + iF_{p,n+2} + jF_{p,n+3} + kF_{p,n+4}) \\
&= Q_{p,n} + Q_{p,n+1}
\end{aligned}$$

D'ou' le résultat ■

Remarque 2.1.13 *Parfois, on écrit :*

$$Q_{p,n} = (F_{p,n}, F_{p,n+1}, F_{p,n+2}, F_{p,n+3}).$$

Ainsi

$$Q_{p,0} = (F_{p,0}, F_{p,1}, F_{p,2}, F_{p,3}) = \left(0, 1, p, p^2 + 1\right), \quad Q_{p,1} = (F_{p,1}, F_{p,2}, F_{p,3}, F_{p,4}) = \left(1, p, p^2 + 1, p^3 + 2p\right).$$

Théorème 2.1.14 *La fonction génératrice de la suite des quaternions de Fibonacci $(Q_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et donnée par*

$$F(t) = \frac{Q_0 + (Q_1 - pQ_0)t}{1 - pt - t^2}$$

Preuve. Soit

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_{p,n} t^n$$

la fonction génératrice de la suite $(Q_{p,n})_{n\geq 0}$.

On a

$$
\begin{aligned}
F(t)(1-pt-t^2) &= F(t)-ptF(t)-t^2F(t) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n t^n - p\sum_{n=0}^{+\infty} Q_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n t^{n+2} \\
&= Q_0 + Q_1 t + \sum_{n=2}^{+\infty} Q_{p,n} t^n - p\sum_{n=1}^{+\infty} Q_{p,n-1} t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} Q_{p,n-2} t^n \\
&= Q_{p,0} + Q_{p,1} t - pQ_{p,0} t + \sum_{n=2}^{+\infty} (Q_{p,n} - Q_{p,n-1} - Q_{p,n-2}) t^n \\
&= Q_{p,0} + Q_{p,1} t - Q_{p,0} t + \sum_{n=2}^{+\infty} (Q_{p,n} - Q_{p,n}) t^n \\
&= Q_{p,0} + (Q_{p,1} - pQ_{p,0}) t
\end{aligned}
$$

Donc

$$F(t) = \frac{Q_0 + (Q_1 - pQ_0)t}{1-pt-t^2}.$$

■

Théorème 2.1.15 ***(Formule de Binet)*** *: Soit $(Q_{p,n})_{n\geq 0}$ la suite des quaternions de Fibonacci comme suit :*

$$Q_{p,n} = \frac{1}{\sqrt{p^2+4}}\left[\left(1+i\alpha+j\alpha^2+k\alpha^3\right)\alpha^n - \left(1+i\beta+j\beta^2+k\beta^3\ \right)\beta^n\right],\ \ n=0,1,...,$$

avec

$$\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}, \beta = \frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}.$$

Preuve. Le polynôme caractéristique de cette relation est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda - 1$$

et il admet deux racines

$$\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}, \beta = \frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}.$$

Donc la solution générale s'écrit

$$Q_{p,n} = A\alpha^n + B\beta^n$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales comme suit

$$\begin{cases} Q_{p,0} = A + B \\ Q_{p,1} = A\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}\right) + B\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}\right) \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient

$$A = \frac{1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3}{\sqrt{p^2+4}},\ B = -\frac{1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3}{\sqrt{p^2+4}}.$$

D'ou'

$$\begin{aligned} Q_{p,n} &= \left(\frac{1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3}{\sqrt{p^2+4}}\right)\alpha^n - \left(\frac{1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3}{\sqrt{p^2+4}}\right)\beta^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{p^2+4}}\left[\left(1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3\right)\alpha^n - \left(1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3\right)\beta^n\right] = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.16 *La suite des quaternions de Fibonacci $(Q_{p,n})_{n\geq 0}$ satisfait la relation suivante*

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i Q_i = Q_{2n}.$$

Preuve. De la formule Binet, Théorème précédent, on a

$$Q_i = \frac{A\alpha^i - B\beta^i}{\alpha - \beta}$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i Q_i &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i \left(\frac{A\alpha^i - B\beta^i}{\alpha - \beta}\right) \\ &= \frac{A}{\alpha - \beta}\sum_{i=0}^{n} C_n^i (p\alpha)^i - \frac{B}{\alpha - \beta}\sum_{i=0}^{n} C_n^i (p\beta)^i. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i (p\alpha)^i = (1+p\alpha)^n,\ \sum_{i=0}^{n} C_n^i (p\beta)^i = (1+\beta)^n,\ 1+p\alpha = \alpha^2,\ 1+p\beta = \beta^2,$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i Q_i &= \frac{A}{\alpha-\beta}[(1+p\alpha)^n] - \frac{B}{\alpha-\beta}[(1+p\beta)^n] \\
&= \frac{A}{\alpha-\beta}\left(\alpha^{2n}\right) - \frac{B}{\alpha-\beta}(\beta^{2n}) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[A\alpha^{2n} - B\beta^{2n}\right] \\
&= Q_{2n}
\end{aligned}$$

D'ou' le résultat ■

2.2 Les suites des quaternions de Lucas et généralisations

Définition 2.2.1 *La suite des quaternions de Lucas ,notée* $(K_n)_{n\geq 0}$ *est definit par,*

$$K_n = L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + kL_{n+3} \tag{2.1}$$

Remarque 2.2.2 *avec le terme générale de la suite de Lucas.* $(L_n)_{n\geq 0}$.

Parfois, on écrit :

$$K_n = (L_n, L_{n+1}, L_{n+2}, L_{n+3}).$$

Ainsi

$$K_0 = (L_0, L_1, L_2, L_3) = (2,1,3,4)\,,\,,\; K_1 = (L_1, L_2, L_3, L_4) = (1,3,4,7).$$

Proposition 2.2.3 *La suite* $(K_n)_{n\geq 0}$ *satisfait la relation de r'ecurrence linéaire d'odre* 2 *suivante :*

On a

$$K_{n+2} = K_{n+1} + K_n, \quad n = 0, 1, ..., \tag{2.2}$$

Preuve. On a

$$K_n = L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + kL_{n+3}$$

ainsi

$$K_{n+1} = L_{n+1} + iL_{n+2} + jL_{n+3} + kL_{n+4}$$

et

$$K_{n+2} = L_{n+2} + iL_{n+3} + jL_{n+4} + kL_{n+5}$$

En utilisant la relation de récurrence satisfaite par la suite $(L_n)_{n\geq 0}$ on obteient

$$\begin{aligned} K_{n+2} &= L_{n+1} + L_n + iL_{n+2} + iL_{n+1} + jL_{n+3} + jL_{n+2} + kL_{n+4} + kL_{n+3} \\ &= (L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + kL_{n+3}) + (L_{n+1} + iL_{n+2} + jL_{n+3} + kL_{n+4}) \\ &= K_n + K_{n+1}. \end{aligned}$$

D'ou' le résultat ■

Théorème 2.2.4 *La fonction génératrice des quaternions de Lucas* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donnée par*

$$L(t) = \frac{K_0 + (K_1 - K_0)t}{1 - t - t^2} = \frac{-t + 2 + i(2t + 1) + j(3 + t) + k(4 + 3t)}{1 - t - t^2} \tag{2.3}$$

Preuve. Soit

$$L(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} K_n t^n$$

la fonction génératrice de la suite $(K_n)_{n\geq 0}$ .On a

$$
\begin{aligned}
L(t)(1-t-t^2) &= L(t) - tL(t) - t^2L(t) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} K_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} K_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} K_n t^{n+2} \\
&= K_0 + K_1 t + \sum_{n=2}^{+\infty} K_n t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} K_{n-1} t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} K_{n-2} t^n \\
&= K_0 + K_1 t + \sum_{n=2}^{+\infty} K_n t^n - K_0 t - \sum_{n=2}^{+\infty} K_{n-1} t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} K_{n-2} t^n \\
&= K_0 + (K_1 - K_0)t + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(K_n - K_{n-1} - K_{n-2}\right) t^n \\
&= K_0 + (K_1 - K_0)t + \sum_{n=2}^{+\infty} (K_n - K_n) t^n \\
&= K_0 + (K_1 - K_0)t.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$L(t) = \frac{K_0 + (K_1 - K_0)t}{1-t-t^2}.$$

En remplacant K_0 et K_1 par leurs valeurs, on obtient

$$L(t) = \frac{-t+2+i(2t+1)+j(3+t)+k(4+3t)}{1-t-t^2}.$$

■

Définition 2.2.5 *On définit le conjugué du terme général* K_n *de la suite des quaternions de Lucas par,*

$$K_n^* = L_n - iL_{n+1} - jL_{n+2} - kL_{n+3} \tag{2.4}$$

Théorème 2.2.6 ***(Formule de Binet)*** *:Soit* $(K_n)_{n\geq 0}$ *la suite des quaternions de Lucas Alors,On a :*

$$K_n = \left(1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3\right)\alpha^n + \left(1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3\right)\beta^n,\ n = 0, 1, \ldots \tag{2.5}$$

ou d'une manière équivalente

$$K_n = A.\alpha^n + B.\beta^n$$

avec

$$A = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3,\ B = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3,\ \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Preuve.

On a

$$K_{n+2} = K_{n+1} + K_n$$

Le polynôme caractéristique de cette relation est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

qui admet deux racines

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Donc la solution générale s'écrit

$$K_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$$

Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions initiales comme suit

$$\begin{cases} K_0 = c_1 + c_2 \\ K_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) c_2 \end{cases}$$

En résolvant ce systéme, on obtient

$$c_1 = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3,\ c_2 = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3.$$

D'ou'

$$\begin{aligned} K_n &= \left(1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3\right)\alpha^n + \left(1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3\right)\beta^n \\ &= A.\alpha^n + B.\beta^n. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.7 *La suite des quaternions de Lucas* $(K_n)_{n\geq 0}$ *satisfait la relation suivante*

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i K_i = K_{2n},\ n = 0, 1, ..., \tag{2.6}$$

Preuve.

De la formule Binet, Théorème précédent,

$$K_i = A\alpha^i + B\beta^i$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} C_n^i K_i &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(A\alpha^i + B\beta^i\ \right) \\ &= A\sum_{i=0}^{n} C_n^i(\alpha)^i + B\sum_{i=0}^{n} C_n^i(\beta)^i \end{aligned}$$

En utilsant le fait que

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i(\alpha)^i = (1+\alpha)^n,\ \sum_{i=0}^{n} C_n^i(\beta)^i = (1+\beta)^n,\ 1+\alpha = \alpha^2,\ 1+\beta = \beta^2,$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} C_n^i K_i &= A[(1+\alpha)^n] + B[(1+p\beta)^n] \\ &= A(\alpha^2)^n + B(\beta^2)^n \\ &= A\alpha^{2n} + B\beta^{2n} \\ &= K_{2n} \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.8 *La fonction génératrice exponentielle des quaternions de Lucas est donnée par*

$$K_e(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} \tag{2.7}$$

Preuve. Soit

$$K_e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K_n}{n!} t^n$$

la fonction génératrice exponentielle des quaternions de Lucas. En utilisant le fait que

$$K_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

on trouve que

$$\begin{aligned} K_e(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (A\alpha^n + B\beta^n) \frac{t^n}{n!} \\ &= A \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} + B \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} \\ &= Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}. \end{aligned}$$

■

Définition 2.2.9 *La suite des quaternions de Lucas ,notée* $(K_{p,n})_{n\geq 0}$ *est definit par,*

$$K_{p,n} = L_{p,n} + iL_{p,n+1} + jL_{p,n+2} + kL_{p,n+3},\ p \in \mathbb{N}^*$$

avec$(L_{p,n}\ )_{n\geq 0}$ le terme générale de la suite de Lucas.

Proposition 2.2.10 *La suite* $(K_{p,n})_{n\geq 0}$ *satisfait la relation de recurrence lineaire d'odre* 2 *suivante :*

$$K_{p,n+2} = pK_{p,n+1} + K_{p,n},\ n = 0, 1, ...,$$

Preuve. On a

$$K_{p,n} = L_{p,n} + iL_{p,n+1} + jL_{p,n+2} + kL_{p,n+3}$$

ainsi

$$K_{p,n+1} = L_{p,n+1} + iL_{p,n+2} + jL_{p,n+3} + kL_{p,n+4}$$

et

$$K_{p,n+2} = L_{p,n+2} + iL_{p,n+3} + jL_{p,n+4} + kL_{p,n+5}$$

En utilisant la relation de recurrence satisfaite par la suite $(L_{p,n})_{n\geq 0}$ on obteient

$$\begin{aligned} K_{p,n+2} &= pL_{n+1} + L_n + i(pL_{n+2} + L_{n+1}) + j(pL_{n+3} + L_{n+2}) + k(pL_{n+4} + L_{n+3}) \\ &= (L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + kL_{n+3}) + p\,(L_{n+1} + iL_{n+2} + jL_{n+3} + kL_{n+4}) \\ &= K_n + pK_{n+1}. \end{aligned}$$

D'ou' le résultat ■

Théorème 2.2.11 *La fonction génératrice des quaternions de Lucas* $(K_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et donnée par*

$$L(t) = \frac{K_0 + (K_1 - pK_0)\,t}{1 - pt - t^2}$$

Preuve. Soit

$$L(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} K_{p,n} t^n$$

la fonction génératrice de la suite $(K_{p,n})_{n\geq 0}$.

On a

$$\begin{aligned} L(t)(1 - pt - t^2) &= L(t) - ptL(t) - t^2 L(t) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} K_{p,n} t^n - p \sum_{n=0}^{+\infty} K_{p,n} t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} K_{p,n} t^{n+2} \\ &= K_{p,0} + K_{p,1} t + \sum_{n=2}^{+\infty} K_{p,n} t^n - p \sum_{n=1}^{+\infty} K_{p,n-1} t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} K_{p,n-2} t^n \\ &= K_{p,0} + K_{p,1} t + \sum_{n=2}^{+\infty} K_{p,n} t^n - pK_0 t - p \sum_{n=2}^{+\infty} K_{p,n-1} t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} K_{p,n-2} t^n \\ &= K_{p,0} + (K_{p,1} - pK_{p,0})t + \sum_{n=2}^{+\infty} (K_{p,n} - pK_{p,n-1} - K_{p,n-2})\, t^n \\ &= K_{p,0} + (K_{p,1} - pK_{p,0})t + \sum_{n=2}^{+\infty} (K_{p,n} - K_{p,n}) t^n \\ &= K_{p,0} + (K_{p,1} - pK_{p,0})t. \end{aligned}$$

Donc

$$L(t) = \frac{K_{p,0} + (K_{p,1} - pK_{p,0})t}{1 - pt - t^2}.$$

■

Remarque 2.2.12 *Par fois, on écrit :*

$$K_{p,n} = (L_{p,n}, L_{p,n+1}, L_{p,n+2}, L_{p,n+3}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} K_0 &= (L_{p,0}, L_{p,1}, L_{p,2}, L_{p,3}) = \left(2, P, p^2+1, p^3+3p\right), \\ K_1 &= (L_{p,1}, L_{p,2}, L_{p,3}, L_{p,4}) = \left(p, p^2+2, p^3+3p, p^4+4p^2+2\right). \end{aligned}$$

Théorème 2.2.13 ***(Formule de Binet)*** *:Soit $(K_{p,n})_{n\geq 0}$ la suite des quaternions de Lucas comme suit :*

$$K_{p,n} = \frac{1}{\sqrt{p^2+4}}\left[\left(1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3\right)\alpha^n + \left(1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3\right)\beta^n\right], n = 0, 1, ...$$

Preuve.

On a

$$K_{p,n+2} = pK_{p,n+1} + K_{p,n}$$

Le polynôme caractéristique de cette relation est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda - 1$$

et il admet deux racines

$$\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}\ ,\ \beta = \frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}$$

donc la solution générale s'écrit

$$K_{p,n} = (A\alpha^n + B\beta^n)\ \ , A, B\ \in \mathbb{R}$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales comme suit

$$\begin{cases} K_{p,0} = A + B \\ K_{p,1} = A\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}\right) + B\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}\right) \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient

$$A = \frac{1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3}{\sqrt{p^2+4}},\ B = -\frac{1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3}{\sqrt{p^2+4}}.$$

D'ou'

$$\begin{aligned} K_{p,n} &= \left(\frac{1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3}{\sqrt{p^2+4}}\right)\alpha^n + \left(\frac{1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3}{\sqrt{p^2+4}}\right)\beta^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{p^2+4}}\left[\left(1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3\right)\alpha^n + \left(1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3\right)\beta^n\right]. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.14 *La suite des quaternions de Lucas* $(K_n)_{n\geq 0}$ *satisfait la relation suivante*

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i K_i = K_{2n},\ n = 0, 1, ...,$$

Preuve.

De la formule Binet, théorème précédent,

$$K_i = A\alpha^i + B\beta^i$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i K_i &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i \left(A\alpha^i + B\beta^i\right) \\ &= A\sum_{i=0}^{n} C_n^i (p\alpha)^i + B\sum_{i=0}^{n} C_n^i (p\beta)^i \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i (p\alpha)^i = (1+p\alpha)^n,\ \sum_{i=0}^{n} C_n^i (p\beta)^i = (1+\beta)^n,\ 1+p\alpha = \alpha^2,\ 1+p\beta = \beta^2,$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i K_i &= A[(1+p\alpha)^n] + B[(1+p\beta)^n] \\
&= A\left(\alpha^{2n}\right) + B\left(\beta^{2n}\right) \\
&= K_{2n}
\end{aligned}
$$

D'ou' le résultat. ■

Chapitre 3

Les h(x) polynômes de (quaternions) de Fibonacci et Lucas

Dans ce chapitre on s'intérsse à des polynômes liés aux nombres (quaternions) de Fibonacci et Lucas. Notons que ces polynômes ont été introuit de plusieurs manières par des relations de récurences linéaires. Par example les polynômes de Fibonacci ont été défini par Byrd par la relation

$$F_{n+2}(x) = 2xF_{n+1}(x) + F_n(x),\ n = 0, 1, ...,$$

avec

$$F_0(x) = 0,\ F_1(x) = 1.$$

Les polynômes de Lucas on été défini par Bicknell comme suit

$$L_{n+2}(x) = xL_{n+1}(x) + L_n(x),\ n = 0, 1, ...,$$

avec

$$L_0(x) = 2, L_1(x) = x.$$

3.1 Les h(x) polynômes de Fibonacci.

Définition 3.1.1 *Soit* $h(x) \in \mathbb{R}[x]$, *on définit les* $h(x)-$*polynômes de Fibonacci*

$$F_{h,n+2}(x) = h(x)F_{h,n+1}(x) + F_{h,n}(x),\ n = 0, 1, ..., \qquad (1.1)$$

Avec

$$F_{h,0}(x) = 0,\ F_{h,1}(x) = 1,$$

Théorème 3.1.2 *La fonction génératrice associee au* $h(x)$ *polynôme de Fibonacci* $(F_{h,n}(x))_{n\geq 0}$ *est donneé par*

$$F_h(t) = \frac{t}{1 - h(x)t - t^2}. \qquad (1.2)$$

Preuve. Soit

$$F_h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_{h,n}(x)t^n$$

la fonction génératrice associee au $h(x)-$ polynôme de Fibonacci $(F_{h,n}(x)_{n\geq 0})$.

On a

$$\begin{aligned}
F_h(t)\left(1 - h(x)t - t^2\right) &= F_h(t) - h(x)tF_h(t) - t^2F_h(t)t^2 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} F_{h,n}(x)t^n - h(x)\sum_{n=0}^{+\infty} F_{h,n}(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} F_{h,n}(x)t^{n+2} \\
&= F_{h,0}(x) + F_{h,1}(x)t + \sum_{n=2}^{+\infty} F_{h,n}(x)t^n - \\
&\quad F_{h,0}(x)h(x)t - h(x)\sum_{n=2}^{+\infty} F_{h,n-1}(x)t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} F_{h,n-2}(x)t^n \\
&= F_{h,0}(x) + F_{h,1}(x)t - F_{h,0}(x)h(x)t + \\
&\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \left(F_{h,n}(x) - h(x)F_{h,n-1}(x) - F_{h,n-2}(x)\right)t^n \\
&= F_{h,0}(x) + F_{h,1}(x)t - F_{h,0}(x)h(x)t \\
&= F_{h,0}(x)(1 - h(x)t) + F_{h,1}(x)t \\
&= F_{h,1}(x)t = t
\end{aligned}$$

Donc

$$F_h(t) = \frac{t}{1 - h(x)t - t^2}$$

■

Théorème 3.1.3 ***(Formule de Binet)*** *: On a*

$$F_{h,n}(x) =, \frac{1}{\sqrt{h(x)^2+4}} \left[\alpha^n(x) - \beta^n(x)\right], \; n = 0, 1, ... \tag{1.3}$$

avec

$$\alpha(x) = \frac{h(x) + \sqrt{h(x)^2+4}}{2}, \quad \beta(x) = \frac{h(x) - \sqrt{h(x)^2+4}}{2}$$

Preuve. On a

$$F_{h,n+2}(x) = h(x)F_{h,n+1}(x) + F_{h,n}(x)$$

Le polynôme caractéristique de cette relation est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - h(x)\lambda - 1$$

et il admet deux racines

$$\alpha = \frac{h(x) + \sqrt{h(x)^2+4}}{2}, \; \beta = \frac{h(x) - \sqrt{h(x)^2+4}}{2}$$

donc la solution générale s'écrit

$$F_{p,n} = A\alpha^n + B\beta^n$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales comme suit

$$\begin{cases} F_{h,0}(x) = A + B \\ F_{h,1}(x) = A\left(\frac{h(x)+\sqrt{h(x)^2+4}}{2}\right) + B\left(\frac{h(x)-\sqrt{h(x)^2+4}}{2}\right) \end{cases}$$

En résolvant ce systéme, on obtient

$$A = \frac{1}{\sqrt{h(x)^2+4}}, \; B = -\frac{1}{\sqrt{h(x)^2+4}}.$$

D'ou'

$$\begin{aligned} F_{h,n} &= \left(\frac{1}{\sqrt{h(x)^2+4}}\right)\alpha^n(x) + \left(-\frac{1}{\sqrt{h(x)^2+4}}\right)\beta^n(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{h(x)^2+4}}\left[\alpha^n(x)-\beta^n(x)\right]. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.1.4 *supposons que $h(x)-$est une fonction impaire, alors*

$$F_{h,n}(-x) = (-1)^{n+1}F_{h,n}(x),\ n \geq 0 \tag{1.4}$$

Preuve. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{h,n}(x)t^n = \frac{t}{1-h(x)t-t^2}$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{h,n}(-x)(-t)^n = \frac{-t}{1-h(x)t-t^2}$$

d'ou

$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{h,n}(-x)(-1)^{n+1}t^n = \frac{t}{1-h(x)t-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_{h,n}(x)(t)^n$$

donc

$$(-1)^{n+1}F_{h,n}(-x) = F_{h,n}(x)$$

ce qui équivalent à

$$F_{h,n}(-x) = (-1)^{n+1}F_{h,n}(x).$$

■

3.2 Les h(x)-polynômes de Lucas

Définition 3.2.1 *Soit $h(x) \in \mathbb{R}[x]$, on définit les $h(x)-$polynômes de Lucas par la relation*

$$L_{h,n+2}(x) = h(x)L_{h,n+1}(x) + L_{h,n}(x),\ n = 0, 1, ..., \tag{2.1}$$

avec

$$L_{h,0}(x) = 2,\ L_{h,1}(x) = h(x).$$

Théorème 3.2.2 *La fonction génératrice associee au $h(x)-$polynômes de Lucas $(L_{h,n}(x))_{n\geq 0}$ est donneé par*

$$L_h(t) = \frac{2 - h(x)t}{1 - h(x)t - t^2}. \tag{2.2}$$

Preuve. Soit

$$L_h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_{h,n}(x)t^n$$

la fonction génératrice associee au $h(x)-$polynômes de Lucas $(L_{h,n}(x)_{n\geq 0})$.
On a

$$\begin{aligned}
L_h(t)\left(1 - h(x)t - t^2\right) &= L_h(t) - L_h(t)th(x) - t^2 L_h(t) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} L_{h,n}(x)t^n - h(x)\sum_{n=0}^{+\infty} L_{h,n}(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} L_{h,n}(x)t^{n+2} \\
&= L_{h,0}(x) + \ L_{h,1}(x)t + \sum_{n=2}^{+\infty} L_{h,n}(x)t^n - \\
&\quad L_{h,0}(x)h(x)t - h(x)\sum_{n=2}^{+\infty} L_{h,n-1}(x)t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} L_{h,n-2}(x)t^n \\
&= L_{h,0}(x) + \ L_{h,1}(x)t - L_{h,0}(x)h(x)t + \\
&\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \left(L_{h,n}(x) - h(x)L_{h,n-1}(x) - L_{h,n-2}(x)\right)t^n \\
&= L_{h,0}(x) + \ L_{h,1}(x)t - L_{h,0}(x)h(x)t \\
&= L_{h,0}(x)(1 - h(x)t) + L_{h,1}(x)t \\
&= 2(1 - h(x)t) + h(x)t \\
&= 2 - h(x)t
\end{aligned}$$

Donc

$$L_h(t) = \frac{2 - h(x)t}{1 - h(x)t - t^2}$$

■

Théorème 3.2.3 ***(Formule de Binet)*** *: On a*

$$L_{h,n} = \alpha^n(x) + \beta^n(x), \ n = 0, 1, ..., \tag{2.3}$$

avec

$$\alpha(x) = \frac{h(x) + \sqrt{h(x)^2+4}}{2}, \quad \beta(x) = \frac{h(x) - \sqrt{h(x)^2+4}}{2}.$$

Preuve. On a

$$L_{h,n+2}(x) = h(x)L_{h,n+1}(x) + L_{h,n}(x)$$

Le polynôme caractéristique de cette relation est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - h(x)\lambda - 1$$

et il admet deux racines

$$\alpha(x) = \frac{h(x) + \sqrt{h(x)^2+4}}{2} \ , \ \beta(x) = \frac{h(x) - \sqrt{h(x)^2+4}}{2}$$

donc la solution générale s'écrit

$$L_{h,n} = A\alpha^n + B\beta^n.$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales comme suit

$$\begin{cases} L_{h,0}(x) = A + B \\ L_{h,1}(x) = A\left(\frac{h(x)+\sqrt{h(x)^2+4}}{2}\right) + B\left(\frac{h(x)-\sqrt{h(x)^2+4}}{2}\right) \end{cases}$$

En résolvant ce systéme, on obtient

$$A = 1, \ B = 1.$$

D'ou'

$$L_{h,n}(x) = \alpha^n(x) + \ \beta^n(x).$$

■

Théorème 3.2.4 *On a*

$$L_{h,n}^2(x) + L_{h,n+1}^2(x) = L_{h,2n}(x) + L_{h,2n+2}(x), \ n = 0, 1, ... \qquad (2.4)$$

Preuve. En utilisant la formule de Binet, on obtient

$$\begin{aligned}
L_{h,n}^2(x) + L_{h,n+1}^2(x) &= (\alpha^n(x) + \beta^n(x))^2 + (\alpha^{n+1}(x) + \beta^{n+1}(x))^2 \\
&= \alpha^{2n}(x) + 2\alpha^n(x)\beta^n(x) + \beta^{2n}(x) \\
&\quad +\alpha^{2n+2}(x) + 2\alpha^{n+1}(x)\beta^{n+1}(x) + \beta^{2n+2}(x) \\
&= \alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) + \alpha^{2n+2}(x) + \beta^{2n+2}(x) + 2\alpha^n(x)\beta^n(x) + 2\alpha^{n+1}(x)\beta^{n+1}(x) \\
&= \alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) + \alpha^{2n+2}(x) + \beta^{2n+2}(x) + 2\alpha^n(x)\beta^n(x)\alpha(x)\beta(x)
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\alpha(x)\beta(x) = -1$$

on trouve que

$$\begin{aligned}
L_{h,n}^2(x) + L_{h,n+1}^2(x) &= \alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) + \alpha^{2n+2}(x) + \beta^{2n+2}(x) \\
&\quad +2\alpha^n(x)\beta^n(x) - 2\alpha^n(x)\beta^n(x) \\
&= \alpha^{2n}(x) + \beta^{2n}(x) + \alpha^{2n+2}(x) + \beta^{2n+2}(x) \\
&= L_{h,2n}(x) + L_{h,2n+2}(x)
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.5 *Les $h(x)-$ polynômes de Lucas et Fibonacci sont liés par la relation*

$$L_{h,n}(x) = F_{h,n+1}(x) + L_{h,n-1}(x), \ n = 1, 2, ... \tag{2.5}$$

Preuve. Pour $n = 1$, on a

$$L_{h,1}(x) = h(x), F_{h,2}(x) = h(x), L_{h,0}(x) = 0$$

donc la relation est satisfaite. Supposons que la relation est satisfaite pour $n(\geq 2)$ et montrons pour $n+1$, c'est à dire

$$L_{h,n+1}(x) = F_{h,n+2}(x) + F_{h,n}(x).$$

On a

$$\begin{aligned}
L_{h,n+1}(x) &= h(x)L_{h,n}(x) + L_{h,n-1}(x) \\
&= h(x)\left(F_{h,n+1}(x) + F_{h,n-1}(x)\right) + F_{h,n}(x) + F_{h,n-2}(x) \\
&= h(x)F_{h,n+1}(x) + F_{h,n}(x) + h(x)F_{h,n-1}(x) + F_{h,n-2}(x) \\
&= F_{h,n+2}(x) + F_{h,n}(x).
\end{aligned}$$

■

3.3 Les $h(x)-$polynômes des quaternions de Lucas

Définition 3.3.1 [?] *Soit* $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. *Les* $h(x)-$*polynômes des quaternions de Lucas* $\{T_{h,n}(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ *sont définis par la relation de récurrence suivant :*

$$T_{h,n}(x) = L_{h,n}(x) + L_{h,n+1}(x)i + L_{h,n+2}(x)j + L_{h,n+3}(x)k, n = 0, 1, ... \quad (3.1)$$

avec $L_{h,n}(x)$ est le nième $h(x)-$polynôme de Lucas

Définition 3.3.2 *On defint le conjugué du* $h(x)-$*polynôme des quaternions de Lucas* $T_{h,n}(x)$ *est donné par formule suivant :*

$$\overline{T_{h,n}(x)} = L_{h,n}(x) - L_{h,n+1}(x)i - L_{h,n+2}(x)j - L_{h,n+3}(x)k \quad (3.2)$$

Théorème 3.3.3 *Les* $h(x)-$*polynômes des quaternions de Lucas satisfont la relation de récurrence linéaire d'ordre deux suivante :*

$$T_{h,n+2}(x) = h(x)T_{h,n+1}(x) + T_{h,n}(x), \; n = 0, 1, ... \quad (3.3)$$

Preuve. On a

$$T_{h,n}(x) = L_{h,n}(x) + L_{h,n+1}(x)i + L_{h,n+2}(x)j + L_{h,n+3}(x)k,$$

ainsi

$$\begin{aligned}
T_{h,n+2}(x) &= L_{h,n+2}(x) + L_{h,n+3}(x)i + L_{h,n+4}(x)j + L_{h,n+5}(x)k \\
&= h(x)L_{h,n+1}(x) + L_{h,n}(x) + \left(h(x)L_{h,n+2}(x) + L_{h,n+1}(x)\right) i \\
&\quad + \left(h(x)L_{h,n+3}(x) + L_{h,n+2}(x)\right) j + \left(h(x)L_{h,n+4}(x) + L_{h,n+3}(x)\right) k \\
&= h(x)\left(L_{h,n+1}(x) + L_{h,n+2}(x)i + L_{h,n+3}(x)j + L_{h,n+4}(x)k\right) \\
&\quad + L_{h,n}(x) + L_{h,n+1}(x)i + L_{h,n+2}(x)j + L_{h,n+3}(x)k \\
&= h(x)T_{h,n+1}(x) + T_{h,n}(x).
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.3.4 *(Formule de Binet) On a*

$$T_{h,n}(x) = \alpha^*(x)\alpha^n(x) + \beta^*(x)\beta^n(x) \tag{3.4}$$

avec

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= \frac{h(x) + \sqrt{h^2(x)+4}}{2}, \ \beta(x) = \frac{h(x) - \sqrt{h^2(x)+4}}{2}, \\
\alpha^*(x) &= 1 + \alpha(x)i + \alpha^2(x)j + \alpha^3(x)k, \\
\beta^*(x) &= 1 + \beta(x)i + \beta^2(x)j + \beta^3(x)k.
\end{aligned}$$

Preuve. On a

$$T_{h,n+2}(x) = h(x)T_{h,n+1}(x) + T_{h,n}(x)$$

Le polynôme caractéristique de cette relation est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - h(x)\lambda - 1$$

et il admet deux racines

$$\alpha(x) = \frac{h(x) + \sqrt{h(x)^2+4}}{2} \ , \ \beta(x) = \frac{h(x) - \sqrt{h(x)^2+4}}{2}$$

donc la solution générale s'écrit

$$= A\alpha^n(x) + B\beta^n(x)$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales comme suit

$$\begin{cases} T_{h,0}(x) = A + B \\ T_{h,1}(x) = A\left(\frac{h(x)+\sqrt{h(x)^2+4}}{2}\right) + B\left(\frac{h(x)-\sqrt{h(x)^2+4}}{2}\right) \end{cases}$$

En résolvant ce systéme, on obtient

$$A = 1,\ B = 1$$

D'ou'

$$T_{h,n} = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

■

$$\begin{aligned} \alpha(x) + \beta(x) &= h(x) \ \ ,\alpha(x)\beta(x) = -1 \\ \alpha(x) - \beta(x) &= \sqrt{h^2(x)+4} \\ \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= -\alpha^2(x) \ \ ,\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = -\beta^2(x) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Alors

$$\begin{aligned} 1 + h(x)\alpha(x) &= \alpha^2(x) \\ 1 + h(x)\beta(x) &= \beta^2(x) \end{aligned} \tag{3.6}$$

et

$$1 + \alpha^2(x) = \alpha(x)\sqrt{h^2(x)+4},\ 1 + \beta^2(x) = -\beta(x)\sqrt{h^2(x)+4} \tag{3.7}$$

Théorème 3.3.5 *Pour $n \geq 0$ Nous avons les formule suivantes :*

1) $(T_{h,n}(x))^2 + (T_{h,n+1}(x))^2 = [(\alpha^{2*}(x)\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2*}(x)\beta^{2n+1})](\alpha(x) - \beta(x))$

2) $\frac{(T_{h,n}(x))^2+(T_{h,n+1}(x))^2}{\alpha(x)-\beta(x)} = (\alpha^{2*}(x)\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2*}(x)\beta^{2n+1}(x))$

Preuve. 1). De la formule de Binet, on a

$$\begin{aligned}
(T_{h,n}(x))^2 + (T_{h,n+1}(x))^2 &= (\alpha^*(x)\alpha^n(x) + \beta^*(x)\beta^n(x))^2 \\
&\quad + \left(\alpha^*(x)\alpha^{n+1}(x) + \beta^*(x)\beta^{n+1}(x)\right)^2 \\
&= \alpha^*)^2(x)\alpha^{2n}(x) + \beta^{2*}(x)\beta^{2n}(x) + 2(\alpha^*(x)\alpha^n(x)\beta^*(x)\beta^n(x)) \\
&\quad +\alpha^{2*}(x)\alpha^{2n+2}(x) + \beta^{2*}(x)\beta^{2n+2}(x) + 2(\alpha^*(x)\alpha^{n+1}(x)\beta^*(x)\beta^{n+1}(x)) \\
&= \alpha^{2*}(x)\alpha^{2n}(x)\left[1+\alpha^2(x)\right] + \beta^{2*}(x)\beta^{2n}(x)[1+\beta^2(x)] \\
&\quad +2(\alpha^*(x)\alpha^n(x)\beta^*(x)\beta^n(x)) + 2(\alpha^*(x)\alpha^n(x)\beta^*(x)\beta^n(x)\alpha(x)\beta(x)) \\
&= \alpha^{2*}(x)\alpha^{2n}(x)(1+\alpha^2(x)) + \beta^{2*}(x)\beta^{2n}(x)(1+\beta^2(x)) \\
&\quad +2\alpha^*(x)\alpha^n(x)\beta^*(x)\beta^n(x) - 2\alpha^*(x)\alpha^n(x)\beta^*(x)\beta^n(x) \\
&= \alpha^{2*}(x)\alpha^{2n}(x)[(\alpha(x)\sqrt{h^2(x)+4})] \\
&\quad +\beta^{2*}(x)\beta^{2n}(x)[(-\beta(x)\sqrt{h^2(x)+4})] \\
&= \alpha^{2*}(x)\alpha^{2n+1}(x)\sqrt{h^2(x)+4} - \beta^{2*}(x)\beta^{2n+1}(x)\sqrt{h^2(x)+4}) \\
&= \alpha^{2*}(x)\alpha^{2n+1}(x)[\alpha(x)-\beta(x)] - \beta^{2*}(x)\beta^{2n+1}(x)[\alpha(x)-\beta(x)] \\
&= (\alpha^{2*}(x)\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2*}(x)\beta^{2n+1}(x))[\alpha(x)-\beta(x)]
\end{aligned}$$

D'ou' le résultat.

2). On a

$$\begin{aligned}
\cdot\frac{(T_{h,n}(x))^2 + (T_{h,n+1}(x))^2}{\alpha(x)-\beta(x)} &= \frac{(\alpha^{2*}(x)\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2*}(x)\beta^{2n+1}(x))[\alpha(x)-\beta(x)]}{\alpha(x)-\beta(x)} \\
&= (\alpha^{2*}(x)\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2*}(x)\beta^{2n+1}(x))\frac{(\alpha(x)-\beta(x))}{\alpha(x)-\beta(x)} \\
&= (\alpha^{2*}(x)\alpha^{2n+1}(x) - \beta^{2*}(x)\beta^{2n+1}(x)).
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.3.6 *La fonction génératrice exponentielle $h(x)-$polynômes des quaternions de Lucas est donnée par*

$$T_h(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_{h,k}(x)}{k!}u^k = \alpha^*(x)\exp^{\alpha(x)u} + \beta^*(x)\exp^{\beta(x)u} \tag{3.8}$$

Preuve. En utilisant la formule de Binet, on obtient

$$\begin{aligned}
T_h(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_{h,k}(x)}{k!} u^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^*(x)\alpha^k(x) + \beta^*(x)\beta^k(x)) \frac{u^k}{k!} \\
&= \alpha^*(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k(x)u^k}{k!} + \beta^*(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k(x)u^k}{k!} \\
&= \alpha^*(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\alpha(x)u]^k}{k!} + \beta^*(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\beta(x)u]^k}{k!} \\
&= \alpha^*(x) \exp^{[\alpha(x)u]} + \beta^*(x) \exp^{[\beta(x)u]}
\end{aligned}$$

D'ou le résultat. ■

Bibliographie

[1] S. Falcon, On the k-Lucas numbers, International Jornal of Contemporary Mathematical Sciences, 6(21), 2011, 1039-1050.

[2] A. Horadam, Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternion, Amer. Math. Monthly,70, (1963), 289–291

[3] A. F. Horadam, Quaternion recurrence relations, Ulam Quaterly,2 (2), (1993), 23-33

[4] N. Kilic, The h(x)-Lucas quaternion polynomials, Annales Mathematicae Informaticae , 47, (2017), 119–128

[5] A. Nalli, P. Haukkanen, On generalized Fibonacci and Lucas polynomials , Chaos, Solitons and Fractals, 42, (2009), 3179-3186

[6] E. Polatti, A Generalization of Fibonacci and Lucas quaternions, Advances in Applied Clifford Algebras, 22, (2012), 321–327.

[7] E. Polatli, S. Kesim, On quaternions with generalized Fibonacci and Lucas number components, Advances.in Difference Equations, Article 169, (2015), 8 pages.

[8] J. L. Ramirez, Some combinatorial properties of the k-Fibonacci and the k-Lucas quaternions, An.Stint. Univ. Ovidius' Constanta, Ser. Mat., 23(2), (2015), 201–212.

[9] Y.Yazlik, N. Yilmaz et N. Taskara, On the sums of powers of k-Fibonacci and k-Lucas sequences, Selçuk of Applied Mathematics, Special issue, 2012, 47-50.