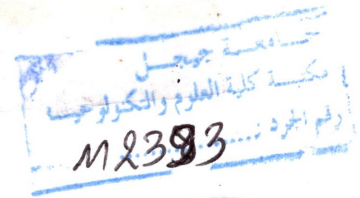


8

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche



Université Mohamed Seddik Ben Yahia

*Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Electronique*

*Projet de fin d'Etudes pour l'obtention du Diplôme de
Master II en Electronique*

Option : Electronique et Analyse des Systèmes

Thème :

***Transmission de message à base d'un observateur
chaotique***

Réalisé par :

M^{lle} Fouzia Bouchair

M^{lle} Mérièm Amouri

Proposé par :

Dr :Moussa Yahia

Promotion: Juin 2016.

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier DIEU le tout puissant qui nous a donné, durant toutes ces années, éducation, santé, courage et la patience pour arriver à ce jour.

Aucune formule de politesse ne sera suffisante pour remercier notre encadreur Mr. Yahia Moussa, lui qui nous a orienté, conseillé et encouragé au cours de ce modeste travail.

Nous remercions aussi le chef de département d'électronique, Mr. Toufik Benkdidah, ainsi que Mme Samira Dib, Mme Hassina Merdjana, Mr. Ammar Soukkou, Mr. Chaabane Boubakir et Mr. Zoubir Santouh.

Nous adressons nos remerciements aux membres de jury, et nous les exprimons à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à notre formation de Master

Enfin, nos remerciements vont également à tous les enseignants et les responsables de notre département d'Electronique à l'université de Jijel.

A tous, merci beaucoup.

DEDICACES

Je dédie ce travail :

*A mes chères parents mon père « **Abdel Hafid** » et ma mère « **Fedia** » ; pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements, que dieu les garde pour moi.*

A tous mes frères et mes sœurs que j'aime beaucoup :

*«**Souad, Madjda, Dounya, Abd El Hadi, Fares, Wassila, Samia, Manel, Fatima, Chahrazed, Wiam**»*

A tous mes oncles, tantes, cousins et cousines.

A toutes mes copines :

*« **Amina, Hayat, Safia, Widad, Wafa, Wafa, Nora, Selma, Moufida** »*

A tous ceux qui j'aime et tous ceux qui m'aiment.

*A mon très chère binôme « **Mérioma** »*

A tout les étudiants du département d'électronique de l'université de Jijel, promotion 2016

A tous ceux qui, de près ou de loin n'ont cessé de m'apporter leurs soutien durant mes études.

Fouzia

DEDICACES

Je dédie ce travail :

*A mes chères parents mon père « **Ammar** » et ma mère « **Dahbia** » ; pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements, que dieu les garde pour moi.*

A tous mes frères et mes sœurs que j'aime beaucoup :

*«**Abdel Hak , Amira, Nassima, Abdel Rahim, Amel, Aziz, Abdel Hakim** »*

A tous mes oncles, tantes, cousins et cousines.

A toutes mes copines en particulier :

*«**Soumia, Souad, Mina, Hayat, Sonia, Ilhem, Dalila, Samia, Rim, Sara, Wissem, Lamia, Wafa, Wafa, Saida** »*

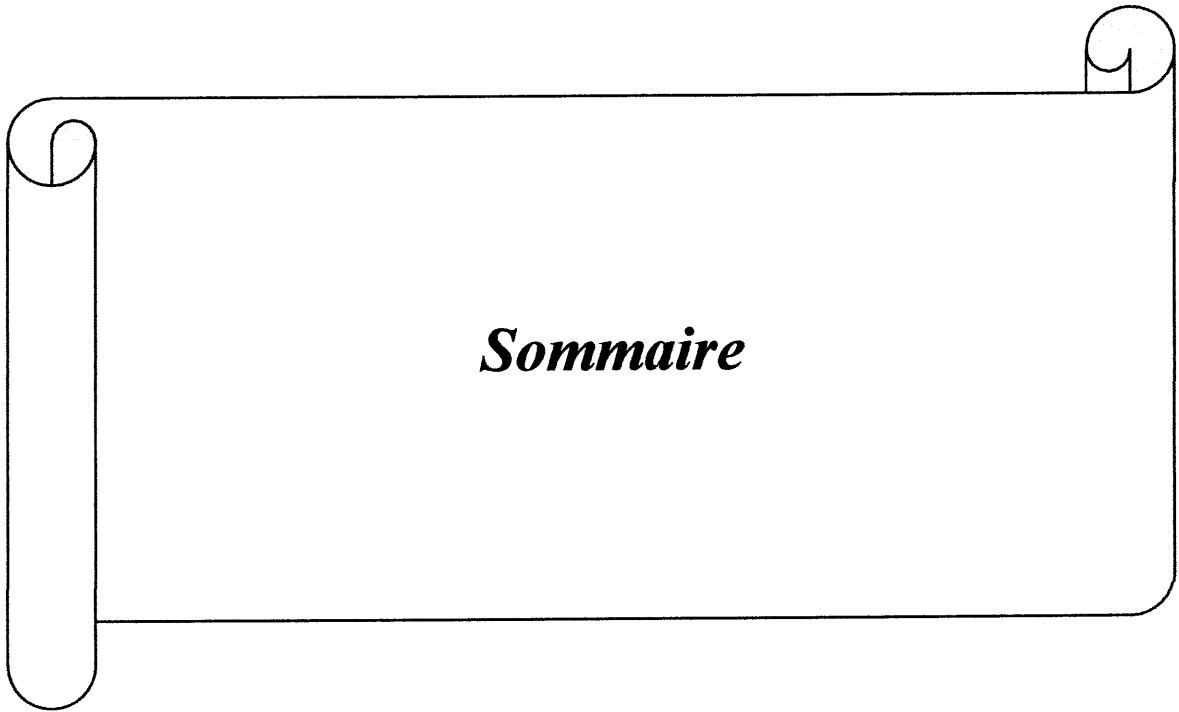
A tous ceux qui j'aime et tous ceux qui m'aiment.

*A mon très chère binôme « **Fouza** »*

A tout les étudiants du département d'électronique de l'université de Jijel, promotion 2016

A tous ceux qui, de près ou de loin n'ont cessé de m'apporter leurs soutien durant mes études.

Mérièm



Sommaire

Sommaire

Introduction Générale	1
------------------------------------	---

Chapitre 1

Systemes Dynamiques et Chaos

1.1. Introduction	3
1.2. Systemes dynamiques	4
1.2.1. Définition.....	4
1.2.2. Systemes lineaires et non lineaires	5
1.3. Comportement chaotique des systemes dynamiques non lineaires	5
1.3.1 Concepts mathematiques et definitions	7
1.3.2. Exposant de Lyapunov	9
1.3.3. Presentation des attracteurs	9
1.3.3.1. Attracteur de Lorenz	9
1.3.3.2. Attracteur de Rossler	11
1.3.3.3. Pendule de Moon.....	12
1.3.3.4. Attracteur de Henon	14
1.4. Diagramme de bifurcation	15
1.4.1. Le doublement de periode.....	16
1.4.2. L'intermittence.....	16
1.4.3. Le quasi periodicite.....	17
1.5. Conclusion	20

Chapitre 2

Synchronisation Des Systèmes Chaotiques

2.1. Introduction	21
2.2. Méthodes de synchronisation	22
2.2.1 Synchronisation identique.....	23
2.2.2 Synchronisation par la méthode Backstepping	24
2.2.2.1 Théorie du Backstepping.....	24
2.2.2.2 Commande de stabilisation par la méthode du Backstepping.....	25
2.2.2.3 Commande en poursuite de trajectoire référence par la méthode du Backstepping.....	26
2.3. Notion des lois de commande basées sur le Backstepping pour quelques Systèmes chaotiques	27
2.3.1 Oscillateur du second ordre Duffing.....	27
2.3.2 Système de Lorenz.....	29
2.4. Conclusion	32

Chapitre 3

Application de la synchronisation à la transmission de message

3.1. Introduction	33
3.2. Synchronisation à base d'un observateur non linéaire	34
3.3 Modulation chaotique et masquage	36
3.4 Robustesse de la méthode	37
3.5 Modulation chaotique	40
3. 6. Résultats de simulation	44
3. 7. Conclusion	52
Conclusion Générale	53
Bibliographie	54

Liste des Figures

<i>Fig.1.1. Evolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches.....</i>	8
<i>Fig. 1. 2. Attracteur de Lorenz $P_r = 10, b = 8/3$ et $Ra = 28$.....</i>	10
<i>Fig. 1. 3. détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Lorenz.....</i>	11
<i>Fig.1.4. Attracteur de Rössler $a=0.398, b=2$ et $c = 4$.....</i>	12
<i>Fig.1.5. Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Rössler.....</i>	12
<i>Fig.1.6. Partie de l'attracteur de Moon. $\epsilon =0.25, a=0.3$ et $w_0 = 1$</i>	13
<i>Fig.1.7. Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Moon.....</i>	14
<i>Fig.1.8. Attracteur de Hénon, avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$</i>	15
<i>Fig.1.9. Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Hénon.....</i>	15
<i>Fig.1.10. Diagramme de bifurcation pour l'attracteur de Hénon.....</i>	18
<i>Fig.1.11. Portrait de phase pour le système de Lorenz (état d'équilibre).....</i>	18
<i>Fig. 1.12. Portrait de phase pour le système de Lorenz (état chaotique).....</i>	19
<i>Fig. 2.1 Structure de synchronisation par décomposition en sous-système proposée par Pecora et Carroll.....</i>	23
<i>Fig. 2.2. Synchronisation maître esclave P_C du système de Lorenz.....</i>	24
<i>Fig. 2.2. Variation des trois états en fonction du temps pour le système de Lorenz.....</i>	24
<i>Fig. 2.3. Comportement chaotiques dans l'espace d'état pour le système de Lorenz.....</i>	31
<i>Fig. 3.1 Résultats de simulation de système de Duffing, cas 1, (a) signal à transmettre x, (b) $x_1 = x$ par rapport à $x_2 = \dot{x}$, (c) message m, (d) message récupéré m_r.....</i>	45
<i>Fig. 3. 2. Résultats de simulation de système de Duffing, cas 2, (a) signal à transmettre x, (b) $x_1 = x$ par rapport à $x_2 = \dot{x}$, (c) message m, (d) message récupéré m_r.....</i>	46
<i>Fig.3.3. Résultats de simulation de système de Lorenz, cas 2, (a) signal à transmettre x, (b) $x_1 = x$ par rapport à $x_2 = \dot{x}$, (c) message m, (d) message récupéré m_r</i>	48
<i>Fig. 3. 4. Résultats de simulation de système de Lorenz, cas 2, (a) signal à transmettre x, (b) $x_1 = x$ par rapport à $x_2 = \dot{x}$, (c) message m, (d) message récupéré m_r</i>	48
<i>Fig. 3. 5. Résultats de simulation de système de Chua, (a) message transmit m (b) x par rapporte à y (c) message transmit m avec bruit, (d) message transmit m , (e) message récupéré m_r pour $n_m = 0.01$, (f) message récupéré m_r pour $n_m = 0.1$[13].....</i>	51

Introduction Générale

INTRODUCTION GENERALE

Le phénomène de synchronisation peut être décrit comme étant un processus d'ajustement des rythmes des événements répétitifs par l'intermédiaire des faibles interactions. Ce phénomène a été observé pour la première fois par Huygens, en 1673, en étudiant un système de deux pendules couplées. Depuis le constat de Huygens, la synchronisation des systèmes chaotiques a trouvé ses applications en théorie et en pratique et plusieurs types de synchronisation ont été distingués tels que l'auto-synchronisation qui se manifeste par les interactions internes entre les systèmes considérés et la synchronisation commandée qui nécessite une intervention externe pour forcer deux ou plusieurs systèmes dynamiques à se synchroniser.

Le premier travail de recherche ayant suggéré une réponse à la question de synchronisation des systèmes chaotiques a été réalisée en 1990 par les chercheurs Pecora et Carroll qui ont réussi à synchroniser deux systèmes maître et esclave en utilisant la méthode de décomposition en sous-systèmes. D'autre part, en 1997, Nijmeijer et Mareels ont démontré que la synchronisation maître-esclave peut être considérée comme étant un problème d'estimation d'état où le système esclave est conçu à base d'un estimateur d'état (observateur) pour le système maître. Depuis ce constat, la théorie des observateurs non linéaires a joué un rôle fondamental dans le développement des méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques et ses applications dans les systèmes de transmission sécurisée d'informations.

Le problème d'estimation d'état et d'observateurs pour les systèmes dynamiques est un domaine de recherche qui a été abordé depuis les années soixante et qui reste actuellement un domaine très actif. En effet, le besoin d'estimation d'état est motivé par de nombreuses applications telles que la détection de défauts, la commande, l'identification (modélisation), la synchronisation des systèmes dynamiques, etc. Il s'agit de concevoir un système dynamique appelé observateur dont l'objectif est de reconstruire l'état du système à partir des informations partielles accessibles telles que les signaux d'entrée et de sortie [1].

L'utilisation du chaos dans les applications de communication sécurisée est motivée par les propriétés des systèmes chaotiques qui sont des systèmes déterministes, à comportement complexe et qui sont caractérisés par une forte sensibilité aux conditions initiales et aux variations paramétriques.

L'objectif principal de ce projet est d'apporter à partir de la théorie des observateurs non linéaires, des solutions aux problèmes rencontrés dans les applications de communications basées sur la synchronisation des systèmes chaotiques:

- a) Etude des méthodes de synchronisation à base d'observateurs non linéaires qui peuvent exister en pratique.
- b) Application des méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques pour la transmission à base du chaos qui sont soumis aux imperfections, incertitudes, bruit présent dans le canal de communication.

La structure de ce mémoire se présente comme suit.

Le chapitre 1 est consacré aux systèmes chaotiques. Le chapitre 2 va concerner deux types de synchronisation : la synchronisation Identique et la synchronisation Backstepping adaptative. La première partie du troisième chapitre survole les principaux outils d'analyse utilisés dans la reconnaissance du message informationnel. Deux techniques sont employées : la première porte le nom modulation et masquage par chaos, la deuxième est basée uniquement sur la modulation chaotique, Le reste du chapitre traite des exemples spécifiques et enfin ce travail est clôturé par une conclusion générale.

Chapitre 1

Systemes Dynamiques et Chaos

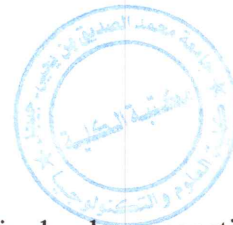
1.1. Introduction

La notion de temps dans l'étude des modèles physiques et mathématiques remonte à Galilée, qui est le premier à introduire cette notion dans l'étude de la chute des corps et le mouvement de la terre autour du soleil. Cette introduction du temps dans les équations est ce qui s'appellera l'étude des systèmes dynamiques. Au XVIII^e siècle, Isaac Newton a défini l'équivalence masse-énergie et trouve de manière explicite la cause de certains mouvements apparemment désordonnés. Il parle de déterminisme. Selon cette vision, tout semblait aussi être parfaitement prédictible et causal. Le futur devenait prévisible : il suffisait de traduire le mouvement en équations différentielles et de les résoudre [1].

En général, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme " système " fait référence à un ensemble de variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables.

La science du 20^{ième} siècle a été marquée par trois découvertes majeures :

- La relativité,
- La mécanique quantique,
- Le chaos.



Selon le philosophe Daniel Parrochia [3], la théorie du chaos constitue une des trois grandes révolutions scientifiques du dix-neuvième siècle et correspond à un changement de paradigme Comparable à ceux qu'entraînerent la théorie de la relativité et la mécanique quantique. Ce siècle a vu s'écrouler l'un après l'autre les murs de certitudes qui entouraient la forteresse de la physique newtonienne. Einstein avec sa théorie de la Relativité, a éliminé en 1905 l'illusion newtonienne d'un espace et d'un temps absolus. Dans les années 1920 à 1930, la mécanique quantique a détruit la certitude de tout pouvoir mesurer aussi précisément que possible.

A la fin du dix-neuvième siècle, Henri Poincaré réussit à mettre en évidence la possibilité de comportements irréguliers dans les systèmes déterministes. C'est Edward Lorenz, un météorologue américain qui fut le premier à comprendre et à déterminer un modèle mathématique du chaos, mais comme conclusion de l'histoire de naissance de la

théorie du chaos, elle est le résultat d'une confrontation entre l'histoire de longue durée, qui trouve ses racines au dix-neuvième siècle dans les travaux d'Henri Poincaré, et une période de reconfiguration, constituée par les travaux séminaires d'Edward Lorenz, Stephen Smale, David Ruelle et Floris Takens.

Le chaos est un phénomène qui se produit largement dans les systèmes dynamiques. De point de vue pédagogique ce phénomène a été considéré complexe et n'a jamais été donné de l'importance parce qu'il n'y avait aucune analyse simple disponible qui pourrait aider les étudiants et les chercheurs à immerger dans ce phénomène intéressant et obtenir des outils et des expériences. Depuis la présence de chaos s'est répandu dans beaucoup de champs, c'est bon d'avoir quelque perspicacité dans ce droit du phénomène du niveau haut [4].

1.2. Systèmes dynamiques

1.2.1. Définition

En mathématiques, en physique théorique et en ingénierie, un système dynamique est un système classique qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- ✓ **Causale**, c'est -à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;
- ✓ **Déterministe**, c'est -à-dire qu'à une «condition initial» donnée à l'instant «présent» va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état «futur» possible. On exclut donc ici conventionnellement les systèmes «bruités», stochastiques, qui relèvent de la théorie des probabilités.

L'évolution déterministe des systèmes dynamiques peut alors se modéliser de deux façons distinctes :

- ✓ Une évolution continue dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire .C'est a priori la plus naturelle physiquement, puisque le paramètre temps nous semble continu.
- ✓ Une évolution discontinue dans le temps .Ce second cas est souvent le plus simple à décrire mathématiquement, même s'il peut sembler a priori moins réaliste physiquement. Cependant, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues.

1.2.2 Systèmes linéaires et non linéaires

Un système linéaire est un système où les grandeurs d'entrées et de sorties peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants.

Définition 1 : un système différentiel linéaire à coefficients constants d'ordre 1 à n équations prend la forme $\dot{X} = AX + B$.

où X, B sont des fonctions sur R à valeurs dans R^n , A une matrice $n \times n$ indépendante du temps. X est l'inconnue, B le second membre, A la matrice du système [5].

Définition 2 : on appelle système différentiel non linéaire tout système de la forme

$\dot{X}(t) = F[X(t)]$, où t désigne une variable réelle.

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \text{ les } f_i \text{ sont des fonctions de la variable } x$$

définies et continues sur un ouvert E de R^n , à valeurs dans R .

Un système non linéaire est un système qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Cette définition explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent, et on peut prendre comme exemple de système non linéaire le système de Lorenz, Chua, Duffing, ... [6].

1.3. Comportement chaotique des systèmes dynamiques non linéaires

La section suivante donne des notions préliminaires sur les dynamiques du comportement chaotique, les systèmes chaotiques représentent une classe des modèles indéterministes différents des modèles stochastiques. Alors qu'il suffit de connaître l'état courant du modèle déterministe, les trajectoires futures sont prédictives pour une longue période arbitraire, le modèle stochastique ne peut pas faire une prévision précise, d'une manière générale, et pour une petite période arbitraire, l'erreur de prédiction pour un modèle chaotique croît exponentiellement et par conséquent la prévision ne peut se faire que sur une période limitée en temps définie par une erreur de prévision admissible, le processus dans les modèles chaotiques est que des oscillations non régulières varient en amplitude et en fréquence.

Avant le 19^{ème} siècle, les équations différentielles linéaires étaient les principales modèles mathématiques pour les oscillations des systèmes mécaniques et électriques et d'autres, à la fin de ce siècle, il est devenu clair que les modèles linéaires ne peuvent pas

décrire adéquatement les nouveaux processus et phénomènes physiques, de nouveaux fondements mathématiques ont apparus, tels que la théorie des oscillations non linéaires et plus principalement l'étude du cycle limite stable. Même que les oscillations complexes comme la relaxation, pouvait être décrite par un simple modèle non linéaire dépendant des conditions initiales "systèmes avec plusieurs cycles limites", les modèles des oscillations linéaires et non linéaires satisfaisaient énormément les besoins des chercheurs pour plusieurs décennies.

Il a été admis que ces modèles non linéaires, pouvaient décrire tout types d'oscillations et cette conviction était supportée par des fondements mathématiques, telle que le théorème de Poincaré Bendixson qui affirmait que les points d'équilibre et les cycles limites étaient les seules type possible des états limites stables dans les systèmes continus du second ordre, cependant au milieu du siècle dernier, quelques mathématiciens établissaient que se n'était pas le cas pour les systèmes du troisième ordre, qui présentaient des comportements plus complexes comme des oscillations non périodiques limités[10].

En 1963, le physicien E. Lorenz révolutionnait le monde et démontrait la nature qualitative de l'atmosphère turbulent, qui obéissait aux équations différentielles partielles complexes de Navier-Stokes et le représentait par un simple modèle non linéaire du troisième ordre appelé plus tard des équations de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{x} = -d(x - y) \\ \dot{y} = -xy - rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $x, y, z \in R$ sont des variables des états d'entrées et r, d et b sont les paramètres de contrôle du système. Pour des valeurs $d = 10, r = 97, b = 2/3$.

Les solutions du système de Lorenz sont pour des oscillations non périodiques et les trajectoires dans l'espace de phase approchaient des ensembles limites appelés attracteurs caractérisés par une forme étrange.

L'intention des physiciens et des mathématiciens, et plus tard des ingénieurs, a été attirée pour ce modèle par les travaux de D. Ruelle et F. Takens qui appelaient pour la première fois attracteurs "étrange" et aussi par les travaux de Li et York qui introduisaient le terme chaos pour désigner le phénomène non régulier dans les systèmes déterministes, donc

les fondements mathématiques apparus pour étudier le phénomène chaotique sont mis dès 1960-1970. Durant ce temps, le comportement chaotique a été découvert dans plusieurs systèmes mécaniques, lasers, physiques, chimiques, biologiques et médicales, circuits électroniques et dans beaucoup d'autres.

1.3.1. Concepts mathématiques et définitions

Les nouvelles méthodes analytiques et numériques développées pour les systèmes, démontraient que le chaos n'est qu'un type exceptionnel de comportement des systèmes non linéaires, grossièrement parler du comportement chaotique survenait toute fois :

- que les trajectoires des systèmes sont globalement bornées et localement instables, dans les systèmes chaotiques, une petite divergence initiale et arbitraire des trajectoires ne reste pas insignifiante mais croît exponentiellement.
- le spectre de fréquence des trajectoires chaotiques est continu.

Dans plusieurs cas tels que les oscillations non régulières et non périodiques représentaient mieux le processus dans les systèmes physiques. Il faut noter qu'en pratique, il est impossible de distinguer à l'œil le processus chaotique du processus périodique ou quasi périodique. La terminologie dans le domaine des modèles chaotiques n'est pas encore résolue et il y a plusieurs différentes définitions des systèmes chaotiques dont on présente la plus simple.

Considérons le système dynamique continu dans le temps suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ y = h(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où $x = x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état du système et, $0 \leq t \leq \infty$.

Autrement dit : On appelle attracteur un ensemble de points vers lequel converge la trajectoire de l'espace des phases.

Pratiquement, à partir de quelques itérations, on considère que l'ensemble des points de l'espace des phases décrit l'attracteur.

Définition 2: Un système dynamique est appelé un système chaotique s'il a au moins un attracteur chaotique.

L'instabilité de Lyapunov caractérise la propriété principale des oscillations chaotiques appelée super sensibilité ou dépendance sensible aux conditions initiales, c. à d. toutes deux trajectoires fermées arbitraires proches s'éloignent l'une de l'autre nécessairement à une distance finie.

Dans un premier temps, les deux systèmes évoluent de la même manière, mais, très vite, leur comportement devient différent pour n'avoir plus grand-chose à voir.

Définition 3: Un attracteur est appelé chaotique s'il est borné et toute trajectoire qui commence dedans est une trajectoire instable de Lyapunov.

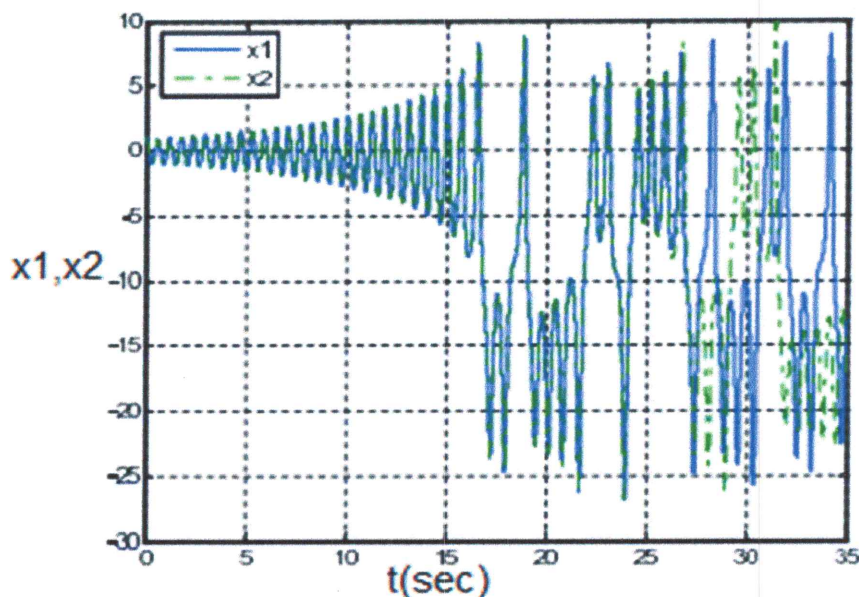


Fig.1.1. Evolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches.

Il y a d'autres définitions de l'attracteur chaotique et le chaos. Par exemple, la définition de l'attracteur chaotique qui souvent inclut des exigences supplémentaires telles que l'existence des trajectoires ou une famille de trajectoires périodiques. La notion d'attracteur chaotique coïncide souvent avec celui de l'attracteur étrange introduite en 1971 par Ruelle et Takens comme un ensemble accessible et nommé plus tard un ensemble fractal.

La preuve stricte de la chaotité d'un système est difficile même si la définition la plus simple est utilisée. Pour quelques-uns universellement reconnu comme des systèmes chaotiques tels que le système de Lorenz et les systèmes de Henon pour des valeurs standard

des paramètres, les preuves de chaoticité sont maladroites, même s'il y ait des démonstrations numériques et expérimentales de ce fait. Par conséquent, la simulation numérique et l'estimation de plusieurs caractéristiques reste la méthode principale d'étudier les systèmes chaotiques.

1.3.2. Exposants de Lyapunov

L'évolution chaotique est difficile à appréhender car la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide. Pour cette raison on essaie si c'est possible de mesurer sinon d'estimer la vitesse de divergence ou de convergence. Cette vitesse est donnée par l'exposant de Lyapunov qui caractérise le taux de séparation de deux trajectoires très proches.

Soit $f: R \rightarrow R$ une fonction de classe C^1 . Pour chaque point x_0 on définit un exposant de Lyapunov $\lambda(x_0)$ comme suit :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log(|f(n)'(x_0)|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log(|f'(x_j)|) \quad (1.3)$$

avec : $x_j = f_j(x_0)$, Z_1 est le taux. Donc deux trajectoires dans le plan de phase initialement séparées par Z_1 divergent après un temps $\Delta t = t_2 - t_1$ vers Z_1 tel que :

$$|Z_2| \approx e^{\lambda \Delta t} |Z_1|$$

où λ est l'exposant de Lyapunov. Les exposants de Lyapunov sont une généralisation des valeurs propres pour le point fixe et des multipliers caractéristiques pour les solutions périodiques. Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative. Un attracteur étrange possèdera toujours au moins trois exposants de Lyapunov.

1.3.3. Présentation des attracteurs

1.3.3.1. Attracteur de Lorenz

L'attracteur de Lorenz tient son nom du météorologue Edward Lorenz qui l'a étudié le premier. Donc, il a les étudiés afin de mettre en évidence sur un système simple la sensibilité aux conditions initiales qu'il avait observée.

Cette expérience a été réalisée pour quelques fluides présentant des propriétés adaptées viscosité, coefficient de dilatation, densité moyenne. Elle donne des résultats illustrant très bien le comportement chaotique.

$$\begin{cases} \dot{V} = -P_r(v - T) \\ \dot{T} = (Ra - Z)v - T \\ \dot{Z} = vT - bT \end{cases} \quad (1.4)$$

avec : $P_r = \sigma = (n/D)$, nombre de Prandtl, rapport de la viscosité cinématique du fluide sur la diffusivité thermique.

- $T = \rho$ est la température rapportée à celle du fluide.
- $Ra = \beta$ est le nombre de Rayleigh. Il dépend des propriétés du fluide, de la distance entre les plaques et de la différence de température entre les plaques.

pour $P_r=10, b = 8/3$ et $Ra = 28$. ces valeurs impliquent un comportement chaotique. n est une composante de vitesse et Z est une variable issue des grandeurs physiques évoquées dans les équations.

Le tracé en échelle logarithmique montre bien que la distance croît de manière exponentielle, du fait de la sensibilité aux conditions initiales. On peut lire la valeur de la pente, alors l'exposant de Lyapunov est 0.8.

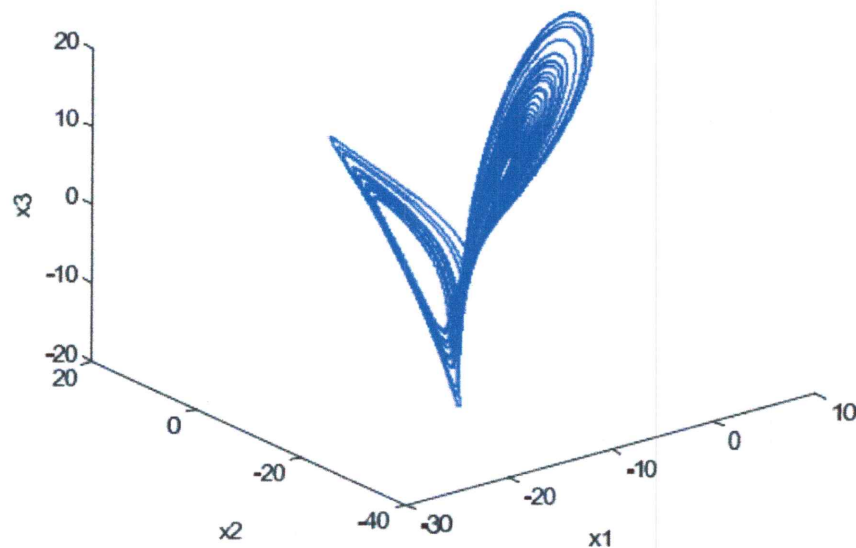


Fig. 1. 2. Attracteur de Lorenz $P_r = 10, b = 8/3$ et $Ra = 28$.

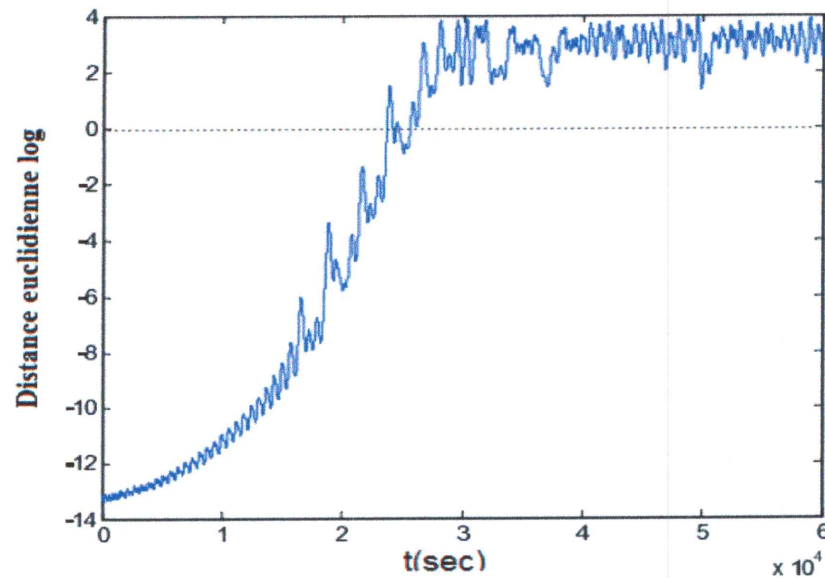


Fig. 1. 3. détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Lorenz.

1.3.3.2. Attracteur de Rössler

Proposé par l'Allemand Otto Rössler, ce système est lié à l'étude de la mécanique des fluides, il découle des équations de Navier Stokes. Les équations de ce système ont été découvertes à la suite des travaux en cinétique chimique. Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X} = -(Y + Z) \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases} \quad (1.5)$$

où : a, b et c sont des constantes réelles. Pour : $a=0.398$, $b=2$ et $c=4$. On est alors dans le cas d'un système chaotique. L'exposant de Lyapunov vaut ici 0.09.

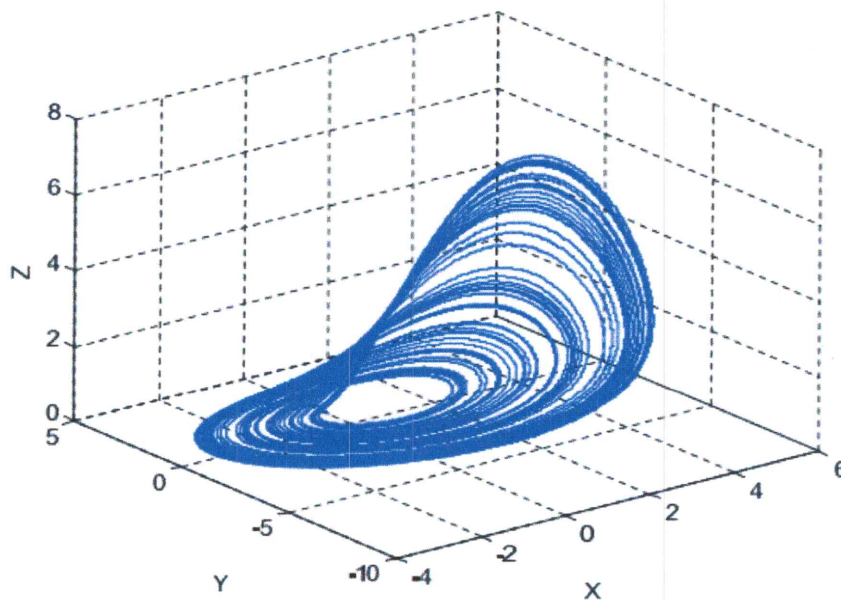


Fig.1.4. Attracteur de Rössler $a=0.398$, $b=2$ et $c = 4$.

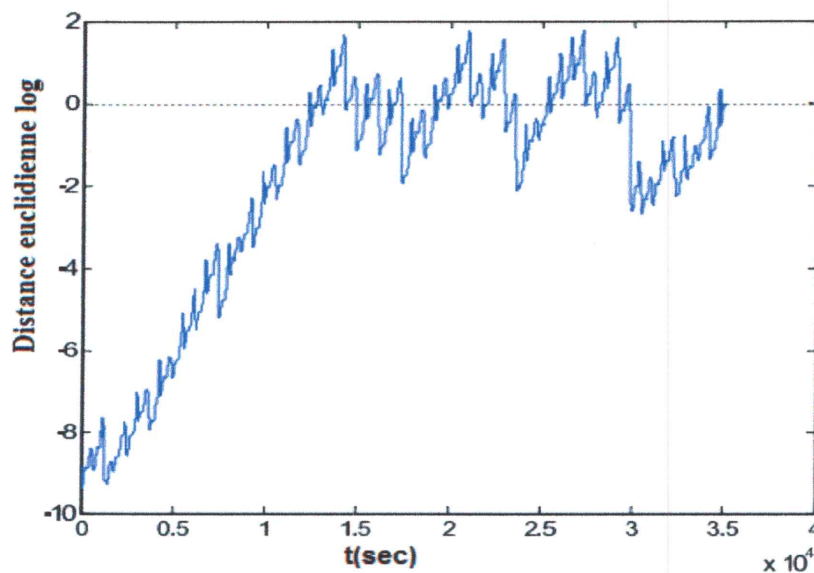


Fig.1.5. Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Rössler.

1.3.3.3. Pendule de Moon

Le pendule de Moon est un système physique. Il est constitué d'un pendule (avec une boule métallique à son extrémité) accroché à une potence légèrement flexible. De plus, le pendule est placé entre deux aimants situés à égale distance de la boucle lorsque celle-ci et la potence sont au repos. La potence est ensuite excitée à l'aide d'un mouvement oscillatoire harmonique d'amplitude constante. Stimulé, le pendule se met en mouvement et les forces magnétiques dues aux aimants. Le mouvement est alors chaotique.

Plusieurs oscillations chaotiques peuvent être produites en introduisant dans les oscillateurs non linéaires, un signal harmonique par exemple, en substituant la fonction sinusoïdale $Z(t) = a \cos(\omega_0 t)$ à droite

1. De l'équation de Van der Pol $\ddot{y} + \epsilon(y^2 - 1)\dot{y} + \omega^2 y = 0$.
2. De Duffing $\ddot{y} + p\dot{y} - qy + q_0 y^3 = 0$.
3. Et le système auto oscillant avec un relais

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy - \text{signe}(y) = 0.$$

Pour quelques valeurs d'excitation de fréquence et d'amplitude de la fonction sinusoïdale $Z(t)$, le cycle limite est induit et les oscillations dans les systèmes non linéaires deviennent chaotiques.

y est la position du pendule. ϵ est la masse de la boule métallique, a est l'amplitude de l'excitation et ω_0 est la pulsation de cette excitation. Classiquement, on prend $\epsilon = 0.2$,

$$a = 0.3 \text{ et } \omega_0 = 1.$$

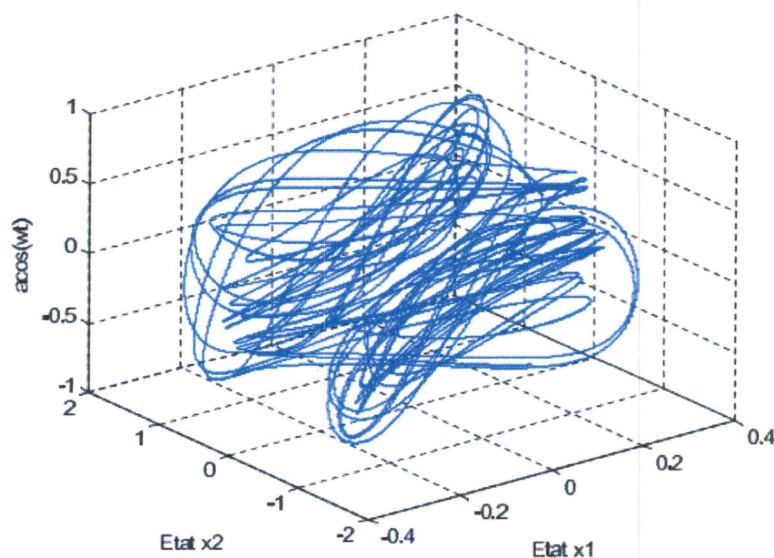


Fig.1.6. Partie de l'attracteur de Moon. $\epsilon = 0.2$, $a = 0.3$ et $\omega_0 = 1$.

On ne représente qu'une partie de cet attracteur car on ne pourrait pas distinguer les trajectoires dans le cas contraire, on verrait une sorte de pelote de laine. Cet attracteur est plus étendu que les autres attracteurs. On trouve un exposant de Lyapunov de 0.32.

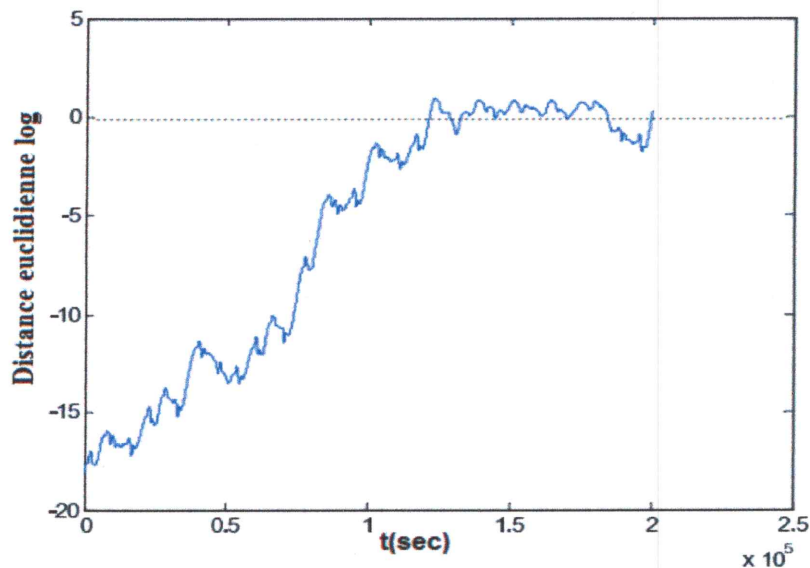


Fig.1.7. Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Moon.

Pour le temps discret, les exemples de systèmes chaotiques existent pour tout dimensionnement de l'état du système, même pour $n=1$.

1.3.3.4. Attracteur de Hénon

Le système de Hénon est un modèle proposé en 1976 par le mathématicien Michel Hénon, il est défini par les équations aux différences suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - \alpha x_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = \beta x_k \end{cases} \quad (1.6)$$

Le comportement chaotique de la solution de (1.5) est observé, pour la valeurs des paramètres $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$ et on prendra pour conditions initiales $(X_0, Y_0) = (1, 0)$. Ces valeurs furent proposées par Michel Hénon et permettent d'observer un comportement chaotique. On peut lire la valeur de la pente ici, on trouve un exposant de Lyapunov d'une valeur de 0.46.

Le tracé en échelle logarithmique de l'exposant de Lyapunov pour les différents attracteurs montre bien que la distance croît de manière exponentielle du fait de la sensibilité aux conditions initiales. On peut facilement lire la valeur de la pente qui donne la valeur de l'exposant de Lyapunov.

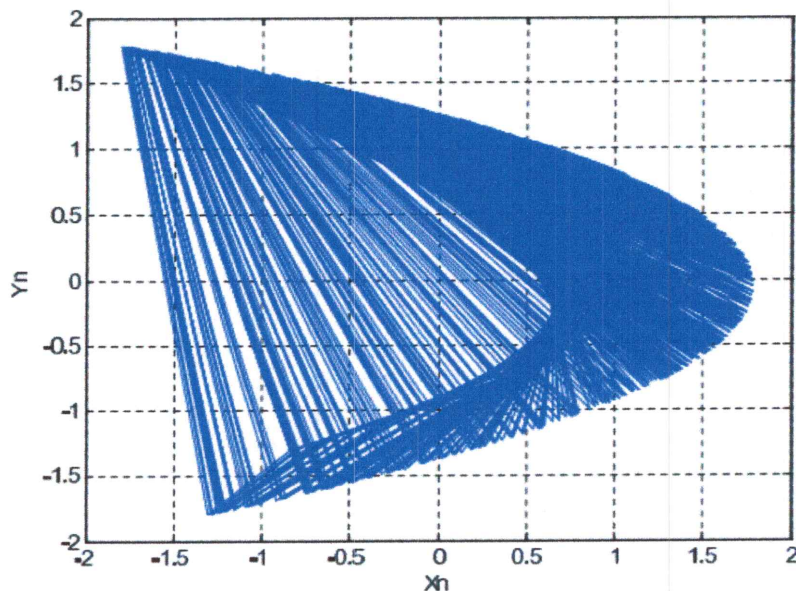


Fig.1.8. Attracteur de Hénon, avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

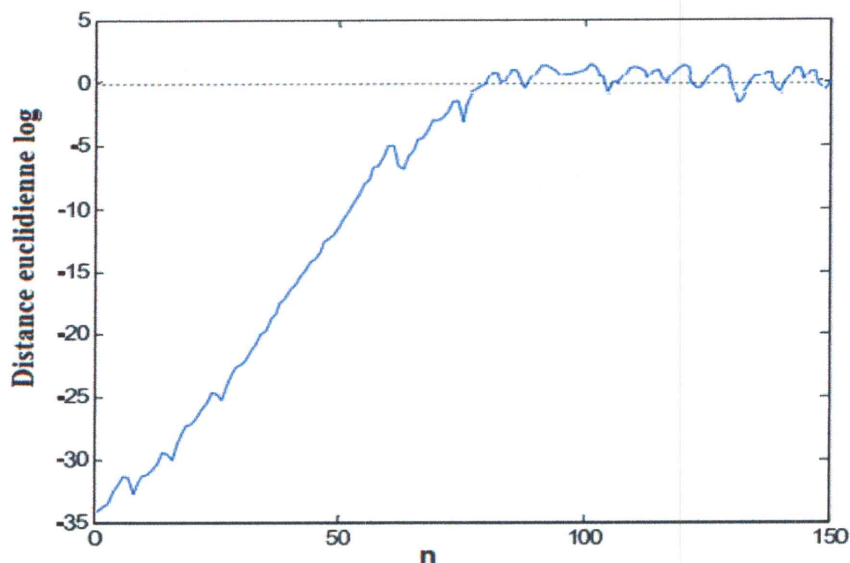


Fig.1.9. Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Hénon.

Ainsi, les systèmes chaotiques semblent évoluer de manière aléatoire. En tout cas, on ne peut prévoir facilement quelle sera leur évolution dans le temps. Notons que les systèmes chaotiques obéissent tout de même aux lois de la physique.

1.4. Diagramme de bifurcation

La génération d'un système chaotique n'est pas immédiate. En effet, le système n'évolue pas d'un état inexistant à un état chaotique sans passer par des transitions. Considérons que la dynamique étudiée dépende d'un paramètre de contrôle. En variant ce

paramètre, le système peut passer d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénario de transition et devenir chaotique.

Dans les équations de Lorenz et les autres attracteurs, la résolution du système n'apporte pas toujours le chaos. Ce régime n'apparaît que pour certaines valeurs des paramètres. Pour caractériser le chaos, il peut être intéressant d'étudier l'apparition du chaos, ce qu'on appelle le scénario vers le chaos).

On distingue trois scénarios théoriques d'évolution vers le chaos. Toutes ces évolutions ont permis de classer certains phénomènes expérimentaux comme chaotiques déterministes. On obtient l'apparition du chaos en modifiant la valeur d'un paramètre, que ce soit de manière théorique ou expérimentale.

1.4.1. Le doublement de période

Le doublement de période a été découvert en même temps par Mitchell Feigenbaum et par les chercheurs français Pierre Coulet et Charles Tresser. L'augmentation d'un paramètre provoque, pour un système périodique, l'apparition d'un doublement de sa période. La période est ensuite multipliée par 4,8, 16. D'un doublement au suivant, l'augmentation du paramètre est de plus en plus faible, et, à partir d'une certaine valeur, le chaos apparaît, lorsque la période devient infinie, les mouvements deviennent chaotiques. L'augmentation du paramètre conduit ensuite à la réapparition de régimes périodiques intercalés dans des zones chaotiques.

Ce scénario peut être observé dans un grand nombre d'expériences, l'étude d'oscillateurs forcés, ou encore l'apparition de la turbulence dans les fluides.

1.4.2. L'intermittence

L'intermittence se caractérise plutôt par un mouvement périodique stable entrecoupé par des bouffées chaotiques. Ces perturbations apparaissent de manière irrégulière. L'augmentation d'un paramètre produit l'augmentation de la fréquence des perturbations, puis le chaos domine le comportement du système.

Ce scénario a été observé dans des expériences dans des réactions chimiques.

1.4.3. La quasi périodicité

Le troisième scénario fait intervenir, pour un système périodique, l'apparition d'une deuxième période dont le rapport avec la première n'est pas rationnel. Ce régime est appelé quasi périodique. Il peut, de lui-même ou avec l'apparition d'une troisième fréquence gigantesque, donner un régime chaotique.

Ce scénario intervient quand on considère deux oscillateurs fortement couplés. Les variations du champ magnétique terrestre, le déroulement des séismes pourrait être expliqué par un modèle de ce genre. On le retrouve aussi dans le cas d'un pendule qui serait stimulé verticalement.

Une manière plus rapide et plus visuelle de représenter ces scénarios de transition vers le chaos est le diagramme de bifurcations. Ainsi, on peut observer les changements du comportement dynamique du système, ou bifurcations, en fonction du paramètre dit de bifurcation. Une bifurcation correspond à une sorte de changement d'état du système, plus exactement un changement de stabilité du régime dynamique lorsqu'un des paramètres du système varie.

Pour le système de Hénon le paramètre α revêt une importance particulière. Pour certaines valeurs de ce paramètre, le système est chaotique, pour d'autres, il ne l'est pas. En étudiant l'influence de α sur le caractère chaotique ou non du système, on met en évidence un phénomène caractéristique des systèmes chaotiques, le doublement de période.

Dans le cas général, le doublement de période se traduit par le doublement du nombre de trajectoires observées dans l'espace des phases. Les doublements de période sont ensuite observés de plus en plus fréquemment à mesure que α augmente. Pour $\alpha = 1.4$, on ne distingue plus les cycles, le système présente un caractère chaotique.

fixant $\sigma = 16, \beta = 4$ avec $\rho = 5$ et une gamme du temps de $0 \leq t \leq 40$. puis examinant l'espace de phase en traçant des valeurs x en fonction des valeurs de t , la solution obtenue est un état d'équilibre (point d'équilibre). Maintenant par augmentation $\rho = 15$, on observe un autre état d'équilibre (un cycle limite).

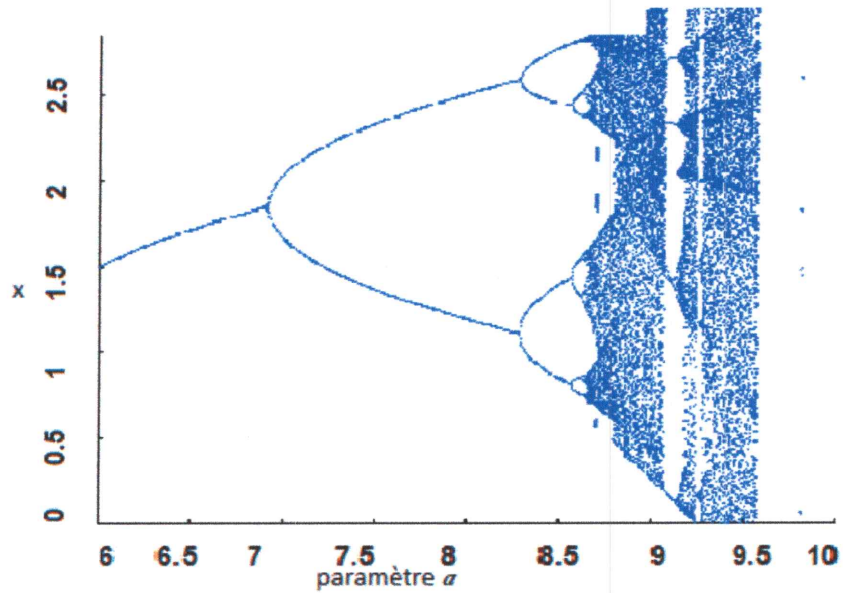
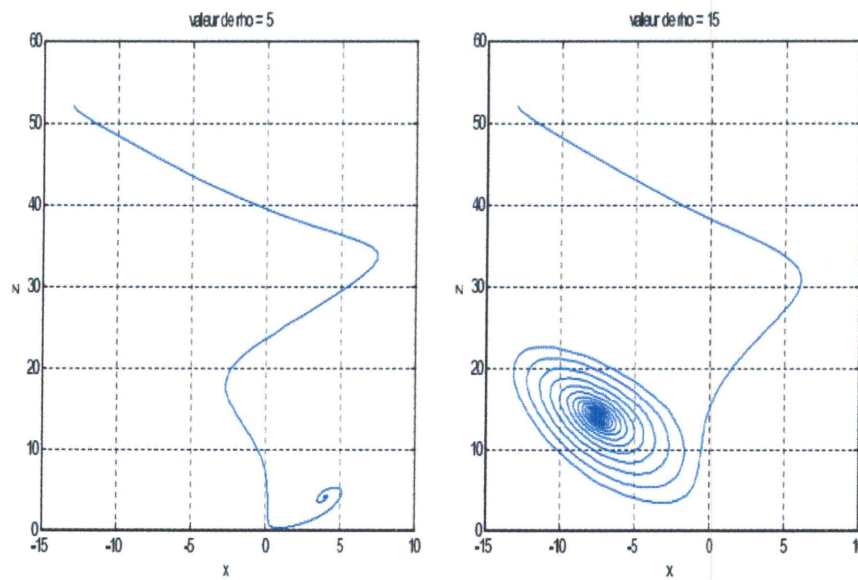


Fig.1.10. Diagramme de bifurcation pour l'attracteur de Hénon.

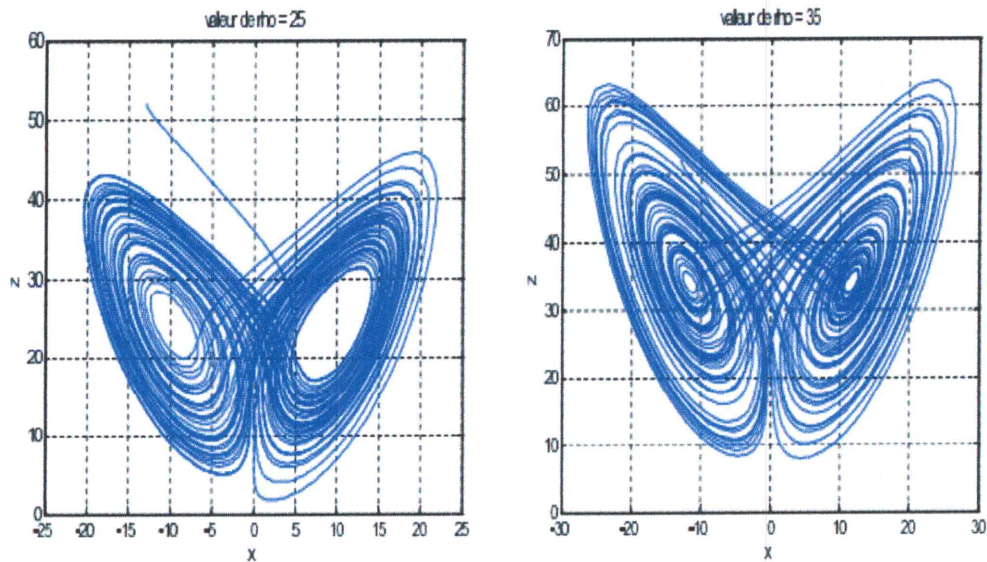


(a)Portrait de phase pour $\rho = 5$

(b) Portrait de phase pour $\rho = 15$

Fig.1.11. Portrait de phase pour le système de Lorenz (état d'équilibre).

En augmentant encore $\rho = 25$, puis $\rho = 35$. Une bifurcation a causé la solution de passer d'un point fixe stable à un attracteur chaotique (soit la condition initiale à l'intérieur de l'attracteur ou non). C'est le système célèbre souvent nommé papillon de Lorenz, l'image iconique de la théorie du chaos.

(a) Portrait de phase pour $\rho = 25$ (b) Portrait de phase pour $\rho = 35$ **Fig. 1.12.** Portrait de phase pour le système de Lorenz (état chaotique).

Dans cette section on a vu que plusieurs définitions mathématiques du chaos sont connues mais toutes expriment la caractéristique fondamentale des systèmes dynamiques concernant la dépendance sensible aux conditions initiales, qui se réfère aux trajectoires commençant à partir de deux conditions initiales distinctes et proches deviennent non corrélées [4].

La simulation numérique et l'estimation de quelques caractéristiques telles que l'exposant de Lyapunov, la carte de Poincaré et le diagramme de bifurcation restent les méthodes principales d'étudier les systèmes chaotiques.

La variation de la valeur de certains paramètres de contrôle d'un système non linéaire et devenir chaotique, comportement que quelque fois nuisible ou il faut éliminer et stabiliser le système, et par fois utile ou il faut le créer et le garder et un nombre de problèmes de contrôle de processus chaotiques est apparus.

1.5. Conclusion

Ce chapitre nous permet de comprendre la notion du système linéaire et non linéaire pour fournir les moyens à appréhender et reconnaître des comportements périodiques, qualitativement et quantitativement. Les systèmes dynamiques chaotiques évoluant à long terme vers les attracteurs étranges ou simple sont aussi étudiés. Le chapitre suivant sera consacré à l'étude de la synchronisation du chaos, étape nécessaire pour diriger l'évolution du système récepteur pour quelle que soit raccrocher avec celle de l'émetteur, ainsi l'information utile du signal devient disponible.

Chapitre 2

Synchronisation Des Systèmes Chaotiques

2.1. Introduction

Le phénomène de synchronisation peut être décrit comme étant un processus d'ajustement des rythmes des événements répétitifs par l'intermédiaire des faibles interactions. Ce phénomène a été observé pour la première fois par Huygens, en 1673, en étudiant un système de deux pendules couplées.

La synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques a trouvé ses applications en théorie et en pratique et plusieurs types de synchronisation ont été distingués tels que la synchronisation commandée qui nécessite une intervention externe pour forcer deux ou plusieurs systèmes dynamiques à se synchroniser. La synchronisation maître-esclave appartient à la catégorie de la synchronisation commandée, pour laquelle on dispose l'un de système dominant (le système maître) qui impose son rythme à un second système (le système esclave). Pendant les deux dernières décennies, la configuration maître-esclave a été appliquée avec succès, dans les systèmes de communication sécurisée basés sur la synchronisation des systèmes chaotiques où un émetteur chaotique (le système maître) génère un signal d'information chiffré transmis dans le canal de communication vers un système récepteur (le système esclave) qui a pour objectif de se synchroniser avec l'émetteur et de restaurer le signal d'information.

L'utilisation du chaos dans les applications de communication sécurisée est motivée par les propriétés des systèmes chaotiques qui sont des systèmes déterministes à comportement complexe et qui sont caractérisés par une forte sensibilité aux conditions initiales et aux variations paramétriques.

Le premier travail de recherche ayant suggéré une réponse à la question de synchronisation des systèmes chaotiques en 1990 par les chercheurs Pecora et Carroll qui ont réussi à synchroniser deux systèmes chaotiques de type maître-esclave en utilisant la méthode de décomposition en sous-systèmes. Depuis ce constat, la théorie des observateurs non linéaires a joué un rôle fondamental dans le développement des méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques. Par conséquent l'information du signal utile peut être reproduite au niveau du récepteur.

2.2 Méthodes de synchronisation

A ce jour, différentes formes de synchronisation ont été explorées. Parmi ces formes on trouve les méthodes de synchronisation complète (SC), les méthodes de synchronisation généralisée (SG). Dans la synchronisation complète, on a une coïncidence complète entre les variables d'états des deux systèmes synchronisés. Les méthodes de synchronisation complète sont typiquement associées avec la synchronisation des systèmes identiques (système de Pecora et Carroll) [7].

D'autres exemples de synchronisation complète utilisent un schéma à rétroaction et sont décrits comme étant bidirectionnels, car les deux systèmes sont à la fois source et destination. Les méthodes de synchronisation généralisée se manifestent par une relation fonctionnelle entre deux systèmes chaotiques couplés. Ces méthodes sont considérées comme une généralisation des méthodes de synchronisation complète pour synchroniser des systèmes chaotiques typiquement différents [8].

On y retrouve également les méthodes de synchronisation élaborées comme solution à un problème de synthèse d'observateur. Ce type de problème est classique dans le domaine de l'automatique [9].

Récemment, des méthodes de synchronisation novatrices, sont aussi proposées dans la littérature, tout au long de ces progrès marqués sur le contrôle non linéaire, des efforts ont été centré sur le problème de retour d'état de sortie et ont résulté en une procédure systématique appelé Backstepping et Backstepping adaptatif applicable aux systèmes non linéaires sous une forme triangulaire appelée boucle de retour stricte. Cette procédure a été introduite et perfectionné dans [10,11] et beaucoup appliquée dans [12,13]. La conception du Backstepping offre beaucoup de flexibilité à chaque étape de calcul de la loi de commande, nombreuses propositions des méthodes de contrôle du chaos basées sur cette technique comme une nouvelle structure de contrôle non linéaire, qui est une approche de conception systématique pour construire à la fois les lois de commandes en associant un choix adéquat des fonctions de Lyapunov permettant de garantir la stabilité asymptotique globale du système.

2.2.1 Synchronisation identique

La synchronisation identique a été proposée par Pecora et Carroll. Elle a l'avantage de représenter une solution de synchronisation simple et performante. Elle permet à l'esclave de reproduire le plus fidèlement possible l'état du maître, après un régime transitoire. L'idée de la synchronisation identique est de diviser le système initial en deux sous-systèmes. Cette opération peut être réalisée d'une manière arbitraire. La figure suivante représente le processus de décomposition en sous-systèmes. y représente la variable d'état qui commande le sous-système esclave s_s^2 . Le sous-système réplique s_s^2 est un candidat susceptible de se synchroniser avec la dynamique complète initiale. Pecora et Carroll ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que cette proposition soit vraie est que le sous-système s_s^2 soit stable; cette hypothèse est équivalente avec la condition qui dit que l'ensemble des coefficients de Lyapunov du sous système s_s^2 soient négatifs. Une synchronisation parfaite peut alors être obtenue puisque les trajectoires sont asymptotiquement convergentes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_2(t) - x(t)\| = 0 \quad (2.1)$$

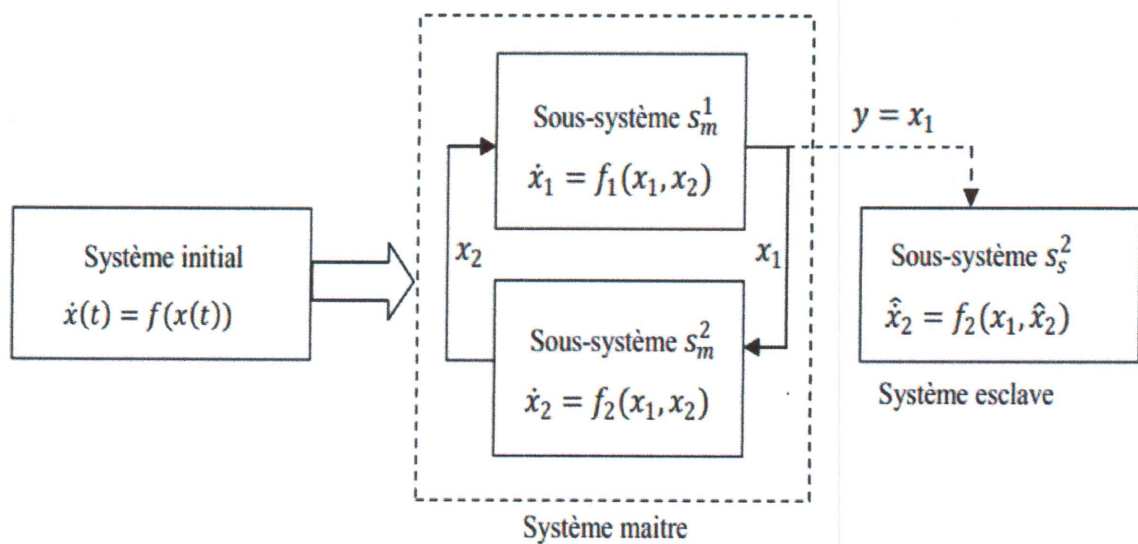


Fig. 2.1 Structure de synchronisation par décomposition en sous-système proposée par Pecora et Carroll.

Pour illustrer ce mécanisme de synchronisation on considère comme exemple le système de Lorenz défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (r - z)x - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2.2)$$

pour : $\alpha = 10, b = 8/3, r = 28$.

Le maître et l'esclave sont initialisés séparément avec des conditions initiales très proches. Pour une durée de 10 secondes on les laisse fonctionner indépendamment, les trajectoires des deux systèmes deviennent alors assez vite divergentes.

A l'instant $t = 10s$, on supprime la dimension x du système esclave et on le remplace par l'état correspondant côté maître ; Cette opération va forcer les états y et z du système esclave à converger asymptotiquement vers les états correspondants du système maître. La figure suivante montre qu'après une période de transition, le système esclave converge asymptotiquement vers l'état du maître, et les deux se retrouvent parfaitement synchronisés.

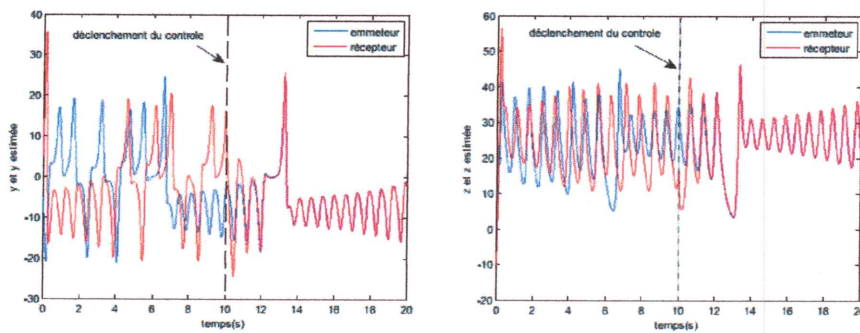


Fig. 2.2 Synchronisation maître esclave P-C du système de Lorenz

2.2.2 Synchronisation par la méthode Backstepping

2.2.2.1 Théorie du Backstepping

La technique du Backstepping a été développée au début des années 90. L'arrivée de la commande par le Backstepping a donné un nouveau souffle à la commande des systèmes non linéaires, qui malgré les grands progrès réalisés, il manquait des approches générales. Cette technique est une méthode systématique et récursive de synthèse de lois de commande non linéaires qui utilise le principe de stabilité de Lyapunov et qui peut s'appliquer à un grand nombre de systèmes non linéaires.

L'idée de base de la commande par le Backstepping est de rendre les systèmes bouclés équivalents à des sous-systèmes d'ordre un en cascade stable au sens de Lyapunov, ce qui leur confère des qualités de robustesse et une stabilité globale asymptotique. En d'autres termes, c'est une méthode multi-étapes. A chaque étape du processus, une commande virtuelle est ainsi générée pour assurer la convergence du système vers son état d'équilibre. Cela peut être atteint à partir des fonctions de Lyapunov qui assurent pas à pas la stabilisation de chaque étape de synthèse. Le Backstepping est :

- applicable au système de type triangulaire inférieur ou appelée aussi boucle de retour stricte c.à.d la dérivée de chaque composante du vecteur d'état doit être une fonction des composantes précédentes et dépende additivement de la composante suivante.
- Commençons avec la première équation différentielle du système \dot{x}_1 qui est plus loin de l'entrée de commande u , et n'achève la loi de commande de type d'expression analytique qu'en dernière étape.
- Elle construit une sortie passive et une fonction de stockage qui est utilisée comme une fonction Lyapunov.

La méthode de linéarisation par bouclage de retour élimine toutes les non linéarités du système, la technique du Backstepping donne plus de flexibilité au concepteur en exploitant les " bonnes " non linéarités, tandis que les " mauvaises " non linéarités ou les non linéarités déstabilisantes sont dominées en ajoutant des amortissements non linéaires. Ainsi, une robustesse additionnelle est obtenue [14].

2.2.2.2 Commande de stabilisation par la méthode du Backstepping

Cette technique met à profiter des relations causales successives pour construire de manière itérative et systématique une loi de commande et une fonction de Lyapunov stabilisante de conserver dans le bouclage les non linéarités stabilisantes . Pour qu'elle puisse s'appliquer, le système non linéaire doit être sous la forme paramétrique de boucle de retour stricte.

Considérons le système sous la forme paramétrique du type boucle de retour stricte suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = g_i(x_i, t)x_{i+1} + f_i(x_i, t) \\ (i = 1, \dots, n-1) \\ \dot{x}_n = g_n(x_n, t)u + f_n(x_n, t) \\ y = x_1 \\ x_{i0} = x_0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

où $x_i = [x_1, x_2, \dots, x_i] \in \mathbb{R}^i$, ($i = 1, \dots, n-1$), $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$: $g_i(\cdot) \neq 0$, $f_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n-1$ sont des fonctions non linéaires continues et dérivables. et sont respectivement des vecteurs d'états d'entrées et de sortie.

2.2.2.3 Commande en poursuite de trajectoire référence par la méthode du Backstepping

Dans ce paragraphe, nous traitons le problème de poursuite de trajectoires. La définition formelle du concept de poursuite peut être établi en conformité avec la définition donnée par :

Définition 3.1 : Quand l'objectif est de forcer la sortie du système $y(t) \in \mathbb{R}^m$ pour le suivi d'une sortie désirée $y_r(t) \in \mathbb{R}^m$, il sera défini comme un problème de suivi.

Le problème de commander la sortie d'un système à suivre une référence donnée, peut être traité avec différentes applications. Une des approches est celle du problème de la stabilisation en un point, ou le problème de stationnement, qui consiste à faire diriger un système à un point de configuration fixe, peu importe le comportement du système entre l'état initial et l'état final.

Dans ce cas, le signal de référence y_r est stationnaire. Ce problème est connu sous le nom de problème de régulation [15].

Dans le problème de poursuite du système non linéaire (2.3), l'objectif de commande n'est pas seulement de stabiliser globalement le procédé (2.3), mais aussi de forcer la sortie $y(t) = x_1$ à suivre un signal référence y_r sous les conditions suivantes:

- $g_n(\cdot) \neq 0$.
- le signal de référence y_r et ses n dérivées sont connues et bornées et $y_r(t)$ est continue au moins par morceaux.

2.3 Notion des lois de commande basées sur le Backstepping pour quelques systèmes chaotiques

Dans l'étude du comportement des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques et leurs commandes, plusieurs systèmes de dimension inférieure sont fréquemment utilisés pour la modélisation des procédés naturels et industriels ainsi que des exemples de base pour la vérification et la validation d'une théorie proposée, méthode, ou algorithme. Ces exemples incluent des systèmes non autonomes du second ordre comme l'oscillateur de Duffing, l'oscillateur de Van der Pol (pendule de Moon), des systèmes autonomes du troisième ordre comme le système de Lorenz, le système de Rössler ainsi que le circuit de Chua, qui sont des exemples d'attracteur étrange se caractérisant par :

- Les attracteurs étranges sont uniques des autres attracteurs d'espace de phase dans le cas où on ne sait pas exactement où le système sera sur l'attracteur.
- Deux points sur l'attracteur qui sont près à un moment donné l'un de l'autre seront arbitrairement séparés lointainement à temps plus tardifs. La seule restriction est que l'état de système reste sur l'attracteur.
- Les attracteurs étranges sont aussi uniques dans le cas où ils ne se rapprochent jamais entre eux mêmes, le mouvement du système ne se répète jamais c. à. d non périodique.

Le mouvement décrit sur ces attracteurs étranges est ce que nous signifions par un comportement chaotique.

Notons que tous ces systèmes chaotiques mentionnés au-dessus peuvent être réécrits sous la forme de boucle de retour stricte. Pour examiner l'efficacité de la conception de la procédure proposée, des simulations en Matlab sur ordinateur ont été étendues pour tous ces systèmes.

2.3.1 Oscillateur du second ordre Duffing

L'oscillateur de Duffing fait partie des systèmes modèles qui permettent d'étudier une dynamique non linéaire. Il correspond à une équation différentielle non linéaire de la forme :

$$\ddot{x} + \sigma \dot{x} + (\beta x^3 \pm \omega_0 x) = \Delta \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.4)$$

Cette équation diffère formellement de l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique en régime forcé par la présence d'un terme non linéaire en βx^3 . Elle fut établie au début du siècle dernier par l'ingénieur George Duffing, dans le but de modéliser les vibrations forcées d'une machine industrielle. Un grand nombre de tels systèmes correspondent à une telle modélisation.

Type d'oscillateur de Duffing

Dépendant des paramètres choisis, l'équation peut se mettre sur plusieurs formes: Pour l'oscillateur non forcé de Duffing $\sigma = \lambda = 0$ et en prenant un signe « + », l'équation devient :

$$\ddot{x} + \beta x^3 + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.5)$$

Le système décrit par cette équation différentielle manifeste un comportement chaotique pour les valeurs :

1. $\beta > 0$, le système représente ce qu'on appelle une source dure.
2. $\beta < 0$, le système représente une source douce, le portrait de phase comporte des courbes fermées.
3. Si on prend pour $\beta = \omega_0 = 1$ et un déphasage initial $\varphi = 0$ et un signe « - » l'équation devient :

$$\ddot{x} + \sigma \dot{x} + (x^3 - x) = \lambda \cos(\omega t) \quad (2.6)$$

cette équation peut se mettre sous la forme d'un système d'équations différentielles du second ordre on pose $x = x_1$ $\dot{x} = x_2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sigma x_2 + x_1 - x_1^3 + \lambda \cos(\omega t) \end{cases} \quad (2.7)$$


Pour le cas d'un système non forcé :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sigma x_2 + x_1 - x_1^3 \end{cases} \quad (2.8)$$

2.3.2 Système de Lorenz

Le modèle de climat d'Edward Lorenz fut le premier modèle manifestant un comportement chaotique, c'est un exemple célèbre de système différentiel au comportement chaotique pour certaines valeurs de paramètres. Lorenz a publié ses travaux en 1963. A l'époque, il n'avait pu calculer que 500 iterations. La trajectoire n'avait alors décrit que quelques boucles. Pourtant, il avait déjà prévu la structure de boucles imbriquées de l'attracteur.

Lorenz a simplifié quelques équations de la dynamique des fluides appelé aussi les équations de Navier Stokes et fini avec un ensemble de trois équations différentielles non linéaires :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sigma(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_1x_3 - \sigma x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_1x_2 - \beta x_3 + u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.9)$$


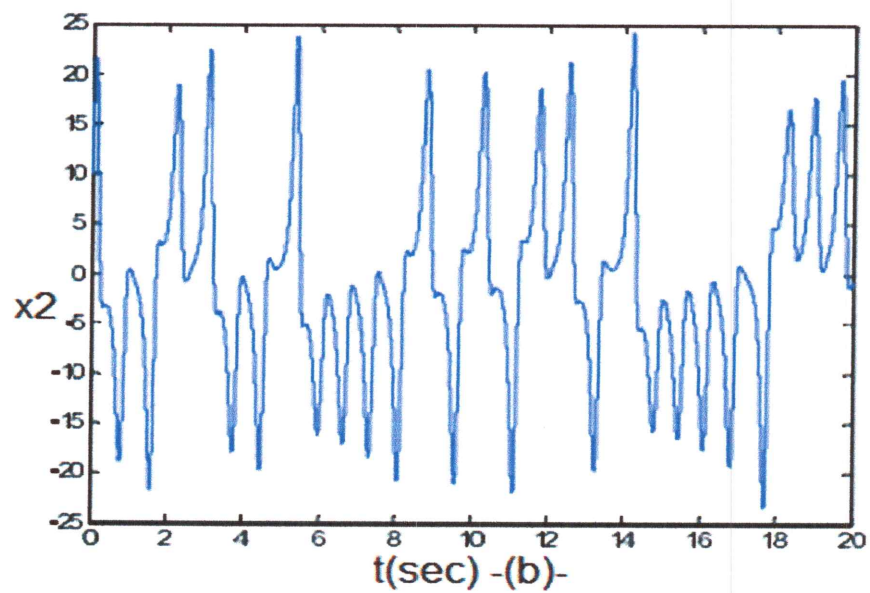
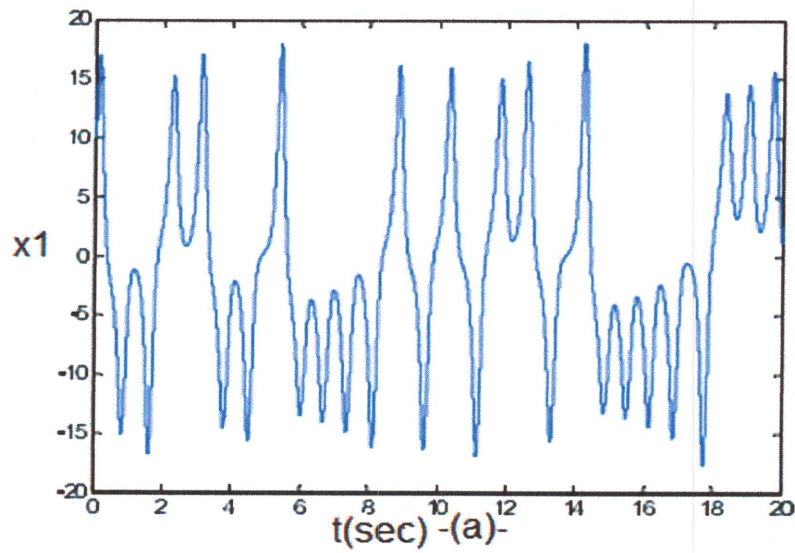
la variable x_1 est proportionnel à l'intensité de mouvement convective, x_2 est proportionnel à la différence de la température entre les courants ascendants et descendants et la variable x_3 est proportionnel à la distorsion de la linéarité du profil de la température verticale.

On rappelle que dans ces équations, σ est le nombre de Prandtl qui représente le quotient entre la viscosité du fluide à sa conductivité thermique, ρ représente la différence de température entre le sommet et le fond du système, β est le quotient de la largeur.

Les valeurs que Lorenz a utilisées sont $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 3$.

L'espace des phases est tridimensionnel (x ; y ; z). L'espace de contrôle est tridimensionnel (σ, ρ, β). A première vue, ces trois équations paraissent simples à résoudre. Cependant, elles représentent un système dynamique extrêmement compliqué. Si on trace les trajectoires dans l'espace d'état à trois dimensions une figure appelée attracteur de Lorenz est obtenue. L'attracteur de Lorenz est un exemple d'attracteur étrange.

Les figures de la variations des différents états dans le temps, ainsi que dans l'espace à trois dimensions du phénomène chaotique sont comme suit sous des conditions initiales et $(x_{10} = x_{20} = x_{30}) = (1,1,1)$.



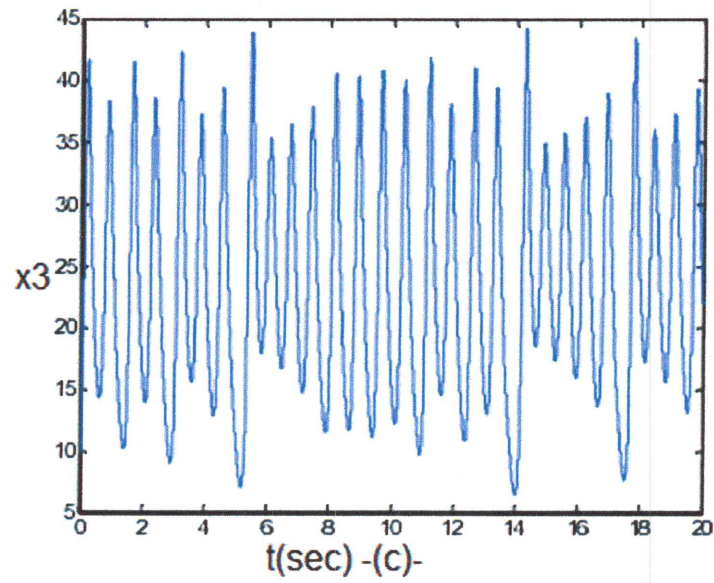


Fig. 2.2. Variation des trois états en fonction du temps pour le système de Lorenz.
(a) Variation de l'état X_1 , (b) Variation de l'état X_2 , (c) variation de l'état X_3 .

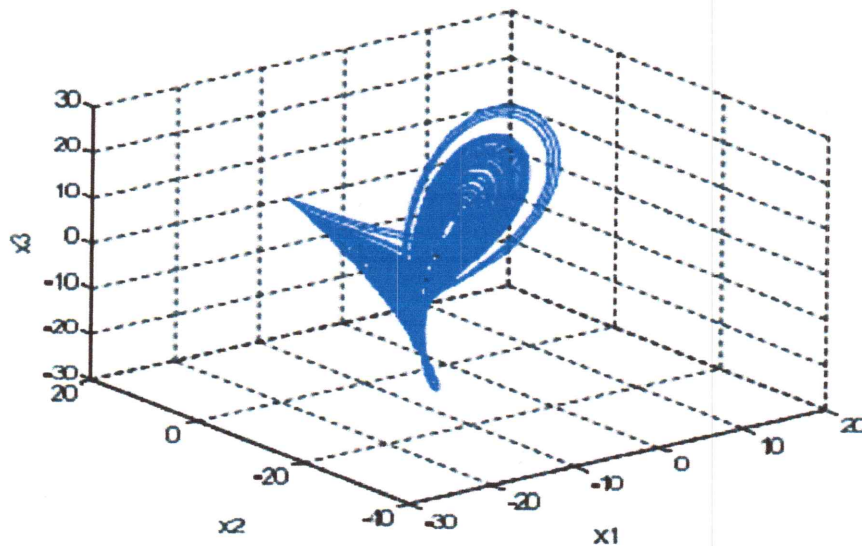


Fig. 2.3. Comportement chaotiques dans l'espace d'état pour le système de Lorenz.

2.4. Conclusion

Dans ce chapitre, on a établi des lois de commandes virtuelles, des lois de commande finales et des fonction de Lyapunov quadratiques définies négatives pour la dynamique d'erreur vers un point d'équilibre stable pour les systèmes chaotiques autonomes du troisième ordre tels que les circuits de Chua et de Rössler et le système de Lorenz, et vers un cycle limite stable pour les systèmes chaotiques non autonomes du second ordre tels que les oscillateurs de Duffing et de Vander pool, la poursuite de trajectoire ou un signal sinusoïdale est choisi est aussi appliquée sur ces systèmes. Une stabilisation globalement exponentielle est obtenue selon et le théorème de LaSalle et Yoshizawa.

Chapitre 3

Application de la synchronisation à la transmission de message

3.1 Introduction

Le premier travail de recherche a suggéré une réponse à la question de synchronisation des systèmes chaotiques qui était réalisé en 1990 par les chercheurs Pecora et Carroll qui ont réussi à synchroniser deux systèmes chaotiques maîtres et esclaves en utilisant la méthode de décomposition en sous-systèmes.

Une année plus tard, de nombreuses revues scientifiques ont fait consacrer des numéros spéciaux sur ce sujet de synchronisation.

Bien que la synchronisation des systèmes chaotiques soit un sujet intéressant, l'une des principales motivations de la recherche dans ce domaine est la possibilité d'utiliser des signaux chaotiques pour la communication sécurisée, [16,17] L'utilisation du chaos peut également améliorer les performances des systèmes de communication, dans la plupart des méthodes de synchronisation, on observe deux parties: un générateur de signaux chaotiques, qui est appelé le système émetteur, et un récepteur.

Le signal généré par le système d'entraînement peut être utilisé comme une entrée de commande conduit à la synchronisation du système récepteur avec l'émetteur [18].

Les systèmes chaotiques peuvent être utilisés dans la transmission des messages dans diverses manières. Une technique couramment utilisées appelé masquage chaotique consiste à ajouter le message au signal chaotique utilisé pour la synchronisation, le signal résultant est envoyé au récepteur. Dans certaines conditions, le message peut être récupéré au niveau du récepteur. Une autre possibilité consiste à utiliser le message comme une entrée appropriée dans le système émetteur ensuite, on envoie le signal de synchronisation au récepteur. Cette méthode est appelé modulation chaotique, et comme dans le masquage chaotique, le message peut aussi être récupéré dans le récepteur sous certaines conditions [16,17].

Dans ce chapitre, nous allons examiner les systèmes chaotiques à temps continu, la synchronisation de ces systèmes est réalisée selon différentes méthodes disponibles. La première est basée sur la modulation chaotique et masquage, La seconde est uniquement basé sur la modulation chaotique [19, 20, 21].

3.2 Synchronisation à base d'un observateur non linéaire

Un système chaotique (Emetteur) donné par :

$$\dot{u} = f(u), \quad o = c(u) \quad (3.1)$$

où $u \in R^n$, $f: R^n \rightarrow R^n$ et $c: R^n \rightarrow R^m$ sont des fonctions différentiables, et o est le signal de synchronisation devant être envoyé au système récepteur. Pour la simplification, on choisie $= 1$, c. à. d, un signal de synchronisation scalaire.

Pour le système (3.1) on utilise un autre observateur sous forme :

$$\dot{v} = g(v, o), \quad u_r = k(v, o) \quad (3.2)$$

où $v \in R^l$, $g: R^l \times R^m \rightarrow R^l$ et $k: R^l \times R^m \rightarrow R^n$ sont des fonctions différentiables, on définit le signal erreur comme $e = u - u_r$. Le système (3.2) est dit observateur local de (1) si $e(t) \rightarrow 0$ et $t \rightarrow \infty$ pour tout cas petit de $e(0)$, lorsque $\|e(0)\| < \gamma$ pour tel cas $\gamma > 0$.

Si : $\gamma = \infty$, l'observateur est global [21].

dans ce document, nous assumerons la forme du système maître suivante :

$$\dot{u} = Au + f(u) + h(t), \quad o = Cu \quad (3.3)$$

où $A \in R^{n \times n}$ et $C \in R^{1 \times n}$ sont des matrices constantes. $f: R^n \rightarrow R^n$ est la fonction lisse, et $h: R \rightarrow R^n$ est le terme de forçage. Pour le système de réponse, on utilise l'observateur suivant :

$$\dot{u} = A\hat{u} + f(\hat{u}) + h(t) + K(o - \hat{o}), \quad \hat{o} = C\hat{u}, \quad (3.4)$$

où $K \in R^n$ est un vecteur de gain qui doit être déterminé, en définissant l'erreur $e = u - \hat{u}$, et en utilisant (3.3) et (3.4), on résulte la dynamique d'erreur suivante :

$$\dot{e} = (A - KC)e + f(u) - f(\hat{u}). \quad (3.5)$$

Il est évident que, si $\|e(t)\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, donc la synchronisation est obtenue. De plus, si ce qui suit valable pour certain $M > 0$, $\delta > 0$:

$$\|e(t)\| \leq M e^{-\delta t} \|e(0)\| \quad (3.6)$$

Alors la synchronisation est exponentielle. Si la paire (C, A) est observable, alors nous pouvons toujours trouver de vecteur de gain K tels que la matrice $(A - KC)$ est stable. (toutes les valeurs propres ont des parties réelles négatives) [19,20]. D'autre part, l'observabilité est une condition suffisante pour la synchronisation exponentielle dans des nombreux cas, ces cas incluent ce qui suit [21,22] :

- (i) Supposons que f est Lipschitz. C'est-à-dire ce qui suit est satisfait pour certains valeurs de $\gamma > 0$:

$$\|f(u) - f(\hat{u})\| \leq \gamma \|u - \hat{u}\|. \quad (3.7)$$

Si γ est suffisamment petite, alors on peut toujours choisir un vecteur de gain K tel que L'équation (3.6) .

- (ii) Lorsque le système donné par (3.3) est en forme canonique et (3.7), Alors pour tout $\gamma > 0$ on peut toujours choisir un vecteur de gain K de tels sorte que (3.6) soit vérifiée, notons que des nombreux systèmes sont déjà sous cette forme, ou peuvent être transformée sous cette forme.
- (iii) Supposons que la non linéarité dans le f du (3.3) ne dépend que du signal mesuré o , tel que l'équation suivante soit vérifiée:

$$f(u) = g(o) \quad (3.8)$$

Dans ce cas, l'observateur (3.4) pourrait être choisi comme :

$$\dot{\hat{u}} = A\hat{u} + g(o) + h(t) + K(o - \hat{o}), \quad \hat{o} = C\hat{u} \quad (3.9)$$

L'erreur devient maintenant :

$$\dot{e} = (A - KC)e. \quad (3.10)$$

Par conséquent, on peut choisir un vecteur de gain K tel que (3.6) soit vérifié, nous notons que certains systèmes chaotiques, par exemple le système de Lure est déjà sous cette forme et certains systèmes chaotiques, par exemple l'oscillateur de Duffing, et la plupart des oscillateurs chaotiques électroniques tels que le circuit de Chua, peut être transformé en cette forme [19,20].

3.3 Modulation chaotique et masquage

On suppose que le système d'entraînement chaotique soit donnée par (3.3), en utilisant l'un des observateurs donnée par (3.4) ou (3.9), ainsi qu'avec un choix approprié du vecteur de gain K , la synchronisation exponentielle est obtenue, à savoir (3.6).

Soit $m(t)$ le message à envoyer. On va utiliser le signal de synchronisation $o(t)$ donnée par (3.3) pour masquer le message, donc on suppose que les deux signaux ont la même dimension. Si nous utilisons (3.4) comme observateur le système émetteur devient comme suite :

$$\dot{u} = Au + f(u) + h(t) + Km, \quad o = Cu + m. \quad (3.11)$$

Notez que, dans ce cas le signal o transmis au récepteur est le message masqué. De toute évidence, le message m doit être suffisamment petit pour que le système (3.11) génère toujours des signaux chaotiques. Cela pourrait réduire l'amplitude de m considérablement si le gain K de la synchronisation est trop élevé. Dans ce cas la dynamique d'erreur donnée par (3.5) est toujours valide d'où (3.6) soit toujours vérifiée.

Donc si nous définissons le message récupéré comme :

$$m_r(t) = o(t) - \hat{o}(t) = Ce(t) + m(t) \quad (3.12)$$

Il résulte de (3.6) que $m_r(t) \rightarrow m(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

En outre, dans la plupart des cas le taux de décroissance δ pourrait être modifié en utilisant le gain K .

C'est pourquoi, nous pouvons récupérer rapidement le message. Et dans notre cas le message est seulement injecté dans le système chaotique maître comme un terme linéaire.

Si la non-linéarité f a la forme donnée par (3.8) et l'observateur est donnée par la forme (3.9), donc nous modifions le système maître donnée par (3.3) comme suit :

$$\dot{u} = Au + g(o) + h(t) + Km, \quad o = Cu + m. \quad (3.13)$$

Encore pour le récepteur, nous utilisons l'observateur donné par (3.9). Par conséquent, (3.10) et (3.6) sont valides et le message peut être récupéré à l'aide de (3.12). Dans ce cas, le taux de décroissance peut être ajustée de manière arbitraire par un choix approprié du gain K [23].

3.4 Robustesse de la méthode

Pour analyser la robustesse de la méthode proposée par rapport au bruit, on réécrit le système émetteur et récepteur comme suite :

$$\dot{u} = A(\mu)u + f(u, \mu) + h(t) + Km, \quad o = Cu + m. \quad (3.14)$$

$$\hat{\dot{u}} = A(\hat{\mu}) + f(\hat{u}, \hat{\mu}) + \hat{h}(t) + \hat{K}(o + n - \hat{o}), \quad \hat{o} = C\hat{u} \quad (3.15)$$

où le chapeau représente les variables et les paramètres qui sont utilisées dans le système de réponse, $\mu, \hat{\mu} \in R^p$ sont les vecteurs de paramètre utilisés dans le système émetteur et récepteur respectivement, et n est le bruit.

Dans le cas idéal, nous avons $\mu = \hat{\mu}, h(t) = \hat{h}(t), K = \hat{K}, n = 0$. et nous supposons que la synchronisation exponentielle est vérifiée.

Pour la robustesse, nous supposons que les $A(\cdot)$ et les $f(u)$ satisfont aux propriétés de Lipschitz suivantes :

$$\|A(\mu_1) - A(\mu_2)\| \leq K_a \|\mu_1 - \mu_2\|, \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in R^p. \quad (3.16)$$

$$\|f(u, \mu_1) - f(u, \mu_2)\| \leq K_\mu \|\mu_1 - \mu_2\|, \quad \forall u \in R^n, \forall \mu_1, \mu_2 \in R^p. \quad (3.17)$$

où K_a et K_μ sont des constantes positives appropriées.

Notons que les propriétés de Lipschitz sont satisfaites, si $A(\cdot)$ et $f(u, \cdot)$ sont différentiables respectivement à μ . Laissez $u \subset R^n$ contient l'attracteur chaotique (3.14) et laissez $M \subset R^p$ être une région qui contient les valeurs de paramètre pour laquelle (3.14) présente un comportement chaotique. L'analyse suivante va rester valide si (3.16) et (3.17) sont localement satisfais pour $u \subset u$ et $\mu_1, \mu_2 \in M$.

On va définir l'erreur comme $e = u - \hat{u}$, par l'addition et la soustraction de même terme.

On obtient l'équation d'erreur suivante :

$$\dot{e} = [(A(\mu) - KC)e + f(u, \mu) - f(\hat{u}, \mu)] + [A(\mu) - A(\hat{\mu})]\hat{u} + [f(\hat{u}, \mu) - f(\hat{u}, \hat{\mu})] + [K - \hat{K}]Ce + [h(t) - \hat{h}(t)] + [K - \hat{K}]m - \hat{K}n. \quad (3.18)$$

Notez que le premier terme entre parenthèse de l'équation (3.18) est le même que la partie droite de l'équation (3.5). les termes restants sont des contributions des paramètres mal décalée et le bruit à l'équation de l'erreur. On considère $u(t)$ et $\hat{u}(t)$ la solution de (3.14) et (3.15) respectivement et on définit $F(e, t) = (A(\mu) - KC)e + f(u, \mu) - f(\hat{u}, \mu)$. Alors dans le cas idéal (3.18) se réduit à $\dot{e} = F(e, t)$. La dynamique est exponentiellement stable par prise en charge d'un résultat bien connu dans la théorie de stabilité de Lyapunov.

Il existe une fonction de Lyapunov $V: R \times R^n \rightarrow R$, qui satisfait ce qui suit :

$$c_1 \|e\|^2 \leq V(t, e) \leq c_2 \|e\|^2, \quad (3.19)$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial e} F \leq -c_3 \|e\|^2, \quad (3.20)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial e} \right\| \leq c_4 \|e\|. \quad (3.21)$$

Notons que, pour certaines constantes positives c_1, c_2, c_3, c_4 l'existence d'une telle fonction de Lyapunov est à la fois nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle de la dynamique d'erreur. Par ailleurs, la constante dans (3.6) peut être donnée comme :

$$M = \sqrt{c_2/c_1}, \delta = c_3/2c_2. \quad (3.22)$$

On utilise la fonction de Lyapunov V précédente et l'équation (3.18) [24], on résulte :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial e} F + \frac{\partial V}{\partial e} [A(\mu) - A(\hat{\mu})]\hat{u} + \frac{\partial V}{\partial e} [f(\hat{u}, \mu) - f(\hat{u}, \hat{\mu})] + \frac{\partial V}{\partial e} [K - \hat{K}]Ce + \frac{\partial V}{\partial e} [h(t) - \hat{h}(t)] + \frac{\partial V}{\partial e} [K - \hat{K}]m - \frac{\partial V}{\partial e} \hat{K}n. \quad (3.23)$$

Le bruit n et le message m satisfaisant à $|m(t)| \leq \bar{m}$ pour $n_m > 0$ et $\bar{m} > 0$ respectivement. Par ailleurs, laissez $\|h(t) - \hat{h}(t)\| \leq \Delta h_m$ et $\|\hat{u}\| \leq \hat{u}_m$ être satisfaite pour $\Delta h_m > 0$ et $\hat{u}_m > 0$ respectivement. On définit $\Delta\mu = \|\mu - \hat{\mu}\|$ et $\Delta K = \|K - \hat{K}\|$. On a (3.16), (3.17) et (3.19)-(3.21), donc :

$$\dot{V} \leq -c_3 \|e\| \left\{ \begin{aligned} & \left(1 - \frac{c_4}{c_3} \Delta K \|C\| \right) \|e\| - \frac{c_4}{c_3} (K_u \hat{u}_m + K_\mu) \Delta\mu - \\ & \frac{c_4}{c_3} (\Delta h_m + \|\hat{K}\| n_m + \bar{m} \Delta K) \end{aligned} \right\}. \quad (3.24)$$

où: $D = 1 - \frac{c_4}{c_3} \Delta K \|C\|$, $K_1 = c_4/c_3 (K_u \hat{u}_m + K_\mu)$, $K_2 = c_4/c_3$, $K_3 = c_4/c_3 \|\hat{K}\|$,

$$K_4 = (c_4/c_3) \bar{m}.$$

supposons que ΔK est suffisamment petit pour que $D > 0$. Il résulte de (3.24) que si $\|e\| > (K_1 \Delta\mu + K_2 \Delta h_m + K_3 n_m + K_4 \Delta K)/D$, et $\dot{V} < 0$ donc V diminue, Ce qui implique que $\|e\|$ aussi diminue, voire (3.19). Donc l'erreur satisfait la limite suivante à cause des arguments standards d'invariance :

$$\|e\| \leq c_1 \Delta\mu + c_2 \Delta h_m + c_3 n_m + c_4 \Delta K \quad (3.25)$$

où $c_i \geq K_i/D$, $i = 1, 2, 3, 4$. si on définit l'erreur e_m comme $e_m = m_r - m$, donc à partir de (3.12), on obtient $e_m = Ce$.

Avec la combinaison de ce résultat avec (3.25), nous voyons que la limite de e_m est asymptotiquement semblable et aussi valable, voir remarque 2.

Remarque 1 :

- On peut conclure à partir du (3.25) que l'erreur dépend linéairement de $\Delta\mu$, h_m et n_m . Par conséquent, Si ces termes sont de petite taille l'erreur qui en résulte sera faible. La dépendance de l'erreur en ΔK mérite une attention particulière.
- On remarque que nous avons $D = 1 - \frac{c_4}{c_3} \Delta K \|C\|$ et $c_i \geq K_i/D$, $i = 1, 2, 3, 4$. c'est pourquoi, si ΔK augmente, D va diminuer. Par conséquent c_i sera augmenté, ce qui augmente également l'erreur. Si $D < 0$ l'estimation donnée par (3.24) est non valide, D'où ΔK ne peut pas être grande.
- Cet argument montre que ΔK devrait être petite que possible pour notre méthode.

Remarque 2 :

• On considère le message récupéré $m_r(t)$ donné par (3.12), et l'erreur $e_m = m_r - m$. De (3.12) nous avons $e_m = Ce$, où e représente l'erreur de synchronisation. On a (3.6) pour :

$$\|e_m(t)\| \leq M\|C\|e^{-\delta t}\|e(0)\| \quad (3.26)$$

• De toute évidence, lorsque $t \rightarrow \infty$, nous avons $e_m(t) \rightarrow 0$, donc $m_r(t) \rightarrow m$.
A partir de (3.26) et sous certaines conditions le résultat de $\|e_m(t)\| \leq \varepsilon_p$ pour $t \geq T_p$,

$$\text{où :} \quad T_p = \frac{1}{\delta} \ln \frac{\varepsilon_p}{M_r} \|C\| \quad (3.27)$$

Toutefois, les points suivants peuvent être considérés comme des inconvénients éventuels de ce régime.

- Dans certains cas le gain K qui garantit la synchronisation exponentielle pourrait être grand. D'un autre côté le terme K_m utilisé dans (3.11) ne devrait pas être trop grand pour garantir des solutions chaotiques.
- Le gain K peut avoir des entrées non nulles, c'est pourquoi le message doit être injectées dans (3.3) en plus d'un point.
- L'injection du message dans la non-linéarité ne serait pas possible pour certains systèmes.
- Le gain K est un paramètre utilisé dans le récepteur, et dans ce régime ce paramètre doit être connu pour le système maître. Dans certains cas, il est souhaitable de changer les gains dans le récepteur, par exemple pour améliorer les performances, et un tel changement doit affecter sur le système maître [25].

3.5 Modulation chaotique

On suppose que la non-linéarité de(3.3) est de la forme donnée par (3.8). Et soit m le message à transmettre. Nous modifions le système chaotique (3.3) comme suite :

$$\dot{u} = Au + g(o) + h(t) + bm, \quad o = Cu . \quad (3.28)$$

où $b \in R^n$ est un vecteur constant. Nous pouvons choisir les entrées de b de telle sorte que : 0 ou 1, avec les entrées non nulles indiquant les plus possible pour (3.3) dans lesquelles le message peut être injectée.

Pour le récepteur, nous utilisons (3.9) de l'observateur. L'équation d'erreur (3.10) maintenant devient :

$$\dot{e} = (A - KC)e + bm. \quad (3.29)$$

Etant donné que le signal o est disponible au niveau du récepteur, on peut mesurer $e_m = o - \hat{o} = Ce$. A l'aide de l'utilisation de la transformé de Laplace en (3.29). Du (3.29), on obtient :

$$E_m(s) = G(s)M(s), \quad G(s) = C(sI - A + KC)^{-1}b \quad (3.30)$$

d'où $e_m(t)$ est une version filtrée du message m . Par conséquent, dans certains cas nous pouvons récupérer les messages à partir de e_m . Ces cas sont les suivantes :

Cas 1 : le message m est une bande limite du signal. Si $G(s)$ donnée par (3.30) est un filtre passe-bas dont w_c est la fréquence de coupure tel que $w_c \gg \Omega$, donc on peut récupérer le message. Dans la plupart des cas, on choisit le gain K de façon appropriée, donc on peut concevoir un tel $G(s)$.

En outre, quand e_m est disponible nous pouvons utiliser un autre filtre $G_1(s)$ pour obtenir un autre signal e_f le suivant :

$$E_f(s) = G_1(s)E_m(s) = G_1(s)G(s)M(s) \quad (3.31)$$

Cas 2 : le message m est un signal discret, donc $m(t) \in \{0,1\}$. Dans ce cas, il est possible de récupérer le message sans erreur. Donc on envoie $G(s) = N(s)/D(s)$ où $N(s)$ et $D(s)$ sont des polynômes de degré $n - 1$ est n respectivement données par :

$$\begin{aligned} N(s) &= a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \\ D(s) &= s^n + b_{n-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

où a_i et b_i sont diverses constantes, $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Nous constatons que nous pouvons choisir K de une façon appropriée pour que $D(s)$ devienne un polynôme stable. Par conséquent, le message récupéré m_r est donnée par la relation suivante :

$$m_r(t) = \frac{b_0}{a_0} e_m(t) \quad , a_0 \neq 0 \quad (3.33)$$

On outre, puisque m est discret, on peut donc reconstruire le signal de façon à le comparer avec un seuil quel est donnée par :

$$m_c(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } m_r(t) > 0.5 \\ 0 & \text{si } m_r(t) < 0.5 \end{cases} \quad (3.34)$$

Cas 3 : dans (3.28), au lieu d'utiliser le message directement, on utilise un signal relié au message. Soit $r(t)$ est le message à envoyer, et on choisit le signal m utilisé dans (3.28) comme :

$$R(s) = \frac{G_p(s)}{kG(s)} E_m(s). \quad (3.35)$$

Notez que $e_m(t)$ est disponible, donc pour récupérer $r(t)$, il faut que la fonction de transfert (3.35) doit être réalisable.

On suppose que le système chaotique maître est donnée par (3.3), et l'observateur donnée par (3.4) et on suppose que avec un choix approprié du gain K , l'erreur donnée par (3.5) est exponentiellement stable.

Nous avons tout d'abord modifié (3.3) comme suit :

$$\dot{u} = Au + f(u) + h(t) + bm. \quad (3.36)$$

Donc l'erreur devient :

$$\dot{e} = (A - KC)e + f(t) + h(t) + bm \quad (3.37)$$

Si l'on compare (3.37) avec (3.29), nous voyons que les deux contiennent le message comme une addition linéaire. On suppose $e_m = Ce$ est l'erreur mesurée.

$$\text{Si : } \|C(A - KC)^{-1}(f(u) - f(\hat{u}))\| \ll 1, \quad (3.38)$$

Alors l'effet du terme non linéaire (3.37) sur e_m peut être négligé.

Remarque 3 : Nous notons que le schéma proposé ci-dessus est aussi robuste par rapport au bruit. , nous allons présenter une approche alternative pour le même problème. Pour être spécifique, considérons le système chaotique et les systèmes de réponse donnés par (3.28) et (3.9), respectivement, comme suit:

$$\dot{u} = A(\mu)u + g(o + \mu) + h(t) + bm, \quad o = Cu \quad (3.39)$$

$$\dot{\hat{u}} = A(\hat{\mu})\hat{u} + g(o + n, \hat{\mu}) + \hat{h}(t) + K(o + n - \hat{o}), \quad \hat{o} = C\hat{u}. \quad (3.40)$$

où $\mu, \hat{\mu} \in R^p$ sont les vecteurs de paramètre, n est le bruit de canal qui est additionné au signal transmetteur. L'erreur est définie comme $e = u - \hat{u}$, on utilise (3.39) , on ajoute (3.40) et en soustrayant le même terme, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{e} = & (A(\mu) - KC)e + bm + [A(\mu) - A(\hat{\mu})]\hat{u} + [h(t) - \hat{h}(t)] + [g(o + n, \mu) - \\ & g(o + n, \hat{\mu})] + [g(o, \mu) - g(o + n, \mu)] - Kn. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Notez que les deux premiers termes du côté droit de (3.41) sont identiques que (3.29), tandis que le reste est dues à l'incompatibilité de paramètre et le bruit. Car le gain n'est utilisé que dans les systèmes de réponse, le terme ΔK de (3.18) n'apparaît pas dans (3.41). Nous supposons les conditions de Lipschitz suivantes :

$$\|A(\mu) - A(\hat{\mu})\| \leq K_a \|\mu - \hat{\mu}\|, \quad \forall \mu, \hat{\mu} \in R^p, \quad (3.42)$$

$$\|g(o, \mu) - g(o, \hat{\mu})\| \leq K_\mu \|\mu - \hat{\mu}\|, \quad \forall o \in R, \forall \mu, \hat{\mu} \in R^p, \quad (3.43)$$

$$\|g(o_1, \mu) - g(o_2, \mu)\| \leq K_o \|o_1 - o_2\|, \quad \forall o_1, o_2 \in R, \forall \mu \in R^p. \quad (3.44)$$

Lorsque $A_c = A - KC$ est stable par un choix approprié de K . L'opérateur $e^{A_c t}$ est exponentiellement stable, c. à. d, pour $M > 0$ et $\delta > 0$ on a :

$$\|e^{A_c t}\| \leq M e^{-\delta t} \quad (3.45)$$

La solution de (3.41) peut être indiquée dans cette formule :

$$\begin{aligned}
 e(t) = & e^{A_c t} e(0) + \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} b m(\tau) d\tau + \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} [h(\tau) - \hat{h}(\tau)] d\tau + \\
 & \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} [A(\mu) - A(\hat{\mu})] \hat{u}(\tau) d\tau + \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} [g(o+n, \mu) - g(o+n, \hat{\mu})] d\tau + \\
 & \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} [g(o, \mu) - g(o+n, \mu)] d\tau - \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} K n(\tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{3.46}$$

On assume $\|n(t)\| \leq n_m$, $\|\hat{u}(t)\| \leq \hat{u}_m$ et $\|h(t) - \hat{h}(t)\| \leq \Delta h_m$ pour quelques $n_m > 0$, $\hat{u}_m > 0$ et Δh_m , et on laisse $\Delta\mu = \|\mu - \hat{\mu}\|$.

nous prenons les normes à l'aide de (3.45) et après intégration simple, nous obtenons :

$$\|e(t)\| \leq \left\| e^{A_c t} e(0) + \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} b m(\tau) d\tau \right\| + (1 - e^{-\delta t}) (C_1 \Delta\mu + C_2 n_m + C_3 \Delta h_m),
 \tag{3.47}$$

où $C_1 = M(k_a \hat{u}_m + k_\mu)/\delta$, $C_2 = M(K_o \|C\| + \|K\|)/\delta$ et $C_3 = M/\delta$.

Le premier terme sur la droite de (3.47) est précisément l'erreur obtenu de (3.29), les contributions de ces conditions sur l'erreur est asymptotiquement délimitée par le terme $C_1 \Delta\mu + C_2 n_m + C_3 \Delta h_m$. par conséquent, pour les petits $\Delta\mu$, n_m et Δh_m cette erreur sera petite aussi. Donc l'effet sera petit [19,20].

3. 6. Résultats de simulation

On va donner quelques résultats de simulation. D'abord, nous considérons l'équation forcée de Duffing. Dans ce cas, le système chaotique maître est donné comme :

$$\ddot{x} + 0.25\dot{x} + x^3 = 11 \cos t + m(t)
 \tag{3.48}$$

où m est le message à transmettre. Il est connu que ce système présente un comportement chaotique lorsque $m(t) = 0$.

On utilise la solution x du (3.48) comme le signal à transmettre au récepteur, c. à. d, $o = x$ et on utilise $x_1 = x$, $\dot{x}_1 = \dot{x}$, donc nous pouvons réécrire (3.48) comme suite :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.49)$$

$$\dot{x}_2 = -0.25x_1 - x_1^3 + 11\cos t + m(t), \quad o = x_1 \quad (3.50)$$

Ce système est évidemment sous la forme donnée en (3.29), avec $C = (1 \ 0)$, $b = (0 \ 1)^T$ et $h(t) = 11\cos t$, où l'exposant T désigne la transposition pour le récepteur.

Pour le récepteur, nous utilisons l'observateur donné par (3.9) :

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_1(x_1 - \hat{x}_1), \quad (3.51)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -0.25\hat{x}_1 - \hat{x}_1^3 + 11\cos t + k_2(x_1 - \hat{x}_1) \quad (3.52)$$

où k_1, k_2 sont des gains de l'observateur. Notons que dans ce cas, le message peut être injecté dans l'équation de x_2 , voir (3.48) et (3.50).

Et pour ce système, nous donnons les deux simulations suivantes :

Cas 1 : on choisit le message comme $m(t) = \sin 0.2 t$. Les gains de l'observateur sont:

$$k_1 = 8, \quad k_2 = 199.75.$$

Dans ce cas, $G(s)$ donné par (3.30) est calculé comme $G(s) = 1/(s^2 + 8s + 200)$ et on choisit $G_1 = 200$, on a $|1 - G_1 G(j\omega)| = 0.008$ pour $\omega = 0.2$.

Par conséquent, on peut utiliser $e_f = 200e_m$ comme le message récupéré voir (3.31).

Les résultats de cette simulation sont illustrés à la figure 3. 1.

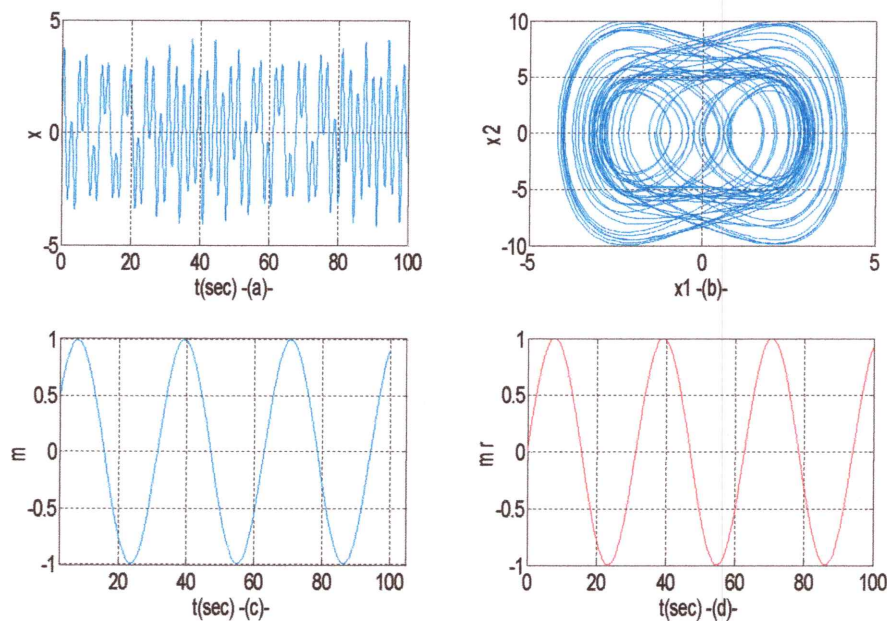


Fig. 3. 1. Résultats de simulation de système de Duffing. Cas 1.

(a) signal à transmettre x , (b) $x_1 = x$ par rapport à $x_2 = \dot{x}$, (c) message m , (d) message récupéré m_r .

On peut remarquer que le message est récupéré avec une précision raisonnable. On note que l'amplitude du message est comparable avec le signal émis.

Cas 2 : le message étant la somme de trois sinusoïdes comme: $r(t) = 0.5 \sin(t) + 0.5 \cos 0.5 t + 0.5 \sin 0.3 t$, les gains de l'observateur sont $k_1 = 8$, $k_2 = 14.75$.

Dans ce cas $G(s)$ est donné par (3.30) et ainsi calculé par $G(s) = 1/(s^2 + 8s + 15)$, et on choisit le signal m pour être utilisé en (3.50) comme : $m = (\ddot{r} + 8\dot{r} + 20r)/20$, c'est pourquoi (3.35) est satisfaite pour $k = 1/20$. Par conséquent, on a : $20e_m(t) \rightarrow r(t)$.

Les résultats de simulation sont indiqués sur la figure 3. 2.

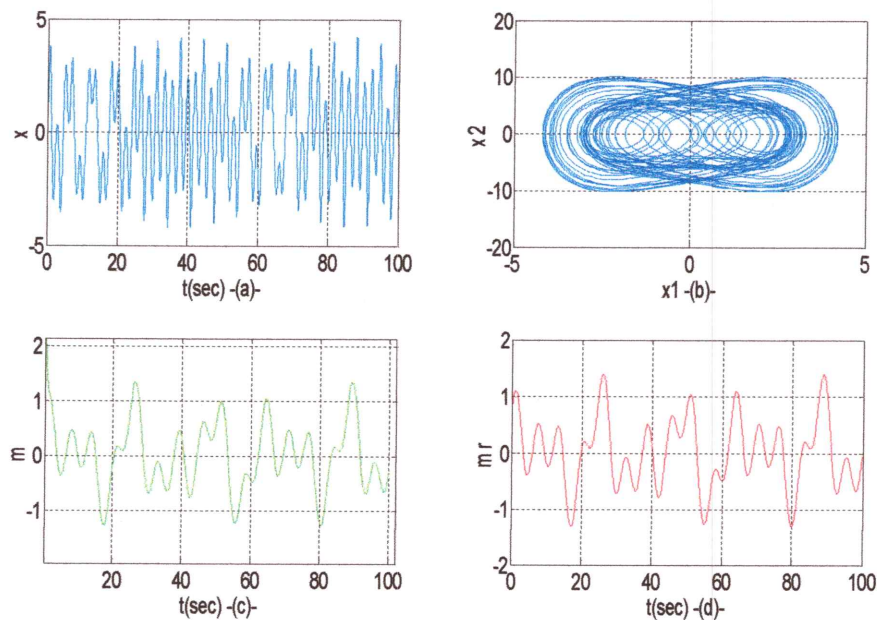


Fig. 3. 2. Résultats de simulation de système de Duffing, cas 2.

(a) signal à transmettre x . (b) $x_1 = x$ par rapport à $x_2 = \dot{x}$. (c) message m . (d) message récupéré m_r .

Cas 3 : Dans ce cas, on choisit le système de Lorenz comme le système chaotique maître :

$$\dot{x} = -10x + 10y + m(t), \quad (3.53)$$

$$\dot{y} = 28xy - y - xz, \quad (3.54)$$

$$\dot{z} = xy - 8/3z. \quad (3.55)$$

Il est bien connu que ce système présente des comportements chaotiques lorsque $m(t) = 0$. Ce système est sous la forme donnée par (3.36). On peut facilement démontrer que ce système ne peut pas être transformé en la forme donnée par (3.31). Pour le récepteur, on utilise l'observateur donné par (3.4) comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = -10\hat{x} + 10\hat{y} + k_1(x - \hat{x}) \quad (3.56)$$

$$\dot{\hat{y}} = 28\hat{x} - \hat{y} - \hat{x}\hat{z} + k_2(x - \hat{x}) \quad (3.57)$$

$$\dot{\hat{z}} = \hat{x}\hat{y} - 8/3\hat{z} + k_3(x - \hat{x}) \quad (3.58)$$

Pour ce système, on choisit les gains $k_2 = 28$, $k_3 = 0$ et k_1 on va le déterminer après de manière à être grand. Dans ce cas, on a $C(A - KC)^{-1} = 1/(k_1 + 10)(-1 \ -10 \ 0)$.

Dans les simulations on choisit m comme une onde carrée dont l'amplitude est en alternance entre $\pm\bar{m} = 10$ et $T = 10$, et $G(s) = 1/(s + k_1 + 10)$, d'où le message récupéré peut être considéré comme $\hat{m} = (k_1 + 10)e_m$. Dans la partie réceptrice, on a examiné deux cas. On a choisi d'abord $k_1 = 190$, et le message récupéré $m_r = (k_1 + 10)e_m$.

Ensuite, on va choisir $k_1 = 1990$, et le message récupéré est passé à travers un filtre passe-bas.

Les résultats de simulation sont donnés sur la figure suivante[11] :

Cas 1 : $k_1 = 190$

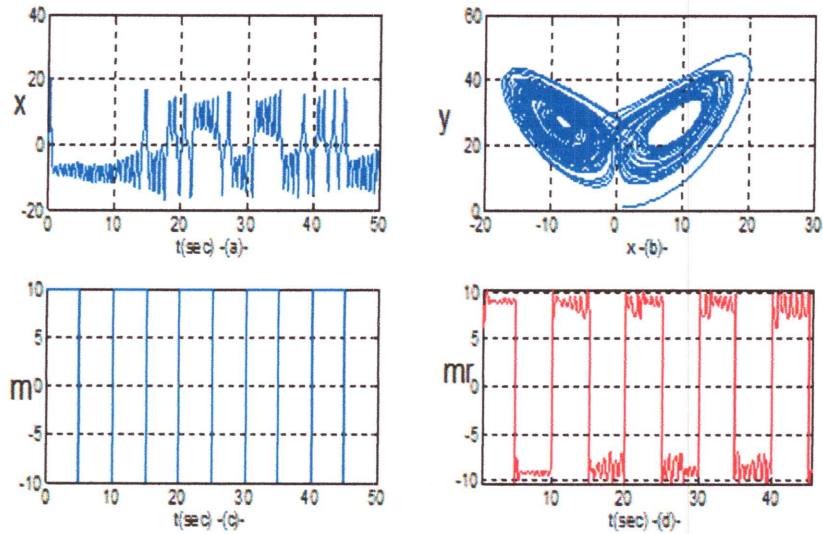


Fig. 3. 3. Résultats de simulation de système de Lorenz, cas 2.

(a) signal à transmettre x , (b) $x_1 = x$ par rapport à $x_2 = \dot{x}$, (c) message m , (d) message récupéré m_r .

Cas 2 : $k_1 = 1990$.

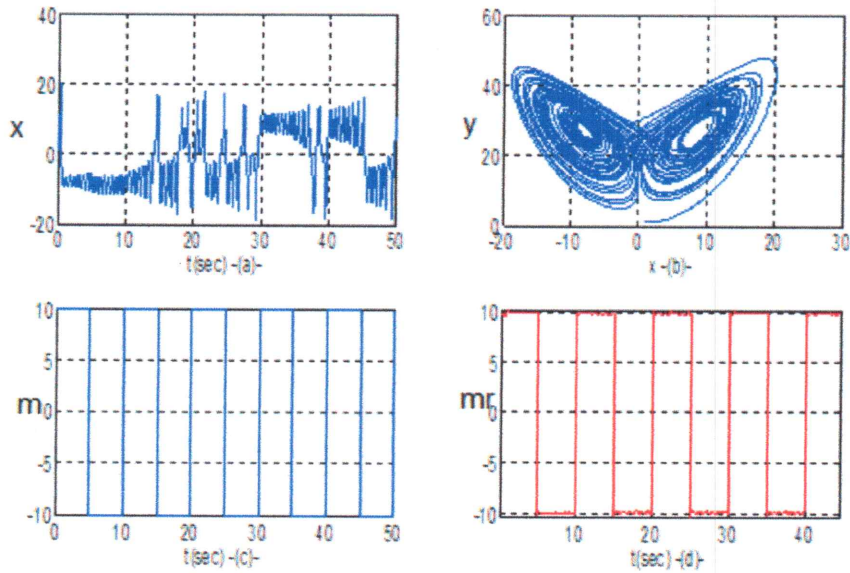


Fig. 3. 4. Résultats de simulation de système de Lorenz, cas 2.

(a) signal à transmettre x , (b) $x_1 = x$ par rapport à $x_2 = \dot{x}$, (c) message m , (d) message récupéré m_r .

Cas 4 : pour démontrer la robustesse des méthodes proposés en ce qui concerne le bruit et paramètres divergents, on utilise le modèle suivant du circuit de Chua bien connu :

$$\dot{x} = \alpha(y - h(x)) + m, \tag{3.59}$$

$$\dot{y} = x - y + z, \quad (3.60)$$

$$\dot{z} = -\beta z \quad (3.61)$$

où $h(t)$ est une fonction linéaire donnée par :

$$h(x) = \frac{2}{7}x - \frac{3}{14}(|x + 1| - |x - 1|), \quad (3.62)$$

et m le message à transmettre. Ce système est connu pour $\alpha = 9$, $\beta = 14.286$, ce système est de la forme donnée en (3.28) avec [12]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} -ah(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

On note que le signal reçu par la réponse du système sera $o + n = x + n$, où n est le bruit. Et pour le système de réponse, on utilise le suivant :

$$\hat{x} = \hat{\alpha}(\hat{y} - h(x + n)) + k_1(x + n - \hat{x}), \quad (3.64)$$

$$\hat{y} = \hat{x} - \hat{y} + \hat{z} + k_2(x + n - \hat{x}), \quad (3.65)$$

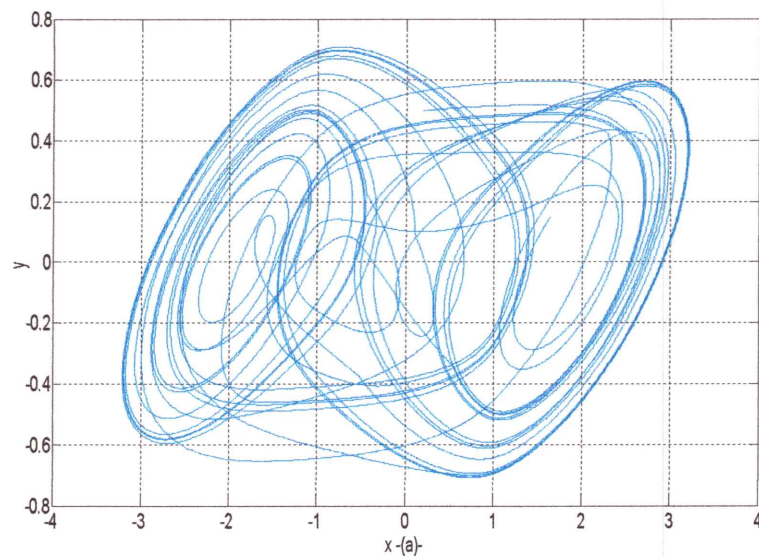
$$\hat{z} = -\hat{\beta}\hat{y} + k_3(x + n - \hat{x}) \quad (3.66)$$

Pour le système donné par (3.64)-(3.66), on choisit les gains comme :

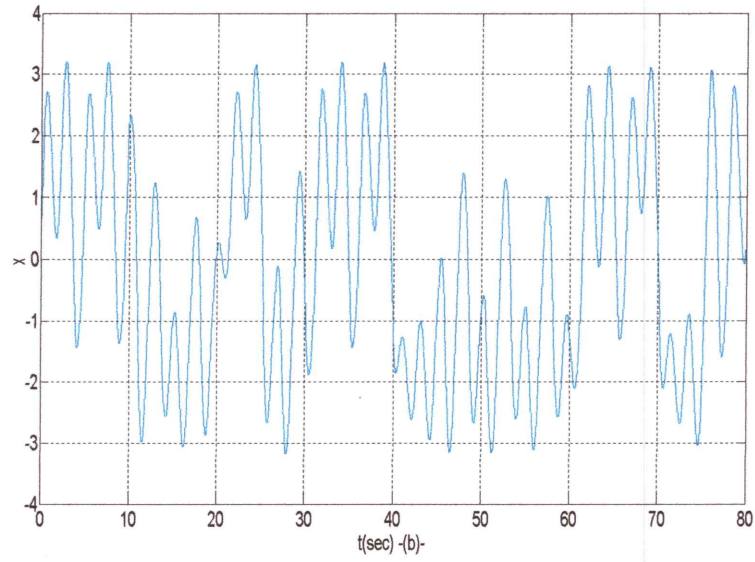
$k_1 = 100$, $k_3 = 0$, $k_2 = 1$, $G(s) = 1/s + k_1$ et le message récupéré est donné par :

$$m_r = k_1 e_m = k_1(x + n - \hat{x}).$$

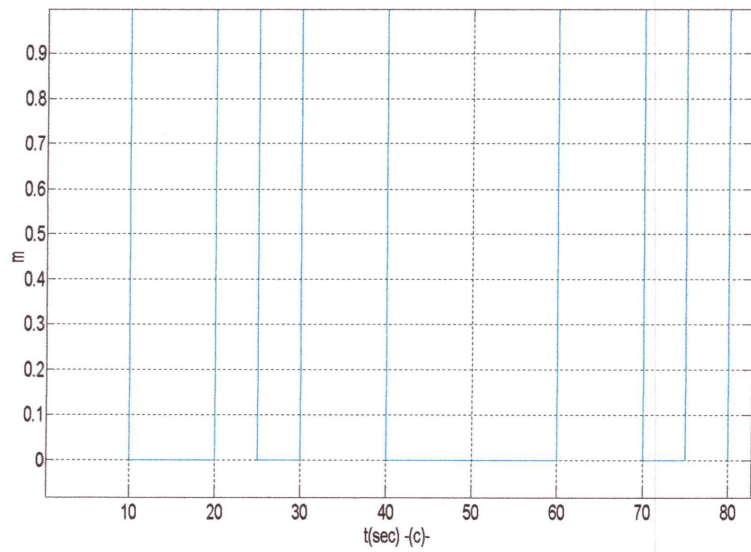
Les résultats de simulation sont donnés dans la figure suivante :



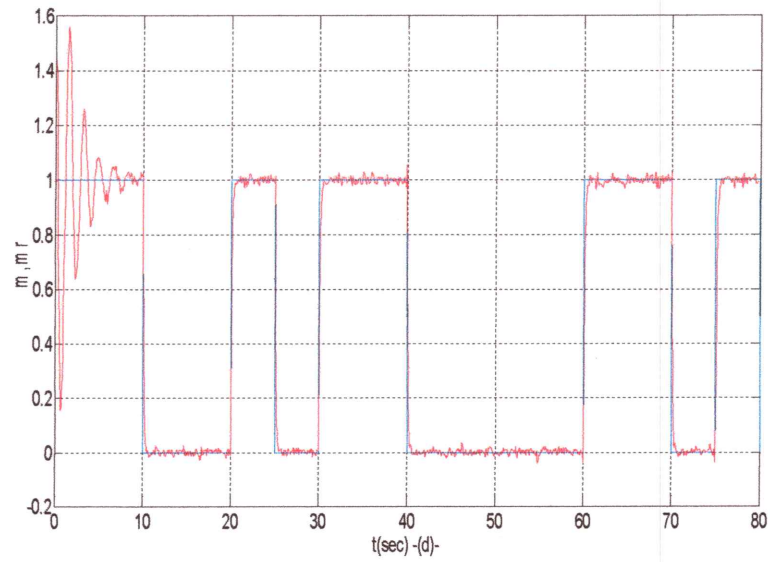
(a)



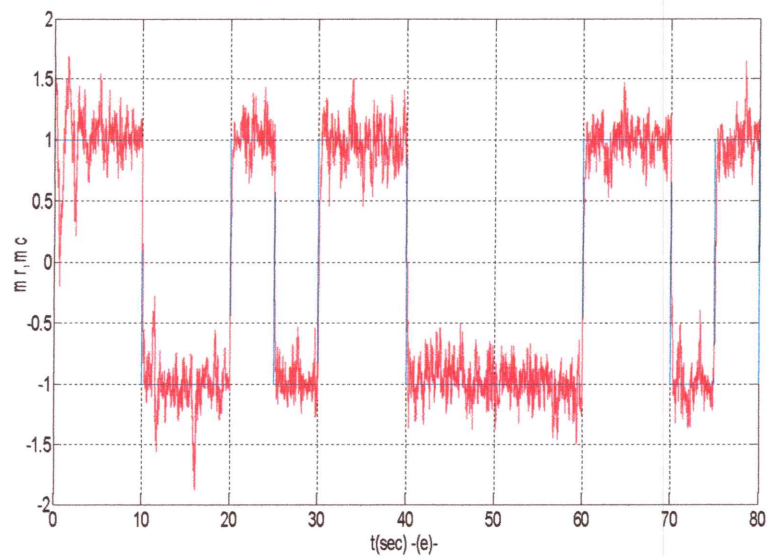
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig. 3. 5. Résultats de simulation de système de Chua.

(a) x par rapporte à y (b) message transmis m avec bruit, (c) message transmit m , (d) message récupéré m_r pour $n_m = 0.01$, (e) message récupéré m_r pour $n_m = 0.1$.

3. 7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la méthode de synchronisation des systèmes basés sur des observateurs chaotiques, on a expliqué ces méthodes. La première méthode de transmission est basé sur le masquage chaotique, donc le signal transmis au récepteur est la somme d'un signal chaotique et le message. Mais cette méthode a des inconvénients, et pour les éliminer, il y a une autre méthode laquelle est basée sur la modulation chaotique. Plus précisément, le message transmis est injecté dans le système chaotique maître comme entrée et le signal génère par le système chaotique maître est envoyé vers le système de réponse. Donc on a montré que dans certaines conditions on peut récupérer le message.

Conclusion Générale



Conclusion générale

Dans ce projet de fin d'étude, nous avons étudié des méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques à base d'observateurs non linéaires et leur application pour la transmission d'informations. Les stratégies qui ont été employées tiennent compte de différents scénarios pouvant se produire en pratique :

- ✓ la variété de non linéarité,
- ✓ la présence de perturbations de bruits dans le canal public,
- ✓ la technique de transmission, etc.

Un état de l'art sur le chaos et ses avantages utilisés à la transmission de l'information est présenté au *chapitre 1*, ainsi un signal chaotique n'est seulement pas généré par un système non linéaire quoi qu'il soit, mais sous la condition de sa sensibilité aux conditions initiales, en ce sens que l'évolution dynamique soit imprédictible, cette caractéristique est mesurée au moyen du calcul des Exposants de Lyapunov. Le *chapitre 2* traite dans un premier temps la synchronisation de deux systèmes identiques puis la synchronisation Backstepping.

En effet le masquage par chaos joue un rôle important dans la sécurité et la fiabilité des systèmes de transmission de données. Avec le développement du commerce électronique, les utilisateurs ont besoin d'authentifier et protéger ses données partagées sur des réseaux publics tels que L'Internet, autour de ce sujet le *chapitre 3*, teste les différents schémas de transmission sécurisé pour envoyer des messages confidentiels qui sont dans notre cas un signal carré et un autre sinusoïdale ou ses versions, le signal de modulation ou de masquage est généré à travers le circuit de **Chua**, système de **Lorenz** ou l'oscillateur de **Duffing**. Les résultats de simulation obtenus montrent que la récupération du message passe d'abord par la synchronisation des deux systèmes en temps continu. La robustesse des méthodes étudiées est testé aussi vis-à-vis les perturbations liées au bruit.

Finalement, nous proposons une application potentielle du chaos à la transmission des données, en se basant sur un observateur non linéaire et la méthode de synchronisation Backstepping, en espérant que d'autres étudiants vont prendre la relève et continuer de ce point notre modeste travail.



Bibliographie

Bibliographie

- [1] : STEWART I. Dieu joue-t-il aux dés “*Les mathématiques du chaos* “. Paris : Nouvelle Bibliothèque Scientifique Flammarion, 1992, 441 p.
- [2] : ARNOLD, V. (1974). “*Equation différentielles ordinaires* “. Mir, moscow édition
- [3] : Daniel Parrochia, *Les Grandes Révolutions scientifiques du XXe siècle* , Paris, Presses Universitaires de France, 1997.
- [4] : B. R. Andrievskii and A. L. Fradkov, “*Control of Chaos : Methods and Applications*“. Automation and Remote Control Volume 64, No. 5, 2003, pp. 673-713.
- [5] : E. N. Lorenz. “*Deterministic nonperiodic flow*”. J. Atmos. Sci, 20 :130-141,1963.
- [6] : ” *syst différentielle non lineaire* “Françoise truc,octobre 21,2010.
- [7]: L. M. Pecora and T. L. Carroll. “*Synchronization in chaotic systems*”. Phys. Rev. Lett., 64(8) : 821–824, 1990.
- [8]: Guan, Shuguang; Li, Kun; Lai, C.-H., “*Chaotic synchronization through coupling strategie*”. Chaos, Volume 16, Issue 2, (2006) pp. 023107-023109.
- [9]: Louis M. Pecora, Thomas L. Carroll, Gregg A. Johnson, et Douglas J. Mar. ”*Fundamentals of chaos*”,Phys.Rev.A44, 2374-2383.
- [10]: T. L. Carroll and L. M. Pecora “*Synchronizing nonautonomous chaotic circuits*”, IEEE Trans Circuits Syst 2, Special Issue on Chaos in Nonlinear Electronic Circuits Part C : Applications, vol. 40, pp 646-650, Oct 1993.
- [11]: Krstic, M., Kanellakopoulos , and P. Kokotovich, “*Control Lyapunov functions for adaptive nonlinear stabilization,Systems and Control Letters*” , vol. 26, no. 12, 1995 17-23.
- [12]: Department of Automatic Control, “*Lund Institute of Technology*”, www.control.lth.se/people/personal/rjdir/RiceUniversity/Backstepping.pdf, Backstepping-based Techniques.
- [13] : M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P.V. Kokotovic. “*Adaptive Nonlinear Control without Over parametrization*”. Technical report no. CCEC-91-1005, 1991. Note : Published in Systems and Control Letters, 19 :177-185, Sept. 1992.
- [14]: Miroslav Krstic and Petar V. Kokotovic “*Adaptive Nonlinear Output-Feedback Schemes with Marino-Tomei Controller*”, Ieee Transactions on Automatic Control, VOL. 41, NO.2, February 1996, pp274-280.

- [15]: Khalil, H. "*Nonlinear systems*" 2nd ed. 1996. Prentice-Hall. New-York
- [16]: Cuomo, K. M. & Oppenheim, A. V. [1993] « Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications, » *Phys. Rev. Lett.* 71, 65–68.
- [17]: Hasler, M. [1995] « Engineering chaos for secure communication systems, » *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* A353(1701), 115–126.
- [18]: Chen, G. [1997] « Control and synchronization of chaotic systems (a bibliography), » <ftp.egr.uh.edu/pub/TeX/chaos.tex> loginname: anonymous, password: your e-mail address.
- [19]: Morgul, "O." & Solak, E. [1996] « On the observer based synchronization of chaotic systems, » *Phys. Rev.* E54(5), 4803–4811.
- [20]: Morgul, "O." & Solak, E. [1997] « On the synchronization of chaotic systems by using state observers, » *Int. J. Bifurcation and Chaos* 7(6), 1307–1322.
- [21]: Morgul, "O." [1999] « Necessary condition for observerbased chaos synchronization, » *Phys. Rev. Lett.* 82(1), 169–176.
- [22]: Grassi, G. & Mascolo, S. [1997] « Nonlinear observer design to synchronize hyperchaotic systems via a scalar signal, » *IEEE Trans. Circuits Syst.-I* 44, 1011–1014.
- [23]: Liao, T. L. & Huang, N. S. [1999] « An observer-based approach to chaotic synchronization with applications to secure communications, » *IEEE Trans. Circuits Syst.-I* 46(9), 1144–1150 ».
- [24]: Khalil, H. K. [2002] « *Nonlinear Systems* » 3rd edition (Prentice Hall, Upper Saddle River) .