REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel

Laboratoire de Mathématiques et Applications des Mathématiques

Thèse

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat 3ème Cycle

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Fondamentales et Discrètes

Présentée par

Amira Khelifa

Stabilité globale des solutions de quelques modèles d'équations et systèmes d'équations aux différences

Soutenue le 09/02/2022 devant le jury composé de :

Mr. T. Zerzaihi	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel	Président
Mr. A. Bouchair	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel	Rapporteur
Mr. N. Touafek	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel	Examinateur
Mr. E. Hadidi	Prof	U. Badji Mokhtar, Annaba	Examinateur
Mr. M. S. Abdelouahab	Prof	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur
Mr. M. Ahmia	MCA	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel	Examinateur

Remerciements

Par ces quelques lignes je voudrais exprimer mes sincères gratitudes à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette thèse.

Mes premières remerciments vont certainement à mon mari et mon co-directeur de thèse Mr. Yacine Halim pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant la co-direction scientifique de mes travaux. Je lui suis reconnaissante de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa grande compétence, de sa rigueur intellectuelle, de son dynamisme, et de son efficacité certaine que je n'oublierai jamais.

A titre plus personnel, Je remercie chaleureusement mon mari, Yacine, pour la grande patience, l'encouragement. Je tiens à le remercier surtout pour son soutien moral ininterrompu et ses nombreux conseils tout le long de ma thèse.

Je remercie également mon directeur de thèse Mr. Abderrahmane Bouchair qui m'a permis de bénéficier de ses conseils et son aide tout au long de cette expérience. Je le remercie aussi d'avoir lu trés sérieusement beaucoup de versions préliminaires de ces travaux

J'adresse aussi mes remerciements aux membres de mon jury, Mr. Tahar Zerzaihi, Mr. Nouressadat Touafek, Mr. Elbahi Hadidi, Mr. Mohamed-Salah Abdelouahab et Mr. Moussa Ahmia pour accepter de juger ce travail et je les adresse mes sentiments les plus respectueux.

Finalement je remercie mes parents pour leurs soutiens qui m'a été bien utile durant ma thèse.

Résumé

Cette thèse se focalise sur l'étude de certaines classes de systèmes d'équations aux différences non-linéaires où à chaque fois nous présentons la forme explicite des solutions ou nous étudions leurs comportement qualitative.

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques définitions et théorèmes principaux concernant la théorie d'équations aux différences et les suites de Fibonacci et de Lucas. On termine par l'étude d'un système de deux équations aux différences d'ordre trois.

Le deuxième chapitre est dédié à la présentation des formes générales des solutions de deux systèmes d'équations aux différences d'ordre supérieur avec des coefficients en termes de nombres de Fibonacci et de Lucas.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude qualitative d'un système d'équations aux différences d'ordre supérieur, plusieurs résultats sont présentés sur la permanence des solutions, la stabilité asymptotique des points équilibres, l'oscillation, l'existence des solutions périodiques, l'attractivité globale et l'estimation de l'ordre de convergence.

Dans le dernier chapitre, nous donnons la forme fermée des solutions d'un système d'équations aux différences d'ordre supérieur.

Mots-clés : Système d'équations aux différences, forme des solutions, stabilité asymptotique, périodicité, oscillation, suite de Fibonacci, suite de Lucas.

Abstract

This thesis is devoted to the study of certain classes of systems of nonlinear difference equations where each time we present the solutions on the closed form or study their qualitative behavior.

In the first chapter, we introduce some definitions and results concerning the theory of difference equations and the Fibonacci and Lucas sequences that will be useful in our work and finish with the study of a third-order system of difference equations.

The second chapter is devoted to give a representation of the solutions of two systems of higher order difference equations with coefficients in terms of Fibonacci and Lucas numbers.

In the third chapter, we study the global asymptotic stability of the unique positive equilibrium point and the rate of convergence of positive solutions of the system of p nonlinear difference equations.

Finally, the closed form of the well-defined solutions of a system of higher-order rational difference equations will be the subject of the last chapter.

Key words : System of difference equations, form solutions, asymptotic stability, periodicity, oscillation, Fibonacci sequence, Lucas sequence.

ملخص

تعنى هذه الأطروحة بدراسة مجموعة من جمل معادلات فروق غير خطية أين نقوم في كل مرة بعرض الحلول بصيغتها الصريحة أو دراسة سلوكها النوعي.

في الفصل الأول قدمنا بعض التعاريف و النظريات الرئيسية المتعلقة بنظرية معادلات الفروق بالإضافة إلى متتاليتي فيبوناشي و لوكاس واختتمناه بإعطاء الصيغة الصريحة لجملة معادلتي فروق من الدرجة الثالثة.

الفصل الثاني تمحور حول دراسة وحل جملتي معدلات فروق من الرتب العليا، الأولى ذات معاملات بدلالة أعداد فيبوناشي والثانية بدلالة أعداد لوكاس.

الفصل الثالث خصص لدراسة السلوك النوعي لجملة معادلات فروق من الرتب العليا أين قمنا بدراسة محدودية الحلول، الاستقرار المقارب لنقاط التوازن، التذبذب، وجود الحلول الدورية بالإضافة إلى حصر معامل التقارب.

الفصل الأخير كرس لعرض الصيغة الصريحة للحلول لجملة معادلات فروق من الرتب العليا.

الكلمات الأساسية: جمل معادلات الفروق، صيغة الحلول، الاستقرار المقارب، الدورية، التذبذب، متتالية فيبوناشي، متتالية لوكاس.

Table des matières

Introduction générale

C'est depuis l'époque de De Moivre et Fibonacci (plus de trois cent ans), [16], [15], [16], [29] que le sujet des équations aux différences continue d'attiré l'attention des chercheurs dans diverse branches de la science. Cet intérêt aux équations aux différences est du à la diversité des champs d'applications des équations aux différences qui touchent des domaines comme l'économie ([23, 24]), la biologie ([2, 3, 4]), la médecine ([6, 53, 57]) , . . .etc.

Nos travaux présentés dans cette thèse contribuent à ce domaine de recherche. Plus précisément, l'objectif de cette thèse est de trouver les formes explicites et l'étude qualitative du comportement des solutions de certains systèmes d'équations aux différences non linéaires.

Dans le premier chapitre, on commence par rappeler les outils dont on aura besoin dans notre thèse.

Dans le deuxième chapitre, motivé par [27], nous nous intéressons à la représentation de la solution du système de deux équations aux différences d'ordre trois suivant

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}x_{n-2}}{y_n(a + by_{n-1}x_{n-2})}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}y_{n-2}}{x_n(a + bx_{n-1}y_{n-2})}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

où les paramètres a, b et les valeurs initiales $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0$ sont des nombres réels non nuls. Nous donnons également quelques explications théoriques aux formes générales des solutions liées à la représentation.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à la forme générale de la solution de deux systèmes d'équations aux différences rationnelles d'ordre supérieur avec des coefficients en termes des nombres de Fibonacci et de Lucas suivantes

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{n-k}^{((j+1)mod(p))}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{n-k}^{((j+1)mod(p))}}, \quad n, m, p, k \in N_0, j = \overline{1, p},$$

$$y_{n+1}^{(j)} = \frac{L_1 + L_0 y_{n-k}^{((j+1)mod(2p+1))}}{L_2 + L_1 y_{n-k}^{((j+1)mod(2p+1))}}, \quad n, p, k \in N_0, j = \overline{1, 2p+1},$$

où les valeurs initiales $x_{-k}^{(1)}, x_{-k+1}^{(1)}, \ldots x_0^{(1)}, x_{-k}^{(2)}, x_{-k+1}^{(2)}, \ldots x_0^{(2)}, \ldots, x_{-k}^{(p)}, x_{-k+1}^{(p)}, \ldots, x_1^{(p)}$ et $x_0^{(p)} \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{F_{m+3}}{F_{m+2}}, \quad m \in \mathbb{N}_0\right\}$, $y_{-k}^{(1)}, y_{-k+1}^{(1)}, \ldots y_0^{(1)}, y_{-k}^{(2)}, y_{-k+1}^{(2)}, \ldots y_0^{(2)}, \ldots, y_{-k}^{(2p+1)}, y_{-k+1}^{(2p+1)}, \ldots, y_1^{(2p+1)}$, $y_0^{(2p+1)} \in \mathbb{R} - \{-3\}$, $\{F_n\}_{n\geq 0}$ est la suite de Fibonacci et $\{L_n\}_{n\geq 0}$ est la suite de Lucas.

Nous présentons également quelques explications théoriques liées à la représentation de ces deux systèmes. En plus, nous étudions la stabilité asymptotique globale des solutions positives. Nos résultats généralisent certains résultats récents dans la littérature.

Dans le quatrième chapitre, nous généralisons les résultats obtenus par Devault et al. dans [20], Zhang et al. dans [72] et M. Gümüş dans [31]. Plus précisément, nous étudions le système de p équations aux différences

$$x_{n+1}^{(1)} = A + \frac{x_{n-m}^{(2)}}{x_n^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = A + \frac{x_{n-m}^{(3)}}{x_n^{(3)}}, \ldots, \quad x_{n+1}^{(p)} = A + \frac{x_{n-m}^{(1)}}{x_n^{(1)}}, \quad n, m, p \in \mathbb{N}_0$$

où le paramètre A est positif, et $x_{-m}^{(j)}, x_{-m+1}^{(j)}, \ldots, x_{-1}^{(j)}, x_0^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, sont des nombres réels positifs. En commençant par le comportement des solutions positives de ce dernier via la méthode d'analyse semi-cycle, la stabilité locale des points d'équilibres et du comportement asymptotique des solutions lorsque $0 \leq A < 1, A = 1$ et $A > 1$, ainsi que l'estimation de l'ordre de convergence d'une solution qui converge vers le point d'équilibre de ce système dans la région des paramètres décrits par $A > 1$.

Dans le dernier chapitre, on considère le système d'équations aux différences d'ordre supérieur

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{x_{n-k}^{(j+1)(mod(p))}}{a + bx_{n-k}^{((j+1)(mod(p)))}}, \quad n, p, k \in \mathbb{N}_0, \; j = \overline{1, p},$$

où les paramètres a, b sont des nombres réels non nuls et les valeurs initiales $x_{-k}^{(j)}$, $x_{-k+1}^{(j)}, \ldots, x_1^{(j)}, x_0^{(j)}, j = \overline{1, p}$, sont des nombres réels différents de $-\frac{a}{b}$.

Dans un premier temps, on donne une forme fermée pour les solutions bien définies de ce système. On prouve après que toutes les solutions de ce système convergent vers le seul point d'équilibre positif. Enfin, on donne des exemples pour illustrer les résultats obtenus.

Chapitre 1

Quelques préliminaires

1.1 Quelques préliminaires

Cette section regroupe des notions générales des équations et des systèmes d'équations aux différences, de la stabilité avec la méthode célèbre : la linéarisation, la périodicité, la permanence, ainsi que quelques théorèmes qui nous seront utiles pour la suite de notre thèse. Pour ces éléments préliminaires, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [10, 21, 30] et [50].

1.1.1 Équations aux différences

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I^{k+1} \to I$ une fonction bien définie.

Définition 1.1.1 *Une équation aux différences d'ordre* $(k+1)$ *est une équation de la forme*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{1.1}$$

avec les valeurs initiales $x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-k} \in I$.

Définition 1.1.2 (Point d'équilibre) *Un point* $\bar{x} \in I$ *est dit point d'équilibre pour l'équation*

(1.1) *si*

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}),$$

autrement dit

$$x_n = \bar{x}, \quad \forall n \geq -k.$$

Définition 1.1.3 (Périodicité) *Une solution* $\{x_n\}_{n\geq -k}$ *de l'équation* (1.1) *est dite* **éventuellement périodique** *de période* $p \in \mathbb{N}_0$ *si*

$$\exists N \geq -k; \quad x_{n+p} = x_n, \forall n \geq N.$$

Si $N = -k$*, on dit que la solution est* **périodique** *de période* p *.*

Définition 1.1.4 (Permanence) *Une solution* $\{x_n\}_{n\geq -k}$ *de l'équation* (1.1) *est dite permanente s'il existe* P *et* Q *deux constantes réelles telles que* $0 < P \leq Q < +\infty$*, et pour toutes valeurs initiales* $x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-k} \in I$*, il existe* $N \geq -k$ *tel que*

$$P \leq x_n \leq Q, \quad \textit{pour tout } n \geq N.$$

Définition 1.1.5 (Oscillation) *Une solution* $\{x_n\}_{n\geq -k}$ *de l'équation* (1.1) *est dite non-oscillatoire autour du points d'équilibre* $\overline{x}$*, s'il existe* $N \geq -k$ *tel que, soit*

$$x_n \geq \overline{x}, \quad \textit{pour tout } n \geq N,$$

ou

$$x_n \leq \overline{x}, \quad \textit{pour tout } n \geq N.$$

Une solution $\{x_n\}_{n\geq -k}$ *de l'équation* (1.1) *est dite oscillatoire si elle n'est pas non-oscillatoire.*

Définition 1.1.6 (Intervalle invariant) *Un intervalle* $J \subseteq I$ *est dit intervalle invariant pour l'équation* (1.1) *si*

$$x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in J \Rightarrow x_n \in J, \quad n > 0.$$

1.1.2 A propos de la stabilité

Le concept de stabilité comme celui de périodicité est au coeur de notre étude.

Dans ce paragraphe nous allons présenter les points essentielles de cette donnée qui vont nous servir dans la suite.

Définition 1.1.7 *Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre de l'équation* (1.1).

1. *$\bar{x}$ est dit* **localement stable** *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I : \mid x_{-k} - \bar{x} \mid + \cdots + \mid x_0 - \bar{x} \mid < \delta$$

alors

$$\mid x_n - \bar{x} \mid < \varepsilon, \forall n \geq -k.$$

2. *$\bar{x}$ est dit* **localement asymptotiquement stable** *si*

•*$\bar{x}$ est localement stable,*

•$\exists \gamma > 0, \forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I : \mid x_{-k} - \bar{x} \mid + \cdots + \mid x_0 - \bar{x} \mid < \gamma$ *alors*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}.$$

3. *$\bar{x}$ est dit* **globalement attractif** *si*

$$\forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I, \lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}.$$

4. *$\bar{x}$ est dit* **globalement asymptotiquement stable** *si*

•*$\bar{x}$ est localement stable,*

•*$\bar{x}$ est globalement attractif.*

5. *Le point $\bar{x}$ est dit* **instable** *s'il est non localement stable.*

Définition 1.1.8 *On appelle* **équation aux différences linéaire associée** *à l'équation* (1.1) *l'équation*

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k} \tag{1.2}$$

avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}), i = 0, \cdots, k.$$

et

$$\begin{array}{rcl} f: & I^k & \longrightarrow I \\ & (u_1, \ldots, u_k) & \longmapsto f(u_1, \ldots, u_k). \end{array}$$

et

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0\lambda^k - \cdots - p_k.$$

son polynôme caractéristique associé .

Théorème 1.1.1 (Stabilité par linéarisation) [50]

1. *Si toutes les racines du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\overline{x}$ de l'équation (1.1) est asymptotiquement stable.*
2. *Si au moins une racine du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre $\overline{x}$ de l'équation (1.1) est instable.*

Théorème 1.1.2 (Théorème de Clark) [14] *Une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique de l'équation (1.1) est*

$$| p_0 | + | p_1 | + \cdots + | p_k | < 1.$$

Théorème 1.1.3 (Théorème de Rouché) *Soient φ, ϕ deux fonctions holomorphes dans un ouvert Ω du plan complexe $\mathbb{C}$, et soit K un compact à bord contenu dans Ω. Si on a*

$$\left|\phi(z)\right| < \left|\varphi(z)\right|, \ \forall\, z \in \partial K,$$

alors le nombre de zéros de $\varphi + \phi$ dans K est égal au nombre de zéros de φ dans K, où ∂K est le bord de K.

1.1.3 Systèmes d'équations aux différences

Soient $f^{(i)}$, pour $i = 1, 2, \ldots, p$, des fonctions continûment différentiables

$$f^{(i)} : I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1} \to I_i^{k+1},$$

où I_i sont des intervalles réels.

Considérons le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = & f_1\left(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_k^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, \ldots, u_0^{(p)}, u_1^{(p)}, \ldots, u_k^{(p)}\right) \\ x_{n+1}^{(2)} = & f_2\left(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_k^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, \ldots, u_0^{(p)}, u_1^{(p)}, \ldots, u_k^{(p)}\right) \\ & \vdots \\ x_{n+1}^{(q)} = & f_q\left(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_k^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, \ldots, u_0^{(p)}, u_1^{(p)}, \ldots, u_k^{(p)}\right) \end{cases} \tag{1.3}$$

où $n, k, p, q \in \mathbb{N}_0$, $p \leq q$ et $\left(u_{-k}^{(i)}, u_{-k+1}^{(i)}, \ldots, u_0^{(i)}\right) \in I_i^p$.

Définissons la fonction

$$F : I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1} \longrightarrow I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1} \tag{1.4}$$

par

$$F(W) = \Big(f_0^{(1)}(W), f_1^{(1)}(W), \ldots, f_k^{(1)}(W), f_0^{(2)}(W), f_1^{(2)}(W), \ldots,$$

$$\ldots, f_k^{(2)}(W), \ldots, f_0^{(p)}(W), f_1^{(p)}(W), \ldots, f_k^{(p)}(W)\Big),$$

avec

$$W = \left(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_k^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, \ldots, u_0^{(p)}, u_1^{(p)}, \ldots, u_k^{(p)}\right)^t,$$

$$f_0^{(i)}(W) = f^{(i)}(W), \quad f_1^{(i)}(W) = u_0^{(i)}, \ldots, f_k^{(i)}(W) = u_{k-1}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Posons,

$$W_n = \left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right)^T.$$

Ainsi, le système (1.3) est équivalent au système

$$W_{n+1} = F(W_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.5}$$

c'est à dire

$$\left\{\begin{array}{lcl}
x_{n+1}^{(1)} & = & f^{(1)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots\ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right) \\
x_n^{(1)} & = & x_n^{(1)} \\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(1)} & = & x_{n-k+1}^{(1)} \\
x_{n+1}^{(2)} & = & f^{(2)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots\ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right) \\
x_n^{(2)} & = & x_n^{(2)} \\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(2)} & = & x_{n-k+1}^{(2)} \\
 & \vdots & \\
x_{n+1}^{(p)} & = & f^{(p)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots\ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right) \\
x_n^{(p)} & = & x_n^{(p)} \\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(p)} & = & x_{n-k+1}^{(p)}
\end{array}\right. .$$

Définition 1.1.9 (Point d'équilibre)

1. *Un point* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}})$ *est dit point d'équilibre pour le système* (1.3) *si*

$$\left\{\begin{array}{ll}
\overline{x^{(1)}} & = f^{(1)}\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right), \\
\overline{x^{(2)}} & = f^{(2)}\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right), \\
 & \vdots \\
\overline{x^{(p)}} & = f^{(p)}\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right).
\end{array}\right.$$

2. *Un point*

$$\overline{W} = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1}$$

est un point d'équilibre du système (1.5) si

$$\overline{W} = F(\overline{W}).$$

Définition 1.1.10 (Périodicité) *Une solution* $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right\}_{n\geq -k}$ *du système (1.3) est dite* **éventuellement périodique** *de période* $s \in \mathbb{N}_0$ *si*

$$\exists N \geq -k; \quad x_{n+s}^{(i)} = x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Si $N = -k$*, on dit que la solution est* **périodique** *de période* s *.*

Définition 1.1.11 (Permanence) *Une solution* $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right\}_{n\geq -k}$ *du système (1.3) est dite permanente s'il existe* P *et* Q *deux constantes réelles telles que* $0 < P \leq Q < +\infty$*, et pour toutes valeurs initiales* $x_0^{(i)}, x_{-1}^{(i)}, \cdots, x_{-k}^{(i)} \in I_i$*, il existe* $N \geq -k$ *tel que*

$$P \leq x_n^{(i)} \leq Q, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad \textit{pour tout } n \geq N.$$

Définition 1.1.12 (Oscillation) *Une solution* $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right\}_{n\geq -k}$ *du système (1.3) est dite non-oscillatoire autour du point d'équilibre* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}})$*, s'il existe* $N \geq -k$ *tel que, soit*

$$x_n^{(i)} \geq \overline{x^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad \textit{pour tout } n \geq N,$$

ou

$$x_n^{(i)} \leq \overline{x^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad \textit{pour tout } n \geq N.$$

Une solution $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right\}_{n\geq -k}$ *du système (1.3) est dite oscillatoire si elle n'est pas non-oscillatoire.*

Définition 1.1.13 (Semi-cycle) *Une "chaîne" de termes* $\{x_\mu^{(j)}, \ldots, x_\nu^{(j)}\}$*,* $\mu \geq -1$*,* $\nu \leq +\infty$ *est dite semi-cycle positive si* $x_i^{(j)} \geq \overline{x^{(j)}}$*,* $i \in \{\mu, \ldots, \nu\}$*,* $x_{\mu-1}^{(j)} < \overline{x^{(j)}}$ *et* $x_{\nu+1}^{(j)} < \overline{x^{(j)}}$*,* $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$*.*

Une "chaîne" de termes $\{x_\mu^{(j)}, \ldots, x_\nu^{(j)}\}$, $\mu \geq -1$, $\nu \leq +\infty$ *est dite semi-cycle négative si* $x_i^{(j)} < \overline{x^{(j)}}$, $i \in \{\mu, \ldots, \nu\}$, $x_{\mu-1}^{(j)} \geq \overline{x^{(j)}}$ *et* $x_{\nu+1}^{(j)} \geq \overline{x^{(j)}}$, $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Une "chaîne" de termes $\left\{(x_\mu^{(1)}, x_\mu^{(2)}, \ldots, x_\mu^{(p)}), \ldots, (x_\nu^{(1)}, x_\nu^{(2)}, \ldots, x_\nu^{(p)})\right\}$, $\mu \geq -1$, $\nu \leq +\infty$ *est dite semi-cycle positive (resp. semi-cycle négative) si* $\{x_\mu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(1)}\}$,..., $\{x_\mu^{(p)}, \ldots, x_\nu^{(p)}\}$ *sont des semi-cycles positives (resp. semi-cycles négatives).*

1.1.4 A propos de la stabilité

Définition 1.1.14 *Soient* $\overline{W}$ *un point d'équilibre du système* (1.5) *et* $\|\ .\ \|$ *une norme sur* $\mathbb{R}^n$.

1. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit stable (ou localement stable) si pour chaque* $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\| W_0 - \overline{W} \| < \delta$ *implique* $\| W_n - \overline{W} \| < \epsilon$ *pour* $n \geq 0$.

2. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit asymptotiquement stable (ou localement asymptotiquement stable) s'il est stable et s'il existe* $\gamma > 0$ *tel que* $\| W_0 - \overline{W} \| < \gamma$ *implique*
$$\lim_{n \to +\infty} W_n = \overline{W}.$$

3. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit globalement attractif (respectivement globalement attractif de bassin d'attraction l'ensemble* $G \subseteq I_1^{(k+1)} \times I_2^{(k+1)} \times \ldots \times I_p^{(k+1)}$*), si pour chaque* W_0 *(respectivement, pour chaque* $W_0 \in G$*)*
$$\lim_{n \to +\infty} W_n = \overline{W}.$$

4. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit globalement asymptotiquement stable (respectivement globalement asymptotiquement stable par rapport à G) si il est localement stable, et si pour chaque* W_0 *(respectivement pour chaque* $W_0 \in G$*),*
$$\lim_{n \to +\infty} W_n = \overline{W}.$$

5. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit instable s'il n'est pas localement stable.*

Remarque 1.1.4

Il est clair que $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) \in I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_p$ *est un point d'équilibre du système* (1.3) *si et seulement si* $\overline{W} = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1}$ *est un point d'équilibre du système* (1.5).

Définition 1.1.15 *On appelle* **système linéaire associée** *au système* (1.5) *autour du point d'équilibre*

$$\overline{W} = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right)$$

le système

$$W_{n+1} = JW_n,\ n = 0, 1, \ldots$$

où J est la matrice Jacobienne de la fonction F au point d'équilibre $\overline{W}$, donnée par

$$J = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}}
\end{pmatrix}.$$

Théorème 1.1.5 (Stabilité par linéarisation) [50]

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne J sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\overline{W}$ du système (1.5) est localement asymptotiquement stable.*

2. *Si au moins une valeur propre de la matrice Jacobienne J a un module strictement supérieur à un, alors le point d'équilibre $\overline{W}$ du système (1.5) est instable.*

L'ordre de convergence

Les résultats suivants [21, 56] donnent l'ordre de convergence pour les solutions d'un système d'équations aux différences.
Soit le système d'équations aux différences

$$X_{n+1} = (A + B_n)\, X_n,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.6}$$

où X_n est un vecteur m dimensionnelle, $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ est une matrice constante, et $B_n : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}^{m\times m}$ est une matrice fonctionnelle satisfaisant

$$||B_n|| \to 0 \tag{1.7}$$

quand $n \to \infty$.

Théorème 1.1.6 (Premier Théorème de Perron) *Supposons que la condition (1.7) est vérifiée. Si X_n est une solution de (1.6), alors soit $X_n = 0$ pour chaque n assez grand, où*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{||X_{n+1}||}{||X_n||} \tag{1.8}$$

existe et est égale au module de l'une des valeurs propres de la matrice A.

Théorème 1.1.7 (Deuxième Théorème de Perron) *Supposons que la condition (1.7) est* *vérifié. Si X_n est une solution de (1.6), alors soit $X_n = 0$ pour chaque n assez grand où*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} (\|X_n\|)^{1/n} \tag{1.9}$$

existe et est égale au module de l'une des valeurs propres de la matrice A.

1.2 Les nombres de Fibonacci et de Lucas

Cette deuxième partie regroupe des définitions et quelques propriétés des suites de Lucas et de Fibonacci, ainsi que quelques identités qui nous seront utiles pour la suite de notre thèse. Pour ces éléments, nous renvoyons aux ouvrages [51, 71, 44] et [43].

1.2.1 La suite de Fibonacci

Définition 1.2.1 *La suite de Fibonacci $\{F_n\}_{n\geq 0}$ est définie par*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, F_1 = 1, \tag{1.10}$$

pour tout $n \geq 0$.

Remarque 1.2.1 *La suite de Fibonacci est une équation aux différences linéaire a coefficients constants homogène d'ordre 2.*

La solution générale de l'équation (1.10) est

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{1.11}$$

Définition 1.2.2 *La formule (1.11) est dite la formule de Binet de $\{F_n\}_{n\geq 0}$.*

C'est-à-dire

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.12}$$

avec

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{1.13}$$

Corollaire 1.2.1 ([71]) .

Soit $\{F_n\}_{n\geq 0}$ *la suite de Fibonacci. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+r}}{F_n} = \alpha^r, \quad r \in \mathbb{N}; \tag{1.14}$$

avec α *est le nombre* ***d'or***.

Quelques propriétés des nombres de Fibonacci

Propositions 1.2.1 ([51, 71]) .

Soit $\{F_n\}_{n\geq 0}$ *la suite de Fibonacci. Alors on a les identités suivantes*

- **L'identité de Cassini** : *Pour* $n > 0$, *on a*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{1.15}$$

- **L'identité d'Ocagne** : *Pour* $n, r \in \mathbb{N}$, *on a*

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^n F_r. \tag{1.16}$$

- **L'identité de Johnson** : *Pour* k, l, m, n *et* $r \in \mathbb{N}$ *tels que* $k + l = m + n$, *on a*

$$F_k F_l - F_m F_n = (-1)^r (F_{k-r}F_{l-r} - F_{m-r}F_{n-r}). \tag{1.17}$$

- **L'identité de Catalan** *Pour* $n, r \in \mathbb{N}$, *on a*

$$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = (-1)^{n+r} F_r^2. \tag{1.18}$$

Propositions 1.2.2 ([51]) .

Soit $\{F_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci. Alors

1) *Pour tout $n, r \in \mathbb{N}$*

$$F_{r(n-1)} - (-1)^r F_{r+1} F_{rn} = (-1)^{r+1} F_r F_{rn+1}, \tag{1.19}$$

$$F_n = F_{r+1} F_{n-r} + F_r F_{n-(r+1)}. \tag{1.20}$$

2) *Pour tout $n, r \in \mathbb{N}$,*

$$F_{r(n+1)+1} - F_{r+1} F_{rn+1} = F_r F_{rn}, \tag{1.21}$$

$$F_{r(n+1)} - F_{r+1} F_{rn} = F_r F_{rn-1}. \tag{1.22}$$

Lemme 1.2.1 *Soit $\{F_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci et $r, p \in \mathbb{N}_0$. Alors*

$$F_r F_{(p-1)r+1} + F_{r-1} F_{(p-1)r} = F_{pr}, \tag{1.23}$$

$$F_{r+1} F_{(p-1)r} + F_r F_{(p-1)r-1} = F_{pr}, \tag{1.24}$$

$$F_{r+1} F_{(p-1)r+1} + F_r F_{(p-1)r} = F_{pr+1}, \tag{1.25}$$

$$F_r F_{(p-1)r} + F_{r-1} F_{(p-1)r-1} = F_{pr-1}. \tag{1.26}$$

Preuve. Il découle directement en utilisant (1.12). ■

1.2.2 La suite de Lucas

Définition 1.2.3 *On appelle la suite de Lucas la suite $\{L_n\}_{n\geq 0}$ définie par*

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad L_0 = 2, L_1 = 1, \tag{1.27}$$

pour tout $n \geq 0$.

La solution générale de l'équation (1.27) est

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n. \tag{1.28}$$

Définition 1.2.4 *La formule* (1.28) *est dite la formule de Binet de* $\{L_n\}_{n\geq 0}$.
C'est-à-dire

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.29}$$

avec

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Corollaire 1.2.2 ([71]) .
Soit $\{L_n\}_{n\geq 0}$ *la suite de Lucas. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{L_{n+r}}{L_n} = \alpha^r, \quad r \in \mathbb{N}. \tag{1.30}$$

avec α *est le nombre **d'or**.*

Quelques propriétés des nombres de Lucas

Propositions 1.2.3 ([51]) .

1) *Pour tout* $n, m \in \mathbb{N}$,

$$L_{n+m} + (-1)^m L_{n-m} = L_m L_n. \tag{1.31}$$

2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$L_{2n} + 2(-1)^n = L_n^2. \tag{1.32}$$

3) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5(-1)^n. \tag{1.33}$$

4) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$L_{n+1}^2 - L_n^2 = L_{n-1}L_{n+2}. \tag{1.34}$$

1.2.3 Quelques relations entre les nombres de Fibonacci et de Lucas

Propositions 1.2.4 ([51, 71]) .
Soient $\{F_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci et $\{L_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Lucas, donc

1) *Pour $n, k \in \mathbb{N}$,*

$$L_{n+k} - (-1)^k L_{n-k} = 5F_nF_k. \tag{1.35}$$

2) *Pour $n, k \in \mathbb{N}$,*

$$F_{n+k} + (-1)^k F_{n-k} = F_nL_k. \tag{1.36}$$

3) *Pour $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$L_{m+n}F_n + L_mF_{n-1} = L_{m+n}. \tag{1.37}$$

4) *(**Ferns, 1967**) Pour $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$2L_{m+n} = L_mL_n + 5F_mF_n. \tag{1.38}$$

5) *(**Hoggatt, 1969**) pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$L_n^2 - F_n^2 = 4F_{n-1}F_{n+1}. \tag{1.39}$$

Lemme 1.2.2 *Soient $\{F_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci et $\{L_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Lucas. Alors, pour $r, p, n \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$F_{p(m+2)-1} + F_{p(m+2)+1} = L_{p(m+2)}. \tag{1.40}$$

$$F_{p(m+2)}^2 - F_{p(m+2)+1}F_{p(m+2)-1} = (-1)^{p(m+2)}. \tag{1.41}$$

$$5F_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^{n+1}. \tag{1.42}$$

$$\alpha^n = \left(\frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}\right), \quad \beta^n = \left(\frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}\right). \tag{1.43}$$

Preuve. Il découle directement en utilisant (1.12) et (1.29). ■

Chapitre 2

Représentation des solutions d'un système de deux équations aux différences d'ordres trois

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la représentation de la solution du système de deux équations aux différences d'ordre trois suivant

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}x_{n-2}}{y_n(a + by_{n-1}x_{n-2})}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}y_{n-2}}{x_n(a + bx_{n-1}y_{n-2})}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

où les paramètres a, b et les valeurs initiales $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0$ sont des nombres réels non nuls. Nous donnons également quelques explications théoriques liées à la représentation.

Récemment, le système de deux équations aux différences d'ordre trois suivant

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}x_{n-2}}{y_n(\pm 1 \pm y_{n-1}x_{n-2})}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}y_{n-2}}{x_n(\pm 1 \pm x_{n-1}y_{n-2})}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.1}$$

a été étudié par Elsayed et Ibrahim dans [27], où certaines formules sous forme fermée pour leurs solutions sont données en termes de valeurs initiales $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0$. Les formules sous forme fermée sont données et prouvées en utilisant le raisonnement par récurrence.

Ici, on donne une autre preuve alternative, que nous pensions plus simple, afin d'expliquer théoriquement les résultats présentés dans le papier [27].

Considérons l'extension suivante du système (2.1)

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}x_{n-2}}{y_n(a + by_{n-1}x_{n-2})}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}y_{n-2}}{x_n(a + bx_{n-1}y_{n-2})}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.2}$$

où les paramètres a, b et les valeurs initiales $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0$ sont des nombres réels non nuls.

Notre objectif est de montrer que le système (2.2) est résoluble en trouvant ses formules sous forme fermée par une approche analytique, et de montrer que toutes les formules sous forme fermée obtenues dans [27] se découlent facilement de celles de notre présent travail.

2.1 Forme des solutions

Supposons que $\{x_n, y_n\}_{n\geq -2}$ est une solution bien définie du système (2.2). Posons

$$u_n = x_n y_{n-1}, \quad v_n = y_n x_{n-1}, \tag{2.3}$$

pour $n \geq -1$. Alors le système (2.2) peut être écrit comme suit

$$u_{n+1} = \frac{v_{n-1}}{a + bv_{n-1}}, \quad v_{n+1} = \frac{u_{n-1}}{a + bu_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.4}$$

Pour donner une forme fermée aux solutions bien définies du système (2.4), nous considérons le système de deux équations aux différences de premier ordre suivant

$$u_{n+1} = \frac{v_n}{a + bv_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n}{a + bu_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.5}$$

Le système (2.5) peut être écrit comme l'équation suivante

$$u_{n+1} = \frac{u_{n-1}}{a^2 + b(a+1)u_{n-1}}. \tag{2.6}$$

Soit

$$u_n^{(j)} = u_{2n-j}, \quad n \in \mathbb{N}, j \in \{0,1\}. \tag{2.7}$$

Utilisant la notation (2.7), nous pouvons écrire (2.6) comme

$$u_{n+1}^{(j)} = \frac{u_n^{(j)}}{a^2 + b(a+1)u_n^{(j)}}, \tag{2.8}$$

où $j \in \{0,1\}$.

L'équation (2.8) peut être réduite à l'équation

$$\mathcal{H}_{n+1} = \frac{(a^2+1)\mathcal{H}_n - a^2}{\mathcal{H}_n}, \tag{2.9}$$

en utilisant le changement de variable

$$u_n^{(j)} = \frac{1}{b(a+1)}\left(\mathcal{H}_n - a^2\right). \tag{2.10}$$

Maintenant nous considérons l'équation aux différences (2.9) avec la valeur initiale $\mathcal{H}_0$ est un nombre réel non nul. Posons

$$\mathcal{H}_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}. \tag{2.11}$$

Alors l'équation (2.9) devient

$$k_{n+1} - (a^2+1)k_n + a^2 k_{n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.12}$$

Cas $a^2 \neq 1$:

Soit $\{k_n\}_{n\geq -1}$ une solution de l'équation (2.12) telle que k_0 et k_{-1} sont des nombres réels non nuls. Les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - (a^2+1)\lambda + a^2$ sont $\lambda_1 = a^2$ et $\lambda_2 = 1$. D'où la solution générale de l'équation (2.12) peut être écrite sous la forme suivante

$$k_n = c_1 + c_2 a^{2n}.$$

En utilisant les valeurs initiales k_0 et k_{-1}, après quelques calculs, on obtient

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{k_0 - k_{-1}a^2}{1-a^2}, \\ c_2 &= \frac{a^2(k_{-1}-k_0)}{1-a^2}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation (2.12) est

$$k_n = \frac{1}{1-a^2}\left[k_0\left(1-a^{2(n+1)}\right) - a^2 k_{-1}\left(1-a^{2n}\right)\right]. \tag{2.13}$$

De tout ce qui précède, nous voyons que le théorème suivant est vrai.

Théorème 2.1.1 *Soit $\{\mathcal{H}_n\}_{n\geq 0}$ une solution bien définie de l'équation (2.9). Alors, pour $n = 2, 3, \ldots,$ on a*

$$\mathcal{H}_n = \frac{a^2(1-a^{2n}) - \mathcal{H}_0(1-a^{2(n+1)})}{a^2(1-a^{2(n-1)}) - \mathcal{H}_0(1-a^{2n})}. \tag{2.14}$$

Donc, de (2.10) nous voyons que

$$\begin{aligned} u_n^{(j)} &= \frac{1}{b(a+1)}\left(\mathcal{H}_n - a^2\right) \\ &= \frac{u_0^{(j)}}{a^{2n} + b(a+1)u_0^{(j)}\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}}, \end{aligned}$$

pour chaque $j \in \{0, 1\}$.

Cas $a^2 = 1$:

Dans ce cas l'équation (2.9) devient

$$k_{n+1} - 2k_n + k_{n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.15}$$

Soit $\{k_n\}_{n\geq -1}$ la solution de l'équation (2.15) telle que k_0 et k_{-1} sont des nombres réels non nuls. La racine du polynôme caractéristique $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ et $\lambda_1 = 1$. Alors la solution générale de l'équation (2.15) peut être écrite sous la forme suivante

$$k_n = c_1 + c_2 n.$$

En utilisant les valeurs initiales k_0 et k_{-1}, après quelques calculs, on obtient

$$\begin{aligned} c_1 &= k_0 \\ c_2 &= k_0 - k_{-1}. \end{aligned}$$

D'où la solution générale de l'équation (2.15) est

$$k_n = k_0(n+1) + k_{-1}n. \tag{2.16}$$

Théorème 2.1.2 *Soit $\{\mathcal{H}_n\}_{n\geq 0}$ une solution bien définie de l'équation (2.9). Alors, pour $n = 2, 3, \ldots,$ on a*

$$\mathcal{H}_n = \frac{n - \mathcal{H}_0(n+1)}{(n-1) - \mathcal{H}_0 n}. \tag{2.17}$$

Donc, de (2.10) nous voyons que

$$u_n^{(j)} = \frac{u_0^{(j)}}{1 + b(a+1)u_0^{(j)} n} \tag{2.18}$$

où $j \in \{0, 1\}$.

En utilisant de (2.7), nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.1 *Soit $\{u_n\}_{n\geq -1}$ une solution bien définie de l'équation (2.6). Alors*

$$\left.\begin{array}{ll} u_{2n-j} = \dfrac{u_{-j}}{a^{2n} + b(a+1)u_{-j}\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}} & \textbf{\textit{si}}\ a^2 \neq 1. \\ u_{2n-j} = \dfrac{u_{-j}}{1 + b(a+1)u_{-j}n} & \textbf{\textit{si}}\ a^2 = 1. \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

où $j \in \{0, 1\}$.

Corollaire 2.1.2 *Soit $\{u_n, v_n\}_{n\geq 0}$ une solution bien définie du système (2.5). Alors*

si $a^2 \neq 1$,

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{u_0}{a^{2n} + b(a+1)u_0\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}}, \\ u_{2n+1} &= \frac{v_0}{a^{2n+1} + bv_0\left(a\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r} + \sum_{r=0}^{n} a^{2r}\right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \frac{v_0}{a^{2n} + b(a+1)v_0\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}}, \\ v_{2n+1} &= \frac{u_0}{a^{2n+1} + bu_0\left(a\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r} + \sum_{r=0}^{n} a^{2r}\right)}. \end{aligned}$$

où $n \in \mathbb{N}_0$.

si $a^2 = 1$,

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{u_0}{1 + b(a+1)nu_0}, \\ u_{2n+1} &= \frac{v_0}{a + b((a+1)n+1)v_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \frac{v_0}{1+b(a+1)nv_0}, \\ v_{2n+1} &= \frac{u_0}{a+b((a+1)n+1)u_0}, \end{aligned}$$

où $n \in \mathbb{N}_0$.

Preuve. Soit $\{u_n, v_n\}_{n\geq 0}$ une solution bien définie du système (2.5), donc $\{u_n\}_{n\geq -1}$ est une solution de l'équation (2.8). Alors,

si $a^2 \neq 1$. Soit

$$u_{2n-1} = \frac{u_{-1}}{a^{2n} + b(a+1)u_{-1}\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}},$$

et

$$v_0 = \frac{u_{-1}}{a+bu_{-1}},$$

donc

$$\begin{aligned} u_{2n+1} &= \frac{u_{-1}}{a^{2(n+1)} + b(a+1)\left(\sum_{r=0}^{n} a^{2r}\right)u_{-1}}, \\ &= \frac{u_{-1}}{a^{2n+1}(a+bu_{-1}) + b\left(a\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r} + \sum_{r=0}^{n} a^{2r}\right)u_{-1}}, \\ &= \frac{v_0}{a^{2n+1} + b\left(a\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{2r}\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} a^{2r}\right)\right)v_0}. \end{aligned}$$

si $a^2 = 1$. Soit

$$u_{2n-1} = \frac{u_{-1}}{1+b(a+1)nu_{-1}},$$

et

$$v_0 = \frac{u_{-1}}{a+bu_{-1}},$$

d'où

$$u_{2n+1} = \frac{u_{-1}}{1+b(a+1)(n+1)u_{-1}},$$

alors

$$\begin{aligned}
u_{2n+1} &= \frac{u_{-1}}{a^2 + b(a+1)(n+1)u_{-1}}, \\
&= \frac{u_{-1}}{a(a+bu_{-1}) + b((a+1)n+1)u_{-1}}, \\
&= \frac{v_0}{a + b((a+1)n+1)v_0}.
\end{aligned}$$

De la même manière, après quelques calculs et utilisations

$$v_n = \frac{u_{n-1}}{a + bu_{n-1}},$$

on obtient, si $a^2 \neq 1$, que

$$\begin{aligned}
v_{2n} &= \frac{v_0}{a^{2n} + b(a+1)v_0 \displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}}, \\
v_{2n+1} &= \frac{u_0}{a^{2n+1} + bu_0 \left(a \displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r} + \displaystyle\sum_{r=0}^{n} a^{2r} \right)},
\end{aligned}$$

et, **si** $a^2 = 1$, que

$$\begin{aligned}
v_{2n} &= \frac{v_0}{1 + b(a+1)nv_0}, \\
v_{2n+1} &= \frac{u_0}{a + b((a+1)n+1)u_0}.
\end{aligned}$$

■

Revenons maintenant au système (2.4), nous utilisant une transformation appropriée réduisant ce système en un système d'équations aux différences de premier ordre (2.5).

Les valeurs initiales avec les indices les plus petits sont u_{-k} et v_{-k}. En utilisant (2.4) avec $n = 0$, nous obtenons les valeurs de u_1 et v_1 comme suit

$$u_1 = \frac{v_{-1}}{a + bv_{-1}}, \quad v_1 = \frac{u_{-1}}{a + bu_{-1}}.$$

Après avoir connu les valeurs de u_1 et v_1, en utilisant (2.4) avec $n = 2$ on obtient les valeurs de u_3 et v_3. On a

$$u_3 = \frac{v_1}{a + bv_1}, \quad v_3 = \frac{u_1}{a + bu_1}.$$

En utilisant (2.4) pour $n = 4$, les valeurs de u_3 et v_3, nous amènent à obtenir les valeurs de u_5 et v_5. On a

$$u_5 = \frac{v_3}{a + bv_3}, \qquad v_5 = \frac{u_3}{a + bu_3}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$u_{2m+1} = \frac{v_{2m-1}}{a + bv_{2m-1}}, \quad v_{2m+1} = \frac{u_{2m-1}}{a + bu_{2m-1}}.$$

De la même manière, on obtient que les valeurs initiales u_{-i} et v_{-i}, pour un $i \in \{0, 1\}$ fixe, déterminent toutes les valeurs des suites $(u_{2(m+1)-i})_m$ et $(v_{2(m+1)-i})_m$. Nous avons aussi

$$u_{2(m+1)-i} = \frac{v_{2m-i}}{a + bv_{2m-i}}, \quad v_{2(m+1)-i} = \frac{u_{2m-i}}{a + bu_{2m-i}}. \tag{2.19}$$

Soit

$$u_n^{(i)} = u_{2n-i}, \quad v_n^{(i)} = v_{2n-i}. \tag{2.20}$$

En utilisant la notation (2.20), nous pouvons écrire (2.4) comme suit

$$u_{n+1}^{(i)} = \frac{v_n^{(i)}}{a + bv_n^{(i)}}, \quad v_{n+1}^{(i)} = \frac{u_n^{(i)}}{a + bu_n^{(i)}}.$$

De tout ce qui précède, nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.1.3 *Soit $\{u_n, v_n\}_{n\geq -1}$ une solution bien définie du système (2.4). Alors, pour $n \geq 2$ nous avons*

si $a^2 \neq 1$

$$\begin{cases} u_{4n-1} &= \dfrac{u_{-1}}{a^{2n}+b(a+1)\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}u_{-1}}, \\ u_{4n} &= \dfrac{u_0}{a^{2n}+b(a+1)\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}u_0}, \end{cases} \quad \begin{cases} v_{4n-1} &= \dfrac{v_{-1}}{a^{2n}+b(a+1)\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}v_{-1}}, \\ v_{4n} &= \dfrac{v_0}{a^{2n}+b(a+1)\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}v_0}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{4n+1} &= \dfrac{v_{-1}}{a^{2n+1}+b\left(a\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}+\displaystyle\sum_{r=0}^{n} a^{2r}\right)v_{-1}}, \\ u_{4n+2} &= \dfrac{v_0}{a^{2n+1}+b\left(a\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}+\displaystyle\sum_{r=0}^{n} a^{2r}\right)v_0}. \end{cases} \quad \begin{cases} v_{4n+1} &= \dfrac{u_{-1}}{a^{2n+1}+b\left(a\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}+\displaystyle\sum_{r=0}^{n} a^{2r}\right)u_{-1}}, \\ v_{4n+2} &= \dfrac{u_0}{a^{2n+1}+b\left(a\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}+\displaystyle\sum_{r=0}^{n} a^{2r}\right)u_0}. \end{cases}$$

si $a^2 = 1$

$$\begin{cases} u_{4n-1} &= \dfrac{u_{-1}}{1+b(a+1)nu_{-1}}, \\ u_{4n} &= \dfrac{u_0}{1+b(a+1)nu_0}, \\ u_{4n+1} &= \dfrac{v_{-1}}{a+b((a+1)n+1)v_{-1}}, \\ u_{4n+2} &= \dfrac{v_0}{a+b((a+1)n+1)v_0}. \end{cases} \quad \begin{cases} v_{4n-1} &= \dfrac{v_{-1}}{1+b(a+1)nv_{-1}}, \\ v_{4n} &= \dfrac{v_0}{1+b(a+1)nv_0}, \\ v_{4n+1} &= \dfrac{u_{-1}}{a+b((a+1)n+1)u_{-1}}, \\ v_{4n+2} &= \dfrac{u_0}{a+b((a+1)n+1)u_0}. \end{cases}$$

où $n \in \mathbb{N}_0$.

De (2.3) on a

$$x_n = \frac{u_n}{y_{n-1}}, \tag{2.21}$$

$$y_n = \frac{v_n}{x_{n-1}}. \tag{2.22}$$

En utilisant (2.21) dans (2.22), on obtient

$$x_{4n} = \frac{u_{4n}u_{4n-2}}{v_{4n-1}v_{4n-3}}x_{4n-4}, \tag{2.23}$$

et

$$y_{4n} = \frac{v_{4n}v_{4n-2}}{u_{4n-1}u_{4n-3}}y_{4n-4}. \tag{2.24}$$

pour $n \in \mathbb{N}$

En multipliant les égalités obtenues à partir de (2.23) et (2.24) de 1 à n, respectivement, il s'ensuit que

$$x_{4n} = x_0 \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{u_{4i}u_{4i-2}}{v_{4i-1}v_{4i-3}}\right), \tag{2.25}$$

$$y_{4n} = y_0 \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{v_{4i}v_{4i-2}}{u_{4i-1}u_{4i-3}}\right). \tag{2.26}$$

En utilisant les égalités (2.25) et (2.26) dans (2.21) et (2.22), on obtient

$$\begin{aligned} x_{4n-1} &= \frac{v_{6n}}{y_{6n}}, \\ &= \frac{v_{4n}}{y_0}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{u_{4i-1}u_{4i-3}}{v_{4i}v_{4i-2}}\right), \end{aligned}$$

donc, on a

$$x_{4n-1} = \frac{v_{4n}}{y_0}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{u_{4i-1}u_{4i-3}}{v_{4i}v_{4i-2}}\right). \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} y_{4n-1} &= \frac{u_{4n}}{x_{4n}}, \\ &= \frac{u_{4n}}{x_0}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{v_{4i-1}v_{4i-3}}{u_{4i}u_{4i-2}}\right), \end{aligned}$$

d'où, on obtient

$$y_{4n-1} = \frac{u_{4n}}{x_0}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{v_{4i-1}v_{4i-3}}{u_{4i}u_{4i-2}}\right). \tag{2.28}$$

De même, en utilisant les égalités (2.27) et (2.28) dans (2.21) et (2.22), on obtient

$$\begin{aligned} x_{4n-2} &= \frac{v_{4n-1}}{y_{4n-1}}, \\ &= x_0 \frac{v_{4n-1}}{u_{4n}} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{u_{4i} u_{4i-2}}{v_{4i-1} v_{4i-3}} \right), \end{aligned}$$

donc, on a

$$x_{4n-2} = x_0 \frac{v_{4n-1}}{u_{4n}} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{u_{4i} u_{4i-2}}{v_{4i-1} v_{4i-3}} \right). \tag{2.29}$$

Et

$$\begin{aligned} y_{4n-2} &= \frac{u_{4n-1}}{x_{4n-1}}, \\ &= y_0 \frac{u_{4n-1}}{v_{4n}} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{v_{4i} v_{4i-2}}{u_{4i-1} u_{4i-3}} \right), \end{aligned}$$

d'où

$$y_{4n-2} = y_0 \frac{u_{4n-1}}{v_{4n}} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{v_{4i} v_{4i-2}}{u_{4i-1} u_{4i-3}} \right). \tag{2.30}$$

En utilisant les égalités (2.29) et (2.30) dans (2.21) et (2.22), on a

$$\begin{aligned} x_{4n+1} &= \frac{u_{4n+1}}{y_{4n}} \\ &= \frac{u_{4n+1}}{y_0} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{u_{4i-1} u_{4i-3}}{v_{4i} v_{4i-2}} \right), \end{aligned}$$

donc, on a

$$x_{4n+1} = \frac{u_{4n+1}}{y_0} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{u_{4i-1} u_{4i-3}}{v_{4i} v_{4i-2}} \right). \tag{2.31}$$

Et

$$\begin{aligned} y_{4n+1} &= \frac{v_{4n+1}}{x_{4n}}, \\ &= \frac{v_{4n-1}}{x_0} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{v_{4i-1} v_{4i-3}}{u_{4i} u_{4i-2}} \right), \end{aligned}$$

d'où

$$y_{4n+1} = \frac{v_{4n+1}}{x_0}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{v_{4i-1}v_{4i-3}}{u_{4i}u_{4i-2}}\right). \tag{2.32}$$

En utilisant le Théorème 2.1.3 on obtient

— **si** $a^2 \neq 1$

$$\begin{cases} u_{4n-3} &= \dfrac{v_{-1}}{a^{2n-1} + b\left(a\displaystyle\sum_{r=0}^{n-2} a^{2r} + \sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}\right)v_{-1}}, \\ u_{4n-2} &= \dfrac{v_0}{a^{2n-1} + b\left(a\displaystyle\sum_{r=0}^{n-2} a^{2r} + \sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}\right)v_0}, \\ u_{4n-1} &= \dfrac{u_{-1}}{a^{2n} + b(a+1)\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}u_{-1}}, \\ u_{4n} &= \dfrac{u_0}{a^{2n} + b(a+1)\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}u_0}. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{4n-3} &= \dfrac{u_{-1}}{a^{2n-1} + b\left(a\displaystyle\sum_{r=0}^{n-2} a^{2r} + \sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}\right)u_{-1}}, \\ v_{4n-2} &= \dfrac{u_0}{a^{2n-1} + b\left(a\displaystyle\sum_{r=0}^{n-2} a^{2r} + \sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}\right)u_0}, \\ v_{4n-1} &= \dfrac{v_{-1}}{a^{2n} + b(a+1)\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}v_{-1}}, \\ v_{4n} &= \dfrac{v_0}{a^{2n} + b(a+1)\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}v_0}. \end{cases}$$

— **si** $a^2 = 1$

$$\begin{cases} u_{4n-3} &= \dfrac{v_{-1}}{a + b((a+1)n - a)v_{-1}}, \\ u_{4n-2} &= \dfrac{v_0}{a + b((a+1)n - a)v_0}, \\ u_{4n-1} &= \dfrac{u_{-1}}{1 + b(a+1)nu_{-1}}, \\ u_{4n} &= \dfrac{u_0}{1 + b(a+1)nu_0}. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{4n-3} &= \dfrac{u_{-1}}{a + b((a+1)n - a)u_{-1}}, \\ v_{4n-2} &= \dfrac{u_0}{a + b((a+1)n - a)u_0}, \\ v_{4n-1} &= \dfrac{v_{-1}}{1 + b(a+1)nv_{-1}}, \\ v_{4n} &= \dfrac{v_0}{1 + b(a+1)nv_0}. \end{cases}$$

Sachant que

$$u_{-1} = x_{-1}y_{-2}, \quad u_0 = x_0y_{-1}, \quad v_{-1} = y_{-1}x_{-2}, \quad v_0 = y_0x_{-1}. \tag{2.33}$$

Théorème 2.1.4 *Soit $\{x_n, y_n\}_{n\geq -2}$ une solution bien définie du système (2.2). Alors, pour $n \geq 1$, on a*

— ***si*** $a^2 \neq 1$

$$x_{4n-2} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\left(a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}y_{-1}x_{-2}\right)\left(a^{2n-1}+b\left(a\sum_{r=0}^{n-2}a^{2r}+\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}\right)x_{-1}y_{-2}\right)}{\left(a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}x_0y_{-1}\right)\left(a^{2i-1}+b\left(a\sum_{r=0}^{i-2}a^{2r}+\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}\right)y_0x_{-1}\right)}\right)$$

$$\times \frac{x_0^n y_0^n}{y_{-2}^n x_{-2}^{n-1}}\left(\frac{a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}x_0y_{-1}}{a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}y_{-1}x_{-2}}\right),$$

$$x_{4n-1} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\left(a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}y_0x_{-1}\right)\left(a^{2n-1}+b\left(a\sum_{r=0}^{i-2}a^{2r}+\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}\right)x_0y_{-1}\right)}{\left(a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}x_{-1}y_{-2}\right)\left(a^{2n-1}+b\left(a\sum_{r=0}^{i-2}a^{2r}+\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}\right)y_{-1}x_{-2}\right)}\right)$$

$$\times \frac{x_{-1}y_{-2}^n x_{-2}^n}{x_0^n y_0^n}\left(\frac{1}{a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}y_0x_{-1}}\right),$$

$$x_{4n} = \frac{x_0^{n+1}y_0^n}{y_{-2}^n x_{-2}^n}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\left(a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}y_{-1}x_{-2}\right)\left(a^{2n-1}+b\left(a\sum_{r=0}^{n-2}a^{2r}+\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}\right)x_{-1}y_{-2}\right)}{\left(a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}x_0y_{-1}\right)\left(a^{2i-1}+b\left(a\sum_{r=0}^{i-2}a^{2r}+\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}\right)y_0x_{-1}\right)}\right).$$

$$x_{4n+1} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\left(a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}y_0x_{-1}\right)\left(a^{2n-1}+b\left(a\sum_{r=0}^{i-2}a^{2r}+\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}\right)x_0y_{-1}\right)}{\left(a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}x_{-1}y_{-2}\right)\left(a^{2n-1}+b\left(a\sum_{r=0}^{i-2}a^{2r}+\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}\right)y_{-1}x_{-2}\right)}\right)$$

$$\times \frac{y_{-1}y_{-2}^{n}x_{-2}^{n+1}}{x_0^n y_0^{n+1}}\left(\frac{1}{a^{2n+1}+b\left(a\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}+\sum_{r=0}^{n}a^{2r}\right)y_{-1}x_{-2}}\right),$$

$$y_{4n-2} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\left(a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}y_{-2}x_{-1}\right)\left(a^{2n-1}+b\left(a\sum_{r=0}^{n-2}a^{2r}+\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}\right)x_{-2}y_{-1}\right)}{\left(a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}x_{-1}y_0\right)\left(a^{2i-1}+b\left(a\sum_{r=0}^{i-2}a^{2r}+\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}\right)y_{-1}x_0\right)}\right)$$

$$\times \frac{x_0^n y_0^n}{y_{-2}^{n-1}x_{-2}^{n}}\left(\frac{a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}x_{-1}y_0}{a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}y_{-2}x_{-1}}\right),$$

$$y_{4n-1} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\left(a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}y_{-1}x_0\right)\left(a^{2n-1}+b\left(a\sum_{r=0}^{i-2}a^{2r}+\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}\right)x_{-1}y_0\right)}{\left(a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}x_{-2}y_{-1}\right)\left(a^{2n-1}+b\left(a\sum_{r=0}^{i-2}a^{2r}+\sum_{r=0}^{i-1}a^{2r}\right)y_{-2}x_{-1}\right)}\right)$$

$$\times \frac{y_{-1}y_{-2}^{n}x_{-2}^{n}}{x_0^n y_0^n}\left(\frac{1}{a^{2n}+b(a+1)\sum_{r=0}^{n-1}a^{2r}y_{-1}x_0}\right),$$

$$y_{4n} = \frac{x_0^n y_0^{n+1}}{y_{-2}^n x_{-2}^n} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\left(a^{2n} + b(a+1)\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r} y_{-2}x_{-1}\right)\left(a^{2n-1} + b\left(a\sum_{r=0}^{n-2} a^{2r} + \sum_{r=0}^{n-1} a^{2r}\right) x_{-2}y_{-1}\right)}{\left(a^{2n} + b(a+1)\sum_{r=0}^{i-1} a^{2r} x_{-1}y_0\right)\left(a^{2i-1} + b\left(a\sum_{r=0}^{i-2} a^{2r} + \sum_{r=0}^{i-1} a^{2r}\right) y_{-1}x_0\right)} \right).$$

$$\begin{aligned} y_{4n+1} &= \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\left(a^{2n} + b(a+1)\sum_{r=0}^{i-1} a^{2r} y_{-1}x_0\right)\left(a^{2n-1} + b\left(a\sum_{r=0}^{i-2} a^{2r} + \sum_{r=0}^{i-1} a^{2r}\right) x_{-1}y_0\right)}{\left(a^{2n} + b(a+1)\sum_{r=0}^{i-1} a^{2r} x_{-2}y_{-1}\right)\left(a^{2n-1} + b\left(a\sum_{r=0}^{i-2} a^{2r} + \sum_{r=0}^{i-1} a^{2r}\right) y_{-2}x_{-1}\right)} \right) \\ &\times \frac{x_{-1}y_{-2}^{n+1}x_{-2}^n}{x_0^{n+1}y_0^n} \left(\frac{1}{a^{2n+1} + b\left(a\sum_{r=0}^{n-1} a^{2r} + \sum_{r=0}^{n} a^{2r}\right) y_{-2}x_{-1}} \right). \end{aligned}$$

— ***si*** $a^2 = 1$

$$\begin{aligned} x_{4n-2} &= \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{(1 + b(a+1)iy_{-1}x_{-2})\,(a + b((a+1)i - a)x_{-1}y_{-2})}{(1 + b(a+1)ix_0y_{-1})\,(a + b((a+1)i - a)y_0x_{-1})} \right). \\ &\times \frac{x_0^n y_0^n}{y_{-2}^n x_{-2}^{n-1}} \left(\frac{1 + b(a+1)nx_0y_{-1}}{1 + b(a+1)nx_{-2}y_{-1}} \right), \\ x_{4n-1} &= \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{(1 + b(a+1)iy_0x_{-1})\,(a + b((a+1)i - a)x_0y_{-1})}{(1 + b(a+1)ix_{-1}y_{-2})\,(a + b((a+1)i - a)y_{-1}x_{-2})} \right) \\ &\times \frac{x_{-1}y_{-2}^n x_{-2}^n}{x_0^n y_0^n} \left(\frac{1}{1 + b(a+1)ny_0x_{-1}} \right), \\ x_{4n} &= \frac{x_0^{n+1} y_0^n}{y_{-2}^n x_{-2}^n} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{(1 + b(a+1)iy_{-1}x_{-2})\,(a + b((a+1)i - a)x_{-1}y_{-2})}{(1 + b(a+1)ix_0y_{-1})\,(a + b((a+1)i - a)y_0x_{-1})} \right), \\ x_{4n+1} &= \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{(1 + b(a+1)iy_0x_{-1})\,(a + b((a+1)i - a)x_0y_{-1})}{(1 + b(a+1)ix_{-1}y_{-2})\,(a + b((a+1)i - a)y_{-1}x_{-2})} \right) \\ &\times \frac{y_{-1}}{x_0^n y_0^{n+1}} \left(\frac{y_{-2}^n x_{-2}^{n+1}}{a + b((a+1)n + 1)y_{-1}x_{-2}} \right). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_{4n-2} &= \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1+b(a+1)iy_{-2}x_{-1})\,(a+b((a+1)i-a)x_{-2}y_{-1})}{(1+b(a+1)ix_{-1}y_0)\,(a+b((a+1)i-a)y_{-1}x_0)}\right).\\
&\times \frac{x_0^n y_0^n}{y_{-2}^{n-1}x_{-2}^n}\left(\frac{1+b(a+1)nx_{-1}y_0}{1+b(a+1)ny_{-2}x_{-1}}\right),\\
y_{4n-1} &= \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1+b(a+1)iy_{-1}x_0)\,(a+b((a+1)i-a)x_{-1}y_0)}{(1+b(a+1)ix_{-2}y_{-1})\,(a+b((a+1)i-a)y_{-2}x_{-1})}\right)\\
&\times \frac{y_{-1}y_{-2}^n x_{-2}^n}{x_0^n y_0^n}\left(\frac{1}{1+b(a+1)ny_{-1}x_0}\right),\\
y_{4n} &= \frac{x_0^n y_0^{n+1}}{y_{-2}^n x_{-2}^n}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1+b(a+1)iy_{-2}x_{-1})\,(a+b((a+1)i-a)x_{-2}y_{-1})}{(1+b(a+1)ix_{-1}y_0)\,(a+b((a+1)i-a)y_{-1}x_0)}\right),\\
y_{4n+1} &= \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1+b(a+1)iy_{-1}x_0)\,(a+b((a+1)i-a)x_{-1}y_0)}{(1+b(a+1)ix_{-2}y_{-1})\,(a+b((a+1)i-a)y_{-2}x_{-1})}\right)\\
&\times \frac{x_{-1}}{x_0^{n+1}y_0^n}\left(\frac{y_{-2}^{n+1}x_{-2}^n}{a+b((a+1)n+1)y_{-2}x_{-1}}\right).
\end{aligned}
$$

2.2 Quelques applications

Comme applications, nous montrons comment sont obtenues des formules sous forme fermée pour des solutions aux systèmes (2.1), qui ont été présentées dans [27].

Le premier résultat prouvé dans [27] est le suivant.

Corollaire 2.2.1 *Soit $\{x_n, y_n\}_{n\geq -2}$ la solution bien définie du système suivant*

$$
x_{n+1}=\frac{y_{n-1}x_{n-2}}{y_n(1+y_{n-1}x_{n-2})},\quad y_{n+1}=\frac{x_{n-1}y_{n-2}}{x_n(1+x_{n-1}y_{n-2})},\quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{2.34}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
x_{4n-2} &= \frac{x_0^n y_0^n}{y_{-2}^n x_{-2}^{n-1}}\left(\frac{1+2nx_0y_{-1}}{1+2nx_{-2}y_{-1}}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1+2iy_{-1}x_{-2})\,(1+(2i-1)x_{-1}y_{-2})}{(1+2ix_0y_{-1})\,(1+(2i-a)y_0x_{-1})}\right),\\
x_{4n-1} &= \frac{x_{-1}y_{-2}^n x_{-2}^n}{x_0^n y_0^n}\left(\frac{1}{1+2ny_0x_{-1}}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1+2iy_0x_{-1})\,(1+(2i-a)x_0y_{-1})}{(1+2ix_{-1}y_{-2})\,(1+(2i-1)y_{-1}x_{-2})}\right),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
x_{4n} &= \frac{x_0^{n+1}y_0^n}{y_{-2}^n x_{-2}^n}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1+2iy_{-1}x_{-2})\,(1+(2i-a)x_{-1}y_{-2})}{(1+2ix_0y_{-1})\,(1+(2i-a)y_0x_{-1})}\right),\\
x_{4n+1} &= \frac{y_{-1}}{x_0^n y_0^{n+1}}\left(\frac{y_{-2}^n x_{-2}^{n+1}}{1+(2n+1)y_{-1}x_{-2}}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1+2iy_0x_{-1})\,(1+((2i-1)x_0y_{-1})}{(1+2ix_{-1}y_{-2})\,(1+(2i-1)y_{-1}x_{-2})}\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y_{4n-2} &= \frac{x_0^n y_0^n}{y_{-2}^{n-1}x_{-2}^n}\left(\frac{1+2nx_{-1}y_0}{1+2ny_{-2}x_{-1}}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1+2iy_{-2}x_{-1})\,(1+(2i-1)x_{-2}y_{-1})}{(1+2ix_{-1}y_0)\,(1+(2i-a)y_{-1}x_0)}\right),\\
y_{4n-1} &= \frac{y_{-1}y_{-2}^n x_{-2}^n}{x_0^n y_0^n}\left(\frac{1}{1+2iy_{-1}x_0}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1+2iy_{-1}x_0)\,(1+(2i-1)x_{-1}y_0)}{(1+2ix_{-2}y_{-1})\,(1+(2i-1)y_{-2}x_{-1})}\right),\\
y_{4n} &= \frac{x_0^n y_0^{n+1}}{y_{-2}^n x_{-2}^n}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1+2iy_{-2}x_{-1})\,(1+(2i-a)x_{-2}y_{-1})}{(1+2ix_{-1}y_0)\,(1+(2i-1)y_{-1}x_0)}\right).\\
y_{4n+1} &= \frac{x_{-1}}{x_0^{n+1}y_0^n}\left(\frac{y_{-2}^{n+1}x_{-2}^n}{1+(2n+1)y_{-2}x_{-1}}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1+2iy_{-1}x_0)\,(1+(2i-1)x_{-1}y_0)}{(1+2ix_{-2}y_{-1})\,(1+(2i-1)y_{-2}x_{-1})}\right).
\end{aligned}$$

Preuve. Le système (2.34) est obtenu à partir du système (2.2) avec $a = b = 1$. Donc en utilisant le Théorème 2.1.4, le corollaire 2.2.1 est prouvé. ∎

Le corollaire suivant est le Théorème 2.2 dans [27].

Corollaire 2.2.2 *Soit* $\{x_n, y_n\}_{n\geq -2}$ *la solution bien définie du système suivant*

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}x_{n-2}}{y_n(1-y_{n-1}x_{n-2})},\quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}y_{n-2}}{x_n(1-x_{n-1}y_{n-2})},\quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{2.35}$$

Alors

$$\begin{aligned}
x_{4n-2} &= \frac{x_0^n y_0^n}{y_{-2}^n x_{-2}^{n-1}}\left(\frac{1-2nx_0y_{-1}}{1-2nx_{-2}y_{-1}}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1-2iy_{-1}x_{-2})\,(1-(2i-1)x_{-1}y_{-2})}{(1-2ix_0y_{-1})\,(1-(2i-1)y_0x_{-1})}\right),\\
x_{4n-1} &= \frac{x_{-1}y_{-2}^n x_{-2}^n}{x_0^n y_0^n}\left(\frac{1}{1-2ny_0x_{-1}}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1-2iy_0x_{-1})\,(1-(2i-1)x_0y_{-1})}{(1-2ix_{-1}y_{-2})\,(1-(2i-1)y_{-1}x_{-2})}\right),\\
x_{4n} &= \frac{x_0^{n+1}y_0^n}{y_{-2}^n x_{-2}^n}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1-2iy_{-1}x_{-2})\,(1-(2i-1)x_{-1}y_{-2})}{(1-2ix_0y_{-1})\,(1-(2i-1)y_0x_{-1})}\right),
\end{aligned}$$

$$x_{4n+1} = \frac{y_{-1}}{x_0^n y_0^{n+1}}\left(\frac{y_{-2}^n x_{-2}^{n+1}}{1-(2n+1)y_{-1}x_{-2}}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1-2iy_0x_{-1})\,(1-(2i-1)x_0y_{-1})}{(1-ix_{-1}y_{-2})\,(1-(2i-1)y_{-1}x_{-2})}\right),$$

$$y_{4n-2} = \frac{x_0^n y_0^n}{y_{-2}^{n-1}x_{-2}^n}\left(\frac{1-2nx_{-1}y_0}{1-2ny_{-2}x_{-1}}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1-2iy_{-2}x_{-1})\,(1-(2i-1)x_{-2}y_{-1})}{(1-2ix_{-1}y_0)\,(1-(2i-1)y_{-1}x_0)}\right),$$

$$y_{4n-1} = \frac{y_{-1}y_{-2}^n x_{-2}^n}{x_0^n y_0^n}\left(\frac{1}{1-2ny_{-1}x_0}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1-2iy_{-1}x_0)\,(1-(2i-1)x_{-1}y_0)}{(1-2ix_{-2}y_{-1})\,(1-(2i-1)y_{-2}x_{-1})}\right),$$

$$y_{4n} = \frac{x_0^n y_0^{n+1}}{y_{-2}^n x_{-2}^n}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1-2iy_{-2}x_{-1})\,(1-(2i-1)x_{-2}y_{-1})}{(1-2ix_{-1}y_0)\,(1-(2i-1)y_{-1}x_0)}\right),$$

$$y_{4n+1} = \frac{x_{-1}}{x_0^{n+1}y_0^n}\left(\frac{y_{-2}^{n+1}x_{-2}^n}{1-(2n+1)y_{-2}x_{-1}}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1-2iy_{-1}x_0)\,(1-(2i-1)x_{-1}y_0)}{(1-2ix_{-2}y_{-1})\,(1-(2i-1)y_{-2}x_{-1})}\right).$$

Preuve.

Le système (2.35) est obtenu à partir du système (2.2) avec $a = 1$ et $b = -1$. Donc en utilisant le Théorème 2.1.4, le corollaire 2.2.2 est prouvé.

■

Le corollaire suivant est le Théorème 5.3 dans [27].

Corollaire 2.2.3 *Soit $\{x_n, y_n\}_{n\geq -2}$ une solution bien définie du système suivant*

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}x_{n-2}}{y_n(-1-y_{n-1}x_{n-2})}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}y_{n-2}}{x_n(-1-x_{n-1}y_{n-2})}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.36}$$

Alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{4n-2} & = & \dfrac{x_0^n y_0^n\,(-1-x_{-1}y_{-2})^n}{y_{-2}^n x_{-2}^{n-1}\,(-1-y_0x_{-1})^n}, \\ x_{4n-1} & = & \dfrac{x_{-1}y_{-2}^n x_{-2}^n\,(-1-x_0y_{-1})^n}{x_0^n y_0^n\,(-1-y_{-1}x_{-2})^n}, \\ x_{4n} & = & \dfrac{x_0^{n+1}y_0^n\,(-1-x_{-1}y_{-2})^n}{y_{-2}^n x_{-2}^n\,(-1-y_0x_{-1})^n}, \\ x_{4n+1} & = & \dfrac{y_{-1}y_{-2}^n x_{-2}^{n+1}\,(-1-x_0y_{-1})^n}{x_0^n y_0^{n+1}(-1-y_{-1}x_{-2})^{n+1}}. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} y_{4n-2} & = & \dfrac{y_0^n x_0^n\,(-1-y_{-1}x_{-2})^n}{x_{-2}^n y_{-2}^{n-1}\,(-1-x_0y_{-1})^n}, \\ y_{4n-1} & = & \dfrac{y_{-1}x_{-2}^n y_{-2}^n\,(-1-y_0y_{-1})^n}{y_0^n x_0^n\,(-1-x_{-1}y_{-2})^n}, \\ y_{4n} & = & \dfrac{y_0^{n+1}x_0^n\,(-1-y_{-1}x_{-2})^n}{x_{-2}^n y_{-2}^n\,(-1-x_0y_{-1})^n}, \\ y_{4n+1} & = & \dfrac{x_{-1}x_{-2}^n y_{-2}^{n+1}\,(-1-y_0x_{-1})^n}{y_0^n x_0^{n+1}(-1-x_{-1}y_{-2})^{n+1}}. \end{array}\right.$$

Preuve. Le système (2.36) est obtenu à partir du système 2.2 avec $a = b = -1$, donc en utilisant le Théorème 2.1.4, le corollaire 2.2.3 est prouvé. ■

2.3 Simulations numériques

Dans cette section, nous considérerons quelques simulations numériques pour vérifier nos résultats théoriques. Ces exemples montrent différents types de comportement des solutions du système (2.2). Tous les graphes de cette section sont dessinés par Matlab.

Exemple 2.3.1 *Considérons le système* (2.2) *avec* $a = 2$ *et* $b = 1$*. Le comportement de la solution de ce système de valeurs initiales* $x_{-2} = 2, x_{-1} = 0.3, x_0 = 1.8, y_{-2} = 3, y_{-1} = 3.1$ *et* $y_0 = 4.3$ *est représenté dans la figure* 2.1 *ci-dessous.*

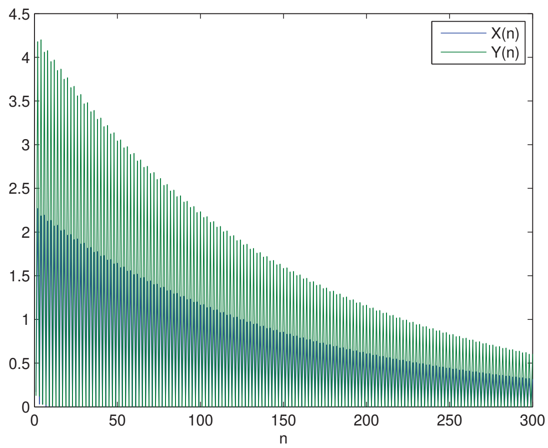

FIGURE 2.1 – Le graphique du système (2.2) avec $a = 2$ et $b = 1$

Exemple 2.3.2 *Considérons le système* (2.2) *avec* $a = 1$ *et* $b = -4$*. Le comportement de la solution de ce système de valeurs initiales* $x_{-2} = -1.2, x_{-1} = 1.3, x_0 = 5, y_{-2} = 0.5, y_{-1} = -4.2$ *et* $y_0 = 0.8$ *est représenté dans la figure* 2.2 *ci-dessous.*

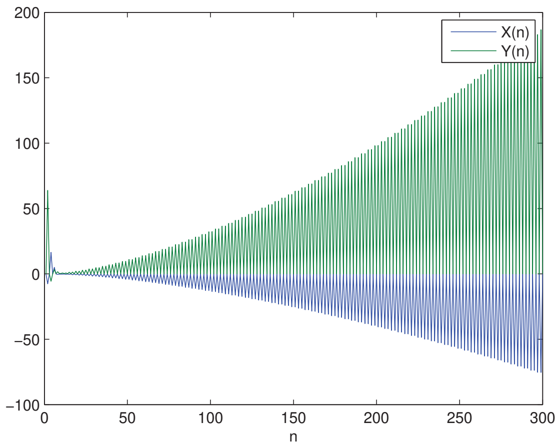

FIGURE 2.2 – Le graphique du système (2.2) avec $a = 1$ et $b = -4$

Exemple 2.3.3 *Considérons le système* (2.2) *avec* $a = -0.2$ *et* $b = 3$. *Le comportement de la solution de ce système de valeurs initiales* $x_{-2} = 1.5, x_{-1} = 1.8, x_0 = -1.7, y_{-2} = 1.8, y_{-1} = 0.9$ *et* $y_0 = 0.5$ *représenté dans la figure* 2.3 *ci-dessous.*

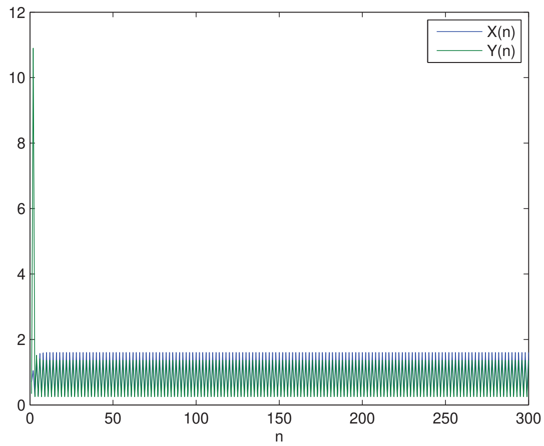

FIGURE 2.3 – Le graphique du système (2.2) avec $a = -0.2$ et $b = 3$

Exemple 2.3.4 *Considérons le système* (2.2) *avec* $a = -2.4$ *et* $b = -0.4$. *Le comportement de la solution de ce système de valeurs initiales* $x_{-2} = 1.2, x_{-1} = 2.3, x_0 = 1.8, y_{-2} = 3.3, y_{-1} = 2.1$ *et* $y_0 = 0.3$ *est représenté dans la figure* 2.4 *ci-dessous.*

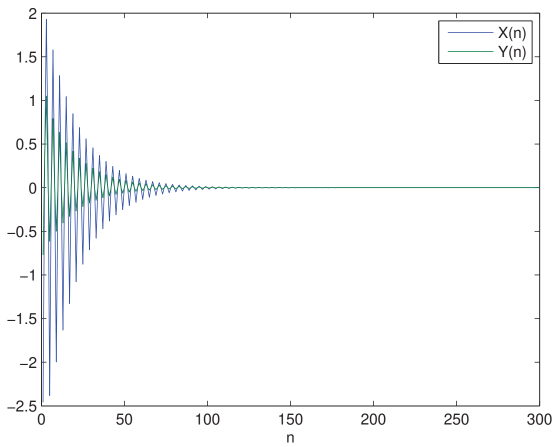

FIGURE 2.4 – Le graphique du système (2.2) avec $a = -2.4$ et $b = -0.4$

Chapitre 3

La solution de deux systèmes avec des coefficients en termes des nombres de Fibonacci et de Lucas

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous donnons des formules de représentation pour la solution générale de deux systèmes d'équations aux différences rationnelles d'ordre supérieur avec des coefficients en termes des nombres de Fibonacci et de Lucas. Nous présentons également quelques explications théoriques liées à la représentation de ces deux systèmes. En plus nous étudions la stabilité asymptotique globale des solutions positives. Nos résultats généralisent certains résultats récents dans la littérature.

L'une des équations aux différences non linéaires de base pouvant être résolues sous forme fermée est

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta}{\gamma x_n + \delta}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.1}$$

où $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, $\delta \neq 0$. C'est ce qu'on appelle l'équation aux différence de Riccati.

Dans [37] Halim et Rabago ont considéré le système d'équations aux différences suivant

$$x_{n+1} = \frac{1}{\pm 1 \pm y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{\pm 1 \pm x_{n-k}}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

et ils ont obtenu la forme des solutions en termes de valeurs initiales x_{-k}, $x_{-k+1}, \ldots, x_0$, y_{-k}, $y_{-k+1}, \ldots, y_0$ et de la suite de Fibonacci. De plus, Stevic [58] a représenté la solution générale du système d'équations aux différences suivant

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_n}{\gamma + \delta y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{\gamma + \delta x_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

en termes de valeurs initiales x_0, y_0 et de la suite de Fibonacci généralisée.

Dans [59] Stevic a donné les solutions de la généralisation tridimensionnelle de l'équation (3.1)

$$x_{n+1} = \frac{a y_n + b}{c y_n + d}, \quad y_{n+1} = \frac{e z_n + f}{g z_n + h}, \quad z_{n+1} = \frac{p x_n + q}{r x_n + s}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.4}$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s, x_0, y_0, z_0$ sont des nombres réels ou complexes.

Dans ce chapitre, nous représentons les solutions bien définies des deux systèmes l'un de p équations et le deuxième de $2p+1$ équations aux différences rationnelles d'ordre supérieur suivants

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1} x_{n-k}^{(2)}}{F_{m+3} + F_{m+2} x_{n-k}^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1} x_{n-k}^{(3)}}{F_{m+3} + F_{m+2} x_{n-k}^{(3)}}, \ldots, \quad x_{n+1}^{(p)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1} x_{n-k}^{(1)}}{F_{m+3} + F_{m+2} x_{n-k}^{(1)}},$$

où $n, m, k, p \in \mathbb{N}_0$.

$$y_{n+1}^{(1)} = \frac{L_1 + L_0 y_{n-k}^{(2)}}{L_2 + L_1 y_{n-k}^{(2)}}, \quad y_{n+1}^{(2)} = \frac{L_1 + L_0 y_{n-k}^{(3)}}{L_2 + L_1 y_{n-k}^{(3)}}, \ldots, \quad y_{n+1}^{(2p+1)} = \frac{L_1 + L_0 y_{n-k}^{(1)}}{L_2 + L_1 y_{n-k}^{(1)}},$$

où $n, k, p \in \mathbb{N}_0$.

3.2 Système avec des coefficients en nombres de Fibonacci

Dans cette section nous donnons la forme générale de la solution du système de p équations aux différences d'ordre supérieur suivant

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{n-k}^{(2)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{n-k}^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{n-k}^{(3)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{n-k}^{(3)}}, \ldots, \quad x_{n+1}^{(p)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{n-k}^{(1)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{n-k}^{(1)}}, \tag{3.5}$$

où $n, m, k, p \in \mathbb{N}_0$, les valeurs initiales $x_{-k}^{(1)}, x_{-k+1}^{(1)}, \ldots x_0^{(1)}, x_{-k}^{(2)}, x_{-k+1}^{(2)}, \ldots x_0^{(2)}, \ldots, x_{-k}^{(p)}, x_{-k+1}^{(p)}, \ldots, x_1^{(p)}$ et $x_0^{(p)} \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{F_{m+3}}{F_{m+2}}, \quad m \in \mathbb{N}_0\right\}$.

3.2.1 Représentation générale des solutions du système du premier ordre

Pour trouver la forme générale de la solution du système (3.5), nous considérons le système de p équations aux différences d'ordre un suivant

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{n}^{(2)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{n}^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{n}^{(3)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{n}^{(3)}}, \cdots, \quad x_{n+1}^{(p)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{n}^{(1)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{n}^{(1)}}, \tag{3.6}$$

où $n, m, p \in \mathbb{N}_0$, les valeurs initiales $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(p)} \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{F_{m+3}}{F_{m+2}}, \quad m \in \mathbb{N}_0\right\}$.

On remplace $x_{n+1}^{(p)}$ dans l'équation $x_{n+1}^{(p-1)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_n^{(p)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_n^{(p)}}$, on obtient

$$x_{n+1}^{(p-1)} = \frac{F_{2m+4} + F_{2m+3}x_{n-1}^{(1)}}{F_{2m+5} + F_{2m+4}x_{n-1}^{(1)}} \quad n \geq 1.$$

De même, on remplace $x_{n+1}^{(p-1)}$ dans l'équation

$$x_{n+1}^{(p-2)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_n^{(p-1)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_n^{(p-1)}},$$

on obtient

$$x_{n+1}^{(p-2)} = \frac{F_{3m+6} + F_{3m+5}x_{n-2}^{(1)}}{F_{3m+7} + F_{3m+6}x_{n-2}^{(1)}} \quad n \geq 2.$$

Par induction et en utilisant le Lemme 1.2.1, on obtient

$$x_{n+1}^{(2)} = \frac{F_{(p-1)(m+2)} + F_{(p-1)(m+2)-1}x_{n-(p-2)}^{(1)}}{F_{(p-1)(m+2)+1} + F_{(p-1)(m+2)}x_{n-(p-2)}^{(1)}}, \qquad n \geq p-2.$$

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{F_{p(m+2)} + F_{p(m+2)-1}x_{n-(p-1)}^{(1)}}{F_{p(m+2)+1} + F_{p(m+2)}x_{n-(p-1)}^{(1)}}, \qquad n \geq p-1.$$

Donc, le système (3.6) se ramène à l'équation suivante

$$x_{n+1} = \frac{F_{p(m+2)} + F_{p(m+2)-1}x_{n-(p-1)}}{F_{p(m+2)+1} + F_{p(m+2)}x_{n-(p-1)}} \quad n \geq p-1. \tag{3.7}$$

Soit

$$^{(j)}x_n = x_{pn+j}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.8}$$

où $j \in \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$.

En utilisant la notation (3.8), nous pouvons écrire (3.7) comme

$$^{(j)}x_{n+1} = \frac{F_{p(m+2)} + F_{p(m+2)-1}{}^{(j)}x_n}{F_{p(m+2)+1} + F_{p(m+2)}{}^{(j)}x_n}, \quad n, p \in \mathbb{N} \tag{3.9}$$

pour chaque $j \in \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$.

Considérons maintenant l'équation

$$y_{n+1} = \frac{F_{p(m+2)} + F_{p(m+2)-1}y_n}{F_{p(m+2)+1} + F_{p(m+2)}y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.10}$$

En utilisant le changement de variables

$$y_n = \frac{1}{F_{p(m+2)}}\left(w_n - F_{p(m+2)+1}\right), \tag{3.11}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_{p(m+2)}}\left(w_{n+1}-F_{p(m+2)+1}\right) &= \frac{F_{p(m+2)}+\frac{F_{p(m+2)-1}}{F_{p(m+2)}}\left(w_n-F_{p(m+2)+1}\right)}{w_n},\\
w_{n+1} &= \frac{F^2_{p(m+2)}+F_{p(m+2)-1}\left(w_n-F_{p(m+2)+1}\right)}{w_n}+F_{p(m+2)+1},\\
&= \frac{w_n\left(F_{p(m+2)-1}+F_{p(m+2)+1}\right)+\left(F^2_{p(m+2)}-F_{p(m+2)-1}F_{p(m+2)+1}\right)}{w_n}.
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant le Lemme 1.2.2, nous pouvons écrire (3.10) comme

$$w_{n+1}=\frac{L_{p(m+2)}w_n-(-1)^{p(m+2)}}{w_n},\quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{3.12}$$

Dans le résultat suivant, nous résolvons sous une forme fermée l'équation (3.13) en termes des suites $\{F_n\}_{n\geq 0}$ et $\{L_n\}_{n\geq 0}$. La formule obtenue sera très utile pour obtenir la formule des solutions du système (3.6).

Lemme 3.2.1
Considérons l'équation aux différences linéaire

$$z_{n+1}-L_r z_n+(-1)^r z_{n-1}=0,\quad n\in\mathbb{N}_0,\quad r\in p(\mathbb{N}+2) \tag{3.13}$$

de valeurs initiales z_{-1} et $z_0\in\mathbb{R}$. Alors toutes les solutions de l' équation (3.13) écrits sous la forme

$$z_n=\frac{1}{(-1)^r F_r}\left(z_0(-1)^r F_{r(n+1)}-z_{-1}F_{rn}\right), \tag{3.14}$$

où $r=p(m+2)$.

Preuve.
Comme on le sait, l'équation

$$z_{n+1}-L_r z_n+(-1)^r z_{n-1}=0,\quad n\in\mathbb{N}_0,\quad r\in p(\mathbb{N}+2)$$

est une équation aux différences linéaire homogène à coefficients constants de second ordre, où z_{-1} et $z_0 \in \mathbb{R}$, est généralement résolu en utilisant les racines caractéristiques λ_1 et λ_2 du polynôme caractéristique $\lambda^2 - L_r\lambda + (-1)^r$. Donc

$$\lambda_1 = \frac{L_r + \sqrt{5}F_r}{2} = \alpha^r, \quad \lambda_2 = \frac{L_r - \sqrt{5}F_r}{2} = \beta^r$$

et la formule générale de la solution est

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n. \tag{3.15}$$

Pour trouver c_1 et c_2, on utilise les conditions initiales z_{-1} et z_0, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha^r}c_1 & + & \frac{1}{\beta^r}c_2 & = & z_{-1}, \\ c_1 & + & c_2 & = & z_0. \end{cases}$$

On va écrire le système sous la forme matricielle $\left(\frac{1}{\alpha^r} = (-\beta)^r, \frac{1}{\beta^r} = (-\alpha)^r\right)$,

$$\begin{pmatrix} (-\beta)^r & (-\alpha)^r \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{-1} \\ z_0 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

En utilisant la méthode de Cramer pour résoudre le système (3.16) on obtient,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} z_{-1} & (-\alpha)^r \\ z_0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-\beta)^r & (-\alpha)^r \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z_{-1} - z_0(-\alpha)^r}{(-1)^r(\beta^r - \alpha^r)},$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} (-\beta)^r & z_{-1} \\ 1 & z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-\beta)^r & (-\alpha)^r \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z_0(-\beta)^r - z_{-1}}{(-1)^r(\beta^r - \alpha^r)}.$$

On remplace c_1 , c_2 dans (3.15) on obtient

$$\begin{aligned} z_n &= \left(-\frac{1}{(-1)^r(\beta^r - \alpha^r)}\right)((z_{-1} - z_0(-\alpha)^r)\alpha^{rn} + (z_0(-\beta)^r - z_{-1})\beta^{rn}), \\ &= \left(-\frac{1}{(-1)^r(\alpha^r - \beta^r)}\right)\left(z_0(-1)^r(\alpha^{r(n+1)} - \beta^{r(n+1)}) + z_{-1}(\alpha^{rn} - \beta^{rn})\right). \end{aligned}$$

Alors la solution général de l'équation (3.13) est

$$z_n = \frac{1}{(-1)^r F_r}\left(z_0(-1)^r F_{r(n+1)} - z_{-1} F_{rn}\right).$$

Le lemme est prouvé. ■

Pour trouver la forme des solutions de l'équation (3.12) , on considère le changement de variable suivant

$$w_n = \frac{z_n}{z_{n-1}}, \tag{3.17}$$

ce qui réduit l'équation (3.12) à la suivante

$$z_{n+1} = L_{p(m+2)} z_n - (-1)^{p(m+2)} z_{n-1}. \tag{3.18}$$

La solution de l'équation (3.18), d'après le Lemme 3.3.1, est

$$z_n = \frac{1}{(-1)^r F_r}\left(z_0(-1)^r F_{r(n+1)} - z_{-1} F_{rn}\right), \quad r = p(m+2). \tag{3.19}$$

De (3.17) et (3.18), on obtient que la solution générale de l'équation (3.12) est

$$w_n = \frac{F_{rn} - (-1)^r F_{r(n+1)} w_0}{F_{r(n-1)} - (-1)^r F_{rn} w_0}, \quad r = p(m+2), \quad n \geq 1. \tag{3.20}$$

De tout ce qui précède, le théorème suivant est vrai.

Théorème 3.2.1 *Soit $\{y_n\}_{n\geq 0}$ une solution bien définie de l'équation* (3.10)*. Alors, pour* $n = 2, 3, \ldots,$

$$y_n = \frac{F_{rn} + F_{rn-1}y_0}{F_{rn+1} + F_{rn}y_0}, \quad n \geq 1, \quad r = p(m+2). \tag{3.21}$$

Preuve.

Selon le changement de variable (3.11), et en utilisant les égalités (1.19),(1.21) et (1.22) et comme $w_0 = F_{r+1} + F_r y_0$, on a

$$\begin{aligned}
y_n = \frac{1}{F_r}(w_n - F_{r+1}) &= \frac{1}{F_r}\left(\frac{F_{rn} - (-1)^r F_{r(n+1)}w_0}{F_{r(n-1)} - (-1)^r F_{rn}w_0} - F_{r+1}\right) \\
&= \frac{1}{F_r}\left(\frac{(F_{rn} - (-1)^r F_{r(n+1)}F_{r+1}) + (-1)^{r+1}F_r F_{rn+1}y_0}{(F_{r(n-1)} - (-1)^r F_{r+1}F_{rn}) + (-1)^{r+1}F_r F_{rn}y_0} - F_{r+1}\right) \\
&= \frac{1}{F_r}\left(\frac{(F_{r(n+1)+1} + F_{r(n+1)}y_0}{F_{rn+1} + F_{rn}y_0} - F_{r+1}\right) \\
&= \frac{1}{F_r}\left(\frac{(F_{r(n+1)+1} - F_{r+1}F_{rn+1}) + (F_{r(n+1)} - F_{r+1}F_{rn})y_0}{F_{rn+1} + F_{rn}y_0}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$y_n = \frac{F_{rn} + F_{rn-1}y_0}{F_{rn+1} + F_{rn}y_0}, \quad r = p(m+2).$$

■

D'après le Théorème 3.2.1, la solution de l'équation (3.9) donnée par

$$^{(j)}x_n = \frac{F_{rn} + F_{rn-1}{}^{(j)}x_0}{F_{rn+1} + F_{rn}{}^{(j)}x_0}, \quad r = p(m+2), \quad n \geq p-1, \quad j \in \{0, 1, \cdots, (p-1)\}. \tag{3.22}$$

En utilisant (3.8), le corollaire suivant est obtenu à partir du Théorème 3.2.1.

Corollaire 3.2.1 *Soit $\{x_n\}_{n\geq 0}$ une solution bien définie de l'équation* (3.7)*. Alors*

$$x_{pn+j} = \frac{F_{pn(m+2)} + F_{pn(m+2)-1}x_j}{F_{pn(m+2)+1} + F_{pn(m+2)}x_j}, \quad n \geq p-1, p, m \in \mathbb{N}. \tag{3.23}$$

où $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Corollaire 3.2.2 *Soit* $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right\}_{n \geq -1}$ *une solution bien définie du système* (3.6)*. Alors, pour* $n = 2, 3, \ldots$, *on a*

$$x_{pn+j}^{(q)} = \frac{F_{pn(m+2)+j(m+2)} + F_{pn(m+2)+j(m+2)-1} x_0^s}{F_{pn(m+2)+j(m+2)+1} + F_{pn(m+2)+j(m+2)} x_0^s}, \quad n \geq 1, \tag{3.24}$$

où $j \in \{0, 2, \ldots, p-1\}$, $q \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $s = (q + j) mod(p)$.

Preuve. Soit $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(2p+1)}\right\}_{n \geq -1}$ une solution de (3.6), donc $\{x_n^{(1)}\}_{n \geq 0}$ est une solution de l'équation (3.7). Alors,

$$x_{pn+j}^{(1)} = \frac{F_{pn(m+2)} + F_{pn(m+2)-1} x_j^{(1)}}{F_{pn(m+2)+1} + F_{pn(m+2)} x_j^{(1)}}, \quad n \geq p-1, p, m \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

où $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

On a

$$x_j^{(1)} = \frac{F_{j(m+2)} + F_{j(m+2)-1} x_0^{(1+j)}}{F_{j(m+2)+1} + F_{j(m+2)} x_0^{(1+j)}}. \tag{3.26}$$

En utilisant (1.20) et (3.26), on obtient

$$x_{pn+j}^{(1)} = \frac{F_{p(m+2)+j(m+2)} + F_{pn(m+2)+j(m+2)-1} x_0^{(1+j)}}{F_{pn(m+2)+j(m+2)+1} + F_{pn(m+2)+j(m+2)} x_0^{(1+j)}}.$$

D'autre part, on a

$$x_n^{(p)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1} x_{n-1}^{(1)}}{F_{m+3} + F_{m+2} x_{n-1}^{(1)}}, \quad x_n^{(i)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1} x_{n-1}^{(i+1)}}{F_{m+3} + F_{m+2} x_{n-1}^{(i+1)}}, \quad i \in \{1, \cdots, (p-1)\}.$$

D'où,

$$x_{pn+j}^{(q)} = \frac{F_{pn(m+2)+j(m+2)} + F_{pn(m+2)+j(m+2)-1} x_0^s}{F_{pn(m+2)+j(m+2)+1} + F_{pn(m+2)+j(m+2)} x_0^s}, \quad n \geq 1, j \in \{0, 1, \ldots, (p-1)\},$$

où $q \in \{1, \ldots, p\}, s = (q + j) mod(p)$.

■

3.2.2 Représentation de la solution du système d'ordre supérieur

Dans cette partie, nous discutons, de manière gracieuse, la forme de solution du système (3.5) qui généralise (3.6). Nous établissons la solution du système (3.5) en utilisant une transformation appropriée réduisant ce système au système d'équations aux différences de premier ordre (3.6).

Analyse du système d'ordre supérieur

Les valeurs initiales avec les indices les plus petits sont $x_{-k}^{(1)}, x_{-k}^{(2)}, \dots, x_{-k}^{(p-1)}$ et $x_{-k}^{(p)}$. En utilisant (3.5) avec $n = 0$, on obtient les valeurs $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(p-1)}$ et $x_1^{(p)}$ comme suit

$$x_1^{(1)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{-k}^{(2)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{-k}^{(2)}}, \quad x_1^{(2)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{-k}^{(3)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{-k}^{(3)}}, \dots, x_1^{(p)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{-k}^{(1)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{-k}^{(1)}}.$$

Après avoir connu les valeurs de $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(p-1)}$ et $x_1^{(p)}$. En utilisant (3.5) avec $n = k+1$ on obtient les valeurs de $x_{k+2}^{(1)}, x_{k+2}^{(2)}, \dots, x_{k+2}^{(p-1)}$ et $x_{k+2}^{(p)}$. On a

$$x_{k+2}^{(1)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_1^{(2)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_1^{(2)}}, \quad x_{k+2}^{(2)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_1^{(3)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_1^{(3)}}, \cdots, x_{k+2}^{(p)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_1^{(1)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_1^{(1)}}.$$

Les valeurs de $x_{k+2}^{(1)}, x_{k+2}^{(2)}, \dots, x_{k+2}^{(p-1)}$ et $x_{k+2}^{(p)}$, en utilisant (3.5) avec $n = 2k + 2$, nous conduisent à obtenir les valeurs de $x_{2k+3}^{(1)}, x_{2k+3}^{(2)}, \dots, x_{2k+3}^{(p-1)}$ et $x_{2k+3}^{(p)}$. On a

$$x_{2k+3}^{(1)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{k+2}^{(2)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{k+2}^{(2)}}, x_{2k+3}^{(2)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{k+2}^{(3)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{k+2}^{(3)}}, \cdots, x_{2k+3}^{(p)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{k+2}^{(1)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{k+2}^{(1)}}.$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_{(k+1)n+1}^{(1)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{(k+1)n-k}^{(2)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{(k+1)n-k}^{(2)}}, x_{(k+1)n+1}^{(2)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{(k+1)n-k}^{(3)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{(k+1)n-k}^{(3)}}, \dots, x_{(k+1)n+1}^{(p)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1}x_{(k+1)n-k}^{(1)}}{F_{m+3} + F_{m+2}x_{(k+1)n-k}^{(1)}}.$$

De la même manière, on montre que les valeurs initiales $x_{-r}^{(1)}, x_{-r}^{(2)}, \ldots, x_{-r}^{(p-1)}$ et $x_{-r}^{(p)}$, Pour $r \in \{0, 1, \ldots, k\}$ fixé, déterminent toutes les valeurs des $(x_{(k+1)(m+1)-r}^{(1)})_m, (x_{(k+1)(m+1)-r}^{(2)})_m, \ldots, (x_{(k+1)(m+1)-r}^{(p-1)})_m$ et $(x_{(k+1)(m+1)-r}^{(p)})_m$. Aussi on a

$$\begin{cases} x_{(k+1)(n+1)-t}^{(1)} &= \dfrac{F_{m+2} + F_{m+1} x_{(k+1)n-t}^{(2)}}{F_{m+3} + F_{m+2} x_{(k+1)n-t}^{(2)}}, \\ x_{(k+1)(n+1)-t}^{(2)} &= \dfrac{F_{m+2} + F_{m+1} x_{(k+1)n-t}^{(3)}}{F_{m+3} + F_{m+2} x_{(k+1)n-t}^{(3)}}, \\ &\vdots \\ x_{(k+1)(n+1)-t}^{(p)} &= \dfrac{F_{m+2} + F_{m+1} x_{(k+1)n-t}^{(1)}}{F_{m+3} + F_{m+2} x_{(k+1)n-t}^{(1)}}. \end{cases} \tag{3.27}$$

où $t \in \{0, 1, \ldots, k\}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Nous allons maintenant appliquer l'analyse précédente. Soit

$$^{(t)}x_n^{(q)} = x_{(k+1)n-t} \tag{3.28}$$

où $t \in \{0, 1, \ldots, k\}$ et $q \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

En utilisant (3.28), en peut écrire (3.27) comme

$$\begin{cases} ^{(t)}x_{n+1}^{(1)} &= \dfrac{F_{m+2} + F_{m+1}\, ^{(t)}x_n^{(2)}}{F_{m+3} + F_{m+2}\, ^{(t)}x^{(2)}n}, \\ ^{(t)}x_{n+1}^{(2)} &= \dfrac{F_{m+2} + F_{m+1}\, ^{(t)}x_n^{(3)}}{F_{m+3} + F_{m+2}\, ^{(t)}x_n^{(3)}}, \\ &\vdots \\ ^{(t)}x_{n+1}^{(p)} &= \dfrac{F_{m+2} + F_{m+1}\, ^{(t)}x_n^{(1)}}{F_{m+3} + F_{m+2}\, ^{(t)}x_n^{(1)}}, \end{cases} \tag{3.29}$$

pour chaque $t \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Cela signifie que les suites $\left(^{(t)}x_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \left(^{(t)}x_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \ldots, \left(^{(t)}x_n^{(p-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ et $\left(^{(t)}x_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $t = \overline{0, k}$, sont $p(k+1)$ solutions du système (3.6) avec les valeurs initiales $^{(t)}x_0^{(1)}, {}^{(t)}x_0^{(2)}, \ldots, {}^{(t)}x_0^{(p-1)}$ et $^{(t)}x_0^{(p)}$, $t = \overline{0, k}$, respectivement.

En utilisant le Corollaire 3.2.2 aux suites $\left({}^{(t)}x_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \left({}^{(t)}x_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \ldots, \left({}^{(t)}x_n^{(p-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ et $\left({}^{(t)}x_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $t = \overline{0,k}$, nous avons

$$ {}^{(t)}x_{pn+j}^{(q)} = \frac{F_{p(n+1)(m+2)+j(m+2)} + F_{p(n+1)(m+2)+j(m+2)-1}\,{}^{(t)}x_0^s}{F_{p(n+1)(m+2)+j(m+2)+1} + F_{p(n+1)(m+2)+j(m+2)}\,{}^{(t)}x_0^s}, \quad n \geq 1, \quad q \in \{1,\ldots,p\}, \tag{3.30}$$

pour chaque $j \in \{0,1,\ldots,(p-1)\}$, où $s = (p+q-j)mod(p)$, $t \in \{0,1,\ldots,k\}, q \in \{1,2,\ldots,p\}$.

Revenant à la notation originale, de (3.28) et (3.30), il s'ensuit que le résultat suivant est vrai.

Corollaire 3.2.3
Soit $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right\}_{n\geq -1}$ *une solution bien définie du système* (3.5)*. Alors, pour* $n = 2,3,\ldots,$

$$ x_{(k+1)(pn+j)-t}^{(q)} = \frac{F_{pn(m+2)+j(m+2)} + F_{pn(m+2)+j(m+2)-1}x_{-t}^s}{F_{pn(m+2)+j(m+2)+1} + F_{pn(m+2)+j(m+2)}x_{-t}^s}, \tag{3.31}$$

ou $q \in \{1,\ldots\ldots,p\}$, $j \in \{0,1,\ldots,(p-1)\}$, $t \in \{0,1,\ldots,k\}$ *et* $s = (q+j)mod(p)$.

3.2.3 Stabilité globale des solutions positives

Dans cette partie nous étudions la stabilité globale des solutions du système (3.5).

Tout d'abord, on peut facilement voir que le système (3.5) a un seul point d'équilibre positif réel donné par

$$ E = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) = (-\beta, -\beta, \ldots, -\beta)\,, $$

où β est le nombre défini dans (1.13).

Maintenant qu'on a mentionné l'existence d'un point d'équilibre pour le Système (3.5), allons y analyser la stabilité asymptotique de ce dernier en suivant la méthode de linéarisation.

Théorème 3.2.2 *Le point d'équilibre du système* (3.5) *est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. Le Système (3.5) est équivalent au système

$$\begin{cases}
x^{(1)}_{n+1} & = & f^{(1)}\left(x^{(1)}_n, x^{(1)}_{n-1}, \ldots, x^{(1)}_{n-k}, x^{(2)}_n, x^{(2)}_{n-1}, \ldots, x^{(2)}_{n-k}, \ldots\ldots, x^{(p)}_n, x^{(p)}_{n-1}, \ldots, x^{(p)}_{n-k}\right) \\
x^{(1)}_n & = & x^{(1)}_n \\
 & \vdots & \\
x^{(1)}_{n-k+1} & = & x^{(1)}_{n-k+1} \\
x^{(2)}_{n+1} & = & f^{(2)}\left(x^{(1)}_n, x^{(1)}_{n-1}, \ldots, x^{(1)}_{n-k}, x^{(2)}_n, x^{(2)}_{n-1}, \ldots, x^{(2)}_{n-k}, \ldots\ldots, x^{(p)}_n, x^{(p)}_{n-1}, \ldots, x^{(p)}_{n-k}\right) \\
x^{(2)}_n & = & x^{(2)}_n \\
 & \vdots & \\
x^{(2)}_{n-k+1} & = & x^{(2)}_{n-k+1} \\
 & \vdots & \\
x^{(p)}_{n+1} & = & f^{(p)}\left(x^{(1)}_n, x^{(1)}_{n-1}, \ldots, x^{(1)}_{n-k}, x^{(2)}_n, x^{(2)}_{n-1}, \ldots, x^{(2)}_{n-k}, \ldots\ldots, x^{(p)}_n, x^{(p)}_{n-1}, \ldots, x^{(p)}_{n-k}\right) \\
x^{(p)}_n & = & x^{(p)}_n \\
 & \vdots & \\
x^{(p)}_{n-k+1} & = & x^{(p)}_{n-k+1}
\end{cases}$$

où

$$f^{(i)} : I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1} \longrightarrow I_i, \tag{3.32}$$

est définie par

$$f^{(i)}\left(u^{(1)}_0, u^{(1)}_1, \ldots, u^{(1)}_k, u^{(2)}_0, u^{(2)}_1, \ldots, u^{(2)}_k, \ldots, u^{(p)}_0, u^{(p)}_1, \ldots, u^{(p)}_k\right) = \frac{F_{m+2} + F_{m+1} u_k^{(i+1)mod(p)}}{F_{m+3} + F_{m+2} u_k^{(i+1)mod(p)}},$$

avec $I_i = (0, +\infty)$ et $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Ce dernier système est de la même forme que (1.5) avec

$$X_n = \left(x^{(1)}_n, x^{(1)}_{n-1}, \ldots, x^{(1)}_{n-k}, x^{(2)}_n, x^{(2)}_{n-1}, \ldots, x^{(2)}_{n-k}, \ldots, x^{(p)}_n, x^{(p)}_{n-1}, \ldots, x^{(p)}_{n-k}\right)^t$$

, où v^t désigne la transposé de v, et F est la fonction définie dans (1.4) où $f^{(i)}$ sont données par (3.32). Or, la matrice Jacobienne de F au point

$$\overline{W} = (-\beta, \ldots, -\beta, -\beta, \ldots, -\beta)$$

est de la forme

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{(-1)^{m+2}}{(F_{m+3}-F_{m+2}\beta)^2} & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
1 & 0 & & & 0 & & & & & & & & & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & \ddots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & & & 1 & 0 & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
 & & & & & 1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \ddots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \frac{(-1)^{m+2}}{(F_{m+3}-F_{m+2}\beta)^2} \\
\vdots & & & \vdots & & 0 & & 1 & & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \frac{(-1)^{m+2}}{(F_{m+3}-F_{m+2}\beta)^2} & 0 & 0 & & & \ldots & \ldots & 0 & & & \\
0 & & & 0 & & 0 & & & & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & & & & & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

et le polynôme caractéristique associé est donné par

$$P(\lambda) = (-\lambda)^{p(k+1)} + (-1)^k \left(\frac{(-1)^{m+2}}{(F_{m+3} - F_{m+2}\beta)^2} \right)^p .$$

Maintenant, considérons les deux fonctions définies par

$$\varphi(\lambda) = (-\lambda)^{p(k+1)}, \quad \phi(\lambda) = (-1)^k \left(\frac{(-1)^{m+2}}{(F_{m+3} - F_{m+2}\beta)^2} \right)^p .$$

On a

$$\left|\phi(\lambda)\right| < \left|\varphi(\lambda)\right|, \forall \lambda : |\lambda| = 1.$$

Donc, d'après le Théorème de Rouché, φ et $P = \varphi + \phi$ ont le même nombre de zéros dans le disque unité $|\lambda| < 1$. Puisque φ admet comme racine $\lambda = 0$ de multiplicité $p(k+1)$, alors toutes les racines de P sont dans le disque unité $|\lambda| < 1$. Ainsi, par le Théorème 1.1.1, le point d'équilibre $(-\beta, -\beta, \ldots, -\beta)$ est localement asymptotiquement stable. ■

Corollaire 3.2.4 *Le point d'équilibre du système* (3.5) *est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve.

D'après le Théorème 3.2.2, E est localement asymptotiquement stable donc il reste à montrer que ce point est globalement attractif. Pour ce faire, on utilise le Corolaire 3.2.3. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_{(k+1)(pn+j)-t} &= \frac{F_{pn(m+2)+j(m+2)} + F_{pn(m+2)+j(m+2)-1}x^s_{-t}}{F_{pn(m+2)+j(m+2)+1} + F_{pn(m+2)+j(m+2)}x^s_{-t}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{F_{pn(m+2)+j(m+2)-1}}{F_{pn(m+2)+j(m+2)}}x^s_{-t} + 1}{x^s_{-t} + \dfrac{F_{pn(m+2)+j(m+2)+1}}{F_{pn(m+2)+j(m+2)}}}.
\end{aligned}$$

En utilisant les limites

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{pn(m+2)+j(m+2)+1}}{F_{pn(m+2)+j(m+2)}} = \alpha, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{pn(m+2)+j(m+2)-1}}{F_{pn(m+2)-j(m+2)}} = \frac{1}{\alpha} = -\beta,$$

on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_{(k+1)(pn+j)-t} = \frac{1-\beta x^s_{-t}}{\alpha + x^s_{-t}}, = \frac{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x^s_{-t}}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + x^s_{-t}} = \frac{2 - x^s_{-t} + \sqrt{5}x^s_{-t}}{1+\sqrt{5}+2x^s_{-t}}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_{(k+1)(pn+j)-t} &= \frac{(2 - x^s_{-t} + \sqrt{5}x^s_{-t})(1+2x^s_{-t} - \sqrt{5})}{(1+2x^s_{-t})^2 - 5} \\
&= \frac{2\sqrt{5}(x^2_{-t} + x_{-j} - 1) - 2(x^2_{-j} + x_{-t} - 1)}{4(x^2_{-t} + x_{-t} - 1)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{(q)} = -\beta, \quad q \in \{1, 2, \cdots, p\}.$$

■

3.2.4 Exemples numériques

Dans cette section, nous considérerons quelques exemples numériques pour vérifier nos résultats théoriques. Ces exemples montrent la stabilité globale des solutions du système (3.5). Tous les graphes de cette section sont dessinés par Matlab.

Exemple 3.2.1 *Considérons le système* (3.5) *avec* $m = 1$, $k = 2$ *et* $p = 6$. *Le comportement de la solution de ce système de valeurs initiales* $x_{-2}^{(1)} = 2.3, x_{-1}^{(1)} = 0.3, x_0^{(1)} = 1.9, x_{-2}^{(2)} = 2.9, x_{-1}^{(2)} = 3.1, x_0^{(2)} = 4.3, x_{-2}^{(3)} = 2, x_{-1}^{(3)} = 0.2, x_0^{(3)} = 1.9, x_{-2}^{(4)} = 2.1, x_{-1}^{(4)} = 0.8, x_0^{(4)} = 4.8, x_{-2}^{(5)} = 5, x_{-1}^{(5)} = 1.6, x_0^{(5)} = 0.2, x_{-2}^{(6)} = 1.2, x_{-1}^{(6)} = 2.3, x_0^{(6)} = 3$, *est représentée dans la figure* (3.1) *ci-dessous.*

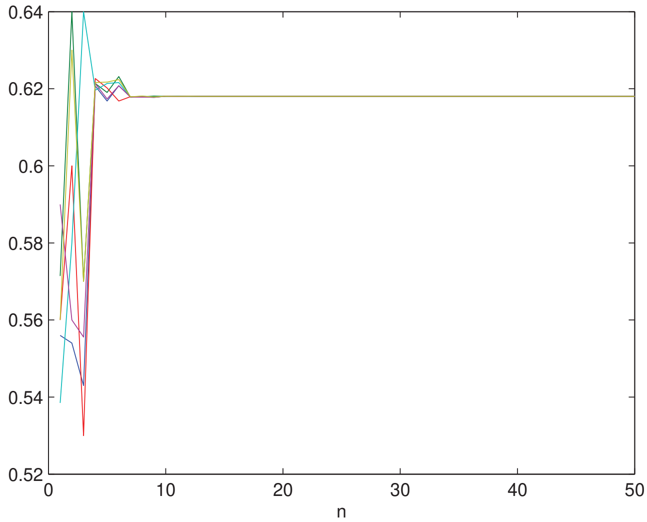

FIGURE 3.1 – Le graphique du système (3.5) avec $m = 1$, $k = 2$ et $p = 4$

Exemple 3.2.2 *Considérons le système* (3.5) *avec* $m = 2$, $k = 1$ *et* $p = 8$. *Le comportement de la solution de ce système de valeurs initiales* $x_{-2}^{(1)} = 1.3, x_{-1}^{(1)} = 1.5, x_{-2}^{(2)} = 1, x_{-1}^{(2)} = 4.3, x_{-2}^{(3)} =$

$1.2, x_{-1}^{(3)} = 5.3, x_{-2}^{(4)} = 12, x_{-1}^{(4)} = 1.7, x_{-2}^{(5)} = 1.6, x_{-1}^{(5)} = 3.2, x_{-2}^{(6)} = 1.3, x_{-1}^{(6)} = 0.9, x_{-2}^{(7)} = 1.1, x_{-1}^{(7)} = 5, x_{-2}^{(8)} = 0.2, x_{-1}^{(8)} = 1.6$ *est représentée dans la figure* (3.2) *ci-dessous.*

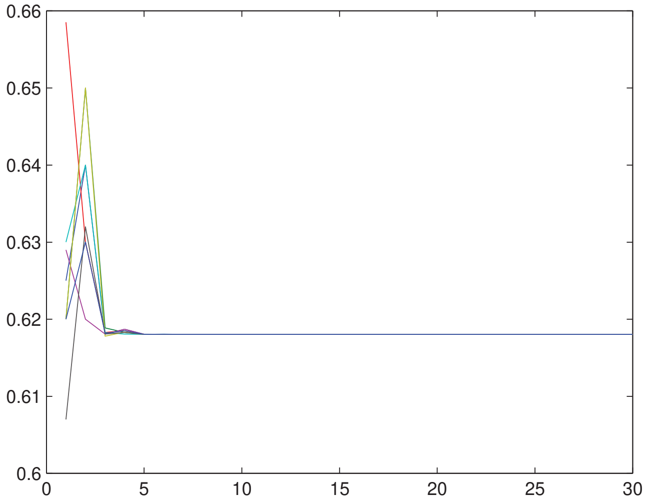

FIGURE 3.2 – Le graphique du système (3.5) avec $m = 2$, $k = 1$ et $p = 6$

3.3 Système avec des coefficients en nombres de Lucas

Dans cette section nous donnons la forme générale de la solution du système de $(2p+1)$ équations aux différences d'ordre supérieur suivant

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{1+2x_{n-k}^{(2)}}{3+x_{n-k}^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{1+2x_{n-k}^{(3)}}{3+x_{n-k}^{(3)}}, \quad \ldots, \quad x_{n+1}^{(2p+1)} = \frac{1+2x_{n-k}^{(1)}}{3+x_{n-k}^{(1)}}, \quad n, k, p \in \mathbb{N}_0 \qquad (3.33)$$

de valeurs initiales $x_{-k}^{(1)}, x_{-k+1}^{(1)}, \ldots x_0^{(1)}, x_{-k}^{(2)}, x_{-k+1}^{(2)}, \ldots x_0^{(2)}, \ldots, x_{-k}^{(2p+1)}, x_{-k+1}^{(2p+1)}, \ldots, x_1^{(2p+1)}$ et $x_0^{(2p+1)} \in \mathbb{R} - \{-3\}$.

Si on prend $p = 1$ dans le système (3.33) on obtient le système étudié en [46]. Ainsi, les résultats de cette partie généralisent les résultats obtenus dans [46].

3.3.1 Représentation générale des solutions du système du premier ordre

Pour trouver la forme générale de la solution du système (3.33), nous considérons le système de $(2p+1)$ équations aux différences d'ordre un suivant

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{1+2x_n^{(2)}}{3+x_n^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{1+2x_n^{(3)}}{3+x_n^{(3)}}, \quad \ldots, \quad x_{n+1}^{(2p+1)} = \frac{1+2x_n^{(1)}}{3+x_n^{(1)}}, \quad n \in N_0 \tag{3.34}$$

de valeurs initiales $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(2p+1)} \in \mathbb{R} - \{-3\}$.

En remplaçant $x_{n+1}^{(2p+1)}$ dans l'équation $x_{n+1}^{(2p)} = \dfrac{1+2x_n^{(2p+1)}}{3+x_n^{(2p+1)}}$, on obtient

$$x_{n+1}^{(2p)} = \frac{F_2 + F_1 x_{n-1}^{(1)}}{F_3 + F_2 x_{n-1}^{(1)}}.$$

En remplaçant l'expression obtenue de $x_{n+1}^{(2p)}$ dans l'équation

$$x_{n+1}^{(2p-1)} = \frac{1+2x_n^{(2p)}}{3+x_n^{(2p)}},$$

on obtient

$$x_{n+1}^{(2p-1)} = \frac{L_3 + L_2 x_{n-2}^{(1)}}{L_4 + L_3 x_{n-2}^{(1)}}.$$

Par induction, on a

$$x_{n+1}^{(2)} = \frac{F_{2p} + F_{2p-1} x_{n-2p+1}^{(1)}}{F_{2p+1} + F_{2p} x_{n-2p+1}^{(1)}},$$

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{L_{2p+1} + L_{2p} x_{n-2p}^{(1)}}{L_{2p+2} + L_{2p+1} x_{n-2p}^{(1)}}.$$

Donc, le système (3.34) peut être écrit comme suit

$$x_{n+1} = \frac{L_{2p+1} + L_{2p} x_{n-2p}}{L_{2p+2} + L_{2p+1} x_{n-2p}}. \tag{3.35}$$

Soit

$$^{(j)}x_n = x_{(2p+1)n-j}, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{3.36}$$

avec $j \in \{0, 1, 2, \cdots, 2p\}$.

En utilisant la notation (3.36), nous pouvons écrire (3.35) comme suit

$$^{(j)}x_{n+1} = \frac{L_{2p+1} + L_{2p}{}^{(j)}x_n}{L_{2p+2} + L_{2p+1}{}^{(j)}x_n}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.37}$$

et $j \in \{0, 1, 2, \cdots, 2p\}$.

Considérons maintenant l'équation

$$y_{n+1} = \frac{L_{2p+1} + L_{2p}y_n}{L_{2p+2} + L_{2p+1}y_n} \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{3.38}$$

de valeur initiale $y_0 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{L_{2p+2}}{L_{2p+1}}\right\}$.

En utilisant le changement de variables

$$y_n = \frac{1}{L_{2p+1}}\left(w_n - L_{2p+2}\right), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{3.39}$$

on peut écrire (3.38) comme suit

$$w_{n+1} = \frac{(L_{2p} + L_{2p+2})w_n - 5}{w_n}, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{3.40}$$

Ainsi, au lieu de l'équation (3.38), on étudiera l'équation (3.40).

Dans le résultat suivant, nous résolvons sous une forme fermée l'équation (3.41) en termes des suites $\{F_n\}_{n\geq 0}$ et $\{L_n\}_{n\geq 0}$. La formule obtenue sera très utile pour obtenir la formule des solutions du système (3.33).

Lemme 3.3.1

Considérons l'équation aux différences linéaire

$$z_{n+1} - 5F_{2p+1}z_n + 5z_{n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.41}$$

de valeurs initiales $z_{-1}, z_0 \in \mathbb{R}$. Alors toutes les solutions de l' équation (3.41) seront écrites sous la forme

$$z_n = \left(\frac{\sqrt{5}^n}{L_{2p+1}}\right)\left[\sqrt{5}z_{-1}N_{(2p+1)n} - z_0N_{(2p+1)(n+1)}\right], \tag{3.42}$$

où

$$N_{(2p+1)n} = \left(\alpha^{(2p+1)n} - (-1)^n\beta^{(2p+1)n}\right),$$

avec

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

c'est-à-dire,

$$N_{(2p+1)n} = \begin{cases} \sqrt{5}F_{(2p+1)n} & si \quad n \ pair, \\ L_{(2p+1)n} & si \quad n \ impair. \end{cases} \tag{3.43}$$

Preuve.

Comme on le sait, l'équation

$$z_{n+1} - 5F_{2p+1}z_n + 5z_{n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

est une équation aux différences linéaire homogène à coefficients constants de second ordre, où $z_{-1}, z_0 \in \mathbb{R}$, est généralement résolu en utilisant les racines caractéristiques λ_1 et λ_2 du polynôme caractéristique $\lambda^2 - 5F_{2p+1}\lambda + 5$. De (1.42) on obtient que

$$\lambda_1 = \frac{5F_{2p+1} + \sqrt{5}L_{2p+1}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5F_{2p+1} - \sqrt{5}L_{2p+1}}{2}$$

et la formule générale de la solution est

$$z_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n. \tag{3.44}$$

En utilisant (1.43), les racines caractéristiques λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique vérifient les relations suivantes

$$\lambda_1 = \frac{5F_{2p+1} + \sqrt{5}L_{2p+1}}{2} = \sqrt{5}\left(\frac{L_{2p+1} + \sqrt{5}F_{2p+1}}{2}\right) = \sqrt{5}\alpha^{2p+1},$$

$$\lambda_2 = \frac{5F_{2p+1} - \sqrt{5}L_{2p+1}}{2} \quad = \quad -\sqrt{5}\left(\frac{L_{2p+1} - \sqrt{5}F_{2p+1}}{2}\right) = -\sqrt{5}\beta^{2p+1}.$$

Pour trouver c_1 et c_2, on utilise les conditions initiales z_{-1} et z_0, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda_1}c_1 & + & \frac{1}{\lambda_2}c_2 & = & z_{-1}, \\ c_1 & + & c_2 & = & z_0. \end{cases}$$

On va écrire le système sous la forme matricielle $\left(\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{5}\lambda_2,\ \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{5}\lambda_1\right)$,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5}\lambda_2 & \frac{1}{5}\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{-1} \\ z_0 \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

En utilisant la méthode de Cramer pour résoudre le système (3.45) on obtient,

$$c_1 \quad = \quad \frac{\begin{vmatrix} z_{-1} & \frac{1}{5}\lambda_1 \\ z_0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{5}\lambda_2 & \frac{1}{5}\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{\sqrt{5}}{L_{2p+1}}\left(z_{-1} - \frac{z_0}{5}\lambda_1\right),$$

$$c_2 \quad = \quad \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{5}\lambda_2 & z_{-1} \\ 1 & z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{5}\lambda_2 & \frac{1}{5}\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{\sqrt{5}}{L_{2p+1}}\left(\frac{z_0}{5}\lambda_2 - z_{-1}\right).$$

En remplaçant c_1 , c_2 , λ_1 et λ_2 dans (3.44) on obtient :

$$z_n \quad = \quad \left(-\frac{\sqrt{5}}{L_{2p+1}}\left(z_{-1} - \frac{z_0}{5}\lambda_1\right)\right)\lambda_1^n + \left(-\frac{\sqrt{5}}{L_{2p+1}}\left(\frac{z_0}{5}\lambda_2 - z_{-1}\right)\right)\lambda_2^n,$$

$$\begin{aligned} z_n &= -\frac{\sqrt{5}}{L_{2p+1}}\left(z_{-1}\left[\lambda_1^n - \lambda_2^n\right] - \frac{z_0}{5}\left[\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}\right]\right), \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{L_{2p+1}}\left(z_{-1}(\sqrt{5})^n\left[\alpha^{(2p+1)n} - (-1)^n\beta^{(2p+1)n}\right] - \frac{z_0(\sqrt{5})^{n+1}}{(\sqrt{5})^2}\left[\alpha^{(2p+1)(n+1)} - (-1)^{n+1}\beta^{(2p+1)(n+1)}\right]\right). \end{aligned}$$

On pose

$$N_{(2p+1)n} = \left(\alpha^{(2p+1)n} - (-1)^n\beta^{(2p+1)n}\right),$$

on obtient que

$$z_n = -\frac{(\sqrt{5})^n}{L_{2p+1}}\left[z_{-1}\sqrt{5}N(2p+1)n - z_0 N_{(2p+1)(n+1)}\right].$$

■

Pour trouver la forme des solutions de l'équation (3.40) , on considère le changement de variable suivant

$$w_n = \frac{z_n}{z_{n-1}}, \tag{3.46}$$

ce qui réduit l'équation (3.40) à la suivante

$$z_{n+1} = 5F_{2p+1}z_n - 5z_{n-1}. \tag{3.47}$$

D'après le Lemme 3.3.1, la solution de l'équation (3.47) est

$$z_n = \left(\frac{\sqrt{5}^n}{L_{2p+1}}\right)[\sqrt{5}z_{-1}N_{(2p+1)n} - z_0 N_{(2p+1)(n+1)}],$$

avec

$$N_{(2p+1)n} = \begin{cases} \sqrt{5}F_{(2p+1)n} & \text{si} \quad n \text{ pair}, \\ L_{(2p+1)n} & \text{si} \quad n \text{ impair}. \end{cases} \tag{3.48}$$

En utilisant (3.46), on obtient

$$w_n = \frac{5M_{(2p+1)n} - \sqrt{5}w_0 M_{(2p+1)(n+1)}}{\sqrt{5}M_{(2p+1)(n-1)} - w_0 M_{(2p+1)n}}.$$

D'après (3.48), il résulte que

$$\begin{cases} w_{2n} &= \dfrac{5F_{2(2p+1)n} - w_0 L_{(2p+1)(2n+1)}}{L_{(2p+1)(2n-1)} - w_0 F_{2(2p+1)n}}, \\ w_{2n+1} &= \dfrac{5L_{(2p+1)(2n+1)} - 5w_0 F_{2(2p+1)(n+1)}}{5F_{2(2p+1)n} - w_0 L_{(2p+1)(2n+1)}}. \end{cases}$$

De tout ce qui précède, on a le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 *Soit $\{y_n\}_{n\geq 0}$ une solution bien définie de l'équation aux différences* (3.38). *Alors*

$$\begin{cases} y_{2n} &= \dfrac{F_{2(2p+1)n} + F_{2(2p+1)n-1}y_0}{F_{2(2p+1)n+1} + F_{2(2p+1)n}y_0}, \\ \\ y_{2n+1} &= \dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)} + L_{2(2p+1)n+2p}y_0}{L_{2(2p+1)n+(2p+2)} + L_{2(2p+1)n+(2p+1)}x_0}, \end{cases} ,n \in \mathbb{N}. \tag{3.49}$$

Preuve. D'après le changement de variable (3.39), et en utilisant les égalités siuvantes

$$\begin{aligned} L_{2p+1}F_{2(2n+1)n+1} &= L_{2p+2}F_{2(2p+1)n-1} - L_{2(2p+1)n-(2p+2)} \\ L_{2p+1}L_{2(2p+1)n+(2p+2)} &= L_{2p+1}L_{2(2p+1)n+(2p+1)} - 5F_{2(2p+1)n} \\ L_{2p+1}F_{2(2p+1)n-1} &= L_{2(2p+1)n+(2p+1)} - L_{2p+2}F_{2(2p+1)n} \\ L_{2p+1}L_{2(2p+1)n-(2p+2)} &= 5F_{2(2p+1)n} - L_{2p+2}L_{2(2p+1)n-(2p+1)}. \end{aligned}$$

Et comme $w_0 = L_{2p+2} + L_{2p+1}y_0$, on a

$$\begin{aligned} y_{2n} &= \frac{1}{L_{2p+1}}\Big(w_{2n} - L_{2p+2}\Big), \\ &= \frac{1}{L_{2p+1}}\left(\frac{(5F_{2(2p+1)n} - L_{2p+2}L_{(2p+1)(2n-1)}) + w_0(L_{2p+2}F_{2(2p+1)n} - L_{(2p+1)(2n+1)})}{L_{2(2n+1)n-(2n+1)} - w_0 F_{2(2n+1)n}}\right), \\ &= \frac{1}{L_{2p+1}}\left(\frac{(5F_{2(2p+1)n} - L_{2p+2}L_{2(2p+1)n-(2p+1)}) + w_0(L_{2p+2}F_{2(2p+1)n} - L_{2(2p+1)n+(2p+1)})}{L_{2(2n+1)n-(2n+1)} - w_0 F_{2(2n+1)n}}\right), \\ &= \frac{1}{L_{2p+1}}\left(\frac{L_{2p+1}L_{2(2p+1)n-(2p+2)} - L_{2p+1}w_0F_{2(2p+1)n-1}}{L_{2(2p+1)n-(2p+1)} - w_0F_{2(2p+1)n}}\right), \\ &= \frac{(L_{2(2p+1)n-(2p+2)} - L_{2p+2}F_{2(2p+1)n-1}) - L_{2p+1}y_0F_{2(2p+1)n-1}}{(L_{2(2p+1)n-(2p+1)} - L_{2p+2}F_{2(2p+1)n}) - L_{2p+1}y_0F_{2(2p+1)n}}, \end{aligned}$$

$$= \frac{-L_{2p+1}F_{2(2p+1)n} - L_{2p+1}y_0F_{2(2p+1)n-1}}{-L_{2p+1}F_{2(2p+1)n+1} - L_{2p+1}y_0F_{2(2p+1)n}}.$$

Donc

$$y_{2n} = \frac{F_{2(2p+1)n} + y_0F_{2(2p+1)n-1}}{F_{2(2p+1)n+1} + y_0F_{2(2p+1)n}}.$$

De même

$$y_{2n+1} = \frac{1}{L_{2p+1}}\left(w_{2n+1} - L_{2p+2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{L_{2p+1}}\left(\frac{5(L_{2(2p+1)n+(2p+1)} - L_{2p+2}F_{2(2p+1)n}) - w_0(5F_{2(2p+1)n+(2p+1)} - 7L_{2(2p+1)n+2(2p+1)})}{5F_{2(2p+1)n} - w_0L_{2(2p+1)n+(2p+1)}}\right),\\
&= \frac{L_{2p+1}}{L_{2p+1}}\left(\frac{5F_{2(2p+1)n-1} - w_0L_{2(2p+1)(n+1)-(2p+2)}}{5F_{2(2p+1)n} - w_0L_{2(2p+1)n+(2p+1)}}\right),\\
&= \frac{(5F_{2(2p+1)n-1} - L_{2p+2}L_{2(2p+1)n+2p}) - L_{2p+1}y_0L_{2(2p+1)n+2p}}{(5F_{2(2p+1)n} - L_{2p+1}L_{2(2p+1)n+(2p+1)}) - L_{2p+1}y_0L_{2(2p+1)n+(2p+1)}},\\
&= \frac{-L_{2p+1}}{-L_{2p+1}}\left(\frac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)} + y_0L_{2(2p+1)n+2p}}{L_{2(2p+1)n+(2p+2)} + y_0L_{2(2p+1)n+(2p+1)}}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$y_{2n+1} = \frac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)} + x_0L_{2(2p+1)n+2p}}{L_{2(2p+1)n+(2p+2)} + x_0L_{2(2p+1)n+(2p+1)}}.$$

■

D'après le Théorème 3.3.1, la solution de l'équation (3.37) est donnée par

$$\begin{cases}
{}^{(j)}x_{2n} = \dfrac{F_{2(2p+1)n} + F_{2(2p+1)n-1}{}^{(j)}x_0}{F_{2(2p+1)n+1} + F_{2(2p+1)n}{}^{(j)}x_0}, \\[2ex]
{}^{(j)}x_{2n+1} = \dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)} + L_{2(2p+1)n+2p}{}^{(j)}x_0}{L_{2(2p+1)n+(2p+2)} + L_{2(2p+1)n+(2p+1)}{}^{(j)}x_0}.
\end{cases} \tag{3.50}$$

En utilisant le changement de variable (3.36), le corollaire suivant est facilement obtenu à partir du Théorème 3.3.1.

Corollaire 3.3.1

Soit $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *une solution bien définie de l'équation aux différences* (3.35). *Alors*

$$\begin{cases} x_{(2p+1)(2n)-j} & = \dfrac{F_{2(2p+1)n} + F_{2(2p+1)n-1}x_{-j}}{F_{2(2p+1)n+1} + F_{2(2p+1)n}x_{-j}}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n \geq 1,\, j \in \{0, 1, \cdots, 2p\}, \\ x_{(2p+1)(2n+1)-j} & = \dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)} + L_{2(2p+1)n+2p}x_{-j}}{L_{2(2p+1)n+(2p+2)} + L_{2(2p+1)n+(2p+1)}x_{-j}}, \end{cases}$$

où $j \in \{0, 1, \ldots, 2p\}$.

Théorème 3.3.2 *Soit* $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(2p+1)}\right\}_{n\geq -1}$ *une solution bien définie de* (3.34). *Alors, pour* $n = 2, 3, \ldots$, *on a*

$$\begin{cases} x^{(q)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} & = \dfrac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-2j} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}. \\ \\ x^{(q)}_{(2p+1)(2n+1)-j} & = \dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)}L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)}L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}}, \end{cases}$$

avec $j \in \{0, 2, \ldots, 2p\}$.

$$\begin{cases} x^{(q)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} & = \dfrac{L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)}L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)}L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}, \\ \\ x^{(q)}_{(2p+1)(2n+1)-j} & = \dfrac{F_{(2p+1)(2n+1)-j} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)}F_{(2p+1)(2n+1)-(j+1)}}{F_{(2p+1)(2n+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)}F_{(2p+1)(2n+1)-j}}, \end{cases}$$

avec $j \in \{1, 3, \ldots, 2p+1\}$, $q \in \{1, 2, \ldots, 2p+1\}$.

Preuve. Soit $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(2p+1)}\right\}_{n\geq -1}$ une solution de (3.34), donc $\{x_n^{(1)}\}_{n\geq -1}$ est une solution de l'équation (3.35). Alors,

$$\begin{cases} x^{(1)}_{(2p+1)(2n)-j} & = \dfrac{F_{2(2p+1)n} + F_{2(2p+1)n-1}x^{(1)}_{-j}}{F_{2(2p+1)n+1} + F_{2(2p+1)n}x^{(1)}_{-j}}, \\ & \\ x^{(1)}_{(2p+1)(2n+1)-j} & = \dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)} + L_{2(2p+1)n+2p}x^{(1)}_{-j}}{L_{2(2p+1)n+(2p+2)} + L_{2(2p+1)n+(2p+1)}x^{(1)}_{-j}}, \end{cases} \quad n \geq 2,\, j \in \{0, 1, \cdots, 2p\}. \tag{3.51}$$

D'autre part, si j est pair, on a

$$x_0^{(2p+2-j)} = \frac{F_j + F_{j-1}{}^1x{-}j}{F_{j+1} + F_j{}^1x{-}j}. \tag{3.52}$$

De (3.51) on obtient

$$x^{(1)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} = \frac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)} + F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-1}x^{(1)}_{-j}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)+1} + F_{2(2p+1)n+2(2p+1)}x^{(1)}_{-j}}.$$

En utilisant (3.52) et l'identité

$$F_m = F_{j+1}F_{m-j} + F_jF_{m-(j+1)}, \quad j \in 2\mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, \tag{3.53}$$

on obtient

$$\begin{aligned} x^{(1)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} &= \frac{(F_{j+1} + F_jx^{(1)}_{-j})F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} + (F_j + F_{j-1}x^{(1)}_{-j})F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{(F_{j+1} + F_jx^{(1)}_{-j})F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)} + (F_j + F_{j-1}x^{(1)}_{-j})F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}} \\ &= \frac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} + x_0^{(2p+2-j)}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+2-j)}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}. \end{aligned}$$

De même, de (3.51) on a

$$x^{(1)}_{(2p+1)(2n+1)-j} = \frac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)} + L_{2(2p+1)n+2p}x^{(1)}_{-j}}{L_{2(2p+1)n+(2p+2)} + L_{2(2p+1)n+(2p+1)}x^{(1)}_{-j}}.$$

En utilisant (3.52) et (3.53) on obtient

$$\begin{aligned}
x^{(1)}_{(2p+1)(2n+1)-j} &= \frac{(F_{j+1}+F_jx^{(1)}_{-j})L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}+(F_j+F_{j-1}x^{(1)}_{-j})L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}}{(F_{j+1}+F_jx^{(1)}_{-j})L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j-1)}+(F_j+F_{j-1}x^{(1)}_{-j})L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}} \\
&= \frac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}+x_0^{(2p+2-j)}L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j-1)}+x_0^{(2p+2-j)}L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}}.
\end{aligned}$$

Si j est impaire, on pose $i=j+1$, donc on a

$$x_1^{(2p+2-i)}=\frac{F_i+F_{i-1}x^{(1)}_{-i+1}}{F_{i+1}+F_ix^{(1)}_{-i+1}}. \tag{3.54}$$

De (3.51) on a

$$x^{(1)}_{(2p+1)(2n)-(i-1)}=\frac{F_{2(2p+1)n}+F_{2(2p+1)n-1}x^{(1)}_{-i+1}}{F_{2(2p+1)n+1}+F_{2(2p+1)n}x^{(1)}_{-i+1}}$$

D'où

$$x^{(1)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(i-1)}=\frac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)}+F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-1}x^{(1)}_{-i+1}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)+1}+F_{2(2p+1)n+2(2p+1)}x^{(1)}_{-i+1}}.$$

De (3.53) et (3.54), on obtient

$$\begin{aligned}
x^{(1)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(i-1)} &= \frac{(F_{i+1}+F_ix^{(1)}_{-i+1})F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-i}+(F_i+F_{i-1}x^{(1)}_{-i+1})F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(i+1)}}{(F_{i+1}+F_ix^{(1)}_{-i+1})F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(i-1)}+(F_i+F_{i-1}x^{(1)}_{-i+1})F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-i}} \\
&= \frac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-i}+x_1^{(2p+2-i)}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(i+1)}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(i-1)}+x_1^{(2p+2-i)}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-i}}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$x^{(1)}_{(2p+1)(2n+1)-(i-1)}=\frac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)}+L_{2(2p+1)n+2p}x^{(1)}_{-i+1}}{L_{2(2p+1)n+(2p+2)}+L_{2(2p+1)n+(2p+1)}x^{(1)}_{-i+1}}.$$

De (3.53) et (3.54), on a

$$\begin{aligned} x^{(1)}_{(2p+1)(2n+1)-(i-1)} &= \frac{(F_{i+1}+F_i x^{(1)}_{-i+1})L_{2(2p+1)n+(2p+1)-i}+(F_i+F_{i-1}x^{(1)}_{-i+1})L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(i+1)}}{(F_{i+1}+F_i x^{(1)}_{-i+1})L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(i-1)}+(F_i+F_{i-1}x^{(1)}_{-i+1})L_{2(2p+1)n+(2p+1)-i}}. \\ &= \frac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-i}+x_1^{(2p+2-i)}L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(i+1)}}{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(i-1)}+x_1^{(2p+2-i)}L_{2(2p+1)n+(2p+1)-i}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} x^{(1)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(i-1)} = \dfrac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-i}+x_1^{(2p+2-i)}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(i+1)}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(i-1)}+x_1^{(2p+2-i)}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-i}}, \\ \\ x^{(1)}_{(2p+1)(2n+1)-(i-1)} = \dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-i}+x_1^{(2p+2-i)}L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(i+1)}}{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(i-1)}+x_1^{(2p+2-i)}L_{2(2p+1)n+(2p+1)-i}}. \end{cases} \tag{3.55}$$

En remplaçant i par $(j+1)$ dans (3.55), on obtient

$$\begin{cases} x^{(1)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} = \dfrac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}+x_1^{(2p+2-(j+1))}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+2)}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j)}+x_1^{(2p+2-(j+1))}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-i}}, \\ \\ x^{(1)}_{(2p+1)(2n+1)-j} = \dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}+x_1^{(2p+2-(j+1))}L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+2)}}{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}+x_1^{(2p+2-(j+1))}L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}}. \end{cases}$$

Comme on a

$$x_1^{(2p+2-(j+1))} = \frac{1+2x_0^{(2p+3-(j+1))}}{3+x_0^{(2p+3-(j+1))}}. \tag{3.56}$$

on obtient

$$\begin{cases} x^{(1)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} = \dfrac{(3+x_0^{(2p+3-(j+1))})F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}+(1+2x_0^{(2p+3-(j+1))})F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+2)}}{(3+x_0^{(2p+3-(j+1))})F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j)}+x_1^{(2p+2-(j+1))}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-i}}, \\ \\ x^{(1)}_{(2p+1)(2n+1)-j} = \dfrac{(3+x_0^{(2p+3-(j+1))})L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}+(1+2x_0^{(2p+3-(j+1))})L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+2)}}{(3+x_0^{(2p+3-(j+1))})L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}+(1+2x_0^{(2p+3-(j+1))})L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}}. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x^{(1)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} = \\ \dfrac{(3F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)} + F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+2)}) + x_0^{(2p+3-(j+1))}(F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)} + 2F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+2)})}{(3F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j)} + F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}) + x_0^{(2p+3-(j+1))}(F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j)} + 2F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)})}, \\ \\ x^{(1)}_{(2p+1)(2n+1)-j} = \\ \dfrac{(3L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)} + L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+2)}) + x_0^{(2p+3-(j+1))}(L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)} + 2L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+2)})}{(3L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j} + L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}) + x_0^{(2p+3-(j+1))}(L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j} + 2L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)})}. \end{cases}$$

Finalement on a

$$\begin{cases} x^{(1)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} = \dfrac{L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} + x_0^{(2p+3-(j+1))}L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+3-(j+1))}L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}, \\ \\ x^{(1)}_{(2p+1)(2n+1)-j} = \dfrac{F_{(2p+1)(2n+1)-j} + x_0^{(2p+3-(j+1))}F_{(2p+1)(2n+1)-(j+1)}}{F_{(2p+1)(2n+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+3-(j+1))}F_{(2p+1)(2n+1)-j}}. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} x^{(1)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} = \dfrac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-2j} + x_0^{(2p+2-j)}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+2-j)}F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}. \\ \\ x^{(1)}_{(2p+1)(2n+1)-j} = \dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j} + x_0^{(2p+2-j)}L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+2-j)}L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}}, \end{cases}$$

avec $j \in \{0, 2, \ldots, 2p\}$.

$$\begin{cases} x^{(1)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} = \dfrac{L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} + x_0^{(2p+2-j)}L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+2-j)}L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}, \\ \\ x^{(1)}_{(2p+1)(2n+1)-j} = \dfrac{F_{(2p+1)(2n+1)-j} + x_0^{(2p+2-j)}F_{(2p+1)(2n+1)-(j+1)}}{F_{(2p+1)(2n+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+2-j)}F_{(2p+1)(2n+1)-j}}. \end{cases}$$

avec $j \in \{1, 3, \ldots, 2p+1\}$.

De la même façon, après quelques calculs et en utilisant le fait que

$$x^{(2p+1)} = \frac{1+2x_n^{(1)}}{3+x_n^{(1)}}, \quad x_n^{(i)} = \frac{1+2x_n^{(i+1)}}{3+x_n^{(i+1)}}, \quad i = 2,3,\ldots,2p,$$

on obtient

$$\begin{cases} x^{(q)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} &= \dfrac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-2j} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}. \\ \\ x^{(q)}_{(2p+1)(2n+1)-j} &= \dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}}, \end{cases}$$

avec $j \in \{0,2,\ldots,2p\}$.

$$\begin{cases} x^{(q)}_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} &= \dfrac{L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}, \\ \\ x^{(q)}_{(2p+1)(2n+1)-j} &= \dfrac{F_{(2p+1)(2n+1)-j} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} F_{(2p+1)(2n+1)-(j+1)}}{F_{(2p+1)(2n+1)-(j-1)} + x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} F_{(2p+1)(2n+1)-j}}, \end{cases}$$

avec $j \in \{1,3,\ldots,2p+1\}$. ■

3.3.2 Représentation de la solution du système d'ordre supérieur

Dans cette partie, nous discutons de la forme du système (3.33) qui généralise (3.34). Nous établissons la solution du système (3.33) en utilisant une transformation appropriée réduisant ce système au système des équations aux différences de premier ordre (3.34).

Analyse de la forme du système (3.33)

Les valeurs initiales avec les indices les plus petits sont $x_{-k}^{(1)}, x_{-k}^{(2)}, \ldots, x_{-k}^{(2p)}$ and $x_{-k}^{(2p+1)}$. En utilisant (3.33) avec $n = 0$, on obtient les valeurs de $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(2p)}$ et $x_1^{(2p+1)}$ comme suit

$$x_1^{(1)} = \frac{1 + 2x_{-k}^{(1)}}{3 + x_{-k}^{(1)}}, \quad x_1^{(2)} = \frac{1 + 2x_{-k}^{(3)}}{3 + x_{-k}^{(3)}}, \cdots, \quad x_1^{(2p+1)} = \frac{1 + 2x_{-k}^{(1)}}{3 + x_{-k}^{(1)}}.$$

Après avoir connu les valeurs de $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(2p)}$ et $x_1^{(2p+1)}$, en utilisant (3.33) avec $n = k + 1$ on obtient les valeurs de $x_{k+2}^{(1)}, x_{k+2}^{(2)}, \ldots, x_{k+2}^{(2p)}$ et $x_{k+2}^{(2p+1)}$. On a

$$x_{k+2}^{(1)} = \frac{1 + 2x_1^{(1)}}{3 + x_1^{(1)}}, \quad x_{k+2}^{(2)} = \frac{1 + 2x_1^{(3)}}{3 + x_1^{(3)}}, \cdots, \quad x_{k+2}^{(2p+1)} = \frac{1 + 2x_1^{(1)}}{3 + x_1^{(1)}}.$$

Les valeurs de $x_{k+2}^{(1)}, x_{k+2}^{(2)}, \ldots, x_{k+2}^{(2p)}$ et $x_{k+2}^{(2p+1)}$, en utilisant (3.33) pour $n = 2k + 2$, nous conduisent à obtenir les valeurs de $x_{2k+3}^{(1)}, x_{2k+3}^{(2)}, \ldots, x_{2k+3}^{(2p)}$ et $x_{2k+3}^{(2p+1)}$. On a

$$x_{2k+3}^{(1)} = \frac{1 + 2x_{k+2}^{(1)}}{3 + x_{k+2}^{(1)}}, \quad x_{2k+3}^{(2)} = \frac{1 + 2x_{k+2}^{(3)}}{3 + x_{k+2}^{(3)}}, \cdots, \quad x_{2k+3}^{(2p+1)} = \frac{1 + 2x_{k+2}^{(1)}}{3 + x_{k+2}^{(1)}}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_{(k+1)m+1}^{(1)} = \frac{1 + 2x_{(k+1)m-k}^{(1)}}{3 + x_{(k+1)m-k}^{(1)}}, \quad x_{(k+1)m+1}^{(2)} = \frac{1 + 2x_{(k+1)m-k}^{(3)}}{3 + x_{(k+1)m-k}^{(3)}}, \cdots, \quad x_{(k+1)m+1}^{(2p+1)} = \frac{1 + 2x_{(k+1)m-k}^{(1)}}{3 + x_{(k+1)m-k}^{(1)}}.$$

De même, les valeurs initiales $x_{-r}^{(1)}, x_{-r}^{(2)}, \ldots, x_{-r}^{(2p)}$ et $x_{-r}^{(2p+1)}$, pour $r \in \{0, 1, \ldots, k\}$, déterminent toutes les valeurs des suites $(x_{(k+1)(m+1)-r}^{(1)})_m, (x_{(k+1)(m+1)-r}^{(2)})_m, \ldots, (x_{(k+1)(m+1)-r}^{(2p)})_m$ et $(x_{(k+1)(m+1)-r}^{(2p+1)})_m$. On a aussi

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{(k+1)(m+1)-r}^{(1)} & = & \dfrac{1 + 2x_{(k+1)m-r}^{(1)}}{3 + x_{(k+1)m-r}^{(1)}}, \\ x_{(k+1)(m+1)-r}^{(2)} & = & \dfrac{1 + 2x_{(k+1)m-r}^{(3)}}{3 + x_{(k+1)m-r}^{(3)}}, \\ & \vdots & \\ x_{(k+1)(m+1)-r}^{(2p+1)} & = & \dfrac{1 + 2x_{(k+1)m-r}^{(1)}}{3 + x_{(k+1)m-r}^{(1)}}. \end{array} \right. \tag{3.57}$$

Représentation de la solution générale du système (3.33)

Maintenant, nous allons appliquer l'analyse précédente. Soit

$$ {}^{(r)}x_n^{(q)} = x_{(k+1)n-r}, \tag{3.58} $$

où $r \in \{0, 1, \ldots, k\}$. et $q \in \{1, 2, \ldots, (2p+1)\}$.
En utilisant la notation (3.58), on peut écrire (3.33), pour chaque $r \in \{0, 1, \ldots, k\}$ comme suit

$$ {}^{(r)}x_{n+1}^{(1)} = \frac{1 + 2\,{}^{(r)}x_n^{(1)}}{3 + {}^{(r)}x_n^{(1)}}, \quad {}^{(r)}x_{n+1}^{(2)} = \frac{1 + 2\,{}^{(r)}x_n^{(3)}}{3 + {}^{(r)}x_n^{(3)}}, \cdots, \quad {}^{(r)}x_{n+1}^{(2p+1)} = \frac{1 + 2\,{}^{(r)}x_n^{(1)}}{3 + {}^{(r)}x_n^{(1)}}. \tag{3.59} $$

Cela signifie que les suites $\left({}^{(r)}x_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \left({}^{(r)}x_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \ldots, \left({}^{(r)}x_n^{(2p)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ et $\left({}^{(r)}x_n^{(2p+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $r = \overline{0, k}$, sont des $(2p+1)(k+1)$ solutions du système (3.34) avec les valeurs initiales ${}^{(r)}x_0^{(1)}, {}^{(r)}x_0^{(2)}, \ldots, {}^{(r)}x_0^{(2p)}$ et ${}^{(r)}x_0^{(2p+1)}$, $r = \overline{0, k}$, respectivement.
En utilisant le Corollaire 3.2.2 pour les suites $\left({}^{(r)}x_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \left({}^{(r)}x_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \ldots, \left({}^{(r)}x_n^{(2p)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ et $\left({}^{(r)}x_n^{(2p+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $r = \overline{0, k}$, nous trouvons que la représentation suivante est vraie

$$ \begin{cases} {}^{(r)}x_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}^{(q)} = \dfrac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} + {}^{(r)}x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)} + {}^{(r)}x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}. \\[3ex] {}^{(r)}x_{(2p+1)(2n+1)-j}^{(q)} = \dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j} + {}^{(r)}x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j-1)} + {}^{(r)}x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}}, \end{cases} $$

avec $j \in \{0, 2, \ldots, 2p\}$.

$$ \begin{cases} {}^{(r)}x_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}^{(q)} = \dfrac{L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} + {}^{(r)}x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)} + {}^{(r)}x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}, \\[3ex] {}^{(r)}x_{(2p+1)(2n+1)-j}^{(q)} = \dfrac{F_{(2p+1)(2n+1)-j} + {}^{(r)}x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} F_{(2p+1)(2n+1)-(j+1)}}{F_{(2p+1)(2n+1)-(j-1)} + {}^{(r)}x_0^{(2p+1+q-j)mod(2p+1)} F_{(2p+1)(2n+1)-j}}, \end{cases} $$

avec $j \in \{1, 3, \ldots, 2p+1\}$,pour chaque $q \in \{1, 2, \ldots, 2p+1\}$, $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

En revenant à la notation originale, de (3.53) et (3.58), on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.3.2
Soit $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(2p+1)}\right\}_{n\geq -1}$ *une solution de* (3.33). *Alors, pour* $n = 2, 3, \ldots,$ *on a*

$$\begin{cases} x^{(q)}_{(k+1)(2(2p+1)n+2(2p+1)-j)-r} & = \dfrac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} + x_{-r}^{(2p+1+q-j)} F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)-r} + x_{-r}^{(2p+1+q-j)} F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}, \\ \\ x^{(q)}_{(k+1)((2p+1)(2n+1)-j)-r} & = \dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j} + x_{-r}^{(2p+1+q-j)} L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j-1)} + x_{-r}^{(2p+1+q-j)} L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(q)}_{(k+1)(2(2p+1)n+2(2p+1)-j)-r} & = \dfrac{L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} + x_{-r}^{(2p+1+q-j)} L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)} + x_{-r}^{(2p+1+q-j)} L_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}, \\ \\ x^{(q)}_{(k+1)((2p+1)(2n+1)-j)-r} & = \dfrac{F_{(2p+1)(2n+1)-j} + x_{-r}^{(2p+1+q-j)} F_{(2p+1)(2n+1)-(j+1)}}{F_{(2p+1)(2n+1)-(j-1)} + x_{-r}^{(2p+1+q-j)} F_{(2p+1)(2n+1)-j}}, \end{cases}$$

pour chaque $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

3.3.3 Stabilité globale des solutions positives

Dans cette partie, nous étudions la stabilité globale des solutions du système (3.33).

Tout d'abord, on peut facilement voir que le système (3.33) a un seul point d'équilibre positif réel donné par

$$E = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2p+1)}}\right) = (-\beta, -\beta, \ldots, -\beta),$$

où β est le nombre défini dans (1.13).

Maintenant qu'on a mentionné l'existence d'un point d'équilibre pour le Système (3.33), allons y analyser la stabilité asymptotique de ce point en suivant la méthode de linéarisation.

Théorème 3.3.3 *Le point d'équilibre su système (3.33) est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. Le Système (3.33) est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{lcl}
x_{n+1}^{(1)} & = & f^{(1)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots\ldots, x_n^{(2p+1)}, x_{n-1}^{(2p+1)}, \ldots, x_{n-k}^{(2p+1)}\right)\\
x_n^{(1)} & = & x_n^{(1)}\\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(1)} & = & x_{n-k+1}^{(1)}\\
x_{n+1}^{(2)} & = & f^{(2)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots\ldots, x_n^{(2p+1)}, x_{n-1}^{(2p+1)}, \ldots, x_{n-k}^{(2p+1)}\right)\\
x_n^{(2)} & = & x_n^{(2)}\\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(2)} & = & x_{n-k+1}^{(2)}\\
 & \vdots & \\
x_{n+1}^{(2p+1)} & = & f^{(p)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots\ldots, x_n^{(2p+1)}, x_{n-1}^{(2p+1)}, \ldots, x_{n-k}^{(2p+1)}\right)\\
x_n^{(2p+1)} & = & x_n^{(2p+1)}\\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(2p+1)} & = & x_{n-k+1}^{(2p+1)}
\end{array}\right.$$

où

$$g_i : I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_{2p+1}^{k+1} \longrightarrow I_i, \tag{3.60}$$

est définie par

$$g_i\left(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_k^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, \ldots, u_0^{(2p+1)}, u_1^{(2p+1)}, \ldots, u_k^{(2p+1)}\right) = \frac{1 + 2u_k^{(i+1)mod(2p+1)}}{3 + u_k^{(i+1)mod(2p+1)}},$$

avec $I_i = (0, +\infty)$, $\quad i \in \{1, 2, \ldots, 2p+1\}$.

Ce système qui est de la forme (1.5) avec

$$X_n = \left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_n^{(2p+1)}, x_{n-1}^{(2p+1)}, \ldots, x_{n-k}^{(2p+1)}\right)^t,$$

où v^t désigne la transposé de v, et F est la fonction définie dans (1.4) avec $f^{(i)}$ sont données par (3.32). Or, la matrice Jacobienne de F au point

$$\overline{W} = (-\beta, \dots, -\beta, -\beta, \dots, -\beta)$$

est de la forme

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{5}{(3-\beta)^2} & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 0 & & & 0 & & & & & & & & & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & \ddots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & 1 & 0 & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
 & & & & & 1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \ddots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{5}{(3-\beta)^2} \\
\vdots & & & \vdots & & 0 & & 1 & & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \frac{5}{(3-\beta)^2} & 0 & 0 & & & \dots & \dots & 0 & & & \\
0 & & & 0 & & 0 & & & & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & & & & & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

et le polynôme caractéristique associé est donné par

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_{(2p+1)(k+1)}) = (-\lambda)^{(2p+1)(k+1)} + (-1)^k \left(\frac{5}{(3-\beta)^2} \right)^{2p+1}.$$

Maintenant, considérons les deux fonctions définies par

$$\varphi(\lambda) = (-\lambda)^{(2p+1)(k+1)}, \quad \phi(\lambda) = (-1)^k \left(\frac{5}{(3-\beta)^2} \right)^{2p+1}.$$

On a $\left|\phi(\lambda)\right| < \left|\varphi(\lambda)\right|, \forall \lambda : |\lambda| = 1$. Donc, d'après le Théorème de Rouché φ et $P = \varphi + \phi$ ont le même nombre de zéros dans le disque unité $|\lambda| < 1$, et puisque φ admet comme racine $\lambda = 0$ de multiplicité $(2p+1)(k+1)$, alors toutes les racines de P sont dans le disque $|\lambda| < 1$. Ainsi, par le Théorème 1.1.1 le point d'équilibre $(-\beta, -\beta, \ldots, -\beta)$ est localement asymptotiquement stable. ■

Corollaire 3.3.3 *Le point d'équilibre du système (3.33) est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. D'après le Théorème 3.3.3, il reste à montrer que ce point est globalement attractif. Pour ce faire, on utilise le Corollaire 3.3.2. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_{(k+1)(2(2p+1)n+2(2p+1)-j)-r} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j} + x^{(2p+1+q-j)}_{-r} F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)-r} + x^{(2p+1+q-j)}_{-r} F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}. \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + x^{(2p+1+q-j)}_{-r} \dfrac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j+1)}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}}}{\dfrac{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-(j-1)}}{F_{2(2p+1)n+2(2p+1)-j}} + x^{(2p+1+q-j)}_{-r}}.
\end{aligned}$$

En utilisant la limite (1.14), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_{(k+1)(2(2p+1)n+2(2p+1)-j)-r} = \frac{1 + x^{(2p+1+q-j)}_{-r} \frac{1}{\alpha}}{\alpha + x^{(2p+1+q-j)}_{-r}}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_{(k+1)(2(2p+1)n+2(2p+1)-j)-r} = -\beta.$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_{(k+1)((2p+1)(2n+1)-j)-r} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j} + x^{(2p+1+q-j)}_{-r} L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j-1)} + x^{(2p+1+q-j)}_{-r} L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + x^{(2p+1+q-j)}_{-r} \dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j+1)}}{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}}}{\dfrac{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-(j-1)}}{L_{2(2p+1)n+(2p+1)-j}} + x^{(2p+1+q-j)}_{-r}}.
\end{aligned}$$

En utilisant la limite (1.30), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_{(k+1)((2p+1)(2n+1)-j)-r} = \frac{1 + x^{(2p+1+q-j)}_{-r}\dfrac{1}{\alpha}}{\alpha + x^{(2p+1+q-j)}_{-r}}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_{(k+1)((2p+1)(2n+1)-j)-r} = -\beta.$$

De la même manière, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_{(k+1)(2(2p+1)n+2(2p+1)-j)-r} = \lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_{(k+1)((2p+1)(2n+1)-j)-r} = -\beta.$$

D'où, on a

$$\lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_n = -\beta.$$

■

3.3.4 Exemples numériques

Dans cette section, nous considérerons quelques exemples numériques pour vérifier nos résultats théoriques. Ces exemples montrent la stabilité globale des solutions du système (3.33).

Exemple 3.3.1 *Considérons le système* (3.33) *avec* $k = 1$ *et* $p = 2$*. Le comportement de la solution de ce système de valeurs initiales* $x^{(1)}_{-1} = 1, x^{(1)}_{0} = 7, x^{(2)}_{-1} = 1.3, x^{(2)}_{0} = 0.3, x^{(3)}_{-1} = 3, x^{(3)}_{0} = 1.5, x^{(4)}_{-1} = 14, x^{(4)}_{0} = 2, x^{(5)}_{-1} = 3$ *et* $x^{(5)}_{0} = 0.1$ *est représenté dans la figure* 3.3 *ci-dessous.*

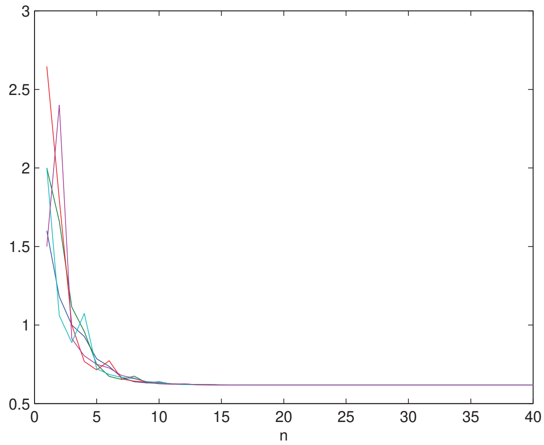

FIGURE 3.3 – Le graphique du système (3.33) avec $k = 1$ et $p = 2$

Exemple 3.3.2 *Considérons le système* (3.33) *avec* $k = 3$ *et* $p = 3$. *Le comportement de la solution de ce système de valeurs initiales* $x_{-3}^{(1)} = 1, x_{-2}^{(1)} = 0.2, x_{-1}^{(1)} = 6, x_{0}^{(1)} = 7, x_{-3}^{(2)} = 1.3, x_{-2}^{(2)} = 5, x_{-1}^{(2)} = 0.7, x_{0}^{(2)} = 9, x_{-3}^{(3)} = 0.1, x_{-2}^{(3)} = 3, x_{-1}^{(3)} = 6, x_{0}^{(3)} = 1.5, x_{-3}^{(4)} = 7, x_{-2}^{(4)} = 9.3, x_{-1}^{(4)} = 5.3, x_{0}^{(4)} = 5.3, x_{-3}^{(5)} = 2.2, x_{-2}^{(5)} = 2.2, x_{-1}^{(5)} = 14.3, x_{0}^{(5)} = 0.8, x_{-3}^{(6)} = 3.3, x_{-2}^{(6)} = 6, x_{-1}^{(6)} = 8, x_{0}^{(6)} = 1.9, x_{-3}^{(7)} = 4, x_{-2}^{(7)} = 7.2, x_{-1}^{(7)} = 1.6$ *et* $x_{0}^{(7)} = 8$ *est représenté dans la figure* 3.4 *ci-dessous.*

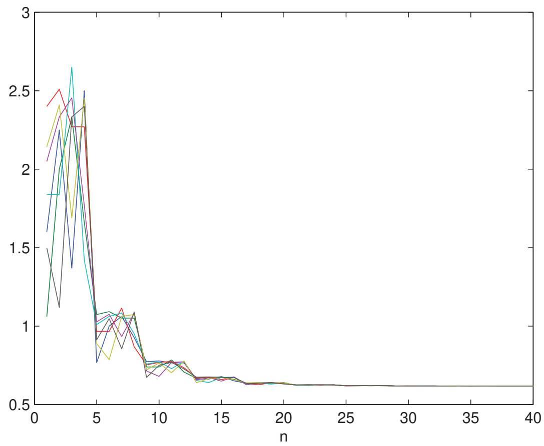

FIGURE 3.4 – Le graphique du du système (3.33) avec $k = 3$ et $p = 3$

Chapitre 4

Stabilité globale d'un système d'équations aux différences d'ordre supérieur

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous généralisons les résultats obtenus par M. Gümüş dans son article [31]. Un sujet qui a été abordé beaucoup dans les dernière décennies est l'étude qualitative du comportement des solutions des systèmes d'équations aux différences rationnelles (voir par exemple [20, 31, 54, 55]). Outre son importance elle-même, et étant donné la multiplicité des facteurs impliqués dans toute épidémie, il sera important d'étudier des systèmes composés de nombreuses équations aux différences, ce que nous ferons dans ce chapitre.

Dans [20], Devault et al. ont étudié la stabilité globale et la périodicité des solutions positives de l'équation aux différences

$$x_{n+1} = p + \frac{x_{n-m}}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.1}$$

où $m \in \{2, 3, \ldots\}$, p et les valeurs initiales sont des nombres positifs.

Indépendamment du travail ci-dessus, dans [22], Owaidy et al. ont également étudié la stabilité globale et la périodicité des solutions positives de l'équation (4.1) dans des conditions spécifiées.

Dans [72], Zhang et al. ont étudié le comportement du système symétrique d'équations aux différences suivant

$$x_{n+1} = A + \frac{y_{n-m}}{y_n}, \quad y_{n+1} = A + \frac{x_{n-m}}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.2}$$

où le paramètre A est un nombre réel positif, les valeurs initiales x_i, y_i sont des nombres réels positifs arbitraires pour $i = -m, -m+1, \ldots, 0$ et $m \in \mathbb{N}$. Ils ont obtenu les résultats suivants :

- **(i)** Pour le cas $A \in (0, 1)$ et m est impair, le système (4.2) a des solutions non bornées dans des conditions initiales spécifiées. Pour le cas où m est pair, ils n'ont pas pu obtenir le même résultat.
- **(ii)** Pour le cas $A \geq 1$, chaque solution positive du système (4.2) est bornée et permanent.
- **(iii)** Pour le cas $A = 1$ et m est impair, chaque solution positive du système (4.2) est périodique de période deux. Pour m est pair, le système (4.2) n'a pas des solutions périodiques.
- **(iv)** Pour $A \in (1, \infty)$, le seul point d'équilibre du système (4.2) est globalement attractif.

Bien que ces résultats soient très agréables, nous remarquons que les auteurs n'ont pas étudié les diverses propriétés du système (4.2), par exemple, la nature de la stabilité, l'ordre de convergence et le comportement asymptotique.

En complément de travail ci-dessus, dans [31], Gümüş a étudié la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre positif, l'ordre de convergence des solutions positives et il a présenté quelques résultats sur le comportement général des solutions du système

(4.2).

Nous généralisons les résultats concernant l'équation (4.1) et le système (4.2) à un système de p équations aux différences

$$x_{n+1}^{(1)} = A + \frac{x_{n-m}^{(2)}}{x_n^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = A + \frac{x_{n-m}^{(3)}}{x_n^{(3)}}, \ldots, \quad x_{n+1}^{(p)} = A + \frac{x_{n-m}^{(1)}}{x_n^{(1)}}, \quad n, m, p \in \mathbb{N}_0 \tag{4.3}$$

où le paramètre A est positif et $x_{-m}^{(j)}, x_{-m+1}^{(j)}, \ldots, x_{-1}^{(j)}, x_0^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, p$ sont des nombres réels positifs.

Le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans la section (4.2), nous discutons le comportement des solutions positives du système (4.3) via la méthode d'analyse semi-cycle. De plus, la section (4.3) est consacrée à l'étude de la stabilité locale des points d'équilibres et du comportement asymptotique des solutions lorsque $0 \leq A < 1, A = 1$ et $A > 1$. Dans la section (4.4), nous tournons notre attention pour estimer le l'ordre de convergence d'une solution qui converge vers le point d'équilibre du système (4.3) dans la région des paramètres décrits par $A > 1$. Quelques exemples numériques sont réalisés pour soutenir les résultats obtenus dans la section (4.5).

4.2 Analyse semi-cycle

Dans cette section, nous discutons le comportement des solutions positives du système (4.3) via la méthode d'analyse semi-cycle. Il est facile de voir que le système (4.3) admet un seul point d'équilibre positif $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) = (A+1, A+1, \ldots, A+1)$.

Lemme 4.2.1 *Soit $\{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)})\}_{n \geq -m}$ une solution du système (4.3). Alors, soit $\{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)})\}_{n \geq -m}$ se compose d'un seul semi-cycle ou $\{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)})\}_{n \geq -m}$ oscille autour du point d'équilibre $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}) = (A+1, A+1, \ldots, A+1)$ avec des semi-cycles ayant au plus m termes.*

Preuve. Supposons que $\{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)})\}_{n\geq -m}$ a au moins deux semi-cycles. Donc, il existe $n_0 \geq -m$ tel que soit

$$x_{n_0}^{(j)} < A + 1 \leq x_{n_0+1}^{(j)} \quad ou\ x_{n_0+1}^{(j)} < A + 1 \leq x_{n_0}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Nous supposons le premier cas, c'est-à-dire, $x_{n_0}^{(j)} < A + 1 \leq x_{n_0+1}^{(j)}$. L'autre cas est similaire et sera omis. Supposons que le semi-cycle positif commençant par le terme $(x_{n_0+1}^{(1)}, x_{n_0+1}^{(2)}, \ldots, x_{n_0+1}^{(p)})$ a m termes. Dans ce cas on a

$$x_{n_0}^{(j)} < A + 1 \leq x_{n_0+m}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

D'où, nous obtenons du système (4.3)

$$x_{n_0+m+1}^{(j)} = A + \frac{x_{n_0}^{(j+1)mod(p)}}{x_{n_0+m}^{(j+1)mod(p)}} < A + 1, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Le lemme est prouvé. ∎

Lemme 4.2.2 *Soit $\{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)})\}_{n\geq -m}$ une solution du système (4.3) qui a $m-1$ semi-cycles séquentiels de longueur un. Alors, chaque semi-cycle après ce point est de longueur un.*

Preuve. Supposons qu'il existe $n_0 \geq -m$ tel que soit

$$x_{n_0}^{(j)}, x_{n_0+2}^{(j)}, \ldots, x_{n_0+m-1}^{(j)} < A + 1 \leq x_{n_0+1}^{(j)}, x_{n_0+3}^{(j)}, \ldots, x_{n_0+m}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \tag{4.4}$$

ou

$$x_{n_0+1}^{(j)}, x_{n_0+3}^{(j)}, \ldots, x_{n_0+m}^{(j)} < A + 1 \leq x_{n_0}^{(j)}, x_{n_0+2}^{(j)}, \ldots, x_{n_0+m-1}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.5}$$

Nous allons prouver le cas (4.4). Le cas (4.5) est identique et ne sera pas inclus. Du système (4.3) ont obtient

$$x_{n_0+m+1}^{(j)} = A + \frac{x_{n_0}^{(j+1)mod(p)}}{x_{n_0+m}^{(j+1)mod(p)}} < A + 1, \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

et

$$x_{n_0+m+2}^{(j)} = A + \frac{x_{n_0+1}^{(j+1)mod(p)}}{x_{n_0+m+1}^{(j+1)mod(p)}} > A+1, \quad j = 1,2,\dots,p,$$

Le résultat procède par induction. Ainsi, la preuve est terminée. ■

Lemme 4.2.3 *Le système* (4.3) *n'a pas de solutions périodiques non triviales de période (pas nécessairement première) m.*

Preuve. Supposons que

$$(\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(p)}), (\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_2^{(p)}), \dots, (\alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(p)}), (\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(p)}), \dots$$

est une solution m-périodique du système (4.3). Il est donc évident que pour cette solution, on a

$$(x_{n-m}^{(1)}, x_{n-m}^{(2)}, \dots, x_{n-m}^{(p)}) = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(p)}), \quad n \geq 0.$$

Donc, le point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}\right) = (A+1, A+1, \dots, A+1)$ doit être cette solution. Ainsi, la preuve est terminée. ■

Lemme 4.2.4 *Toutes les solutions non-oscillatoires du système* (4.3) *convergent vers le point d'équilibre* $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}\right) = (A+1, A+1, \dots, A+1)$.

Preuve. Nous allons prouver ce lemme pour le cas d'un seul semi-cycle positif, la situation est identique pour le cas d'un seul semi-cycle négatif, il sera donc omis. Supposons que $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(p)}) \geq (\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}})$ pour chaque $n \geq -m$. Du système (4.3) on obtient

$$x_{n+1}^{(j)} = A + \frac{x_{n-m}^{(j+1)mod(p)}}{x_n^{(j+1)mod(p)}} \geq A+1, \quad j = 1,2,\dots,p,$$

Alors, on a

$$A + 1 \leq x_n^{(j)} \leq x_{n-m}^{(j)}, \quad n \geq 0, \quad j = 1,2,\dots,p \tag{4.6}$$

De (4.6), il existe $\delta_i^{(j)}$ pour $i = 0, 1, \dots, m-1$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} x_{nm+i}^{(j)} = \delta_i^{(j)}.$$

Donc,

$$(\delta_0^{(1)}, \delta_0^{(2)}, \ldots, \delta_0^{(p)}), (\delta_1^{(1)}, \delta_1^{(2)}, \ldots, \delta_1^{(p)}), \ldots, (\delta_{m-1}^{(1)}, \delta_{m-1}^{(2)}, \ldots, \delta_{m-1}^{(p)})$$

est une solution périodique de période (pas nécessairement de la période principale) m. Mais, du Lemme 4.2.3, nous avons vu que le système (4.3) n'a pas de solutions périodiques non triviales de période (pas nécessairement première) m. Ainsi, la solution doit être le point d'équilibre. Alors, la preuve est terminée. ■

4.3 Le comportement asymptotique

4.3.1 Le cas $0 < A < 1$

Théorème 4.3.1 *Supposons* $0 < A < 1$ *et* $\{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)})\}_{n \geq -m}$ *est une solution positive du système* (4.3). *Alors les affirmations suivantes sont vraies*

i) *Si m est impaire , et* $0 < x_{2k-1}^{(j)} < 1$, $x_{2k}^{(j)} > \frac{1}{1-A}$ *pour* $k = \frac{1-m}{2}, \frac{3-m}{2}, \ldots, 0$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2n}^{(j)} = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} x_{2n+1}^{(j)} = A.$$

ii) *Si m est impaire, et* $0 < x_{2k}^{(j)} < 1$, $x_{2k-1}^{(j)} > \frac{1}{1-A}$ *pour* $k = \frac{1-m}{2}, \frac{3-m}{2}, \ldots, 0$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2n}^{(j)} = A, \quad \lim_{n\to+\infty} x_{2n+1}^{(j)} = +\infty.$$

Preuve.

(i) De (4.3), pour $i = 1, 2, \ldots, p$, on obtient

$$\begin{aligned} x_1^{(i)} &= A + \frac{x_{-m}^{(i+1)mod(p)}}{x_0^{(i+1)mod(p)}} < A + \frac{1}{x_0^{(i+1)mod(p)}} < A + (1-A) = 1, \\ x_2^{(i)} &= A + \frac{x_{1-m}^{(i+1)mod(p)}}{x_1^{(i+1)mod(p)}} > A + x_{1-m}^{(i+1)mod(p)} > x_{1-m}^{(i+1)mod(p)} > \frac{1}{1-A}. \end{aligned}$$

Par induction, pour $n \in \mathbb{N}$ et $i = 1, 2, \ldots, p$, on obtient

$$x_{2n-1}^{(i)} < 1, \quad x_{2n}^{(i)} > \frac{1}{1-A}. \tag{4.7}$$

Donc, de (4.3) et (4.7), on a

$$x_{2n}^{(i)} = A + \frac{x_{2n-1-m}^{(i+1)mod(p)}}{x_{2n-1}^{(i+1)mod(p)}} > A + x_{2n-1-m}^{(i+1)mod(p)} > 2A + x_{2n-3-m}^{(i+1)mod(p)} > 3A + x_{2n-5-m}^{(i+1)mod(p)} > \cdots$$

D'où

$$x_{2n}^{(i)} > nA + x_{0}^{(i+1)mod(p)}. \tag{4.8}$$

Passant à la limite quand n tend vers l'infini dans l'inégalité (4.8), on obtient

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n}^{(i)} = \infty. \tag{4.9}$$

D'autre part, de (4.3), (4.7) et (4.9), on obtient

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}^{(i)} = \lim_{n\to\infty}\left(A + \frac{x_{2n-m}^{(i+1)mod(p)}}{x_{2n}^{(i+1)mod(p)}}\right) = A.$$

(ii) La preuve est similaire à la preuve de (i).

■ **Problème ouvert :** Étudier le comportement asymptotique du système (4.3) quand m est pair.

4.3.2 Le cas $A = 1$

Lemme 4.3.1 *Supposons $A = 1$. Alors chaque solution positive de système (4.3) est bornée et permanant.*

Preuve. Soit $\{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)})\}_{n\geq -m}$ une solution positive du système (4.3). Alors, il est clair que pour $n \geq 1$, $x_n^{(j)} > A = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, p$. D'où, on obtient

$$x_i^{(j)} \in \left[L, \frac{L}{L-1}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, m+1, \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

où

$$L = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\beta - 1}\right\} > 1, \quad \alpha = \min_{1 \leq j \leq m+1}\{x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots, x_j^{(p)}\}, \quad \beta = \max_{1 \leq j \leq m+1}\{x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots, x_j^{(p)}\}.$$

Donc, on a

$$L = 1 + \frac{L}{L/(L-1)} \leq x_{m+2}^{(j)} = 1 + \frac{x_1^{(j+1)mod(p)}}{x_{m+1}^{(j+1)mod(p)}} \leq \frac{L}{L-1},$$

ainsi, on obtient ce qui suit

$$L \leq x_m^{(j)} \leq \frac{L}{L-1}.$$

Par induction, nous obtenons

$$x_i^{(j)} \in \left[L, \frac{L}{L-1}\right], \quad j = 1, 2, \ldots, p, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4.10}$$

■

Théorème 4.3.2 *Supposons $A = 1$ et soit $\{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)})\}_{n \geq -m}$ une solution positive du système* (4.3)*. Alors*

$$\begin{aligned} \liminf_{n \to +\infty} x_n^{(i)} &= \liminf_{n \to +\infty} x_n^{(j)}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, p, \\ \limsup_{n \to +\infty} x_n^{(i)} &= \limsup_{n \to +\infty} x_n^{(j)}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, p. \end{aligned}$$

Preuve. De (4.10), nous pouvons définir

$$L_i = \limsup_{n \to \infty} x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.11}$$

$$m_i = \liminf_{n \to \infty} x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.12}$$

Nous prouvons d'abord le théorème pour $p = 2$. Du système (4.3), on a

$$L_1 \leq 1 + \frac{L_2}{m_2}, L_2 \leq 1 + \frac{L_1}{m_1}, m_1 \geq 1 + \frac{m_2}{L_2}, m_2 \geq 1 + \frac{m_2}{L_2},$$

ce qui implique

$$L_1 m_2 \leq m_2 + L_2 \leq m_1 L_2 \leq m_1 + L_1 \leq m_2 L_1,$$

on obtient ainsi les égalités suivantes

$$m_2 + L_2 = m_1 + L_1, \quad L_1 m_2 = m_1 L_2.$$

Donc, on obtient $m_1 = m_2$ et $L_1 = L_2$. Supposons maintenant que

$$L_i = L_j, \quad m_i = m_j, \quad pour\ i, j = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Du système (4.3), on a

$$L_{p-1} \leq 1 + \frac{L_p}{m_p}, L_p \leq 1 + \frac{L_{p-1}}{m_{p-1}}, m_{p-1} \geq 1 + \frac{m_p}{L_p}, m_p \geq 1 + \frac{m_p}{L_p},$$

donc, on obtient

$$L_{p-1} m_p \leq m_p + L_p \leq m_{p-1} L_p \leq m_{p-1} + L_{p-1} \leq m_p L_{p-1},$$

par conséquent, on obtient les égalités suivantes

$$m_p + L_p = m_{p-1} + L_{p-1}, \quad L_{p-1} m_p = m_{p-1} L_p.$$

Donc, on obtient que $m_p = m_{p-1}$ et $L_p = L_{p-1}$. Ainsi, la preuve est complète. ■

4.3.3 Le cas $A > 1$

Théorème 4.3.3 *Supposons que $A > 1$. Alors, le seul point d'équilibre positif $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) = (A+1, A+1, \ldots, A+1)$ du système (4.3) est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. L'équation linéarisée du système (4.3) autour du point d'équilibre $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}})$ est

$$X_{n+1} = BX_n,$$

où $X_n = (x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-m}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-m}^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, , \ldots, x_{n-m}^{(p)})^t$, et $B = (b_{ij})$, $1 \leq i, j \leq pm + p$ est une matrices d'ordre $(pm + p)$, telle que

$$B = \begin{pmatrix} \mathcal{J} & \mathcal{A} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{J} & \mathcal{A} & \mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{J} & \mathcal{A} & \ldots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \mathcal{J} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} & \mathcal{J} \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{A}, \mathcal{J}$ et $\mathcal{O}$ sont des matrices d'ordres $(m + 1)$ définies comme suit

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{A+1} & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{A+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{pm+p}$ les valeurs propres de la matrice B et soit

$$D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_{pm+p})$$

une matrice diagonale où $d_1 = d_{m+2} = d_{2m+3} = \cdots = d_{(p-1)m+p} = 1$, $d_k = d_{m+1+k} = 1 - k\varepsilon$

pour $k \in \{1, 2, \dots, \frac{p}{2}(m+1)\}$. Comme $A > 1$, on peut prendre un nombre positif ε tel que

$$0 < \varepsilon < \frac{A-1}{(m+1)(A+1)}. \tag{4.15}$$

Il est évident que D est une matrice inversible. En calculant la matrice DBD^{-1}, on obtient

$$DBD^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}^{(1)} & \mathcal{A}^{(1)} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{J}^{(2)} & \mathcal{A}^{(2)} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{J}^{(3)} & \mathcal{A}^{(3)} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{J}^{(p-1)} & \mathcal{A}^{(p-1)} \\ \mathcal{A}^{(p)} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{J}^{(p)} \end{pmatrix},$$

où

$$\mathcal{J}^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{d_{(j-1)m+j+1}}{d_{(j-1)m+j}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{d_{(j-1)m+m+j}}{d_{(j-1)m+m+j-1}} & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, p,$$

$$\mathcal{A}^{(j)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{A+1}\frac{d_j}{d_{jm+j+1}} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{A+1}\frac{d_j}{d_{jm+j+1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1,$$

et

$$\mathcal{A}^{(p)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{A+1}\frac{d_{(p-1)m+p}}{d_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{A+1}\frac{d_{(p-1)m+p}}{d_{m+1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $d_1 > d_2 > \dots > d_{\frac{p}{2}(m+1)}$ et $d_{\frac{p}{2}(m+1)} + 1 > d_{\frac{p}{2}(m+1)} + 2 > \dots > d_{pm+p}$ on peut obtenir que

$$\begin{aligned}
d_2 d_1^{-1} &< 1 \\
d_3 d_2^{-1} &< 1 \\
&\vdots \\
d_{m+1} d_m^{-1} &< 1 \\
d_{m+3} d_{m+2}^{-1} &< 1 \\
&\vdots \\
d_{pm+p} d_{pm+p-1} &< 1.
\end{aligned}$$

De plus, de $A > 1$ et (4.15) nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A+1} + \frac{1}{(1-(m+1)\varepsilon)(A+1)} &< \frac{1}{(1-(m+1)\varepsilon)(A+1)} + \frac{1}{(1-(m+1)\varepsilon)(A+1)} \\
&< \frac{2}{(1-(m+1)\varepsilon)(A+1)} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Il est evident que B a les mêmes valeurs propres que DBD^{-1}, nous avons donc

$$\begin{aligned}
\max|\lambda_i| &\leq \|DBD^{-1}\|_\infty \\
&= \max \left\{ \begin{array}{c} d_2 d_1^{-1}, \ldots, d_{m+1} d_m^{-1}, d_{m+3} d_{m+2}^{-1}, \ldots, d_{pm+p} d_{pm+p-1}, \\ \frac{1}{A+1} + \frac{1}{(1-(m+1)\varepsilon)(A+1)} \end{array} \right\} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Nous avons que toutes les valeurs propres de B se trouvent à l'intérieur du disque unitaire. Donc, nous obtenons que le seul point d'équilibre positif $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) = (A+1, A+1, \ldots, A+1)$ est localement asymptotiquement stable. Ainsi, la preuve est terminée. ■

Pour prouver la stabilité globale du point d'équilibre positif, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.3.2 *Supposons que $A > 1$. Alors toute solution positive du système (4.3) est bornée et permanante.*

Preuve. Soit $\{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)})\}_{n\geq -m}$ une solution positive du système (4.3). Donc, il est clair que pour $n \geq 1$, on a $x_n^{(j)} > A > 1, \quad j = 1, 2, \ldots, p$. Donc, nous avons

$$x_i^{(j)} \in \left[L, \frac{L}{L-A}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, m+1, \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

où

$$L = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\beta - 1}\right\} > 1, \quad \alpha = \min_{1\leq j\leq m+1}\{x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots, x_j^{(p)}\}, \quad \beta = \max_{1\leq j\leq m+1}\{x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots, x_{ji}^{(p)}\}.$$

Donc, on obtient

$$L = A + \frac{L}{L/(L-A)} \leq x_{m+2}^{(j)} = A + \frac{x_1^{(j+1)mod(p)}}{x_{m+1}^{(j+1)mod(p)}} \leq \frac{L}{L-1},$$

il résulte que

$$L \leq x_m^{(j)} \leq \frac{L}{L-1}.$$

Par induction, on trouve

$$x_i^{(j)} \in \left[L, \frac{L}{L-1}\right], \quad j = 1, 2, \ldots, p, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4.16}$$

■

Théorème 4.3.4 *Supposons que $A > 1$. Alors le point d'équilibre positif du système (4.3) est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}_{n\geq -m}$ une solution du système (4.3). D'après le Théorème 4.3.3, il suffit de prouver que le point d'équilibre $(A+1, A+1, \ldots, A+1)$ est attractif, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right) = (A+1, A+1, \ldots, A+1).$$

Pour ce faire, nous prouvons que pour $i = 1, 2, \ldots, p$, on a

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(i)} = A + 1.$$

D'après le Lemme 4.3.2, nous pouvons définir

$$L_i = \limsup_{n\to\infty} x_n^{(i)}, \quad m_i = \liminf_{n\to\infty} x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.17}$$

Donc, de (4.3) et (4.17), on a

$$L_i \le A + \frac{L_{(i+1)mod(p)}}{m_{(i+1)mod(p)}}, \quad m_i \ge A + \frac{m_{(i+1)mod(p)}}{L_{(i+1)mod(p)}}. \tag{4.18}$$

Nous prouvons d'abord le théorème pour $p = 2$. De (4.18), on obtient

$$AL_1 + m_1 \le L_1 m_2 \le Am_2 + L_2, \quad AL_2 + m_2 \le L_2 m_1 \le Am_1 + L_1.$$

Donc,

$$AL_1 + m_1 - (Am_1 + L_1) \le Am_2 + L_2 - (AL_2 + m_2),$$

alors

$$(A - 1)(L_1 - m_1 + L_2 - m_2) \le 0,$$

comme $A > 1$, il en résulte que

$$L_1 - m_1 + L_2 - m_2 = 0,$$

nous savons que $L_1 - m_1 \ge 0$ et $L_2 - m_2 \ge 0$, donc, on obtient $L_1 = m_1$ et $L_2 = m_2$. Maintenant, nous supposons que le théorème est vrai pour $p - 1$, c'est-à-dire $L_i = m_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p - 1$ et prouvons le théorème pour p. De (4.18), on a

$$AL_p + m_p \le L_p m_1 \le Am_1 + L_1, \quad AL_1 + m_1 \le L_1 m_p \le Am_p + L_p.$$

D'où,

$$AL_p + m_p - (Am_p + L_p) \leq Am_1 + L_1 - (AL_1 + m_1).$$

Ainsi, on obtient l'inégalité suivante

$$(A-1)(L_p - m_p + L_1 - m_1) \leq 0,$$

comme $A > 1$, $L_1 - m_1 \geq 0$ et $L_p - m_p \geq 0$, on obtient $L_p = m_p$, cela signifie que

$$L_i = m_i, \quad = 1, 2, \ldots, p.$$

Par conséquent, toute solution positive $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}_{n \geq -1}$ du système (4.3) tend vers le point d'équilibre. ■

4.4 L'ordre de convergence

Dans cette section, nous estimons l'ordre de convergence d'une solution qui converge vers le point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) = (A+1, A+1, \ldots, A+1)$ du système (4.3) dans la région de paramètres décrite par $A > 1$. Nous donnons des résultats précis sur l'ordre de convergence des solutions qui convergent vers le point d'équilibre en utilisant les Théorèmes de Perron. Le résultat suivant donne l'ordre de convergence des solutions d'un système d'équations aux différences

$$X_{n+1} = (A + B_n) X_n \tag{4.19}$$

où X_n est un vecteur de dimension $(pm + p)$, $A \in C^{(pm+p)\times(pm+p)}$ est une matrice constante et $B_n : \mathbb{Z}^+ \to C^{(pm+p)\times(pm+p)}$ est une fonction matricielle satisfaisant

$$\|B_n\| \to 0, \ quand \ n \to \infty \tag{4.20}$$

où $\|.\|$ indique toute norme matricielle qui est associée à la norme vectorielle $\|.\|$.

Théorème 4.4.1 *Supposons qu'une solution* $\{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)})\}_{n \geq -m}$ *du système (4.3) converge vers le point d'équilibre* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}})$ *qui est globalement asymptotiquement stable. Donc, le vecteur d'erreur*

$$e_n = \begin{pmatrix} e_n^{(1)} \\ e_{n-1}^{(1)} \\ \vdots \\ e_{n-m}^{(1)} \\ \vdots \\ e_n^{(p)} \\ e_{n-1}^{(p)} \\ \vdots \\ e_{n-m}^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} - \overline{x^{(1)}} \\ x_{n-1}^{(1)} - \overline{x^{(1)}} \\ \vdots \\ x_{n-m}^{(1)} - \overline{x^{(1)}} \\ \vdots \\ x_n^{(p)} - \overline{x^{(p)}} \\ x_{n-1}^{(p)} - \overline{x^{(p)}} \\ \vdots \\ x_{n-m}^{(p)} - \overline{x^{(p)}} \end{pmatrix}$$

de chaque solution du système (4.3) satisfait aux deux relations asymptotiques suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{||e_{n+1}||}{||e_n||} = |\lambda_i J_F((\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}))|, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\lim_{n \to +\infty} (||e_n||)^{\frac{1}{n}} = |\lambda_i J_F((\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}))|, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

où $|\lambda_i J_F((\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}))|$ *est égal au module d'une des valeurs propres de la matrice Jacobienne évaluée au point d'équilibre* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}})$.

Preuve. Tout d'abord, nous allons trouver un système qui satisfait les termes d'erreur. Les termes d'erreur sont donnés par

$$x_{n+1}^{(j)} - \overline{x^{(j)}} = \sum_{i=0}^{m} {}^{(j)}A_i^{(1)}(x_{n-i}^{(1)} - \overline{x^{(1)}}) + \sum_{i=0}^{m} {}^{(j)}A_i^{(2)}(x_{n-i}^{(2)} - \overline{x^{(2)}}) + \cdots + \sum_{i=0}^{m} {}^{(j)}A_i^{(1)}(x_{n-i}^{(p)} - \overline{x^{(p)}}), \quad (4.21)$$

pour $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, p$.

Posons

$$e_n^{(j)} = x_n^{(j)} - \overline{x^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Alors, le système (4.21) peut être écrit comme suit

$$e_{n+1}^{(j)} = \sum_{i=0}^{m} {}^{(j)}A_i^{(1)} e_{n-i}^{(1)} + \sum_{i=0}^{m} {}^{(j)}A_i^{(2)} e_{n-i}^{(2)} + \cdots + \sum_{i=0}^{m} {}^{(j)}A_i^{(1)} e_{n-i}^{(p)},$$

où

$${}^{(i+1)mod(p)}A_0^{(i)} = -\frac{x_{n-m}^{(i+1)mod(p)}}{\left(x_n^{(i+1)mod(p)}\right)^2}, \quad {}^{(i+1)mod(p)}A_m^{(i)} = \frac{1}{x_n^{(i+1)mod(p)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

et les autres paramètres ${}^{(k)}A_i^{(j)}$ sont égaux à zéro.

Si nous considérons le cas limite, alors il est évident que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} {}^{(i+1)mod(p)}A_0^{(i)} &= -\frac{1}{\overline{\overline{x_n^{(i+1)mod(p)}}}}, \\ \lim_{n\to\infty} {}^{(i+1)mod(p)}A_m^{(i)} &= \frac{1}{\overline{\overline{x_n^{(i+1)mod(p)}}}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$${}^{(i+1)mod(p)}A_0^{(i)} = -\frac{1}{\overline{\overline{x_n^{(i+1)mod(p)}}}} + \alpha_n^{(i)}, \quad {}^{(i+1)mod(p)}A_m^{(i)} = \frac{1}{\overline{\overline{x_n^{(i+1)mod(p)}}}} + \beta_n^{(i)}$$

où $\alpha_n^{(i)}, \beta_n^{(i)} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Nous avons maintenant le système suivant de la forme (4.19)

$$e_{n+1} = (A + B_n)e_n$$

où $e_n = \left(e_n^{(1)}, e_{n-1}^{(1)}, \ldots, e_{n-m}^{(1)}, e_n^{(2)}, e_{n-1}^{(2)}, \ldots, e_{n-m}^{(2)}, \ldots, e_n^{(p)}, e_{n-1}^{(p)}, \ldots, e_{n-m}^{(p)}\right)^t$

$$A = J_F((\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}})) = \begin{pmatrix} \mathcal{J} & \mathcal{A}_n^{(1)} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{J} & \mathcal{A}_n^{(2)} & \mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{J} & \mathcal{A}_n^{(3)} & \ldots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \mathcal{J} & \mathcal{A}_n^{(p-1)} \\ \mathcal{A}_n^{(p)} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} & \mathcal{J} \end{pmatrix}$$

$$B_n = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & \mathcal{A} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{I} & \mathcal{A} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{I} & \mathcal{A} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{I} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{I} \end{pmatrix}$$

où

$$\mathcal{A}_n^{(j)} = \begin{pmatrix} \alpha_n^{(j)} & 0 & \dots & 0 & \beta_n^{(j)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

et $\|B_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$. Par conséquent, le système limite de termes d'erreur peut être écrit comme suit

$$e_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & \mathcal{A} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{I} & \mathcal{A} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{I} & \mathcal{A} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{I} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_n^{(1)} \\ e_{n-1}^{(1)} \\ \vdots \\ e_{n-m}^{(1)} \\ \vdots \\ e_n^{(p)} \\ e_{n-1}^{(p)} \\ \vdots \\ e_{n-m}^{(p)} \end{pmatrix}$$

et $\|B_n\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Ce système est exactement le système linéarisé de (4.3) évalué au point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}\right)$. D'après les Théorèmes **??** et **??**, le résultat s'ensuit. ■

4.5 Exemples numériques

Dans cette section, nous allons considérer plusieurs exemples numériques intéressants pour vérifier nos résultats théoriques. Ces exemples montrent des différents types de comportement qualitatif des solutions du système (4.3). Tous les graphiques de cette section sont tracés par Matlab.

Exemple 4.5.1 *Soit $m = 1$ et $p = 10$ dans le système (4.3), alors on obtient le système*

$$x_{n+1}^{(1)} = 1.2 + \frac{x_{n-1}^{(2)}}{x_n^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = A + \frac{x_{n-1}^{(3)}}{x_n^{(3)}}, \dots, \quad x_{n+1}^{(10)} = 1.2 + \frac{x_{n-1}^{(1)}}{x_n^{(1)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.22}$$

avec $A = 1.2 > 1$ et les valeurs initiales $x_{-1}^{(1)} = 3.3, x_0^{(1)} = 2, x_{-1}^{(2)} = 1.1, x_0^{(2)} = 0.3, x_{-1}^{(3)} = 2.3, x_0^{(3)} = 1.5, x_{-1}^{(4)} = 0.5, x_0^{(4)} = 2, x_{-1}^{(5)} = 1.9, x_0^{(5)} = 0.8, x_{-1}^{(6)} = 4, x_0^{(6)} = 1.3, x_{-1}^{(7)} = 1.2, x_0^{(7)} = 1.3, x_{-1}^{(8)} = 2.1, x_0^{(8)} = 2.3, x_{-1}^{(9)} = 3.6, x_0^{(9)} = 0.2, x_{-1}^{(10)} = 2.3, x_0^{(10)} = 1.1$. *Alors le point d'équilibre positif* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(10)}}) = (2.2, 2.2, \dots, 2.2)$ *du système* (4.22)) *est globalement asymptotiquement stable (voir Figure 4.1, Théorème 4.3.3).*

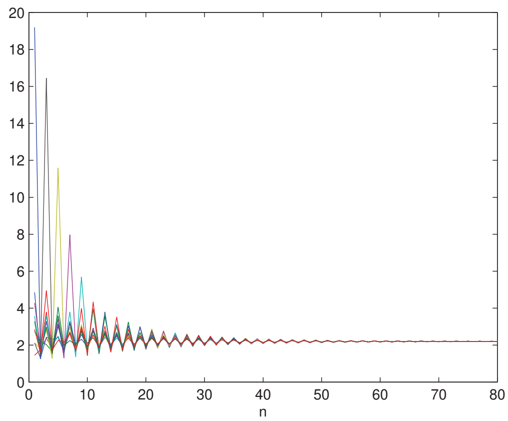

Figure 4.1 – Le graphique du système (4.22) avec $A = 1.2 > 1$.

Exemple 4.5.2 *Considérons le système* (4.22) *avec $A = 1$ est les valeurs initiales* $x_{-1}^{(1)} = 0.3, x_0^{(1)} = 1.1, x_{-1}^{(2)} = 1.3, x_0^{(2)} = 0.3, x_{-1}^{(3)} = 1.4, x_0^{(3)} = 1.5, x_{-1}^{(4)} = 0.5, x_0^{(4)} = 2, x_{-1}^{(5)} = 1.9, x_0^{(5)} = 0.8, x_{-1}^{(6)} = 4, x_0^{(6)} = 1.3, x_{-1}^{(7)} = 1.4, x_0^{(7)} = 1.3, x_{-1}^{(8)} = 0.1, x_0^{(8)} = 1.1, x_{-1}^{(9)} = 1.6, x_0^{(9)} = 1.7, x_{-1}^{(10)} =$

$1.9, x_0^{(10)} = 1.1$. *La solution oscille autour du point d'équilibre positif* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(10)}}) = (2, 2, \ldots, 2)$ *du système* (4.22) *avec des semi-cycles ayant au plus cinq termes. De plus, le point d'équilibre n'est pas globalement asymptotiquement stable. (voir Figure*4.2*, Lemme* 4.3.1*).*

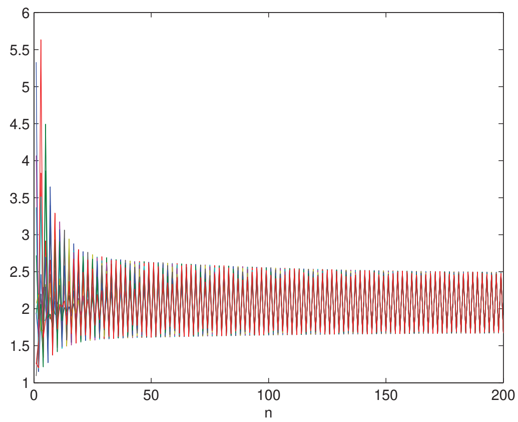

FIGURE 4.2 – Le graphique du système (4.22) avec $A = 1$.

Exemple 4.5.3 *Considérons le système* (4.22) *avec* $A = 0.9$ *est les valeurs initiales* $x_{-1}^{(1)} = 1.2, x_0^{(1)} = 0.7, x_{-1}^{(2)} = 1.2, x_0^{(2)} = 2.3, x_{-1}^{(3)} = 0.4, x_0^{(3)} = 1.1, x_{-1}^{(4)} = 0.8, x_0^{(4)} = 8, x_{-1}^{(5)} = 1.3, x_0^{(5)} = 1.8, x_{-1}^{(6)} = 2.6, x_0^{(6)} = 0.9, x_{-1}^{(7)} = 1.4, x_0^{(7)} = 1.1, x_{-1}^{(8)} = 0.1, x_0^{(8)} = 1.4, x_{-1}^{(9)} = 0.9, x_0^{(9)} = 1.3, x_{-1}^{(10)} = 1.2, x_0^{(10)} = 2.1$. *Alors le point d'équilibre positif* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}) = (1.9, 1.9, \ldots, 1.9)$ *du système* (4.22)*n'est pas globalement asymptotiquement stable. De plus, cette solution est une solution non bornée. (voir Figure* 4.3*, Théorème* 4.3.1*).*

Exemple 4.5.4 *Soit* $m = 5$ *et* $p = 4$ *dans le système* (4.3)*, alors on obtient le système*

$$x_{n+1}^{(1)} = A + \frac{x_{n-5}^{(2)}}{x_n^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = A + \frac{x_{n-5}^{(3)}}{x_n^{(3)}}, \quad x_{n+1}^{(3)} = A + \frac{x_{n-5}^{(4)}}{x_n^{(4)}}, \quad x_{n+1}^{(4)} = A + \frac{x_{n-5}^{(1)}}{x_n^{(1)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.23)$$

avec $A = 1.4 > 1$ *est les valeurs initiales* $x_{-5}^{(1)} = 1.2, x_{-4}^{(1)} = 0.8, x_{-3}^{(1)} = 1.9, x_{-2}^{(1)} = 2.2, x_{-1}^{(1)} = 0.3, x_0^{(1)} = 1.7, x_{-5}^{(2)} = 1.3, x_{-4}^{(2)} = 2.4, x_{-3}^{(2)} = 1.2, x_{-2}^{(2)} = 0.5, x_{-1}^{(2)} = 1.6, x_0^{(2)} = 2.3, x_{-5}^{(3)} = 0.4, x_{-4}^{(3)} = 1.1, x_{-3}^{(3)} = 1.4, x_{-2}^{(3)} = 2.1, x_{-1}^{(3)} = 0.3, x_0^{(3)} = 1.1, x_{-5}^{(4)} = 0.8, x_{-4}^{(4)} = 1.2, x_{-3}^{(4)} = 1.8, x_{-2}^{(4)} = 3.1, x_{-1}^{(4)} = 0.7, x_0^{(4)} = 1.8$,. *Alors le point d'équilibre positif* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}) = (2.4, 2.4, 2.4, 2.4)$ *du système* (4.23) *est globalement asymptotiquement stable (voir Figure* 4.4*, Théorème* 4.3.3*).*

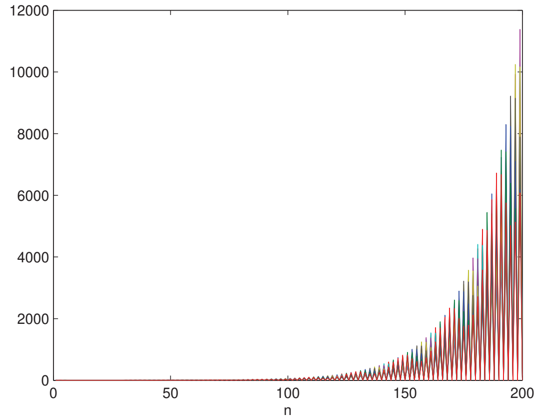

FIGURE 4.3 – Le graphique du système (4.22) avec $A = 0.9 < 1$.

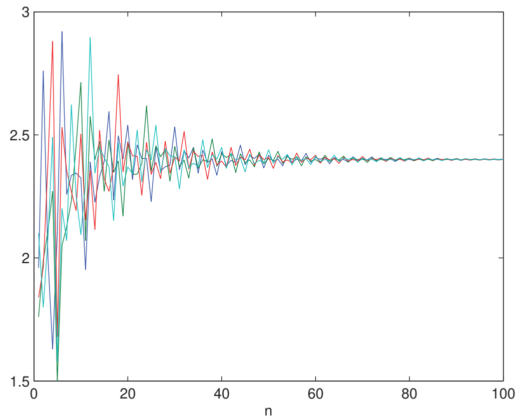

FIGURE 4.4 – Le graphique du système (4.23) avec $A = 1.4 > 1$.

Exemple 4.5.5 *Considérons le système* (4.23) *avec* $A = 1$ *est les valeurs initiales* $x^{(1)}_{-5} = 0.4, x^{(1)}_{-4} = 1.3, x^{(1)}_{-3} = 2.9, x^{(1)}_{-2} = 1.2, x^{(1)}_{-1} = 0.8, x^{(1)}_{0} = 1.2, x^{(2)}_{-5} = 0.3, x^{(2)}_{-4} = 1.4, x^{(2)}_{-3} = 1.3x^{(2)}_{-2} = 0.5, x^{(2)}_{-1} = 1.6, x^{(2)}_{0} = 2.1, x^{(3)}_{-5} = 1.3, x^{(3)}_{-4} = 2.1, x^{(3)}_{-3} = 1.4, x^{(3)}_{-2} = 2.1, x^{(3)}_{-1} = 0.3, x^{(3)}_{0} = 1.5, x^{(4)}_{-5} = 0.6, x^{(4)}_{-4} = 1.2, x^{(4)}_{-3} = 1.3, x^{(4)}_{-2} = 0.8, x^{(4)}_{-1} = 1.7, x^{(4)}_{0} = 0.1,$. *Ensuite, la solution oscille autour du point d'équilibre positif* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}) = (2.4, 2.4, 2.4, 2.4)$ *du système* (4.23) *avec des semi-cycles ayant au plus cinq termes. De plus, l'équilibre n'est pas globalement asymptotiquement stable. (voir Figure 4.5, Lemme 4.3.1).*

Exemple 4.5.6 *Considérons le système* (4.23) *avec* $A = 0.7$ *et les valeurs initiales* $x^{(1)}_{-5} = 1.3, x^{(1)}_{-4} = 0.9, x^{(1)}_{-3} = 2.1, x^{(1)}_{-2} = 0.9, x^{(1)}_{-1} = 0.7, x^{(1)}_{0} = 2.2, x^{(2)}_{-5} = 1.3, x^{(2)}_{-4} = 0.4, x^{(2)}_{-3} = 1.3x^{(2)}_{-2} =$

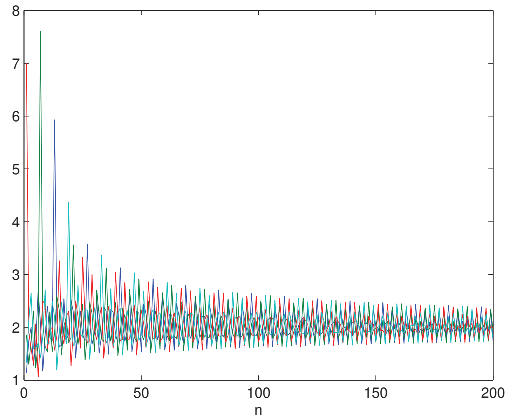

FIGURE 4.5 – Le graphique du système (4.23) avec $A = 1$.

$1.5, x^{(2)}_{-1} = 1.2, x^{(2)}_{0} = 1.1, x^{(3)}_{-5} = 1.7, x^{(3)}_{-4} = 1.6, x^{(3)}_{-3} = 1.5, x^{(3)}_{-2} = 2.3, x^{(3)}_{-1} = 0.9, x^{(3)}_{0} = 1.5, x^{(4)}_{-5} = 0.6, x^{(4)}_{-4} = 1.4, x^{(4)}_{-3} = 2.3, x^{(4)}_{-2} = 3.1, x^{(4)}_{-1} = 2.7, x^{(4)}_{0} = 1.9$. *Alors le point d'équilibre positif* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}) = (1.7, 1.7, 1.7, 1.7)$ *du système* (4.22) *n'est pas globalement asymptotiquement stable. De plus, cette solution est une solution non bornée(voir Figure* 4.6*, Théorème* 4.3.1*).*

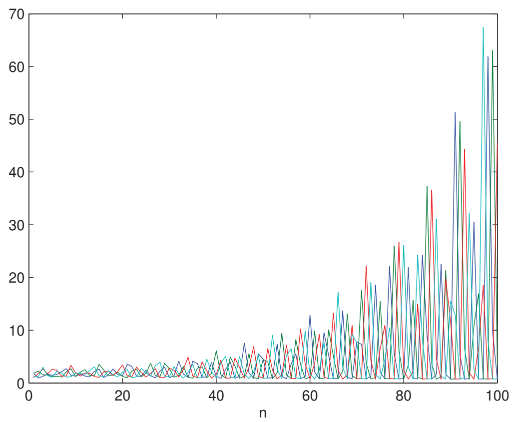

FIGURE 4.6 – Le graphique du système (4.23) avec $A = 0.7 < 1$.

Chapitre 5

Solution générale d'un système d'équations aux différences P-dimensionnel

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous représentons les solutions bien définies du système de p équations aux différences rationnelles d'ordre supérieur

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{x_{n-k}^{(2)}}{a + bx_{n-k}^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{x_{n-k}^{(3)}}{a + bx_{n-k}^{(3)}}, \ldots, \quad x_{n+1}^{(p)} = \frac{x_{n-k}^{(1)}}{a + bx_{n-k}^{(1)}}, \quad n, p \in \mathbb{N}_0 \tag{5.1}$$

où les paramètres a, b sont des nombres réels non nuls et les valeurs initiales $x_{-k}^{(j)}$, $x_{-k+1}^{(j)}, \ldots, x_1^{(j)}$ et $x_0^{(j)}, j = \overline{1,p}$ ne sont pas égales à$-\frac{a}{b}$.

Finalement, le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans la Section 5.2, nous donnons une forme fermée pour la solution bien définie du système de p équations aux différences du premier ordre (5.2). De plus, dans la Section 5.3, nous établissons la solution du système (5.1) en utilisant une transformation appropriée réduisant ce système au système d'équations aux différences du premier ordre (5.2). Dans la Section

(5.4), nous portons notre attention sur le comportement asymptotique de solution positive du système (5.1). Ici nous utilisons essentiellement la théorie de la stabilité linéarisée. Enfin, quelques exemples numériques permettent de confirmer et mettre en évidence notre contributions sont réalisés dans la Section (5.5).

5.2 Présentation de la solution générale du système de premier ordre

Dans cette section, nous donnons une forme fermée pour la solution bien définie du système (5.1). Pour ce but, nous considérons le système de p équations aux différences du premier ordre

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{x_n^{(2)}}{a + bx_n^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{x_n^{(3)}}{a + bx_n^{(3)}}, \ldots, \quad x_{n+1}^{(p)} = \frac{x_n^{(1)}}{a + bx_n^{(1)}}, \quad n, p \in \mathbb{N}_0. \tag{5.2}$$

Tout d'abord, de (5.2)n on a

$$x_{n+1}^{(p-1)} = \frac{x_n^{(p)}}{a + bx_n^{(p)}},$$

on obtient

$$x_{n+1}^{(p-1)} = \frac{x_{n-1}^{(1)}}{a^2 + b(a+1)x_{n-1}^{(1)}}, \quad n \geq 1.$$

En substituant cette dernière expression de $x_{n+1}^{(p-1)}$ dans l'équation suivante

$$x_{n+1}^{(p-2)} = \frac{x_n^{(p-1)}}{a + bx_n^{(p-1)}},$$

on obtient

$$x_{n+1}^{(p-2)} = \frac{x_{n-2}^{(1)}}{a^3 + b(a^2 + a + 1)x_{n-2}^{(1)}}, \quad n \geq 2.$$

Par induction, on a

$$x_{n+1}^{(2)} = \frac{x_{n-(p-2)}^{(1)}}{a^{p-1} + b\left(\sum_{i=0}^{p-2} a^i\right) x_{n-(p-2)}^{(1)}}, \quad n \geq p-2.$$

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{x_{n-(p-1)}^{(1)}}{a^{p} + b\left(\sum_{i=0}^{p-1} a^i\right) x_{n-(p-1)}^{(1)}}, \quad n \geq p-1.$$

D'où il résulte que le système (5.2) peut être écrit comme l'équation suivante

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-(p-1)}}{a^{p} + b\left(\sum_{i=0}^{p-1} a^i\right) x_{n-(p-1)}}, \quad n \geq p-1. \tag{5.3}$$

Posons

$$^{(j)}x_n = x_{pn+j}, \quad n \in \mathbb{N}_0, j = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.4}$$

En utilisant la notation (5.4), nous pouvons écrire (5.3) sous la forme suivante

$$^{(j)}x_{n+1} = \frac{^{(j)}x_n}{a^{p} + b\left(\sum_{i=0}^{p-1} a^i\right) {}^{(j)}x_n}, \quad n \geq p-1, \tag{5.5}$$

pour chaque $j \in \{0, 1, 2, \cdots, p\}$.

Considérons maintenant l'équation

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{a^{p} + b\left(\sum_{i=0}^{p-1} a^i\right) y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.6}$$

L'équation (5.6) peut être réduite à l'équation suivante

$$\mathcal{H}_{n+1} = \frac{(A+1)\mathcal{H}_n - A}{\mathcal{H}_n} \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{5.7}$$

en utilisant le changement de variable

$$y_n = \frac{1}{B}\left(\mathcal{H}_n - A\right), \tag{5.8}$$

où

$$A = a^p, \quad B = b\sum_{r=0}^{p-1} a^r.$$

Nous considérons maintenant l'équation aux différences (5.7) avec la valeur initiale $\mathcal{H}_0$ est un nombre réel non nul. Posons

$$\mathcal{H}_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}. \tag{5.9}$$

Alors l'équation (5.7) devient

$$k_{n+1} - (1+A)k_n + Ak_{n-1} = 0. \tag{5.10}$$

Le cas $A \neq 1$:

Soit $\{k_n\}_{n\geq -1}$ la solution de l'équation (5.10) telle que k_0 et k_{-1} sont des nombres réels non nuls. Les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - (1+A)\lambda + A$ sont $\lambda_1 = A$ et $\lambda_2 = 1$. Alors la solution générale de l'équation (5.10) peut être écrite sous la forme suivante

$$k_n = c_1 + c_2 A^n.$$

En utilisant les valeurs initiales k_0 et k_{-1}, on obtient après quelques calculs

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{k_0 - k_{-1}A}{1-A}, \\ c_2 &= \frac{A(k_{-1} - k_0)}{1-A}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation (5.10) est

$$k_n = \frac{1}{1-A}\left[k_0\left(1-A^{n+1}\right) - Ak_{-1}\left(1-A^n\right)\right]. \tag{5.11}$$

Théorème 5.2.1 *Soit $\{\mathcal{H}_n\}_{n\geq 0}$ une solution bien définie de l'équation (5.7). Alors, pour $n = 2, 3, \ldots,$ on a*

$$\mathcal{H}_n = \frac{A(1-A^n) - \mathcal{H}_0(1-A^{n+1})}{A(1-A^{n-1}) - \mathcal{H}_0(1-A^n)}. \tag{5.12}$$

Ensuite, de (5.8) nous voyons que

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{B}\left(\mathcal{H}_n - A\right) \\ &= \frac{1}{B}\left(\frac{A^n(1-A) - \mathcal{H}_0(1-A)A^n}{A(1-A^{n-1}) - \mathcal{H}_0(1-A^n)}\right) \\ &= \frac{(A-1)x_0}{A^n(A-1) - B(1-A^n)x_0}, \end{aligned}$$

en utilisant

$$\frac{A^n - 1}{A-1} = \sum_{i=0}^{n-1} A^i, \quad \mathcal{H}_0 = A + By_0$$

on obtient que la solution de l'équation aux différences (5.6) est

$$y_n = \frac{y_0}{A^n + B\left(\sum_{i=0}^{n-1} A^i\right) y_0}, \quad n \geq \mathbb{N}_0. \tag{5.13}$$

Ainsi, nous obtenons que la solution de l'équation aux différences (5.5) est

$$^{(j)}x_n = \frac{^{(j)}x_0}{A^n + B\left(\sum_{i=0}^{n-1} A^i\right) {}^{(j)}x_0}, \quad n \geq p-1, \tag{5.14}$$

pour chaque $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

De tout ce qui précède et en utilisant $^{(j)}x_n = x_{pn+j}$, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.1 *Soit* $\{u_n\}_{n\geq -2}$ *une solution bien définie de l'équation* (5.3). *Alors, pour* $n = 2, 3, \ldots,$ *on a*

$$x_{pn+j} = \frac{x_j}{A^n + B\left(\sum_{i=0}^{n-1} A^i\right)x_j}, \quad n \geq p-1, \tag{5.15}$$

pour chaque $j \in \{0, 1, \cdots, (p-1)\}$.

Théorème 5.2.2 *Soit* $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\}_{n\geq 0}$ *une solution bien définie du système* (5.2). *Alors, pour* $n = 2, 3, \ldots,$ *on a*

$$x^{(q)}_{p(n+1)-j} = \frac{x_0^s}{a^{p(n+1)-j} + bx_0^s\left[\left(\sum_{r=p-j}^{p-1} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{pi}\right) + \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a^{pi}\right)\right]}, \quad n \geq p-1$$

où $q \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ *et* $s = (p+q-j)mod(p)$.

Preuve. D'après le Corollaire 5.2.1, nous avons

$$x_{pn-j} = \frac{x_{-j}}{A^n + B\left(\sum_{i=0}^{n-1} A^i\right)x_{-j}}, \quad n, p \in \mathbb{N},$$

où

$$A = a^p, B = b\sum_{r=0}^{p-1} a^r.$$

Donc,

$$x_{p(n+1)-j} = \frac{x_{-j}}{a^{pn} + b\left(\sum_{r=0}^{p-1} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{pi}\right)x_{-j}}.$$

En utilisant

$$\sum_{r=0}^{p-1} a^r = \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right) + \left(\sum_{r=p-j}^{p-1} a^r\right), \tag{5.16}$$

et

$$x_0^{(p+1-j)} = \frac{x_{-j}^{(1)}}{a^j + b\sum_{r=0}^{j-1} a^r x_{-j}^{(1)}}, \tag{5.17}$$

on obtient

$$x_{p(n+1)-j}^{(1)} = \frac{x_0^{(p+1-j)}}{a^{p(n+1)-j} + bx_0^{(p+1-j)}\left[\left(\sum_{r=p-j}^{p-1} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{pi}\right) + \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a^{pi}\right)\right]}.$$

En rappelant que

$$x_n^{(p)} = \frac{x_{n-1}^{(1)}}{a + bx_{n-1}^{(1)}}, \quad x_n^{(i)} = \frac{x_{n-1}^{(i+1)}}{a + bx_{n-1}^{(i+1)}}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, (p-1)\},$$

on trouve

$$x_{p(n+1)-j}^{(q)} = \frac{x_0^s}{a^{p(n+1)-j} + bx_0^s\left[\left(\sum_{r=p-j}^{p-1} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{pi}\right) + \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a^{pi}\right)\right]}, n \geq p-1,$$

où $q \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\quad j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ et $s = (p+q-j) mod(p)$. ■

Le cas $A = 1$:

Alors l'équation (5.7) devient

$$k_{n+1} - 2k_n + k_{n-1} = 0. \tag{5.18}$$

Soit $\{k_n\}_{n\geq -1}$ la solution de l'équation (5.18) telle que k_0 et k_{-1} sont des nombres réels non nuls. La racine du polynôme caractéristique $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ est $\lambda_1 = 1$. Alors la solution générale de l'équation (5.18) peut être écrite sous la forme suivante

$$k_n = c_1 + c_2 n.$$

En utilisant les valeurs initiales k_0 et k_{-1}, quelques calculs conduisent à

$$c_1 = k_0, \quad c_2 = k_0 - k_{-1}.$$

Donc la solution générale de l'équation (5.18) est

$$k_n = k_0(n+1) + k_{-1}n. \tag{5.19}$$

Nous avons donc le théorème suivant.

Théorème 5.2.3 *Soit $\{\mathcal{H}_n\}_{n\geq -1}$ une solution bien définie de l'équation (5.7). Alors, pour $n = 2, 3, \ldots,$ on a*

$$\mathcal{H}_n = \frac{n - \mathcal{H}_0(n+1)}{(n-1) - \mathcal{H}_0 n}. \tag{5.20}$$

Rappelons que

$$y_n = \frac{1}{B}\left(\mathcal{H}_n - 1\right).$$

Puisque $\mathcal{H}_0 = A + By_0$, la solution de l'équation aux différences (5.6) est

$$y_n = \frac{y_0}{1 + Bny_0}.$$

Donc, nous obtenons que la solution de l'équation aux différences (5.5) est

$$^{(j)}x_n = \frac{^{(j)}x_0}{1 + Bn^{(j)}x_0}, \quad n \geq p-1, \tag{5.21}$$

pour chaque $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

D'après ce qui précède, en utilisant le fait que $^{(j)}x_n = x_{pn+j}$, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.2 *Soit $\{x_n\}_{n\geq 0}$ une solution bien définie de l'équation (5.3). Alors, pour $n = 2, 3, \ldots,$ on a*

$$x_{pn+j} = \frac{x_j}{1 + Bnx_j}, \quad n \geq p-1, \tag{5.22}$$

pour chaque $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Théorème 5.2.4 *Soit* $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\}_{n \geq 0}$ *une solution bien définie du système* (5.2). *Alors, pour* $n = 2, 3, \ldots,$ *on a*

$$x_{p(n+1)-j}^{(q)} = \frac{x_0^{(s)}}{a^{-j} + bx_0^{(s)}\left[\left(\sum_{r=0}^{p-1} a^r\right)n + \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right)\right]}, \quad n \geq p-1$$

où $q \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ *et* $s = (p+q-j)\ mod(p)$.

Preuve. D'après le Corollaire 5.2.2, nous avons

$$x_{pn+j} = \frac{x_j}{1 + Bnx_j}, \quad n, p \in \mathbb{N}.$$

où

$$B = b\sum_{r=0}^{p-1} a^r.$$

Donc,

$$x_{p(n+1)+j} = \frac{x_j}{1 + B(n+1)x_j}.$$

En utilisant

$$\sum_{r=0}^{p-1} a^r = \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right) + \left(\sum_{r=p-j}^{p-1} a^r\right), \tag{5.23}$$

et

$$x_0^{(p+1-j)} = \frac{x_{-j}^{(1)}}{a^j + b\sum_{r=0}^{j-1} a^r x_{-j}^{(1)}}, \tag{5.24}$$

on obtient

$$x^{(1)}_{p(n+1)-j} = \frac{x_0^{(p+1-j)}}{a^{-j} + bx_0^{(p+1-j)}\left[\left(\sum_{r=0}^{p-1} a^r\right)n + \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right)\right]}.$$

Cependant

$$x_n^{(p)} = \frac{x^{(1)}_{n-1}}{a + bx^{(1)}_{n-1}}, \quad x_n^{(i)} = \frac{x^{(i+1)}_{n-1}}{a + bx^{(i+1)}_{n-1}}, \quad i \in \{1, \ldots\ldots, p-1\}.$$

D'où

$$x^{(q)}_{p(n+1)-j} = \frac{x_0^{(s)}}{a^{-j} + bx_0^{(s)}\left[\left(\sum_{r=0}^{p-1} a^r\right)n + \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right)\right]}, n \geq p-1,$$

où $q \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\quad j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ et $s = (p+q-j)mod(p)$. ■

5.3 Présentation de la solution générale du système d'ordre supérieur

Dans cette section, nous discutons de la forme du système (5.1). Nous établissons la solution du système (5.1) en utilisant une transformation appropriée le réduisant au système d'équations aux différences du premier ordre (5.2).

5.3.1 Analyse de la forme du système (5.1)

Les valeurs initiales avec les plus petits indices sont $x^{(1)}_{-k}, x^{(2)}_{-k}, \ldots, x^{(p-1)}_{-k}$ et $x^{(p)}_{-k}$. En utilisant (5.1) pour $n = 0$, on obtient les valeurs de $x^{(1)}_1, x^{(2)}_1, \ldots, x^{(p-1)}_1$ et $x^{(p)}_1$ comme suit

$$x^{(1)}_1 = \frac{x^{(2)}_{-k}}{a + bx^{(2)}_{-k}}, \quad x^{(2)}_1 = \frac{x^{(3)}_{-k}}{a + bx^{(3)}_{-k}}, \ldots, x^{(p)}_1 = \frac{x^{(1)}_{-k}}{a + bx^{(1)}_{-k}}.$$

Après avoir connu les valeurs de $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(p-1)}$ et $x_1^{(p)}$, en utilisant les valeurs de $x_{k+2}^{(1)}, x_{k+2}^{(2)}, \ldots, x_{k+2}^{(p-1)}$ et $x_{k+2}^{(p)}$. On a

$$x_{k+2}^{(1)} = \frac{x_1^{(2)}}{a + bx_1^{(2)}}, \quad x_{k+2}^{(2)} = \frac{x_1^{(3)}}{a + bx_1^{(3)}}, \cdots, x_{k+2}^{(p)} = \frac{x_1^{(1)}}{a + bx_1^{(1)}}.$$

Les valeurs de $x_{k+2}^{(1)}, x_{k+2}^{(2)}, \ldots, x_{k+2}^{(p-1)}$ et $x_{k+2}^{(p)}$, en utilisant (5.1) avec $n = 2k + 2$, nous permettent d'obtenir les valeurs de $x_{2k+3}^{(1)}, x_{2k+3}^{(2)}, \ldots, x_{2k+3}^{(p-1)}$ et $x_{2k+3}^{(p)}$ de la façons suivante

$$x_{2k+3}^{(1)} = \frac{x_{k+2}^{(2)}}{a + bx_{k+2}^{(2)}}, x_{2k+3}^{(2)} = \frac{x_{k+2}^{(3)}}{a + bx_{k+2}^{(3)}}, \cdots, x_{2k+3}^{(p)} = \frac{x_{k+2}^{(1)}}{a + bx_{k+2}^{(1)}}.$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_{(k+1)n+1}^{(1)} = \frac{x_{(k+1)n-k}^{(2)}}{a + bx_{(k+1)n-k}^{(2)}}, x_{(k+1)n+1}^{(2)} = \frac{x_{(k+1)n-k}^{(3)}}{a + bx_{(k+1)n-k}^{(3)}}, \cdots, x_{(k+1)n+1}^{(p)} = \frac{x_{(k+1)n-k}^{(1)}}{a + bx_{(k+1)n-k}^{(1)}}.$$

De la même manière, on montre que les valeurs initiales $x_{-r}^{(1)}, x_{-r}^{(2)}, \ldots, x_{-r}^{(p-1)}$ et $x_{-r}^{(p)}$, pour un $r \in \{0, 1, \ldots, k\}$ fixe, déterminent toutes les valeurs des suites $(x_{(k+1)(m+1)-r}^{(1)})_m$, $(x_{(k+1)(m+1)-r}^{(2)})_m$, $\ldots, (x_{(k+1)(m+1)-r}^{(p-1)})_m$ et $(x_{(k+1)(m+1)-r}^{(p)})_m$. Nous avons aussi

$$\begin{cases} x_{(k+1)(n+1)-t}^{(1)} &= \dfrac{x_{(k+1)n-t}^{(2)}}{a + bx_{(k+1)n-t}^{(2)}}, \\ x_{(k+1)(n+1)-t}^{(2)} &= \dfrac{x_{(k+1)n-t}^{(3)}}{a + bx_{(k+1)n-t}^{(3)}}, \\ & \vdots \\ x_{(k+1)(n+1)-t}^{(p)} &= \dfrac{x_{(k+1)n-t}^{(1)}}{a + bx_{(k+1)n-t}^{(1)}}. \end{cases} \tag{5.25}$$

où $t \in \{0, 1, \cdots, k\}$ et $p \in \mathbb{N}$.

5.3.2 Forme de la solution

Nous sommes maintenant prêts à appliquer l'analyse précédente. Soit

$$ {}^{(t)}x_n^{(q)} = x_{(k+1)n-t}, \tag{5.26} $$

où $t \in \{0, 1, \ldots, k\}$ et $q \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

En utilisant la notation (5.26), nous pouvons écrire (5.1) comme suit

$$ {}^{(t)}x_{n+1}^{(1)} = \frac{{}^{(t)}x_n^{(2)}}{a + b^{(t)}x_n^{(2)}}, \quad {}^{(t)}x_{n+1}^{(2)} = \frac{{}^{(t)}x_n^{(3)}}{a + b^{(t)}x_n^{(3)}}, \cdots, \quad {}^{(t)}x_{n+1}^{(p)} = \frac{{}^{(t)}x_n^{(1)}}{a + b^{(t)}x_n^{(1)}}, \tag{5.27} $$

où $t \in \{0, 1, \cdots, k\}$.

Cela signifie que les suites $\left({}^{(t)}x_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \left({}^{(t)}x_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \ldots, \left({}^{(t)}x_n^{(p-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ et $\left({}^{(t)}x_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $t = \overline{0, k}$ sont $p(k+1)$ solutions du système (5.2) avec les valeurs initiales ${}^{(t)}x_0^{(1)}, {}^{(t)}x_0^{(2)}, \ldots, {}^{(t)}x_0^{(p-1)}$ et ${}^{(t)}x_0^{(p)}$, $t = \overline{0, k}$, respectivement.

En appliqunat les Théorèmes 5.2.2 et 5.2.4 aux suites $\left({}^{(t)}x_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \left({}^{(t)}x_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \ldots, \left({}^{(t)}x_n^{(p-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ et $\left({}^{(t)}x_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $t = \overline{0, k}$, nous avons la représentation suivante

- ***Si*** $A \neq 1$

$$ {}^{(t)}x_{p(n+1)-j}^{(q)} = \frac{{}^{(t)}x_0^s}{a^{p(n+1)-j} + b^{(t)}x_0^s\left[\left(\sum_{r=p-j}^{p-1} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{pi}\right) + \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a^{pi}\right)\right]}, \quad n \geq p-1. $$

- ***Si*** $A = 1$

$$ {}^{(t)}x_{p(n+1)-j}^{(q)} = \frac{{}^{(t)}x_0^{(s)}}{a^{-j} + bx_0^{(s)}\left[\left(\sum_{r=0}^{p-1} a^r\right)n + \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right)\right]}, \quad n \geq p-1 $$

où $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $\quad q \in \{1, 2, \ldots, p\}, t \in \{0, 1, \ldots, k\}$ et $s = (p + q - j) mod(p)$.

En revenant à la notation originale, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 5.3.1

Soit $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right\}_{n\geq -1}$ *une solution bien définie du système* (5.1). *Alors, pour* $n = 2, 3, \ldots,$ *on a*

- **Si** $A \neq 1$

$$x^{(q)}_{(k+1)(p(n+1)-j)-t} = \frac{x^s_{-t}}{a^{p(n+1)-j} + bx^s_{-t}\left[\left(\sum_{r=p-j}^{p-1} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{pi}\right) + \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a^{pi}\right)\right]}, \quad n \geq p-1.$$

- **Si** $A = 1$

$$x^{(q)}_{(k+1)(p(n+1)-j)-t} = \frac{x^{(s)}_{-t}}{a^{-j} + bx^{(s)}_{-t}\left[\left(\sum_{r=0}^{p-1} a^r\right)n + \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right)\right]}, \quad n \geq p-1,$$

où $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, \quad q \in \{1, 2, \ldots, p\}, t \in \{0, 1, \ldots, k\}$ *et* $s = (p + q - j) mod(p)$.

5.4 Stabilité globale de la solution positive

Dans cette section, nous étudions le caractère de stabilité globale de la solution du système (5.1). Puisque $a > 1$ il est facile de montrer que (5.1) a un seul point d'équilibre positif réel donné par

$$\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Après avoir mentionné l'existence du point d'équilibre pour le système (5.1), analysons la stabilité asymptotique de ce dernier en utilisant la méthode de linéarisation.

Théorème 5.4.1 *Le point d'équilibre*

$$\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) = (0, 0, \ldots, 0).$$

est localement asymptotiquement stable.

Preuve. Le système linéarisé autour du point d'équilibre

$$\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) = (0, 0, \ldots, 0).$$

est donné par

$$X_{n+1} = JX_n, \tag{5.28}$$

où

$$X_n = \left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right)^t \tag{5.29}$$

et

$$J = \left(\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{a} & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
1 & 0 & & & 0 & & & & & & & & & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & \ddots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
& & & 1 & 0 & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
& & & & & 1 & & & & & & & & 0 \\
& & & & & & \ddots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a} \\
\vdots & & & \vdots & & 0 & & 1 & & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & & & \ldots & \ldots & 0 & & & \\
0 & & & 0 & & 0 & & & & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & & & & & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right).$$

Le polynôme caractéristique de J est

$$P(\lambda) = (-\lambda)^{p(k+1)} + (-1)^k \left(\frac{1}{a}\right)^p.$$

Maintenant, considérons les deux fonctions définies par

$$\varphi(\lambda) = (-\lambda)^{(p)(k+1)}, \quad \phi(\lambda) = (-1)^k \left(\frac{1}{a}\right)^p .$$

On a

$$\left|\phi(\lambda)\right| < \left|\varphi(\lambda)\right|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1$$

Ainsi, d'après le Théorème de Rouché φ et $P = \varphi + \phi$ ont le même nombre de zéros dans le disque unité $|\lambda| < 1$, et puisque φ admet comme racine $\lambda = 0$ de multiplicité $p(k+1)$, alors toutes les racines de P sont dans le disque $|\lambda| < 1$. Ainsi, par le Théorème 1.1.5 le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable. ■

Corollaire 5.4.1 *Le point d'équilibre M est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. D'après le Théorème (5.4.1), M est localement asymptotiquement stable, il reste donc à montrer que ce point est globalement attractif. Pour cela, nous utilisons le Corollaire (5.3.1).

$$\lim_{n\to+\infty} x^{(q)}_{(k+1)(p(n+1)-j)-t} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^s_{-t}}{a^{p(n+1)-j} + bx^s_{-t}\left[\left(\sum_{r=p-j}^{p-1} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{pi}\right) + \left(\sum_{r=0}^{p-(j+1)} a^r\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a^{pi}\right)\right]} = 0$$

■

5.5 Exemples numériques

Dans cette section, nous allons considérer plusieurs exemples numériques pour vérifier nos résultats théoriques. Ces exemples montrent différents types de comportement qualitatif des solutions du système (5.1). Tous les graphiques de cette section sont tracés par Matlab.

Exemple 5.5.1 *Soit $a = 7, b = 3, k = 3$ et $p = 7$ dans le système (5.1), alors on obtient le système*

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{x_{n-3}^{(2)}}{7 + 3x_{n-3}^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{x_{n-3}^{(3)}}{7 + 3x_{n-3}^{(3)}}, \ldots, \quad x_{n+1}^{(7)} = \frac{x_{n-3}^{(1)}}{7 + 3x_{n-3}^{(1)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.30}$$

Supposons

$$\begin{array}{lllllll}
x_{-3}^{(1)} = 1.6, & x_{-2}^{(1)} = 3.8, & x_{-1}^{(1)} = 4.3, & x_{0}^{(1)} = 6.4 & x_{-3}^{(2))} = 6.6, & x_{-2}^{(2)} = 1.8, & x_{-1}^{(2)} = 3.1, \\
x_{0}^{(2)} = 11.3, & x_{-3}^{(3)} = 5.3, & x_{-2}^{(3)} = 1.3, & x_{-1}^{(3)} = 4.2, & x_{0}^{(3)} = 4.6 & x_{-3}^{(4))} = 7.1, & x_{-2}^{(4)} = 1.3, \\
x_{-1}^{(4)} = 3.5, & x_{0}^{(4)} = 1.2, & x_{-3}^{(5)} = 5.5, & x_{-2}^{(5)} = 1.4, & x_{-1}^{(5)} = 16, & x_{0}^{(5)} = 3.8 & x_{-3}^{(6))} = 2.2, \\
x_{-2}^{(6))} = 0.1, & x_{-1}^{(6)} = 11, & x_{0}^{(6)} = 3.8, & x_{-3}^{(7)} = 1.9, & x_{-2}^{(7)} = 12.3, & x_{-1}^{(7)} = 5, & x_{0}^{(7)} = 1.3.
\end{array}$$

(Voir la figure 5.1).

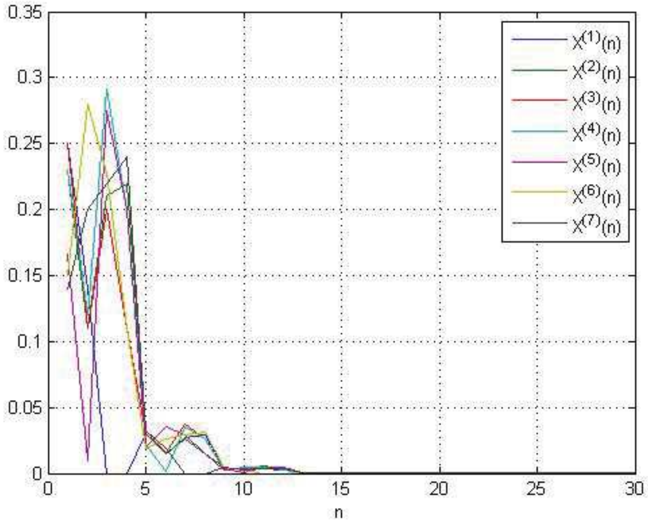

FIGURE 5.1 – Le graphique du système (5.30)

Exemple 5.5.2 *Soit $a = 3, b = 2, k = 1$ et $p = 10$ dans le système (5.1), alors on obtient le système*

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{x_{n-1}^{(2)}}{3 + 2x_{n-1}^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{x_{n-1}^{(3)}}{3 + 2x_{n-1}^{(3)}}, \ldots, \quad x_{n+1}^{(10)} = \frac{x_{n-1}^{(1)}}{3 + 2x_{n-1}^{(1)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.31}$$

Supposons

$$x_{-1}^{(1)} = 0.3, \quad x_{0}^{(1)} = 7, \quad x_{-1}^{(2)} = 5.1, \quad x_{0}^{(2)} = 0.3 \quad x_{-1}^{(3))} = 4; \quad x_{0}^{(3)} = 1.5; \quad x_{-1}^{(4)} = 6.5,$$
$$x_{0}^{(4)} = 2, \quad x_{0-1}^{(5)} = 6, \quad x_{0}^{(5)} = 0.8, \quad x_{-1}^{(6)} = 2, \quad x_{0}^{(6)} = 1.3, \quad x_{-1}^{(7)} = 5, \quad x_{0}^{(7)} = 1.3,$$
$$x_{-1}^{(8))} = 2.1, \quad x_{0}^{(8)} = 5.3, \quad x_{-1}^{(9)} = 3.6, \quad x_{0}^{(9)} = 0.2, \quad x_{-1}^{(10)} = 12.3 \quad x_{0}^{(10)} = 1.1.$$

(Voir la figure 5.2).

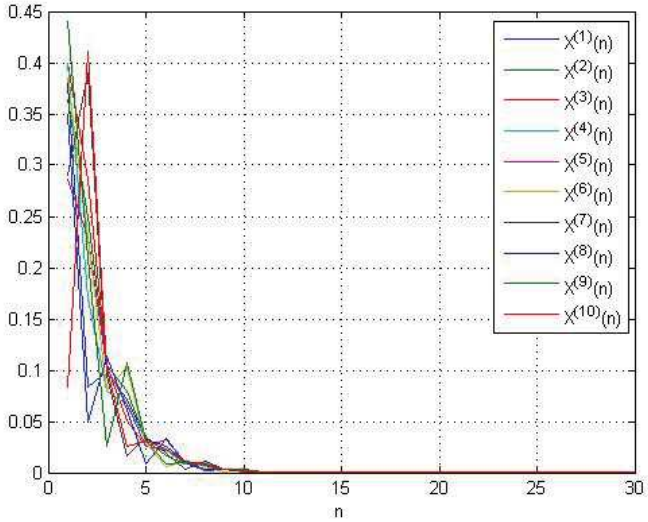

FIGURE 5.2 – Le graphique du système (5.31)

Exemple 5.5.3 *Soit $a = 5, b = 8, k = 2$ et $p = 14$ dans le système* (5.1), *alors on obtient le système*

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{x_{n-2}^{(2)}}{5 + 8x_{n-2}^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{x_{n-2}^{(3)}}{5 + 8x_{n-2}^{(3)}}, \ldots, \quad x_{n+1}^{(14)} = \frac{x_{n-2}^{(1)}}{5 + 8x_{n-2}^{(1)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.32}$$

Supposons

$$
\begin{array}{ccccccc}
x^{(1)}_{-2} = 1.8, & x^{(1)}_{-1} = 8.3, & x^{(1)}_{0} = 6.1, & x^{(2)}_{-2} = 2.6, & x^{(2)}_{-1} = 3.1, & x^{(2)}_{0} = 0.3, & x^{(3)}_{-2} = 5.3, \\
x^{(3)}_{-1} = 0.5, & x^{(3)}_{0} = 2, & x^{(4)}_{-2} = 14.3, & x^{(4)}_{-1} = 6, & x^{(4)}_{0} = 0.8, & x^{(5)}_{-2} = 0.1, & x^{(5)}_{-1} = 2, \\
x^{(5)}_{0} = 3.3, & x^{(6)}_{-2} = 12.3 & x^{(6)}_{-1} = 5, & x^{(6)}_{0} = 1.3, & x^{(7)}_{-2} = 22, & x^{(7)}_{-1} = 3.1, & x^{(7)}_{0} = 1.3, \\
x^{(8)}_{-2} = 33, & x^{(8)}_{-1} = 3.6, & x^{(8)}_{0} = 0.2, & x^{(9)}_{-2} = 0.3, & x^{(9)}_{-1} = 12.3, & x^{(9)}_{0} = 1.1, & x^{(10)}_{-2} = 1.2, \\
x^{(10)}_{-1} = 0.2, & x^{(10)}_{0} = 5, & x^{(11)}_{-2} = 11, & x^{(11)}_{-1} = 1, & x^{(11)}_{0} = 5.2, & x^{(12)}_{-2} = 12, & x^{(12)}_{-1} = 1.9, \\
x^{(12)}_{-2} = 4, & x^{(13)}_{-1} = 3, & x^{(13)}_{0} = 6, & x^{(13)}_{-2} = 16, & x^{(14)}_{-1} = 11, & x^{(14)}_{0} = 1.6, & x^{(14)}_{-2} = 5.3.
\end{array}
$$

(Voir la figure 5.3).

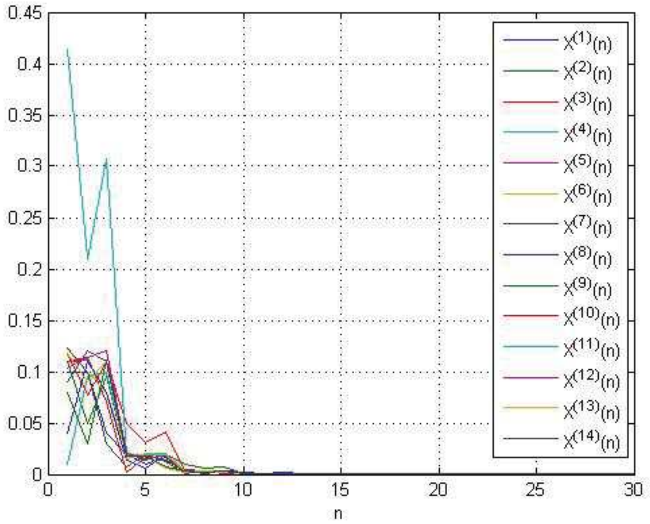

FIGURE 5.3 – Le graphique du système (5.32)

Conclusion générale et perspectives

La présente thèse rassemble quelques études réalisées sur la forme et le comportement de solutions de certaines classes des systèmes d'équations aux différences non-linéaires. Notre travail généralise un grand nombre de travaux existants dans la littérature sur les systèmes d'équations aux différences.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté la forme fermée de la solution du système de deux équations aux différences d'ordre trois suivant

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}x_{n-2}}{y_n(a + by_{n-1}x_{n-2})}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}y_{n-2}}{x_n(a + bx_{n-1}y_{n-2})}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Nous avons donné également quelques explications théoriques liées à la présentation. Ce travail a généralisé et a donné des explications théoriques des resultats obtenus dans [27]. Comme perspectives dans cette piste nous allons essayer d'étudier au futur le système de deux équations aux différences d'ordre supérieure suivant

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-k}x_{n-(k+1)}}{y_n(a + by_{n-k}x_{n-(k+1)})}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-k}y_{n-(k+1)}}{x_n(a + bx_{n-k}y_{n-(k+1)})}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0, \quad k \geq 3.$$

Le deuxième chapitre a été l'objet de deux systèmes d'équations aux différences non linéaires rationnelles d'ordre supérieur avec des coefficients en termes des nombres de Fibonacci et de Lucas.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié le comportement global des solutions du système composé de p équations aux différences rationnelles suivant

$$x_{n+1}^{(1)} = A + \frac{x_{n-m}^{(2)}}{x_n^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = A + \frac{x_{n-m}^{(3)}}{x_n^{(3)}}, \ldots, \quad x_{n+1}^{(p)} = A + \frac{x_{n-m}^{(1)}}{x_n^{(1)}}, \quad n, m, p \in \mathbb{N}_0$$

où le paramètre A et les valeurs initiales $x_{-m}^{(j)}, x_{-m+1}^{(j)}, \ldots, x_{-1}^{(j)}, x_0^{(j)}, j = 1, 2, \ldots, p$ sont des nombres réels positifs. Notre étude a généralisé les resultats obtenus dans [20], [31] et [72]. Dans ce contexte, nous voulons travailler pour avoir plus de résultats sur le comportement global des systèmes plus généraux, plus précisément nous allons essayer d'étudier les problèmes suivants

Problème 1 : étudier le comportement asymptotique du système d'équations aux différences

$$x_{n+1}^{(1)} = A_1 + \frac{x_{n-m}^{(2)}}{x_n^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = A_2 + \frac{x_{n-m}^{(3)}}{x_n^{(3)}}, \ldots, \quad x_{n+1}^{(p)} = A_p + \frac{x_{n-m}^{(1)}}{x_n^{(1)}}, \quad n, m, p \in \mathbb{N}_0$$

où A_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ et $x_{-m}^{(j)}, x_{-m+1}^{(j)}, \ldots, x_{-1}^{(j)}, x_0^{(j)}, j = 1, 2, \ldots, p$ sont des nombres réels positifs.

Problème 2 : étudier le comportement asymptotique du système d'équations aux différences

$$x_{n+1}^{(1)} = \alpha_n + \frac{x_{n-m}^{(2)}}{x_n^{(2)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \alpha_n + \frac{x_{n-m}^{(3)}}{x_n^{(3)}}, \ldots, \quad x_{n+1}^{(p)} = \alpha_n + \frac{x_{n-m}^{(1)}}{x_n^{(1)}}, \quad n, m, p \in \mathbb{N}_0$$

où α_n est une suite (cette suite peut être choisie convergente, périodique ou bornée), et $x_{-m}^{(j)}, x_{-m+1}^{(j)}, \ldots, x_{-1}^{(j)}, x_0^{(j)}, j = 1, 2, \ldots, p$ sont des nombres réels positifs..

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié, motivés par la sélébre équation de Ricatti (**??**) proposée dans [52], le système de p équations aux différences suivant

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{x_{n-k}^{(j+1)(mod(p))}}{a + bx_{n-k}^{((j+1)(mod(p)))}}, \quad n, p, k \in \mathbb{N}_0, j = \overline{1, p},$$

ce système est une généralisation de l'équation de Ricatti dans un cas particulier où $\alpha = 0$. Dans la cas où $\alpha \neq 0$ Stevic dans [59] a réussi d'étudier une généralisation tridimensionnelle seulement de l'équation de Riccati. Dans ce cadre, comme perspectives nous allons étudier au futur une généralisation p-dimensionnelle de l'équation (**??**), autrement dit le système d'équations aux différences suivant

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{\alpha_i + \beta_i x_{n-k}^{(j+1)(mod(p))}}{\gamma_i + \gamma_i x_{n-k}^{((j+1)(mod(p)))}}, \quad n, p, k \in \mathbb{N}_0, i, j = \overline{1, p}.$$

où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ et δ_i sont des nombres réels ou complexes.

Bibliographie

[1] Y. Akrour, N. Touafek, Y. Halim, *On a system of difference equations of second order solved in closed form*, Miskolc Mathematical Notes **20**(2)(2019), 701–717.

[2] L. J. S. Allen, M. K. Hannigan, M. J. Strauss, *Mathematical analysis of a model for plant-herbivore system*, Bulletin of Mathematical Biology **55**(4)(1993), 847–864.

[3] L. J. S. Allen, M. K. Hannigan, M. J. Strauss, *Development and analysis of mathematical model for a plant-herbivore system*, Proceeding of the first world congress of nonlinear analysts, WCNA92 **4**(1995), 3723-3732.

[4] L. J. S. Allen, M. J. Strauss, H. G. Tnorvilson, W. N. Lipe, *A preliminary mathematical model of the apple twig borer (Coleoptera :Bostricida) and grapes on the Texas high planes*, Ecological Modelling **58**(1991), 369-382.

[5] M. Aloqeili, *Dynamics of a rational difference equation*, Applied Mathematics and Computation **176**(2006), 768–774.

[6] J. M. Amigó, M. Small, *Mathematical methods in medicine : neuroscience, cardiology and pathology*, Philosophical Transactions of the Royal Society A **375**(2017), 20170016.

[7] F. Belhannache, *Etude qualitative du comportement des solutions de certains équations et systèmes d'équations aux différences*, Thèse de Doctorat, Université de Jijel (2017).

[8] F. Belhannache, N. Touafek, R. Abo-Zeid, *Dynamics of a third-order rational difference equation,* Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie. Nouvelle Série **107**(2016), 13–22.

[9] F. Belhannache, N. Touafek, R. Abo-Zeid, *On a higher order rational difference equation,* Applied Mathematics and Information Sciences **34**(2016), 369–382.

[10] E. Camouzis, G. Ladas, *Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures*, Chapman & Hall/CRC, (2008).

[11] C. Cinar, *On the positive solutions of the difference equation* $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}}$, Applied Mathematics and Computation **150**(2004), 21–24.

[12] C. Cinar, *On the positive solutions of the difference equation* $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{-1 + x_n x_{n-1}}$, Applied Mathematics and Computation **158**(2004), 813–816.

[13] C. Cinar, *On the positive solutions of the difference equation* $x_{n+1} = \dfrac{a x_{n-1}}{-1 + b x_n x_{n-1}}$, Applied Mathematics and Computation **156**(2004), 587–590.

[14] C. W. Clark, *A delayed recruitement of a population dynamics with an application to baleen whale population*, Journal of Mathematical Biology **3**(1976), 381-391.

[15] A. De Moivre, *De Fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis*, Deque Summandis Terminis Quarumdam Serierum Aequali Intervallo a se Distantibus. philos. Trans 32, (1722), 162-178.

[16] A. De Moivre, *The Doctrine of Chances*, London(1718).

[17] A. De Moivre, *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, London(1730).

[18] A. De Moivre, *The Doctrine of Chances*, 3rd edn. Strand, London(1756).

[19] I. Dekkar, *Variations sur les équations aux différences (non) autonomes*, Thèse de Doctorat, Université de Jijel (2017).

[20] R. Devault, C. Kent, W. Kosmala, *On the recursive sequence* $x_{n+1} = p + (x_{n-k}/x_n)$, Journal of Difference Equations and Applications **9**(8) (2003), 721–730.

[21] S. Elaydi, *An introduction to difference equations*, Undergraduate Texts in Mathematics, 3rd edition, Springer, New York, USA, (2005).

[22] H. M. El-Owaidy, A. M. Ahmed, M. S. Mousa, *On asymptotic behaviour of the difference equation* $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-k}/x_n)$, Applied Mathematics and Computation **147**(1) (2004), 163–167.

[23] M. F. Elettreby, H. El-Metwally, *On a system of difference equations of an economic model*, Discrete Dynamics in Nature and Society (2013), Article ID 405628.

[24] H. El-Metwally, *Global behavior of an economic model*, Chaos, Solitons & Fractals **33**(2007), 994-1005.

[25] E. M. Elsayed, *Solutions of rational difference systems of order two*, Mathematical and Computer Modelling **55**(2012), 378–384.

[26] E. M. Elsayed, *On a system of two nonlinear difference equations of order two*, Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society **18** (2015), 353–368.

[27] E. M. Elsayed, T. F. Ibrahim, *Periodicity and solutions for some systems of nonlinear rational difference equations*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics **44** (2015), 1361–1390.

[28] E. M. Elsayed, *Solution for systems of difference equations of rational form of order two*, Computational and Applied Mathematics **33** (2014), 751–765.

[29] L. Fibonacci, *Liber Abbaci*, (1202).

[30] E. A. Grove, G. Ladas, *Periodicities in nonlinear difference equations*, Chapman & Hall/CRC, (2005).

[31] M. Gümüş, *The global asymptotic stability of a system of difference equations*, Journal of Difference Equations and Applications **24(6)**(2018), 976-991

[32] Y. Halim, *Etude du comportement des solutions de certaines classes d'équations aux différences*, Thèse de Doctorat, Université de Jijel (2016).

[33] Y. Halim, N. Touafek, E. M. Elsayed, *Closed forme solution of some systems of rational difference equations in terms of Fibonacci numbers*, Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems. Series A. Mathematical Analysis **21** (2014), 473–486.

[34] Y. Halim, N. Touafek, Y. Yazlik, *Dynamic behavior of a second-order nonlinear rational difference equation*, Turkish Journal of Mathematics **39** (2015), 1004-1018 .

[35] Y. Halim, M. Bayram, *On the solutions of a higher-order difference equation in terms of generalized Fibonacci sequences*, Mathematical Methods in the Applied Sciences **39** (2016), 2974–2982.

[36] Y. Halim, *A system of difference equations with solutions associated to Fibonacci numbers*, International Journal of Difference Equations **11** (2016), 65–77.

[37] Y. Halim, J. F. T. Rabago, *On some solvable systems of difference equations with solutions associated to Fibonacci numbers*, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications **5**(1) (2017), 166–178.

[38] Y. Halim, J. F. T. Rabago, *On the solutions of a second-order difference equation in terms of generalized Padovan sequences*, Mathematica Slovaca **68**(3) (2018), 625–638.

[39] Y. Halim, A. Khelifa, M. Berkal, *Representation of solutions of a two-dimensional system of difference equations*, Miskolc Mathematical Notes **21**(1) (2020), 203–218.

[40] Y. Halim, M. Berkal, A. Khelifa, *On a three-dimensional solvable system of difference equations*, Turkish Journal of Mathematics **44**(4) (2020), 1263–1288.

[41] Y. Halim, A. Khelifa, M. Berkal, A. Bouchair, *On a solvable system of p difference equations of higher order*, Periodica Mathematica Hungarica, (2021) https ://doi.org/10.1007/s10998-021-00421-x.

[42] Y. Halim, A. Allam, Z. Bengueraichi , *Dynamical behavior of a system of P-dimensional nonlinear difference equations*, Mathematica Slovaca **71**4 (2021), 903–924.

[43] V. E. Hoggatt, *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton Mifflin, Boston, USA, (1969).

[44] S. I. Lehmann, *The fabulous Fibonacci numbers*, Prometheus Books, New York, USA, (2007).

[45] A. Khelifa, Y. Halim, M. Berkal, *Solutions of a system of two higher-order difference equations in terms of Lucas sequence*, Universal Journal of Mathematics and Applications **2**(4) (2019), 202-211.

[46] A. Khelifa, Y. Halim, A. Bouchair, M. Berkal, *On a system of three difference equations of higher order solvedin terms of Lucas and Fibonacci numbers*, Mathematica Slovaca **70**(3) (2020), 641-656.

[47] A. Khelifa, Y. Halim, M. Berkal, *On the solutions of a system of* $(2p+1)$ *difference equations of higher order*, Miskolc Mathematical Notes **22**(1) (2021), 331-350.

[48] A. Khelifa, Y. Halim, *Global behavior of P-dimensional difference equations system* , Electronic Research Archive **29**(5)(2021), 3121-3139.

[49] A. Khelifa, Y. Halim, *General solutions to systems of difference equations and some of their representations*, Journal of Applied Mathematics and Computing **67**(2021), 439-453.

[50] V. L. Kocic and G. Ladas, *Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications*, Kluwer Academic Publishers, (1993).

[51] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas numbers with applcations*, A Wiley Interscience Publication, (2001).

[52] L. M. Milne-Thomson, *The calculus of finite differences*, Macmillan And Company, London (1933).

[53] G. Papaschinopoulos, G. Stefanidou, K. B. Papadopoulos, *On a modification of a discrete epidemic model*, Computers & Mathematics with Applications **59**(11) (2010), 3559–3569.

[54] G. Papaschinopoulos, C. J. Schinas, *On the behavior of the solutions of a system of two nonlinear difference equations*, Communications on Applied Nonlinear Analysis **5**(2) (1998), 47-59.

[55] G. Papaschinopoulos, C.J. Schinas, *Oscillation and asymptotic stability of two systems of difference equations of rational form*, Journal of Difference Equations and Applications **7**(2001), 601–617.

[56] M. Pituk, *More on Poincaré's and Peron's theorems for difference equations*, Journal of Difference Equations and Applications **8** (2002), 201-216.

[57] S. Stevic, *On a discrete epidemic model*, Discrete Dynamics in Nature and Society, Article ID 87519 (2007), 10 pages.

[58] S. Stević, *Representation of solutions of bilinear difference equations in terms of generalized Fibonacci sequences*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations **67** (2014), 15 pages.

[59] S. Stevic, *Representations of solutions to linear and bilinear difference equations and systems of bilinear difference equations*, Advances in Differential Equations **474** (2018), 21 pages.

[60] S. Stević, *More on a rational recurrence relation*, Applied Mathematics E-Notes **4**(2004), 80–85.

[61] S. Stević, *On a third-order system of difference equations*, Applied Mathematics and Computation **218** (2012), 7649–7654.

[62] S. Stević, B. Iricianin, W. Kosmala, Z. Šmarda , *Note on the bilinear difference equation with a delay*, Mathematical Methods in the Applied Sciences **41** (2018), 9349–9360.

[63] D. T. Tollu, Y. Yazlik, N. Taskara, *On the solutions of two special types of Riccati difference equation via Fibonacci numbers*, Advances in Differential Equations **174** (2013), 7 pages.

[64] N. Touafek, *On a second order rational difference equation*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics **41** (2012), 867-874.

[65] N. Touafek, *On some fractional systems of difference equations*,Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics **9**(2)(2014), 73-86.

[66] N. Touafek, Y. Halim, *Global attractivity of a rational difference equation*, Mathematical Sciences Letters, **2**(3) (2013), 161-165.

[67] N. Touafek, Y. Halim, *On max type difference equations : expressions of solutions*, International Journal of Nonlinear Science **11**(2011), 396-402.

[68] N. Touafek, E. M. Elsayed, *On the periodicity of some systems of nonlinear difference equations*, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie. Nouvelle Série, **55**(103) (2012), 217-224.

[69] N. Touafek, E. M Elsayed, *On the solutions of systems of rational difference equations*, Mathematical and Computer Modelling **55**(7)(2012), 1987-1997.

[70] N. Touafek, *On a general system of difference equations defined by homogeneous functions*, Mathematica Slovaca **71**(3), (2021), 697-720.

[71] S. Vajda , *Fibonacci and Lucas numbers and the golden section : Theory and applications*, Ellis Horwood Limited, (1989).

[72] D. Zhang, W. Ji, L.Wang, X. Li, *On the symmetrical system of rational difference equation* $x_{n+1} = A + y_{n-k}/y_n$, $y_{n+1} = A + x_{n-k}/x_n$, Applied Mathematics **4** (2013), 834–837.