RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUES ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BENYAHIA-JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

N° d'ordre :
Série :

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de

Doctorat LMD

Filière Mathématiques
Spécialité Mathématiques et Applications
présentée et soutenue par

Warda Belhoula

Thème

Résultats d'existence de solutions pour des inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps

soutenue le ...

Devant le jury composé de

Président	N. Arada	M.C.A. Univ. Mohammed Seddik Benyahia-Jijel
Directeur	D. AZZAM-LAOUIR	Prof. Univ. Mohammed Seddik Benyahia-Jijel
Examinateur	N. Touafek	Prof. Univ. Mohammed Seddik Benyahia-Jijel
Examinateur	Y. Daikh	M.C.A. Univ. Mohammed Seddik Benyahia-Jijel
Examinateur	K. Mebarki	M.C.A. Univ. Béjaia
Examinateur	S. Saidi	M.C.A. Univ. Mohammed Seddik Benyahia-Jijel

Remerciements

La reconnaissance est la mémoire du coeur.
Hans Christain Andersen
Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent du bonheur ; elles sont les charmants jardiniers par qui nos âmes sont fleuries.
Marcel Proust

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à ma directrice de thèse ***Madame Dalila Azzam-Laouir***, Professeur à l'université Mohammed Seddik Benyahia-Jijel, qui m'a dirigé tout au long de ces quatre années de thèse. Elle a toujours été disponible, à l'écoute de mes nombreuses questions, et s'est toujours intéressée à l'avancée de mes travaux. Les nombreuses discussions que nous avons eues ainsi que ses conseils sont pour beaucoup dans le résultat final de ce travail. Sa capacité d'analyse et son enthousiasme m'ont montré que le monde de la recherche pouvait être un univers passionnant. J'aimerais aussi la remercier pour la confiance et l'autonomie qu'elle m'a accordée, et pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'elle m'a prodiguée. Aussi, Ses nombreuses relectures et corrections de cette thèse ont été très appréciables. Finalment, je temoigne que je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans son soutien. Cette thèse lui doit beaucoup.

Pour tout cela merci Madame vous avez été et resterez la motrice de mon travail de recherche.

Je tiens à remercier tout particulièrement, Monsieur N. Arada, MCA à l'université Mohammed Seddik Benyahia-Jijel, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la tâche de président du jury.

Je remercie ensuite l'ensemble des membres du jury, : Monsieur N. Touafek, Professeur à l'université Mohammed Seddik Benyahia-Jijel, Madame Y. Daikh, MCA à l'université Mohammed Seddik Benyahia-Jijel, Madame K. Mebarki, MCA à l'université de Béjaia et Madame S. Saidi, MCA à l'université Mohammed Seddik Benyahia-Jijel, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir étudier avec attention mon travail, et pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette thèse ainsi que pour leurs précieuses remarques.

Enfin, un très grand merci à toute ma famille qui m'a gratifié de son amour et m'a fourni les motivations qui ont permis l'aboutissement de mon travail doctoral. Je leur adresse toute ma gratitude du fond du coeur.

Table des matières

3 Existence de solutions pour une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone et avec perturbation multivoque

Bibliographie

Introduction

La théorie moderne des opérateurs maximaux monotones apparaît dans plusieurs branches des mathématiques telles que l'optimisation, les équations aux dérivées partielles et l'analyse variationnelle. Cette théorie était l'objet de grandes recherches entre les années 1960 et 1980, lorsque Brezis, Browder, Minty et Rockafellar ont en établi les résultats fondamentaux comme on les connait actuellement (voir [16], [34], [47], [15]). Le sous différentiel d'une fonction convexe semi-continue inférieurement et la fonction indicatrice d'un ensemble fermé convexe sont des exemples importants, qui possèdent des propriétés spécifiques, c'est-à-dire, sont des cas particuliers d'opérateurs maximaux monotones. En analyse non linéaire, les opérateurs maximaux monotones jouent un rôle crucial dans la modélisation des problèmes unilatéraux, des systèmes dissipatifs non linéaires, optimisation convexe etc. Une théorie générale sur l'existence, l'unicité et la stabilité de solution d'inclusion régies par de tels opérateurs a été étudiée par plusieurs auteurs. En 1971, Brézis dans [15] a étudié le problème

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & Au(t), \quad p.p.\ t \in [0, +\infty[\\ u(0) & = & u_0 \in D(A), \end{cases} \tag{1}$$

où $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone et H est un espace de Hilbert. La méthode employée était basée sur la définition de solutions approximatives comme solutions aux équations différentielles ordinaires lorsque A est remplacé par son

approximation Yosida. Dans [10] Bénilan et Brézis, utilisant la même méthode, ont étudié le problème perturbé par une fonction intégrable ($f \in L^1([0,T],H)) = L^1(I,H)$).
Depuis, divers travaux concernant le problème (1) ont été développés afin d'obtenir des résultats d'existence plus généraux, où l'opérateur A ne dépend pas du temps. Par exemple, dans [1] Attouch et Damlamian ont étudié le problème

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\dot{u}(t) & \in & Au(t) + F(t,u(t))), \quad p.p.\ t \in I, \\ u(0) & = & u_0 \in D(A). \end{array}\right. \tag{2}$$

Dans, un premier cas, ils ont considéré ce problème dans le cas où $F : I \times \overline{D(A)} \rightrightarrows H$ est une perturbation univoque globalement mesurable, continue par rapport à la deuxième variable et vérifiant une condition de croissance linéaire. Dans un deuxième cas, ils ont étudié ce problème dans le cas où F est une perturbation multivoque.
Ce problème a été introduit par Henry [30] pour l'étude de quelques problèmes d'économie, dans le cas où l'opérateur $A = N_C$ est le cône normal à l'ensemble C, et F est une multi-application semi-continue supérieurement et autonome (c'est à dire indépendante de t). Dans la littérature, ce problème est appelé le processus de la rafle perturbé, dans ce cas le problème (2) s'écrit sous la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\dot{u}(t) & \in & N_C u(t) + F(u(t)), \quad p.p.\ t \in [0,+\infty[\\ u(0) & = & u_0 \in C. \end{array}\right. \tag{3}$$

Dans [25], les auteurs ont prouvé un résultat d'existence pour (2) avec $F(\cdot,\cdot)$ une perturbation non autonome, semi-continue inférieurement par rapport à l'état et globalement mesurable. Nous nous référons également à [13], [23], [37], [39] et [41] et leurs références pour d'autres théorèmes concernant de telles classes de problèmes d'évolution.
Une continuation aux travaux cités ci-dessus, donne naissance à l'étude de problèmes d'évolution gouvernés par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps, c'est à dire les problèmes qui se présentent sous la forme

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} -\dot{u}(t) & \in & A(t)u(t), \quad p.p.\ t \in I, \\ u(0) & = & u_0 \in D(A(0)). \end{array}\right.$$

Moreau [35] a étudié ce problème avec $A(t) = N_{C(t)}$ le cône normal à $C(t)$, où C est une multi-application à valeurs convexes fermées dans un espace de Hilbert, et varie d'une manière absolument continue. Peralba [40] a étudié le problème où l'opérateur $A(t)$ est le sous différentiel d'une fonction propre convexe semi-continue inférieurement $\varphi(t,\cdot)$ et a obtenu un théorème d'existence d'une solution absolument continue en supposant que la fonction duale de $\varphi(t,\cdot)$ est contrôlée par une fonction absolument continue.

Ensuite, Kunze et Marques [32] ont généralisé ces résultats dans l'espace de Hilbert H, en établissant l'existence et l'unicité d'une solution à variation bornée pour le problème

$$(P^r)\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) & \in \quad A(t)u(t) \quad p.p.t \in \ [0,T] \\ u(0) & = \quad u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

où, pour tout t fixé dans $[0,T]$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone, et l'application $t \mapsto A(t)$ est à variation bornée, dans le sens qu'il existe une fonction $r : [0,T] \to [0,\infty[$ croissante, continue à droite tel que

$$dis(A(t), A(s)) \leq dr(]s,t]) = r(t) - r(s) \quad \text{pour} \ \ 0 \leq s \leq t \leq T, \tag{4}$$

où $dis(\cdot,\cdot)$ est la pseudo-distance entre les opérateurs maximaux monotones introduite par Vladimirov dans [45]. Récemment, dans [6], Azzam et al. ont étudié le problème (P^r) en introduisant une perturbation univoque $f : [0,T] \times H \to H$, i.e, le problème est sous la forme

$$(P^r_f)\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) & \in \quad A(t)u(t) + f(t,u(t)), \quad p.p.t \in \ [0,T] \\ u(0) & = \quad u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

où $t \mapsto A(t)$ vérifie l'hypothèse (4) avec $r : [0,T] \to [0,\infty[$ une fonction continue. Ils ont démonté un théorème d'existence et d'unicité de solution à variation bornée continue.
Notre objectif à travers ce manuscrit, est de poursuivre dans la direction des travaux cités ci-dessus, en établissant des résultats d'existence de solutions pour certaines classes de problèmes d'évolution gouvernés par les opérateurs maximaux monotones dépendant du temps.
Le manuscrit est composé essentiellement de trois chapitres.

Le premier est consacré aux résultats préliminaires et outils de base utilisés dans la démonstration de nos théorèmes principaux.

Le deuxième chapitre est constitué de trois sections. Dans la première, on donne un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (P) dans le cas où $t \mapsto A(t)$ est absolument continue au sens de Vladimirov, i.e., il existe une fonction $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I,\mathbb{R})$ croissante tel que

$$dis(A(t), A(s)) \leq \beta(t) - \beta(s) \quad \text{pour} \ \ 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{5}$$

Ce résultat se trouve dans la référence [32] avec une démonstration incomplète. Ici, nous donnons une preuve complète, avec un algorithme de discrétisation différent et une hypothèse légèrement renforcée sur A par rapport à [32]. Ensuite, nous utilisons ce résultat et un changement de variable convenable pour démontrer l'existence et l'unicité de solution pour le problème

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & A(t)u(t) + f(t), \quad p.p.t \in \ [0,T] \\ u(0) & = & u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

où $f \in L^2(I,H)$.
Le but de la deuxième section, est l'étude du problème perturbé suivant

$$(P_f) \begin{cases} -\dot{u}(t)) & \in & A(t)u(t) + f(t,u(t)), \quad p.p.t \in \ [0,T] \\ u(0) & = & u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

où $f : [0,T] \times H \to H$ est une application mesurable sur $[0,T]$ et Lipschitzienne sur H vérifiant une condition de croissance linéaire. Premièrement, nous étudions le problème (P_f) avec $t \mapsto A(t)$ vérifiant l'hypothèse (5) où $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I,\mathbb{R})$. Puis, nous nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité de solution pour le problème (P_f), en affaiblissant l'hypothèse supposée sur $t \mapsto A(t)$ en prenant $\beta \in \mathcal{W}^{1,1}(I,\mathbb{R})$, mais dans ce cas, des hypothèses supplémentaires sur l'opérateur sont nécessaires, à savoir, qu'il a des valeurs coniques ou qu'il a un domaine fixe. Finalement, nous terminons cette section par l'étude du problème (P) où $A(t)$ est à valeurs bornées faiblement compactes, et en particulier on considère le cas où $A(t) = \partial g_t$, le sous différentiel d'une fonction convexe Lipschitzienne g_t, pour $t \in [0,T]$. Dans la troisième section, nous étudions les propriétés topologiques de l'ensemble des solutions du problème d'évolution toujours régis par un opérateur maximal monotone et perturbé par une multi-application $F : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ globalement scalairement mesurable, scalairement semi-continue supérieurement par rapport à l'état, à valeurs convexes faiblement compactes.
Nous soulignons ici, que nos résultats contiennent des résultats similaires qui concernent les inclusions d'évolution classiques de la forme

$$-\dot{u}(t) \in Au(t) + f(t,u(t)), \quad p.p.t \in \ [0,T]$$

où A est un opérateur maximal monotone fixe (voir par exemple [15, 10, 1]). Aussi, des résultats similaires dans le processus de la rafle convexe [35] par un ensemble fermé convexe $C(t)$ de la forme

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) + f(t,u(t)), \quad p.p.t \in \ [0,T]$$

où $C(t)$ varie de manière absolument continue, c'est-à-dire, qu'il existe une fonction absolument continue $v : [0,T] \to H$ tel que pour tous $s,t \in [0,T]$, $d_H(C(t),C(s)) \leq |v(t) - v(s)|$, où d_H est la distance de Hausdorff. Bounkhel et Thibault [12] et Edmond et Thibault [28] ont montré, en utilisant différents outils, l'existence et l'unicité d'une solution absolument continue du processus de la rafle non convexe.

Le troisième chapitre, est une continuation des travaux établis dans le deuxième chapitre (voir aussi [4]) et ceux établis dans [6] par Azzam et al. En effet, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solution pour le problème plus général

$$(P_{F,f})\begin{cases} -\dot{u}(t)) & \in & A(t)u(t)+F(t,u(t))+f(t,u(t)), \quad p.p.t\in\ [0,T] \\ u(0) & = & u_0\in D(A(0)). \end{cases}$$

Notre étude est menée dans un espace de Hilbert séparable H, avec $f:[0,T]\times H\to H$ séparément intégrable sur $[0,T]$ et séparément Lipschitzienne sur H, vérifiant une condition de croissance linéaire, tandis que $F:[0,T]\times H\rightrightarrows H$ est une application multivoque séparément scalairement semi-continue supérieurement à valeurs convexes faiblement compactes.

Ce chapitre est aussi composé de trois sections. La première, est consacrée à l'étude du problème $(P_{F,f})$ où $t\mapsto A(t)$ est continue à variation bornée au sens que (4) est satisfaite avec $r:[0,T]\to[0,+\infty[$ une fonction continue. La deuxième section, voit l'étude du cas particulier, où $t\mapsto A(t)$ est Lipschitzienne au sens qu'il existe une constante positive α tel que

$$dis(A(t),A(s))\leq\alpha|t-s|,\quad \forall s,t\in[0,T]\,(s\leq t).$$

Dans la troisième section, nous traitons le problème $(P_{F,f})$ en supposant que $t\mapsto A(t)$ est à variation absolument continue et plusieurs résultats sont établis.

Dans cette direction, nous signalons qu'un résultat d'existence de solution absolument continue pour le processus de la râfle non convexe de la forme

$$-\dot{u}(t))\in N_{C(t)}u(t)+F(t,u(t))+f(t,u(t)),\quad p.p.t\in\ [0,T]. \tag{6}$$

a été obtenu par Azzam et al [7]. Concernant l'existence de solution à variation bornée du même problème (6) on peut consulter le travail de Nacry [36].

Les résultats du $2^{\text{ème}}$ chapitre ont fait l'objet d'une publication en collaboration avec les professeurs Azzam, Castaing et Marques dans Journal of Fixed Point Theory and Applications, et ceux du chapitre 3, aussi avec les mêmes co-auteurs, sont acceptés pour publication dans Evolution Equations and Control Theory.

Notations

Dans tout le manuscrit, nous allons adopter les notations suivantes

H	Espace de Hilbert réel
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Le produit scalaire de H
$\\| \cdot \\|$	La norme de H
I_H	Opérateur unité de H
$Proj_C$	Projecteur sur le sous ensemble convexe fermé non vide C de H
$x_n \to x$	La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x
$x_n \rightharpoonup x$	La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x
B_H	La boule ouverte de H de centre 0 et de rayon 1
$\overline{B}_H$	La boule fermée de H de centre 0 et de rayon 1
$\overline{co}(C)$	L'enveloppe convexe fermée de C
$\mathcal{P}(H)$	L'ensemble des parties de H.
$\mathcal{L}(I)$	La tribu de Lebesgue sur l'intervalle I.
$\mathcal{B}(X)$	La tribu de Borel sur X.
$\dfrac{du}{dt}$	La dérivée au sens classique de u qu'on note souvent par $\dot{u}$

Soit $T > 0$, et soit $I = [0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On note par :

$L^0(I,H)$	L'espace des applications mesurables de I à valeurs dans H.
$L^p(I,H)$	L'espace des applications p$^{\text{ième}}$ intégrables ($1 \leq p < \infty$) définies sur I à valeurs dans H muni de la norme $$\|f(\cdot)\|_{L^p} = \left(\int_0^T \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$L^\infty(I,H)$	L'espace des applications essentiellement bornées définies sur I à valeurs dans H, muni de la norme $$\|f(\cdot)\|_{L^\infty} = \inf\{c \geq 0 : \ \|f(x)\| \leq c \ \ p.p \text{ sur } I\}.$$
$C(I,H)$	L'espace de Banach de toutes les applications continues définies sur I à valeurs dans H muni de la norme de la convergence uniforme $$\|f(\cdot)\|_C = \sup_{t\in I} \|f(t)\|.$$
$\mathcal{W}^{1,p}(I,H)$	L'espace des applications absolument continues sur I tel que $\dot{u} \in L^p(I,H)$

Soient X, Y deux ensembles non vides, on note :

$\mathcal{F}(X,Y)$ L'espace de toutes les applications $f : X \to Y$.

Fonctions particulières définies sur H à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

Soit C un sous ensemble non vide de H

$$\mathbf{1}_C : \ x \in H \mapsto \begin{cases} 1 & x \in C; \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$ est la fonction caractéristique de C

$$d(\cdot, C) \ : \ x \in H \mapsto d(x,C) = \inf_{y\in C} \|x-y\|$$ est la fonction distance à C

$$\delta_C : \ x \in H \mapsto \begin{cases} 0 & x \in C; \\ +\infty & x \notin C \end{cases}$$ est la fonction indicatrice de C

$$\delta^*(\cdot, C) \ : \ x \in H \mapsto \ \delta^*(x,C) = \sup_{y\in C}\langle x, y\rangle$$ est la fonction d'appui de C

Si $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$, on note par $dom(f)$ l'ensemble :

$$dom(f) = \left\{x \in H : f(x) < +\infty\right\}.$$

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons exposer quelques résultats qui nous seront utiles dans les preuves de nos Théorèmes d'existence étudiés à travers cette thèse. Ces résultats ont été pris des références [9], [24], [48].

1.1 Continuité des applications

Définition 1.1.1 (Semi-continuité inférieure).
Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors, f est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ ssi, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h < f(x_0)$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $h < f(x)$, pour tout $x \in V_{x_0}$.
• *f est s.c.i sur X ssi f est s.c.i en tout point de X.*

Définition 1.1.2 (Semi-continuité supérieure).

Soit (X,d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors, f est semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ ssi pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h > f(x_0)$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $h > f(x)$, pour tout $x \in V_{x_0}$.

• *f est s.c.s sur X ssi f est s.c.s en tout point de X.*

Proposition 1.1.3.

Soit (X,d) un espace métrique et soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$f \text{ est s.c.i au point } x_0 \iff \liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0),$$

$$f \text{ est s.c.s au point } x_0 \iff \limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Définition 1.1.4 (Application continue).

Soient (X,d), (Y,d') deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$. On dit que f est continue au point $x_0 \in X$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in X : d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

• *f est continue sur X ssi elle est continue en tout point $x \in X$.*

Définition 1.1.5 (Équicontinuité).

Soient (X,d), (Y,d') deux espaces métriques. Une partie H de $\mathcal{F}(X,Y)$ est dite équicontinue au point $x \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x' \in X, \forall f \in H : d(x,x') \leq \eta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) \leq \varepsilon.$$

• *H est dite équicontinue sur X si elle est équicontinue en tout point $x \in X$.*

Dans la suite $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Théorème 1.1.6 (Théorème de différentiation de Lebesgue).

Pour toute fonction intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\tau) d\tau = f(x).$$

Définition 1.1.7 (Application absolument continue).

Une fonction $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to E$ est dite absolument continue ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a,b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant, $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ on a $\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon$.

Théorème 1.1.8.
Une fonction $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to E$ est absolument continue, si et seulement si, il existe une fonction intégrable $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [a,b]$

$$f(t) - f(a) = \int_a^t v(s)ds,$$

dans ce cas f est dérivable presque partout (p.p.) et sa dérivée $\dot{f} = v$ p.p.

1.2 Fonction à variation bornée

Définition 1.2.1.
Étant donnée une fonction $f : I = [0,T] \to E$, on appelle variation totale de f sur I l'expression

$$Var(f;I) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|, \ \ \forall\, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\right\}.$$

Si $Var(f;I) < \infty$, on dit que f est à variation bornée.

Proposition 1.2.2.

Soit $u : I = [0,T] \to H$ une application continue à variation bornée et soient $a, b, c \in I$ tel que $a \leq b \leq c$. Alors, on a

1. $\displaystyle\int_{[a,b]} du = \int \mathbf{1}_{[a,b]} du = du([a,b]) = u(b) - u(a).$
2. $\displaystyle\int_{[a,c]} du = \int_{[a,b]} du + \int_{[b,c]} du.$

Proposition 1.2.3.
Soit $u, v : I = [0,T] \to H$ deux applications continue à variation bornées. Alors, $\langle u, v\rangle$ est à variation bornée et nous avons

$$d\langle u, v\rangle = \langle v, du\rangle + \langle u, dv\rangle.$$

Proposition 1.2.4 (Formule de Moreau).

Soit $u : I = [0,T] \to H$ une application continue à variation bornée. Alors, la formule de Moreau est donnée par

$$d(\|u\|^2) = 2\langle u, du\rangle.$$

Proposition 1.2.5.
Soit μ une mesure réelle et soit m un vecteur mesurable. Si $\dfrac{dm}{d\mu} = m'_\mu$, alors pour tout $f \in L^1(I, |m|, H)$
$$\int \langle f, dm \rangle = \int \langle f, m'_\mu \rangle d\mu.$$

Théorème 1.2.6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à variation bornée définies sur $I = [0, T]$ à valeurs dans H. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée en variation et en norme, i.e., il existe deux constantes positives K et M tel que

$$\sup_{t\in I} \|u_n(t)\| \leq K \qquad \text{et} \qquad var(u_n, I) \leq M.$$

Alors, il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ et une fonction $u : I \to H$ à variation bornée tel que pour tout $t \in I$

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \qquad \text{et} \qquad var(u, I) \leq M.$$

1.3 Quelques notions de l'analyse convexe

Définition 1.3.1.

Soit E un espace vectoriel, et soit $S \subset E$. On dit que S est convexe ssi

$$\forall u, v \in S, \quad \forall \lambda \in [0, 1] : \quad \lambda u + (1 - \lambda)v \in S.$$

Autrement dit, pour tous $u, v \in S$, le segment de droite

$$[u, v] = \{\lambda u + (1 - \lambda)v / \ \lambda \in [0, 1]\} \subset S.$$

Définition 1.3.2.
On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble Δ_n défini par

$$\Delta_n = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / \lambda_i \geq 0 \ \ et \ \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.3.3.
Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tout élément $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ tel que $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_n$.

Proposition 1.3.4.
Soit E un espace vectoriel et soit $S \subset E$. Alors S est convexe ssi il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.

Définition 1.3.5.

1) *Soit E un espace vectoriel et soit $S \subset E$. On appelle enveloppe convexe de S qu'on note $co(S)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de E qui contiennent S, c'est en fait le plus petit convexe de E qui contient S.*

2) *Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle enveloppe convexe fermée de S qu'on note $\overline{co}(S)$ le plus petit convexe fermé de E qui contient S.*

Définition 1.3.6.

Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est propre si

$$f : E \to]-\infty, +\infty] \text{ et } f \not\equiv +\infty, \ (f \not\equiv +\infty \iff \exists x_0 \in E; \ f(x_0) \neq +\infty).$$

Définition 1.3.7.

Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est convexe ssi

$$\forall x, y \in dom(f), \ \ \forall \lambda \in [0,1] : \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Proposition 1.3.8.
Soit S un sous ensemble de E, alors

1. *δ_S est propre ssi $S \neq \emptyset$.*
2. *δ_S est convexe ssi S est convexe.*
3. *δ_S est s.c.i ssi S est fermé.*

Théorème 1.3.9.

Soit E un espace vectoriel normé et soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe s.c.i, alors f est le supremum de toutes les fonctions affines continues qui lui sont inférieures, c-à-d si on pose $\Omega_f = \big\{p : E \to \mathbb{R}, \ \ p \, \text{affine continue et} \ \ p \leq f \big\}$ alors $f = \sup \Omega_f$.

On termine cette section par deux théorèmes de séparation.

Théorème 1.3.10.
Soit E un espace vectoriel normé, alors pour tout ensemble $S \subset E$ non vide

$$\overline{co}(S) = \Bigg\{ x \in E : \quad \langle x', x \rangle \leq \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E' \Bigg\}.$$

Théorème 1.3.11.
Soient X un espace localement compact, μ une mesure positive sur X, E un espace de Banach réel, S un sous ensemble convexe fermé de E, f une application sur X telle que $f(X) \subset S$.
Pour toute fonction réelle strictement positive intégrable g telle que fg soit intégrable, le point $\dfrac{\int_X fgd\mu}{\int_X gd\mu}$ appartient à S.

1.4 Rappel sur la topologie la moins fine rendant continues une famille d'applications

Soient X un ensemble et $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \to Y_i$. La question naturelle qui se pose est comment munir X de la topologie θ la moins fine (avec le minimum d'ouverts) qui rende continues toutes les applications $\varphi_i (i \in I)$. Avant de répondre à cette question, nous donnons la définition de la topologie la moins fine et un résultat utile de la théorie des ensembles.

Définition 1.4.1.

Soient θ, θ' deux topologies sur X. On dit que θ est moins fine que θ' ssi $\theta \subset \theta'$.

Lemme 1.4.2.

Soient F, J_i et A_j $(i \in F,\ j \in J_i)$ des ensembles quelconques. Alors

$$\bigcap_{i \in F} \bigcup_{j \in J_i} A_j = \bigcup_{\psi \in \mathcal{F}} \bigcap_{i \in F} A_{\psi(i)},$$

où $\mathcal{F}$ est l'ensemble de toutes les applications $\psi : i \in F \mapsto \psi(i) \in J_i$.

Cette formule montre que si A est une famille d'ensembles, alors toute intersection finie des unions d'éléments de A est une union d'intersections finies d'éléments de A.

Proposition 1.4.3.
Soit Θ l'ensemble des parties de X de la forme

$$\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in F_j} \varphi_i^{-1}(U_i),$$

où U_i est un ouvert quelconque de Y_i, F_j est un sous ensemble fini quelconque de I et J est un ensemble quelconque d'indices. Alors Θ définit une topologie sur X. De plus, Θ est la topologie la moins fine qui rende continues toutes les applications $\varphi_i (i \in I)$.

1.4.1 La topologie faible

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé réel. On note E' l'espace dual, c'est-à-dire, l'espace des formes linéaires continues sur E muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in \overline{B}_E} |f(x)|.$$

Définition 1.4.4.

Soit $f \in E'$ et soit

$$\begin{array}{rcl} \varphi_f : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi_f(x) = f(x) =: \langle f, x\rangle. \end{array}$$

La topologie faible sur E notée $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varphi_f(f \in E')$.

Proposition 1.4.5.

La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.

Proposition 1.4.6.

Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E. Alors

1. *$(x_n)_n$ converge vers x pour $\sigma(E, E')$ (ou faiblement) si et seulement si $(\langle f, x_n\rangle)_n$ converge vers $\langle f, x\rangle$ pour tout $f \in E'$;*
2. *si $(x_n)_n$converge faiblement vers x alors $\|x_n\|_E$ est bornée et nous avons*

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E.$$

1.4.2 La topologie faible étoile

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, E' son dual et E'' son bidual $\Big($c'est à dire le dual de E' muni de la norme $\|\xi\|_{E''} = \sup_{f \in \overline{B}_{E'}} |\langle \xi, f\rangle|\Big)$. On a une injection canonique $J : E \to E''$ définie de la façon suivante : soit $x \in E$ fixé ; alors l'application $f \mapsto \langle f, x\rangle$

de E' dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur E' et donc est un élément de E'' qu'on note J_x. On a

$$\langle J_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E}, \ \forall\, x \in E, \forall f \in E'.$$

Il est clair que J_x est linéaire et que c'est une isométrie, i.e.

$$\|J_x\|_{E''} = \sup_{f\in\overline{B}_{E'}} |\langle J_x, f\rangle| = \sup_{f\in\overline{B}_{E'}} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_E.$$

Sur l'espace E' sont définies déjà deux topologies :
La topologie forte associée à la norme de E' $\left(\|f\|_{E'} = \sup_{f\in\overline{B}_{E'}} |\langle f, x\rangle|\right)$.
La topologie faible $\sigma(E', E'')$.
On définit une troisième topologie sur E' comme suit.
Pour chaque $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_x(f) = \langle f, x\rangle.$$

Définition 1.4.7.

La topologie faible sur E' est la topologie la moins fine sur E' qui rende continues toutes les applications $\varphi_x(x \in E)$. On la note $\sigma(E', E)$.*

Proposition 1.4.8.
La topologie faible $\sigma(E', E)$ sur E' est séparée.*

Proposition 1.4.9.
Soit $(f_n)_n$ une suite de E'. Alors

$(f_n)_n$ converge vers f pour $\sigma(E', E)$ (ou faiblement) si et seulement si $(\langle f_n, x\rangle)_n$ converge vers $\langle f, x\rangle$ pour tout $x \in E$.*

1.5 Multi-applications

Dans cette section, nous rassemblons quelques propriétés de base des multi-applications nécessaires pour notre présente étude. Les résultats qui suivent ont été pris des références [3], [31].

Définition 1.5.1.
Soient X, Y deux ensembles non vides, on appelle multi-application ou fonction multivoque

définie sur X à valeurs dans Y, toute application F définie sur X à valeurs dans $P(Y)$ et on note $\quad F : X \to P(Y) \quad$ *ou* $\quad F : X \rightrightarrows Y$.
Pour tout $t \in X$, $F(t) \subset Y$ est un sous ensemble de Y.

- *On appelle **domaine** (effectif) de F, qu'on note $D(f)$, le sous ensemble de X défini par*
$$D(F) = \{t \in X : F(t) \neq \emptyset\}.$$
- *On appelle **image de** F, qu'on note $\mathrm{Im}(F)$, le sous ensemble de Y défini par*
$$\mathrm{Im}(F) = \{y \in Y : \ \exists t \in D(F),\ y \in F(t)\} = \bigcup_{t \in I} F(t).$$
- *On appelle **graphe de** F, qu'on note $gph(F)$, le sous ensemble de $X \times Y$ défini par*
$$gph(F) = \Big\{(x, y) \in D(F) \times Y : \ y \in F(x)\Big\}.$$

1.5.1 Distance de Hausdorff

Soit (X, d) un espace métrique, et soit S un sous ensemble de X. Posons
$$d(x, S) = \inf_{y \in S} d(x, y).$$

Définition 1.5.2.
• *On appelle* **écart** entre $S_1, S_2 \subset X$, qu'on note $e(S_1, S_2)$, la quantité définie par
$$e(S_1, S_2) = \sup_{x \in S_1} d(x, S_2) = \sup_{x \in S_1} \left(\inf_{y \in S_2} d(x, y) \right).$$
• On appelle **distance de Hausdorff** entre S_1 et S_2, notée $d_H(S_1, S_2)$, la quantité définie par
$$d_H(S_1, S_2) = \max(e(S_1, S_2), e(S_2, S_1)).$$
Remarquons que $d_H(S_1, S_2) = d_H(S_2, S_1)$.

Propriétés 1.5.3.
Pour tous sous ensembles S_1, S_2, S_3 de X nous avons

1. $e(S_1, \emptyset) = \infty \quad$ *si* $\quad S_1 \neq \emptyset$ *et* $e(\emptyset, S_2) = 0$.
2. $e(S_1, S_2) = 0 \Leftrightarrow S_1 \subset \overline{S_2}$
   $d_H(S_1, S_2) = 0 \Leftrightarrow \overline{S_1} = \overline{S_2}$

3. $e(S_1, S_3) \leq e(S_1, S_2) + e(S_2, S_3)$
   $d_H(S_1, S_3) \leq d_H(S_1, S_2) + d_H(S_2, S_3)$

Proposition 1.5.4.
Soit (X, d) un espace métrique, et soit $P_{cl}(X)$ l'ensemble des sous ensembles non vides fermés de X, alors $(P_{cl}(X), d_H)$ est un espace métrique.

1.5.2 Continuité des multi-applications

Définition 1.5.5.
Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.

1. *On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $t_0 \in X$ ssi pour tout ouvert U de Y contenant $F(t_0)$ $(F(t_0) \subset U)$ il existe un voisinage Ω de t_0 tel que $F(\Omega) \subset U$, i.e., $F(z) \subset U$, $\forall z \in \Omega$.*
2. *Si F est s.c.s en tout point t de X on dit que F est s.c.s sur X, ou tout simplement s.c.s.*
3. *On dit que F est faiblement semi-continue supérieurement sur X si pour tout sous ensemble faiblement fermé $M \subset Y$, l'ensemble $F^{-1}(M) = \{x \in X;\ F(x) \cap M \neq \emptyset\}$ est séquentiellement faiblement fermé.*

Théorème 1.5.6.

Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides, avec Y un espace compact. Si le graphe de F est faiblement fermé alors F est faiblement semi-continue supérieurement.

Théorème 1.5.7. *[22]*
Soit E un espace vectoriel normé, et $F : E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides. On suppose que $F(t_0)$ est convexe et faiblement compact. Alors, F est faiblement semi-continue supérieurement au point t_0 si et seulement si la fonction $\delta^*(x', F(\cdot))$ est semi-continue supérieurement en t_0.

Définition 1.5.8.

Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique et soit $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : D(F) \to X$ telle que $f(t) \in F(t)$ pour tout $t \in D(F)$.

Définition 1.5.9.

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-finie et Σ μ-complète. Soit E un espace de Banach séparable, et $\Gamma : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application

1. *On définit l'ensemble des sélections mesurables de Γ par*

$$S_\Gamma = \Big\{ f \in L^0(\Omega, E) : f(t) \in \Gamma(t),\ \mu - p.p \Big\}.$$

2. *On définit l'ensemble des L^1-sélections de Γ par*

$$S^1_\Gamma = \Big\{ f \in L^1(\Omega, E) : f(t) \in \Gamma(t),\ \mu - p.p \Big\}.$$

Théorème 1.5.10.

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-finie et Σ μ-complète. Soit E un espace de Banach séparable, et $\Gamma : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application intégrablement bornée à valeurs non vides convexes faiblement compactes. Alors, S^1_Γ est $\sigma(L^1(\Omega, E), L^\infty(\Omega, E'))$-compact.

Théorème 1.5.11.

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec μ σ-finie et Σ μ-complète. Soit E un espace de Banach séparable et $\Gamma : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non-vides, convexes compactes. On suppose que pour tout $x' \in E'$ la fonction $\delta^*(x', \Gamma(\cdot))$ est intégrable, i.e., $t \mapsto \delta^*(x', \Gamma(t)) \in L^1(\Omega)$. Soit pour toute application $g \in L^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega g\Gamma d\mu = \Big\{ \int_\Omega g f d\mu : \quad f \in S_\Gamma \Big\}.$$

Alors, $\displaystyle\int_\Omega g\Gamma d\mu$ est convexe, $\sigma(E, E')$-compact dans E. De plus, sa fonction d'appui est donnée par

$$\delta^*\left(x', \int_\Omega g(t)\Gamma(t) d\mu(t) \right) = \int_\Omega \delta^*(x', g(t)\Gamma(t)) d\mu(t), \quad \forall x' \in E'.$$

En particulier, si Γ est univoque, i.e., $\Gamma(\cdot) = h(\cdot) : \Omega \to E$

$$\left\langle x', \int_\Omega g(t)h(t) d\mu(t) \right\rangle = \int_\Omega \langle x', g(t)h(t) \rangle d\mu(t).$$

Preuve. Conséquence du Théorème II-14 dans [22].

Proposition 1.5.12.
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et soit E un espace de Banach séparable. Soit $\Gamma : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non-vides, convexes et faiblement compactes et soit Φ : $\Omega \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non-vides, convexes fermées. Si pour tout $x' \in E'$

$$\delta^*\Big(x', \Phi(t)\Big) \leq \delta^*\Big(x', \Gamma(t)\Big) \quad \mu - p.p.$$

alors,

$$\Phi(t) \subset \Gamma(t) \quad \mu - p.p.$$

Théorème 1.5.13. *[Kakutani-ky Fan]*
Soient E un espace de Banach, S un sous-ensemble convexe faiblement compact de X. Si $F : S \rightrightarrows S$ est une multi-application faiblement semi-continue supérieurement à valeurs faiblement fermées convexes. Alors il existe $x \in S$ tel que $x \in F(x)$, i.e., F admet un point fixe.

1.5.3 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.5.14.

Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $F : \Omega \rightrightarrows X$. On dit que F est Σ-mesurable où simplement mesurable si pour tout ouvert V de X

$$F^{-1}(V) = \{t \in \Omega : \; F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Théorème 1.5.15.
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec μ σ-finie et Σ μ-complète. Soit E un espace de Banach séparable et $\Gamma : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs non vides, convexes et faiblement compactes. Alors, l'application

$$\begin{array}{rcl} h : \Omega & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & h(t) = Proj_{\Gamma(t)}(0), \end{array}$$

est une application mesurable.

Preuve. Conséquence du Théorème III.41.2 dans [22].

Définition 1.5.16.
Soit (Ω, Σ) un espace mesurable et soit E un espace vectoriel normé. Soit $F : \Omega \rightrightarrows E$ une multi-application. On dit que F est scalairement mesurable si pour tout $x' \in E'$, l'application $t \mapsto \delta^*(x', F(t))$ est mesurable.

Proposition 1.5.17.
Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach séparable. Si $F : \Omega \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes, alors $F(\cdot)$ est mesurable si et seulement si elle est scalairement mesurable.

Proposition 1.5.18.

Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique complet séparable et soit $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs fermées non vide. Si F est Σ-mesurable alors elle admet au moins une sélection Σ-mesurable.

Théorème 1.5.19.

Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach séparable. Soient $F : \Omega \times E \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable et $u : \Omega \to E$ une application mesurable. Alors la multi-application $F(\cdot, u(\cdot))$ est mesurable.

1.6 Sous différentiel

Définition 1.6.1. *[43]*
Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On appelle dérivée directionelle généralisée de f au point $x \in E$, dans la direction $v \in E$, la quantité

$$f'(x; v) := \limsup_{h \to 0, \delta \to 0^+} \frac{f(x + h + \delta v) - f(x + h)}{\delta}.$$

Proposition 1.6.2. *[43]*
Soient E un espace de Banach réel séparable, (Ω, Σ) un espace mesurable et f une application de $\Omega \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que

1. *$f(\cdot, \xi)$ est mesurable pour tout $\xi \in E$.*
2. *$f(t, \cdot)$ est localement Lipschitzienne pour tout $t \in \Omega$.*

Alors, pour toutes applications mesurables x et v de Ω dans E, la fonction $t \mapsto f_t'(x(t), v(t))$ est une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.6.3.

Soient E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in dom(f)$. On appelle sous différentiel de f au point x_0, qu'on note par $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par

$$\partial f(x_0) := \left\{ x' \in E' : \langle x', x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \quad \forall x \in E \right\}.$$

On dit que f est sous-différentiable au point x_0 si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Théorème 1.6.4. *[22]*
Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Si f est finie et continue au point x, alors

$$f'(x; v) = \sup_{x' \in \partial f(x)} \langle v, x' \rangle = \delta^*(v, \partial f(x)).$$

Théorème 1.6.5. *[22]*
Soient E un espace vectoriel normé, f une fonction propre convexe et continue au point $x_0 \in E$, alors $\partial f(x_0)$ est non-vide convexe et faiblement compact dans E'.

Proposition 1.6.6. *[43]*
Soit E un espace de Banach réel séparable et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne. Alors, ∂f est une multi-application semi-continue supérieurement de E dans E'.

Définition 1.6.7.

Soient E un espace vectoriel et $S \subset E$. On dit que S est un cône ssi

$$\forall x \in S, \ \forall \lambda \geq 0, \quad \lambda x \in S.$$

Définition 1.6.8.

Soient E un espace vectoriel normé, S un sous ensemble convexe non vide de E. On appelle cône normal à S au point $x_0 \in S$, qu'on note par $N_S(x_0)$, le sous- différentiel de la fonction indicatrice de S au un point x_0

$$N_S(x_0) = \partial \delta_S(x_0) = \Big\{ x' \in E' : \ \langle x', x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in S \Big\}.$$

1.7 Quelques résultats de convergence et de compacité

Pour les résultats ci-dessous, on peut se référer à [14], [31], [48].

Théorème 1.7.1.
Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite extraite $(x_{n_k})_k$ qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Remarque 1.7.2. *Ceci est dû au fait que dans un espace de Banach réflexif, la boule unité fermée est $\sigma(E, E')$-compacte.*

Théorème 1.7.3 (Banach-Mazur).
Soit E un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers x, alors il existe une suite $(z_n)_n$ telle que chaque z_n est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, \dots$ et (z_n) converge fortement vers x.

Définition 1.7.4.

Soient X un espace topologique séparé, S une partie de X. On dit que S est relativement compacte si son adhérence dans X est compacte.

Définition 1.7.5 (Boule-compact).
Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'un ensemble $D \subset E$ est boule-compact si son intersection avec toute boule fermée de E est compacte.

Théorème 1.7.6 (Théorème d'Eberlin-Smũlian).
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1. *S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.*
2. *S est faiblement (relativement) compact.*

Théorème 1.7.7 (Arzelà-Ascoli).

Soit (K, d) un espace métrique compact, (X, d') un espace métrique complet, et $H \subset C(K, X)$ muni de la distance de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact ssi H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact pour tout $x \in K$, avec

$$H(x) = \{f(x) | f \in H\}.$$

Théorème 1.7.8 (Banach-Alaoglu-Bourbaki).

Soit E un espace de Banach séparable, et soit $S \subset E'$. Si S est borné pour la norme de E' et fermé pour la topologie $\sigma(E', E)$, alors, S est compact pour cette topologie.

Définition 1.7.9.
Soit X un espace vectoriel normé, et soit $(w_n)_n$ une suite de points de X. On dit que la suite $(w_n)_n$ converge vers $w \in X$ au sens de Komlos si et seulement si

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} w_j = w.$$

Proposition 1.7.10. *[21]*
Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, X un espace vectoriel normé et soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $L^1(\Omega, X)$. Si $(u_n)_n$ est une suite bornée dans $L^1(\Omega, X)$, alors il existe une sous suite $(v_n)_n$ de $(u_n)_n$ qui converge au sens de Komlos vers un élément $x \in L^1(\Omega, X)$ p.p., i.e.,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v_j(t) = x(t) \quad p.p.$$

Proposition 1.7.11.
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et soit X un espace vectoriel normé. Si $(u_n)_n$ est une suite de X qui converge vers un élément $u \in X$. Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|u_k - u\|_X = 0.$$

Démonstration
Nous avons $(u_n)_n$ converge vers $u \in X$, alors,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq k_0 \Rightarrow \|u_n - u\|_X \leq \frac{n\varepsilon}{2(n - k_0 + 1)},$$

et comme la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k_0 - 1} \|u_k - u\|_X \right)_n$ converge vers 0, alors,

$$\exists k_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq k_1 \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k_0 - 1} \|u_k - u\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k_0$, $n \geq k_1$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|u_k - u\|_X = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k_0 - 1} \|u_k - u\|_X + \frac{1}{n} \sum_{k=k_0}^{n} \|u_k - u\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=k_0}^{n} \frac{n\varepsilon}{2(n - k_0 + 1)} = \varepsilon.$$

Par conséquent, il suffit de prendre $n_0 = \max\{k_0, k_1\}$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|u_k - u\|_X \leq \varepsilon,$$

i.e.,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|u_k - u\|_X = 0.$$

Théorème 1.7.12 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue).
Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $(f_n)_n \subset L^p([0, T], H)$. On suppose que

1. *$(f_n)_n$ converge presque partout vers une fonction f sur $[0,T]$;*
2. *il existe une fonction positive $g(\cdot) \in L^p([0,T],\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$|f_n(t)| \leq g(t) \;\; p.p \;\; t \in [0,T].$$

Alors $f(\cdot) \in L^p([0,T],H)$ et la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^p([0,T],H)$.

Lemme 1.7.13 (Lemme de Fatou).

Soit (Ω,Σ,μ) un espace mesuré. Pour toute suite $(f_n)_n$ de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $[0,+\infty]$, la limite inférieure (resp. supérieure) de la suite $(f_n)_n$ est mesurable et l'on a :

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$$

resp.

$$\int \limsup_{n\to+\infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$$

L'égalité n'est en général pas vérifiée.

Théorème 1.7.14.
Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $(f_n)_n \subset L^p([0,T],H)$ une suite convergeant vers une fonction $f \in L^p([0,T],H)$ pour la norme de $L^p([0,T],H)$. Alors, il existe une sous suite $(f_{n_k})_k$ convergeant vers f p.p sur $[0,T]$.

Théorème 1.7.15.

Soit E un espace de Banach et soit C un sous ensemble convexe de X, alors C est faiblement fermé si et seulement si C est fortement fermé.

Définition 1.7.16.

Soit (X,d) un espace métrique et soit $(x_n)_n \subset X$. On dit que x est une valeur d'adhérence pour $(x_n)_n$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \subset \mathbb{N}, \;\; \forall n \in N_0 : \;\; d(x_n,x) < \varepsilon.$$

Théorème 1.7.17.

Soit (X,d) un espace métrique et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X. Posons

$$S_n = \Big\{ x_k : \; k \geq n \Big\} = \Big\{ x_n, x_{n+1}, \dots \Big\}.$$

Soit S l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$. Alors, $S = \bigcap_n \overline{S_n}$ et donc S est fermé.

Proposition 1.7.18.

Soit (X, d) un espace métrique et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X. Si $x_n \to x$ alors x est une valeur d'adhérence pour $(x_n)_n$.

On termine cette section par quelques Lemmes de Gronwall utiles pour nos preuves.

Lemme 1.7.19 (Lemme de Gronwall).

Soient ψ, y deux fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs positives et tel que, il existe $c \geq 0$, pour tout $t \in [a, b]$

$$y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s)y(s)ds.$$

Alors, pour tout $t \in [a, b]$,

$$y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \psi(\tau)d\tau\right).$$

Lemme 1.7.20.

Soit μ une mesure de Radon positive non-atomique sur $I = [0, T]$. Soient c, p deus fonctions réelles postives, telle que $c \in L^1(I, \mathbb{R}, \mu)$ et $p \in L^\infty(I, \mathbb{R}, \mu)$, et soit α une constante positive. Supposons que, pour μ-presque tout $t \in I$,

$$p(t) \leq \alpha + \int_0^t c(s)p(s)\mu(ds).$$

Alors, pour μ-presque tout $t \in I$,

$$p(t) \leq \alpha \exp\left(\int_0^t c(s)\mu(ds)\right).$$

Ce dernier Lemme est une forme discrète du Lemme de Gronwall.

Lemme 1.7.21.

Soient (α_i), (β_i), (γ_i) des suites de nombre réels positifs vérifiant

$$a_{i+1} \leq \alpha_i + \beta_i(a_0 + \cdots + a_{i-1}) + (1 + \gamma_i)a_i \text{ pour } i \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Alors,

$$a_i \leq \left(a_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k\right) \cdot \exp\left(\sum_{k=0}^{i-1} [k\beta_k + \gamma_k]\right) \quad \textit{pour } i \in \mathbb{N}^*. \tag{1.2}$$

1.8 Notions sur les opérateurs maximaux monotones.

Cette section est consacrée à la définition et propriétés des opérateurs maximaux monotones qui sont l'outil le plus important dans notre présente étude. Les références largement utilisées ici sont [8], [9], [15] et [46].

1.8.1 Notion d'opérateur

Définition 1.8.1.
On appelle opérateur multivoque de H toute application A de H dans $\mathcal{P}(H)$.

- *Le domaine de A est l'ensemble*

$$D(A) = \Big\{x \in \mathrm{H} : Ax \neq \emptyset\Big\}.$$

- *L'image de A est l'ensemble*

$$R(A) = \bigcup_{x \in \mathrm{H}} Ax,$$

  dit aussi le rang de A.
- *On identifie toujours A avec "son graphe" dans $H \times H$ et l'on écrit :*

$$gph(A) = \Big\{[x, y] : \quad x \in D(A), \quad y \in Ax\Big\} = A.$$

- *L'ensemble des opérateurs est ordonné par l'inclusion des graphes, i. e.,*

$$A \subset B \Longleftrightarrow \quad gph(A) \subset gph(B).$$

Définition 1.8.2.
Soit $A : H \rightrightarrows H$ un opérateur. Alors, l'opérateur inverse $A^{-1} : H \rightrightarrows H$ est de graphe

$$gph(A^{-1}) = \Big\{[u, x] : \ [x, u] \in A\Big\}.$$

1.8.2 Opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert

Définition 1.8.3.
Un opérateur A de H est dit monotone si

$$\forall\,[x_1, y_1],\ [x_2, y_2] \in A; \quad \big\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \big\rangle \geq 0.$$

Exemple 1.8.4.
Soit A un opérateur monotone de H alors, A^{-1}, λA $(\lambda > 0)$ sont aussi monotones.

Définition 1.8.5.
Un opérateur monotone A de H est dit maximal monotone s'il est maximal parmi les opérateurs monotones, ordonnés par l'inclusion des graphes dans $H \times H$.

– Une caractérisation qui exprime la maximalité d'un opérateur monotone A est la suivante :

Proposition 1.8.6.
Un opérateur monotone A est dit maximal ssi

$$\forall (x, y) \in H \times H \quad \langle y - y_0, x - x_0 \rangle \geq 0, \quad \forall [x_0, y_0] \in A \Longrightarrow [x, y] \in A. \tag{1.3}$$

Démonstration

- Supposons que A est un opérateur maximal monotone. Soit $(x, y) \in H \times H$ tel que

$$\langle y - y_0, x - x_0 \rangle \geq 0, \quad \forall [x_0, y_0] \in A.$$

  Soit $B = A \cup \{(x, y)\}$. Comme A est monotone, alors B est aussi monotone avec $A \subset B$. Mais d'après l'hypothèse, $B \subset A$, par conséquent $A = B$, ce qui implique que $[x, y] \in A$.
- Inversement, supposons que (1.3) est vérifiée. Alors, si B est un opérateur monotone tel que $A \subset B$, on aura

$$\forall [x_1, y_1] \in B,\ \ \forall\ [x_2, y_2] \in A,\ \ \big\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \big\rangle \geq 0 \Rightarrow\ [x_1, y_1] \in A$$

  ceci imlique que $B \subset A$ et par conséquent, $A = B$, c'est à dire A est maximal monotone.

Proposition 1.8.7.
Soit A un opérateur de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *A est maximal monotone.*
2. *A est monotone et $R(I_H + A) = H$.*

3. *Pour tout* $\lambda > 0$, $(I_H + \lambda A)^{-1}$ *est une contraction définie sur* H.

Nous exposons dans la suite, deux des plus importants exemples, d'opérateurs maximaux monotones.

Exemple 1.8.8.
Le sous différentiel d'une application $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ *convexe propre s.c.i est maximal monotone.*
En effet, soient $x_1, x_2 \in D(\partial f)$, $y_1 \in \partial f(x_1)$ *et* $y_2 \in \partial f(x_2)$. *Alors*

$$y_1 \in \partial f(x_1) \iff f(z) \geq f(x_1) + \langle y_1, z - x_1 \rangle \ \forall z \in H; \tag{1.4}$$
$$y_2 \in \partial f(x_2) \iff f(z) \geq f(x_2) + \langle y_2, z - x_2 \rangle \ \forall z \in H. \tag{1.5}$$

En particulier, pour $z = x_2$ *dans* (1.4) *et* $z = x_1$ *dans* (1.5), *on trouve*

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \langle y_1, x_2 - x_1 \rangle$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle.$$

En additionnant ces deux inégalités on obtient

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

D'où la monotonie de ∂f. *Pour montrer la maximalité de* ∂f *on a besoin du lemme suivant.*

Lemme 1.8.9.
Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction propre convexe s.c.i. Si*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty, \tag{1.6}$$

alors il existe $y_0 \in H$ *tel que* $f(y_0) = \inf_{x \in H} f(x)$.

Montrons maintenant que ∂f *est maximal. D'après la Proposition 1.8.7, il suffit de montrer que* $R(I_H + \partial f) = H$. *Soit* $y \in H$, *on doit trouver* $x_0 \in H$ *tel que* $y \in x_0 + \partial f(x_0)$. *Considérons la fonction*

$$\begin{aligned} g : H &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto g(x) = f(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Clairement, g est propre convexe s.c.i. Montrons que g atteint un minimum en un point x_0. Sachant que f est propre convexe s.c.i, elle est donc minorée par une fonction affine continue (Théorème 1.3.9), i.e. il existe $x' \in H$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) \geq \langle x', x \rangle + a$$

ceci entraine que

$$\begin{aligned}
g(x) &\geq \langle x', x \rangle + a + \frac{1}{2}\|x-y\|^2 \\
&= \langle x', x \rangle + a + \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \langle y, x \rangle \\
&\geq \langle x'-y, x \rangle + a + \frac{1}{2}\|x\|^2 \\
&\geq -\|x'-y\|\|x\| + a + \frac{1}{2}\|x\|^2 \\
&= \big(\frac{1}{2}\|x\| - \|x'-y\|\big)\|x\| + a,
\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{\|x\|\to\infty} g(x) = +\infty.$$

D'après le Lemme précédent, on déduit que g admet un minimum en un point $x_0 \in H$. Pour tout $z \in H$, posons $x = tz + (1-t)x_0$ ($t \in]0,1[$). Alors par la convexité de f on trouve

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(x) + \frac{1}{2}\|x-y\|^2 \\
&= f(tz+(1-t)x_0) + \frac{1}{2}\|\big(tz+(1-t)x_0\big) - y\|^2 \\
&\leq tf(z) + (1-t)f(x_0) + \frac{t^2}{2}\|z-x_0\|^2 + \frac{1}{2}\|x_0-y\|^2 + t\langle z-x_0, x_0-y \rangle,
\end{aligned}$$

or, on a montré que g atteint un minimum au point x_0, d'où

$$\begin{aligned}
f(x_0) + \frac{1}{2}\|x_0-y\|^2 &\leq tf(z) + (1-t)f(x_0) + \frac{t^2}{2}\|z-x_0\|^2 + \frac{1}{2}\|x_0-y\|^2 + t\langle z-x_0, x_0-y \rangle \\
\Longrightarrow \quad 0 &\leq t\big(f(z) - f(x_0)\big) + \frac{t^2}{2}\|z-x_0\|^2 + t\langle z-x_0, x_0-y \rangle \\
\Longrightarrow \quad 0 &\leq f(z) - f(x_0) + \frac{t}{2}\|z-x_0\|^2 + \langle z-x_0, x_0-y \rangle
\end{aligned}$$

en faisant tendre t vers 0 on obtient

$$0 \leq f(z) - f(x_0) + \langle z-x_0, x_0-y \rangle.$$

Par suite

$$\langle y-x_0, z-x_0 \rangle + f(x_0) \leq f(z) \quad \forall z \in H.$$

Donc $y - x_0 \in \partial f(x_0)$, d'où $y \in x_0 + \partial f(x_0)$. Ceci achève la preuve. ■

Exemple 1.8.10.

Le cône normal associé à un ensemble convexe fermé non vide C, au point $x \in C$, est maximal monotone.

Preuve.
Nous avons

$$N_C(x) = \left\{x' \in H; \langle x', y - x\rangle \leq 0 \;\; \forall y \in C\right\}.$$

On sait que si $x \in C$, alors $N_C(x) = \partial\delta_C(x)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\partial\delta_C(x) &= \Big\{x' \in H; \delta_C(y) \geq \delta_C(x) + \langle x', y - x\rangle \;\; \forall y \in H\Big\} \\
&= \Big\{x' \in H; \delta_C(y) \geq \langle x', y - x\rangle \;\; \forall y \in C\Big\} \bigcap \\
&\quad\; \Big\{x' \in H; \delta_C(y) \geq \langle x', y - x\rangle \;\; \forall y \in H \backslash C\Big\} \\
&= \Big\{x' \in H; \delta_C(y) \geq \langle x', y - x\rangle \;\; \forall y \in C\Big\} \bigcap H \\
&= \Big\{x' \in H; \langle x', y - x\rangle \leq 0 \;\; \forall y \in C\Big\} = N_C(x).
\end{aligned}$$

L'ensemble C étant non vide, convexe et fermé, alors δ_C est propre, convexe et s.c.i (Proposition 1.3.8) et d'après l'exemple précédent, on déduit que $\partial\delta_C$ est maximal monotone. Donc, N_C est maximal monotone sur son domaine de définition $D(N_C) = C$.

Proposition 1.8.11.
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. Alors
i) A est fortement-faiblement fermé dans $H \times H$, i.e.,

$$\forall \left([x_n, y_n]\right)_n \subset A \;\text{ telle que }\; x_n \to x \text{ et } y_n \rightharpoonup y, \;\text{alors } [x, y] \in A.$$

ii) A^{-1} est maximal monotone dans $H \times H$.
iii) Pour tout $x \in D(A), Ax$ est un sous ensemble fermé convexe de H.

Remarque 1.8.12.
Comme l'opérateur A^{-1} est maximal monotone, alors A est aussi faiblement-fortement fermé dans $H \times H$.

En effet, soit $\left([x_n, y_n]\right)_n \subset A$ telle que $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \to y$, d'après la définition de A^{-1}, $\left([y_n, x_n]\right)_n \subset A^{-1}$. Comme A^{-1} est maximal monotone alors il est fortement-faiblement fermé, par conséquent $[y, x] \in A^{-1}$, d'où $[x, y] \in A$, i.e., A est faiblement-fortement fermé.

1.8.3 Propriétés élémentaires des opérateurs maximaux monotones

Définition 1.8.13.
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. Pour tout $\lambda > 0$, la résolvante de A est définie par

$$J_\lambda^A := \left(I_H + \lambda A\right)^{-1}.$$

Proposition 1.8.14.
La résolvante J_λ^A d'un opérateur maximal monotone $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur univoque défini sur tout H. De plus, c'est une contraction de H.

Définition 1.8.15.
Pour tout $\lambda > 0$, on appelle "approximation Yosida" de A qu'on note A_λ, l'opérateur univoque défini par

$$A_\lambda = \frac{I_H - J_\lambda^A}{\lambda}.$$

Définition 1.8.16.
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. On sait que, pour tout $x \in D(A)$, Ax est un ensemble convexe fermé non vide de H (Proposition 1.8.11). Par le Théorème de Projection, il existe un élément unique $x' \in Ax$ qui est la projection de 0 sur Ax, i.e.,

$$x' = Proj_{Ax}(0), \qquad \|x'\| = \inf_{y \in Ax} \|y\| = d(0, Ax).$$

Dans toute la suite, cet élément sera notée, $A^0(x)$, i.e., $A^0(x)$ est l'élément de norme minimale de Ax.

Proposition 1.8.17. *[15]*

(i) Pour tout $x \in H$ on a $J_\lambda^A(x) \in D(A)$ et $A_\lambda(x) \in AJ_\lambda^A(x)$.

(ii) A_λ est maximal monotone et lipschitzien de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

(iii) Pour tout $x \in D(A)$, on a $\|A_\lambda(x)\| \leq \|A^0(x)\|$ et $A_\lambda(x) \to A^0(x)$ quand $\lambda \to 0$ avec $\|A_\lambda(x) - A^0(x)\|^2 \leq \|A^0(x)\|^2 - \|A_\lambda(x)\|^2$.

Théorème 1.8.18.
Soit $A : H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. Alors, $\overline{D(A)}$ est convexe, et pour tout $x \in H$ on a $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda^A(x) = Proj_{\overline{D(A)}}(x)$.

Définition 1.8.19.
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. On appelle section principale de A, tout opérateur univoque $A' \subset A$ avec $D(A) = D(A')$ et tel que pour tout $(x, y) \in \overline{D(A)} \times H$, l'inégalité

$$\langle A'(\xi) - y, \xi - x\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in D(A)$$

implique que $x \in D(A)$ et $y \in Ax$, i.e., $[x, y] \in A$.

Proposition 1.8.20.
L'opérateur A^0 est une section principale de A.

Démonstration
Considérons l'ensemble :

$$M = \Big\{(x, y) \in \overline{D(A)} \times H : \ \big\langle A^0(\xi) - y, \xi - x\big\rangle \geq 0 \ \forall \xi \in D(A)\Big\}.$$

Il est clair que pour tout $[x, y] \in A$,

$$\langle A^0(\xi) - y, \xi - x\rangle \geq 0 \ \forall \xi \in D(A)$$

(car A est monotone) alors $A \subset M$. Donc, il suffit de montrer que M est monotone. Soient (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in M$. Posons $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \in \overline{D(A)}$ (car $\overline{D(A)}$ est convexe). On a pour tout $\xi \in D(A)$

$$\big\langle y_1 - A^0(\xi), x_1 - \xi\big\rangle \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big\langle y_1 - A^0(\xi), \frac{x_1 - x_2}{2} + x - \xi\Big\rangle \geq 0$$

et

$$\big\langle y_2 - A^0(\xi), x_2 - \xi\big\rangle \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big\langle y_2 - A^0(\xi), -\frac{x_1 - x_2}{2} + x - \xi\Big\rangle \geq 0$$

d'où par addition,

$$\Big\langle y_1 - A^0(\xi) - y_2 + A^0(\xi), \frac{x_1 - x_2}{2}\Big\rangle + \big\langle y_1 + y_2 - 2A^0(\xi), x - \xi\big\rangle \geq 0$$

par suite,

$$\Big\langle y_1 - y_2, \frac{x_1 - x_2}{2}\Big\rangle \geq \big\langle y_1 + y_2, \xi - x\big\rangle + 2\big\langle A^0(\xi), x - \xi\big\rangle. \tag{1.7}$$

Prenons $\xi = J_\lambda^A(x) \in D(A)$, on a $2\big\langle A^0\big(J_\lambda^A(x)\big), x - J_\lambda^A(x)\big\rangle = 2\lambda\big\langle A^0\big(J_\lambda^A(x)\big), A_\lambda(x)\big\rangle \geq 0$ puisque $A_\lambda(x) \in AJ_\lambda^A(x)$.
En effet, $A^0\big(J_\lambda^A(x)\big) = Proj_{AJ_\lambda^A(x)}(0)$ et $A_\lambda(x) \in AJ_\lambda^A(x)$. Alors, par la caractérisation de la projection

$$\begin{aligned}\big\langle 0 - Proj_{AJ_\lambda^A(x)}(0), A_\lambda(x) - Proj_{AJ_\lambda^A(x)}(0)\big\rangle \leq 0 \ &\Longrightarrow \ -\big\langle A^0\big(J_\lambda^A(x)\big), A_\lambda(x)\big\rangle + \|A^0\big(J_\lambda^A(x)\big)\|^2 \leq 0 \\ &\Longrightarrow \ \big\langle A^0\big(J_\lambda^A(x)\big), A_\lambda(x)\big\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Donc, l'inégalité (1.7) devient

$$\frac{1}{2}\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq \langle y_1 + y_2, J_\lambda^A(x) - x\rangle,$$

passant à la limite quand $\lambda \to 0$, puisque $x \in \overline{D(A)}$ (i.e, $Proj_{\overline{D(A)}}(x) = x$), d'après le Théorème 1.8.18, on obtient

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0.$$

Donc, M est monotone, et comme A est maximal monotone et $A \subset M$, alors $A = M$, par conséquent

$$x \in D(A) \text{ et } y \in Ax.\blacksquare$$

1.8.4 Distance de Vladimirov entre des opérateurs maximaux monotones

Nous définissons la distance entre deux opérateurs maximaux monotones A_1 et A_2, qui dans le cas $A_i = \partial\delta_{C_i}$ $i = 1, 2$, est équivalente à la distance de Hausdorff $d_H(C_1, C_2)$ entre les ensembles convexes, fermés C_1 et C_2. Se référer à [45], [32].

Définition 1.8.21.
Soient A, $B : H \rightrightarrows H$ deux opérateurs maximaux monotones. On définit la distance de Vladimirov entre A et B, et on la note $dis(A, B)$, par

$$dis(A, B) := \sup\left\{\frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle}{\|y_1\| + \|y_2\| + 1}, \quad [x_1, y_1] \in A,\ [x_2, y_2] \in B\right\}. \tag{1.8}$$

La distance $dis(\cdot, \cdot)$ n'est pas métrique car dans le cas général l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.

Les lemmes suivants, concernant quelques propriétés des opérateurs maximaux monotones via la distance de Vladimirov, sont très importants pour les preuves de nos théorèmes. Voir [45], [32], [6].

Lemme 1.8.22.
Soient A, B deux opérateurs maximaux monotones de H, alors

(a) $dis(A, B) \in [0, +\infty]$, $dis(A, B) = dis(B, A)$ et $dis(A, B) = 0$ ssi $A = B$.

(b) Pour tout nombre réel positif β nous avons : $dis(\beta A, \beta B) \leq \max\{1, \beta\}\, dis(A, B)$.

(c) $\|x - Proj_{\overline{D(B)}}(x)\| \leq dis(A, B)$ pour tout $x \in \overline{D(A)}$.

(d) $d_H(D(A), D(B)) \leq dis(A, B)$.

(e) Si $A_i = N_{C_i}$ avec C_i, $i = 1, 2$, des sous ensembles convexes fermés de H, alors

$$d_H(C_1, C_2) = dis(A_1, A_2).$$

Démonstration

(a) Soit $x \in H$, on a pour tout $\lambda > 0$ $A_\lambda x \in AJ_\lambda^A x$ et $B_\lambda x \in BJ_\lambda^B x$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle A_\lambda x - B_\lambda x, J_\lambda^B x - J_\lambda^A x\rangle &= \left\langle \frac{x - J_\lambda^A x}{\lambda} - \frac{x - J_\lambda^B x}{\lambda}, J_\lambda^B x - J_\lambda^A x \right\rangle \\
&= \frac{1}{\lambda}\langle J_\lambda^B x - J_\lambda^A x, J_\lambda^B x - J_\lambda^A x\rangle \\
&= \frac{1}{\lambda}\|J_\lambda^B x - J_\lambda^A x\| \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

par suite, comme $1 + \|A_\lambda x\| + \|B_\lambda x\| > 0$ on obtient

$$\frac{\langle A_\lambda x - B_\lambda x, J_\lambda^B x - J_\lambda^A x\rangle}{1 + \|A_\lambda x\| + \|B_\lambda x\|} \geq 0$$

donc, on conclut que

$$dis(A, B) \in [0, +\infty].$$

• Montrons que $dis(A, B) = 0$ ssi $A = B$. Soient $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in A$, A est monotone alors

$$\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle \leq 0,$$

donc $dis(A, A) \leq 0$, d'où $dis(A, A) = 0$.

Inversement, Supposons que $dis(A, B) = 0$. Alors pour tout $[x_1, y_1] \in A$, et pour tout $[x_2, y_2] \in B$, on a

$$\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle \leq 0. \tag{1.9}$$

Soit T l'opérateur défini par $T = A \cup B$ avec $D(T) = D(A) \cup D(B)$. T est un opérateur monotone. En effet, soient $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in T$. Si $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in A$, alors la monotonie de T est évidente. De même si $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in B$. Discutons le cas où $[x_1, y_1] \in A \subset T$ et $[x_2, y_2] \in B \subset T$, alors par (1.9) on a

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$$

i.e., pour tous $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in T$ on a

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$$

c'est à dire que T est monotone. Mais A et B sont maximaux monotones, par conséquent $A = B = T$.

(b) Soit β un nombre réel positif. Il est clair que $D(\beta A)=D(A)$, on a alors

$$\begin{aligned}
dis(\beta A,\beta B) &= \sup\left\{\frac{\langle y_1-y_2,x_2-x_1\rangle}{\|y_1\|+\|y_2\|+1},\ [x_1,y_1]\in\beta A,\ [x_2,y_2]\in\beta B\right\}\\
&= \sup\left\{\frac{\langle \beta y_1'-\beta y_2',x_2-x_1\rangle}{\|\beta y_1'\|+\|\beta y_2'\|+1},\ [x_1,y_1']\in A,\ [x_2,y_2']\in B\right\}\\
&= \sup\left\{\frac{\beta\langle y_1'-y_2',x_2-x_1\rangle}{\beta\|y_1'\|+\beta\|y_2'\|+1},\ [x_1,y_1']\in A,\ [x_2,y_2']\in B\right\}\\
&= \beta\sup\left\{\left(\frac{\langle y_1'-y_2',x_2-x_1\rangle}{\|y_1'\|+\|y_2'\|+1}\right)\left(\frac{\|y_1'\|+\|y_2'\|+1}{\beta\|y_1'\|+\beta\|y_2'\|+1}\right),\ [x_1,y_1']\in A,\ [x_2,y_2']\in B\right\}\\
&\le \beta\, dis(A,B)\left(\frac{\|y_1'\|+\|y_2'\|+1}{\beta\|y_1'\|+\beta\|y_2'\|+1}\right)
\end{aligned}$$

Posons $t=\|y_1'\|+\|y_2'\|\ge 0$, et montrons que $\dfrac{1+t}{1+\beta t}\le\max\left\{1,\dfrac{1}{\beta}\right\}$.

- Si $0<\beta\le 1$, alors, $\beta+\beta t\le 1+\beta t$, par suite, $\dfrac{\beta+\beta t}{1+\beta t}\le 1$, donc, $\dfrac{1+t}{1+\beta t}\le\dfrac{1}{\beta}$.
- Si $\beta\ge 1$, alors, $\beta t\ge t$, c'est-à-dire, $1+\beta t\ge 1+t$, par conséquent, $\dfrac{1+t}{1+\beta t}\le 1$. Donc,

on conclut que pour $\beta>0$

$$\frac{1+t}{1+\beta t}\le\max\{1,\frac{1}{\beta}\}.$$

Enfin, on trouve

$$dis(\beta A,\beta B)\le\max\{1,\beta\}\,dis(A,B).$$

(c) Montrons que $\|x-Proj_{\overline{D(B)}}(x)\|\le dis(A,B)$ pour tout $x\in\overline{D(A)}$.
Soient $x\in D(A)$ et $y\in Ax$, comme $J_\lambda^B(x)\in D(B)$ et $B_\lambda(x)\in BJ_\lambda^B(x)$ pour tout $\lambda>0$ (Proposition 1.8.17 (i)), on aura

$$\langle y-B_\lambda(x),J_\lambda^B(x)-x\rangle\le dis(A,B)(1+\|y\|+\|B_\lambda x\|),$$

donc, en remplaçant par la valeur de $B_\lambda(x)$

$$\langle\lambda y+J_\lambda^B(x)-x,J_\lambda^B(x)-x\rangle\le\lambda\,dis(A,B)(1+\|y\|)+dis(A,B)\|J_\lambda^B(x)-x\|.$$

En faisant tendre λ vers 0, grâce au Théorème 1.8.18, on obtient

$$\langle Proj_{\overline{D(B)}}(x)-x,Proj_{\overline{D(B)}}(x)-x\rangle\le dis(A,B)\|Proj_{\overline{D(B)}}(x)-x\|,$$

d'où

$$\|Proj_{\overline{D(B)}}(x)-x\|\le dis(A,B)\quad\forall x\in D(A). \tag{1.10}$$

Cette estimation reste vraie pour tout $x\in\overline{D(A)}$. En effet, soit $x\in\overline{D(A)}$ et soit $(x_n)_n\subset D(A)$ tel que $x_n\to x$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\|Proj_{\overline{D(B)}}(x_n)-x_n\|\le dis(A,B).$$

Comme $Proj_{\overline{D(B)}}$ est lipschitzienne, par passage à la limite on obtient le résultat, i.e.

$$\|Proj_{\overline{D(B)}}(x) - x\| \leq dis(A,B) \quad \forall x \in \overline{D(A)}.$$

d) Montrons que $d_H(D(A), D(B)) \leq dis(A,B)$.
Supposons que

$$d_H(D(A), D(B)) = e(D(A), D(B)) = \sup_{x \in D(A)} d(x, D(B))$$

Par (1.10) on a

$$\|Proj_{\overline{D(B)}}(x) - x\| \leq dis(A,B) \quad \forall x \in D(A),$$

c'est à dire

$$d\left(x, \overline{D(B)}\right) \leq dis(A,B) \quad \forall x \in D(A),$$

donc

$$d(x, D(B)) \leq dis(A,B), \quad \forall x \in D(A).$$

En effet, posons $dis(A,B) = m$, alors

$$d\left(x, \overline{D(B)}\right) \leq m \iff inf_{y \in \overline{D(B)}} \|x - y\| \leq m,$$

par la caractérisation de l'infimum

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in \overline{D(B)}, d\left(x, \overline{D(B)}\right) \leq \|x - y_\varepsilon\| < m + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.11}$$

Comme $y_\varepsilon \in \overline{D(B)}$ alors il existe $(y_n^\varepsilon) \subset D(B)$ tel que $y_n^\varepsilon \to y_\varepsilon$, i.e.,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|y_n^\varepsilon - y_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.12}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, par (1.11) et (1.12),

$$\|x - y_n^\varepsilon\| \leq \|x - y_\varepsilon\| + \|y_\varepsilon - y_n^\varepsilon\| < m + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = m + \varepsilon,$$

du fait que $y_n^\varepsilon \in D(B)$ on trouve

$$d(x, D(B)) < m + \varepsilon$$

en faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$d(x, D(B)) \leq m = dis(A,B), \quad \forall x \in D(A),$$

i.e.,

$$\sup_{x\in D(A)} d(x, D(B)) \leq dis(A, B).$$

D'où

$$d_H(D(A), D(B)) \leq dis(A, B).$$

La preuve reste identique si $d_H(D(A), D(B)) = e(D(B), D(A)) = \sup\limits_{x\in D(B)} d(x, D(A))$.

(e) Soit $x_i \in C_i$, $y_i \in A_i x_i = N_{C_i}(x_i)$, $i = 1, 2$, alors grâce aux l'estimations suivantes

$$d(x_1, C_2) \leq d_H(C_1, C_2), \quad d(x_2, C_1) \leq d_H(C_1, C_2),$$

on obtient, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \langle y_1, x_2 - x_1\rangle &\leq \|y_1\|\|x_2 - x_1\| \\ &\leq \|y_1\| d(x_2, C_1) \\ &\leq \|y_1\| d_H(C_1, C_2). \end{aligned}$$

De même,

$$\langle y_2, x_1 - x_2\rangle \leq \|y_2\| d_H(C_1, C_2).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle &\leq d_H(C_1, C_2)(\|y_1\| + \|y_2\|) \\ &\leq d_H(C_1, C_2)(1 + \|y_1\| + \|y_2\|) \end{aligned}$$

par suite,

$$dis(A_1, A_2) \leq d_H(C_1, C_2).$$

D'autre part, comme $D(A_i) = D(N_{C_i}) = C_i$, $i = 1, 2$, alors d'après (d)

$$d_H(D(A_1), D(A_2)) = d_H(C_1, C_2) \leq dis(A_1, A_2),$$

par conséquent,

$$d_H(C_1, C_2) = dis(A_1, A_2).$$

Lemme 1.8.23.
Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n un opérateur maximal monotone tel que $dis(A_n, A) \to 0$ pour un opérateur maximal monotone A. Supposons aussi que $x_n \in D(A_n)$ avec $x_n \to x$ et que $y_n \in A_n x_n$ avec $y_n \rightharpoonup y$ faiblement pour $x, y \in H$. Alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Démonstration

Soit $w \in D(A)$ et $z \in Aw$. Par la définition de $dis(\cdot,\cdot)$ nous avons :

$$\langle x_n - w, z - y_n\rangle \leq (1 + \|z\| + \|y_n\|)\, dis(A_n, A).$$

Par passage à la limite,

$$\begin{aligned} \big\langle x - w, z - y\big\rangle &= \lim_{n\to\infty} \big\langle x_n - w, z - y_n\big\rangle \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (1 + \|z\| + \|y_n\|)\, dis(A_n, A) = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\big\langle x - w, y - z\big\rangle \geq 0, \quad \forall w \in D(A), \forall z \in Aw.$$

Par la maximalité de A, on obtient $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Lemme 1.8.24. *Soient A, B deux opérateurs maximaux monotones. Alors*

(a) pour tout $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$

$$\|x - J_\lambda^B(x)\| \leq \lambda\|A^0(x)\| + dis(A, B) + \sqrt{\lambda\big(1 + \|A^0(x)\|\big)\, dis(A, B)}.$$

(b) Pour tout $\lambda > 0$ et $x, \bar{x} \in H$

$$\|J_\lambda^A(x) - J_\lambda^B(\bar{x})\|^2 \leq \|x - \bar{x}\|^2 + 2\lambda\big(1 + \|A_\lambda(x)\| + \|B_\lambda(\bar{x})\|\big)\, dis(A, B).$$

(c) Pour tout $\lambda > 0$ et $x, \bar{x} \in H$

$$\|A_\lambda(x) - B_\lambda(\bar{x})\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}\|x - \bar{x}\|^2 + \frac{2}{\lambda}\big(1 + \|A_\lambda(x)\| + \|B_\lambda(\bar{x})\|\big)\, dis(A, B).$$

Démonstration

(a)Pour tout $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$, nous avons $J_\lambda^B(x) \in D(B)$ et $B_\lambda(x) \in B(J_\lambda^B(x))$. Par conséquent, par la définition de $dis(\cdot,\cdot)$ nous avons pour tout $y \in Ax$

$$\frac{\big\langle y - B_\lambda(x), J_\lambda^B(x) - x\big\rangle}{1 + \|y\| + \|B_\lambda(x)\|} = \frac{\lambda\big\langle y, J_\lambda^B(x) - x\big\rangle + \|J_\lambda^B(x) - x\|^2}{\lambda(1 + \|y\|) + \|J_\lambda^B(x) - x\|} \leq dis(A, B),$$

en particulier, pour $y = A^0(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|J_\lambda^B(x) - x\|^2 &\leq \lambda\big\langle A^0(x), x - J_\lambda^B(x)\big\rangle + \big[\lambda(1 + \|A^0(x)\|) + \|J_\lambda^B(x) - x\|\big]\, dis(A, B) \\ &\leq \lambda\|A^0(x)\|\|J_\lambda^B(x) - x\| + \lambda(1 + \|A^0(x)\|)\, dis(A, B) + \|J_\lambda^B(x) - x\|\, dis(A, B) \\ &\leq \big(\lambda\|A^0(x)\| + dis(A, B)\big)\|J_\lambda^B(x) - x\| + \lambda\big(1 + \|A^0(x)\|\big)\, dis(A, B) \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\left(\|J_\lambda^B(x)-x\|-\frac{1}{2}[\lambda\|A^0(x)\|+dis(A,B)]\right)^2 \leq \lambda(1+\|A^0(x)\|)\,dis(A,B)+\frac{1}{4}\big[\lambda\|A^0(x)\|+dis(A,B)\big]^2$$

alors,

$$\|J_\lambda^B(x)-x\| \leq \lambda\|A^0(x)\|+dis(A,B)+\sqrt{\lambda(1+\|A^0(x)\|)\,dis(A,B)}.$$

(b) Pour tout $\lambda > 0$, et $x, \bar{x} \in H$, nous avons $A_\lambda(x) \in AJ_\lambda^A(x)$ et $B_\lambda(\bar{x}) \in BJ_\lambda^B(\bar{x})$, alors d'après la définition de $dis(\cdot,\cdot)$

$$\big\langle A_\lambda(x)-B_\lambda(\bar{x}), J_\lambda^B(\bar{x})-J_\lambda^A(x)\big\rangle \leq (1+\|A_\lambda(x)\|+\|B_\lambda(\bar{x})\|)\,dis(A,B). \tag{1.13}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\|J_\lambda^A(x)-J_\lambda^B(\bar{x})\|^2 = \\
&= \Big\langle (J_\lambda^A(x)-x)-(J_\lambda^B(\bar{x})-\bar{x})+(x-\bar{x}), (J_\lambda^A(x)-x)-(J_\lambda^B(\bar{x})-\bar{x})+(x-\bar{x})\Big\rangle \\
&= \|(J_\lambda^A(x)-x)-(J_\lambda^B(\bar{x})-\bar{x})\|^2+\|x-\bar{x}\|^2+2\big\langle (J_\lambda^A(x)-x)-(J_\lambda^B(\bar{x})-\bar{x}), x-\bar{x}\big\rangle \\
&= \|(J_\lambda^A(x)-x)-(J_\lambda^B(\bar{x})-\bar{x})\|^2+\|x-\bar{x}\|^2+ \\
&+2\big\langle (J_\lambda^A(x)-x)-(J_\lambda^B(\bar{x})-\bar{x}), (J_\lambda^B(\bar{x})-\bar{x})-(J_\lambda^A(x)-x)+(J_\lambda^A(x)-J_\lambda^B(\bar{x}))\big\rangle \\
&= \|x-\bar{x}\|^2-\|(J_\lambda^A(x)-x)-(J_\lambda^B(\bar{x})-\bar{x})\|^2+ \\
&+2\langle (J_\lambda^A(x)-x)-(J_\lambda^B(\bar{x})-\bar{x}), J_\lambda^A(x)-J_\lambda^B(\bar{x})\rangle \\
&= \|x-\bar{x}\|^2-\|(J_\lambda^A(x)-x)-(J_\lambda^B(\bar{x})-\bar{x})\|^2+2\lambda\big\langle B_\lambda(\bar{x})-A_\lambda(x), J_\lambda^A(x)-J_\lambda^B(\bar{x})\big\rangle
\end{aligned} \tag{1.14}$$

alors, d'après (1.13), on obtient

$$\|J_\lambda^A(x)-J_\lambda^B(\bar{x})\|^2 \leq \|x-\bar{x}\|^2+2\lambda(1+\|A_\lambda(x)\|+\|B_\lambda(\bar{x})\|)\,dis(A,B).$$

(c) Nous avons d'après (1.14)

$$\begin{aligned}
\lambda^2\|A_\lambda(x)-B_\lambda(\bar{x})\|^2 &= \|x-\bar{x}\|^2-\|J_\lambda^A(x)-J_\lambda^B(\bar{x})\|^2+2\lambda\langle B_\lambda(\bar{x})-A_\lambda(x), J_\lambda^A(x)-J_\lambda^B(\bar{x})\rangle \\
&\leq \|x-\bar{x}\|^2+2\lambda\langle B_\lambda(\bar{x})-A_\lambda(x), J_\lambda^A(x)-J_\lambda^B(\bar{x})\rangle
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (1.13)

$$\|A_\lambda(x)-B_\lambda(\bar{x})\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}\|x-\bar{x}\|^2+\frac{2}{\lambda}(1+\|A_\lambda(x)\|+\|B_\lambda(\bar{x})\|)\,dis(A,B).$$

Lemme 1.8.25.
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n un opérateur maximal monotone tel que $dis(A_n, A) \to 0$ pour

un opérateur maximal monotone A. Supposons aussi que $\eta_n \in D(A_n)$ avec $\eta_n \to \eta$ pour $\eta \in D(A)$ et tel que $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n^0 \eta_n\| < +\infty$. Alors, il existe une suite (ξ_n) tel que

$$\xi_n \in D(A_n),\ \xi_n \to \eta \text{ et } A_n^0 \xi_n \to A^0 \eta. \tag{1.15}$$

Plus précisément, on peut prendre $\xi_n = J_{\lambda_n}^{A_n}$ avec

$$\lambda_n = (|\eta_n - \eta| + dis(A_n, A))^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

En particulier, si $dis(A_n, A) \to 0$ et $\|A_n^0 x\| \leq c(1 + \|x\|)$ pour $c > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x \in D(A_n)$, alors pour tout $\eta \in D(A)$, il existe une suite (ξ_n) tel que (1.15) soit satisfaite.

Démonstration

Par le caractère Lipschitz de A_λ, et comme $\eta \in D(A)$ nous avons, en utilisant iii) de la Proposition 1.8.17

$$\begin{aligned}
\|A_{\lambda_n}(\eta_n)\| &\leq \|A_{\lambda_n}(\eta_n) - A_{\lambda_n}(\eta)\| + \|A_{\lambda_n}(\eta)\| \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n}\|\eta_n - \eta\| + \|A^0(\eta)\| \\
&\leq \frac{\|\eta_n - \eta\|}{(\|\eta_n - \eta\| + dis(A_n, A))^{\frac{1}{2}}} + \|A^0(\eta)\| \\
&\leq \|\eta_n - \eta\|^{\frac{1}{2}} + \|A^0(\eta)\|,
\end{aligned} \tag{1.16}$$

et puisque $\eta_n \in D(A_n)$

$$\|A_{n,\lambda_n}(\eta_n)\| \leq \|A_n^0(\eta_n)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n^0(\eta_n)\| = M < +\infty, \tag{1.17}$$

alors, par le Lemme 1.8.24(a) et (b), (1.16) et (1.17)

$$\begin{aligned}
\|\eta_n - \xi_n\| &= \|\eta_n - J_{\lambda_n}^{A_n}(\eta_n)\| \\
&\leq \|\eta_n - J_{\lambda_n}^{A}(\eta_n)\| + \|J_{\lambda_n}^{A}(\eta_n) - J_{\lambda_n}^{A_n}(\eta_n)\| \\
&\leq \lambda_n\|A_n^0(\eta_n)\| + dis(A_n, A) + \sqrt{\lambda_n(1 + \|A_n^0(\eta_n)\|)\, dis(A_n, A)} \\
&+ [2\lambda_n(1 + \|A_{n,\lambda_n}(\eta_n)\| + \|A_{\lambda_n}(\eta_n)\|)\, dis(A_n, A)]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \lambda_n M + dis(A_n, A) + \sqrt{\lambda_n(1 + M)\, dis(A_n, A)} \\
&+ \left[2\lambda_n(1 + M + \|\eta_n - \eta\|^{\frac{1}{2}} + \|A^0(\eta)\|) dis(A_n, A)\right]^{\frac{1}{2}} \to 0
\end{aligned}$$

par conséquent, $\|\xi_n - \eta\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$ (car $dis(A_n, A) \to 0$, $\eta_n \to \eta$ et $\lambda_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$). De plus, comme $\|A_{\lambda_n}(\eta)\| \leq \|A^0(\eta)\|$, puisque $\eta \in D(A)$, on obtient d'après le lemme 1.8.24(c)

$$\begin{aligned}\|A_{n,\lambda_n}(\eta_n) - A_{\lambda_n}(\eta)\|^2 &\leq \frac{1}{\lambda_n^2}\|\eta_n - \eta\|^2 + \frac{2}{\lambda_n}(1 + \|A_{n,\lambda_n}(\eta_n)\| + \|A_{\lambda_n}(\eta)\|)\, dis(A_n, A)\\ &\leq \|\eta_n - \eta\| + 2(1 + M + \|A^0(\eta)\|)\sqrt{dis(A_n, A)} \to 0,\end{aligned}$$

par conséquent,

$$A_{n,\lambda_n}(\eta_n) \to A^0(\eta) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Comme $A_{n,\lambda_n}(\eta_n) \in A_n J_{\lambda_n}^{A_n}(\eta_n) = A_n\xi_n$, nous avons $\|A_n^0(\xi_n)\| \leq \|A_{n,\lambda_n}(\eta_n)\|$ et par conséquent

$$\limsup_{n\to\infty} \|A_n^0(\xi_n)\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|A_{n,\lambda_n}(\eta_n)\| = \|A^0(\eta)\|. \tag{1.18}$$

Pour prouver que $A_n^0(\xi_n) \to A^0(\eta)$, on peut supposer que $y_n = A_n^0(\xi_n) \rightharpoonup y$ faiblement pour $y \in H$, on applique le Lemme 1.8.23 sur $x_n = \xi_n \to \eta$ on obtient $y \in A\eta$. D'où,

$$\|A^0(\eta)\| \leq \|y\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n^0(\xi_n)\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|A_n^0(\xi_n)\|$$

et avec (1.18) ceci implique que $y = A^0(\eta)$ et $A_n^0(\xi_n) \to A^0(\eta)$.
Pour le cas particulier, on prend $\eta_n = J_{\mu_n}^{A_n}(\eta) \in D(A_n)$ pour une suite quelconque $\mu_n \to 0$, d'après le Lemme 1.8.24(a)

$$\begin{aligned}\|\eta_n - \eta\| = \|J_{\mu_n}^{A_n}(\eta) - \eta\| &\leq \mu_n\|A_n^0(\eta)\| + dis(A_n, A) + \sqrt{\mu_n(1 + \|A_n^0(\eta)\|)\, dis(A_n, A)}\\ &\leq c(1 + \|\eta\|)\mu_n + dis(A_n, A) + \sqrt{\mu_n(1 + c(1 + \|\eta\|))\, dis(A_n, A)}\end{aligned}$$

alors, $\eta_n \to \eta$ lorsque $n \to \infty$ et aussi

$$\|A_n^0(\eta_n)\| \leq c(1 + \|\eta_n - \eta\| + \|\eta\|) \leq M.$$

Chapitre 2

Existence de solutions absolument continues pour une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone et avec une perturbation univoque

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de solution de problèmes d'évolution du premier ordre régis par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps, dans un espace de Hilbert H. En premier lieu, on donne un théorème d'existence de solution du problème de la forme

$$(P)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)\, u(t), & p.p.t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où, pour tout $t \in I = [0,T]$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows$ H est un opérateur maximal monotone et l'application $t \mapsto A(t)$ est à variation absolument continue. En second lieu, on introduit une perturbation univoque dépendant du temps et de l'état et satisfaisant une condition de type Lipschiitz. Il s'agit du problème de la forme

$$(P_f)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)\, u(t) + f(t, u(t)), & p.p.t \in I \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Soulignons ici, que le même problème $\big(P\big)$ où $t \mapsto A(t)$ est à variation bornée continue à droite a été étudié par Kunze-Marques dans [32]. Par contre, une étude détaillée du problème $\big(P_f\big)$ où $t \mapsto A(t)$ est à variation bornée continue, a été menée dans le récent papier par Azzam et al [6]. Dans ces travaux, les auteurs ont considéré les problèmes

$$(P^r)\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) \in A(t)\, u(t), & dr - p.p.\, t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

et

$$(P^r_f)\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) \in A(t)\, u(t) + f\big(t, u(t)\big), & dr - p.p.\, t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où, $t \mapsto A(t)$ vérifie l'hypothèse

$$dis(A(t), A(s)) \leq r(t) - r(s), \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T,$$

avec $r : I \to [0, +\infty[$ une fonction croissante, continue à droite dans l'étude de $\big(P^r\big)$ (voir [32]) et continue dans l'étude de $\big(P^r_f\big)$ (voir [6]). Ils ont alors démontré un théorème d'existence et d'unicité de solution à variation bornée continue à droite (BVRC) pour le problème $\big(P^r\big)$ et de solution à variation bornée continue (BVC) pour le problème $\big(P^r_f\big)$. De ce dernier théorème, les auteurs ont dérivé un théorème d'existence et d'unicité de solution Lipschitzienne en considérant $t \mapsto A(t)$ à variation Lipschitzienne par rapport à la distance de Vladimirov, i.e.,

$$dis(A(t), A(s)) \leq \alpha|t - s| \quad \forall\, t, s \in I,$$

où α est une constante positive. L'idée était de prendre $r(t) = \alpha t$, et donc $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{du}{dr}\dfrac{dr}{dt} = \alpha\dfrac{du}{dr}$. Comme l'opérateur $B(t) = \dfrac{1}{\alpha}A(t)$ est maximal monotone, l'existence de solution pour le problème

$$-\frac{du}{dt} \in A(t)u(t) + f(t, u(t)),$$

est alors déduite de l'existence de solution pour le problème

$$-\frac{du}{dr}(t) \in B(t)u(t) + \frac{1}{\alpha}f(t, u(t)).$$

Néanmoins, cette méthode ne peut être utilisée dans le cas d'une variation absolument continue de $t \mapsto A(t)$. En effet, si on considère l'existence d'une fonction $\beta : I \to [0, +\infty[$ absolument continue telle que

$$dis(A(t), A(s)) \leq |\beta(t) - \beta(s)| \quad \forall\, t, s \in I,$$

et en essayant d'utiliser le théorème d'existence pour $\left(P_f^r\right)$ (car β vérifie les hypothèses supposées sur r) nous obtenons l'existence de solution pour le problème

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{d\beta}(t) \in A(t)\, u(t) + f(t, u(t)), & \text{pour } \ p.p.\, t \in I \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$-\frac{du}{dt}\frac{dt}{d\beta} \in A(t)\, u(t) + f(t, u(t)) \iff -\frac{du}{dt} \in \dot{\beta}(t)A(t)\, u(t) + \dot{\beta}(t)f(t, u(t))$$

et les hypothèses exigées pour la résolution de $\left(P_f^r\right)$ ne sont pas satisfaites sur l'opérateur $B(t) = \dfrac{1}{\dot{\beta}(t)}A(t)\, u(t)$ et la perturbation $g(t, u(t)) = \dfrac{1}{\dot{\beta}(t)}f(t, u(t))$. Par conséquent, le cas de la variation absolument continue de $t \mapsto A(t)$ nécessite une étude spécifique et c'est l'objectif de ce premier chapitre.
Dans tout le chapitre H est un espace de Hilbert réel séparable et $I = [0, T]$.

2.2 Résultat d'existence pour un problème d'évolution non perturbé.

Nous commençons par énoncer un théorème sur l'existence de solution absolument continue pour le problème non perturbé régi par un opérateur maximal monotone dépendant du temps, suivant

$$(P)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)\,u(t), & p.p.\, t \in I \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

(Théorème 3 dans [32]). Nous donnons ici une preuve complète, avec un algorithme de discrétisation différent et une hypothèse légèrement renforcée sur la variation de l'opérateur par rapport à [32].

Théorème 2.2.1.

Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows \mathrm{H}$ un opérateur maximal monotone vérifiant les hypothèses suivantes.

(H1) Il existe une fonction $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$ positive sur I et croissante avec, sans perte de generalité, $\beta(T) < \infty$ et $\beta(0) = 0$, tel que

$$dis(A(t), A(s)) \leq |\beta(t) - \beta(s)| \qquad \forall\, t, s \in I. \tag{2.3}$$

(H2) Il existe une constante positive c, tel que

$$\|A^0(t,x)\| \leq c(1 + \|x\|) \quad \forall\, t \in I,\; x \in D(A(t)). \tag{2.4}$$

Alors, pour $u_0 \in D(A(0))$ le problème $\big(P\big)$ admet une solution unique absolument continue. De plus,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)) \quad p.p.\, t \in I,$$

pour une certaine constante $K \in [0, +\infty[$ dépendant de $\|u_0\|, c, T$ et β. Plus précisément,

$$K := 2\big(1 + c(1 + K_1)\big), \quad \text{avec } K_1 := \Big(\|u_0\| + 2(1+c)(T + \beta(T))\Big) \exp\big(2c(T + \beta(T))\big).$$

Démonstration

La démonstration se base sur la construction de suites approximantes via un algorithme bien adapté, dont nous allons montré la convergence vers la solution recherchée.
On choisit une suite quelconque $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,1]$ décroissante vers 0 lorsque $n \to +\infty$, et on considère la partition $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n = T$ de I. Comme $t \mapsto \beta(t) + t$ est absolument continue on peut supposer que

$$|t_{i+1}^n - t_i^n| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} |\dot{\beta}(t)| dt \leq \varepsilon_n, \ \text{pour i} = 0, \ldots, \mathrm{k_n} - 1. \tag{2.5}$$

On pose

$$\delta_{i+1}^n = t_{i+1}^n - t_i^n, \;\; \eta_{i+1}^n = \beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n), \;\; \text{pour } \; \mathrm{i} = 0, \ldots, \mathrm{k_n} - 1, \tag{2.6}$$

alors, l'inégalité (2.5) peut être réécrite sous la forme : $\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n \leq \varepsilon_n \leq 1$.
Nous partageons la preuve en 4 étapes :

Etape 1. Algorithme

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on construit une application en escalier continue à droite $u_n : I \to H$, comme suit :

$$u_n(t) = u_0^n = u_0, \text{ pour } t \in [0, t_1^n[, \text{ et}$$

$$u_n(t) = u_i^n, \text{ pour } i = 1, \ldots, k_n, \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \quad u_n(T) = u_{k_n}^n \tag{2.7}$$

où, pour $i = 0, \ldots, k_n - 1$,

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n(u_i^n) := (I_H + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n))^{-1}(u_i^n), \tag{2.8}$$

c'est-à-dire $J_{i+1}^n(u_i^n) = J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n)}(u_i^n)$. Observons que, par construction, $u_{i+1}^n = J_{i+1}^n(u_i^n) \in D(A(t_{i+1}^n))$ $\big($voir Proposition 1.8.17(i)$\big)$, et

$$u_i^n \in (I_H + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n))u_{i+1}^n,$$

i.e.,

$$-\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} = \frac{u_i^n - J_{i+1}^n(u_i^n)}{\delta_{i+1}^n} = A_{\delta_{i+1}^n}(u_i^n) \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n = A(t_{i+1}^n)J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n)}(u_i^n), \tag{2.9}$$

(voir Proposition 1.8.17(i)). On définit aussi l'application $v_n : I \to H$ par

$$v_n(t) = \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}(u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n \text{ pour } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \ i = 0, \ldots, k_n - 1, \tag{2.10}$$

et $v_n(T) = u_{k_n}^n$. Il est clair que l'application v_n est absolument continue avec $v_n(t_i^n) = u_i^n$ et

$$\dot{v}_n(t) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}, \qquad \forall\, t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[. \tag{2.11}$$

Par conséquent, si on définit la fonction $\theta_n : I \to I$ par

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_{i+1}^n & \text{pour} \quad t \in]t_i^n, t_{i+1}^n], \ i = 0, 1, \ldots, k_{n-1}, \\ 0 & \text{pour} \quad t = 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

alors, par (2.10), (2.11) et (2.12), l'inclusion (2.9) peut être écrite comme suit

$$-\dot{v}_n(t) \in A(\theta_n(t))v_n(\theta_n(t)), \qquad p.p.\, t \in I. \tag{2.13}$$

Etape 2. Estimations et convergence des suites $\left(u_n\right)_n$ et $\left(v_n\right)_n$.
Afin de prouver la convergence de la suite $\left(v_n\right)_n$, nous allons montrer qu'elle est bornée en variation et en norme.
Nous avons par l'hypothèse $\left(H1\right)$, $dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) \leq |\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)| = \eta_{i+1}^n$, pour $i = 0, \ldots, k_n - 1$. Ceci avec $u_i^n \in D(A(t_i^n))$, le Lemme 1.8.24 a) et $\left(H2\right)$ donnent

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\leq \delta_{i+1}^n \|A^0(t_i^n, u_i^n)\| + dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) \\
&+ \sqrt{\delta_{i+1}^n (1 + \|A^0(t_i^n, u_i^n)\|) dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n))} \\
&\leq \delta_{i+1}^n c(1 + \|u_i^n\|) + \eta_{i+1}^n + \sqrt{\delta_{i+1}^n (1 + c(1 + \|u_i^n\|)) \eta_{i+1}^n} \\
&\leq (1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + \sqrt{(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)^2 (1 + c(1 + \|u_i^n\|))} \\
&\leq 2(1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n). \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| \\
&\leq 2(1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + \|u_i^n\| \\
&\leq (1 + 2c(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n))\|u_i^n\| + 2(1 + c)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n).
\end{aligned}$$

On applique alors le Lemme 1.7.21, on trouve pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i = 0, \ldots, k_n$,

$$\|u_i^n\| \leq \left(\|u_0\| + 2(1 + c) \sum_{k=0}^{i-1} (\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n)\right) \exp\left(2c \sum_{k=0}^{i-1} (\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n)\right).$$

Comme $\sum_{k=0}^{i-1} \eta_{k+1}^n = \beta(t_i^n) - \beta(t_0^n) \leq \beta(T)$, et aussi $\sum_{k=0}^{i-1} \delta_{k+1}^n = t_i^n \leq T$, il s'ensuit que

$$\|u_i^n\| \leq \Big(\|u_0\| + 2(1 + c)(\beta(T) + T)\Big) \exp\left(2c(\beta(T) + T)\right) =: K_1.$$

D'où, par cette dernière inégalité, (2.14) devient

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq 2(1 + c(1 + K_1))\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big) =: K_2\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big). \qquad (2.15)$$

Si on pose $K = \max(K_1, K_2)$, on obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in I} \|u_n(t)\| \leq K \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(u_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k_n-1} \|u_{i+1}^n - u_i^n\|\right) \leq K(\beta(T) + T). \qquad (2.16)$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K\big((\beta(t) - \beta(s)) + (t - s) + \varepsilon_n\big). \tag{2.17}$$

En effet, fixons $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n[$ avec $j > i$. Alors par (2.6), (2.15) et le fait que β est croissante on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_n(s)\| &= \|u_j^n - u_i^n\| \\
&= \|u_j^n - u_{j-1}^n + u_{j-1}^n + \cdots - u_{i+1}^n + u_{i+1}^n - u_i^n\| \\
&\leq \|u_j^n - u_{j-1}^n\| + \cdots + \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{j-i-1} \|u_{i+k+1}^n - u_{i+k}^n\| \\
&\leq K \sum_{k=0}^{j-i-1} (\beta(t_{i+k+1}^n) - \beta(t_{i+k}^n) + (t_{i+k+1}^n - t_{i+k}^n)) \\
&= K((\beta(t_j^n) - \beta(t_i^n)) + (t_j^n - t_i^n)) \\
&= K\big((\beta(t_j^n) - \beta(t)) + (\beta(t) - \beta(s)) \\
&+ (\beta(s) - \beta(t_i^n)) + (t_j^n - t) + (t - s) + (s - t_i^n)\big) \\
&\leq K\big((\beta(t) - \beta(s)) + (t - s) + (\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)) + (t_{i+1}^n - t_i^n)\big).
\end{aligned}$$

En utilisant (2.5), on conclut que l'inégalité (2.17) est vraiment satisfaite.
Notre suite $(u_n)_n$ est une suite d'applications à variation bornée continues à droite uniformément bornée, en norme et en variation. D'après le Théorème 1.2.6, il existe une application à variation bornée $u : I \longrightarrow H$ telle que

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{pour tout} \ \ t \in I, \tag{2.18}$$

ceci implique que la condition initiale $u(0) = u_0$ est satisfaite. En effet, $(u_n(t))_n$ converge faiblement vers $u(t)$ pour tout $t \in I$, en particulier pour $t = 0$, c'est-à-dire, pour tout $x \in H$

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n(0), x\rangle = \langle u(0), x\rangle \Longrightarrow \langle u_0, x\rangle = \langle u(0), x\rangle$$

pour $x = u(0) - u_0$, on trouve $u(0) = u_0$. De plus, en prenant $\liminf\limits_{n\to\infty}$ dans (2.17), on obtient pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$, grâce à la Proposition 1.4.6,

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K((t - s) + \beta(t) - \beta(s)). \tag{2.19}$$

on divise cette inégalité par $t - s$, et on trouve

$$\frac{\|u(t) - u(s)\|}{t - s} \leq K\left(1 + \frac{\beta(t) - \beta(s)}{t - s}\right)$$

donc, lorsque s tend vers t, on obtient

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K\big(1+\dot{\beta}(t)\big), \quad p.p.\ t \in I. \tag{2.20}$$

Par conséquent, u est absolument continue. Plus précisément, $u \in \mathcal{W}^{1,2}(I,H)$ car nous avons supposé que $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I,\mathbb{R})$.

D'autre part, on peut montrer que la suite (v_n) est aussi bornée en norme et en variation. En effet, par les inégalités (2.10), (2.15) et (2.16), pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i = 0,1,...,k_n-1$

$$\|v_n(t)\| \leq \frac{t_{i+1}^n - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| \leq K_2 + K \leq 2K, \tag{2.21}$$

et aussi par (2.15)

$$\|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| = \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n). \tag{2.22}$$

Par suite,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_{\mathrm{C}} \leq 2K \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(v_n) \leq K(\beta(T)+T). \tag{2.23}$$

Maintenant, à l'aide de (2.5), (2.7), (2.10) et (2.15), nous avons pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\|v_n(t) - u_n(t)\| = \|v_n(t) - u_i^n\| = \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \quad \leq \quad \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K\varepsilon_n. \tag{2.24}$$

Cette dernière inégalité et (2.17) impliquent que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}
\|v_n(t) - v_n(s)\| &\leq \|v_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(s)\| + \|u_n(s) - v_n(s)\| \\
&\leq K\varepsilon_n + K((\beta(t) - \beta(s)) + (t-s) + \varepsilon_n) + K\varepsilon_n \\
&= K\big((t-s) + (\beta(t) - \beta(s)) + 3\varepsilon_n\big).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Grâce à (2.23), la suite (v_n) est bornée en norme et en variation. Alors, on peut lui extraire une sous suite qui converge faiblement ponctuellement dans H. Par (2.18) et (2.24), pour tout $\eta \in H$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Big|\langle v_n(t) - u(t), \eta\rangle\Big| &= \lim_{n\to\infty} \Big|\langle v_n(t) - u_n(t), \eta\rangle - \langle u_n(t) - u(t), \eta\rangle\Big| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} K\varepsilon_n \|\eta\| = 0.
\end{aligned}$$

D'où,

$$v_n(t) \rightharpoonup u(t) \text{ pour tout } t \in I, \tag{2.26}$$

Dans la suite, observons que par (2.6), (2.11) et (2.15), nous avons pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\|\dot{v}_n(t)\| = \frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|}{t_{i+1}^n - t_i^n} \leq K\left(\frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} + 1\right), \tag{2.27}$$

on applique le Théorème de différentiation de Lebesgue (Théorème 1.1.6) sur $\dot{\beta} \in L^2(I, \mathbb{R}) \subset L^1(I, \mathbb{R})$, on obtient pour presque tout t différent des *noeuds* t_i^n

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} = \dot{\beta}(t), \tag{2.28}$$

car $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$, et $\lim\limits_{n\to\infty} t_i^n = \lim\limits_{n\to\infty} t_{i+1}^n = t$. On conclut que, pour presque tout $t \in I$, il existe $C_t < \infty$ tel que

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq C_t,$$

i.e., $\exists \Omega \subset I$ tq $\lambda(\Omega) = 0$ et $\forall t \in I \backslash \Omega$, il existe $C_t < +\infty$ tel que

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq C_t. \tag{2.29}$$

Par l'estimation (2.23), on trouve

$$\begin{aligned} \|\dot{v}_n\|_{L^1} &= \int_0^T \|\dot{v}_n(t)\| dt = \sum_{i=0}^{k_n - 1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{v}_n(t)\| dt \\ &\leq \sum_{i=0}^{k_n-1} \|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| = var(v_n, I) \\ &\leq K(T + \beta(T)). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Par conséquent, la suite des applications dérivées $(\dot{v}_n)$ est bornée dans $L^1(I, H)$. Mais, ne sachant pas si $t \mapsto C_t$ est intégrable, on n'est pas en mesure d'extraire une sous suite de $(\dot{v}_n)$ convergeant dans $L^1(I, H)$. Par contre, en utilisant l'hypothèse $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$, on va montrer qu'on peut lui extraire une suite qui converge dans $L^2(I, H)$. Pour tout $t \in I$, soit $\gamma(t) = K(\dot{\beta}(t) + 1)$, alors par (2.15)

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \gamma(\tau) d\tau. \tag{2.31}$$

Comme $\gamma \geq 0$ et $\gamma \in L^2(I, \mathbb{R})$, nous avons par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq (t_{i+1}^n - t_i^n)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (\gamma(\tau))^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.32}$$

Alors par (2.11) et (2.32)

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_n\|_{L^2}^2 &= \int_0^T \|\dot{v}_n(s)\|^2 ds = \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{v}_n(s)\|^2 ds \\
&\leq \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|^2}{(t_{i+1}^n - t_i^n)^2} ds \\
&\leq \sum_{i=0}^{k_n-1} \frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|^2}{t_{i+1}^n - t_i^n} \\
&\leq \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (\gamma(\tau))^2 d\tau \\
&= \int_0^T (\gamma(t))^2 dt = \|\gamma\|_{L^2}^2 < +\infty. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Donc, par (2.33), on peut supposer que $(\dot{v}_n)$ converge faiblement dans $L^2(I, H)$ vers une application $w \in L^2(I, H)$. Par conséquent, en utilisant le Théorème 1.5.11, pour $t \in]0, T]$ et $x \in H$ on a

$$\begin{aligned}
\Big\langle x, u(t) - u(0) \Big\rangle &= \lim_{n\to\infty} \Big[\Big\langle x, v_n(t) \Big\rangle - \Big\langle x, v_n(0) \Big\rangle \Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big\langle x, \int_0^t \dot{v}_n(\tau) d\tau \Big\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_I \Big\langle \mathbf{1}_{]0,t]}(\tau) x, \dot{v}_n(\tau) \Big\rangle d\tau \\
&= \int_I \Big\langle \mathbf{1}_{]0,t]}(\tau) x, w(\tau) \Big\rangle d\tau \\
&= \Big\langle x, \int_0^t w(\tau) d\tau \Big\rangle
\end{aligned}$$

en particulier, pour $x = u(t) - u(0) - \int_0^t w(\tau) d\tau$ on trouve

$$u(t) - u(0) = \int_0^t w(\tau) d\tau.$$

Par conséquent, $\dot{u} = w \;\; p.p.$ sur I (voir Théorème 1.1.8) et alors, $(\dot{v}_n)$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^2(I, H)$.

Dans la suite, nous allons montrer que la suite (v_n) converge uniformément sur I. Dans un premier temps, remarquons que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ et presque tout $t \in I$, nous avons par la définition de $dis(\cdot,\cdot)$ et les estimations (2.3), (2.5) et (2.13)

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{v}_m(t)-\dot{v}_n(t), v_m(\theta_m(t))-v_n(\theta_n(t))\Big\rangle\\
\leq\ & \big(1+\|\dot{v}_n(t)\|+\|\dot{v}_m(t)\|\,\big)dis(A(\theta_n(t)),A(\theta_m(t)))\\
\leq\ & \big(1+\|\dot{v}_n(t)\|+\|\dot{v}_m(t)\|\,\big)|\beta(\theta_n(t))-\beta(\theta_m(t))|\\
\leq\ & \big(1+\|\dot{v}_n(t)\|+\|\dot{v}_m(t)\|\,\big)(|\beta(\theta_n(t))-\beta(t)|+|\beta(\theta_m(t))-\beta(t)|)\\
\leq\ & \big(1+\|\dot{v}_n(t)\|+\|\dot{v}_m(t)\|\,\big)(\varepsilon_n+\varepsilon_m).
\end{aligned}$$

D'autre part, par les inégalités (2.5) et (2.25) nous avons

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{v}_m(t)-\dot{v}_n(t), v_m(t)-v_m(\theta_m(t))-v_n(t)+v_n(\theta_n(t))\Big\rangle\\
\leq\ & \big(\|\dot{v}_m(t)\|+\|\dot{v}_n(t)\|\big)\big(\|v_m(t)-v_m(\theta_m(t))\|+\|v_n(\theta_n(t))-v_n(t)\|\big)\\
\leq\ & K\big(\|\dot{v}_m(t)\|+\|\dot{v}_n(t)\|\big)\big(|\theta_n(t)-t|+|\beta(\theta_n(t))-\beta(t)|+3\varepsilon_n\\
+\ & |\theta_m(t)-t|+|\beta(\theta_m(t))-\beta(t)|+3\varepsilon_m\big)\\
\leq\ & 4K(\varepsilon_m+\varepsilon_n)\left(\|\dot{v}_m(t)\|+\|\dot{v}_n(t)\|\right)\\
\leq\ & 4K(\varepsilon_m+\varepsilon_n)\left(1+\|\dot{v}_m(t)\|+\|\dot{v}_n(t)\|\right)
\end{aligned}$$

ces deux dernières relations nous donnent

$$\begin{aligned}
\Big\langle \dot{v}_n(t)-\dot{v}_m(t), v_n(t)-v_m(t)\Big\rangle &= \Big\langle \dot{v}_m(t)-\dot{v}_n(t), v_m(t)-v_m(\theta_m(t))-v_n(t)+v_n(\theta_n(t))\Big\rangle\\
&+ \Big\langle \dot{v}_m(t)-\dot{v}_n(t), v_m(\theta_m(t))-v_n(\theta_n(t))\Big\rangle\\
&\leq (4K+1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)\Big(1+\|\dot{v}_m(t)\|+\|\dot{v}_n(t)\|\Big). \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

On obtient grâce à la formule de Moreau (Proposition 1.2.4)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|v_n(t)-v_m(t)\|^2\right)=\Big\langle v_n(t)-v_m(t), \dot{v}_n(t)-\dot{v}_m(t)\Big\rangle, \quad dt-p.p.$$

alors, comme $v_n(0)=v_m(0)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|v_n(t)-v_m(t)\|^2 &= \int_0^t \Big\langle v_n(s)-v_m(s), \dot{v}_n(s)-\dot{v}_m(s)\Big\rangle ds\\
&\leq (4K+1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)\big(T+\|\dot{v}_n\|_{L^1}+\|\dot{v}_m\|_{L^1}\big),
\end{aligned}$$

En prenant en compte l'inégalité (2.30), on obtient

$$\|v_n(\cdot)-v_m(\cdot)\|^2_{\mathrm{C}} \leq 2(4K+1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)\big(T+2K(T+\beta(T)\big). \qquad (2.35)$$

Il est clair que le côté droit de cette dernière inégalité tend vers 0 lorsque n, m tendent vers $+\infty$. Par conséquent, $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{C}(I,H)$. Donc, $(v_n)_n$ converge uniformément et fortement vers une fonction continue, qui d'après (2.26), n'est autre que la fonction continue u, i.e.,

$$\|v_n(\cdot) - u(\cdot)\|_{\mathrm{C}} \to 0 \quad \text{lorsque } \ n \to \infty$$

par (2.24), nous avons aussi

$$\|u_n(t) - u(t)\| \to 0, \ \ \text{uniformement sur } I.$$

De plus, comme par (2.25), $\big(v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\big) \to 0$ fortement, nous avons pour tout $t \in I$

$$\|u(t) - v_n(\theta_n(t))\| \ \ \leq \ \ \|u(t) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - v_n(\theta_n(t))\| \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty. \tag{2.36}$$

Etape 3. Existence de solution.

Nous allons prouver dans cette étape que u est une solution à notre problème $\big(\mathrm{P}\big)$. Premièrement, prouvons que $u(t) \in D(A(t))$ pour tout $t \in I$. En effet, par (2.7) et (2.8) nous avons $u_n(t) \in D(A(\varphi_n(t)))$ pour tout $t \in I$, où $\varphi_n : I \to I$ est définie par $\varphi_n(t) = t_i^n$ dans $[t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $\varphi_n(T) = T$. D'autre part, par (2.3) et (2.5), pour tout $t \in I$

$$dis(A(\varphi_n(t)), A(t)) \leq \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, en fixant $t \in I$, on obtient $A_n \to A$ par rapport à $dis(\cdot,\cdot)$, où $A_n = A(\varphi_n(t))$ et $A = A(t)$.

$$(dis(A_n, A) = dis(A(\varphi_n(t)), A(t)) \leq |\beta(\varphi_n(t)) - \beta(t)| \leq \varepsilon_n)$$

Comme la suite $\big(y_n\big) = \Big(A^0(\varphi_n(t), u_n(t))\Big)_n$ est bornée par (2.4) et (2.16), alors on peut extraire une sous suite (notée aussi (y_n)) qui converge faiblement vers y, donc on applique le Lemme 1.8.23 à $x_n = u_n(t) \to u(t)$

$$A^0(\varphi_n(t), u_n(t)) \in A(\varphi_n(t))u_n(t) = A_n x_n$$

on obtient

$$u(t) \in D(A) = D(A(t)).$$

Ensuite, nous allons vérifier que l'inclusion dans $\big(\mathrm{P}\big)$ est satisfaite sur un ensemble de complémentaire Lebesgue-négligeable.

Comme $\big(\dot{v}_n\big)_n$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^2(I, H)$, par le Théorème de Mazur 1.7.3, il existe une suite $\big(w_j\big)_j$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $w_j \in co\big\{\dot{v}_k; k \geq j\big\}$ et $\big(w_j\big)_j$ converge fortement vers $\dot{u}$ dans $L^2(I, H)$. Alors, on peut extraire à partir de (w_j) une sous suite qui converge presque partout vers $\dot{u}$, i.e., il existe un sous ensemble $\widetilde{N} \subset I$ de mesure nulle et une sous suite (j_p) de $\mathbb{N}$ tel que

$$t \in I \setminus \widetilde{N} \Longrightarrow w_{j_p}(t) \to \dot{u}(t) \quad lorsque \quad p \to \infty. \tag{2.37}$$

Alors, nous avons pour tout $t \in I \setminus \widetilde{N}$, en posant $S_n = \{\dot{v}_k(t), \quad k \geq j_n\}$,

$$\dot{u}(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}(S_n).$$

Pour tout $z \in H$, le théorème de séparation (Théorème 1.3.10) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \langle z, \dot{u}(t)\rangle &\leq \delta^*(z, S_n) = \sup_{k\geq j_n}\langle z, \dot{v}_k(t)\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \Rightarrow \langle z, \dot{u}(t)\rangle &\leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq j_n}\langle z, \dot{v}_k(t)\rangle \\ \Rightarrow \langle z, \dot{u}(t)\rangle &\leq \limsup_{n\to+\infty}\langle z, \dot{v}_n(t)\rangle. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Comme $u(t) \in D(A(t))$ pour tout $t \in I$, pour montrer que $-\dot{u}(t) \in A(t)u(t)$ p.p., par la Proposition 1.8.20, il suffit de montrer que

$$\Big\langle \dot{u}(t), u(t) - \eta\Big\rangle \leq \Big\langle A^0(t,\eta), \eta - u(t)\Big\rangle \quad p.p.\ t \in I \ \ \forall \eta \in D(A(t)). \tag{2.39}$$

Pour cela, soit $\eta \in D(A(t))$, vue (2.4), on peut appliquer le cas particulier du Lemme 1.8.25 à $\widetilde{A}_n = A(\theta_n(t))$ et $A = A(t)$, pour trouver une suite (ξ_n) telle que

$$\xi_n \in D(A(\theta_n(t))), \quad \xi_n \to \eta \quad \text{et} \quad A^0(\theta_n(t), \xi_n) \to A^0(t,\eta). \tag{2.40}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I \setminus N_n$ l'ensemble sur lequel (2.13) est satisfaite. Comme chaque $A(t)$ est monotone, en particulier pour $t \in I \setminus N_n$, nous avons

$$\Big\langle -\dot{v}_n(t) - A^0(\theta_n(t), \xi_n), v_n(\theta_n(t)) - \xi_n\Big\rangle \geq 0$$

ou bien

$$\Big\langle \dot{v}_n(t), v_n(\theta_n(t)) - \xi_n\Big\rangle \leq \Big\langle A^0(\theta_n(t), \xi_n), \xi_n - v_n(\theta_n(t))\Big\rangle. \tag{2.41}$$

Par suite, grâce à (2.29) et (2.41), nous avons pour tout $t \in I\setminus\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} N_n \bigcup \Omega\Big)$

$$\begin{aligned} &\Big\langle \dot{v}_n(t), u(t) - \eta\Big\rangle \\ =\ &\Big\langle \dot{v}_n(t), v_n(\theta_n(t)) - \xi_n\Big\rangle + \Big\langle \dot{v}_n(t), \big(u(t) - v_n(\theta_n(t))\big) - \big(\eta - \xi_n\big)\Big\rangle \\ \leq\ &\Big\langle A^0(\theta_n(t), \xi_n), \xi_n - v_n(\theta_n(t))\Big\rangle + \|\dot{v}_n(t)\|\big(\|\xi_n - \eta\| + \|u(t) - v_n(\theta_n(t))\|\big) \\ \leq\ &\Big\langle A^0(\theta_n(t), \xi_n), \xi_n - v_n(\theta_n(t))\Big\rangle + C_t\big(\|\xi_n - \eta\| + \|u(t) - v_n(\theta_n(t))\|\big) \end{aligned}$$

D'où, par (2.36) et (2.40)

$$\limsup_{n\to\infty}\Big\langle \dot{v}_n(t), u(t)-\eta\Big\rangle \leq \Big\langle A^0(t,\eta), \eta - u(t)\Big\rangle \tag{2.42}$$

et par introduit l'estimation (2.38) en compte, on obtient l'estimation (2.39). Par conséquent,

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) \quad p.p. \text{ sur } I, \quad \text{avec } \ u(0) = u_0.$$

Par (2.20), cette solution vérifie pour presque tout $t \in I$

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K\big(1+\dot{\beta}(t)\big).$$

Etape 4. Unicité de la solution

Supposons qu'il existe deux solutions u, v pour le problème $\big(\mathrm{P}\big)$, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t), & p.p.\, t \in I; \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\dot{v}(t) \in A(t)v(t), & p.p.\, t \in I; \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

Par la monotonie de $A(t)$, on trouve

$$\langle \dot{u}(t) - \dot{v}(t), u(t) - v(t)\rangle \leq 0 \quad p.p.\ t \in I.$$

Posons $w = u - v$. L'application w est absolument continue. Comme $u(0) = v(0) = u_0$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u(t)-v(t)\|^2 &= \frac{1}{2}\big(\|w(t)\|^2 - \|w(0)\|^2\big) \\ &= \frac{1}{2}\int_{]0,t]} d\big(\|w(s)\|^2\big) \end{aligned}$$

Alors, on applique la formule de Moreau $d\big(\|w\|^2\big) = 2\langle w, dw\rangle$ (car w est absolument continue), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u(t)-v(t)\|^2 &= \frac{1}{2}\int_{]0,t]} d\big(\|w(s)\|^2\big) = \int_{]0,t]} \Big\langle w(\tau), \frac{dw(\tau)}{d\tau} d\tau\Big\rangle \\ &= \int_{]0,t]} \langle w(\tau), \dot{w}(\tau)\rangle d\tau \\ &= \int_{]0,t]} \langle \dot{u}(\tau) - \dot{v}(\tau), u(\tau) - v(\tau)\rangle d\tau \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

D'où, $u = v$ p.p. Ceci termine la preuve du théorème. ■

En utilisant le théorème précédent, on donne un résultat d'existence de solution pour le problème (P) perturbé par une application $h \in L^2(I, H)$.

Corollaire 2.2.2.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H1)$ et $(H2)$. Soit $h \in L^2(I, H)$. Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$, le problème

$$(P_h) \begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & A(t)\,u(t) + h(t), \qquad p.p.\, t \in I \\ u(0) & = & u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

admet une unique solution absolument continue $u \in \mathcal{W}^{1,2}(I, H)$. De plus, pour $\widetilde{K} = \widetilde{K}(\|u_0\|, c, T, \beta, h)$,

$$\|\dot{u}(t)\| \le \widetilde{K}\big(1 + \dot{\beta}(t) + \|h(t)\|\big) + \|h(t)\|, \quad p.p.\, t \in I.$$

Démonstration
On définit un opérateur $B(t)$ sur H comme suit :

$$B(t)x = A(t)\bigg(x - \int_0^t h(s)ds\bigg), \quad \forall x \in D(B(t)),$$

où

$$\begin{aligned} D(B(t)) &= \big\{x \in H, \quad B(t) \ne \emptyset\big\} \\ &= \bigg\{x \in H, \quad A(t)\bigg(x - \int_0^t h(s)ds\bigg) \ne \emptyset\bigg\} \\ &= \bigg\{y + \int_0^t h(s)ds \in H, \quad A(t)(y) \ne \emptyset\bigg\} \\ &= \big\{y \in H, \quad A(t)(y) \ne \emptyset\big\} + \int_0^t h(s)ds \\ &= D(A(t)) + \int_0^t h(s)ds. \end{aligned}$$

c'est-à-dire, $x \in D(B(t))$ si et seulement si $x - \displaystyle\int_0^t h(s)ds \in D(A(t))$. Puis, on va montrer que $B(t)$ est maximal monotone, et satisfait les hypothèses du Théorème 2.2.1. Fixons $t \in I$, soient $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in B(t)$ alors, $\bigg[x_1 - \displaystyle\int_0^t h(s)ds, y_1\bigg], \bigg[x_2 - \displaystyle\int_0^t h(s)ds, y_2\bigg] \in A(t)$. Comme $A(t)$ est monotone, nous avons

$$\bigg\langle x_1 - \int_0^t h(s)ds - \bigg(x_2 - \int_0^t h(s)ds\bigg), y_1 - y_2\bigg\rangle \;=\; \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle \ge 0.$$

Donc, $B(t)$ est monotone. Pour la maximalité, soit $(x, y) \in H \times H$ tel que

$$\big\langle x - \xi, y - \eta \big\rangle \geq 0, \quad \forall\, [\xi, \eta] \in B(t). \tag{2.43}$$

Or, $\big[\xi, \eta\big] \in B(t) \iff \left[\xi - \int_0^t h(s)ds, \eta\right] \in A(t)$. D'autre part, on peut écrire l'estimation (2.43) comme suit

$$\left\langle x - \int_0^t h(s)ds - \left(\xi - \int_0^t h(s)ds\right), y - \eta \right\rangle \geq 0, \quad \forall \left[\xi - \int_0^t h(s)ds, \eta\right] \in A(t)$$

Par la maximalité de $A(t)$, $\left[x - \int_0^t h(s)ds, y\right] \in A(t)$, c-à-d, $[x, y] \in B(t)$, donc $B(t)$ est aussi maximal monotone. D'autre part, pour $(t, x) \in I \times H$

$$\begin{aligned}
\|B^0(t,x)\| &= \left\| Proj_{A(t)}\left(x - \int_0^t h(s)ds\right)(0) \right\| = \left\| A^0\left(t, x - \int_0^t h(s)ds\right) \right\| \\
&\leq c\left(1 + \|x\| + \int_0^t \|h(s)\|ds\right) \\
&\leq c\big(1 + \|x\| + \|h\|_{L^1}\big) \\
&\leq \alpha(1 + \|x\|).
\end{aligned}$$

où $\alpha = c(1 + \|h\|_{L^1})$. Aussi, si $s \leq t$, soient $[x_1, y_1] \in B(t)$, $[x_2, y_2] \in B(s)$. Par $(H1)$ et la définition de $dis(\cdot, \cdot)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\langle y_1 - y_2, x_2 - \int_0^s h(\tau)d\tau - \left(x_1 - \int_0^t h(\tau)d\tau\right) \right\rangle &\leq \big(1 + \|y_1\| + \|y_2\|\big)\, dis(A(t), A(s)) \\
&\leq \big(1 + \|y_1\| + \|y_2\|\big)|\beta(t) - \beta(s)|
\end{aligned}$$

alors,

$$\big\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \big\rangle \leq \big(1 + \|y_1\| + \|y_2\|\big)|\beta(t) - \beta(s)| + \big(1 + \|y_1\| + \|y_2\|\big) \int_s^t \|h(\tau)\|d\tau$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
dis(B(t), B(s)) &\leq |\beta(t) - \beta(s)| + \int_s^t \|h(\tau)\|d\tau \\
&\leq \int_s^t \|\dot{\beta}(\tau)\|d\tau + \int_s^t \|h(\tau)\|d\tau \\
&= \int_0^t \big(\|\dot{\beta}(\tau)\| + \|h(\tau)\|\big)d\tau - \int_0^s \big(\|\dot{\beta}(\tau)\| + \|h(\tau)\|\big)d\tau \\
&\leq |V(t) - V(s)|,
\end{aligned}$$

avec $V(t) = \displaystyle\int_0^t \big(\|\dot{\beta}(\tau)\| + \|h(\tau)\|\big)d\tau$. Comme $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I,\mathbb{R})$ et $h \in L^2(I,H)$, il est clair que $V \in \mathcal{W}^{1,2}(I,\mathbb{R})$. Par conséquent, sachant que $u_0 \in D(A(0)) = D(B(0))$, par le Théorème 2.2.1, il existe une solution unique absolument continue $v : I \to H$ au problème

$$(P_1)\begin{cases} -\dot{v}(t) \in B(t)\,v(t), & p.p.\, t \in I \\ v(0) = u_0 \in D(B(0)), \end{cases}$$

de plus, elle vérifie

$$\|\dot{v}(t)\| \le K(1 + \|\dot{V}(t)\|) \quad p.p.t \in\, I, \tag{2.44}$$

avec $K = 2\big(1 + \alpha(1 + K_1)\big)$, et

$$K_1 = \Big(\|u_0\| + 2(1+\alpha)\big(T + V(T)\big)\Big) \exp\big(2\alpha(T + V(T)\big).$$

Comme $B(t)\,v(t) = A(t)\Big(v(t) - \displaystyle\int_0^t h(\tau)d\tau\Big)$, on conclut que v est la solution unique du $\big(P_1\big)$ si et seulement si l'application $u : I \to H$ définie par

$$u(t) = v(t) - \int_0^t h(\tau)d\tau, \quad \forall t \in I$$

est la solution unique du problème $\big(P_h\big)$. De plus, par (2.44)

$$\|\dot{u}(t)\| \le \widetilde{K}\big(1 + |\dot{\beta}(t)| + \|h(t)\|\big) + \|h(t)\|.$$

$\widetilde{K} := 2\big(1 + (1 + \|h\|_{L^1})(1 + \widetilde{K}_1)\big)$ et

$\widetilde{K}_1 = \big(\|u_0\| + 2(1 + c(1 + \|h\|_{L^1})\big)\big(T + \beta(T) + \|h\|_{L^1}\big) \exp\big(2c(1 + \|h\|_{L^1})\big)\big(T + \beta(T) + \|h\|_{L^1}\big).$

■

2.3 Résultat d'existence pour le problème perturbé.

Plus généralement, dans cette section, on s'intéresse à l'existence de solution en présence d'un terme supplémentaire f, une perturbation, qui peut aussi dépendre de la variable d'état, c'est à dire, le problème considéré ici est de la forme

$$(P_f)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)\,u(t) + f(t,u(t)), & p.p.\, t \in I \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

Théorème 2.3.1. *Supposons que pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H1)$ et $(H2)$. Soit $f : I \times H \to H$ une application mesurable sur I vérifiant*

(H3) Pour tout $\mathbf{R} > 0$ il existe une fonction positive $\alpha_{\mathbf{R}} \in L^1(I, \mathbb{R})$ tel que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \alpha_{\mathbf{R}}(t)\|x - y\|, \quad \forall t \in I, \quad \forall x, y \in \overline{B}(0, \mathbf{R}).$$

(H4) Il existe une constante positive M telle que que pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in H$,

$$\|f(t,x)\| \leq M(1 + \|x\|).$$

Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$, le problème $\left(P_f\right)$ admet une unique solution absolument continue u, pour laquelle nous avons $\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t))$, pour p.p. $t \in I$, où K est une constante qui dépend de $\|u_0\|, c, T, M,$ et $\beta(\cdot)$.

Démonstration

Etape 1. Algorithme

Comme dans le cas du Théorème 2.2.1, on considère une partition ayant les propriétés (2.5) et (2.6). On définit une suite d'applications en escalier continues à droite $u_n : I \to H$ comme suit :

$$u_n(t) = u_0^n = u_0 \qquad \text{pour } \ t \in [0, t_1^n[,$$

et

$$u_n(t) = u_i^n \ \text{ pour } i \geq 1, \ t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \qquad u_n(T) = u_{k_n}^n, \tag{2.45}$$

où pour $i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$,

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right) = (I_H + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n))^{-1}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right). \tag{2.46}$$

Observons que par construction

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right) \in D(A(t_{i+1}^n)) \tag{2.47}$$

(voir Proposition 1.8.17) et

$$-\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\delta_{i+1}^n} \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n + \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds,$$

par suite,

$$\frac{1}{\delta_{i+1}^n}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds - u_{i+1}^n\right) \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n. \tag{2.48}$$

Aussi, on définit l'application $v_n : I \to H$ par

$$v_n(t) = \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right) + u_i^n - \int_{t_i^n}^{t} f(s, u_i^n)ds \tag{2.49}$$

pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$ et $v_n(T) = u_{k_n}^n$. Il est clair que l'application v_n est absolument continue avec $v_n(t_i^n) = u_i^n$, et que

$$\dot{v}_n(t) = \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right) - f(t, u_i^n) \quad \text{pour } t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[. \tag{2.50}$$

Par conséquent, si on définit $\theta_n, \varphi_n : I \to I$ par

$$\theta_n(t) = t_{i+1}^n, \quad \varphi_n(t) = t_i^n \quad t \in]t_i^n, t_{i+1}^n], i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$$

et $\theta_n(0) = \varphi_n(0) = 0$, alors (2.48) et (2.50) impliquent que

$$-\dot{v}_n(t) \in A(\theta_n(t))v_n(\theta_n(t)) + f(t, v_n(\varphi_n(t))), \quad p.p.\ t \in I. \tag{2.51}$$

Étape 2. Estimations et convergences

Comme dans la preuve du Théorème 2.2.1, on montre que les suites (u_n), (v_n) sont bornées en norme et en variation. En effet, par les propriétés (a) et (b) du Lemme 1.8.24 et par nos hypothèses $(H1)$, $(H2)$ et $(H4)$ avec (2.46) et (2.6) nous avons,

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \left\|J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right) - u_i^n\right\| \\
&\leq \left\|J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right) - J_{i+1}^n(u_i^n)\right\| + \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, u_i^n)\|ds + \delta_{i+1}^n\|A^0(t_i^n, u_i^n)\| + dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) \\
&+ \sqrt{\delta_{i+1}^n(1 + \|A^0(t_i^n, u_i^n)\|)\ dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n))} \\
&\leq M(1 + \|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + c(1 + \|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n + \sqrt{\delta_{i+1}^n(1 + c(1 + \|u_i^n\|))\eta_{i+1}^n} \\
&\leq (M + c)(1 + \|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n + \sqrt{(1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)^2} \\
&\leq (1 + (M + c)(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + (1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) \\
&\leq \big(2 + (M + 2c)(1 + \|u_i^n\|)\big)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)
\end{aligned}$$

alors,

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \big((2 + M + 2c) + (M + 2c)\|u_i^n\|\big)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n), \tag{2.52}$$

par suite,

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| \\ &\leq \big(1 + (M+2c)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)\big)\|u_i^n\| + (2+M+2c)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n).\end{aligned}$$

Par le Lemme 1.7.21, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|u_i^n\| &\leq \left(\|u_0\| + (2+M+2c)\sum_{k=0}^{i-1}(\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n)\right)\exp\left((M+2c)\sum_{k=0}^{i-1}(\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n)\right) \\ &= \left(\|u_0\| + (2+M+2c)(t_i^n + \beta(t_i^n))\right)\exp\left((M+2c)(t_i^n + \beta(t_i^n))\right) \\ &\leq \left(\|u_0\| + (2+M+2c)(T + \beta(T))\right)\exp\left((M+2c)(T+\beta(T))\right) =: K_1,\end{aligned}$$

grâce à cette inégalité, l'estimation (2.52) devient

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \big((M+2c)K_1 + (2+M+2c)\big)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) =: K_2(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n). \tag{2.53}$$

Posons $K = \max(K_1, K_2)$, alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{t\in I}\|u_n(t)\| \leq K \qquad \text{et} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(u_n) = \left(\sum_{i=0}^{k_n-1}\|u_{i+1}^n - u_i^n\|\right) \leq K(T+\beta(T)). \tag{2.54}$$

De plus, en répétant les mêmes calculs dans la preuve du Théorème 2.2.1, on obtient pour $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K\big((t-s) + (\beta(t) - \beta(s)) + \varepsilon_n\big). \tag{2.55}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications à variation bornée continues à droite uniformément bornée en norme et en variation. D'après le Théorème 1.2.6, il existe une application à variation bornée $u : I \to H$ telle que

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{pour} \quad t \in I, \tag{2.56}$$

ceci implique que la condition initiale $u(0) = u_0$ est satisfaite (voir preuve du Théorème 2.2.1). De plus, en prenant $\liminf\limits_{n\to\infty}$ dans (2.55), on obtient pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K((t-s) + \beta(t) - \beta(s)). \tag{2.57}$$

Par conséquent, u est absolument continue. Plus précisément, $u \in \mathcal{W}^{1,2}(I, H)$ car $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$.

Afin d'obtenir des résultats similaires pour la suite (v_n), observons que par (2.49), (2.53), (2.54) et $(H4)$ nous avons pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\begin{aligned} \|v_n(t)\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| + 2\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, u_i^n)\| ds \\ &\leq 2K + 2M(1+K)(t_{i+1}^n - t_i^n) \leq 2K + 2MT(1+K) =: L_1, \end{aligned} \tag{2.58}$$

et par (2.53)

$$\|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| = \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n). \tag{2.59}$$

Posons $L = \max(L_1, K)$, il vient que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_C \leq L \qquad \text{et} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(v_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k_n-1} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \right) \leq L(T + \beta(T)). \tag{2.60}$$

Également, par (2.5), (2.49), (2.53) et $(H4)$ nous avons pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - u_n(t)\| = \|v_n(t) - u_i^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, u_i^n)\| ds \\ &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2M(1 + \|u_i^n\|)(t_{i+1}^n - t_i^n) \\ &\leq (K + 2M(1+K))\varepsilon_n \leq L\varepsilon_n. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Par suite, les relations (2.55) et (2.61) donnent, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - v_n(s)\| &\leq \|v_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(s)\| + \|u_n(s) - v_n(s)\| \\ &\leq 2L\varepsilon_n + K\big((t-s) + (\beta(t) - \beta(s)) + \varepsilon_n\big) \\ &= K\big((t-s) + (\beta(t) - \beta(s))\big) + (2L + K)\varepsilon_n. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Par (2.60), la suite (v_n) d'applications continues est uniformément bornée en variation et en norme, alors par Théorème 1.2.6, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement ponctuellement dans H. Par (2.61) et (2.56), pour tout $x \in H$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \Big| \langle v_n(t) - u(t), x\rangle \Big| &= \lim_{n\to\infty} \Big| \langle v_n(t) - u_n(t), x\rangle + \langle u_n(t) - u(t), x\rangle \Big| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|v_n(t) - u_n(t)\| \|x\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} L\varepsilon_n \|x\| = 0. \end{aligned}$$

D'où,

$$v_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{pour } \ t \in I, \tag{2.63}$$

Maintenant, par (2.50), (2.53), (2.54) et $(H4)$, nous avons pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned} \|\dot{v}_n(t)\| &\leq \frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|}{t_{i+1}^n - t_i^n} + 2M(1+K) \\ &\leq K\left(\frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} + 1\right) + 2M(1+K). \end{aligned} \tag{2.64}$$

Donc, en prenant en compte (2.5) (à savoir que $t_{i+1}^n - t_i^n \to 0$) et en utilisant le Théorème de différentiation de Lebesgue (Théorème (1.1.6)), on assure l'existence d'un ensemble négligeable N tel que, pour $t \in (I \setminus N) \setminus \{t_j^m : \forall j, m\}$, (2.28) est satisfaite.
On conclut alors qu'il existe un ensemble $\Omega \subset I$ tq $\lambda(\Omega) = 0$ et pour tout $t \in I \setminus \Omega$, il existe $C_t < \infty$ tel que

$$\forall n, \ \ \|\dot{v}_n(t)\| \leq C_t. \tag{2.65}$$

Par (2.60)

$$\|\dot{v}_n\|_{L^1} = var(v_n, I) \leq L(T + \beta(T)). \tag{2.66}$$

Par conséquent, la suite $(\dot{v}_n)$ est bornée dans $L^1(I, H)$. Comme $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$, nous allons montrer que $(\dot{v}_n)$ est bornée dans $L^2(I, H)$. Soit pour tout $t \in I$, $\gamma(t) = K(\dot{\beta}(t) + 1)$, nous avons par (2.53)

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \gamma(\tau) d\tau. \tag{2.67}$$

Comme $\gamma \geq 0$ et $\gamma \in L^2(I, \mathbb{R})$, nous avons, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq (t_{i+1}^n - t_i^n)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (\gamma(\tau))^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.68}$$

il s'ensuit (voir (2.50))

$$\begin{aligned} \|\dot{v}_n\|_{L^2}^2 &= \int_0^T \|\dot{v}_n(\tau)\|^2 d\tau = \sum_{i=0}^{k_n - 1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{v}_n(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left(\frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|}{t_{i+1}^n - t_i^n} + 2M(1+K)\right)^2 d\tau \\ &\leq 2 \sum_{i=0}^{k_n-1} \left[\left(\frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right)^2 + (2M(1+K))^2\right](t_{i+1}^n - t_i^n) \end{aligned} \tag{2.69}$$

cette inégalité implique avec (2.68)

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_n\|^2_{L^2} &\leq 2\sum_{i=0}^{k_n-1}\left[\left(\frac{\|u^n_{i+1}-u^n_i\|}{t^n_{i+1}-t^n_i}\right)^2+(2M(1+K))^2\right](t^n_{i+1}-t^n_i)\\
&\leq 2\sum_{i=0}^{k_n-1}\left[\frac{\left(t^n_{i+1}-t^n_i\right)\int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}}\left(\gamma(\tau)\right)^2d\tau}{\left(t^n_{i+1}-t^n_i\right)^2}+(2M(1+K))^2\right](t^n_{i+1}-t^n_i)\\
&\leq 2\sum_{i=0}^{k_n-1}\int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}}\left(\gamma(\tau)\right)^2d\tau+2(2M(1+K))^2\sum_{i=0}^{k_n-1}(t^n_{i+1}-t^n_i)\\
&= 2(\|\gamma\|^2_{L^2}+(2M(1+K))^2T). \qquad (2.70)
\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut extraire de la suite $(\dot{v}_n)$ une sous suite convergeant faiblement dans $L^2(I,H)$ vers une application $w\in L^2(I,H)$, on procède comme dans la preuve du Théorème 2.2.1 pour montrer que $u(t)=u_0+\displaystyle\int_0^t w(\tau)d\tau$, c'est à dire $\dot{u}=w$ p.p., et donc $(\dot{v}_n)$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^2(I,H)$.
Dans la suite, nous allons prouver que (v_n) converge uniformément vers u sur I.
On note pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour $t\in I$, $f_n(t)=f(t,v_n(\varphi_n(t)))$ et on souligne que par $(H4)$ et (2.60)

$$\|f_n(t)\|\leq M(1+\|v_n(\varphi_n(t))\|)\leq M(1+L)=: M_1. \qquad (2.71)$$

Puis, revenant à l'inclusion (2.51), on peut écrire en utilisant la définition de la distance de Vladimirov $dis\left(\cdot,\cdot\right)$, les relations (2.5), (2.71) et l'hypothèse $(H1)$, pour $t\in]0,T]$,

$$\begin{aligned}
&\Big\langle v_n(\theta_n(t))-v_m(\theta_m(t)),\dot{v}_n(t)+f_n(t)-\dot{v}_m(t)-f_m(t)\Big\rangle\\
&\leq \big(1+\|\dot{v}_n(t)\|+\|\dot{v}_m(t)\|+\|f_n(t)\|+\|f_m(t)\|\big)\,dis(A(\theta_n(t)),A(\theta_m(t)))\\
&\leq \big(1+\|\dot{v}_n(t)\|+\|\dot{v}_m(t)\|+2M_1\big)(|\beta(\theta_n(t))-\beta(t)|+|\beta(\theta_m(t))-\beta(t)|)\\
&\leq \Bigg(1+\|\dot{v}_n(t)\|+\|\dot{v}_m(t)\|+2M_1\Bigg)(\varepsilon_n+\varepsilon_m).
\end{aligned}$$

Aussi

$$\big\langle v_n(\theta_n(t))-v_m(\theta_m(t)),-f_n(t)+f_m(t)\big\rangle\leq\|v_n(\theta_n(t))-v_m(\theta_m(t))\|\|f_n(t)-f_m(t)\| \quad (2.72)$$

On applique la condition de type Lipschizit sur f (voir $(H3)$) on obtient par (2.60), l'existence de $\alpha_L\in L^1(I,\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{aligned}
\|f_n(t)-f_m(t)\| &\leq \alpha_L(t)\|v_n(\varphi_n(t))-v_m(\varphi_m(t))\|\\
&\leq \alpha_L(t)\big(\|v_n(\varphi_n(t))-v_n(t)\|+\|v_n(t)-v_m(t)\|+\|v_m(t)-v_m(\varphi_m(t))\|\big)
\end{aligned}\qquad (2.73)$$

et comme

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v_m(\theta_m(t))\| \leq \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - v_m(t)\| + \|v_m(t) - v_m(\theta_m(t))\| \quad (2.74)$$

nous obtenons

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v_m(\theta_m(t)\|\|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \alpha_L(t)\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 + \Delta^1_{n,m}(t), \quad (2.75)$$

où pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\Delta^1_{n,m}(t) \quad &:= \quad \alpha_L(t)\|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\|\Big(\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - v_m(t)\| + \|v_m(t) - v_m(\theta_m(t))\|\Big) \\
&+ \quad \alpha_L(t)\|v_n(t) - v_m(t)\|\big(\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + \|v_m(t) - v_m(\theta_m(t))\|\big) \\
&+ \quad \alpha_L(t)\|v_m(t) - v_m(\varphi_m(t)\|\Big(\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - v_m(t)\| + \|v_m(t) - v_m(\theta_m(t))\|\Big)
\end{aligned}$$

Par (2.60), $\|v_n\|_{\mathrm{C}} \leq L$, d'où pour tout $t \in I$, $\|\Delta^1_{n,m}(t)\| \leq 32L^2\alpha_L(t)$, par conséquent $\Delta^1_{n,m}$ est intégrablement bornée. De plus, par (2.62), $\Delta^1_{n,m}(t) \to 0$ lorsque $n, m \to +\infty$ et $t \in I$, par le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue 1.7.12,

$$\int_0^T \Delta^1_{n,m}(\tau)\, d\tau \to 0 \ \text{ lorsque } \ n, m \to +\infty.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
&\Big\langle v_n(t) - v_n(\theta_n(t)) - v_m(t) - v_m(\theta_m(t)), \dot{v}_n(t) - \dot{v}_m(t) \Big\rangle \\
\leq \quad &(\|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\|)\Big(\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + \|v_m(\theta_m(t)) - v_m(t)\|\Big) =: \Delta^2_{n,m}(t),
\end{aligned}$$

et on observe que par (2.5), (2.62) et (2.66)

$$\begin{aligned}
\int_0^T \Delta^2_{n,m}(\tau)d\tau \quad &\leq \quad 2(K + L)(\varepsilon_n + \varepsilon_m) \int_0^T (\|\dot{v}_n(\tau)\| + \|\dot{v}_m(\tau)\|)d\tau \\
&\leq \quad 4(K + L)(\varepsilon_n + \varepsilon_m)L(T + \beta(T)) \to 0
\end{aligned}$$

lorsque $n, m \to +\infty$. Par conséquent, on conclut que

$$\begin{aligned}
&\Big\langle v_n(t) - v_m(t), \dot{v}_n(t) - \dot{v}_m(t) \Big\rangle \\
\leq \quad &\Big\langle v_n(t) - v_n(\theta_n(t)) - v_m(t) + v_m(\theta_m(t)), \dot{v}_n(t) - \dot{v}_m(t) \Big\rangle \\
+ \quad &\Big\langle v_n(\theta_n(t)) - v_m(\theta_m(t)), \dot{v}_n(t) + f_n(t) - \dot{v}_m(t) - f_m(t) \Big\rangle \\
+ \quad &\Big\langle v_n(\theta_n(t)) - v_m(\theta_m(t)), -f_n(t) + f_m(t) \Big\rangle \\
\leq \quad &\Delta^2_{n,m}(t) + (1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\| + 2M_1)(\varepsilon_n + \varepsilon_m) + \alpha_L(t)\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 + \Delta^1_{n,m}(t) \\
=: \quad &\Delta_{n,m}(t) + \alpha_L(t)\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 \qquad (2.76)
\end{aligned}$$

où

$$\Delta_{n,m}(t) = \Delta^2_{n,m}(t) + (1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\| + 2M_1)(\varepsilon_n + \varepsilon_m) + \Delta^1_{n,m}(t).$$

Clairement,

$$\int_0^T \Delta_{n,m}(\tau)d\tau \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n, m \to +\infty.$$

Comme $v_n(0) = v_m(0) = u_0$, et pour tout $t \in I$ $\Delta_{n,m}(t) \geq 0$, alors pour $t \in I$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 &= \int_0^t \langle v_n(\tau) - v_m(\tau), \dot{v}_n(\tau) - \dot{v}_m(\tau)\rangle d\tau \\ &\leq \int_0^t \alpha_L(\tau)\|v_n(\tau) - v_m(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^T \Delta_{n,m}(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Par Lemme de Gronwall 1.7.19, on conclut que

$$\|v_n(\cdot) - v_m(\cdot)\|^2_C \leq \left(2\int_0^T \Delta_{n,m}(\tau)d\tau\right)\exp\left(\int_0^T 2\alpha_L(\tau)d\tau\right). \tag{2.77}$$

Prenant en compte les arguments ci-dessus, on conclut que (v_n) est une suite de Cauchy dans $C(I, H)$. Par conséquent, (v_n) converge uniformément et fortement vers une application qui, via la convergence faible ponctuelle de (v_n) vers u (voir (2.63)) n'est autre que u, c'est-à-dire,

$$\|v_n(\cdot) - u(\cdot)\|_{\mathrm{C}} \to 0 \ \text{lorsque} \quad n \to \infty, \tag{2.78}$$

et par (2.61), nous avons aussi $\|u_n(t) - u(t)\| \to 0$ sur I. De plus, par (2.5) et (2.62), pour $t \in I$

$$\|v_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \leq \|v_n(t) - u(t)\| + \|v_n(t) - v_n(\theta_n(t))\| \to 0 \ \text{lorsque}\ n \to \infty, \tag{2.79}$$

et de même

$$\|v_n(\varphi_n(t)) - u(t)\| \to 0 \quad \text{lorsque}\ n \to \infty. \tag{2.80}$$

Étape 3. Existence de solution.

Dans cette étape, on montre que l'application u est une solution de notre problème (P_f).
Montrons que $u(t) \in D(A(t))$ pour tout $t \in I$.
On définit la fonction

$$\begin{aligned}\psi_n : I &\to I \\ t &\mapsto \psi_n(t) = \begin{cases} t_i^n & si \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\\ T & si \quad t = T.\end{cases}\end{aligned}$$

Alors, par (2.45) et (2.47), on a $u_n(t) \in D\big(A(\psi_n(t))\big)$ pour tout $t \in I$. D'autre part, par l'hypothèse $(H1)$ et l'estimation (2.5) pour tout $t \in I$

$$dis(A(\psi_n(t)), A(t)) \leq \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, en fixant $t \in I$, on obtient $A_n \to A$ par rapport à $dis(\cdot,\cdot)$ où $A_n = A(\psi_n(t))$ et $A = A(t)$. Comme la suite $(y_n) = \Big(A^0(\psi_n(t), u_n(t))\Big)$ est bornée par l'hypothèse $(H2)$ et l'estimation (2.54), alors on peut axtraire une sous suite, notée aussi (y_n), qui converge faiblement vers y, donc on applique le Lemme 1.8.23 à $x_n = u_n(t) \to u(t)$

$$A^0(\psi_n(t), u_n(t)) \in A(\psi_n(t))u_n(t) = A_n x_n$$

on obtient,

$$u(t) \in D(A) = D(A(t)).$$

Maintenant, nous allons vérifier que l'inclusion dans (P_f) est satisfaite presque partout. Pour cela, nous suivons l'étape 4 de la preuve du Théorème 3.1 dans [6] en l'adaptant au cas absolument continue.

En effet, comme la suite $(\dot{v}_n)$ converge faiblement dans $L^2(I, H)$ vers $\dot{u}$, par le Théorème de Mazur 1.7.3, il existe une suite (w_j) tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $w_j \in co\{\dot{v}_k,\ k \geq j\}$ et (w_j) converge fortement dans $L^2(I, H)$ vers $\dot{u}$. D'où, il existe un sous ensemble négligeable $\widetilde{N}$ de I, et une sous suite (j_n) de $\mathbb{N}$ tel que $j_n \geq j$ et

$$t \in I \backslash \widetilde{N} \Rightarrow w_{j_n}(t) \to \dot{u}(t) \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Alors, nous avons pour $t \in I \setminus \widetilde{N}$, en posant $S_n = \big\{\dot{v}_k(t),\ \ k \geq j_n\big\}$,

$$\dot{u}(t) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{co}\big(S_n\big).$$

Pour tout $z \in H$, le théorème de séparation (Théorème 1.3.10) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \langle z, \dot{u}(t)\rangle &\leq \delta^*(z, S_n) = \sup_{k \geq j_n} \langle z, \dot{v}_k(t)\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \langle z, \dot{u}(t)\rangle &\leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq j_n} \langle z, \dot{v}_k(t)\rangle \\ \Rightarrow \langle z, \dot{u}(t)\rangle &\leq \limsup_{n \to +\infty} \langle z, \dot{v}_n(t)\rangle. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Comme $u(t) \in D(A(t))$ pour tout $t \in I$, pour montrer que $-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t))$ *p.p.*, par la Proposition 1.8.20, il suffit de montrer que

$$\Big\langle \dot{u}(t) + f(t, u(t)), u(t) - \gamma \Big\rangle \leq \Big\langle A^0(t, \gamma), \gamma - u(t) \Big\rangle \qquad p.p., \forall \gamma \in D(A(t)). \tag{2.82}$$

Pour cela, soit $\gamma \in D(A(t))$, vue l'hypothèse $(H2)$, on peut appliquer le cas particulier du Lemme 1.8.25 pour trouver une suite (ξ_n) telle que

$$\xi_n \in D(A(\theta_n(t))), \quad \xi_n \to \gamma \quad \text{et} \quad A^0(\theta_n(t), \xi_n) \to A^0(t, \gamma). \tag{2.83}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I \setminus N_n$ l'ensemble sur lequel (2.51) est vérifiée. Comme chaque $A(t)$ est monotone, en particulier pour $t \in I \setminus N_n$, nous avons

$$\Big\langle -\dot{v}_n(t) - f(t, v_n(\varphi_n(t))) - A^0(\theta_n(t), \xi_n), v_n(\theta_n(t)) - \xi_n \Big\rangle \geq 0,$$

i.e.,

$$\Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n(\varphi_n(t))), v_n(\theta_n(t)) - \xi_n \Big\rangle \leq \Big\langle A^0(\theta_n(t), \xi_n), \xi_n - v_n(\theta_n(t)) \Big\rangle \tag{2.84}$$

Par l'hypothèse $(H1)$ et les relations (2.5) et (2.62), on a

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + dis(A(\theta_n(t)), A(t)) \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Par conséquent, à l'aide de (2.65), (2.84) et $(H4)$, nous avons pour tout $t \in I \setminus \Big(\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} N_n\Big) \bigcup \Omega\Big)$

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n(\varphi_n(t))), u(t) - \gamma \Big\rangle = \Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n(\varphi_n(t))), v_n(\theta_n(t)) - \xi_n \Big\rangle \\
&+ \Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n(\varphi_n(t))), \big(u(t) - v_n(\theta_n(t))\big) - \big(\gamma - \xi_n\big) \Big\rangle \\
&\leq \Big\langle A^0(\theta_n(t), \xi_n), \xi_n - v_n(\theta_n(t)) \Big\rangle + \big(\|\dot{v}_n(t)\| + \|f(t, v_n(\varphi_n(t)))\|\big)\Big(\|\xi_n - \gamma\| + \|u(t) - v_n(\theta_n(t))\|\Big) \\
&\leq \Big\langle A^0(\theta_n(t), \xi_n), \xi_n - v_n(\theta_n(t)) \Big\rangle + \big(C_t + M(1+K)\big)\Big(\|\xi_n - \gamma\| + \|u(t) - v_n(\theta_n(t))\|\Big).
\end{aligned}$$

Par conséquent (2.79) et la continuité de $f(t, \cdot)$ impliquent que

$$\limsup_{n \to \infty} \Big\langle \dot{v}_n(t), u(t) - \gamma \Big\rangle + \Big\langle f(t, u(t)), u(t) - \gamma \Big\rangle \leq \Big\langle A^0(t, \gamma), \gamma - u(t) \Big\rangle, \tag{2.85}$$

et par (2.81) on obtient (2.82). Par conséquent,

$$-\dot{u}(t) - f(t, u(t)) \in A(t)u(t), \quad p.p.t \in I,$$

avec $u(0) = u_0$, ceci montre que u est la solution de notre problème $\big(P_f\big)$.

Etape 4. Unicité de solution.

Supposons qu'il existe deux solutions u et v de $\big(P_f\big)$. Par la monotonie de $A(t)$,

$$\Big\langle \dot{v}(t) - \dot{u}(t) + f(t, v(t)) - f(t, u(t)), v(t) - u(t) \Big\rangle \leq 0, \quad p.p.$$

Par la condition de lipschitzité sur $f(t, \cdot)$ nous avons par (2.60) l'existence de $\alpha_L \in L^1(I, \mathbb{R})$ tel que

$$\Big\langle \dot{v}(t) - \dot{u}(t), v(t) - u(t) \Big\rangle \leq \Big\langle f(t, u(t)) - f(t, v(t)), v(t) - u(t) \Big\rangle \leq \alpha_L(t)\|v(t) - u(t)\|^2.$$

Alors, comme $u(0) = v(0) = u_0$

$$\frac{1}{2}\|v(t) - u(t)\|^2 = \int_0^t \Big\langle \dot{v}(\tau) - \dot{u}(\tau), v(\tau) - u(\tau) \Big\rangle d\tau \leq \int_0^t \alpha_L(\tau)\|v(\tau) - u(\tau)\|^2 d\tau.$$

On utilise le Lemme de Gronwall 1.7.19, on obtient

$$\|u(t) - v(t)\|^2 \leq 0,$$

ce qui implique que $u = v$ sur I. Enfin, en prenant (2.57) en compte, on voit bien que

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)), \qquad p.p.\, t \in I.$$

Notre théorème est complètement démontré. ■

Il convient de mentionner que les Théorèmes 2.2.1 et 2.3.1 ont été établis sous l'hypothèse $(H1)$ où la variation de l'opérateur $A(t)$ est contrôlée par une fonction $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$. Dans la suite, on va donner d'autres résultats d'existence en affaiblissant la variation de $A(t)$: on prend au lieu, $\beta \in \mathcal{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ de sorte que l'opérateur maximal monotone a une variation absolument continue sur un intervalle de temps borné. Néanmoins, ceci nécessite des hypothèses supplémentaires sur l'opérateur maximal monotone, à savoir qu'il a des valeurs coniques ou qu'il a un domaine fixe.
Avant d'énoncer nos théorèmes, on donne le résultat suivant.

Proposition 2.3.2. *[38]*
Soit E un espace de Banach. Supposons que $Q \subset C(I, E)$ est borné équicontinu et tel que $Q(t)$ est relativement faiblement compact dans E, pour tout $t \in I$. Alors, Q est relativement faiblement compact dans $C(I, E)$.

Théorème 2.3.3.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H2)$, et

$(H1)'$ Il existe une fonction positive $\beta \in \mathcal{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$, croissante et tel que $\beta(T) < \infty$, $\beta(0) = 0$ tel que

$$dis(A(t), A(s)) \leq |\beta(t) - \beta(s)|, \quad \forall s, t \in I. \tag{2.86}$$

$(H1)^*$ Pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in D(A(t))$, $A(t)x$ est un cône.
Soit $f : I \times H \to H$ une application tel que pour tout $x \in H$ $f(\cdot, x)$ est mesurable et f

satisfait $(H3)$ *et* $(H4)$.
Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$ *le problème*

$$(P_f)\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) & \in \quad A(t)u(t) + f(t,u(t)) \ \text{ p.p.} t \in I. \\ u(0) & = \quad u_0, \end{cases}$$

admet une unique solution absolument continue u. *De plus, pour presque tout* $t \in I$,

$$\begin{aligned} \|\dot{u}(t)\| \quad &\leq \quad \big(K + M(1+K)\big)\big(\dot{\beta}(t)+1\big) + M(1+K) \\ &=: \quad K^*\big(\dot{\beta}(t)+1\big) + M(1+K). \end{aligned}$$

Démonstration

Etape 1. Algorithme

On choisit la même partition que dans la preuve du Théorème 2.2.1, avec les propriétés (2.5) et (2.6). Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit une application en escalier continue à droite $u_n : I \to H$ comme suit :

$$u_n(t) = u_0^n = u_0 \quad \text{pour} \ \ t \in [0, t_1^n[, \quad \text{et}$$

$$u_n(t) = u_i^n \quad \text{pour} \ \ i = 1, \ldots, k_n - 1, \ \ t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \ u_n(T) = u_{k_n}^n$$

où pour $i = 0, \ldots, k_n - 1$,

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right) := \big(I_H + (\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)A(t_{i+1}^n)\big)^{-1}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right). \tag{2.87}$$

Par la définition de la résolvante

$$-\frac{1}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right) \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n. \tag{2.88}$$

On définit aussi l'application $v_n : I \to H$ par

$$v_n(t) = \frac{(\beta(t) - \beta(t_i^n)) + (t - t_i^n)}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right) + u_i^n - \int_{t_i^n}^{t} f(s,u_i^n)ds \tag{2.89}$$

pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$, et $v_n(T) = u_{k_n}^n$. Il est clair que les applications v_n sont absolument continues pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $v_n(t_i^n) = u_i^n$ et que

$$\dot{v}_n(t) = \frac{\dot{\beta}(t) + 1}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right) - f(t,u_i^n) \quad t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[. \tag{2.90}$$

D'après les relations (2.88), (2.90) et l'hypothèse $(H1)^*$, on conclut que

$$-\dot{v}_n(t) \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n + f(t, u_i^n) \quad t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[.$$

Par conséquent, si on définit $\theta_n, \varphi_n : I \to I$ par

$$\theta_n(t) = t_{i+1}^n, \quad \varphi_n(t) = t_i^n \quad t \in]t_i^n, t_{i+1}^n], i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$$

et $\theta_n(0) = \varphi_n(0) = 0$, alors, nous obtenons

$$-\dot{v}_n(t) \in A(\theta_n(t))v_n(\theta_n(t)) + f(t, v_n(\varphi_n(t))), \quad p.p. \ t \in I. \tag{2.91}$$

Etape 2. Estimations et convergences.
Par les propriétés (a) et (b) du Lemme 1.8.24 et par nos hypothèses $(H1)'$, $(H2)$, $(H4)$, avec (2.87) et (2.6) nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \left\| J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right) - u_i^n \right\| \\
&\leq \left\| J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right) - J_{i+1}^n(u_i^n) \right\| + \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\leq \int_{t_{i+1}^n}^{t_i^n} \|f(s, u_i^n)\|ds + (\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)\|A^0(t_i^n, u_i^n)\| + dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) \\
&+ \sqrt{(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)(1 + \|A^0(t_i^n, u_i^n)\|)\, dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n))} \\
&\leq M(1 + \|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + c(1 + \|u_i^n\|)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + \eta_{i+1}^n \\
&+ \sqrt{(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)(1 + c(1 + \|u_i^n\|))\eta_{i+1}^n} \\
&\leq \big(1 + (M + c)(1 + \|u_i^n\|)\big)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + \sqrt{(1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)^2} \\
&\leq \big(1 + (M + c)(1 + \|u_i^n\|)\big)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + (1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) \\
&\leq \big(2 + (M + 2c)(1 + \|u_i^n\|)\big)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)
\end{aligned}$$

par suite, en utilisant des calculs similaires à ceux du Théorème 2.3.1, nous obtenons les estimations

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big) \quad \text{et} \quad \|u_i^n\| \leq K \tag{2.92}$$

où K est une constante positive. D'où

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in I} \|u_n(t)\| \leq K \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(u_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k_n-1} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \right) \leq K(T + \beta(T)). \tag{2.93}$$

De plus, par (2.90), (2.92) et $(H4)$, on trouve pour presque tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_n(t)\| &\leq \frac{\dot{\beta}(t)+1}{\delta_{i+1}^n+\eta_{i+1}^n}\left(\|u_{i+1}^n-u_i^n\|+\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\|f(s,u_i^n)\|ds\right)+\|f(t,u_i^n)\| \\
&\leq \frac{\dot{\beta}(t)+1}{\delta_{i+1}^n+\eta_{i+1}^n}\big(K(\delta_{i+1}^n+\eta_{i+1}^n)+M(1+K)\delta_{i+1}^n\big)+M(1+K) \\
&\leq \frac{\dot{\beta}(t)+1}{\delta_{i+1}^n+\eta_{i+1}^n}\big(K+M(1+K)\big)(\delta_{i+1}^n+\eta_{i+1}^n)+M(1+K) \\
&= \big(\dot{\beta}(t)+1\big)\big(K+M(1+K)\big)+M(1+K)=:\xi(t).
\end{aligned}$$

i.e, $\exists \Omega \subset I$ tq $\lambda(\Omega)=0$ et $\forall t \in I \setminus \Omega$

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq \xi(t), \tag{2.94}$$

où $\xi \in L^1(I,\mathbb{R})$. Dans la suite, on considère les ensembles

$$\mathcal{H} := \left\{ w \in L^1(I,H) : \quad \|w(t)\| \leq \xi(t) \;\; p.p. \right\}$$

$$\mathcal{X} := \left\{ v \in C(I,H) : \; v(t) = u_0 + \int_0^t \dot{v}(s)\, ds, \; \forall\, t \in I, \; \dot{v} \in \mathcal{H} \right\}$$

Alors, il est clair que $\mathcal{H}$ est convexe et faiblement compact dans $L^1(I,H)$ et que $\mathcal{X}$ est convexe et équicontinu. En effet, soient $w_1, w_2 \in \mathcal{H}$ et soit $\lambda \in [0,1]$

$$w_1 \in \mathcal{H} \iff \|w_1(t)\| \leq \xi(t) \quad p.p.\, t \in I,$$

c'est-à-dire, il existe $N_1 \subset I$ négligeable tel que pour tout $t \in I \backslash N_1$, $\|w_1(t)\| \leq \xi(t)$. De même, $w_2 \in \mathcal{H}$, c'est-à-dire, il existe $N_2 \subset I$ tel que pour tout $t \in I \backslash N_2$, $\|w_2(t)\| \leq \xi(t)$. Donc, soit $t \in I \backslash \Big(N_1 \cup N_2\Big)$

$$\begin{aligned}
\|\lambda w_1(t)+(1-\lambda)w_2(t)\| &\leq \lambda\|w_1(t)\|+(1-\lambda)\|w_2(t)\| \\
&\leq \lambda\xi(t)+(1-\lambda)\xi(t) \\
&= \xi(t).
\end{aligned}$$

alors, $\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 \in \mathcal{H}$, i.e., $\mathcal{H}$ est convexe.
Ensuite, soit $\big(w_n\big)_n \subset \mathcal{H}$. On pose, $h_n(t) = \dfrac{w_n(t)}{\xi(t)}$. Ceci donne, $\|h_n(t)\| \leq 1$, donc $\big(h_n\big)_n \subset \overline{B}_{L^\infty}$. D'après le Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Théorème 1.7.8), $\overline{B}_{L^\infty}$ est faiblement* compacte dans $L^\infty(I,H)$. Donc, de $\big(h_n\big)_n$ on peut extraire une sous suite

(notée aussi $\big(h_n\big)_n$) convergeant faiblement* vers un élément $h \in \overline{B}_{L^\infty}$, c'est-à-dire, pour tout $z \in L^1(I, H)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \big\langle h_n(\tau), z(\tau)\big\rangle d\tau \to \int_0^T \big\langle h(\tau), z(\tau)\big\rangle d\tau$$

Soit $y(\cdot) \in L^\infty(I, H)$, alors $\xi(\cdot)y(\cdot) \in L^1(I, H)$, car

$$\begin{aligned} \|\xi y\|_{L^1} &= \int_0^T \|\xi(t)y(t)\|dt \\ &\leq \|y\|_{L^\infty} \int_0^T |\xi(t)|dt = \|y\|_{L^\infty}\|\xi\|_{L^1} < \infty. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^T \big\langle w_n(t), y(t)\big\rangle dt &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \big\langle h_n(t)\xi(t), y(t)\big\rangle dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \big\langle h_n(t), \xi(t)y(t)\big\rangle dt \\ &= \int_0^T \big\langle h(t), \xi(t)y(t)\big\rangle dt \\ &= \int_0^T \big\langle \xi(t)h(t), y(t)\big\rangle dt \end{aligned}$$

En posant $w(\cdot) = \xi(\cdot)h(\cdot)$, la suite $(w_n(\cdot))$ converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $w(\cdot) \in L^1(I, H)$. Ceci montre, d'après le Théorème 1.7.6, que $\mathcal{H}$ est relativement faiblement compact. De plus, $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble convexe fortement fermé dans $L^1(I, H)$. En effet, soit $(w_n(\cdot)) \subset \mathcal{H}$ convergeant fortement vers $w(\cdot) \in L^1(I, H)$, alors par le Théorème 1.7.14, il existe une sous suite extraite de $(w_n(\cdot))$ qu'on note $(w_{n_k}(\cdot))$ telle que $w_{n_k}(\cdot) \to w(\cdot)$ p.p. sur I. Donc, pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} \|w_{n_k}(t)\| \leq \xi(t) &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|w_{n_k}(t)\| \leq \xi(t) \\ &\Rightarrow \|\lim_{n\to\infty} w_{n_k}(t)\| \leq \xi(t) \\ &\Rightarrow \|w(t)\| \leq \xi(t). \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{H}$ est fortement fermé, alors par le Théorème 1.7.15, il est faiblement fermé. Nous concluons que $\mathcal{H}$ est faiblement compact.
Montrons maintenant que $\mathcal{X}$ est convexe équicontinu. Soient $\lambda \in [0, 1]$ et $v_1, v_2 \in \mathcal{X}$, alors d'après la définition de $\mathcal{X}$, pour tout $t \in I$

$$v_1(t) = u_0 + \int_0^t \dot{v}_1(s)\, ds, \;\; v_2(t) = u_0 + \int_0^t \dot{v}_2(s)\, ds, \;\text{et}\; \dot{v}_1,\, \dot{v}_2 \in \mathcal{H},$$

comme $\mathcal{H}$ est convexe, alors $\lambda\dot{v}_1 + (1-\lambda)\dot{v}_2 \in \mathcal{H}$ et

$$\begin{aligned}\lambda\, v_1(t) + (1-\lambda)\, v_2(t) &= \lambda\Big(u_0 + \int_0^t \dot{v}_1(\tau)d\tau\Big) + (1-\lambda)\Big(u_0 + \int_0^t \dot{v}_2(\tau)d\tau\Big),\\ &= u_0 + \int_0^t \big(\lambda\,\dot{v}_1(\tau) + (1-\lambda)\,\dot{v}_2(\tau)\big)d\tau, \quad \forall\, t\in I.\end{aligned}$$

D'où la convexité de $\mathcal{X}$. Soit $v \in \mathcal{X}$, pour tous $s, t \in I$ $(s \le t)$, on a

$$\begin{aligned}\|v(t) - v(s)\| &= \left\|u_0 + \int_0^t \dot{v}_1(\tau)d\tau - \Big(u_0 + \int_0^s \dot{v}_2(\tau)d\tau\Big)\right\|\\ &= \left\|\int_s^t \dot{v}(\tau)d\tau\right\|\\ &\le \int_s^t \xi(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Sachant que $\xi \in L^1(I,H)$, nous obtenons l'équicontinuité de $\mathcal{X}$. Aussi, pour tout $w(t) \in \mathcal{X}(t) = \big\{y(t),\;\; y\in\mathcal{X}\big\}$

$$\begin{aligned}\|w(t)\| &= \left\|u_0 + \int_0^t \dot{v}(s)ds\right\|\\ &\le \|u_0\| + \int_0^t \xi(s)ds\\ &\le \|u_0\| + \|\xi\|_{L^1} = m.\end{aligned}$$

ceci donne que, $\mathcal{X}(t) \subset m\overline{B}_H$, par conséquent, $\mathcal{X}(t)$ est relativement faiblement compact. Donc, on conclut par la proposition 2.3.2, que $\mathcal{X}$ est relativement faiblement compact dans $\mathrm{C}(I,H)$

Montrons que $\mathcal{X}$ est fermé dans $C(I,H)$.

Soit $(v_n)_n$ une suite de $\mathcal{X}$ converge dans $C(I,H)$ vers une application continue v. D'après la définition de $\mathcal{X}$

$$v_n(t) = u_0 + \int_0^t \dot{v}_n(s)ds \quad \forall t\in I,\;\; \forall n\in\mathbb{N}, \quad \text{avec } (\dot{v}_n)\subset\mathcal{H},$$

comme $\mathcal{H}$ est faiblement compact, alors la suite $(\dot{v}_n)$ converge faiblement dans $L^1(I,H)$ vers un élément $w\in\mathcal{H}$, i.e, $\forall\xi\in L^\infty(I,H)$

$$\lim_{n\to+\infty}\langle\dot{v}_n,\xi\rangle = \langle w,\xi\rangle,$$

ou bien

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T \langle\dot{v}_n(s),\xi(s)\rangle ds = \int_0^T \langle w(s),\xi(s)\rangle ds,$$

en particulier pour $\xi(\cdot) = \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)e_j$, $(e_j)_j$ une base de H et $t \in [0,T]$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \Big\langle \dot{v}_n(s), \mathbf{1}_{[0,t]}(s)e_j \Big\rangle ds = \int_0^T \Big\langle w(s), \mathbf{1}_{[0,t]}(s)e_j \Big\rangle ds,$$

par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} \Big\langle \int_0^t \dot{v}_n(s)ds, e_j \Big\rangle = \Big\langle \int_0^t w(s)ds, e_j \Big\rangle,$$

i.e.,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^t \dot{v}_n(s)ds = \int_0^t w(s)ds, \quad \forall\, t \in I,$$

donc, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} v_n(t) &= \lim_{n\to+\infty} \left(u_0 + \int_0^t \dot{v}_n(s)ds \right) \\ &= u_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_0^t \dot{v}_n(s)ds \\ &= u_0 + \int_0^t w(s)ds = v(t), \end{aligned}$$

par conséquent, $\dot{v} = w$ p.p., i.e.,

$$v(t) = u_0 + \int_0^t \dot{v}(s)ds \quad \forall t \in I, \;\; \dot{v} \in \mathcal{H},$$

ceci implique que $v \in \mathcal{X}$, c'est-à-dire, $\mathcal{X}$ est fermé dans $C(I,H)$, par conséquent, $\mathcal{X}$ est faiblement compact dans $\mathrm{C}(I,H)$. Par (2.89), (2.90) et (2.94), nous avons que $(\dot{v}_n) \subset \mathcal{H}$ et $(v_n) \subset \mathcal{X}$. Alors, on peut extraire de (v_n) une sous suite (noter aussi (v_n)), convergeant faiblement vers $u : I \to H$ tel que $u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(\tau)d\tau$, pour tout $t \in I$ et $(\dot{v}_n)_n\, \sigma\big(L^1(I,H), L^\infty(I,H)\big)$ converge vers $\dot{u} \in \mathcal{H}$. Aussi, on peut supposer que $(\dot{v}_n)$ converge au sens Komlos vers $\dot{u}$ p.p. (car $(\dot{v}_n)$ est une suite bornée dans $L^1(I,H)$).
On répète les mêmes calculs et les arguments de la preuve du Théorème 2.3.1, on peut conclure aussi que (v_n) est une suite de Cauchy dans $\mathrm{C}(I,H)$ et qu'elle converge uniformément et fortement vers u :

$$\|v_n(\cdot) - u(\cdot)\|_{\mathrm{C}} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty. \tag{2.95}$$

et aussi que pour tout t, lorsque $n \to \infty$

$$\|v_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \leq \|v_n(t) - u(t)\| + \|v_n(t) - v_n(\theta_n(t))\| \to 0, \tag{2.96}$$

et

$$\|v_n(\varphi_n(t)) - u(t)\| \to 0 \;\text{ lorsque }\; n \to \infty. \tag{2.97}$$

Etape 3. Existence de solution

Nous allons montrer dans cette dernière étape que u est l'unique solution absolument continue de notre problème $\big(P_f\big)$. Il est clair que $u(t) \in D(A(t))$ en utilisant le Lemme 1.8.23. Maintenant, comme $(\dot{v}_n)$ converge au sens Komlos presque partout vers $\dot{u}$, il existe un ensemble négligeable N tel que pour $t \notin N$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \dot{v}_j(t) = \dot{u}(t).$$

Comme $u(t) \in D(A(t))$ pour tout $t \in I$, pour montrer que $-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t))$ p.p., par la Propostion 1.8.20, il suffit de montrer que

$$\big\langle \dot{u}(t) + f(t, u(t)), u(t) - \eta \big\rangle \leq \big\langle A^0(t, \eta), \eta - u(t) \big\rangle, \quad p.p.\, t \in I, \ \ \forall \eta \in D(A(t)). \tag{2.98}$$

Pour cela soit $\eta \in D(A(t))$. Par l'hypothèse $(H2)$, on peut appliquer le cas particulier du Lemme 1.8.25, pour assurer l'existence de $w_n \in D(A(\theta_n(t)))$ tel que

$$w_n \to \eta \ \text{ et } \ A^0(\theta_n(t), w_n) \to A^0(t, \eta). \tag{2.99}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I \backslash N_n$ l'ensemble sur lequel (2.91) est vérifiée. Comme $A(t)$ est monotone, en particulier, pour $t \in I \backslash N_n$ nous avons

$$\Big\langle A^0(\theta_n(t), w_n) + \dot{v}_n(t) + f(t, v_n(\varphi_n(t))), w_n - v_n(\theta_n(t)) \Big\rangle \geq 0,$$

ou bien

$$\Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n(\varphi_n(t))), v_n(\theta_n(t)) - w_n \Big\rangle \leq \Big\langle A^0(\theta_n(t), w_n), w_n - v_n(\theta_n(t)) \Big\rangle \tag{2.100}$$

D'autre part, sachant que

$$\begin{aligned} \Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n(\varphi_n(t))), u(t) - \eta \Big\rangle &= \Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n(\varphi_n(t))), v_n(\theta_n(t)) - w_n \Big\rangle \\ &+ \Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n(\varphi_n(t))), u(t) - v_n(\theta_n(t)) \Big\rangle \\ &+ \Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n(\varphi_n(t))), w_n - \eta \Big\rangle, \end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big\langle \dot{v}_j(t) + f(t, v_j(\varphi_j(t))), u(t) - \eta \Big\rangle \\ = \ & \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big\langle \dot{v}_j(t) + f(t, v_j(\varphi_j(t))), v_j(\theta_j(t)) - w_j \Big\rangle + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big\langle \dot{v}_j(t) + f(t, v_j(\varphi_j(t))), u(t) - v_j(\theta_j(t)) \Big\rangle \\ + \ & \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big\langle \dot{v}_j(t) + f(t, v_j(\varphi_j(t))), w_j - \eta \Big\rangle, \end{aligned}$$

alors, par (2.93), (2.94), (2.100) et $(H4)$ nous avons pour tout $t \in I \backslash \left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} N_n \right) \bigcup \Omega \right)$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left\langle \dot{v}_j(t) + f(t, v_j(\varphi_j(t))), u(t) - \eta \right\rangle \\
\leq \quad & \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left\langle A^0(\theta_j(t), w_j), w_j - v_j(\theta_j(t)) \right\rangle + (\xi(t) + M(1+K)) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \|u(t) - v_j(\theta_j(t))\| \\
+ \quad & (\xi(t) + M(1+K)) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \|w_j - \eta\|. \qquad (2.101)
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
& \langle A^0(\theta_j(t), w_j), w_j - v_j(\theta_j(t)) \rangle \\
= \quad & \langle A^0(\theta_j(t), w_j) - A^0(t, \eta) + A^0(t, \eta), w_j - \eta + \eta - u(t) + u(t) - v_j(\theta_j(t)) \rangle \\
= \quad & \langle A^0(\theta_j(t), w_j) - A^0(t, \eta), w_j - \eta + u(t) - v_j(\theta_j(t)) \rangle + \langle A^0(\theta_j(t), w_j) - A^0(t, \eta), \eta - u(t) \rangle \\
+ \quad & \langle A^0(t, \eta), \eta - u(t) \rangle + \langle A^0(t, \eta), w_j - \eta + u(t) - v_j(\theta_j(t)) \rangle \\
\leq \quad & \left(\|A^0(\theta_j(t), w_j) - A^0(t, \eta)\| + \|A^0(t, \eta)\| \right) \left(\|w_j - \eta\| + \|u(t) - v_j(\theta_j(t))\| \right) \\
+ \quad & \|A^0(\theta_j(t), w_j) - A^0(t, \eta)\| \|\eta - u(t)\| + \langle A^0(t, \eta), \eta - u(t) \rangle,
\end{aligned}$$

et

$$\langle \dot{v}_j(t) + f(t, v_j(\varphi_j(t))), u(t) - \eta \rangle = \langle \dot{v}_j(t) + f(t, u(t)), u(t) - \eta \rangle + \langle f(t, v_j(\varphi_j(t))) - f(t, u(t)), u(t) - \eta \rangle$$

la relation (2.101) implique

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \dot{v}_j(t) + f(t, u(t)), u(t) - \eta \rangle + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \langle f(t, v_j(\varphi_j(t))) - f(t, u(t)), u(t) - \eta \rangle \\
\leq \quad & \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\|A^0(\theta_j(t), w_j) - A^0(t, \eta)\| + \|A^0(t, \eta)\| \right) \left(\|w_j - \eta\| + \|u(t) - v_j(\theta_j(t))\| \right) \\
+ \quad & \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \|A^0(\theta_j(t), w_j) - A^0(t, \eta)\| \|\eta - u(t)\| + \langle A^0(t, \eta), \eta - u(t) \rangle \\
+ \quad & (\xi(t) + M(1+K)) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \|u(t) - v_j(\theta_j(t))\| + (\xi(t) + M(1+K)) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \|w_j - \eta\|.
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{v}_j(t)+f(t,u(t)),u(t)-\eta\rangle \\
\leq\ & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|f(t,v_j(\varphi_j(t)))-f(t,u(t))\|\|u(t)-\eta\| \\
+\ & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\|A^0(\theta_j(t),w_j)-A^0(t,\eta)\|+\|A^0(t,\eta)\|\right)\Big(\|w_j-\eta\|+\|u(t)-v_j(\theta_j(t))\|\Big) \\
+\ & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|A^0(\theta_j(t),w_j)-A^0(t,\eta)\|\|\eta-u(t)\|+\langle A^0(t,\eta),\eta-u(t)\rangle \\
+\ & (\xi(t)+M(1+K))\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|u(t)-v_j(\theta_j(t))\|+(\xi(t)+M(1+K))\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|w_j-\eta\|.
\end{aligned}
$$

On passe à la limite lorsque $n\to\infty$ dans cette inégalité, on obtient la relation (2.98) en utilisant la Komlos convergence de $(\dot{v})_n$ vers u, la Proposition 1.7.11, la convergence forte de $\big(v_n(\theta_n(t))\big)_n$ vers $u(t)$, la relation (2.99) et la continuité de $f(t,\cdot)$. Par conséquent, $-\dot{u}(t)\in A(t)u(t)+f(t,u(t))$ p.p. avec $u(0)=u_0$, et la solution est unique par la monotonie de $A(t)$ et par la condition de type Lipschitzit de $f(t,\cdot)$ (voir Théorème 2.3.1). Finalement, par (2.94)

$$\|\dot{u}(t)\| \ \leq\ \xi(t) \quad p.p.t\in I.$$

■

Corollaire 2.3.4.
Soit pour tout $t\in I$, $A(t):D(A(t))\subset H\rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H1)'$, $(H2)$ et $(H1)^*$. Soit $h\in L^1(I,H)$. Alors, pour tout $u_0\in D(A(0))$, le problème

$$(P_h)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)\,u(t)+h(t), & p.p.\,t\in I\\ u(0) = u_0\in D(A(0)),\end{cases}$$

admet une unique solution absolument continue $u\in\mathcal{W}^{1,1}(I,H)$. De plus, pour $\widetilde{K}=\widetilde{K}(\|u_0\|,c,T,\beta,h)$,

$$\|\dot{u}(t)\|\leq\widetilde{K}(1+\dot{\beta}(t)+\|h(t)\|)+\|h(t)\|,\quad p.p.\,t\in I.$$

Démonstration
Si $h\in L^\infty(I,H)$, on prend $f(t,x)=h(t)$ dans le Théorème 2.3.3. Le cas général est

conclut d'après le Théorème 2.3.3, en prenant $f(t,x) = 0 \in H$ et

$$B(t)x = A(t)\Big(x - \int_0^t h(s)ds\Big) \quad \text{ssi} \quad x - \int_0^t h(s)ds \in D(A(t)) \;\; \forall t \in I.$$

$B(t)$ est un opérateur maximal monotone vérifiant $(H1)'$ $\Big($avec $V(t) = \int_0^t \big(|\dot{\beta}(\tau)| + h(\tau)\big)d\tau\Big)$ et $(H2)$ (voir la preuve du Corollaire 2.2.2). Montrons que pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in D(B(t))$, $B(t)x$ est un cône. Soit $y \in B(t)x$ et soit $\lambda \geq 0$,

$$y \in B(t)x = A(t)\Big(x - \int_0^t h(s)ds\Big) \iff \lambda y \in A(t)\Big(x - \int_0^t h(s)ds\Big) = B(t)x.$$

Donc $B(t)x$ est un cône, par suite d'après le Théorème 2.3.3, le Problème

$$\begin{cases} -\dot{v}(t) & \in & B(t)v(t) \\ v(0) & = & u_0, \end{cases}$$

(avec $f(t,x) = 0$) admet une solution unique absolument continue v avec

$$\|\dot{v}(t)\| \leq K(\dot{V}(t) + 1), \quad p.p.\, t \in I$$

ceci est équivalent à l'existence d'une solution unique absolument continue u pour le problème (P_h), vérifiant

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \widetilde{K}(1 + \dot{\beta}(t) + \|h(t)\|) + \|h(t)\|, \quad p.p.\, t \in I.$$

$\blacksquare$

Nous terminons cette section avec des résultats d'existence pour des classes particulières d'opérateurs à variation absolument continue, à commencer par ceux qui ont un domaine fixe.

Théorème 2.3.5. *Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H1)'$, $(H2)$ et*

$(H5)$ l'application $(t,x) \mapsto A^0(t,x)$ est continue sur $I \times D(A(t))$;

$(H6)$ $D(A(t)) = D$ pour tout $t \in I$.
Soit $f : I \times H \to H$ tel que pour tout $x \in H$, $f(\cdot,x)$ est mesurable et pour tout $R > 0$ et pour tout $t \in I$, f satisfait les hypothèses $(H3)$ et $(H4)$. Alors, pour tout $u_0 \in D$, il existe une unique solution absolument continue au problème (P_f). De plus,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t))\; p.p.\, t \in I,$$

pour $K = K(\|u_0\|, c, T, M, \beta)$.

Démonstration

On choisit une suite quelconque $(\varepsilon_n) \subset]0,1]$ décroissante vers 0 lorsque $n \to +\infty$, et on considère la partition $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n = T$ de I vérifiant les propriétés (2.5) et (2.6).

Etape 1. Algorithme.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on construit une application en escalier continue à droite $u_n : I \to H$ comme suit

$$u_n(t) = \begin{cases} u_0, & t \in [0, t_1^n[\\ u_i^n, & t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\\ u_{k_n}^n, & t = T, \end{cases}$$

où, pour $i = 0, \ldots, k_n - 1$,

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n\Big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\Big) = \Big(I_H + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n)\Big)^{-1}\Big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\Big). \tag{2.102}$$

Observons que par la Proposition 1.8.17, $u_{i+1}^n \in D\big(A(t_{i+1}^n)\big) = D$, et

$$-\frac{u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds - u_{i+1}^n}{\delta_{i+1}^n} \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n. \tag{2.103}$$

Aussi, on définit l'application absolument continue $v_n : I \to H$ par

$$v_n(t) = \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\Big(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\Big) + u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds, \tag{2.104}$$

pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$ et $v_n(T) = u_{k_n}^n$. Alors, $v_n(t_i^n) = u_i^n$, et

$$\dot{v}_n(t) = \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\Big(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\Big) - f(t, u_i^n). \tag{2.105}$$

pour $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$. D'autre part, si on définit $\theta_n, \varphi_n : I \to I$ par

$$\theta_n(t) = t_{i+1}^n, \quad \varphi_n(t) = t_i^n \quad t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[, \quad i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$$

et $\theta_n(0) = \varphi_n(0) = 0$, alors, on peut écrire la relation (2.103), comme suit

$$-\dot{v}_n(t) \in A\big(\theta_n(t)\big)v_n\big(\theta_n(t)\big) + f\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big), \quad p.p.\, t \in I. \tag{2.106}$$

Etape 2. Estimations et convergences

D'abord, on va montrer que notre suite $(u_n)_n$ est uniformément bornée en norme et en variation, i.e., il existe une constante positive K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i = 0, \dots, k_n - 1$,

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n), \tag{2.107}$$

et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in I} \|u_n(t)\| \leq K \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(u_n) \leq K(T + \beta(T)). \tag{2.108}$$

En effet, on a par l'hypothèse $(H_1)'$ et (2.6)

$$dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) \leq \beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n) = \eta_{i+1}^n, \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, k_n - 1.$$

Par les propriétés (a) et (b) du Lemme 1.8.24, on peut écrire en utilisant cette dernière inégalité, les hypothèses $(H2)$ et $(H4)$

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \left\| J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right) - u_i^n \right\| \\
&\leq \left\| J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n)ds\right) - J_{i+1}^n(u_i^n) \right\| + \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, u_i^n)\|ds + \delta_{i+1}^n \|A^0(t_i^n, u_i^n)\| + dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) \\
&+ \sqrt{\delta_{i+1}^n\big(1 + \|A^0(t_i^n, u_i^n)\|\big)\, dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n))} \\
&\leq M(1 + \|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + c(1 + \|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n + \sqrt{\delta_{i+1}^n\big(1 + c(1 + \|u_i^n\|)\big)\eta_{i+1}^n} \\
&\leq \big(1 + (M + c)(1 + \|u_i^n\|)\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big) + \sqrt{\big(1 + c(1 + \|u_i^n\|)\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big)^2} \\
&\leq \big(2 + (M + 2c)(1 + \|u_i^n\|)\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big)
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \big(2 + (M + 2c)(1 + \|u_i^n\|)\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big), \tag{2.109}$$

par suite,

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| \\
&\leq \big(2 + (M + 2c)(1 + \|u_i^n\|)\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big) + \|u_i^n\| \\
&\leq \big(1 + (M + 2c)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big)\big)\|u_i^n\| + (2 + 2c + M)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big),
\end{aligned}$$

par le Lemme 1.7.21, il découle

$$\|u_i^n\| \leq \left(\|u_0\| + (2 + 2c + M)\sum_{k=0}^{i-1}\big(\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n\big)\right) \exp\left((M + 2c)\sum_{k=0}^{i-1}\big(\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n\big)\right).$$

Par la croissance de la fonction $t \mapsto \beta(t) + t$ et grâce à (2.6), on a $\sum_{k=0}^{i-1} \big(\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n\big) \leq T + \beta(T)$, d'où

$$\|u_i^n\| \leq \big(\|u_0\| + (2 + 2c + M)(T + \beta(T))\big) \exp\big((M + 2c)(T + \beta(T)\big) =: K_1.$$

Par cette dernière inégalité, l'estimation (2.109) devient

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \big(2 + (M + 2c)(1 + K_1)\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big) = K_2\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big). \tag{2.110}$$

Posons $K = \max(K_1, K_2)$ et par la définition de la suite $(u_n)_n$, on obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in I} \|u_n(t)\| \leq K \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(u_n) \leq K(T + \beta(T)).$$

De plus, pour $0 \leq s \leq t \leq T$, on va montrer que

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K\big((t - s) + (\beta(t) - \beta(s)) + \varepsilon_n\big). \tag{2.111}$$

En effet, soit $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n[$ et $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ avec $j > i$, alors par (2.107) et (2.5), nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_n(s)\| &= \|u_j^n - u_i^n\| \leq \sum_{k=0}^{j-i-1} \|u_{i+k+1}^n - u_{k+i}^n\| \\
&\leq K \sum_{k=0}^{j-i-1} \big(\delta_{i+k+1}^n + \eta_{i+k+1}^n\big) \\
&= K \sum_{k=0}^{j-i-1} \big((t_{i+k+1}^n - t_{k+i}^n) + (\beta(t_{i+k+1}^n) - \beta(t_{k+i}^n))\big) \\
&\leq K\big((t_j^n - t_i^n) + (\beta(t_j^n) - \beta(t_i^n))\big) \\
&\leq K\big((t_j^n - t) + (t - s) + (s - t_{i+1}^n) + (t_{i+1}^n - t_i^n) + \\
&+ (\beta(t_j^n) - \beta(t)) + (\beta(t) - \beta(s)) + (\beta(s) - \beta(t_{i+1}^n)) + (\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n))\big) \\
&\leq K\big((t - s) + (\beta(t) - \beta(s)) + (t_{i+1}^n - t_i^n) + (\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n))\big) \\
&\leq K\big((t - s) + (\beta(t) - \beta(s)) + \varepsilon_n\big)
\end{aligned}$$

Par (2.108), notre suite $(u_n)_n$ est uniformément bornée en norme et en variation, D'après le Théorème 1.2.6, il existe une application continue à variation bornée $u : I \to H$ tel que

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{pour } t \in I, \tag{2.112}$$

en particulier, on a $u(0) = u_0$, et en introduisant la limite inférieure dans (2.111), on obtient

$$\|u(t) - u(s)\| \leq K((t - s) + (\beta(t) - \beta(s))) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq t \leq T, \tag{2.113}$$

par conséquent, u est absolument continue plus précisément, $u \in \mathcal{W}^{1,1}(I,H)($ car $\beta \in \mathcal{W}^{1,1}\big(I,\mathbb{R}\big))$.

Ensuite, on va vérifier que la suite $(v_n)_n$ est aussi uniformément bornée en norme et en variation. En effet, par (2.6), (2.104), (2.108) et $\big(H4\big)$, on a pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned}
\|v_n(t)\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| + 2\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s,u_i^n)\|ds \\
&\leq 2K + 2M(1+K)(t_{i+1}^n - t_i^n) \\
&\leq 2K + 2MT(1+K) = K',
\end{aligned} \tag{2.114}$$

et par (2.107)

$$\|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| \leq K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n), \tag{2.115}$$

posons $L = \max(K', K)$, on obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_C \leq L \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(v_n) \leq L(T + \beta(T)). \tag{2.116}$$

Donc, la suite $\big(v_n\big)$ est uniformément bornée en norme et en variation. Alors, on peut extraire une sous suite qu'on note aussi (v_n) et tel que $(v_n(t))_n$ converge faiblement dans dans H pour tout $t \in I$.

Puis, on va prouver que la suite $(v_n(t))_n$ converge faiblement vers $u(t)$.

Par les estimations (2.5), (2.107), (2.108), et l'hypothèse $(H4)$, nous avons pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned}
\|v_n(t) - u_n(t)\| &= \|v_n(t) - u_i^n\| \leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s,u_i^n)\|ds \\
&\leq K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + 2M(1 + \|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n \\
&\leq (K + 2M(1+K))\varepsilon_n \leq L\varepsilon_n,
\end{aligned}$$

donc, pour tout $\eta \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Big|\langle v_n(t),\eta\rangle - \langle u(t),\eta\rangle\Big| &= \lim_{n\to\infty} \Big|\langle v_n(t),\eta\rangle - \langle u_n(t),\eta\rangle + \langle u_n(t),\eta\rangle - \langle u(t),\eta\rangle\Big| \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big|\langle v_n(t) - u_n(t),\eta\rangle + \langle u_n(t),\eta\rangle - \langle u(t),\eta\rangle\Big| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|v_n(t) - u_n(t)\|\|\eta\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} L\varepsilon_n\|\eta\| = 0,
\end{aligned}$$

donc,

$$\lim_{n\to\infty} \langle v_n(t),\eta\rangle = \langle u(t),\eta\rangle, \tag{2.117}$$

i.e., la suite $(v_n(t))_n$ converge faiblement vers $u(t)$.
De plus, on va montrer que la suite $(\dot{v}_n)_n$ converge faiblement dans $L^2(I,H)$ vers $\dot{u}$. En effet, par les relations (2.102), (2.105), les hypothèses $(H2)$, $(H4)$, $(H6)$, Proposition 1.8.17 (ii) et le fait que $u_i^n \in D(A(t_i^n)) = D(A(t_{i+1}^n) = D$, on a

$$
\begin{aligned}
\|\dot{v}_n(t)\| &= \left\|\frac{1}{\delta_{i+1}^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right) - f(t,u_i^n)\right\| \\
&\leq \left\|\frac{1}{\delta_{i+1}^n}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds - J_{i+1}^n\big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\big)\right)\right\| + \|f(t,u_i^n)\| \\
&= \left\|A_{\delta_{i+1}^n}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right)\right\| + \|f(t,u_i^n)\| \\
&\leq \left\|A_{\delta_{i+1}^n}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s,u_i^n)ds\right) - A_{\delta_{i+1}^n}(u_i^n)\right\| + \|A_{\delta_{i+1}^n}(u_i^n)\| + M(1+\|u_i^n\|) \\
&\leq \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\|f(s,u_i^n)\|ds + \|A^0(t_{i+1}^n,u_i^n)\Big\| + M(1+\|u_i^n\|) \\
&\leq M(1+\|u_i^n\|) + c(1+\|u_i^n\|) + M(1+\|u_i^n\|) \\
&\leq (2M+c)(1+K) =: \widetilde{K}. \qquad (2.118)
\end{aligned}
$$

Donc la suite $(\dot{v}_n)_n$ est bornée dans $L^2(I,H)$. Alors, on peut lui extraire une sous suite notée aussi $(\dot{v}_n)_n$ qui converge faiblement vers un élément $w \in L^2(I,H)$. En répétant la preuve du Théorème 2.2.1, on montre que $(\dot{v}_n)_n$ converge faiblement dans $L^2(I,H)$ vers $\dot{u}$, i.e.,

$$\dot{v}_n \rightharpoonup \dot{u} \quad \text{dans } L^2(I,H). \qquad (2.119)$$

Par les estimations (2.118) et (2.5), nous avons

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| = \left\|\int_{]t,\theta_n(t)]}\dot{v}_n(\tau)d\tau\right\| \leq \int_{]t,\theta_n(t)]}\|\dot{v}_n(\tau)\|d\tau \leq \widetilde{K}(\theta_n(t)-t) \leq \widetilde{K}\varepsilon_n. \qquad (2.120)$$

On termine cette étape, par montrer que la suite $(v_n)_n$ converge uniformément vers u. Pour cela, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$ $f_n(t) = f(t, v_n(\varphi_n(t)))$, donc par l'estimation (2.116) et l'hypothèse $(H4)$, nous avons

$$\|f_n(t)\| \leq M(1+\|v_n(\varphi_n(t))\|) \leq M(1+L) =: M_1, \qquad (2.121)$$

ainsi, par l'hypothèse $(H3)$ et l'estimation (2.116), on obtient l'existence de $\alpha_L \in L^1(I,H)$

tel que

$$\begin{aligned}\|f_n(t)-f_m(t)\| &\leq \alpha_L(t)\|v_n(\varphi_n(t))-v_m(\varphi_m(t))\| \\ &\leq \alpha_L(t)\Big(\|v_n(\varphi_n(t))-v_n(t)\|+\|v_n(t)-v_m(t)\|+\|v_m(t)-v_m(\varphi_m(t))\|\Big)\end{aligned} \tag{2.122}$$

En utilisant la définition de la distance de Vladimirov, on obtient par l'inclusion (2.106), les estimations (2.121) et (2.118), pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\Big\langle v_n(\theta_n(t))-v_m(\theta_m(t)), \dot{v}_n(t)+f_n(t)-\dot{v}_m(t)-f_m(t)\Big\rangle \\ \leq\ & (1+\|\dot{v}_n(t)\|+\|\dot{v}_m(t)\|+\|f_n(t)\|+\|f_m(t)\|)\, dis(A(\theta_n(t)), A(\theta_m(t))) \\ \leq\ & (1+2\widetilde{K}+2M_1)\Big(|\beta((\theta_n(t))-\beta(t)|+|\beta(t)-\beta(\theta_m(t))|\Big) \\ \leq\ & (1+2\widetilde{K}+2M_1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m).\end{aligned}$$

D'autres part, nous avons

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|v_n(t)-v_m(t)\|^2\right)=\Big\langle v_n(t)-v_m(t), \dot{v}_n(t)-\dot{v}_m(t)\Big\rangle \\ &= \Big\langle v_n(t)-v_n(\theta_n(t))-v_m(t)+v_m(\theta_m(t)), \dot{v}_n(t)-\dot{v}_m(t)\Big\rangle \\ &+\Big\langle v_n(\theta_n(t))-v_m(\theta_m(t)), \dot{v}_n(t)+f_n(t)-\dot{v}_m(t)-f_m(t)\Big\rangle \\ &+\Big\langle v_n(\theta_n(t))-v_m(\theta_m(t)), f_m(t)-f_n(t)\Big\rangle\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schawrz, et les estimations (2.5), (2.118) et (2.120), on a

$$\begin{aligned}&\Big\langle v_n(t)-v_n(\theta_n(t))-v_m(t)+v_m(\theta_m(t)), \dot{v}_n(t)-\dot{v}_m(t)\Big\rangle \\ &\leq \big(\|\dot{v}_n(t)\|+\|\dot{v}_m(t)\|\big)\Big(\|v_n(t)-v_n(\theta_n(t))\|+\|v_m(t)-v_m(\theta_m(t))\|\Big) \\ &\leq 2\widetilde{K}\big(\widetilde{K}\varepsilon_n+\widetilde{K}\varepsilon_m\big) \\ &\leq 2\widetilde{K}^2(\varepsilon_n+\varepsilon_m).\end{aligned}$$

aussi par l'inégalité de Cauchy-Schawrz, on a

$$\Big\langle v_n(\theta_n(t))-v_m(\theta_m(t)), f_m(t)-f_n(t)\Big\rangle \leq \|v_n(\theta_n(t))-v_m(\theta_m(t))\|\|f_m(t)-f_n(t)\|$$

et comme

$$\|v_n(\theta_n(t))-v_m(\theta_m(t))\| \leq \|v_n(\theta_n(t))-v_n(t)\|+\|v_n(t)-v_m(t)\|+\|v_m(t)-v_m(\theta_m(t))\|,$$

par l'estimation (2.122), on obtient

$$\Big\langle v_n(\theta_n(t)) - v_m(\theta_m(t)), f_m(t) - f_n(t) \Big\rangle \leq \alpha_L(t)\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 + \Delta^1_{n,m}(t),$$

où pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\Delta^1_{n,m}(t) \ &:= \ \alpha_L(t)\|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\|\Big(\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + \\
&+ \ \|v_n(t) - v_m(t)\| + \|v_m(t) - v_m(\theta_m(t))\|\Big) \\
&+ \ \alpha_L(t)\|v_n(t) - v_m(t)\|\big(\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + \|v_m(t) - v_m(\theta_m(t))\|\big) \\
&+ \ \alpha_L(t)\|v_m(t) - v_m(\varphi_m(t)\|\Big(\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - v_m(t)\| + \\
&+ \ \|v_m(t) - v_m(\theta_m(t))\|\Big).
\end{aligned}$$

Par (2.114), il est clair que $\Delta^1_{n,m}$ intégrablement bornée. De plus, $\Delta^1_{n,m}(t) \to 0$ lorsque $n, m \to +\infty$ pour tout $t \in I$, par le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue 1.7.12,

$$\int_0^T \Delta^1_{n,m}(\tau)\, d\tau \to 0 \ \text{ lorsque } \ n, m \to +\infty.$$

Par conséquent, on conclut que

$$\begin{aligned}
\Big\langle v_n(t) - v_m(t), \dot v_n(t) - \dot v_m(t) \Big\rangle \ &\leq \ 2\widetilde{K}^2(\varepsilon_n + \varepsilon_m) + (1 + 2\widetilde{K} + 2M_1)(\varepsilon_n + \varepsilon_m) \\
&+ \ \alpha_L(t)\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 + \Delta^1_{n,m}(t) \\
&=: \ \Delta_{n,m}(t) + \alpha_L(t)\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 \qquad (2.123)
\end{aligned}$$

où

$$\Delta_{n,m}(t) = 2\widetilde{K}^2(\varepsilon_n + \varepsilon_m) + (1 + 2\widetilde{K} + 2M_1)(\varepsilon_n + \varepsilon_m) + \Delta^1_{n,m}(t).$$

Clairement,

$$\int_0^T \Delta_{n,m}(\tau) d\tau \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n, m \to +\infty.$$

Comme $v_n(0) = v_m(0) = u_0$, et pour tout $t \in I$ $\Delta_{n,m}(t) \geq 0$, alors pour $t \in I$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 \ &= \ \int_0^t \langle v_n(\tau) - v_m(\tau), \dot v_n(\tau) - \dot v_m(\tau)\rangle d\tau \\
&\leq \ \int_0^t \alpha_L(\tau)\|v_n(\tau) - v_m(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^T \Delta_{n,m}(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Par Lemme de Gronwall 1.7.19, on conclut que

$$\|v_n(\cdot) - v_m(\cdot)\|_C^2 \leq \left(2\int_0^T \Delta_{n,m}(\tau)d\tau\right)\exp\left(\int_0^T 2\alpha_L(\tau)d\tau\right). \tag{2.124}$$

Prenant en compte les arguments ci-dessus, on conclut que (v_n) est une suite de Cauchy dans $C(I,H)$. Par conséquent, (v_n) converge uniformément et fortement vers une application qui, via la convergence faible ponctuelle de (v_n) vers u n'est autre que u, c'est-à-dire,

$$\|v_n(\cdot) - u(\cdot)\|_{\mathrm{C}} \to 0 \ \text{ lorsque } \ n \to \infty. \tag{2.125}$$

Etape 3. Existence de solution

Dans cette étape on va montrer que u est une solution de notre problème (P_f), c'est-à-dire, elle vérifie l'inclusion $-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t,u(t))$, p.p. $t \in I$.
Soit $\eta \in D(A(t)) = D$, on commence par montre que, pour $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\int_s^t \langle \dot{u}(\tau) + f\big(\tau, u(\tau)\big), u(\tau) - \eta\rangle d\tau \leq \int_s^t \langle A^0(\tau,\eta), \eta - u(\tau)\rangle d\tau.$$

Observons que

$$\begin{aligned}\Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big), v_n(t) - \eta\Big\rangle &= \Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big), v_n\big(\theta_n(t)\big) - \eta\Big\rangle \\ &+ \Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big), v_n(t) - v_n\big(\theta_n(t)\big)\Big\rangle.\end{aligned}$$

D'autre part, par (2.106) et comme $A(t)$ est monotone, pour presque tout $t \in I$, on a

$$\Big\langle \dot{v}_n(t) + f(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big), v_n\big(\theta_n(t)\big) - \eta\Big\rangle \leq \Big\langle A^0\big(\theta_n(t), \eta\big), \eta - v_n\big(\theta_n(t)\big)\Big\rangle, \tag{2.126}$$

par suite, pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}\int_s^t \Big\langle \dot{v}_n(\tau) + f(\tau, v_n\big(\varphi_n(\tau)\big), v_n(\tau) - \eta\Big\rangle d\tau &\leq \int_s^t \Big\langle A^0\big(\theta_n(\tau), \eta\big), \eta - v_n\big(\theta_n(\tau)\big)\Big\rangle d\tau \\ &+ \int_s^t \Big\langle \dot{v}_n(\tau) + f(\tau, v_n\big(\varphi_n(\tau)\big), v_n(\tau) - v_n\big(\theta_n(\tau)\big)\Big\rangle d\tau.\end{aligned} \tag{2.127}$$

Il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_s^t \Big\langle \dot{v}_n(\tau), v_n(\tau) - \eta\Big\rangle d\tau = \int_s^t \Big\langle \dot{u}(\tau), u(\tau) - \eta\Big\rangle d\tau. \tag{2.128}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_s^t \langle \dot{v}_n(\tau), v_n(\tau)\rangle d\tau &= \lim_{n\to+\infty}\int_s^t \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|v_n(\tau)\|^2 d\tau = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\big(\|v_n(t)\|^2 - \|v_n(s)\|^2\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(\|u(t)\|^2 - \|u(s)\|^2\big) = \int_s^t \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|u(\tau)\|^2 d\tau = \int_s^t \langle \dot{u}(\tau), u(\tau)\rangle d\tau\end{aligned}$$

et $(\dot{v}_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $L^2(I,H)$ vers $\dot{u}$, donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_s^t \big\langle \dot{v}_n(\tau), \eta\big\rangle d\tau = \int_s^t \big\langle \dot{u}(\tau), \eta\big\rangle d\tau,$$

d'où,

$$\lim_{n\to\infty}\int_s^t \Big\langle \dot{v}_n(\tau), v_n(\tau) - \eta\Big\rangle d\tau = \int_s^t \Big\langle \dot{u}(\tau), u(\tau) - \eta\Big\rangle d\tau.$$

D'autre part, les suites des applications mesurables $\big\langle A^0\big(\theta_n(t),\eta\big), \eta - v_n\big(\theta_n(t)\big)\big\rangle$ et $\big\langle f(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big), v_n(t) - \eta\big\rangle$ sont uniformément bornées. En effet, par l'hypothèse $(H2)$ et l'estimation (2.116) nous avons

$$\begin{aligned}\Big|\Big\langle A^0\big(\theta_n(t),\eta\big), \eta - v_n\big(\theta_n(t)\big)\Big\rangle\Big| &\le \|A^0\big(\theta_n(t),\eta\big)\|\|\eta - v_n\big(\theta_n(t)\big)\|\\ &\le c\big(1+\|\eta\|\big)\big(\|\eta\| + \|v_n\big(\theta_n(t)\big)\|\big)\\ &\le c\big(1+\|\eta\|\big)\big(\|\eta\| + L\big),\end{aligned}$$

et par l'hypothèse $(H4)$ et l'estimation (2.116)

$$\begin{aligned}\Big|\Big\langle f\big(t, v_n(\varphi_n(t))\big), v_n(t) - \eta\Big\rangle\Big| &\le \|f(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\|\|v_n\big(\theta_n(t)\big) - \eta\|\\ &\le M\big(1+\|v_n\big(\varphi_n(t)\big)\|\big)\big(\|v_n(t)\| + \|\eta\|\big)\\ &\le M\big(1+L\big)\big(L + \|\eta\|\big).\end{aligned}$$

Par la continuité de $A^0(\cdot,\cdot)$ et $f(t,\cdot)$, pour tout $t \in I$, et comme $\big(v_n(\cdot)\big)$ converge uniformément vers $u(\cdot)$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\big\langle A^0\big(\theta_n(t),\eta\big), \eta - v_n\big(\theta_n(t)\big)\big\rangle = \big\langle A^0(t,\eta), \eta - u(t)\big\rangle,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\big\langle f\big(t, v_n(\varphi_n(t))\big), v_n(t) - \eta\big\rangle = \big\langle f(t, u(t)), u(t) - \eta\big\rangle.$$

Alors, par le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\int_s^t \big\langle A^0\big(\theta_n(\tau),\eta\big), \eta - v_n\big(\theta_n(\tau)\big)\big\rangle d\tau = \int_s^t \big\langle A^0(\tau,\eta), \eta - u(\tau)\big\rangle d\tau, \tag{2.129}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\int_s^t \big\langle f\big(\tau, v_n(\varphi_n(\tau))\big), v_n(\tau)-\eta\big\rangle d\tau = \int_s^t \big\langle f(\tau,u(\tau)), u(\tau)-\eta\big\rangle d\tau,$$

donc, par cette dernière inégalité et la relation (2.128), on trouve

$$\lim_{n\to\infty}\int_s^t \big\langle \dot v_n(\tau) + f\big(\tau, v_n(\varphi_n(\tau))\big), v_n(\tau)-\eta\big\rangle d\tau = \int_s^t \big\langle \dot u(\tau) + f(\tau,u(\tau)), u(\tau)-\eta\big\rangle d\tau. \tag{2.130}$$

De plus, par les inégalités (2.118) et (2.120), on a estimation

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t \big\langle \dot v_n(\tau), v_n(\tau) - v_n\big(\theta_n(\tau)\big)\big\rangle d\tau\right| &\leq \int_s^t \|\dot v_n(\tau)\|\|v_n(\tau) - v_n\big(\theta_n(\tau)\big)\| d\tau \\ &\leq \widetilde{K}^2 T\varepsilon_n,\end{aligned}$$

alors,

$$\lim_{n\to\infty}\int_s^t \big\langle \dot v_n(\tau), v_n(\tau) - v_n\big(\theta_n(\tau)\big)\big\rangle d\tau = 0.$$

Par ailleurs, par les estimations (2.121) et (2.120) et l'inégalité de Cauchy Schawrz, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t \big\langle f(\tau, v_n(\varphi_n(\tau))), v_n(\tau) - v_n\big(\theta_n(\tau)\big)\big\rangle d\tau\right| &\leq \int_s^t \|f(\tau, v_n(\varphi_n(\tau)))\|\|v_n(\tau) - v_n\big(\theta_n(\tau)\big)\| d\tau \\ &\leq M_1\widetilde{K} T\varepsilon_n,\end{aligned}$$

donc,

$$\lim_{n\to\infty}\int_s^t \big\langle f(\tau, \varphi_n(\tau)), v_n(\tau) - v_n\big(\theta_n(\tau)\big)\big\rangle d\tau = 0$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{n\to\infty}\int_s^t \big\langle \dot v_n(\tau) + f(\tau, \varphi_n(\tau)), v_n(\tau) - v_n\big(\theta_n(\tau)\big)\big\rangle d\tau = 0. \tag{2.131}$$

Donc, en prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'estimation (2.127), on conclut par (2.129), (2.130) et (2.131), que

$$\int_s^t \big\langle \dot u(\tau) + f\big(\tau, u(\tau)\big), u(\tau)-\eta\big\rangle d\tau \leq \int_s^t \big\langle A^0(\tau,\eta), \eta - u(\tau)\big\rangle d\tau \tag{2.132}$$

Maintenant, nous allons montrer qu'il existe un ensemble négligeable N, tel que pour $\tau \notin N$ et pour chaque $\eta \in D\big(A(t)\big) = D$, on a l'estimation

$$\big\langle \dot u(\tau) + f(\tau, u(\tau)), u(\tau)-\eta\big\rangle \leq \big\langle A^0(\tau,\eta), \eta - u(\tau)\big\rangle. \tag{2.133}$$

Soit $\left(\eta_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans $D\big(A(t)\big) = D$. Donc, par (2.132) pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_s^t \big\langle \dot{u}(\tau) + f\big(\tau, u(\tau)\big), u(\tau) - \eta_k \big\rangle d\tau \leq \int_s^t \big\langle A^0(\tau, \eta_k), \eta_k - u(\tau)\big\rangle d\tau. \tag{2.134}$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors pour tout $t \in I$, par l'estimation (2.134) on peut aussi écire

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \big\langle \dot{u}(\tau) + f\big(\tau, u(\tau)\big), u(\tau) - \eta_k \big\rangle d\tau \leq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \big\langle A^0(\tau, \eta_k), \eta_k - u(\tau)\big\rangle d\tau, \tag{2.135}$$

et comme les applications $t \mapsto \big\langle \dot{u}(t) + f\big(t, u(t)\big), u(t) - \eta_k\big\rangle$ et $t \mapsto \big\langle A^0(t, \eta_k), \eta_k - u(t)\big\rangle$ sont intégrables pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors, par le Théorème de différentiation de Lebesgue (Théorème 1.1.6), on a pour presque tout $t \in I$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \big\langle \dot{u}(\tau) + f\big(\tau, u(\tau)\big), u(\tau) - \eta_k \big\rangle d\tau = \big\langle \dot{u}(t) + f\big(t, u(t)\big), u(t) - \eta_k\big\rangle,$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \big\langle A^0(\tau, \eta_k), \eta_k - u(\tau)\big\rangle d\tau = \big\langle A^0(t, \eta_k), \eta_k - u(t)\big\rangle,$$

donc, en prenant la limite dans l'estimation (2.135) lorsque ε tend vers 0, on obtient

$$\big\langle \dot{u}(t) + f\big(t, u(t)\big), u(t) - \eta_k\big\rangle \leq \big\langle A^0(t, \eta_k), \eta_k - u(t)\big\rangle \quad p.p.$$

c'est-à-dire, il existe un ensemble négligeable N tel que pour tout $t \notin N$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\big\langle \dot{u}(t) + f\big(t, u(t)\big), u(t) - \eta_k\big\rangle \leq \big\langle A^0(t, \eta_k), \eta_k - u(t)\big\rangle.$$

Soit $t \notin N$ et on considère $\eta \in D\big(A(t)\big) = D$, alors il existe une suite $\left(\eta_{k_n}\right)$ tel que $\eta_{k_n} \to \eta$. Par suite,

$$\big\langle \dot{u}(t) + f\big(t, u(t)\big), u(t) - \eta_{k_n}\big\rangle \leq \big\langle A^0(t, \eta_{k_n}), \eta_{k_n} - u(t)\big\rangle.$$

Pour $t \notin N$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. On passe à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient (2.133). Donc, on conclut par la Proposition 1.8.20 que, $u(t) \in D = D\big(A(t)\big)$ et

$$-\dot{u}(t) - f\big(t, u(t)\big) \in A(t)u(t) \quad p.p.$$

et $u(0) = u_0$, c'est-à-dire, le problème $\left(P_f\right)$ admet une solution absolument continue u, et la solution est unique par la monotonie de $A(t)$ et par la condition de Lipschitzité de $f(t, \cdot)$ (voir Théorème 2.3.1). Par l'estimation (2.113), cette solution vérifie

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)) \quad p.p. t \in I,$$

pour une certaine $K \in]0, +\infty[$ dépendant de $\|u_0\|, c, T, M$ et β. ∎

Enfin, considérons le cas des opérateurs maximaux monotones à valeurs bornées convexes faiblement compactes.

Théorème 2.3.6.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone à valeurs convexes faiblement compactes satisfaisant $(H1)'$, et

$(H2)'$ Il existe une constante positive c tel que

$$\|A(t)x\| = \sup_{y \in Ax} \|y\| \leq c(1 + \|x\|) \quad \text{pour tout } (t, x) \in I \times H; \tag{2.136}$$

$(H7)$ l'application $(t, x) \mapsto \delta^*\big(e, A(t)x\big)$ est semi-continue supérieurement dans $I \times H$, pour tout $e \in H$.
Alors, pour tout $u_0 \in H$, le problème

$$(P) \begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) & \in & A(t)u(t) \text{ p.p.} \quad \text{sur I.} \\ u(0) & = & u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

admet une unique solution absolument continue, tel que $\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t))$ p.p., pour une certaine constante $K := K(\|u_0\|, c, T, \beta)$.

Démonstration
On choisit une suite quelconque $\big(\varepsilon_n\big) \subset]0, 1]$ décroissant vers 0 lorsque $n \to \infty$, et on considère la partititon $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n = T$ de I, et comme $t \mapsto \beta(t) + t$ est absolument continue on peut supposer que

$$|t_{i+1}^n - t_i^n| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} |\dot{\beta}(t)| dt \leq \varepsilon_n, \quad \text{pour } i = 0, \ldots, k_n - 1. \tag{2.137}$$

on pose

$$\delta_{i+1}^n = t_{i+1}^n - t_i^n, \ \eta_{i+1}^n = \beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n),$$

pour $i = 0, \ldots, k_n - 1$. Alors, l'inégalité (2.137) peut être réécrite sous la forme $\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n \leq \varepsilon_n \leq 1$.

Etape 1. Algorithme
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on construit une application en escalier continue à droite $u_n : I \to H$ comme suit :

$$u_n(t) = \begin{cases} u_0^n = u_0, & \text{pour} \quad t \in [0, t_1^n[, \\ u_i^n & \text{pour} \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \quad i = 0, \ldots, k_n - 1, \\ u_{k_n}^n & \text{pour} \quad t = T, \end{cases}$$

où pour $i = 0, \dots, k_n - 1$

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n(u_i^n) = \big(I_H + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n)\big)^{-1}(u_i^n). \tag{2.138}$$

Observons que, par construction, $u_{i+1}^n = J_{i+1}^n(u_i^n) \in D(A(t_{i+1}^n))$ et

$$u_i^n \in \big(I_H + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n)\big)u_{i+1}^n$$

c'est-à-dire,

$$\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n. \tag{2.139}$$

On définit aussi l'application $v_n : I \to H$ par

$$v_n(t) = \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}(u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n, \ \text{ pour } \ t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \ i = 0, \dots, k_n - 1, \tag{2.140}$$

avec $v_n(T) = u_{k_n}^n$. Il est clair que l'application v_n est absolument continue avec $v_n(t_i^n) = u_i^n$, et

$$\dot{v}_n(t) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \quad \text{pour } \ t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[. \tag{2.141}$$

Par conséquent, si on définit $\theta_n : I \to I$ par

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_{i+1}^n & \text{pour } \ t \in]t_i^n, t_{i+1}^n], \ \ i = 0, 1, \dots, k_n - 1, \\ 0 & \text{pour } \ t = 0. \end{cases}$$

Alors, par (2.139), (2.140) et (2.141) on a

$$-\dot{v}_n(t) \in A\big(\theta_n(t)\big)\big(v_n(\theta_n(t))\big), \quad p.p.\ t \in I. \tag{2.142}$$

Etape 2. Estimations et convergences des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$

Nous avons par les hypothèses $(H1)'$ et $(H2)'$ et le Lemme 1.8.24 (a)

$$\begin{aligned} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\ &\leq \delta_{i+1}^n \|A^0(t_i^n, u_i^n)\| + dis\left(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)\right) + \\ &+ \sqrt{\delta_{i+1}^n (1 + \|A^0(t_i^n, u_i^n)\|)\, dis\left(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)\right)} \\ &\leq \delta_{i+1}^n \|A(t_i^n)u_i^n\| + \eta_{i+1}^n + \sqrt{\delta_{i+1}^n (1 + \|A(t_i^n)u_i^n\|)\, dis\left(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)\right)} \\ &\leq c(1 + \|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n + \sqrt{\delta_{i+1}^n (1 + c(1 + \|u_i^n\|))\eta_{i+1}^n} \\ &\leq (1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n) + \sqrt{(1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)^2} \\ &\leq 2(1 + c(1 + \|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n), \end{aligned} \tag{2.143}$$

alors,

$$\|u_{i+1}^n\| \leq \big(1+2c(\delta_{i+1}^n+\eta_{i+1}^n)\big)\|u_i^n\| + 2(1+c)(\delta_{i+1}^n+\eta_{i+1}^n), \tag{2.144}$$

donc, par le Lemme 1.7.21, on obtient pour $n \in \mathbb{N}$ et $i = 1, \ldots, k_n - 1$,

$$\|u_i^n\| \leq \left(\|u_0\| + 2(1+c)\sum_{k=1}^{i-1}(\delta_{k+1}^n+\eta_{k+1}^n)\right)\exp\left(2c\sum_{k=1}^{i-1}(\delta_{k+1}^n+\eta_{k+1}^n)\right).$$

Par suite,

$$\|u_i^n\| \leq \big(\|u_0\| + 2(1+c)(T+\beta(T)\big)\exp\big(2c(T+\beta(T)\big) = K_1,$$

d'où, par cette dernière inégalité, l'estimation (2.143) peut être écrite comme suit

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq 2(1+c(1+K_1))(\delta_{i+1}^n+\eta_{i+1}^n) =: K_2(\delta_{i+1}^n+\eta_{i+1}^n). \tag{2.145}$$

Si, on pose $K = \max(K_1, K_2)$, on obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{t\in I}\|u_n(t)\| \leq K \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(u_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i=0}^{k_n-1}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K(\beta(T)+T). \tag{2.146}$$

De plus, en répétant les mêmes calculs dans la preuve du théorème précédent, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K((\beta(t)-\beta(s)) + (t-s) + \varepsilon_n). \tag{2.147}$$

Notre suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications à variation bornée continues à droite uniformément bornée, en norme et en variation. D'après le Théorème 1.2.6, il existe une application à variation bornée $u : I \to H$ telle que

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{pour} \quad t \in I. \tag{2.148}$$

ceci implique que la condition initiale $u(0) = u_0$ est satisfaite. De plus, en prenant $\liminf\limits_{n\to\infty}$ dans (2.147), on obtient pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K((t-s) + \beta(t) - \beta(s)). \tag{2.149}$$

Par conséquent, u est absolument continue. Plus précisément, $u \in \mathcal{W}^{1,1}(I, H)$ car $\beta \in \mathcal{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$.

Par ailleurs, on peut montrer que la suite (v_n) est aussi bornée en norme et en variation. En effet, par les inégalités (2.140), (2.145) et (2.146), pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$,

$$\|v_n(t)\| \leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| \leq K(\delta_{i+1}^n+\eta_{i+1}^n) + K \leq 2K. \tag{2.150}$$

Par suite,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_C \leq 2K, \tag{2.151}$$

et

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} var(v_n) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{k_n-1} \big(v_n(t^n_{i+1}) - v_n(t^n_i)\big) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{k_n-1} (u^n_{i+1} - u^n_i) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} var(u_n) \leq K(\beta(T) + T).
\end{aligned} \tag{2.152}$$

D'autre part, à l'aide de (2.137), (2.140), et (2.145) nous avons pour tout $t \in [t^n_i, t^n_{i+1}[$,

$$\|v_n(t) - u_n(t)\| = \|v_n(t) - u^n_i\| \leq \frac{t - t^n_i}{t^n_{i+} - t^n_i}\|u^n_{i+1} - u^n_i\| \leq \|u^n_{i+1} - u^n_i\| \leq K\varepsilon_n. \tag{2.153}$$

Donc, grâce à cette dernière inégalité et (2.147), on peut obtenir l'estimation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}
\|v_n(t) - v_n(s)\| &\leq \|v_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(s)\| + \|v_n(s) - u_n(s)\| \\
&\leq K\varepsilon_n + K((\beta(t) - \beta(s)) + (t - s) + \varepsilon_n) + K\varepsilon_n \\
&\leq K((\beta(t) - \beta(s)) + (t - s) + 3\varepsilon_n).
\end{aligned} \tag{2.154}$$

Par les estimations (2.151) et (2.152) on peut conclure que la suite (v_n) est bornée en norme et en variation. Alors, on peut lui extraire une sous suite notée $(v_n)_n$ tel que pour tout $t \in I$ $(v_n(t))_n$ converge faiblement dans H. Par (2.148) et (2.153), pour tout $\eta \in H$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Big|\langle v_n(t) - u(t), \eta\rangle\Big| &= \lim_{n\to\infty} \Big|\langle v_n(t) - u_n(t), \eta\rangle - \langle u_n(t) - u(t), \eta\rangle\Big| \\
&\leq K\varepsilon_n\|\eta\| = 0.
\end{aligned}$$

D'où,

$$v_n(t) \rightharpoonup u(t) \text{ pour tout } t \in I, \tag{2.155}$$

Observons aussi, que par les relations (2.141) et (2.152)

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_n\|_{L^1} &= \int_0^T \|\dot{v}_n(s)\|ds = \sum_{i=1}^{k_n-1} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \|\dot{v}_n(s)\|ds \\
&= \sum_{i=1}^{k_n-1} \frac{\|u^n_{i+1} - u^n_i\|}{t^n_{i+1} - t^n_i} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} ds = \sum_{i=1}^{k_n-1} \|u^n_{i+1} - u^n_i\| = var(v_n) \\
&\leq K(\beta(T) + T).
\end{aligned} \tag{2.156}$$

Ainsi, par l'hypothèse $(H2)'$, les relations (2.138), (2.141) et (2.146) on a pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_n(t)\| &= \left\| \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \right\| = \left\| \frac{J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n}{\delta_{i+1}^n} \right\| = \|A_{\delta_{i+1}^n}(u_i^n)\| \\
&\leq \sup_{y \in A(t_{i+1}^n)(u_i^n)} \|y\| = \|A(t_{i+1}^n)(u_i^n)\| \\
&\leq c(1 + \|u_i^n\|) \\
&\leq c(1 + K).
\end{aligned}$$

c-à-d, pour presque tout $t \in I$,

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq c(1 + K). \tag{2.157}$$

Donc, par (2.157), on peut supposer que $(\dot{v}_n)$ converge faiblement dans $L^2(I, H)$ vers $\dot{u}$, i.e., pour tout $z \in L^2(I, H)$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^T \langle \dot{v}_n(\tau), z(\tau) \rangle d\tau = \int_0^T \langle \dot{u}(\tau), z(\tau) \rangle d\tau. \tag{2.158}$$

Dans la suite, nous allons montrer que la suite (v_n) converge uniformément sur I. Dans un premier lieu, remarquons que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ et presque tout $t \in I$, nous avons par la définition de $dis(\cdot, \cdot)$, l'hypothèse $(H1)'$ et l'estimation (2.137),

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{v}_m(t) - \dot{v}_n(t), v_m(\theta_m(t)) - v_n(\theta_n(t)) \Big\rangle \\
&\leq \big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\|\big) dis(A(\theta_n(t)), A(\theta_m(t))) \\
&\leq \big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\|\big) |\beta(\theta_n(t)) - \beta(\theta_m(t))| \\
&\leq \big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\|\big) (|\beta(\theta_n(t)) - \beta(t)| + |\beta(\theta_m(t)) - \beta(t)|) \\
&\leq \big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\|\big) (\varepsilon_n + \varepsilon_m).
\end{aligned}$$

D'autre part, par les inégalités (2.137) et (2.154) nous avons

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \dot{v}_m(t) - \dot{v}_n(t), v_m(t) - v_m(\theta_m(t)) - v_n(t) + v_n(\theta_n(t)) \Big\rangle \\
&\leq \big(\|\dot{v}_m(t)\| + \|\dot{v}_n(t)\|\big) \big(\|v_m(t) - v_m(\theta_m(t))\| + \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\|\big) \\
&\leq K\big(\|\dot{v}_m(t)\| + \|\dot{v}_n(t)\|\big) \big(|\theta_n(t) - t| + |\beta(\theta_n(t)) - \beta(t)| + 3\varepsilon_n + \\
&+ |\theta_m(t) - t| + |\beta(\theta_m(t)) - \beta(t)| + 3\varepsilon_m\big) \\
&\leq 4K(\varepsilon_m + \varepsilon_n) \left(\|\dot{v}_m(t)\| + \|\dot{v}_n(t)\|\right) \\
&\leq 4K(\varepsilon_m + \varepsilon_n) \left(1 + \|\dot{v}_m(t)\| + \|\dot{v}_n(t)\|\right).
\end{aligned}$$

Ces deux dernières relations nous donnent

$$\begin{aligned}\Big\langle \dot v_n(t)-\dot v_m(t), v_n(t)-v_m(t)\Big\rangle &= \Big\langle \dot v_m(t)-\dot v_n(t), v_m(t)-v_m(\theta_m(t))-v_n(t)+v_n(\theta_n(t))\Big\rangle\\ &\quad +\Big\langle \dot v_m(t)-\dot v_n(t), v_m(\theta_m(t))-v_n(\theta_n(t))\Big\rangle\\ &\leq (4K+1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)\Big(1+\|\dot v_m(t)\|+\|\dot v_n(t)\|\Big). \qquad (2.159)\end{aligned}$$

Comme $v_n(0)=v_m(0)$ et

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|v_n(t)-v_m(t)\|^2\Big)=\Big\langle v_n(t)-v_m(t), \dot v_n(t)-\dot v_m(t)\Big\rangle, \quad p.p.$$

alors,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|v_n(t)-v_m(t)\|^2 &= \int_0^t \Big\langle v_n(s)-v_m(s), \dot v_n(s)-\dot v_m(s)\Big\rangle ds\\ &\leq (4K+1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)\big(T+\|\dot v_n\|_{L^1}+\|\dot v_m\|_{L^1}\big),\end{aligned}$$

En prenant en compte l'inégalité (2.156), on obtient

$$\|v_n(\cdot)-v_m(\cdot)\|^2_{\mathrm{C}} \leq 2(4K+1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)\big(T+2K(T+\beta(T)\big). \qquad (2.160)$$

Il est clair que le côté droit de cette dernière inégalité tend vers 0 lorsque n, m tendent vers $+\infty$. Par conséquent, $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{C}(I,H)$. Donc, $(v_n)_n$ converge uniformément et fortement vers une fonction absolument continue, qui d'après (2.155), n'est autre que la fonction absolument continue u, i.e.,

$$\|v_n(\cdot)-u(\cdot)\|_{\mathrm{C}} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty$$

par (2.153), nous avons aussi

$$\|u_n(t)-u(t)\| \to 0, \quad \text{uniformement sur } I.$$

Etape 3. Existence de solution.

Nous allons prouver dans cette étape que u est une solution à notre problème $\big(\mathrm{P}\big)$. Premièrement, prouvons que $u(t)\in D(A(t))$ pour tout $t\in I$. En effet, par (2.138) et la propriété (i) dans Proposition 1.8.17 nous avons $u_n(t)\in D(A(\varphi_n(t)))$ pour tout $t\in I$, où $\varphi_n : I\to I$ est définie par $\varphi_n(t)=t_i^n$ dans $[t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $\varphi_n(T)=T$. D'autre part, par l'hypothèse $(H1)'$ et l'estimation (2.137), pour tout $t\in I$

$$dis(A(\varphi_n(t)), A(t)) \leq \varepsilon_n, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Par conséquent, en fixant $t \in I$, on obtient $A_n \to A$ par rapport à $dis(\cdot,\cdot)$, où $A_n = A(\varphi_n(t))$ et $A = A(t)$.

$$(dis(A_n, A) = dis(A(\varphi_n(t)), A(t)) \leq |\beta(\varphi_n(t)) - \beta(t)| \leq \varepsilon_n)$$

Aussi, la suite $\big(y_n\big) = \Big(A^0(\varphi_n(t), u_n(t))\Big)$ est bornée par l'hypothèse $(H2)'$ et (2.146). En effet,

$$\|A^0(\varphi_n(t), u_n(t))\| \leq \sup_{y \in A(\varphi_n(t))u_n(t)} \|y\| = \|A(\varphi_n(t))u_n(t)\| \leq c(1 + \|u_n(t)\|) \leq c(1+K),$$

alors on peut extraire une sous suite (notée aussi (y_n)) qui converge faiblement vers y, donc on applique le Lemme 1.8.23 à $x_n = u_n(t) \to u(t)$

$$A^0(\varphi_n(t), u_n(t)) \in A(\varphi_n(t))u_n(t) = A_n x_n$$

on obtient

$$u(t) \in D(A) = D(A(t)).$$

Ensuite, nous allons vérifier que l'inclusion dans $\big(\text{P}\big)$ est satisfaite sur un ensemble de complémentaire Lebesgue-négligeable.

Soit $(e_k) \subset H$ une suite dense dans $\overline{B}_H$, et soient $0 \leq s \leq t \leq T$, par (2.142)

$$\langle e_k, -\dot{v}_n(\tau)\rangle \leq \delta^*\big(e_k, A\big(\theta_n(\tau)\big)v_n(\theta_n(\tau)\big), \quad p.p.\ \tau \in I,$$

par intégration,

$$\int_s^t \langle e_k, -\dot{v}_n(\tau)\rangle d\tau \leq \int_s^t \delta^*\big(e_k, A\big(\theta_n(\tau)\big)v_n(\theta_n(\tau)\big)d\tau,$$

on passe à la limite dans cette dernière inégalité et en utilisant l'hypothèse $(H7)$ et la relation (2.158), on obtient via le Lemme de Fatou (Lemme 1.7.13) et la Proposition 1.1.3

$$\begin{aligned}
\int_s^t \langle e_k, -\dot{u}(\tau)\rangle d\tau &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_s^t \delta^*\big(e_k, A\big(\theta_n(\tau)\big)v_n(\theta_n(\tau)\big)d\tau \\
&\leq \int_s^t \limsup_{n\to\infty} \delta^*\big(e_k, A\big(\theta_n(\tau)\big)v_n(\theta_n(\tau)\big)d\tau \\
&\leq \int_s^t \delta^*\big(e_k, A(\tau)u(\tau)\big)d\tau,
\end{aligned}$$

alors, par le théorème de différentiation de Lebesgue (Théorème 1.1.6)

$$\langle e_k, -\dot{u}(t)\rangle \leq \delta^*\big(e_k, A(t)u(t)\big), \quad p.p.$$

comme $A(\tau)u(\tau)$ est convexe fermé, on conclut par Théorème 1.3.10 que $-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) \quad p.p.$

Voici une application aux opérateurs sous-différentiels.

Corollaire 2.3.7.
Soit $g : I \times H \to \mathbb{R}$ une application continue tel que

(i) pour tout $t \in I$, $g_t(\cdot)$ est convexe, (avec $g_t(x) = g(t, x)$ $\forall x \in H$).

(ii) Il existe une constante positive r telle que $|g_t(x) - g_t(y)| \leq r\|x - y\|$, pour tout $(t, x, y) \in I \times H \times H$.

(iii) $dis(\partial g_t, \partial g_s) \leq |\beta(t) - \beta(s)|$ pour tout $t, s \in I$, où β est une application positive absolument continue comme donnée dans le Théorème 2.3.6.

Alors, pour tout $u_0 \in H$ le problème

$$(\widetilde{P}) \begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) & \in \ \partial g_t(u(t)) \quad p.p. \, t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

admet une solution unique absolument continue avec la propriété :

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)) \quad p.p. \, t \in I,$$

pour une constante $K \in]0, \infty[$ dependant de $\|u_0\|, r, T$ et β.

Démonstration
L'idée de la démonstration est d'appliquer le Théorème 2.3.6 sur l'opérateur $A(t) = \partial g_t$. Soit $g_t(x; v)$ la dérivée directionelle généralisée de la fonction convexe Lipschitzienne g_t au point $x \in H$ dans la direction $v \in H$. La fonction $(t, x) \mapsto g_t(x; v)$ est semi-continue supérieurement. Nous avons d'après le Théorème 1.6.4, $g_t(x; v) = \delta^*(v, \partial g_t(x))$, i.e, ∂g_t vérifie l'hypothèse $(H7)$ du Théorème 2.3.6, et d'après l'exemple 1.8.8 et le Théorème 1.6.5, ∂g_t est un opérateur maximal monotone à valeurs convexes faiblement compactes. De plus, nous avons d'après la condition (ii)

$$g_t(x; v) = \limsup_{h \to 0, \delta \to 0^+} \frac{g_t(x + h + \delta v) - g_t(x + h)}{\delta} \leq r\|v\| = \delta^*\big(v, r\overline{B}_H\big),$$

en effet,

$$\begin{aligned} r\|v\| &= r \sup_{x' \in \overline{B}_H} \langle x', v \rangle = \sup_{x' \in \overline{B}_H} \langle rx', v \rangle \\ &= \sup_{y' \in r\overline{B}_H} \langle y', v \rangle \\ &= \delta^*(v, r\overline{B}_H) \end{aligned}$$

i.e,

$$\delta^*(v, \partial g_t(x)) \leq \delta^*\big(v, r\overline{B}_H\big),$$

par conséquent, $\partial g_t(x) \subset r\overline{B}_H$ pour tout $(t,x) \in I \times H$ (voir Proposition 1.5.12), i.e., ∂g_t vérifie l'hypothèse $(H2)'$ du Théorème 2.3.6. Par suite, on peut appliquer le Théorème 2.3.6 avec $A(t) = \partial g_t$, pour conclure que le problème $(\widetilde{P})$ admet une unique solution absolument continue avec la propriété

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1+\dot{\beta}(t)) \quad p.p.\, t \in I,$$

pour une constante $K \in]0,\infty[$, dépendant de $\|u_0\|, r, T$ et β.

Exemple 2.3.8.

Soit pour tout $t \in I$, la fonction $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_t(x) = |x - \beta(t)|,$$

où β est une application positive absolument continue donnée dans le Théorème 2.3.6. Montrons que, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, le problème $(\widetilde{P})$ admet une solution unique absolument continue. En effet, premièrement, montrons que pour tout $t \in I$, $g_t(\cdot)$ est convexe.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, et soit $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |g_t(\lambda x + (1-\lambda)y)| &= |\lambda x + (1-\lambda)y - \beta(t)| \\ &= \big|\lambda x + (1-\lambda)y - \lambda\beta(t) - (1-\lambda)\beta(t)\big| \\ &\leq \lambda|x-\beta(t)| + (1-\lambda)|y-\beta(t)| = \lambda g_t(x) + (1-\lambda)g_t(y). \end{aligned}$$

par conséquent, $g_t(\cdot)$ est convexe.
Ensuite, montrons qu'il existe une constante positive r telle que $|g_t(x) - g_t(y)| \leq r|x-y|$ pour tout $(t,x,y) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$|g_t(x) - g_t(y)| = \big||x-\beta(t)| - |y-\beta(t)|\big| \leq \big|x - \beta(t) - (y - \beta(t))\big| = |x-y|.$$

donc, $g_t(\cdot)$ est Lipschitzienne.
Finalement, reste à montrer qu'il existe une application positive absolument continue $\widetilde{\beta} \in \mathcal{W}^{1,1}(I,\mathbb{R})$ telle que $dis(\partial g_t, \partial g_s) \leq |\widetilde{\beta}(t) - \widetilde{\beta}(s)|$.
Nous avons, pour $t \in I$ et pour $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\partial g_t(x_0) \quad = \quad \Big\{ y \in H, g_t(x) - g_t(x_0) \geq \langle y, x - x_0\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Soient $t, s \in I$, $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$ *et soient* $y \in \partial g_t(x)$, $\bar{y} \in \partial g_t(\bar{x})$, *alors*

$$\begin{aligned}
\langle y - \bar{y}, \bar{x} - x\rangle &= \langle y, \bar{x} - x\rangle + \langle \bar{y}, x - \bar{x}\rangle \\
&\leq g_t(\bar{x}) - g_t(x) + g_s(x) - g_s(\bar{x}) \\
&= |\bar{x} - \beta(t)| - |x - \beta(t)| + |x - \beta(s)| - |\bar{x} - \beta(s)| \\
&\leq |\bar{x} - \beta(s)| + |\beta(t) - \beta(s)| - |x - \beta(t)| + |x - \beta(t)| + |\beta(t) - \beta(s)| - |\bar{x} - \beta(s)| \\
&= 2|\beta(t) - \beta(s)| = |\widetilde{\beta}(t) - \widetilde{\beta}(s)|,
\end{aligned}$$

où, $\widetilde{\beta} = 2\beta \in \mathcal{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$ *(d'après l'hypothèse), et comme* $1 + \|y\| + \|\bar{y}\| \geq 1$, *alors*, $\dfrac{1}{1 + \|y\| + \|\bar{y}\|} \leq 1$, *par suite*

$$\frac{\langle y - \bar{y}, \bar{x} - x\rangle}{1 + \|y\| + \|\bar{y}\|} \leq \langle y - \bar{y}, \bar{x} - x\rangle \leq |\widetilde{\beta}(t) - \widetilde{\beta}(s)|,$$

par conséquent,

$$dis(\partial g_t, \partial g_s) \leq |\widetilde{\beta}(t) - \widetilde{\beta}(s)|.$$

Donc, d'après le Théorème précédent, le problème $\big(\widetilde{P}\big)$ admet une solution unique absolument continue.

2.4 Application à un problème d'évolution avec une perturbation multivoque semi-continue supérieurement

On commence par donner un résultat de compacité pour l'ensemble des solutions du probème

$$(\mathcal{P}_h) \begin{cases} -\dot{u}_h(t) & \in & A(t)u_h(t) + h(t), \;\; p.p.\; t \in I, \\ u_h(0) & = & u_0 \in D\big(A(0)\big), \end{cases}$$

utile pour la suite.

Lemme 2.4.1.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ *un opérateur maximal monotone satisfaisant* $\big(H1\big)'$, $\big(H2\big)$ *et* $\big(H1\big)^*$, *on suppose de plus que* $D(A(t))$ *est boule-compact. Soit* $\Gamma : I \rightrightarrows H$ *une multi-application mesurable intégrablement bornée à valeurs non vides convexes faiblement compactes vérifiant :*

$$\Gamma(t) \subset M(t)\overline{B}_H \quad \forall\, t \in I,$$

où $M \in L^1\big(I,\mathbb{R}\big)$ est une fonction positive. Soit S^1_Γ l'ensemble de toutes les sélections intégrables de Γ. Alors, l'ensemble $\mathcal{X} = \{u_h \;:\; h \in S^1_\Gamma\}$ des solutions absolument continues de l'inclusion

$$-\dot{u}_h(t) \in A(t)u_h(t) + h(t), \ \ p.p.\ t \in I, \quad u_h(0) = u_0 \in D\big(A(0)\big),$$

$h \in S^1_\Gamma$, est compact dans $C\big(I,H\big)$.

Démonstration.

Etape 1. Montrons que $\mathcal{X} = \{u_h \;:\; h \in S^1_\Gamma\}$ est relativement compact dans $C(I,H)$. Pour tout $h \in S^1_\Gamma$, nous avons pour presque tout $t \in I$, $\|h(t)\| \le M(t)$, alors, par le Corollaire 2.3.4, l'ensemble $\mathcal{X} = \{u_h; \quad h \in S^1_\Gamma\}$ est relativement compact et équi-continu dans $C(I,H)$. En effet, on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_h(t)\| &\le \widetilde{K}\big(1 + \dot{\beta}(t) + \|h(t)\|\big) + \|h(t)\| \\ &\le \widetilde{K}\big(1 + \dot{\beta}(t) + M(t)\big) + M(t) =: \xi(t) \end{aligned}$$

avec $\xi \in L^1(I,\mathbb{R})$, par suite

$$\|u_h(t) - u_0\| \ \le \ \int_0^t \xi(\tau)d\tau \le \|\xi(\cdot)\|_{L^1},$$

par conséquent,

$$\|u_h(t)\| \le \|\xi(\cdot)\|_{L^1} + \|u_0\| = \widetilde{M},$$

par suite, $\mathcal{X}(t) \subset \widetilde{M}\overline{B}_H$, et comme $D(A(t))$ est boule compact, et pour tout $t \in I$, $\mathcal{X}(t) \subset D(A(t)) \cap \widetilde{M}\overline{B}_H$, alors $\mathcal{X}(t)$ est relativement compact.

Par ailleurs, pour $0 \le s \le t \le T$

$$\|u_h(t) - u_h(s)\| \ \le \ \int_s^t \xi(\tau)d\tau,$$

comme, $\xi(\cdot) \in L^1\big(I,\mathbb{R}\big)$, donc $\mathcal{X}$ est équi-continu. Par le Théorème d'Arzelà-Ascoli 1.7.7 on conclut que $\mathcal{X}$ est relativement compact.

Etape 2. Montrons que $\mathcal{X}$ est fermé.

Soit $\big(u_{h_n}\big)_n$ une suite de $\mathcal{X}$ convergeant dans $C(I,H)$ vers une application continue u avec $h_n \in S^1_\Gamma$, comme S^1_Γ est faiblement compact, alors on peut extraire une sous suite à $(h_n)_n$ qu'on note aussi $(h_n)_n$, et qui converge faiblement vers $h \in S^1_\Gamma$ dans $L^1\big(I,H\big)$, i.e., pour chaque $\eta \in L^\infty\big(I,H\big)$

$$\lim_{n\to\infty} \big\langle h_n, \eta\big\rangle = \big\langle h, \eta\big\rangle,$$

ou bien,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \big\langle h_n(\tau),\eta(\tau)\big\rangle d\tau = \int_0^T \big\langle h(\tau),\eta(\tau)\big\rangle d\tau,$$

en particulier pour $\eta = \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)e_j$, $(e_j)_j$ une base de H et $t \in [0,T]$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \Big\langle h_n(\tau),\mathbf{1}_{[0,t]}(\tau)e_j\Big\rangle d\tau = \int_0^T \Big\langle h(\tau),\mathbf{1}_{[0,t]}(\tau)e_j\Big\rangle d\tau,$$

par suite,

$$\lim_{n\to\infty}\Big\langle \int_0^t h_n(\tau)d\tau, e_j\Big\rangle = \Big\langle \int_0^t h(\tau)d\tau, e_j\Big\rangle,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t h_n(s)ds = \int_0^t h(s)ds, \quad \forall t\in I.$$

Nous avons aussi $\|\dot{u}_{h_n}(t)\| \leq \xi(t)$, et $\xi \in L^1\big(I,\mathbb{R}\big)$, on peut alors supposer que $\big(\dot{u}_{h_n}\big)$ converge faiblement vers $z \in L^1(I,H)$, avec $\|z(t)\| \leq \xi(t)$, p.p., alors $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t z(s)ds$, pour tout $t \in I$ et $\dot{u} = z$ p.p. Car, nous avons $u_{h_n}(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t \dot{u}_{h_n}(s)ds$. Donc,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_{h_n}(t) &= \lim_{n\to+\infty}\left(u_0 + \int_0^t \dot{u}_{h_n}(s)ds\right)\\
&= u_0 + \lim_{n\to+\infty}\int_0^t \dot{u}_{h_n}(s)ds\\
&= u_0 + \int_0^t z(s)ds = u(t).
\end{aligned}$$

D'autre part, comme $u_{h_n} \in \mathcal{X}$, alors

$$-\dot{u}_{h_n}(t) \in A(t)u_{h_n}(t) + h_n(t), \ \ p.p.\, t\in I,$$

comme $\big(\dot{u}_{h_n} + h_n\big)$ est bornée dans $L^1\big(I,H\big)$, alors on peut supposer que $\big(\dot{u}_{h_n} + h_n\big)$ converge au sens de Komlos vers $\dot{u} + h$ p.p. Alors, il existe un ensemble négligeable N tel que pour $t \in I\backslash N$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \big(\dot{u}_{h_j}(t) + h_j(t)\big) = \dot{u}(t) + h(t).$$

Soit $\eta \in D\big(A(t)\big)$,

$$\begin{aligned}
\big\langle \dot{u}_{h_n}(t) + h_n(t), u(t) - \eta\big\rangle &= \big\langle \dot{u}_{h_n}(t) + h_n(t), u_{h_n}(t) - \eta\big\rangle + \big\langle \dot{u}_{h_n}(t) + h_n(t), u(t) - u_{h_n}(t)\big\rangle\\
&\leq \Big\langle A^0(t,\eta), \eta - u_{h_n}(t)\Big\rangle + (\xi(t) + M(t))\|u(t) - u_{h_n}(t)\| \ \ p.p.
\end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \dot{u}_{h_j}(t)+h_j(t),u(t)-\eta\rangle\\
\leq\;& \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\langle A^0(t,\eta),\eta-u_{h_j}(t)\Big\rangle+(\xi(t)+M(t))\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|u(t)-u_{h_j}(t)\|\Big)\\
\leq\;& \langle A^0(t,\eta),\eta-u(t)\Big\rangle+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\langle A^0(t,\eta),u(t)-u_{h_j}(t)\Big\rangle+(\xi(t)+M(t))\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|u(t)-u_{h_j}(t)\|\Big)\\
\leq\;& \Big\langle A^0(t,\eta),\eta-u(t)\Big\rangle+\|A^0(t,\eta)\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|u(t)-u_{h_j}(t)\|+(\xi(t)+M(t))\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|u(t)-u_{h_j}(t)\|\Big)
\end{aligned}$$

lorsque $n\to+\infty$ on obtient

$$\Big\langle \dot{u}(t)+h(t),u(t)-\eta\Big\rangle\leq\Big\langle A^0(t,\eta),\eta-u(t)\Big\rangle \;\; p.p.$$

comme $A^0(t,\eta)$ est une section principale (Proposition 1.8.20), nous avons $u(t)\in D\big(A(t)\big)$ et

$$-\dot{u}(t)\in A(t)u(t)+h(t)\quad p.p.\;\text{ et }\; u(0)=u_0\in D(A(0)),$$

c-à-d, $u=u_h\in\mathcal{X}$, par conséquent $\mathcal{X}$ est fermé, donc on conclut, comme $\mathcal{X}$ est relativement compact et fermé dans $C(I,H)$, qu'il est compact dans $C(I,H)$. ∎

Théorème 2.4.2.
Soit pour tout $t\in I$, $A(t):D(A(t))\subset H\rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H1)'$, $(H2)$ et $(H1)^*$ et tel que $D(A(t))$ est boule-compact pour tout $t\in I$. Soit $\Gamma:I\rightrightarrows H$ une multi-application mesurable intégrablement bornée à valeurs convexes faiblement compactes et satisfait

$$\Gamma(t)\subset m(t)\overline{B}_H\quad\text{pour tout}\quad t\in I,$$

où $m\in L^1(I,\mathbb{R})$ est une fonction positive. Soit $F:I\times H\rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes faiblement compactes vérifiant les hypothèses suivantes :

1. *F est scalairement $\mathcal{L}(I)\otimes\mathcal{B}(H)$-mesurable, i.e, pour tout $e\in H$, la fonction d'appui $\delta^*(e,F(\cdot,\cdot))$ est $\mathcal{L}(I)\otimes\mathcal{B}(H)$-mesurable.*
2. *Pour tout $t\in I$, $F(t,\cdot)$ est scalairement semi-continue supérieurement sur H, i.e, pour tout $e\in H$, la fonction d'appui $\delta^*(e,F(t,\cdot))$ est semi-continue supérieurement sur H,*
3. *$F(t,x)\subset\Gamma(t)$, pour tout $(t,x)\in I\times H$.*

Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$, l'ensemble des solutions absolument continues de l'inclusion

$$(P_F)\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & A(t)u(t) + F(t,u(t)), \;\; p.p\; t \in I \\ u(0) & = & u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

est non vide et compact dans $C(I,H)$.

Démonstration.

Etape 1. Montrons que l'ensemble des solutions du problème (P_F) est non vide.
On définit la multi-application $\Phi : S^1_\Gamma \rightrightarrows L^1(I,H)$ par

$$\Phi(h) = \big\{g \in L^1(I,H) : \; g(t) \in F(t,u_h(t)), \; p.p.\; t \in I\big\},$$

où u_h est la solution unique absolument continue de l'inclusion

$$(P_h)\begin{cases} -\dot{u}_h(t) & \in & A(t)u_h(t) + h(t), \;\; p.p. \;\; t \in I \\ u_h(0) & = & u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

Par (1) et (3) il est clair que $\Phi(h)$ est non-vide avec $\Phi(h) \subset S^1_\Gamma$. En effet, soit $h \in S^1_\Gamma$, et soit u_h la solution unique de (P_h), alors pour $t \in I$ $F(t,u_h(t))$ est fermé non vide, car d'après l'hypothèse, F est à valeurs convexes faiblement compactes, et d'après l'hypothèse (1), la Proposition 1.5.17 et le Théorème 1.5.19 $F(\cdot,u_h(\cdot))$ est mesurable, donc, d'après la Proposition 1.5.18 $F(\cdot,u_h(\cdot))$ admet une selection mesurable, il existe $g \in L^1(I,H)$ tel qe $g(t) \in F(t,u_h(t))$ p.p. $t \in I$, c'est-à-dire, $\Phi(h)$ est non-vide. Il est clair que, si h est un point fixe de Φ $(h \in \Phi(h))$, alors u_h est une solution absolument continue de $\big(P_F\big)$.
Montrons que $\Phi : S^1_\Gamma \rightrightarrows S^1_\Gamma$ est une multi-application s.c.s à valeurs convexes faiblement compactes. Premièrement, montrons la convexité. Soit $h \in S^1_\Gamma$, et soient $g_1, g_2 \in \Phi(h)$, $\lambda \in [0,1]$

$$g_1, g_2 \in \Phi(h) \iff g_1(t) \in F(t,u_h(t)), \quad g_2(t) \in F(t,u_h(t)) \quad p.p. \;\; t \in I.$$

Comme $F(t,u_h(t))$ est convexe, alors

$$\lambda g_1(t) + (1-\lambda)g_2(t) \in F(t,u_h(t)), \quad p.p. \;\; t \in I,$$

et comme $\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2 \in L^1(I,H)$, alors, $\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2 \in \Phi(h)$. Par conséquent, $\Phi(h)$ est convexe. Puis, soit $h \in S^1_\Gamma$, montrons que $\Phi(h)$ est faiblement compact. Soit $(g_n)_n \subset \Phi(h)$, alors,

$$g_n(t) \in F(t,u_h(t)) \quad p.p.\, t \in I, \; \forall n \in \mathbb{N},$$

par l'hypothèse (3)

$$\|g_n(t)\| \leq m(t), \quad p.p.\, t \in I,$$

ou bien

$$\frac{\|g_n(t)\|}{m(t)} \leq 1, \quad p.p.\ t \in I.$$

On pose, $\psi_n(t) = \dfrac{g_n(t)}{m(t)}$, ceci donne $\|\psi_n(t)\| \leq 1$, c-à-d, $(\psi_n)_n \subset \overline{B}_{L^\infty}$ qui est faiblement* compact dans $L^\infty(I, H)$ (voir le Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki 1.7.8), donc de $(\psi_n)_n$ on peut extraire une sous suite, (notée aussi $(\psi_n)_n$), convergeant faiblement* vers un élément ψ, c'est-à-dire, pour tout $z \in L^1(I, H)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \Big\langle \psi_n(\tau), y(\tau) \Big\rangle d\tau \to \int_0^T \Big\langle \psi(\tau), z(\tau) \Big\rangle d\tau.$$

Soit $y \in L^\infty(I, H)$, alors $m(\cdot)y(\cdot) \in L^1(I, H)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^T \Big\langle g_n(\tau), z(\tau) \Big\rangle d\tau &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \Big\langle \psi_n(\tau)m(\tau), y(\tau) \Big\rangle d\tau \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \Big\langle \psi_n(\tau), m(\tau)y(\tau) \Big\rangle d\tau \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \Big\langle \psi(\tau), m(\tau)y(\tau) \Big\rangle d\tau \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \Big\langle \psi(\tau)m(\tau), y(\tau) \Big\rangle d\tau.
\end{aligned}$$

On pose $g(\cdot) = \psi(\cdot)m(\cdot)$, la suite (g_n) converge faiblement vers $g \in L^1(I, H)$, et comme $g_n(t) \in F(t, u_h(t))$, p.p. $t \in I$.

$$\Big\langle \mathbf{1}_E(t)x, g_n(t) \Big\rangle \leq \delta^*\big(\mathbf{1}_E(t)x, F(t, u_h(t))), \quad p.p.\ t \in I,$$

pour chaque $E \in \mathcal{L}(I)$ et pour tout $x \in H$. Par suite, par intégration

$$\int_E \langle x, g_n(t) \rangle dt \leq \int_E \delta^*(x, F(t, u_h(t)))dt$$

par suite,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \langle x, g_n(t) \rangle dt = \int_E \langle x, g(t) \rangle dt \leq \int_E \delta^*(x, F(t, u_h(t)))dt,$$

pour tout $E \in \mathcal{L}(I)$. Par conséquent

$$\langle x, g(t) \rangle \leq \delta^*(x, F(t, u_h(t))) \quad p.p.,$$

par la Proposition 1.5.12) on obtient $g(t) \in F(t, u_h(t))$ p.p. Ceci montre que $g \in \Phi(h)$, c-à-d, $\Phi(h)$ est faiblement compact.

Ensuite, montrons que Φ est faiblement semi-continue supérieurement.
Comme S^1_Γ est faiblement compact, pour montrer que Φ est faiblement semi-continue supérieurement, il suffit de montrer que le graphe de Φ est séquentiellement faiblement fermé.
Pour cela, soit $(h_n, g_n) \subset gph(\Phi)$ tel que $(h_n)_n$ et $(g_n)_n$ converge faiblement vers $h, g \in S^1_\Gamma$ respectivement. Par définition, $g_n \in \Phi(h_n)$, c-à-d,

$$g_n(t) \in F(t, u_{h_n}(t)) \quad p.p.\, t \in I,$$

avec u_{h_n} est l'unique solution de (P_{h_n}). Par le Lemme 2.4.1 l'ensemble $\mathcal{X} = \{u_{h_n}; \quad n \in \mathbb{N}\}$ des solutions des problèmes (P_{h_n}) est compact, alors la suite $(u_{h_n})_n \subset \mathcal{X}$ converge uniformément vers $u_h \in \mathcal{X}$. D'autre part, comme $g_n(t) \in F(t, u_{h_n}(t))$,

$$\Big\langle \mathbf{1}_E(t)x, g_n(t) \Big\rangle \leq \delta^*\big(\mathbf{1}_E(t)x, F(t, u_{h_n}(t))\big), \quad p.p.\ t \in I,$$

pour chaque $E \in \mathcal{L}(I)$ et pour tout $x \in H$. Par conséquent, par intégration

$$\int_E \langle x, g_n(t)\rangle dt \leq \int_E \delta^*(x, F(t, u_{h_n}(t)))dt$$

par suite, (en utilisant l'hypothèse (2))

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_E \langle x, g_n(t)\rangle dt &= \int_E \langle x, g(t)\rangle dt \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \int_E \delta^*(x, F(t, u_{h_n}(t)))dt \\
&\leq \int_E \limsup_{n\to\infty} \delta^*(x, F(t, u_{h_n}(t)))dt \\
&= \int_E \delta^*(x, F(t, u_h(t)))dt
\end{aligned}$$

pour tout $E \in \mathcal{L}(I)$. Par conséquent

$$\langle x, g(t)\rangle \leq \delta^*(x, F(t, u_h(t))) \quad p.p.$$

Par la Proposition 1.5.12 on obtient $g(t) \in F(t, u_h(t))$ p.p., i.e., $gph(\Phi)$ est séquensiellement faiblement fermé, par conséquent Φ est faiblement semi-continue supérieurement.
Donc, on applique le Théorème de Kakutani-ky Fan sur la multi-application Φ à valeurs convexes faiblement compacts, on conclut que Φ admet un point fixe, c'est-à-dire, il existe $h \in S^1_\Gamma$ tel que $h \in \Phi(h)$, ceci montre l'existence d'au moins une solution absolument continue pour l'inclusion (P_F).

Etape 2. Montrons que l'ensemble des solutions du problème (P_F) est compact.
Soit (u_{g_n}) une suite des solutions du problème $\big(P_F\big)$, c'est-à-dire,

$$(P_{g_n})\begin{cases} -\dot{u}_{g_n}(t) & \in & A(t)u_{g_n}(t) + g_n(t), \quad p.p.\, t \in I, \\ u_{g_n}(0) & = & u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

et

$$g_n(t) \in F(t, u_{g_n}(t)), \quad p.p.\, t \in I,$$

Par suite,

$$\|g_n(t)\| \leq m(t), \quad p.p.\ t \in I,$$

en répétant les mêmes arguments dans la preuve de l'étape 1, on conclut que $(g_n)_n$ converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $g \in L^1(I, H)$. Par ailleurs, $(u_{g_n})_n \subset \mathcal{X}$ qui est compact dans $C(I, H)$, alors, on peut extraire une sous suite, notée aussi (u_{g_n}), qui converge vers $u_g \in \mathcal{X}$, $g \in S^1_\Gamma$, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} -\dot{u}_g(t) & \in & A(t)u_g(t) + g(t), \quad p.p.\, t \in I, \\ u_g(0) & = & u_0. \end{cases}$$

et comme pour presque tout $t \in I$, $g_n(t) \in F(t, u_{g_n}(t))$, on conclut, comme l'étape 1 que

$$g(t) \in F(t, u_g(t)), \quad p.p.\, t \in I.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inclusion $\big(P_F\big)$ est compact. Ceci termine la preuve du théorème. ■

Lorsque la perturbation F est le sous-différentiel d'une fonction Lipschitzienne, on obtient

Corollaire 2.4.3.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H1)'$, $(H2)$, $(H1)^*$ et tel que $D(A(t))$ est boule-compact pour tout $t \in I$. Soit $\varphi : I \times H \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant :

1. *pour tout $x \in H$, $\varphi(\cdot, x)$ est mesurable*
2. *$|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)| \leq \psi(t)\|x - y\|$, $\forall (t, x, y) \in I \times H \times H$, pour une fonction positive $\psi \in L^1(I, \mathbb{R})$.*

Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$ l'ensemble des solutions absolument continues de l'inclusion

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & A(t)u(t) + \partial\varphi(t, u(t)), \quad p.p.\, t \in I, \\ u(0) & = & u_0 \in D(A(0)), \end{cases}$$

est non-vide et compact dans $C(I, H)$.

Démonstration

Il est connu d'après la Proposition 1.6.6 et le Théorème 1.6.5 que pour tout $t \in I$, $\partial\varphi_t$ est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs convexes faiblement compactes et que $\partial\varphi(t,x) \subset \psi(t)\overline{B}_H$ pour tout $(t,x) \in I \times H$. En effet, soit $v \in H$, nous avons

$$\begin{aligned} \delta^*(v, \partial\varphi(t,x)) &= \varphi_t'(x;v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \lambda^{-1}\big[\varphi_t(x+h+\lambda v) - \varphi_t(x+h)\big] \\ &\leq \psi(t)\|v\| = \delta^*(v, \psi(t)\overline{B}_H) \end{aligned}$$

donc, nous avons d'après la Proposition 1.5.12

$$\partial\varphi(t,x) \subset \psi(t)\overline{B}_H.$$

De plus, par la Proposition 1.6.2, pour toute application mesurable $u : I \to H$, la multi-application $t \mapsto \partial\varphi(t, u(t))$ est scalairement mesurable. Alors, on applique le Théorème 2.4.2 en prenant $F(t,x) = \partial\varphi(t,x)$. Ceci termine notre preuve. ■

Chapitre 3

Existence de solutions pour une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone et avec perturbation multivoque

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est l'étude de l'existence de solutions pour le problème régis par un opérateur maximal monotone et avec somme de deux perturbations dont l'une est une application multivoque semi-continue supérieurement à valeurs conevexes faiblement compactes.

Dans la première section, on s'intéresse au problème

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) & \in & A(t)u(t) + F(t, u(t)) + f(t, u(t)) \ \ \mathrm{dr} - \text{p.p.} \quad t \in I, \\ u(0) & = & u_0. \end{cases} \tag{$P_{F,f}$}$$

Notre étude est menée dans un espace de Hilbert séparable H, avec $f : I \times H \to H$ une application séparément mesurable sur I, et séparément Lipschitzienne sur H, tandis que $F : I \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application scalairement semi continue supérieurement à valeurs convexes faiblement compactes. Pour tout $t \in I$, $A(t)$ est un opérateur maximal monotone. La dépendance $t \mapsto A(t)$ est à variation bornée, au sens qu'il existe une fonction $r : I \to [0, \infty[$ $(r(T) < \infty)$ continue sur I et croissante tel que

$$dis(A(t), A(s)) \leq dr([s, t]) = r(t) - r(s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{3.1}$$

Dans un cas particulier, l'existence de solutions Lipschitziennes de l'inclusion $(P_{F,f})$ est considérée dans la $2^{\text{ème}}$ section, en supposant que $t \mapsto A(t)$ est Lipschitzienne au sens qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que

$$dis(A(t), A(s)) \leq \alpha |t - s|, \quad \forall\, s, t \in I. \tag{3.2}$$

En fin, dans la $3^{\text{ème}}$ section, nous traitons l'existence de solutions absolument continues pour le problème $(P_{F,f})$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) & \in & A(t)u(t) + F(t, u(t)) + f(t, u(t)) \ \ \mathrm{dt} - \text{p.p.} \qquad t \in I \\ u(0) & = & u_0. \end{cases}$$

Nos résultats de la $1^{\text{ère}}$ section sont établis sous les hypothèses suivantes.

H1) Il existe une fonction $r : I \to [0, +\infty[$ $(r(0) = 0)$ continue sur I et croissante tel que

$$dis(A(t), A(s)) \leq dr([s,t]) = r(t) - r(s), \;\; \forall\, 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{3.3}$$

H2) Il existe une constante positive c tel que

$$\|A^0(t,x)\| \leq c(1 + \|x\|) \quad t \in I, \;\; x \in D(A(t)). \tag{3.4}$$

(i) Pour tout $t \in I$, $F(t, \cdot)$ est scalairement semi-continue supérieurement sur H, c'est-à-dire, pour tout $t \in I$ et pour chaque $e \in H$, l'application d'appui $\delta^*(e, F(t,\cdot))$ est semi continue supérieurement (s.c.s) sur H.

(ii) F est scalairement $(\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H))$-mesurable, c'est-à-dire, pour chaque $e \in H$, l'application d'appui $\delta^*(e, F(\cdot,\cdot))$ est $(\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H))$-mesurable.

(a_1) Pour tout $\mathrm{R} > 0$, il existe une fonction réelle positive $\alpha_{\mathrm{R}}(\cdot)$ dr-intégrable tel que pour tout $t \in I$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \alpha_R(t)\|x - y\| \quad \forall\, x, y \in \overline{B}(0,R). \tag{3.5}$$

(a_2) Il existe une constante positive M telle que

$$\|f(t,x)\| \leq M(1 + \|x\|) \quad \text{pour} \;\; t \in I, \, x \in H. \tag{3.6}$$

3.2 Solutions continues à variation bornée

Théorème 3.2.1. *Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone vérifiant les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$. Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et faiblement compactes vérifiant les hypothèses (i) et (ii) De plus, supposons que F satisfait la condition suivante*

$$Proj_{F(t,x)}(0) \subset (1 + \|x\|)C, \quad \forall (t,x) \in I \times H, \tag{3.7}$$

où C est un sous ensemble compact de H.
Soit $f : I \times H \to H$ une application telle que pour tout $x \in H$ $f(\cdot, x)$ est mesurable et satifait (a_1) et (a_2). Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$ le problème

$$\left(P_{F,f}\right) \begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) & \in \;\; A(t)u(t) + F(t,u(t)) + f(t,u(t)) \;\; \mathrm{dr-p.p.} \qquad t \in I, \\ u(0) & = \;\; u_0, \end{cases}$$

admet une solution continue à variation bornée. De plus, cette solution u vérifie

$$\|u(t)\| \leq K, \qquad \|u(t) - u(\tau)\| \leq K|r(t) - r(\tau)| \quad (\forall t, \tau \in I),$$

pour une constante $K := K(\|u_0\|, M, c, C, dr(I))$.

Démonstration.

Grâce la compacité de C, on peut supposer qu'il existe un nombre réel positif L, tel que $C \subset L\overline{B}_H$. De plus, on suppose sans perte de généralité, que C est convexe et contient 0, quitte à le remplacer par $\overline{co}(C \cup \{0\})$ qui est compact.
On choisit une suite quelconque $(\varepsilon_n)_n \subset]0, 1]$ qui décroit vers 0, et une suite de partition, $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n = T$ de I, tel que

$$|t_{i+1}^n - t_i^n| \leq \varepsilon_n, \text{ pour i} = 0, \ldots, \text{k}_\text{n} - 1. \tag{3.8}$$

On pose

$$\lambda_{i+1}^n := dr([t_i^n, t_{i+1}^n]) = dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]) = r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n), \text{ pour i} = 0, \ldots, \text{k}_\text{n} - 1.$$

On prend $\lambda_n := \max\{\lambda_i^n : i = 0, \ldots, k_n\}$. Par la continuité de r sur I, (λ_n) converge vers 0 et alors

$$\lambda_{i+1}^n := dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]) \leq \lambda_n \to 0. \tag{3.9}$$

Etape 1. Algorithme

On définit l'application $m : I \times H \to H$ par $m(t, x) = Proj_{F(t,x)}(0)$, i.e., $m(t, x)$ est l'élément de norme minimale de $F(t, x)$. Alors, par (3.7)

$$m(t, x) \in F(t, x) \quad \text{et} \quad \|m(t, x)\| \leq (1 + \|x\|)L \quad \text{pour tout} \ \ (t, x) \in I \times H. \tag{3.10}$$

De plus, pour tout $x \in H$, l'application $t \mapsto m(t, x)$ est $\mathcal{L}(I)$-mesurable (voir Théorème 1.5.15).
Maintenant, nous allons définir une suite d'applications en escalier continues à droite $u_n : I \to H$ par

$$u_n(t) = u_0^n = u_0, \ \text{pour } t \in [0, t_1^n[$$

et

$$u_n(t) = u_i^n, \ \ t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \ i = 1, \ldots, k_n - 1, \quad u_n(T) = u_{k_n}^n, \tag{3.11}$$

où pour $i = 0, \ldots, k_n - 1$

$$\begin{aligned} u_{i+1}^n &= J_{i+1}^n \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (f(s, u_i^n) + m(s, u_i^n)) dr(s) \right) \\ &= (I_H + \lambda_{i+1}^n A(t_{i+1}^n))^{-1} \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (f(s, u_i^n) + m(s, u_i^n)) dr(s) \right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Si $\lambda_{i+1}^n > 0$, par la définition de la résolvante

$$u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (f(s, u_i^n) + m(s, u_i^n))dr(s) \in u_{i+1}^n + \lambda_{i+1}^n A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n,$$

d'où

$$-\frac{u_{i+1}^n - \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n))dr(s)\right)}{\lambda_{i+1}^n} \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n. \tag{3.13}$$

Observons aussi, que par la Proposition 1.8.17, $u_{i+1}^n \in D(A(t_{i+1}^n))$.
Si $\lambda_{i+1}^n = 0$, l'intégrale dans (3.12) est égale à zéro, et alors $u_{i+1}^n = u_i^n$.
Comme $dis(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n)) \leq 0$ alors $A(t_{i+1}^n) = A(t_i^n)$ (voir le Lemme 1.8.22), si on suppose (par induction) que $u_i^n \in D(A(t_i^n))$, alors encore $u_{i+1}^n \in D(A(t_i^n)) = D(A(t_{i+1}^n))$. Nous résumons cela par

$$u_n(t) = u_i^n \in D(A(t_i^n)) \ \text{ pour } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[. \tag{3.14}$$

Etape 2. Estimations et propiétés.

Premièrement, on va prouver que la suite des applications en escalier $\big(u_n\big)_n$ est uniformément bornée en norme et en variation. Pour cela, en utilisant les propriétés (a) et (b) du Lemme 1.8.24, les hypothèses $(H1)$, $(H2)$, (a_2), la relation (3.12) et le coté droit de l'inégalité (3.10) nous avons pour $0 \leq i \leq k_n - 1$,

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \left\| J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(f(s,u_i^n)+m(s,u_i^n))dr(s)\right) - J_{i+1}^n(u_i^n) + J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n \right\| \\
&\leq \left\| J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(f(s,u_i^n)+m(s,u_i^n))dr(s)\right) - J_{i+1}^n(u_i^n) \right\| + \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\leq \left\| u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(f(s,u_i^n)+m(s,u_i^n))dr(s) - u_i^n \right\| + \lambda_{i+1}^n\|A^0(t_i^n,u_i^n)\| \\
&+ dis(A(t_i^n),A(t_{i+1}^n)) + \sqrt{\lambda_{i+1}^n(1+\|A^0(t_i^n,u_i^n)\|)dis(A(t_i^n),A(t_{i+1}^n))} \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(\|f(s,u_i^n)\| + \|m(s,u_i^n)\|)\,dr(s) + \lambda_{i+1}^n\|A^0(t_i^n,u_i^n)\| + \lambda_{i+1}^n \\
&+ \sqrt{(\lambda_{i+1}^n)^2(1+\|A^0(t_i^n,u_i^n)\|)} \\
&\leq \Big(M(1+\|u_i^n\|) + L(1+\|u_i^n\|)\Big)\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} dr(s) + c(1+\|u_i^n\|)\lambda_{i+1}^n \\
&+ \lambda_{i+1}^n + \lambda_{i+1}^n\sqrt{(1+c(1+\|u_i^n\|))} \\
&\leq \left[M(1+\|u_i^n\|) + L(1+\|u_i^n\|) + c(1+\|u_i^n\|) + 1 + \sqrt{(1+c(1+\|u_i^n\|))}\right]\lambda_{i+1}^n \\
&\leq \big[(M+L)(1+\|u_i^n\|) + 2(1+c(1+\|u_i^n\|))\big]\lambda_{i+1}^n \\
&\leq \big[M+L+2(1+c)+(M+L+2c)\|u_i^n\|\big]\lambda_{i+1}^n. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| \\
&\leq \big[M+L+2(1+c)+(M+L+2c)\|u_i^n\|)\big]\lambda_{i+1}^n + \|u_i^n\| \\
&\leq \big(1+(M+L+2c)\lambda_{i+1}^n\big)\|u_i^n\| + \big(M+L+2(1+c)\big)\lambda_{i+1}^n
\end{aligned}$$

Il résulte, par le Lemme 1.7.21, pour $n \in \mathbb{N}$ et $i = 0, \ldots, k_n$,

$$\|u_i^n\| \leq \left(\|u_0\| + (M+L+2(1+c))\sum_{k=0}^{i-1}\lambda_{k+1}^n\right)\exp\left((M+L+2c)\sum_{k=0}^{i-1}\lambda_{k+1}^n\right).$$

Comme $\sum_{k=0}^{i-1}\lambda_{k+1}^n = dr(]0,t_i^n]) \leq dr(]0,T])$, on aura

$$\|u_i^n\| \leq (\|u_0\| + [(M+L+2(1+c))]\,dr(]0,T]))\exp\left((M+L+2c)dr(]0,T])\right) =: K_1.$$

D'où, pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\|u_n(t)\| = \|u_i^n\| \leq K_1. \qquad (3.16)$$

En remplaçant dans (3.15), on obtient

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq [(M+L+2(1+c)) + (M+L+2c)K_1))]\,\lambda_{i+1}^n = K_2 dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]). \quad (3.17)$$

Posons $K = \max\{K_1, K_2\}$, on peut alors écrire

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in H} \|u_n(t)\| \leq K. \quad (3.18)$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} var(u_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k_n-1} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \right) \leq K dr(]0,T]). \quad (3.19)$$

Donc la suite (u_n) est uniformément bornée en norme et en variation.
D'autre part, si on fixe $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n[$ avec $j > i$. Alors par (3.17)

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_n(s)\| &= \|u_j^n - u_i^n\| \\
&\leq \|u_j^n - u_{j-1}^n\| + \cdots + \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{j-i-1} \|u_{i+k+1}^n - u_{i+k}^n\| \\
&\leq K \sum_{k=0}^{j-i-1} dr(]t_{i+k}^n, t_{i+k+1}^n]) \\
&\leq K dr(]t_i^n, t_j^n]) \\
&\leq K(dr(]t_i^n, s] + dr(]s,t]) + dr(]t, t_j^n])) \\
&\leq K(dr(]t_i^n, s] + dr(]s,t])) \\
&\leq K(dr(]s,t]) + dr(]t_i^n, t_{i+1}^n[) + dr(]t_{i+1}^n, s]) \\
&\leq K(dr(]s,t]) + dr(]t_i^n, t_{i+1}^n[)) \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

en particulier, comme $dr(]t_i^n, t_{i+1}^n[) \leq \lambda_n$, on obtient

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K(dr(]s,t]) + \lambda_n). \quad (3.21)$$

Comme la suite (u_n) est uniformément bornée en norme et en variation, on peut supposer grâce au Théorème 1.2.6, qu'il existe une application $u : I \to H$ à variation bornée telle que $(u_n(t))$ converge faiblement vers $u(t)$ pour tout $t \in I$. En particulier, $u(0) = u_0$.
En effet, $(u_n(t))$ converge faiblement vers $u(t)$ pour tout $t \in I$, i.e., pour tout $x \in H$

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n(t) - u(t), x \rangle = 0,$$

en particulier, pour $t = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle u_n(0) - u(0), x \rangle = 0,$$

i.e.,

$$\langle u_0 - u(0), x \rangle = 0,$$

pour $x = u_0 - u(0)$, on obtient $u(0) = u_0$. De plus, en prenant $\liminf_{n\to\infty}$ dans (3.21) on obtient

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K dr(]s,t]) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{3.22}$$

Par conséquent, u est continue sur I car r est continue. De plus, $\|du\| \leq K dr$. On note u' la densité de u par rapport à dr, i.e., $u' = \dfrac{du}{dr}$. Comme u' est bornée par K, en particulier $u' \in L^2(I, \mathrm{H}; dr)$. Aussi, il est utile de considérer les applications continues à variation bornée $v_n : I \to H$ obtenues à partir des applications en escalier u_n comme suit

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \frac{r(t) - r(t_i^n)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(f(s, u_i^n) + m(s, u_i^n)\big) dr(s) \right) \\ &+ u_i^n - \int_{t_i^n}^{t} \big(f(s, u_i^n) + m(s, u_i^n)\big) dr(s) \end{aligned}$$

pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $v_n(T) = u_{k_n}^n$. Si $\lambda_{i+1}^n = 0$, on utilise la convention $\dfrac{0}{0} = 0$, i.e., $v_n(t) = u_i^n = u_{i+1}^n$ sur $[t_i^n, t_{i+1}^n[$. Il est clair que $v_n(0) = u_0$ et que $v_n(t_i^n) = u_i^n$. De plus, par (3.6), (3.9), (3.10), (3.17) et (3.18), nous avons pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - u_n(t)\| &= \left\| \frac{r(t) - r(t_i^n)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (f(s, u_i^n) + m(s, u_i^n)) dr(s) \right) \right. \\ &- \left. \int_{t_i^n}^{t} (f(s, u_i^n) + m(s, u_i^n)) dr(s) \right\| \\ &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2 \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(\|f(s, u_i^n)\| + \|m(s, u_i^n)\| \big) dr(s) \\ &\leq (r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n))K + 2M(1 + \|u_i^n\|)\lambda_{i+1}^n + 2L(1 + \|u_i^n\|)\lambda_{i+1}^n \\ &\leq \lambda_{i+1}^n K + 2M(1+K)\lambda_{i+1}^n + 2L(1+K)\lambda_{i+1}^n \\ &\leq (K + 2(M+L)(1+K))\lambda_{i+1}^n \\ &\leq \gamma \lambda_n \end{aligned} \tag{3.23}$$

où $\gamma := K + 2(M+L)(1+K)$. Par l'inégalité précédente, et comme $(u_n(t))_n$ converge faiblement vers $u(t)$, on conclut que $(v_n(t))_n$ converge faiblement vers $u(t)$ pour tout $t \in I$. En effet, soit $x \in H$, alors par l'estimation (3.23), nous avons pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} \langle v_n(t), x \rangle - \langle u(t), x \rangle &= \langle v_n(t) - u_n(t), x \rangle + \langle u_n(t), x \rangle - \langle u(t), x \rangle \\ &\leq \|v_n(t) - u_n(t)\| \|x\| + \langle u_n(t), x \rangle - \langle u(t), x \rangle \\ &\leq \gamma \lambda_n \|x\| + \langle u_n(t), x \rangle - \langle u(t), x \rangle \end{aligned}$$

donc, lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \langle v_n(t), x\rangle = \langle u(t), x\rangle.$$

De plus, par (3.21) et (3.23) pour $0 \le s \le t \le T$

$$\begin{aligned}
\|v_n(t) - v_n(s)\| &\le \|v_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(s)\| + \|u_n(s) - v_n(s)\| \\
&\le \gamma\lambda_n + K(dr(]s,t[) + \lambda_n) + \gamma\lambda_n \\
&\le K(r(t) - r(s)) + (K + 2\gamma)\lambda_n,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

et pour $t \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons par (3.23) et (3.18)

$$\begin{aligned}
\|v_n(t)\| &\le \|v_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t)\| \\
&\le \gamma\lambda_n + K \\
&\le \gamma + K.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Maintenant, remarquons que $dv_n = v_n' dr$, où la densité v_n' est donnée dr-presque partout par

$$v_n'(t) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n)\big)dr(s)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)} - f(t,u_i^n) - m(t,u_i^n), \quad \forall t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[, \tag{3.26}$$

et $v_n'(0) = 0$. D'où,

$$v_n'(t) + m(t,u_i^n) + f(t,u_i^n) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n))dr(s)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)}, \quad \forall t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[. \tag{3.27}$$

Donc, par (3.6), (3.10), (3.17), et (3.18) on trouve

$$\begin{aligned}
\|v_n'(t) + m(t,u_i^n) + f(t,u_i^n)\| &= \left\| \frac{u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (f(s,u_i^n) + m(t,u_i^n)dr(s)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)} \right\| \\
&\le \frac{1}{\lambda_{i+1}^n}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \frac{1}{\lambda_{i+1}^n} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (\|f(s,u_i^n)\| + \|m(s,u_i^n)\|)dr(s) \\
&\le \frac{1}{\lambda_{i+1}^n} K\lambda_{i+1}^n + M(1 + \|u_i^n\|) + L(1 + \|u_i^n\|) \\
&\le K + M(1+K) + L(1+K)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

on obtient

$$\|v_n'(t)\| \le K + 2M(1+K) + 2L(1+K) = \gamma, \quad dr - p.p, \tag{3.29}$$

i.e., la suite $(v_n'(\cdot))$ est bornée dans $L^2(I,H;dr)$, alors d'après le Théorème 1.7.14, on peut extraire une sous suite (notée aussi (v_n')) qui converge faiblement vers $w \in L^2(I,H;dr)$. Par conséquent, pour $t \in]0,T]$ et $x \in H$

$$\begin{aligned}
\langle x, u(t)-u(0)\rangle &= \lim_{n\to\infty}\Big(\langle x, v_n(t)\rangle - \langle x, v_n(0)\rangle\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big\langle x, dv_n(]0,t])\Big\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big\langle x, \int_{]0,t]} v_n' dr\Big\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_I \langle \mathbf{1}_{]0,t]}x, v_n'\rangle dr \\
&= \int_I \langle \mathbf{1}_{]0,t]}x, w\rangle dr = \Big\langle x, \int_{]0,t]} w dr\Big\rangle
\end{aligned}$$

il résulte que

$$(u'\,dr)\,(]0,t]) = du(]0,t]) = u(t)-u(0) = \int_{]0,t]} w\,dr = (w\,dr)(]0,t])$$

pour $t \in I$. Par conséquent $u' = w \;\; dr - p.p.$ sur I, d'où

$$v_n'(\cdot) \to u'(\cdot) \quad \text{faiblement dans} \;\; L^2(I,H;dr). \tag{3.30}$$

Considérons les fonctions $\theta_n, \varphi_n : I \mapsto I$ définies par

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_{i+1}^n & \text{pour } t \in]t_i^n, t_{i+1}^n], \\ 0 & \text{pour } t = 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} t_i^n & \text{pour } t \in]t_i^n, t_{i+1}^n], \\ 0 & \text{pour } t = 0. \end{cases} \tag{3.32}$$

Alors par (3.13) et (3.27) on peut écrire

$$-v_n'(t) - m(t, v_n(\varphi_n(t))) - f(t, v_n(\varphi_n(t))) \;\; \in \;\; A(\theta_n(t))v_n(\theta_n(t)), \quad dr - p.p.\; t \in I. \tag{3.33}$$

On pose pour tout $t \in I$

$$z_n(t) = m\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big) \in F\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big). \tag{3.34}$$

Alors, par les relations (3.10) et (3.18)

$$\|z_n(t)\| \le L(1 + \|v_n\big(\varphi_n(t)\big)\|) \le L(1+K) =: L_1. \tag{3.35}$$

Comme $dr\big(\{0\}\big) = 0$ et $\lambda_{i+1}^n = 0$ signifie que $dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]) = 0$, alors

$$\max\{|r(\varphi_n(t)) - r(t)|, |r(\theta_n(t)) - r(t)|\} \le |r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)| \le \lambda_n \to 0 \tag{3.36}$$

lorsque $n \to \infty$ pour tout $t \in I$. Par (3.24) et (3.3), il s'ensuit que pour tout $t \in I$ et lorsque $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + dis(A(\theta_n(t)), A(t)) &\leq K|r(\theta_n(t)) - r(t)| + (K+2\gamma)\lambda_n \\ &+ |r(\theta_n(t)) - r(t)| \to 0, \end{aligned} \tag{3.37}$$

et de la même manière

$$\|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\| \to 0. \tag{3.38}$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $Z_n(\cdot) : I \to H$ par

$$Z_n(t) = \int_{]0,t]} z_n(\tau) dr(\tau).$$

Tout d'abord, nous allons prouver que $(Z_n(\cdot))_n$ admet une sous suite qui converge uniformément dans $C(I, H)$. En effet, nous avons d'après l'inégalité (3.34) et l'inclusion (3.7)

$$z_n(t) \in (1 + \|u_n(\varphi_n(t))\|)C \Rightarrow \frac{z_n(t)}{1 + \|u_n(\varphi_n(t))\|} \in C.$$

Comme $1 + \|u_n(\varphi_n(t))\| \leq 1 + K$, et comme C est un convexe contenant 0

$$\frac{1 + \|u_n(\varphi_n(t))\|}{1+K} \cdot \frac{z_n(t)}{1 + \|u_n(\varphi_n(t))\|} + \left(1 - \frac{1 + \|u_n(\varphi_n(t))\|}{1+K}\right) 0 \in C$$

d'où,

$$z_n(t) \in (1+K)C, \quad \forall t \in I, \tag{3.39}$$

par suite,

$$\frac{z_n(t)}{1+K} \in C, \quad \forall t \in I,$$

alors, comme C est convexe fermé, par Théorème 1.3.11, on a

$$\frac{\int_{]0,t]} z_n(\tau) dr(\tau)}{\int_{]0,t]} (1+K) dr(\tau)} \in C \Rightarrow Z_n(t) \in \big((1+K)r(t)\big)C, \quad \forall t \in I,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{Z_n(t)}{(1+K)r(t)} \in C, \quad \forall t \in I. \tag{3.40}$$

D'autre part, $(1+K)r(t) \leq (1+K)r(T)$, c-à-d, $\dfrac{(1+K)r(t)}{(1+K)r(T)} \leq 1$, et comme $0 \in C$, par la convexité de C et la relation (3.40), on obtient

$$\frac{(1+K)r(t)}{(1+K)r(T)} \cdot \frac{Z_n(t)}{(1+K)r(t)} + \left(1 - \frac{(1+K)r(t)}{(1+K)r(T)}\right) 0 \in C,$$

par suite,

$$\frac{Z_n(t)}{(1+K)r(T)} \in C, \quad \forall t \in I,$$

i.e.,

$$Z_n(t) \in (1+K)r(T)C.$$

L'ensemble $(1+K)r(T)C$ étant compact, par conséquent $(Z_n(t))_n$ est relativement compacte. D'autre part, pour tous $t, s \in I$ $(0 \leq s \leq t \leq T)$, par la relation (3.35)

$$\begin{aligned} \|Z_n(t) - Z_n(s)\| &= \left\| \int_{]0,t]} z_n(\tau)dr(\tau) - \int_{]0,s]} z_n(\tau)dr(\tau) \right\| \\ &= \left\| \int_{]s,t]} z_n(\tau)dr(\tau) \right\| \\ &\leq \int_{]s,t]} \|z_n(\tau)\| dr(\tau) \\ &\leq L_1 dr(]s,t]). \end{aligned} \tag{3.41}$$

D'où, d'après le Théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 1.7.7), $(Z_n(\cdot))_n$ admet une sous suite $\big($notée aussi $(Z_n(\cdot))_n\big)$ convergeant uniformément vers une application $Z(\cdot) \in C(I, \mathrm{H})$.
Considérons dans la suite, l'application $h_n(\cdot) = v_n(\cdot) + Z_n(\cdot)$, et observons que, la mesure différentielle dh_n de $h_n(\cdot)$ par rapport à dr est $h'_n = \dfrac{dh_n}{dr} \in L^\infty(I, H; dr)$ avec

$$h'_n(t) = v'_n(t) + z_n(t) \quad dr - p.p.\ t \in I,$$

et par les inégalités (3.29) et (3.35),

$$\|h'_n(t)\| \leq \|v'_n(t)\| + \|z_n(t)\| \leq \gamma + L_1. \tag{3.42}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|h_n\big(\theta_n(t)\big) - h_n(t)\| &= \left\| \int_{]t,\theta_n(t)]} h'_n(s)dr(s) \right\| \\ &\leq \int_{]t,\theta_n(t)]} \|h'_n(s)\|\, dr(s) \\ &\leq \big(\gamma + L_1\big) dr(]t, \theta_n(t)]) \end{aligned} \tag{3.43}$$

Maintenant, pour $t \in I$, on pose $f_n(t) = f\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big)$, et remarquons que par (a_2) et (3.16), nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in I$

$$\|f_n(t)\| \leq M(1 + \|v_n\big(\varphi_n(t)\big)\|) \leq M(1 + K_1) = M_1. \tag{3.44}$$

Donc l'inclusion (3.33) s'écrit

$$-h_n'(t) - f_n(t) \in A(\theta_n(t))\big(h_n(\theta_n(t)) - Z_n(\theta_n(t))\big) \qquad dr - p.p.\ t \in I. \tag{3.45}$$

Dans la suite, on fixe $n, m \in \mathbb{N}$. Grâce à L'inclusion (3.45) et la définition de la distance de Vladimirov $dis(\cdot,\cdot)$, et aux inégalités (3.42), (3.44) et l'hypothèse $(H1)$ on obtient, pour tout $t \in]0, T]$,

$$\begin{aligned}
& \Big\langle -h_n'(t) - f_n(t) + h_m'(t) + f_m(t), h_m\big(\theta_m(t)\big) - Z_m\big(\theta_m(t)\big) - h_n\big(\theta_n(t)\big) + Z_n\big(\theta_n(t)\big)\Big\rangle \\
\leq\ & (1 + \|h_n'(t)\| + \|h_m'(t)\| + \|f_n(t)\| + \|f_m(t)\|)\, dis\big(A\big(\theta_n(t)\big), A\big(\theta_m(t)\big)\big) \\
\leq\ & (1 + 2\gamma + 2L_1 + 2M_1)|r\big(\theta_n(t)\big) - r\big(\theta_m(t)\big)| \\
\leq\ & (1 + 2(\gamma + L_1 + M_1))(|r\big(\theta_n(t)\big) - r(t)| + |r\big(\theta_m(t)\big) - r(t)|) \\
\leq\ & (1 + 2(\gamma + L_1 + M_1))(\lambda_n + \lambda_m) =: M'(\lambda_n + \lambda_m).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& \Big\langle h_n\big(\theta_n(t)\big) - h_m\big(\theta_m(t)\big), h_n'(t) - h_m'(t)\Big\rangle \\
\leq\ & M'(\lambda_n + \lambda_m) + \Big\langle f_n(t) - f_m(t), h_m\big(\theta_m(t)\big) - h_n\big(\theta_n(t)\big)\Big\rangle \\
+\ & \big\langle h_n'(t) - h_m'(t) + f_n(t) - f_m(t), Z_n\big(\theta_n(t)\big) - Z_m\big(\theta_m(t)\big)\big\rangle,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

nous ajoutons et soustrayons des termes au côté gauche de l'inégalité précédente, on obtient,

$$\begin{aligned}
\big\langle h_n(t) - h_m(t), h_n'(t) - h_m'(t)\big\rangle \ =\ & \big\langle h_n(t) - h_n\big(\theta_n(t)\big) + h_m\big(\theta_m(t)\big) - h_m(t), h_n'(t) - h_m'(t)\big\rangle \\
+\ & \big\langle h_n\big(\theta_n(t)\big) - h_m\big(\theta_m(t)\big), h_n'(t) - h_m'(t)\big\rangle
\end{aligned}$$

de sorte que, en utilisant la relation (3.42), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \big\langle h_n\big(\theta_n(t)\big) - h_n(t) - h_m\big(\theta_m(t)\big) + h_m(t), h_n'(t) - h_m'(t)\big\rangle \\
\leq\ & 2(\gamma + L_1)(\|h_n\big(\theta_n(t)\big) - h_n(t)\| + \|h_m\big(\theta_m(t)\big) - h_m(t)\|).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Par la définition de f_n, la relation (3.18) et l'hypothèse (a_2), il existe une fonction positive $\alpha_K \in L^1(I, \mathbb{R}; dr)$ telle que

$$\|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \alpha_K(t)\|v_n\big(\varphi_n(t)\big) - v_m\big(\varphi_m(t)\big)\|. \tag{3.48}$$

Alors, en revenant au côté droit de l'inégalité (3.46) on aura, en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$
\begin{aligned}
& \langle f_n(t) - f_m(t), h_m\big(\theta_m(t)\big) - h_n\big(\theta_n(t)\big)\rangle \\
\leq\ & \|f_n(t) - f_m(t)\| \|h_m\big(\theta_m(t)\big) - h_n\big(\theta_n(t)\big)\| \\
\leq\ & \alpha_K(t)\|v_n\big(\varphi_n(t)\big) - v_m\big(\varphi_m(t)\big)\| \|h_m\big(\theta_m(t)\big) - h_n\big(\theta_n(t)\big)\| \\
\leq\ & \alpha_K(t)\Big(\|v_n\big(\varphi_n(t)\big) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - v_m(t)\| + \|v_m(t) - v_m\big(\varphi_m(t)\big)\|\Big) \\
\times\ & \Big(\|h_m\big(\theta_m(t)\big) - h_m(t)\| + \|h_m(t) - h_n(t)\| + \|h_n(t) - h_n\big(\theta_n(t)\big)\|\Big) \\
\leq\ & \alpha_K(t)\Big(\|v_n\big(\varphi_n(t)\big) - v_n(t)\| + \|h_n(t) - h_m(t)\| + \|Z_n(t) - Z_m(t)\| + \|v_m(t) - v_m\big(\varphi_m(t)\big)\|\Big) \\
\times\ & \Big(\|h_m\big(\theta_m(t)\big) - h_m(t)\| + \|h_m(t) - h_n(t)\| + \|h_n(t) - h_n\big(\theta_n(t)\big)\|\Big) \\
\leq\ & \alpha_K(t)\|h_n(t) - h_m(t)\|^2 \\
+\ & \alpha_K(t)\Big(\|v_n\big(\varphi_n(t)\big) - v_n(t)\| + \|Z_n(t) - Z_m(t)\| + \|v_m(t) - v_m\big(\varphi_m(t)\big)\|\Big) \\
\times\ & \Big(\|h_m\big(\theta_m(t)\big) - h_m(t)\| + \|h_m(t) - h_n(t)\| + \|h_n(t) - h_n\big(\theta_n(t)\big)\|\Big) + \\
+\ & \alpha_K(t)\|h_n(t) - h_m(t)\|\Big(\|h_m\big(\theta_m(t)\big) - h_m(t)\| + \|h_n(t) - h_n\big(\theta_n(t)\big)\|\Big)
\end{aligned}
$$

Maintenant, pour le deuxième produit scalaire du côté droit de l'inégalité (3.46), posons $\epsilon_n = \max\{\lambda_n, \|Z_n(\cdot) - Z(\cdot)\|_C\}$. Par (3.8), (3.41) (3.42), (3.43) et (3.44) nous avons pour presque tout $t \in I$

$$
\begin{aligned}
& \Big\langle h'_n(t) - h'_m(t) + f_n(t) - f_m(t), Z_n\big(\theta_n(t)\big) - Z_m\big(\theta_m(t)\big)\Big\rangle \\
\leq\ & \Big(\|h'_n(t)\| + \|h'_m(t)\| + \|f_n(t)\| + \|f_m(t)\|\Big)\Big(\|Z_n\big(\theta_n(t)\big) - Z_m\big(\theta_m(t)\big)\|\Big) \\
\leq\ & 2(\gamma + L_1 + M_1)\Big(\|Z_n\big(\theta_n(t)\big) - Z_n(t)\| \\
+\ & \|Z_n(t) - Z(t)\| + \|Z_m(t) - Z(t)\| + \|Z_m\big(\theta_m(t)\big) - Z_m(t)\|\Big) \\
\leq\ & 2(\gamma + L_1 + M_1)\Big(L_1 dr\big(]t, \theta_n(t)]\big) + \varepsilon_n + \varepsilon_m + L_1 dr\big(]t, \theta_m(t)]\big)\Big) \\
\leq\ & 2(\gamma + L_1 + M_1)\big(L_1\lambda_n + \varepsilon_n + \varepsilon_m + L_1\lambda_m\big) \\
\leq\ & 2(\gamma + L_1 + M_1)(L_1 + 1)(\varepsilon_n + \varepsilon_m).
\end{aligned}
$$

Ainsi, si on résume les estimations précédentes, l'inégalité (3.46) sera :

$$\langle h_n(t)-h_m(t), h'_n(t)-h'_m(t)\rangle \leq \alpha_K(t)\|h_n(t)-h_m(t)\|^2+\Delta_{m,n}(t) \quad p.p.\ t\in I, \tag{3.49}$$

avec pour tout $t\in I$,

$$\begin{aligned}
\Delta_{m,n}(t) &= 2(\gamma+L_1)(\|h_n\big(\theta_n(t)\big)-h_n(t)\|+\|h_m\big(\theta_m(t)\big)-h_m(t)\|)+M'(\lambda_n+\lambda_m)\\
&+ 2(\gamma+L_1+M_1)(L_1+1)(\epsilon_n+\epsilon_m)\\
&+ \alpha_K(t)\Big(\|v_n\big(\varphi_n(t)\big)-v_n(t)\|+\|Z_n(t)-Z_m(t)\|+\|v_m(t)-v_m\big(\varphi_m(t)\big)\|\Big)\\
&\times \Big(\|h_m\big(\theta_m(t)\big)-h_m(t)\|+\|h_m(t)-h_n(t)\|+\|h_n(t)-h_n\big(\theta_n(t)\big)\|\Big)\\
&+ \alpha_K(t)\|h_n(t)-h_m(t)\|\Big(\|h_m\big(\theta_m(t)\big)-h_m(t)\|+\|h_n(t)-h_n\big(\theta_n(t)\big)\|\Big).
\end{aligned}$$

Il est clair que $\Delta_{n,m}$ est bornée par une application de $L^1(I,\mathrm{H};dr)$, et $\lim\limits_{n,m\to\infty}\Delta_{n,m}(t)=0$ pour tout $t\in I$. En effet, par les relations (3.29), (3.35), (3.43)

$$\begin{aligned}
\|\Delta_{m,n}(t)\| &\leq 2(\gamma+L_1)^2\Big(dr\big(]t,\theta_n(t)]\big)+dr\big(]t,\theta_m(t)]\big)\Big)+M'(\lambda_n+\lambda_m)\\
&+ 2(\gamma+L_1+M_1)(L_1+1)(\epsilon_n+\epsilon_m)+\alpha_k(t)\Big(\gamma dr\big(]\varphi_n(t),t]\big)+\|Z_n(t)\|\\
&+ \|Z_m(t)\|+\gamma dr\big(]\varphi_m(t),t]\big)\Big)\Big((\gamma+L_1)\big(dr\big(]t,\theta_n(t)]\big)\big)+\|h_n(t)\|+\|h_m(t)\|\\
&+ (\gamma+L_1)\big(dr\big(]t,\theta_m(t)]\big)\big)\Big)\\
&\leq 4(\gamma+L_1)^2r(T)+M'(\lambda_n+\lambda_m)+2(\gamma+L_1+M_1)(L_1+1)(\epsilon_n+\epsilon_m)\\
&+ \alpha_k(t)(2\gamma r(T)+2L_1r(T))(2(\gamma+L_1)r(T)+2(\gamma+K+L_1)r(T))\in L^1(I,H;dr).
\end{aligned}$$

On applique la formule de Moreau $d\big(\|w\|^2\big)\leq 2\langle w,dw\rangle$, avec $w=h_n-h_m$, $dw=dh_n-dh_m$, $\dfrac{dw}{dr}=h'_n-h'_m$ et $h_n(0)=h_m(0)=u_0$, on obtient par l'estimation (3.49)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|h_n(t)-h_m(t)\|^2 &= \frac{1}{2}\Big(\|w(t)\|^2-\|w(0)\|^2\Big)\\
&= \frac{1}{2}\int_{]0,t]} d\|w(\tau)\|^2 \leq \int_{]0,t]}\langle w(\tau),dw(\tau)\rangle\\
&\leq \int_{]0,t]}\langle h_n(\tau)-h_m(\tau), h'_n(\tau)-h'_m(\tau)\rangle\, dr(\tau)\\
&\leq \int_{]0,t]}\alpha_k(\tau)\|h_n(\tau)-h_m(\tau)\|^2dr(\tau)+\int_{]0,t]}\Delta_{n,m}(\tau)dr(\tau),
\end{aligned}$$

donc en utilisant le Lemme de Gronwall (Lemme 1.7.20), on conclut que

$$\|h_n(t)-h_m(t)\|^2 \leq \left(2\int_{]0,T]}\Delta_{n,m}(\tau)dr(\tau)\right)\exp\left(\int_{]0,T]}2\alpha_k(\tau)dr(\tau)\right),$$

par suite,

$$\|h_n-h_m\|_{\mathrm{C}}^2 \leq \left(2\int_{]0,T]}\Delta_{n,m}(\tau)dr(\tau)\right)\exp\left(\int_{]0,T]}2\alpha_k(\tau)dr(\tau)\right).$$

En appliquant le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue, $\int_0^T \Delta_{n,m}(s)dr(s) \to 0$ lorsque $m,n\to\infty$ et alors on trouve que $(h_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $C(I,H)$, donc, elle converge uniformément vers une application $h\in C(I,H)$. Par conséquent, $\big(v_n\big)$ converge uniformément et fortement vers l'application $h-Z$. Prenons en compte la convergence faible de $\big(v_n(t)\big)$ vers $u(t)$ pour $t\in I$, on conclut que $u=h-Z$, i.e.,

$$\|v_n(\cdot)-u\|_C \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty.$$

Par (3.23) nous avons aussi, pour tout $t\in I$

$$\|u_n(t)-u(t)\|\to 0,$$

et par (3.38) nous avons pour tout $t\in I$

$$\|u(t)-v_n(\varphi_n(t))\| \;\leq\; \|u(t)-v_n(t)\|+\|v_n(t)-v_n(\varphi_n(t))\|\to 0 \text{ lorsque } n\to\infty. \tag{3.50}$$

De même

$$\|u(t)-v_n(\theta_n(t))\|\to 0 \quad \text{lorsque } n\to\infty. \tag{3.51}$$

De plus, il est clair que u est continue à variation bornée et $u(0)=u_0$.

Etape 3. Existence de solution.

Nous prouvons dans cette dernière étape que l'application u est une solution de notre problème $\big(P_{F,f}\big)$. Tout d'abord, prouvons que $u(t)\in D(A(t))$ pour tout $t\in I$.

Si $\delta_{i+1}^n>0$, par (3.11) et (3.12) nous avons que $u_n(t)\in D(A(\varphi_n(t)))$. Mais pour $\delta_{i+1}^n = 0 = dr(]t_i^n,t_{i+1}^n]) \geq dis(A(t_i^n),A(t_{i+1}^n))$ alors $A(t_i^n)=A(t_{i+1}^n)$ (voir le Lemme 1.8.22), et donc, $u_{i+1}^n=u_i^n\in D(A(t_i^n))=D(A(t_{i+1}^n))$. D'autre part, par $(H1)$ et (3.9)

$$dis\left(A\big(\varphi_n(t)\big),A(t)\right)\leq \lambda_n\to 0 \quad \text{lorsque } n\to\infty \text{ pour } t\in I.$$

Par conséquent, pour tout $t\in I$ fixé, on obtient $A\big(\varphi_n(t)\big)\to A(t)$ par rapport à la distance de Vladimirov $dis(\cdot,\cdot)$. Comme la suite $(y_n)=\big(A^0\big(\varphi_n(t),u_n(t)\big)\big)$ est bornée par $(H2)$ et

(3.18), et alors elle est faiblement relativement compacte, i.e., on peut lui extraire une sous suite (notée aussi (y_n)) qui converge faiblement vers un élément $y \in H$, donc, par le Lemme 1.8.23 appliqué à $x_n = u_n(t) \to u(t)$, on aura

$$u(t) \in D(A(t)).$$

Maintenant, remarquons que la suite $\big(z_n(\cdot)\big)$ est bornée dans $L^2(I, H; dr)$ (voir la relation (3.35)), par extraction d'une sous suite, on peut supposer qu'elle converge faiblement vers une application $z \in L^2(I, H; dr)$. Par le Théorème de Banach-Mazur (Théorème 1.7.3), il existe une suite $\big(\zeta_n(\cdot)\big)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\zeta_n(\cdot) \in co\{z_k(\cdot); k \geq n\}$ et $\big(\zeta_n(\cdot)\big)$ converge fortement vers $z(\cdot)$. Par conséquent, il existe un sous ensemble dr-négligeable N_0' de I et une sous suite (n_p) de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in I \backslash N_0'$, $\lim\limits_{p\to\infty} \zeta_{n_p}(t) = z(t)$. Alors, utilisant ces arguments et la relation (3.34), on a pour tout $t \in I \backslash N_0'$

$$z(t) \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{co}\{z_k(t); k \geq n_p\} \subset \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{co}\left\{F(t, v_k(\varphi_k(t)); k \geq n_p\right\}. \tag{3.52}$$

Par le Théorème 1.3.10, on obtient pour tout $\xi \in H$,

$$\langle \xi, z(t) \rangle \leq \delta^*\left(\xi, F(t, v_k(\varphi_k(t)))\right) \quad \forall p \in \mathbb{N},\ \forall\, k \geq n_p,$$

c'est-à-dire

$$\langle \xi, z(t) \rangle \leq \limsup_{k\to\infty} \delta^*\left(\xi, F(t, v_k(\varphi_k(t)))\right) \leq \delta^*\left(\xi, F(t, u((t)))\right)$$

où la deuxième inégalité est due grâce à l'hypothèse (i). Puisque F satisfait (ii) et à valeurs convexes faiblement compactes et H est séparable, par la Proposition 1.5.12, on conclut que

$$z(t) \in F(t, u(t)) \quad dr - p.p. \quad t \in I.$$

Dans la suite, on va vérifier que

$$-u'(t) - z(t) - f(t, u(t)) \in A(t)u(t) \quad dr - p.p.\ t \in I.$$

Nous avons, pour tout $t \in I$,

$$h_n(t) = v_n'(t) + z_n(t).$$

Il est clair que $h_n \rightharpoonup h$ faiblement dans $L^2(I, \mathrm{H}; dr)$ avec $h(\cdot) = u'(\cdot) + z(\cdot)$. Par le Théorème de Banach-Mazur (Théorème 1.7.3), il existe une suite $\big(w_j\big)_j$ avec pour tout j, $w_j \in co\{h_k;\ \ k \geq j\}$ telle que $w_j \to h$ fortement. Ainsi, par le Théorème 1.7.14, on peut extraire une sous suite (w_{j_p}) de (w_j) convergeant vers h presque partout, i.e, il existe un ensemble négligeable $\widetilde{N} \subset I$ et une sous suite (j_p) de $\mathbb{N}$ satisfaisant

$$t \in I \setminus \widetilde{N} \Longrightarrow w_{j_p}(t) \to u'(t) + z(t) = h(t) \quad lorsque \quad p \to \infty. \tag{3.53}$$

Posons $S_n = \{h_k(t) : \ k \geq j_n\}$, alors, nous avons pour $t \in I \setminus \widetilde{N}$

$$h(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\, S_n.$$

Pour tout $\xi \in H$, le théorème de séparation (Théorème 1.3.10), nous permet d'écrire

$$\langle \xi, h(t)\rangle \leq \delta^*(\xi, S_n) = \sup_{k\geq n}\langle \xi, h_k(t)\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

i.e.,

$$\langle \xi, h(t)\rangle \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n}\langle \xi, h_k(t)\rangle,$$

par suite,

$$\langle z, h(t)\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\langle \xi, h_n(t)\rangle. \tag{3.54}$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $I\setminus N_n$ l'ensemble sur lequel l'inclusion (3.33) est vérifiée, i.e.,

$$-h_n(t) - f(t, v_n(\varphi_n(t))) \in A(\theta_n(t))v_n(\theta_n(t)) \quad \forall t \in I\setminus N_n. \tag{3.55}$$

Comme $u(t) \in D(A(t))$ pour tout $t \in I$, par la Proposition 1.8.20, pour montrer que que $-u'(t) - z(t) - f(t, u(t)) \in A(t)u(t)$ p.p., il suffit de prouver que pour tout $\eta \in D(A(t))$

$$\Big\langle h(t) + f\big(t, u(t)\big), u(t) - \eta \Big\rangle \leq \Big\langle A^0(t,\eta), \eta - u(t) \Big\rangle \quad p.p. \tag{3.56}$$

Pour cela, soit $\eta \in D(A(t))$, par (3.37) et $(H2)$, on peut appliquer le cas particulier du Lemme 1.8.25 à $\widetilde{A}_n = A(\theta_n(t))$ et $A = A(t)$, pour obtenir une suite (ξ_n) telle que

$$\xi_n \in D\big(A\big(\theta_n(t)\big)\big) \quad \xi_n \to \eta \quad \text{et} \quad A^0\big(\theta_n(t), \xi_n\big) \to A^0(t,\eta).$$

Comme chaque $A(t)$ est monotone, en particulier pour $t \in I \setminus N_n$

$$\Big\langle - h_n(t) - f(t, v_n(\varphi_n(t))) - A^0(\theta_n(t), \xi_n), v_n(\theta_n(t)) - \xi_n \Big\rangle \geq 0$$

ou alors

$$\Big\langle h_n(t) + f\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big), v_n\big(\theta_n(t)\big) - \xi_n \Big\rangle \leq \Big\langle A^0\big(\theta_n(t), \xi_n\big), \xi_n - v_n\big(\theta_n(t)\big) \Big\rangle. \tag{3.57}$$

Par conséquent, par les relations (3.29), (3.35) et (3.44), pour $t \in I \backslash \left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} N_n \right) \bigcup \widetilde{N} \right)$

$$\begin{aligned}
& \Big\langle h_n(t) + f\big(t, v_n(\varphi_n(t))\big), u(t) - \eta \Big\rangle \\
= & \Big\langle h_n(t) + f\big(t, v_n(\varphi_n(t))\big), v_n\big(\theta_n(t)\big) - \xi_n \Big\rangle \\
+ & \Big\langle h_n(t) + f\big(t, v_n(\varphi_n(t))\big), \big(u(t) - v_n(\theta_n(t))\big) - \big(\eta - \xi_n\big) \Big\rangle \\
\leq & \Big\langle A^0\big(\theta_n(t), \xi_n\big), \xi_n - v_n\big(\theta_n(t)\big) \Big\rangle \\
+ & \big(\|h_n(t)\| + \|f\big(t, v_n(\varphi_n(t))\big)\|\big)\big(\|\xi_n - \eta\| + \|u(t) - v_n\big(\theta_n(t)\big)\|\big) \\
\leq & \Big\langle A^0\big(\theta_n(t), \xi_n\big), \xi_n - v_n\big(\theta_n(t)\big) \Big\rangle + \big(\gamma + L_1 + M_1\big)\big(\|\xi_n - \eta\| + \|u(t) - v_n\big(\theta_n(t)\big)\|\big)
\end{aligned}$$

d'où, (3.50) et la continuité de $f(t, \cdot)$ impliquent que

$$\limsup_{n \to \infty} \big\langle h_n(t), u(t) - \eta \big\rangle + \big\langle f(t, u(t)), u(t) - \eta \big\rangle \leq \big\langle A^0(t, \eta), \eta - u(t) \big\rangle \tag{3.58}$$

et donc par (3.54)

$$\begin{aligned}
\big\langle h(t) + f(t, u(t)), u(t) - \eta \big\rangle &\leq \limsup_{n \to \infty} \big\langle h_n(t), u(t) - \eta \big\rangle + \big\langle f(t, u(t)), u(t) - \eta \big\rangle \\
&\leq \big\langle A^0(t, \eta), \eta - u(t) \big\rangle
\end{aligned}$$

d'où,

$$-h(t) - f(t, u(t)) \in A(t)u(t) \quad dr - p.p. \text{ sur } I$$

c'est-à-dire

$$-u'(t) - z(t) - f(t, u(t)) \in A(t)u(t) \quad dr - p.p \text{ sur } I.$$

et comme $z(t) \in F\big(t, u(t)\big)$ $dr - p.p$ on aura

$$-u'(t) \in A(t)u(t) + F\big(t, u(t)\big) + f\big(t, u(t)\big)\big) \quad dr - p.p \text{ sur } I,$$

avec $u(0) = u_0$, ce qui implique que u est une solution du problème $\big(P_{F,f}\big)$. De plus, par l'estimation (3.22), on a

$$\|u(t) - u(s)\| \leq K(r(t) - r(s)), \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T,$$

i.e.,

$$\frac{\|u(t) - u(s)\|}{r(t) - r(s)} \leq K, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T,$$

donc, lorsque s tens vers t, on obtient

$$\|u'(t)\| \leq K, \quad p.p. \, t \in I.$$

■

Remarque 3.2.2.
Nous soulignons ici que si $f = 0$ notre théorème s'énonce comme suit

Corollaire 3.2.3.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \in H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone vérifiant $(H1)$ et $(H2)$. Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes faiblement compactes satisfaisant (i), (ii) et (3.7). Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$ le problème

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) & \in & A(t)u(t) + F(t, u(t)) \quad dr - p.p. \ t \in I, \\ u(0) & = & u_0, \end{cases} \tag{P_F}$$

admet une solution u continue à variation bornée. De plus,

$$\|u(t)\| \leq K, \quad \|u(t) - u(\tau)\| \leq K(|r(t) - r(\tau)| \ \forall t, \tau \in I,$$

pour une certaine constante K dépendant du $\|u_0\|, c, C$, et r.

3.3 Solutions Lipschitziennes

En utilisant le Théorème 3.2.1 et en suivant l'idée de la preuve du Théorème 3.3 dans [6], nous allons fournir une variante Lipschitzienne du résultat de la section précédente.

Théorème 3.3.1.

Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone vérifiant $(H2)$ et

(H3) Il existe une constante réelle positive α telle que

$$dis(A(t), A(s)) \leq \alpha |t - s| \quad \text{pour} \ \ 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{3.59}$$

Soit $f : I \times H \to H$, une application telle que pour tout $x \in H$, l'application $f(\cdot, x)$ est mesurable. Supposons aussi que f satisfait (a_1) (avec $\lambda_R \in L^1(I, \mathbb{R}; dt)$) et (a_2). Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes faiblement compactes satisfaisant (i), (ii) et (3.7). Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$ le problème,

$$(P_{F,f}) \begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) & \in & A(t)u(t) + F(t, u(t)) + f(t, u(t)) \quad dt - p.p. \ t \in I, \\ u(0) & = & u_0, \end{cases} \tag{$P_{F,f}$}$$

admet une solution u Lipschitzienne. De plus,

$$\|u(t)\| \leq K, \quad \|u(t)-u(\tau)\| \leq K \max\{1,\alpha\}|t-\tau| \quad \forall\, t,\tau \in I,$$

pour une certaine constante positive K.

Démonstration

• Si $\alpha \leq 1$, nous avons par $(H3)$

$$dis(A(t),A(s)) \leq (t-s) \quad \text{pour} \;\; 0 \leq s \leq t \leq T.$$

On applique le Théorème 3.2.1 avec $r(t)=t$ $(dr=dt)$, on obtient une solution u au problème

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) & \in & A(t)u(t)+F(t,u(t))+f(t,u(t)) \quad dt-p.p.\; t \in I, \\ u(0) & = & u_0. \end{cases}$$

Cette solution satisfait la propriété : $\|u(t)-u(s)\| \leq K|t-s|$ pour tous $t,s \in I$, pour une constante positive K. Alors u est Lipschitzienne.

• Maintenant, si $\alpha \geq 1$, on essaie d'appliquer le Théorème 3.2.1, en prenant pour tout $t \in I$, $r(t)=\alpha t$ $\left(\dfrac{dr}{dt}(t)=\alpha\right)$, $B(t)=\dfrac{1}{\alpha}A(t)$, et la multi-application $G(t,x)=\dfrac{1}{\alpha}F(t,x)$ et $g(t,x)=\dfrac{1}{\alpha}f(t,x)$ pour tout $(t,x) \in I \times H$. On doit alors vérifier que pour tout $t \in I$, l'opérateur $B(t)$, la multi-application $G(\cdot,\cdot)$, et l'application $g(\cdot,\cdot)$ vérifient les hypothèses de ce Théorème 3.2.1.

On commence par prouver que pour tout $t \in I$, $B(t)$ est un opérateur maximal monotone vérifiant les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$. En effet, fixons $t \in I$, soient $x_1,x_2 \in D(B(t)) = D(A(t))$ et soient $y_1 \in B(t)x_1$, $y_2 \in B(t)x_2$. D'après la définition de $B(t)$ nous avons

$$y_1 \in B(t)x_1 = \frac{1}{\alpha}A(t)x_1 \iff \alpha y_1 \in A(t)x_1, \quad y_2 \in B(t)x_2 = \frac{1}{\alpha}A(t)x_2 \iff \alpha y_2 \in A(t)x_2.$$

Par la monotonie de $A(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} & \langle \alpha y_1 - \alpha y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \\ \Longrightarrow\; & \alpha\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \\ \Longrightarrow\; & \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

d'où, $B(t)$ est un opérateur monotone. Pour la maximalité, soit $(x,y) \in H \times H$ tel que

$$\big\langle y-\eta, x-\xi \big\rangle \geq 0, \quad \forall\, [\xi,\eta] \in B(t),$$

$$\begin{aligned}
[\xi,\eta]\in B(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \xi\in D(B(t)) \text{ et } \eta\in B(t)\xi=\frac{1}{\alpha}A(t)\xi \Leftrightarrow \xi\in D(A(t)) \text{ et } \quad \eta\in\frac{1}{\alpha}A(t)\xi\\
&\Leftrightarrow \quad \xi\in D(A(t)) \text{ et } \quad \alpha\eta\in A(t)\xi \Leftrightarrow [\xi,\alpha\eta]\in A(t).
\end{aligned}$$

Donc

$$\big\langle y-\eta, x-\xi\big\rangle \geq 0, \quad \forall\,[\xi,\eta]\in B(t) \Leftrightarrow \big\langle \alpha y-\alpha\eta, x-\xi\big\rangle \geq 0, \quad \forall\,[\xi,\alpha\eta]\in A(t).$$

Par la maximalité de $A(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
[x,\alpha y]\in A(t) \quad &\Leftrightarrow \quad x\in D(A(t)) \text{ et } \ \alpha y\in A(t)x\\
&\Leftrightarrow \quad x\in D(A(t))=D(B(t)) \text{ et } \ y\in\frac{1}{\alpha}A(t)x=B(t)x\\
&\Leftrightarrow \quad [x,y]\in B(t).
\end{aligned}$$

D'où, $B(t)$ est évidemment un opérateur maximal monotone.
Ensuite, par la propriété (b) du Lemme 1.8.22, on obtient pour $0\leq s\leq t\leq T$

$$dis(B(t),B(s))=dis\left(\frac{1}{\alpha}A(t),\frac{1}{\alpha}A(s)\right)\leq dis(A(t),A(s))\leq\alpha(t-s)=r(t)-r(s).$$

Par conséquent, $B(t)$ vérifie l'hypothèse $(H1)$. Donc, reste à montrer que $B(t)$ vérifie l'hypothèse $(H2)$. Pour cela, nous avons $A^0(t,x)\in A(t)x$, par suite $\frac{1}{\alpha}A^0(t,x)\in\frac{1}{\alpha}A(t)x=B(t)x$. D'autre part, comme $B^0(t,x)\in B(t)x$ et aussi comme $B^0(t,x)$ est l'élément de norme minimale de $B(t)x$, on obtient

$$\|B^0(t,x)\|\leq\Big\|\frac{1}{\alpha}A^0(t,x)\Big\|=\frac{1}{\alpha}\|A^0(t,x)\|\leq\frac{c}{\alpha}(1+\|x\|)=c'(1+\|x\|).$$

donc, $B(t)$ vérifie aussi l'hypothèse $(H2)$.
Maintenant, on va montrer que la multi-application $G(\cdot,\cdot)$ vérifie toutes les hypothèses que nous avons supposées sur $F(\cdot,\cdot)$ au Théorème 3.2.1. Premièrement, il est clair que $G(\cdot,\cdot)$ est à valeurs non vides (car $F(\cdot,\cdot)$ est à valeurs non vides). Ensuite, $G(\cdot,\cdot)$ est à valeurs convexes faiblement compactes. En effet, Fixons $(t,x)\in I\times H$, soient $y_1,y_2\in G(t,x)$ et $\lambda\in[0,1]$. D'après la définition de $G(\cdot,\cdot)$ nous avons

$$y_1,y_2\in G(t,x)=\frac{1}{\alpha}F(t,x) \iff \alpha y_1,\alpha y_2\in F(t,x).$$

Comme $F(t,x)$ est un ensemble convexe, alors pour tout $\lambda\in[0,1]$

$$\begin{aligned}
\lambda(\alpha y_1)+(1-\lambda)(\alpha y_2)\in F(t,x) \quad &\iff \quad \alpha(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\in F(t,x)\\
&\iff \quad \lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in\frac{1}{\alpha}F(t,x)=G(t,x).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $G(t,x)$ est un ensemble convexe. Pour la compacité faible, on prend une suite quelconque $(y_n)_n \subset G(t,x)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} y_n \in G(t,x) = \frac{1}{\alpha}F(t,x),\ \forall n \in \mathbb{N} \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha y_n \in F(t,x),\ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Longleftrightarrow \quad (\alpha y_n)_n \subset F(t,x). \end{aligned}$$

Comme $F(t,x)$ est faiblement compact, alors, on peut extraire de (αy_n) une sous suite, notée aussi (αy_n), convergeant faiblement vers un élément $y \in F(t,x)$, c'est-à-dire, pour tout $\xi \in H$ $\lim_{n\to\infty} \langle \alpha y_n, \xi\rangle = \langle y, \xi\rangle$. Par suite,

$$\begin{aligned} \alpha \lim_{n\to\infty} \langle y_n, \xi\rangle = \langle y, \xi\rangle \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \langle y_n, \xi\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle y, \xi\rangle \\ &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \langle y_n, \xi\rangle = \langle \frac{1}{\alpha} y, \xi\rangle \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(\alpha y_n)_n$ converge faiblement vers $\frac{1}{\alpha}y$ avec $y \in F(t,x)$, alors, $\frac{1}{\alpha}y \in \frac{1}{\alpha}F(t,x) = G(t,x)$. Ainsi, $G(t,x)$ est un ensemble faiblement compact. Deuxièment, on montre que pour tout $t \in I$, $G(t,\cdot)$ est scalairement s.c.s. Soit $t \in I$, fixé, soit $e \in H$. L'idée est de démontrer que $G(t,\cdot)$ est scalairement s.c.s en tout point $x \in H$, c-à-d montrer que $\delta^*(e, G(t,\cdot))$ est s.c.s en tout point $x \in H$, pour tout $e \in H$. En effet, soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $h > \delta^*(e, G(t,x))$. Or,

$$\begin{aligned} \delta^*(e, G(t,x)) &= \sup_{y \in \frac{1}{\alpha}F(t,x)} \langle e, y\rangle = \sup_{\alpha y \in F(t,x)} \langle e, y\rangle \\ &= \sup_{z \in F(t,x)} \langle e, \frac{z}{\alpha}\rangle = \frac{1}{\alpha} \sup_{z\in F(t,x)} \langle e, z\rangle \\ &= \frac{1}{\alpha}\delta^*(e, F(t,x)), \end{aligned}$$

donc $h > \frac{1}{\alpha}\delta^*(e, F(t,x))$, par suite $h' = \alpha h > \delta^*(e, F(t,x))$. Comme $F(t,\cdot)$ est scalairement s.c.s alors, il existe un voisinage V_x de x tel que

$$h' = \alpha h > \delta^*(e, F(t,y)) \quad \text{pour tout} \;\; y \in V_x,$$

c-à-d,

$$h > \frac{1}{\alpha}\delta^*(e, F(t,y)) = \delta^*(e, G(t,y)) \quad \text{pour tout} \;\; y \in V_x.$$

Par conséquent, $G(t,\cdot)$ est scalairement s.c.s sur H. Vérifions maintenant que $G(\cdot,\cdot)$ est scalairement $(\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H))$-mesurable, c-à-d, pour tout $e \in H$ la fonction d'appui $\delta^*(e, G(\cdot,\cdot))$ est $(\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H))$-mesurable. On définit l'application $S := \delta^*\big(e, G(\cdot,\cdot)\big)$:

$I \times H \to \mathbb{R}$ par $S(t,x) = \delta^*\big(e, G\big(t,x\big)\big)$ et $S_1 := \delta^*\big(e, F\big(\cdot,\cdot\big)\big) : I \times H \to \mathbb{R}$ par $S_1(t,x) = \delta^*\big(e, F\big(t,x\big)\big)$. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} S^{-1}\big(V\big) &= \big\{(t,x) \in I \times H : \quad \delta^*\big(e, G\big(t,x\big)\big) \in V\big\} \\ &= \big\{(t,x) \in I \times H : \quad \frac{1}{\alpha}\delta^*\big(e, F\big(t,x\big)\big) \in V\big\} \\ &= \big\{(t,x) \in I \times H : \quad \delta^*\big(e, F\big(t,x\big)\big) \in \alpha V\big\} \\ &= S_1^{-1}\big(\alpha V\big) \end{aligned}$$

Comme αV est un ouvert de $\mathbb{R}$ et S_1 est mesurable, alors, $S_1^{-1}\big(\alpha V\big) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H)$. Donc, reste à montrer que $G(\cdot,\cdot)$ vérifie l'estimation (3.7). Soit $(t,x) \in I \times H$, posons $p = Proj_{F(t,x)}(0)$ alors,

$$\langle p, p - z\rangle \leq 0 \quad \forall z \in F(t,x).$$

Soit $z \in G(t,x) = \dfrac{1}{\alpha}F(t,x)$, alors, $z = \dfrac{1}{\alpha}z'$ avec $z' \in F(t,x)$, d'où

$$\begin{aligned} \langle p, p - z'\rangle \leq 0 \quad \forall z' \in F(t,x) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha}\langle p, p - z'\rangle \leq 0 \quad \forall z' \in F(t,x) \\ &\Rightarrow \quad \langle p, \frac{p}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}z'\rangle \leq 0 \quad \forall z' \in F(t,x) \\ &\Rightarrow \quad \langle p, \frac{p}{\alpha} - z\rangle \leq 0 \quad \forall z \in G(t,x) \\ &\Rightarrow \quad \langle \frac{p}{\alpha}, \frac{p}{\alpha} - z\rangle \leq 0 \quad \forall z \in G(t,x) \\ &\Rightarrow \quad \frac{p}{\alpha} = Proj_{G(t,x)}(0). \end{aligned}$$

D'autre part, $p = Proj_{F(t,x)}(0) \in (1 + \|x\|)C$, alors,

$$Proj_{G(t,x)}(0) = \frac{p}{\alpha} \in (1 + \|x\|)\frac{C}{\alpha} = (1 + \|x\|)C_1, \quad \forall (t,x) \in I \times H,$$

et C_1 est un compact de H. Enfin, on montre que $g(\cdot,\cdot)$ satisfait les hypothèses sur $f(\cdot,\cdot)$ dans le Théorème 3.2.1. Pour cela, soient $t \in I$, R un nombre réel positif et soient $x, y \in \overline{B}\big(0, R\big)$

$$\begin{aligned} \|g(t,x) - g(t,y)\| &= \left\|\frac{1}{\alpha}f(t,x) - \frac{1}{\alpha}f(t,y)\right\| = \frac{1}{\alpha}\|f(t,x) - f(t,y)\| \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\lambda_R(t)\|x - y\| = \kappa_R(t)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Aussi,

$$\|g(t,x)\| = \left\|\frac{1}{\alpha}f(t,x)\right\| = \frac{1}{\alpha}\|f(t,x)\| \leq \frac{1}{\alpha}(M(1+\|x\|)) = M'(1+\|x\|) \quad \text{pour } t \in I,\ x \in H.$$

Clairement, pour tout $x \in H$, l'application $g(\cdot, x)$ est mesurable. Donc, grâce au Théorème 3.2.1, le problème

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) & \in & B(t)u(t) + G(t, u(t)) + g(t, u(t)) \quad dr - p.p.\ t \in I, \\ u(0) & = & u_0 \in D(B(0)) = D(A(0)), \end{cases}$$

admet une solution u continue à variation bornée. De plus, elle vérifié les estimations suivantes

$$\|u(t)\| \leq K \qquad \text{et} \quad \|u(t) - u(s)\| \leq K|r(t) - r(s)| \quad \forall t, s \in I, \tag{3.60}$$

ce problème est équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}\dfrac{dt}{dr}(t) & \in & \dfrac{1}{\alpha}A(t)u(t) + \dfrac{1}{\alpha}F(t, u(t)) + \dfrac{1}{\alpha}f(t, u(t)) \quad dr - p.p.\ t \in I, \\ u(0) & = & u_0, \end{cases}$$

ou bien (sachant que $\dfrac{dt}{dr} = \dfrac{1}{\alpha}$)

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) & \in & A(t)u(t) + F(t, u(t)) + f(t, u(t)) \quad dt - p.p.\ t \in I, \\ u(0) & = & u_0. \end{cases}$$

Alors, u est une solution de $\left(P_{F,f}\right)$ vérifiant l'inégalité (3.60). Comme $r(t) = \alpha t$, le coté droit de cette inégalité sera

$$\|u(t) - u(s)\| \leq K|\alpha t - \alpha s| = \alpha K|t - s|, \quad \forall t, s \in I,$$

c'est-à-dire, u est une solution Lipschitzienne. Résumons les cas $\alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$, on conclut que notre problème admet une solution Lipschitzienne u tel que

$$\|u(t)\| \leq K, \qquad \|u(t) - u(s)\| \leq \max(1, \alpha)K|t - s| \quad \forall t, s \in I,$$

Ceci achève la démonstration. ■

Si $f = 0$, on a le corollaire suivant

Corollaire 3.3.2.

Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \in H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone vérifiant $(H2)$ et $(H3)$. Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes faiblement compactes, satisfaisant (i), (ii) et (3.7). Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$ le problème

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) & \in & A(t)u(t) + F(t, u(t)) \quad dt - p.p.\ t \in I, \\ u(0) & = & u_0, \end{cases} \tag{P_F}$$

admet une solution Lipschitzienne u. De plus,

$$\|u(t)\| \leq K, \;\; \|u(t) - u(s)\| \leq K'(|t-s|, \;\; K' = K\max(1,\alpha),$$

pour une certaine constante K dépendant du $\|u_0\|, c, C,$ et α.

3.4 Solutions absolument continues

Dans cette section, nous traitons l'existence de solutions absolument continues du problème

$$(P_{F,f}) \begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) & \in & A(t)u(t) + F(t,u(t)) + f(t,u(t)) \quad dt - p.p.\ t \in I, \\ u(0) & = & u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

En supposant que $t \mapsto A(t)$ est à variation absolument continue, dans le sens suivant
$(H4)$ Il existe une fonction $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I, \mathbb{R}; dt)$ qui est positive sur $[0, T[$ avec $\beta(T) < +\infty$ et croissante telle que

$$dis(A(t), A(s)) \leq |\beta(t) - \beta(s)|, \quad \forall\, t, s \in I.$$

Théorème 3.4.1.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone qui vérifie $(H2)$ et $(H4)$.
Soit $f : I \times H \to H$ une application telle que pour tout $x \in H$, l'application $f(\cdot, x)$ est mesurable. Supposons aussi que f satisfait (a_1) (avec $\lambda_R \in L^1(I, \mathbb{R}; dt)$) et (a_2).
Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$une multi-application à valeurs non vides, convexes et faiblement compactes satisfaisant (i), (ii) et (3.7). Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$ le problème $(P_{F,f})$ admet une solution u absolument continue, plus précisément $u \in \mathcal{W}^{1,2}(I, H)$.
De plus, $\|\dot{u}(t)\| \leq K(1+\dot{\beta}(t))$ p.p. $t \in I$, pour une certaine constante positive K dépendant du $\|u_0\|, c, T, M, C$ et β.

Démonstration Nous combinons les idées de la preuve du Théorème 3.2.1 et du Théorème 2.3.1.
Étape 1. Algorithme
On choisit une suite quelconque $(\varepsilon_n)_n \subset]0,1]$ décroissante vers 0, et on considère aussi une partition quelconque $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_k^n = T$ de I avec les propriétés

$$|t_{i+1}^n - t_i^n| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} |\dot{\beta}(t)| dt \leq \varepsilon_n, \;\; \text{pour } i = 0, \ldots, k_n - 1, \tag{3.61}$$

ceci est possible car $t \mapsto \beta(t) + t$ est absolument continue. Nous pouvons aussi supposer que $\beta(0) = 0$. Soit pour $i = 0, \ldots, k_n - 1$,

$$\delta_{i+1}^n = t_{i+1}^n - t_i^n, \quad \eta_{i+1}^n = \beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n). \tag{3.62}$$

Alors, l'inégalité (3.61) s'écrit $\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n \leq \varepsilon_n$.
On suppose qu'il existe un réel positif L tel que $C \subset L\overline{B}_H$. De plus, on suppose, sans perte de généralité, que C est convexe et contient le zéro.
Soit pour tout $(t,x) \in I \times H$, $m(t,x)$ l'élément de norme minimale de $F(t,x)$, i.e., par (3.7)

$$m(t,x) \in F(t,x) \quad et \ \|m(t,x)\| \leq (1 + \|x\|)L \tag{3.63}$$

et, pour tout $x \in H$, l'application $t \mapsto m(t,x)$ est $\mathcal{L}(I)$-mesurable (voir Théorème 1.5.15).
Maintenant, On définit une suite d' applications en escalier continues à droite $u_n : I \to H$ comme suit :

$$u_n(t) = u_0^n = u_0 \ \text{ pour } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[,$$

et

$$u_n(t) = u_i^n, \quad \text{pour}\, i \geq 1, \ \ t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, \ \ u_n(T) = u_{k_n}^n,$$

où pour tout $i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$

$$\begin{aligned} u_{i+1}^n &= J_{i+1}^n \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n))ds \right) \\ &= (I_H + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n))^{-1} \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n))ds \right). \end{aligned}$$

Observons que, par la définition de la résolvante, nous avons
$u_{i+1}^n \in D(A(t_{i+1}^n))$ (voir Proposition 1.8.17 (i)) et

$$-\frac{1}{\delta_{i+1}^n} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n))ds \right) \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n. \tag{3.64}$$

Aussi on définit la suite des applications $v_n : I \to H$ par

$$v_n(t) = \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n))ds \right) + u_i^n - \int_{t_i^n}^{t} (f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n))ds, \tag{3.65}$$

pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$ et $v_n(T) = u_{k_n}^n$. Il est clair que l'application v_n est absolument continue avec $v_n(t_i^n) = u_i^n$, et que

$$\dot{v}_n(t) = \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n))ds\right) - f(t,u_i^n) - m(t,u_i^n), \quad (3.66)$$

pour $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$. Par conséquent, si on définit $\theta_n, \varphi_n : I \to I$ par

$$\theta_n(t) = t_{i+1}^n, \quad \varphi_n(t) = t_i^n \ \text{ pour } t \in]t_i^n, t_{i+1}^n], \quad i = 0, 1, \ldots, k_n - 1, \quad (3.67)$$

et $\theta_n(0) = \varphi_n(0) = 0$, alors l'inégalité (3.64) devient

$$-\dot{v}_n(t) - m(t, v_n(\varphi_n(t))) - f(t, v_n(\varphi_n(t))) \in A(\theta_n(t))v_n(\theta_n(t)), \quad dt - p.p\ t \in I. \quad (3.68)$$

Étape 2. Estimations et convergence des suites $(u_n)_n$ **et** $(v_n)_n$
On montre dans cette étape que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées en norme et en variation.

Nous avons $dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) \le \eta_{i+1}^n$ pour $i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$ (voir $(H4)$ et (3.62)). D'où par les propriétés (a) et (b) de Lemme 1.8.24 et par nos hypothèses (H2), (a_2) et (3.7) nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \left\|J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n))ds\right) - u_i^n\right\| \\
&\le \left\|J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n))ds\right) - J_{i+1}^n(u_i^n)\right\| + \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\le \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n))ds + \delta_{i+1}^n\|A^0(t_i^n,u_i^n)\| + dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) \\
&+ \sqrt{\delta_{i+1}^n(1 + \|A^0(t_i^n,u_i^n)\|)\, dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n))} \\
&\le (M+L)(1+\|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + c((1+\|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n + \sqrt{\delta_{i+1}^n(1+\|u_i^n\|)\eta_{i+1}^n} \\
&\le (M+L+c)(1+\|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n + \sqrt{(1+\|u_i^n\|)(\eta_{i+1}^n + \delta_{i+1}^n)^2} \\
&\le (2 + (M+L+2c)(1+\|u_i^n\|))(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \le \Big((2+L+M+2c) + (M+L+2c)\|u_i^n\|\Big)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n), \quad (3.69)$$

par suite,

$$\|u_{i+1}^n\| \le \big(1 + (M+L+2c)\|u_i^n\|\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big) + \big(2+M+L+2c\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big),$$

par le Lemme 1.7.21 nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|u_i^n\| &\leq \left(\|u_0\| + (2+M+L+2c)\sum_{k=0}^{i-1}(\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n)\right).\exp\left((M+L+2c)\sum_{k=0}^{i-1}(\delta_{k+1}^n + \eta_{k+1}^n)\right)\\
&= \left(\|u_0\| + (2+M+L+2c)(t_i^n + \beta(t_i^n))\right).\exp\left((M+L+2c)(t_i^n + \beta(t_i^n))\right)\\
&\leq \left(\|u_0\| + (2+M+L+2c)(T + \beta(T))\right).\exp\left((M+L+2c)(T + \beta(T))\right) =: K_1,
\end{aligned}$$

grâce à cette inégalité, l'estimation (3.69) sera

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \big((M+L+2c)K_1 + (2+M+L+2c)\big)(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)) =: K_2(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n)). \quad (3.70)$$

Posons $K = \max(K_1, K_2)$, on conclut que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{t\in H}\|u_n(t)\| \leq K \qquad \text{et} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(u_n) = \left(\sum_{i=0}^{k_n-1}\|u_{i+1}^n - u_i^n\|\right) \leq K(T+\beta(T)). \quad (3.71)$$

Alors, la suite (u_n) est bornée en norme et en variation. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K((t-s) + \beta(t) - \beta(s) + \varepsilon_n). \quad (3.72)$$

En effet, fixons $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ avec $j > i$. Alors par (3.70) nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_n(s)\| &= \|u_j^n - u_i^n\| \leq \sum_{k=0}^{j-i-1}\|u_{i+k+1}^n - u_{i+k}^n\|\\
&\leq K\sum_{k=0}^{j-i-1}((t_{i+k+1}^n - t_{i+k}^n) + (\beta(t_{i+k+1}^n) - \beta(t_{i+k}^n))\\
&= K\big((t_j^n - t_i^n) + (\beta(t_j^n) - \beta(t_i^n)\big)\\
&\leq K\big((s - t_i^n) + (t-s) + (\beta(s) - \beta(t_i^n)) + (\beta(t) - \beta(s))\big)\\
&\leq K\big((t-s) + (\beta(t) - \beta(s)) + (t_{i+1}^n - t_i^n) + (\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n))\big)\\
&\leq K\big((t-s) + (\beta(t) - \beta(s)) + \varepsilon_n\big), \quad (3.73)
\end{aligned}$$

Afin d'obtenir des résultats similaires pour la suite (v_n), nous allons prouver que (v_n) est aussi bornée en norme et en variation. Pour cela, observons que par (3.7), (3.61), (3.63), (3.65), (3.71) et (a_2) nous avons pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\begin{aligned} \|v_n(t)\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| + 2\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (\|f(s, u_i^n)\| + \|m(s, u_i^n\|)ds \\ &\leq 2K + 2(M+L)(1+K)(t_{i+1}^n - t_i^n) \leq 2K + 2(M+L)(1+K) = M_1. \end{aligned} \tag{3.74}$$

et par (3.70)

$$\|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| = \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n). \tag{3.75}$$

Posons $M' = \max(M_1, K)$, on obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_C \leq M' \qquad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(v_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k_n - 1} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \right) \leq M'(T + \beta(T)). \tag{3.76}$$

De plus, par (3.61), (3.62), (3.65) et (3.70), on a pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - u_n(t)\| = \|v_n(t) - u_i^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (\|f(s, u_i^n)\| + \|m(s, u_i^n\|)ds \\ &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2(M+L)(1 + \|u_i^n\|)(t_{i+1}^n - t_i^n) \\ &\leq (K + 2(M+L)(1+K))\varepsilon_n = \widetilde{M}\varepsilon_n. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Également, les relations (3.72), (3.77) donnent pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - v_n(s)\| &\leq \|v_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(s)\| + \|u_n(s) - v_n(s)\| \\ &\leq 2\widetilde{M}\varepsilon_n + K((t-s) + \beta(t) - \beta(s) + \varepsilon_n) \\ &= K((t-s) + \beta(t) - \beta(s)) + (2\widetilde{M} + K)\varepsilon_n \end{aligned} \tag{3.78}$$

et si on prend les relations (3.61), (3.78) en compte, on conclut que pour tout $t \in I$,

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| \leq 2(\widetilde{M} + K)\varepsilon_n \quad \text{et} \quad \|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\| \leq 2(\widetilde{M} + K)\varepsilon_n. \tag{3.79}$$

D'autre part, comme la suite (v_n) des applications continues à variation bornée est uniformément bornée en norme et en variation, alors par Théorème 1.2.6, par extraction d'une suite, on peut supposer qu'il existe une sous suite (notée aussi (v_n)) telle que $(v_n(t))$ converge faiblement vers une application continue à variation bornée $u : I \to H$, i.e.,

$$v_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{pour} \quad t \in I, \tag{3.80}$$

en prenant la limite inférieure quand $n \to \infty$ dans (3.78), on obtient

$$\|u(t) - u(s)\| \leq K\big((t-s) + \beta(t) - \beta(s)\big) \qquad \text{pour} \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \tag{3.81}$$

par conséquent, u est absolument continue avec $u(0) = u_0$, plus précisément, $u \in \mathcal{W}^{1,2}(I,H)$ (car $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I,\mathbb{R})$).
Dans la suite, on montre que la suite des dérivées $(\dot{v}_n)$ est bornée dans $L^1(I,H)$ et dans $L^2(I,H)$. Pour cela, par (3.76) on trouve pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\|\dot{v}_n\|_{L^1} = \int_0^T \|\dot{v}_n(t)\|dt = \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{v}_n(t)\|dt = var(v_n, I) \leq M'(T + \beta(T)) \tag{3.82}$$

Par conséquent, la suite $(\dot{v}_n)$ est bornée dans $L^1(I,H)$.
D'autre part, comme $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I,\mathbb{R})$, nous allons montrer que $(\dot{v}_n)$ est bornée dans $L^2(I,H)$. Soit pour tout $t \in I$, $\gamma(t) := K(\dot{\beta}(t) + 1)$, de sorte que par (3.70), on ait

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \gamma(\tau)d\tau. \tag{3.83}$$

Comme $\gamma \geq 0$ et par $(H4)$, $\gamma \in L^2(I,\mathbb{R})$, nous avons, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq (t_{i+1}^n - t_i^n)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (\gamma(\tau))^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.84}$$

Alors, par (3.63), (3.66), (3.71) et (a_2)

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_n\|_{L^2}^2 &= \int_0^T \|\dot{v}_n(\tau)\|^2 d\tau = \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{v}_n(\tau)\|^2 d\tau \\
&\leq \sum_{i=0}^{k_n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left(\frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|}{t_{i+1}^n - t_i^n} + 2(M+L)(1+K) \right)^2 d\tau \\
&\leq 2 \sum_{i=0}^{k_n-1} \left[\left(\frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|}{t_{i+1}^n - t_i^n} \right)^2 + \big(2(M+L)(1+K)\big)^2 \right] (t_{i+1}^n - t_i^n) \qquad (3.85)
\end{aligned}$$

ces inégalités impliquent que

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_n\|_{L^2}^2 &\leq 2 \sum_{i=0}^{k_n-1} \left[\left(\frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|}{t_{i+1}^n - t_i^n} \right)^2 + 2\big(M+L)(1+K)\big)^2 \right] (t_{i+1}^n - t_i^n) \\
&\leq 2\|\gamma\|_{L^2}^2 + 8\big(M+L)(1+K)^2\big)T. \qquad (3.86)
\end{aligned}$$

Évidemment $(\dot{v}_n)$ est bornée dans $L^2(I,H)$.
D'où, on peut extraire une sous suite, notée aussi $(\dot{v}_n)$, et convergeant faiblement dans $L^2(I,H)$ vers une application $w \in L^2(I,H)$, et donc par (3.80) et le Théorème 1.5.11, on

obtient pour $t \in]0,T]$ et $x \in H$,

$$\begin{aligned}
\big\langle x, u(t)-u(0)\big\rangle &= \lim_{n\to\infty} \big\langle x, v_n(t)-v_n(0)\big\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle x, \int_0^t \dot{v}_n(\tau)d\tau \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_I \big\langle \mathbf{1}_{]0,t]}x, \dot{v}_n(\tau)\big\rangle d\tau \\
&= \int_I \big\langle \mathbf{1}_{]0,t]}x, w(\tau)\big\rangle d\tau = \left\langle x, \int_{]0,t]} w(\tau)d\tau \right\rangle
\end{aligned}$$

il résulte que

$$u(t)-u(0) = \int_0^t w(\tau)\,d\tau \quad \forall\ t \in I.$$

Par conséquent $\dot{u} = w\ \ dt-p.p.$, i.e., $(\dot{v}_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^2(I,H;dt)$.
Montrons maintenant que (v_n) converge uniformément vers u dans I.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $t \in I$, $f_n(t) = f(t, v_n(\varphi_n(t)))$ et $z_n(t) = m(t, v_n(\varphi_n(t)))$, et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $Z_n : I \to H$ par

$$Z_n(t) = \int_0^t z_n(s)ds. \tag{3.87}$$

Grâce à (3.7) et (3.71) et le fait que $C \subset L\overline{B}$ pour $t \in I$, nous avons

$$\|z_n(t)\| \leq L\big(1 + \|v_n\big(\varphi_n(t)\big)\|\big) \leq L(1+K) := L_1, \tag{3.88}$$

c'est-à-dire,

$$\|Z_n(t)\| \leq \int_0^t \|z_n(s)\|ds \leq L_1 T. \tag{3.89}$$

Puis, en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 3.2.1, on conclut que $(Z_n(\cdot))$ converge uniformément dans $C(I,H)$ vers une application $Z(\cdot) \in C(I,H)$.
Par l'hypothèse (a_2) et la relation (3.71) nous avons pour chaque $t \in I$,

$$\|f_n(t)\| \leq M(1 + \|v_n(\varphi_n(t))\|) \leq M(1+K) =: L_2. \tag{3.90}$$

Fixons $n, m \in \mathbb{N}$. Grâce à (3.68) et à la définition de la distance de Vladimirov $dis(\cdot,\cdot)$, on obtient par les relations (3.61), (3.62), (3.88), (3.90), et $(H4)$, pour $t \in]0,T]$,

$$\begin{aligned}
&\Big\langle v_n\big(\theta_n(t)\big) - v_m\big(\theta_m(t)\big), \dot{v}_n(t) + f_n(t) + z_n(t) - \dot{v}_m(t) - f_m(t) - z_m(t) \Big\rangle \\
\leq\ & (1 + \|\dot{v}_n(t) + f_n(t) + z_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t) + f_m(t) + z_m(t)\|)\ dis\left(A\big(\theta_n(t)\big), A\big(\theta_m(t)\big)\right) \\
\leq\ & (1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\| + 2(L_1+L_2))\big(|\beta(\theta_n(t)) - \beta(\theta_m(t))|\big) \\
\leq\ & (1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\| + 2(L_1+L_2))\big(|\beta(\theta_n(t)) - \beta(t)| + |\beta(\theta_m(t)) - \beta(t)|\big) \\
\leq\ & \big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\| + 2(L_1+L_2)\big)(\varepsilon_n + \varepsilon_m)
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} & \langle v_n(\theta_n(t)) - v_m(\theta_m(t)), \dot{v}_n(t) + z_n(t) - \dot{v}_m(t) - z_m(t)\rangle \\ \leq\ & \langle v_n(\theta_n(t)) - v_m(\theta_m(t)), -f_n(t) + f_m(t)\rangle + \big(1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\| + 2(L_1 + L_2)\big)\big(\varepsilon_n + \varepsilon_m\big) \end{aligned} \tag{3.91}$$

Comme dans la preuve du Théorème 3.2.1, si on pose $\gamma_n = \max\{\varepsilon_n, \|Z_n(\cdot) - Z(\cdot)\|_C\}$, on obtient par (3.61), (3.87) et (3.88), pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} \|Z_n\big(\theta_n(t)\big) - Z_m\big(\theta_m(t)\big)\| &\leq \|Z_n\big(\theta_n(t)\big) - Z_n(t)\| + \|Z_n(t) - Z(t)\| + \|Z(t) - Z_m(t)\| \\ &+ \|Z_m(t) - Z_m\big(\theta_m(t)\big)\| \\ &\leq \int_t^{\theta_n(t)} \|z_n(\tau)\| d\tau + \|Z_n(t) - Z(t)\| + \|Z(t) - Z_m(t)\| \\ &+ \int_t^{\theta_m(t)} \|z_m(\tau)\| d\tau \\ &\leq (L_1 + 1)(\gamma_n + \gamma_m). \end{aligned} \tag{3.92}$$

Maintenant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $w_n = v_n + Z_n$. Grâce à (3.79), (3.87) et (3.88) nous avons pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|w_n(\theta_n(t)) - w_n(t)\| &\leq \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + \|Z_n(\theta_n(t)) - Z_n(t)\| \\ &\leq (2(\widetilde{M} + K)) + L_1)\varepsilon_n \to 0 \end{aligned} \tag{3.93}$$

lorsque $n \to \infty$, et par (3.89) et (3.74)

$$\|w_n(t)\| \leq \|v_n(t)\| + \|Z_n(t)\| \leq M_1 + L_1 T. \tag{3.94}$$

En utilisant les relations (3.92) et(3.91) on peut ecrire, pour $t \in]0, T]$,

$$\begin{aligned} & \Big\langle w_n(t) - w_m(t), \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t)\Big\rangle \\ \leq\ & \Big\langle w_n(t) - w_n(\theta_n(t)), \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t)\Big\rangle + \Big\langle w_m(t) - w_m(\theta_m(t)), \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t)\Big\rangle \\ +\ & \langle w_n(\theta_n(t)) - w_m(\theta_m(t)), \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t)\rangle \\ \leq\ & (\|\dot{w}_n(t)\| + \|\dot{w}_m(t)\|)(\|w_n(t) - w_n(\theta_n(t))\| + \|w_m(t) - w_m(\theta_m(t))\|) \\ +\ & \langle v_n(\theta_n(t)) - v_m(\theta_m(t)), \dot{v}_n(t) + z_n(t) - \dot{v}_m(t) - z_m(t)\rangle \\ +\ & \langle Z_n(\theta_n(t)) - Z_m(\theta_m(t)), \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t)\rangle \\ \leq\ & \langle v_n(\theta_n(t)) - v_m(\theta_m(t)), -f_n(t) + f_m(t)\rangle + (1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\| + 2(L_1 + L_2))(\varepsilon_n + \varepsilon_m) \\ +\ & (\|\dot{w}_n(t)\| + \|\dot{w}_m(t)\|)(2(\widetilde{M} + K)) + L_1)(\varepsilon_n + \varepsilon_m) + (L_1 + 1)(\gamma_n + \gamma_m). \end{aligned}$$

Comme pour tout $t \in I$, $\|v_n(\varphi_n(t))\| \leq K$, par la condition (a_1), il existe une application $\lambda_K \in L^1(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \lambda_K(t)\|v_n(\varphi_n(t)) - v_m(\varphi_m(t))\| \quad \forall t \in I, \tag{3.95}$$

alors, par l'inégalité de Cauchy-Schawrz

$$\begin{aligned}
&\Big\langle v_n\big(\theta_n(t)\big) - v_m\big(\theta_m(t), -f_n(t) + f_m(t)\Big\rangle \\
\leq\ & \|v_n\big(\theta_n(t)\big) - v_m\big(\theta_m(t)\big)\|\|f_n(t) - f_m(t)\| \\
\leq\ & \lambda_K(t)\Big(\|v_n\big(\theta_n(t)\big) - v_n(t)\| + \|w_n(t) - w_m(t)\| + \|Z_n(t) - Z_m(t)\| + \|v_m(t) - v_m\big(\theta_m(t)\big)\|\Big) \\
\times\ & \Big(\|v_n\big(\varphi_n(t)\big) - v_n(t)\| + \|w_n(t) - w_m(t)\| + \|Z_n(t) - Z_m(t)\| + \|v_m(t) - v_m\big(\varphi_m(t)\big)\|\Big).
\end{aligned}$$

On conclut que,

$$\langle w_n(t) - w_m(t), \dot{w}_n(t) - \dot{w}_m(t)\rangle \leq \lambda_k(t)\|w_n(t) - w_m(t)\|^2 + \Delta_{n,m}(t) + \Psi_{n,m}(t). \tag{3.96}$$

où,

$$\begin{aligned}
\Delta_{n,m}(t) &= (\|\dot{w}_n(t)\| + \|\dot{w}_m(t)\|)(2(\widetilde{M} + K)) + L_1)(\varepsilon_n + \varepsilon_m) \\
&+ (1 + \|\dot{v}_n(t)\| + \|\dot{v}_m(t)\| + 2(L_1 + L_2))(\varepsilon_n + \varepsilon_m) \\
&+ (\|\dot{w}_n(t)\| + \|\dot{w}_m(t)\|)(L_1 + 1)(\gamma_n + \gamma_m).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Psi_{n,m}(t) &= \lambda_K(t)\Big(\|v_n\big(\theta_n(t)\big) - v_n(t)\| + \|Z_n(t) - Z_m(t)\| + \|v_m(t) - v_m\big(\theta_m(t)\big)\|\Big) \\
&\times \Big(\|v_n\big(\varphi_n(t)\big) - v_n(t)\| + \|w_n(t) - w_m(t)\| + \|Z_n(t) - Z_m(t)\| + \|v_m(t) - v_m\big(\varphi_m(t)\big)\|\Big) \\
&+ \lambda_K(t)\|w_n(t) - w_m(t)\|\Big(\|v_n\big(\varphi_n(t)\big) - v_n(t)\| + \|Z_n(t) - Z_m(t)\| + \|v_m(t) - v_m\big(\varphi_m(t)\big)\|\Big)
\end{aligned}$$

Donc, par (3.79), (3.89) et (3.94) nous avons

$$\begin{aligned}
\|\Psi_{n,m}(t)\| &\leq |\lambda_k(t)|\big(2(\widetilde{M} + K)\varepsilon_n + \|Z_n(t)\| + \|Z_m(t)\| + 2(\widetilde{M} + K)\varepsilon_m\big)\big(2(\widetilde{M} + K)\varepsilon_n \\
&+ \|w_n(t)\| + \|w_m(t)\| + \|Z_n(t)\| + \|Z_m(t)\| + 2(\widetilde{M} + K)\varepsilon_m\big) \\
&+ |\lambda_k(t)|\,(\|w_n(t)\| + \|w_m(t)\|)\,\big(2(\widetilde{M} + K)\varepsilon_n + +\|Z_n(t)\| + \|Z_m(t)\| + 2(\widetilde{M} + K)\varepsilon_m\big) \\
&\leq |\lambda_k(t)|\big(4(\widetilde{M} + K) + 2L_1T)(4(\widetilde{M} + K) + 2(M_1 + L_1T) + 2L_1T) \\
&+ 2|\lambda_k(t)|(M_1 + L_1T)(4(\widetilde{M} + K) + 2L_1T),
\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}\|\Psi_{n,m}(\cdot)\|_{L^1} &\leq \|\lambda_k(\cdot)\|_{L^1}\big(4(\widetilde{M}+K)+2L_1T)(4(\widetilde{M}+K)+2(M_1+L_1T)+2L_1T)\\ &+ 2\|\lambda_k(\cdot)\|_{L^1}(M_1+L_1T)(4(\widetilde{M}+K)+2L_1T),\end{aligned}$$

Alors, $\Psi_{n,m}$ est bornée dans $L^1(I,\mathbb{R})$. D'autre part, par (3.79) on a

$$\begin{aligned}\|\Psi_{n,m}(t)\| &\leq |\lambda_k(t)|\big(2(\widetilde{M}+K)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)+\|Z_n(t)-Z_m(t)\|\big)\\ &\times \big(2(\widetilde{M}+K)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)+2(M_1+L_1T)+\|Z_n(t)-Z_m(t)\|\big)\\ &+ 2|\lambda_k(t)|(M_1+L_1T)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)+\|Z_n(t)-Z_m(t)\|\big)\end{aligned}$$

par la convergence uniforme de (Z_n) et comme $\varepsilon_n, \varepsilon_m \to 0$ lorsque $n, m \to \infty$ nous avons

$$\lim_{n,m\to\infty} \Psi_{n,m}(t) = 0,$$

donc, par le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T \Psi_{n,m}(\tau)d\tau = 0. \tag{3.97}$$

D'autre part, nous avons par (3.93)

$$\begin{aligned}\int_0^T \Delta_{n,m}(\tau)d\tau &= \int_0^T \Big(\|\dot{w}_n(\tau)\|+\|\dot{w}_m(\tau)\|\Big)\Big((2(\widetilde{M}+K))+L_1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)\Big)d\tau\\ &+ \int_0^T \Big(1+\|\dot{v}_n(\tau)\|+\|\dot{v}_m(\tau)\|+2(L_1+L_2)\Big)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)d\tau\\ &+ \int_0^T \Big(\|\dot{w}_n(\tau)\|+\|\dot{w}_m(\tau)\|\Big)(L_1+1)(\gamma_n+\gamma_m)d\tau\\ &\leq \big(\|\dot{w}_n\|_{L^1}+\|\dot{w}_m\|_{L^1}\big)\Big((2(\widetilde{M}+K)+L_1)(\varepsilon_n+\varepsilon_m)+(L_1+1)(\gamma_n+\gamma_m)\Big)\\ &+ \Big((1+2(L_1+L_2))T+\big(\|\dot{v}_n\|_{L^1}+\|\dot{v}_m\|_{L^1}\big)\Big)(\varepsilon_n+\varepsilon_m),\end{aligned}$$

et comme par (3.82), (3.88) les suites $(\dot{v}_n)$, $(\dot{w}_n)$ sont bornées dans $L^1(I,H)$, on conclut que

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T \Delta_{n,m}(\tau)d\tau = 0. \tag{3.98}$$

Alors, on obtient par (3.96), pour presque tout $t \in I$ (comme $w_n(0) = w_m(0) = u_0$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w_n(t)-w_m(t)\|^2 &= \int_0^t \langle w_n(s)-w_m(s), \dot{w}_n(s)-\dot{w}_m(s)\rangle ds\\ &\leq \int_0^t \lambda_K(s)\|w_n(s)-w_m(s)\|^2 ds + \int_0^T \Delta_{n,m}(s)ds + \int_0^T \Psi_{n,m}(s)ds.\end{aligned} \tag{3.99}$$

En utilisant le Lemme classique de Gronwall (voir Lemme 1.7.19), on en déduit que

$$\|w_n(t)-w_m(t)\|^2 \leq 2\bigg(\int_0^T \Delta_{n,m}(s)ds+\int_0^T \Psi_{n,m}(s)ds\bigg)\exp\bigg(\int_0^t 2\lambda_K(s)ds\bigg). \tag{3.100}$$

alors,

$$\|w_n(\cdot)-w_m(\cdot)\|_C^2 \leq 2\bigg(\int_0^T \Delta_{n,m}(s)ds+\int_0^T \Psi_{n,m}(s)ds\bigg)\exp\bigg(\int_0^t 2\lambda_k(s)ds\bigg). \tag{3.101}$$

D'où, grâce à (3.97) et (3.98), (w_n) est une suite de Cauchy dans $C(I,H)$, donc elle converge uniformément vers une application $w \in C(I,H)$. Par conséquent, (v_n) converge uniformément et fortement vers l'application $w-Z$. Par la relation (3.80) il est clair que $u=w-Z$, c'est-à-dire, (v_n) converge uniformément et fortement vers l'application absolument continue u, et par (3.77) nous avons aussi

$$\|u_n(t)-u(t)\| \to 0, \quad \text{uniformement sur } I. \tag{3.102}$$

De plus, par (3.79)

$$\|v_n(\theta_n(t))-u(t)\| \to 0, \quad \text{et} \quad \|v_n(\varphi_n(t))-u(t)\| \to 0 \text{ lorsque } n\to\infty. \tag{3.103}$$

Étape 3. Existence de solution

Dans cette dernière étape, nous montrons que u est une solution de notre problème $\big(P_{F,f}\big)$. La preuve est similaire à celle de l'étape 4 de la preuve du Théorème 3.2.1, avec une adaption au cas absolument continue .

Premièrement, remarquons que $u_n(t) \in D(A(\varphi_n(t)))$ pour tout $t \in I$, et par $(H4)$ et (3.61) $dis(A(\varphi_n(t),A(t)) \to 0$ lorsque $n\to\infty$, pour $t\in I$. Par $(H2)$ et (3.71) la suite $(y_n)=(A^0(\varphi_n(t),u_n(t))$ est bornée et alors elle est faiblement relativement compacte, alors elle converge faiblement vers une application y, donc on peut appliquer le Lemme 1.8.23 à $x_n=u_n(t)\to u(t)$ et $y_n=A^0(\varphi_n(t),u_n(t))\rightharpoonup y$, pour obtenir $u(t)\in D(A(t))$.

Ensuite, comme par (3.88), la suite (z_n) est bornée dans $L^2(I,H)$, on répète la même méthode de la preuve du Théorème 3.2.1 (étape 3) pour conclure qu'il existe un ensemble dt-négligeable $N_0' \subset I$ et une sous suite (n_q) de $\mathbb{N}$ tel que pour $t\in I\backslash N_0'$

$$z(t) \in \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \overline{co}\left\{z_k(t),\ k\geq n_q\right\} \quad \text{et} \quad z(t)\in F(t,u(t)). \tag{3.104}$$

Posons, pour tout $t\in I$,

$$h_n(t)=\dot{v}_n(t)+z_n(t).$$

Il est clair que $h_n \rightharpoonup h$ faiblement dans $L^2(I,\mathrm{H};dr)$ avec $h(\cdot)=\dot{u}(\cdot)+z(\cdot)$. Par le Théorème de Banach-Mazur (Théorème 1.7.3), il existe une suite $\big(w_j\big)_j$ avec pour tout j,

$w_j \in co\{h_k;\ \ k \geq j\}$ telle que $w_j \to h$ fortement. Ainsi, par le Théorème 1.7.14 on peut extraire une sous suite (w_{j_p}) de (w_j) convergeant vers h presque partout, i.e, il existe un ensemble négligeable $\widetilde{N} \subset I$ et une sous suite (j_p) de $\mathbb{N}$ satisfaisant

$$t \in I \setminus \widetilde{N} \Longrightarrow w_{j_p}(t) \to \dot{u}(t) + z(t) = h(t) \quad lorsque \quad p \to \infty. \tag{3.105}$$

Alors, nous avons pour $t \in I \setminus \widetilde{N}$

$$h(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\, S_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\{h_k(t) :\ k \geq j_n\}.$$

Pour tout $\xi \in H$, le théorème de séparation (Théorème 1.3.10), nous permet d'écrire

$$\langle \xi, h(t)\rangle \leq \delta^*(\xi, S_n) = \sup_{k\geq n}\langle \xi, h_k(t)\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

i.e.,

$$\langle \xi, h(t)\rangle \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n}\langle \xi, h_k(t)\rangle,$$

par suite,

$$\langle \dot{u}(t) + z(t), \xi\rangle = \langle h(t), \xi\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\langle h_n(t), \xi\rangle. \tag{3.106}$$

Pour terminer notre preuve, nous devrons vérifier l'inclusion dans $\left(P_{F,f}\right)$ presque partout sur I. On commence par souligner que pour presque tout $t \in I$, il existe une constante finie C_t telle que $\|\dot{v}_n(t)\| \leq C_t$. En effet, par (3.66), (3.70), (3.88) et (3.90) nous avons pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq \frac{\|u_{i+1}^n - u_i^n\|}{t_{i+1}^n - t_i^n} + 2(L_1 + L_2) \leq K\left(\frac{\|\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)\|}{t_{i+1}^n - t_i^n} + 1\right) + 2(L_1 + L_2). \tag{3.107}$$

On prend (3.61) en compte et on utilise le Théorème de différentiation de Lebesgue (Théorème 1.1.6), pour conclure qu'il existe un ensemble N_i dt-négligeable tel que si $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\setminus N_i$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} = \dot{\beta}(t).$$

Posons $N' = \cup_{i=1}^{k_n} N_i$, on conclut alors, que pour tout $t \in I \setminus N'$, il existe $C_t < +\infty$ tel que

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq C_t. \tag{3.108}$$

Comme $u(t) \in D(A(t))$ sur I, pour conclure notre preuve, il suffit de prouver, grâce à la Proposition 1.8.20, que pour presque tout $t \in I$ et $\eta \in D(A(t))$

$$\Big\langle \dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t)), u(t) - \eta \Big\rangle \leq \Big\langle A^0(t, \eta), \eta - u(t) \Big\rangle. \tag{3.109}$$

suite à l'hypothèse (H2) et au fait que

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + dis(A(\theta_n(t)), A(t)) \to 0 \quad \text{lorsque } \ n \to \infty,$$

on peut appliquer le Lemme 1.8.25, afin d'assurer l'existence d'une suite (ξ_n) telle que pour tout $\eta \in D(A(t))$,

$$\xi_n \in D(A(\theta_n(t))), \ \ \xi_n \to \eta \ \text{ et } \ A^0(\theta_n(t), \xi_n) \to A^0(t, \eta). \tag{3.110}$$

Maintenant pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I \backslash N_n$ l'ensemble sur lequel (3.68) est vérifiée. Par la monotonie de $A(t)$, nous avons pour $t \in I \backslash N_n$

$$\Big\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t) + f_n(t), v_n(\theta_n(t)) - \xi_n \Big\rangle \leq \langle A^0(\theta_n(t), \xi_n), \xi_n - v_n(\theta_n(t)) \rangle. \tag{3.111}$$

Par conséquent, par (3.88), (3.90), (3.108) et (3.111), pour tout
$t \in I \backslash \Big((\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} N_n) \bigcup N'_0 \bigcup N''_0 \bigcup N' \Big)$

$$\begin{aligned}
& \Big\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t) + f_n(t), u(t) - \eta \Big\rangle \\
= & \Big\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t) + f_n(t), v_n(\theta_n(t)) - \xi_n \Big\rangle + \Big\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t) + f_n(t), (u(t) - v_n(\theta_n(t))) - (\eta - \xi_n) \Big\rangle \\
\leq & \Big\langle A^0\big(\theta_n(t), \xi_n\big), \xi_n - v_n\big(\theta_n(t)\big) \Big\rangle + \big(C_t + L_1 + L_2\big)\big(\|v_n\big(\theta_n(t)\big) - u(t)\| + \|\xi_n - \eta\|\big),
\end{aligned}$$

alors les relations (3.103), (3.110) impliquent

$$\limsup_{n\to\infty} \Big\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t) + f_n(t), u(t) - \eta \Big\rangle \leq \Big\langle A^0(t, \rho), \eta - u(t) \Big\rangle,$$

et ceci donne par (3.106) et par (a_1), pour tout $t \in I$, $f_n(t) \to f(t, u(t))$, et donc

$$\begin{aligned}
\Big\langle \dot{u}(t) + z(t) + f(t, u(t)), u(t) - \eta \Big\rangle \ \ & \leq \ \ \limsup_{n\to\infty} \Big\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t) + f_n(t), u(t) - \eta \Big\rangle \\
& \leq \ \ \Big\langle A^0(t, \eta), \eta - u(t) \Big\rangle.
\end{aligned}$$

donc, par la Proposition 1.8.20

$$-\dot{u}(t) - z(t) - f(t, u(t)) \in A(t)u(t) \quad p.p. \ t \in I,$$

Par conséquent, utilisant la deuxième relation de (3.104), nous obtenons

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t)) + f(t, u(t)) \quad p.p. \ t \in I, \ \ \text{avec } u(0) = u_0.$$

De plus, par l'estimation (3.81), on a

$$\|u(t)-u(s)\| \leq K\big((t-s)+\beta(t)-\beta(s)\big) \qquad \text{pour} \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

par suite,

$$\frac{\|u(t)-u(s)\|}{t-s} \leq K\big(1+\frac{\beta(t)-\beta(s)}{t-s}\big) \qquad \text{pour} \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

lorsque s tend vers t, on obtient

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1+\dot{\beta}(t)), \quad p.p.\ t \in I.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Remarquons que le Théorème 3.4.1 a été établi sous hypothèse $(H4)$ avec $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}\big(I,\mathbb{R}\big)$. Dans le Théorème suivant, on donne un résultat d'existence, en supposant que $A(t)x$ est un cône et en affaiblissant la variation de $A(t)$, c'est-à-dire, on prend $\beta \in \mathcal{W}^{1,1}\big(I,\mathbb{R}\big)$.

Théorème 3.4.2.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D\big(A(t)\big) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone vérifiant $(H2)$ et

(H5) Il existe une fonction $\beta \in \mathcal{W}^{1,1}\big(I,\mathbb{R}\big)$ positive sur $[0,T[$ et croissante telle que

$$dis\ \big(A(t),A(s)\big) \leq \big|\beta(t)-\beta(s)\big|, \quad \forall s,t \in I. \tag{3.112}$$

(H6) Pour tout $t \in I$, et pour chaque $x \in D\big(A(t)\big)$, $A(t)x$ est un cône.
Soit $f : I \times H \to H$ une application telle que pour tout $x \in H$, l'application $f(\cdot,x)$ est mesurable. Supposons aussi que f satisfait (a_1) $\big($avec $\lambda_R \in L^1\big(I,\mathbb{R}\big)\big)$ et (a_2). Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides, convexes faiblement compactes satisfaisant (i), (ii) et (3.7). Alors, pour tout $u_0 \in D\big(A(0)\big)$ le problème :

$$(P_{F,f})\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) & \in \quad A(t)u(t)+F\big(t,u(t)\big)+f\big(t,u(t)\big) \quad dt-p.p.\, t \in I \\ u(0) & = \quad u_0, \end{cases}$$

admet une solution u absolument continue. De plus,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K\big(1+\dot{\beta}(t)\big) \quad p.p.t \in I,$$

pour une certaine constante K dépendant de $\|u_0\|, c, T, M, C$ et β.

Démonstration

Étape 1. Algorithme

On procède comme dans l'étape 1 de la preuve du Théorème 3.4.1, on considère une partition ayant les propriétés (3.61) et (3.62).
On suppose qu'il existe un réel positif L tel que $C \subset L\overline{B}_H$. De plus, on suppose, sans perte de généralité, que C est convexe et contient le zéro.
Soit pour tout $(t,x) \in I \times H$, $m(t,x)$ l'élément de norme minimale de $F(t,x)$, i.e., par (3.7)

$$m(t,x) \in F(t,x) \quad et \;\; \|m(t,x)\| \leq (1+\|x\|)L \tag{3.113}$$

et, pour tout $x \in H$, l'application $t \mapsto m(t,x)$ est $\mathcal{L}(I)$-mesurable (voir Théorème 1.5.15).
On définit une suite d'applications en escalier continues à droite $u_n : I \to H$ comme suit

$$u_n(t) = \begin{cases} u_0 & \text{pour} \quad t \in [t_0^n, t_1^n[\\ u_i^n & \text{pour} \quad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\\ u_{k_n}^n & \text{pour} \quad t = T, \end{cases} \tag{3.114}$$

où pour $i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$,

$$\begin{aligned} u_{i+1}^n &= J_{i+1}^n\Big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n)\big)ds\Big) \\ &= \Big(I_H + \big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big)A(t_{i+1}^n)\Big)^{-1}\Big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n)\big)ds\Big). \end{aligned} \tag{3.115}$$

Observons que par construction $u_{i+1}^n \in D\big(A(t_{i+1}^n)\big)$ (voir Proposition 1.8.6) et par la relation (3.115), on a

$$-\frac{1}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\Big(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n)\big)ds\Big) \in A(t_{i+1}^n)u_{i+1}^n. \tag{3.116}$$

Aussi, on définit l'application $v_n : I \to H$ par

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \frac{\big((\beta(t) - \beta(t_i^n)) + (t - t_i^n)\big)}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\Big(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n)\big)ds\Big) \\ &+ \; u_i^n - \int_{t_i^n}^{t} \big(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n)\big)ds, \end{aligned} \tag{3.117}$$

pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i = 0, 1, \ldots, k_n - 1$ et $v_n(T) = u_{k_n}^n$. Il est clair que l'application v_n est absolument continue, et

$$\begin{aligned} \dot{v}_n(t) &= \frac{\big(\dot{\beta}(t) + 1\big)}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\Big(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n)\big)ds\Big) \\ &- \; f(t,u_i^n) - m(t,u_i^n) \qquad \text{pour} \;\; t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Par conséquent, si on définit $\theta_n, \varphi_n : I \to I$ par

$$\theta_n(t) = t_{i+1}^n, \;\; \varphi_n(t) = t_i^n \qquad t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[, \; i = 0, 1, \ldots, k_n - 1,$$

et $\theta_n(0) = \varphi_n(0) = 0$, alors, par l'hypothèse $(H6)$ et les relations (3.116) et (3.118), on obtient

$$-\dot{v}_n(t) - f\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big) - m\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big) \in A\big(\theta_n(t)\big)v_n\big(\theta_n(t)\big) \quad dt - p.p.\, t \in I. \tag{3.119}$$

avec pour tout $t \in I$,

$$z_n(t) = m\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big) \in F\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big). \tag{3.120}$$

Étape 2. Estimations et Convergence.

On utilise les mêmes calculs de l'étape 2 de la preuve du Théorème 3.4.1. Pour cela, par les relations (3.115), (3.120) les hypothèses $(H5)$, $(H2)$, (a_1) et par les propriétés (a) et (b) du Lemme 1.8.24 on a

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \left\| J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(f(s, u_i^n) + m(s, u_i^n)\big)ds\right) - u_i^n \right\| \\
&\leq \left\| J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(f(s, u_i^n) + m(s, u_i^n)\big)ds\right) - J_{i+1}^n(u_i^n) \right\| + \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(\|f(s, u_i^n)\| + \|m(s, u_i^n)\|\big)ds + \big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big)\|A^0(t_i^n, u_i^n)\| \\
&+ \; dis\,\big(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)\big) + \sqrt{\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big)\big(1 + \|A^0(t_i^n, u_i^n)\|\big)\; dis\,\big(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)\big)} \\
&\leq \big(M(1 + \|u_i^n\|) + L(1 + \|u_i^n\|)\big)\delta_{i+1}^n + c(1 + \|u_i^n\|)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big) + \eta_{i+1}^n \\
&+ \sqrt{\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big)\big(1 + \|A^0(t_i^n, u_i^n)\|\big)\eta_{i+1}^n} \\
&\leq (M + L)(1 + \|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n + \big(1 + c(1 + \|u_i^n\|)\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big) \\
&+ \big(1 + c(1 + \|u_i^n\|)\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big) \\
&\leq \big(2 + (M + L + 2c)(1 + \|u_i^n\|)\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \left(\big(2(1 + c) + L + M\big) + \big(M + L + 2c\big)\|u_i^n\|\right)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big), \tag{3.121}$$

par suite,

$$\|u_{i+1}^n\| \leq \left(1 + \big(M + L + 2c\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big)\right)\|u_i^n\| + \big(2(1 + c) + L + M\big)\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big). \tag{3.122}$$

Par le Lemme 1.7.21, nous avons

$$\begin{aligned}
\|u_i^n\| &\leq \Big(\|u_0\| + \big(2(1+c)+M+L\big)\sum_{k=0}^{k_n-1}\big(\delta_{k+1}^n+\eta_{k+1}^n\big)\Big)\exp\Big(\big(M+L+2c\big)\sum_{k=0}^{k_n-1}\big(\delta_{k+1}^n+\eta_{k+1}^n\big)\Big)\\
&\leq \Big(\|u_0\| + \big(2(1+c)+M+L\big)(T+\beta(T))\Big)\exp\Big(\big(M+L+2c\big)(T+\beta(T))\Big)\\
&= K_1
\end{aligned}$$

grâce à cette inégalité, l'estimation (3.121) sera

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq \Big(\big(2(1+c)+L+M\big)+\big(M+L+2c\big)K_1\Big)\big(\delta_{i+1}^n+\eta_{i+1}^n\big)\\
&= K_2\big(\delta_{i+1}^n+\eta_{i+1}^n\big).
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Posons $K=\max\big(K_1,K_2\big)$, on conclut que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{t\in I}\|u(t)\|\leq K \tag{3.124}$$

et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} var\big(u_n\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=0}^{k_n-1}\|u_{i+1}^n-u_i^n\|\right)\leq K\big(T+\beta(T)\big). \tag{3.125}$$

De plus, en répétant les mêms calculs du théorème précédent, on obtient pour $n\in\mathbb{N}$ et $0\leq s\leq t\leq T$,

$$\|u_n(t)-u_n(s)\|\leq K((t-s)+\beta(t)-\beta(s)+\varepsilon_n). \tag{3.126}$$

Notre suite $(u_n)_n$ est uniformément bornée en norme et en variation. D'après Théorème 1.2.6, par extraction d'une suite, on peut supposer qu'il existe une sous suite (notée aussi $(u_n)_n$) telle que $(u_n(t))$ converge faiblement vers une application continue à variation bornée $u: I\longrightarrow H$, i.e.

$$u_n(t)\rightharpoonup u(t) \quad \text{pour} \quad t\in I, \tag{3.127}$$

en particulier, on a $u(0)=u_0$, et en prenant la limite inférieure dans (3.126), on obtient

$$\|u(t)-u(s)\|\leq K\big((t-s)+\beta(t)-\beta(s)\big) \qquad \text{pour} \quad 0\leq s\leq t\leq T, \tag{3.128}$$

par conséquent, u est absolument continue, plus précisément $u\in\mathcal{W}^{1,1}(I,H)$.
Afin d'obtenir des résultats similaires pour la suite (v_n), nous allons prouver que (v_n)

est aussi bornée en norme et en variation. Pour cela, observons que par (3.113), (3.117) (3.123), (3.124) et (a_2) nous avons pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\begin{aligned} \|v_n(t)\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \|u_i^n\| + 2\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (\|f(s,u_i^n)\| + \|m(s,u_i^n\|)ds \\ &\leq 2K + 2(M+L)(1+K)(t_{i+1}^n - t_i^n) \leq 2K + 2(M+L)(1+K) = M_1. \end{aligned} \tag{3.129}$$

et par (3.123)

$$\|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| = \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n). \tag{3.130}$$

Posons $M' = \max(M_1, K)$, on obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_C \leq M' \qquad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} var(v_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k_n-1} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \right) \leq M'(T+\beta(T)). \tag{3.131}$$

De plus, par (3.113), (3.117), (3.123) et (3.124), on a pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - u_n(t)\| = \|v_n(t) - u_i^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (\|f(s,u_i^n)\| + \|m(s,u_i^n\|)ds \\ &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2(M+L)(1+\|u_i^n\|)(t_{i+1}^n - t_i^n) \\ &\leq (K + 2(M+L)(1+K))\varepsilon_n = \widetilde{M}\varepsilon_n. \end{aligned} \tag{3.132}$$

Également, les relations (3.126), (3.132) donnent pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - v_n(s)\| &\leq \|v_n(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(s)\| + \|u_n(s) - v_n(s)\| \\ &\leq 2\widetilde{M}\varepsilon_n + K((t-s) + \beta(t) - \beta(s) + \varepsilon_n) \\ &= K((t-s) + \beta(t) - \beta(s)) + (2\widetilde{M} + K)\varepsilon_n \end{aligned} \tag{3.133}$$

D'autre part, comme la suite (v_n) des applications continues à variation bornée est uniformément bornée en norme et en variation, alors on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans H. Par (3.127) et (3.132), pour tout $\eta \in H$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \Big| \langle v_n(t) - u(t), \eta \rangle \Big| &= \lim_{n\to\infty} \Big| \langle v_n(t) - u_n(t), \eta \rangle - \langle u_n(t) - u(t), \eta \rangle \Big| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} K\varepsilon_n \|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

D'où,

$$v_n(t) \rightharpoonup u(t) \text{ pour tout } t \in I. \tag{3.134}$$

De plus, par (3.118), (3.123), (3.124) et (a_2) nous avons pour $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_n(t)\| &= \left\| \frac{(\dot{\beta}(t)+1)}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(f(s,u_i^n) + m(s,u_i^n)\big)ds\right) - f(t,u_i^n) - m(t,u_i^n)\right\| \\
&\leq \frac{(\dot{\beta}(t)+1)}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\left(\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \big(\|f(s,u_i^n)\| + \|m(s,u_i^n)\|\big)ds\right) + \|f(t,u_i^n)\| + \\
&+ \|m(t,u_i^n)\| \\
&\leq \frac{(\dot{\beta}(t)+1)}{\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n}\left(K\big(\delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big) + (M+L)(1+\|u_i^n\|)\delta_{i+1}^n\right) + (M+L)(1+\|u_i^n\|) \\
&\leq (\dot{\beta}(t)+1)\Big(K + (M+L)(1+K)\Big) + (M+L)(1+K) =: \beta_1(t). \qquad (3.135)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, la suite $(\dot{v}_n)$ est intégrablement bornée, i.e., il existe une fonction $\beta_1 \in L^1(I,\mathbb{R})$ telle que

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq \beta_1(t) \qquad p.p.\, t \in I, \qquad (3.136)$$

et puisque $\beta_1(\cdot)$ est une fonction strictement positive, on trouve

$$\frac{\|\dot{v}_n(t)\|}{\beta_1(t)} \leq 1 \qquad p.p.\, t \in I.$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $t \in I$, $h_n(t) = \dfrac{\|\dot{v}_n(t)\|}{\beta_1(t)}$, on a $h_n \in \overline{B}_{L^\infty}$.
Or, par le Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki (voir le Théorème 1.7.8), $\overline{B}_{L^\infty}$ est faiblement* compacte, donc, on peut extraire à $\big(h_n(\cdot)\big)$ une sous suite, notée aussi $\big(h_n(\cdot)\big)$, qui converge faiblement* vers un élément $h(\cdot) \in \overline{B}_{L^\infty}$.
D'où, pour tout $y(\cdot) \in L^1(I,H)$, on obtient

$$\int_0^T \langle h_n(\tau), y(\tau)\rangle d\tau \to \int_0^T \langle h(\tau), y(\tau)\rangle d\tau.$$

Pour tout $z(\cdot) \in L^\infty(I,H)$, comme $\beta_1(\cdot) \in L^1(I,\mathbb{R})$ l'application $\beta_1(\cdot)z(\cdot) \in L^1(I,H)$, donc

$$\int_0^T \langle h_n(\tau), \beta_1(\tau)z(\tau)\rangle d\tau \to \int_0^T \langle h(\tau), \beta_1(\tau)z(\tau)\rangle d\tau,$$

par suite,

$$\int_0^T \langle \dot{v}_n(\tau), z(\tau)\rangle d\tau \to \int_0^T \langle \beta_1(\tau)h(\tau), z(\tau)\rangle d\tau.$$

En posant $w(\cdot) = \beta_1(\cdot)h(\cdot)$, la suite $\big(\dot{v}_n(\cdot)\big)$ converge faiblement dans $L^1(I,H)$ vers $w(\cdot) \in L^1(I,H)$. De plus, pour presque tout $t \in I$

$$\|w(t)\| = \beta_1(t)\|h(t)\| \leq \beta_1(t).$$

Donc, pour tout $\xi \in L^\infty(I,H)$,

$$\lim_{n\to\infty}\langle \dot v_n, \xi\rangle = \langle w, \xi\rangle,$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle \dot v_n(\tau), \xi(\tau)\rangle d\tau = \int_0^T \langle w(\tau), \xi(\tau)\rangle d\tau,$$

en prenant $\xi = x.\mathbf{1}_{]0,t]}$ pour $x \in H$ et $t \in I$, il est bien clair que $\xi \in L^\infty(I,H)$ et

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle \dot v_n(\tau), x.\mathbf{1}_{]0,t]}(\tau)\rangle d\tau = \int_0^T \langle w(\tau), x.\mathbf{1}_{]0,t]}(\tau)\rangle d\tau,$$

donc, par Théorème 1.5.11

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle x, \int_0^t \dot v_n(\tau)d\tau\right\rangle = \left\langle x, \int_0^t w(\tau)d\tau\right\rangle,$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle x, v_n(t) - v_n(0)d\tau\right\rangle = \left\langle x, \int_0^t w(\tau)d\tau\right\rangle,$$

ceci implique que

$$\left\langle x, u(t) - u(0)d\tau\right\rangle = \left\langle x, \int_0^t w(\tau)d\tau\right\rangle.$$

Par conséquent $u(t) - u(0) = \displaystyle\int_0^t w(\tau)d\tau$. On conclut que $\dot u = w$ dt-p.p sur I et donc, $\dot v_n \rightharpoonup \dot u$ dans $L^1(I,H)$.

Montrons maintenant que $(v_n)_n$ converge uniformément vers u dans I.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $t \in I$,

$$f_n(t) = f(t, v_n(\varphi_n(t))) \quad \text{et} \quad z_n(t) = m(t, v_n(\varphi_n(t))), \tag{3.137}$$

et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit $Z_n : I \longrightarrow H$ par

$$Z_n(t) = \int_0^t z_n(\tau)d\tau.$$

Comme dans le preuve du Théorème 3.4.1, par le Théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 1.7.7), on peut supposer que la suite $(Z_n(\cdot))_n$ converge uniformément dans $C(I,H)$ vers une certaine application $Z(\cdot) : I \to H$.

Ensuite, nous suivons les mêmes étapes de la démonstration du théorème 3.4.1 pour conclure que la suite (v_n) est une suite de Cauchy dans $C(I,H)$. Par conséquent, (v_n) converge uniformément et fortement vers une application absolument continue u.

$$\|v_n(\cdot) - u(\cdot)\|_C \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

De plus, on obtient pour $t \in I$

$$\|v_n\big(\theta_n(t)\big) - u(t)\| \to 0 \text{ et } \|v_n\big(\varphi_n(t)\big) - u(t)\| \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{3.138}$$

Étape 3. Existence de Solution

Montrons que u est une solution de notre problème $\big(P_{F,f}\big)$.

La preuve que pour tou $t \in I$, $u(t) \in D\big(A(t)\big)$, est la même que dans la preuve du Théorème 3.4.1. D'autre part, on sait que $\big(\dot{v}_n\big)$ $\sigma\big(L^1(I,H), L^\infty(I,H)\big)$ converge vers $\dot{u}$, et que $\big(z_n\big)$ $\sigma\big(L^1(I,H), L^\infty(I,H)\big)$ converge vers une application $z \in L^1(I,H)$ et que $z(t) \in F\big(t, u(t)\big)$. On suppose aussi que $\big(\dot{v}_n\big)$ converge au sens de Komlos vers $\dot{u}$ et que $\big(z_n\big)$ converge au sens de Komlos vers z. Par conséquent, il existe un ensemble N de I négligeable tel que pour tout $t \notin N$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \dot{v}_j(t) = \dot{u}(t) \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j(t) = z(t), \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.139}$$

Comme $u(t) \in D\big(A(t)\big)$ sur I, par la Proposition 1.8.20, pour montrer que $-\dot{u}(t) - z(t) - f(t, u(t)) \in A(t)u(t)$ p.p. $t \in I$, il suffit de montrer que, pour tout $\eta \in D\big(A(t)\big)$

$$\Big\langle \dot{u}(t) + z(t) + f\big(t, u(t)\big), u(t) - \eta \Big\rangle \leq \Big\langle A^0\big(t,\eta\big), \eta - u(t) \Big\rangle \quad p.p. \tag{3.140}$$

Soit $\eta \in D\big(A(t)\big)$, par le Lemme (1.8.25), il existe $\psi_n \in D\big(A(\theta_n(t))\big)$ tel que

$$\psi_n \to \eta \quad \text{et} \quad A^0\big(\theta_n(t), \psi_n\big) \to A^0\big(t,\eta\big).$$

Soit $I\backslash N_n$ l'ensemble sur lequel (3.119) est vérifiée. Comme $A(t)$ est monotone, en particulier, pour $t \in I\backslash N_n$

$$\Big\langle A^0\big(\theta_n(t), \psi_n\big) + \dot{v}_n(t) + z_n(t) + f\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big), \psi_n - v_n\big(\theta_n(t)\big) \Big\rangle \geq 0,$$

par suite,

$$\Big\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t) + f\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big), v_n\big(\theta_n(t)\big) - \psi_n \Big\rangle \leq \Big\langle A^0\big(\theta_n(t), \psi_n\big), \psi_n - v_n\big(\theta_n(t)\big) \Big\rangle \tag{3.141}$$

nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\Big\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t) + f\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big), u(t) - \eta \Big\rangle &= \Big\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t) + f\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big), v_n\big(\theta_n(t)\big) - \psi_n \Big\rangle \\ &+ \Big\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t) + f\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big), u(t) - v_n\big(\theta_n(t)\big) \Big\rangle \\ &+ \Big\langle \dot{v}_n(t) + z_n(t) + f\big(t, v_n\big(\varphi_n(t)\big)\big), \psi_n - \eta \Big\rangle.\end{aligned}$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\langle \dot{v}_j(t)+z_j(t)+f\big(t,v_j\big(\varphi_j(t)\big)\big),u(t)-\eta\Big\rangle\\
=\ &\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\langle \dot{v}_j(t)+z_j(t)+f\big(t,v_j\big(\varphi_j(t)\big)\big),v_j\big(\theta_j(t)\big)-\psi_j\Big\rangle\\
+\ &\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\langle \dot{v}_j(t)+z_j(t)+f\big(t,v_j\big(\varphi_j(t)\big)\big),u(t)-v_j\big(\theta_j(t)\big)\Big\rangle\\
+\ &\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\langle \dot{v}_j(t)+z_j(t)+f\big(t,v_j\big(\varphi_j(t)\big)\big),\psi_j-\eta\Big\rangle,
\end{aligned}
$$

alors, par (3.136), (3.138), (3.141), et (a_2)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\langle \dot{v}_j(t)+z_j(t)+f\big(t,v_j\big(\varphi_j(t)\big)\big),u(t)-\eta\Big\rangle\\
\leq\ &\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\langle A^0\big(\theta_j(t),\psi_j\big),\psi_j-v_j\big(\theta_j(t)\big)\Big\rangle+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big\|\dot{v}_j(t)+z_j(t)+f\big(t,v_j\big(\varphi_j(t)\big)\big)\big\|\big\|u(t)-v_j\big(\theta_j(t)\big\|\\
+\ &\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big\|\dot{v}_j(t)+z_j(t)+f\big(t,v_j\big(\varphi_j(t)\big)\big)\big\|\big\|\psi_j-\eta\big\|\\
\leq\ &\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\langle A^0\big(\theta_j(t),\psi_j\big),\psi_j-v_j\big(\theta_j(t)\big)\Big\rangle+(\beta_1(t)+(L+M)(1+K))\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big\|u(t)-v_j\big(\theta_j(t)\big\|\\
+\ &(\beta_1(t)+(L+M)(1+K))\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big\|\psi_j-\eta\big\|,
\end{aligned}
\tag{3.142}
$$

comme,

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle A^0\big(\theta_j(t),\psi_j\big),\psi_j-v_j\big(\theta_j(t)\big)\Big\rangle\\
=\ &\Big\langle A^0\big(\theta_j(t),\psi_j\big)-A^0(t,\eta),\psi_j-\eta+u(t)-v_j\big(\theta_j(t)\big)\Big\rangle+\Big\langle A^0\big(\theta_j(t),\psi_j\big)-A^0(t,\eta),\eta-u(t)\Big\rangle\\
+\ &\Big\langle A^0(t,\eta),\psi_j-\eta+u(t)-v_j\big(\theta_j(t)\big)\Big\rangle+\Big\langle A^0(t,\eta),\eta-u(t)\Big\rangle\\
\leq\ &\|A^0\big(\theta_j(t),\psi_j\big)-A^0(t,\eta)\|\big(\|\psi_j-\eta\|+\|u(t)-v_j\big(\theta_j(t)\big)\|\big)+\|A^0\big(\theta_j(t),\psi_j\big)-A^0(t,\eta)\|\|\eta-u(t)\|\\
+\ &\|A^0(t,\eta)\|\big(\|\psi_j-\eta\|+\|u(t)-v_j\big(\theta_j(t)\big)\|\big)+\Big\langle A^0(t,\eta),\eta-u(t)\Big\rangle;
\end{aligned}
$$

et,

$$\begin{aligned} &\Big\langle \dot{v}_j(t) + z_j(t) + f\big(t, v_j\big(\varphi_j(t)\big)\big), u(t) - \eta \Big\rangle \\ = &\Big\langle \dot{v}_j(t) + z_j(t) + f(t, u(t)), u(t) - \eta \Big\rangle + \Big\langle f\big(t, v_j\big(\varphi_j(t)\big)\big) - f(t, u(t)), u(t) - \eta \Big\rangle, \end{aligned}$$

par conséquent, la relation (3.142) sera

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \Big\langle \dot{v}_j(t) + z_j(t) + f(t, u(t)), u(t) - \eta \Big\rangle \\ \leq\ & \|u(t) - \eta\| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \|f\big(t, v_j\big(\varphi_j(t)\big)\big) - f(t, u(t))\| \\ +\ & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \|A^0\big(\theta_j(t), \psi_j\big) - A^0(t,\eta)\| \big(\|\psi_j - \eta\| + \|u(t) - v_j\big(\theta_j(t)\big)\|\big) \\ +\ & \|\eta - u(t)\| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \|A^0\big(\theta_j(t), \psi_j\big) - A^0(t,\eta)\| + \|A^0(t,\eta)\| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \big(\|\psi_j - \eta\| + \|u(t) - v_j\big(\theta_j(t)\big)\|\big) \\ +\ & \Big\langle A^0(t,\eta), \eta - u(t) \Big\rangle + (\beta_1(t) + (L+M)(1+K)) \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \big\|u(t) - v_j\big(\theta_j(t)\big\| \\ +\ & (\beta_1(t) + (L+M)(1+K)) \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \big\|\psi_j - \eta\big\|, \end{aligned}$$

Passons à la limite lorsque $n \to \infty$, dans cette inégalité, on obtient (3.140) en utilisant la convergence au sens de Komlos de $\big(\dot{v}_n\big)$ vers $\dot{u}$, la convergence au sens de Komlos de $\big(z_n\big)$ vers z, la Propositon 1.7.11, la relation (3.138) et la continuité de $f\big(t, \cdot\big)$. Par conséquent, on obtient

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + z(t) + f(t, u(t)) \quad p.p.,$$

avec $u(0) = u_0$, et comme $z(t) \in F(t, u(t))$, on obtient

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in \quad A(t)u(t) + F\big(t, u(t)\big) + f\big(t, u(t)\big), \quad p.p.\ t \in I \\ u(0) & = \quad u_0. \end{cases}$$

De plus par la même méthode du théorème précédent, on obtient

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)) \quad p.p.\, t \in I.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Comme application à nos résultats d'existence établis précédement, nous fournissons dans le théorème suivant un résultat d'existence pour une inclusion différentielle (du second-ordre) gouvernée par un opérateur maximal monotone à valeurs coniques, avec une perturbation univoque qui peut dépendre d'une fonction primitive.
Le problème peut être considéré comme du second ordre.

Théorème 3.4.3.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D\big(A(t)\big) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone qui vérifie $(H2)$, $(H5)$ et $(H6)$. Soit $f : I \times H \times H \to H$ une application telle que pour tout $(x, y) \in H \times H$, l'application $f(\cdot, x, y)$ est Lebesgue mesurable sur I et satisfait

(a_3) *il existe une constante positive M telle que*

$$\|f\big(t, x, \bar{x}\big)\| \leq M(1 + \|x\| + \|\bar{x}\|), \quad \forall (t, x, \bar{x}) \in I \times H \times H. \tag{3.143}$$

(a_4) *Pour tout $R > 0$, il existe une fonction réelle positive $\alpha_R(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in I$*

$$\|f(t, x, z) - f(t, \bar{x}, \bar{z})\| \leq \alpha_R(t)\Bigg(\|x - \bar{x}\| + \|z - \bar{z}\|\Bigg) \quad \forall x, \bar{x}, z, \bar{z} \in \overline{B}(0, R). \tag{3.144}$$

Alors, pour tout $u_0 \in D\big(A(0)\big)$ et $y_0 \in H$, il existe une application continue $u : I \to H$ et une application absolument continue $y : I \to H$ vérifiant

$$y(t) = y_0 + \int_0^t u(s)ds, \qquad \forall\, t \in I,$$

$$(\widetilde{P}_f) \begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) & \in \quad A(t)u(t) + f\big(t, u(t), y(t)\big) \quad dt - p.p.\, t \in I \\ u(0) & = \quad u_0. \end{cases}$$

Démonstration
On définit un opérateur $B(t)$ sur $H \times D(A(t))$ comme suit :

$$B(t)(u, v) = \{0\} \times A(t)v, \quad \forall (u, v) \in D(B(t)) = H \times D(A(t)),$$

et une application $g : I \times H^2 \to H^2$ par

$$g(t, (u, v)) = (-v, f(t, u, v)), \quad \forall (t, u, v) \in I \times H \times H.$$

$B(t)$ est un opérateur maximal monotone à valeurs coniques satisfaisant les hypothèses $(H2)$ et $(H5)$. En effet,
Monrtons que $B(t)$ est monotone.

Soient (u,v), $(u',v') \in D(B(t))$, et soient $(y_1,y_2) \in B(t)(u,v)$, $(y_1',y_2') \in B(t)(u',v')$, alors, d'après la définition de $B(t)$, $y_1 = y_1' = 0$, $y_2 \in A(t)v$ et $y_2' \in A(t)v'$, donc

$$\begin{aligned}
\langle (u,v)-(u',v'),(y_1,y_2)-(y_1',y_2')\rangle &= \langle (u-u',v-v'),(0,y_2-y_2')\rangle \\
&= \langle u-u',0\rangle + \langle v-v',y_2-y_2'\rangle \\
&= \langle v-v',y_2-y_2'\rangle \geq 0,
\end{aligned}$$

car $A(t)$ est un opérateur monotone, par conséquent, $B(t)$ est un opérateur monotone.
Montrons que $B(t)$ est maximal monotone.
Il suffit de montrer que $H \times H \subset R(I_{H\times H} + B(t))$, pour cela, soit $(x,y) \in H \times H$, on doit trouver $(u,v) \in H \times H$ tel que $(x,y) \in (u,v) + B(t)(u,v)$, i.e., $(x-u, y-v) \in B(t)(u,v) = \{0\} \times A(t)v$. Comme $A(t)$ est un opérateur maximal monotone, alors, $y \in H = R(I_H + A(t))$, i.e., il existe $v \in H$ tel que $y \in v + A(t)v$, c'est-à-dire, $y - v \in A(t)v$, alors, $(0, y-v) \in \{0\}\times A(t)v$, i.e., $(x,y) \in (x,v)+B(t)(x,v)$, donc il existe $(x,v) \in H\times H$ tel que $(x,y) \in (I_{H\times H} + B(t))(x,v)$, par conséquent, $B(t)$ est un opérateur maximal monotone.
Montrons que $B(t)$ est à valeurs coniques.
Soit $(u,v) = D(B(t))$, et soient $(x,y) \in B(t)(u,v)$ et $\lambda \in [0,+\infty[$, on a

$$(x,y) \in B(t)(u,v) = \{0\} \times A(t)v \iff x = 0 \;\text{ et }\; y \in A(t)v,$$

comme $A(t)$ est à valeurs coniques, alors

$$\lambda x = 0 \;\text{ et }\; \lambda y \in A(t)v,$$

c'est-à-dire,

$$\lambda(x,y) \in B(t)(u,v),$$

par conséquent, $B(t)$ est à valeurs coniques.
Montrons que $B(t)$ satisfait l'hypothèse $(H2)$.
Soient $t \in I$, $(u,v) \in D(B(t))$,

$$\begin{aligned}
\|B^0(t,(u,v))\| &= \|Proj_{B(t)(u,v)}(0,0)\| = \|Proj_{\{0\}\times A(t)v}(0,0)\| \\
&= d((0,0),\{0\}\times A(t)v) \\
&= \inf_{(x,y)\in\{0\}\times A(t)v} \|(0,0)-(x,y)\| = \inf_{(x,y)\in\{0\}\times A(t)v} \|(x,y)\| \\
&= \inf_{x\in\{0\},\, y\in A(t)v} \big(\|x\| + \|y\|\big) \\
&= \inf_{y\in A(t)v} \|y\| = \|Proj_{A(t)v}(0)\| \\
&= \|A^0(t,v)\| \leq c(1+\|v\|) \leq c(1+\|(u,v)\|).
\end{aligned}$$

Finalement, montrons que $B(t)$ satisfait l'hypothèse $(H5)$.
Soient $t, s \in I$, $(u, v) \in D(B(t))$, $(u', v') \in D(B(s))$, et soient $(x, y) \in B(t)(u, v)$, et $(x', y') \in B(s)(u', v')$, alors, $x = x' = 0$, $y \in A(t)v$, et $y' \in A(t)v'$, donc

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\langle (x,y)-(x',y'),(u',v')-(u,v)\rangle}{1+\|(x,y)\|+\|(x',y')\|} & = & \dfrac{\langle (0,y-y'),(u'-u,v'-v)\rangle}{1+\|(0,y)\|+\|(0,y')\|} \\ & = & \dfrac{\langle 0,u'-u\rangle+\langle y-y',v'-v\rangle}{1+\|y\|+\|y'\|} \\ & = & \dfrac{\langle y-y',v'-v\rangle}{1+\|y\|+\|y'\|} \\ & \leq & dis(A(t),A(s)) \leq |\beta(t)-\beta(s)|, \end{array}$$

par suite,

$$dis(B(t), B(s)) \leq |\beta(t) - \beta(s)|.$$

Aussi, on doit montrer que g satisfait les hypothèses (a_1) et (a_2). Premièrement, montrons que g satisfait l'hypothèse (a_1).
Soient $t \in I$, $R > 0$ et soient $u, v, u', v' \in \overline{B}(0, R)$, alors

$$\begin{array}{rcl} \|g(t,(u,v))-g(t,(u',v'))\| & = & \|(-v,f(t,u,v))-(-v',f(t,u',v'))\| \\ & = & \|(-v+v',f(t,u,v)-f(t,u',v'))\| \\ & = & \|v-v'\|+\|f(t,u,v)-f(t,u',v')\| \\ & \leq & \|v-v'\|+\alpha_R(t)(\|u-u'\|+\|v-v'\|) \\ & \leq & (\alpha_R(t)+1)(\|u-u'\|+\|v-v'\|) =: \gamma_R(t)(\|(u,v)-(u',v')\|), \end{array}$$

avec $\gamma_R \in L^1(I, \mathbb{R})$.
Enfin, montrons que g satisfait l'hypothèse (a_2). Soient $t \in I$, $(u, v) \in H \times H$, alors

$$\begin{array}{rcl} \|g(t,(u,v))\| & = & \|(-v,f(t,u,v))\| = \|v\|+\|f(t,u,v)\| \\ & \leq & \|v\|+M(1+\|v\|+\|u\|) \leq (M+1)(1+\|v\|+\|u\|) \\ & = & (1+M)(1+\|(u,v)\|). \end{array}$$

Par conséquent, on peut appliquer le Théorème 3.4.2 (en prenant $F = \{0\}$), pour affirmer l'existence d'une solution unique absolument continue $X = (y, u)$ au problème suivant

$$(P_1)\left\{\begin{array}{rcl} -\dot{X}(t) & \in & B(t)X(t)+g(t,X(t)), \quad p.p.\, t\in I, \\ X(0) & = & (y_0,u_0)\in D(B(0)) = H\times D(A(0)). \end{array}\right.$$

Le problème (P_1) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} -(\dot{y}(t),\dot{u}(t)) & \in & \{0\}\times A(t)u(t)+(-u(t),f(t,y(t),u(t))), \quad p.p.\, t\in I, \\ (y(0),u(0)) & = & (y_0,u_0)\in D(B(0)) = H\times D(A(0)), \end{array}\right.$$

i.e., $u(t) = \dot{y}(t)$, p.p. $t \in I$, et

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t, y(t), u(t)), & p.p.\, t \in I, \\ (y(0), u(0)) = (y_0, u_0) \in H \times D(A(0)), \end{cases}$$

c'est à dire, $y \in \mathcal{W}^{2,1}(I, H)$ et vérifie le problème du second ordre suivant

$$\begin{cases} -\ddot{y}(t) \in A(t)\dot{y}(t) + f(t, y(t), \dot{y}(t)), & p.p.\, t \in I, \\ (y(0), \dot{y}(0)) = (y_0, u_0) \in H \times D(A(0)). \end{cases}$$

Ceci termine la preuve du théorème. ■

Dans le théorème suivant on donne un résultat d'existence et d'unicité, lorsque on suppose sur la multi-application F une hypothèse de monotonie.

Théorème 3.4.4.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D\big(A(t)\big) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H2)$, $(H5)$ et $(H6)$. Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et faiblement compactes satisfaisant (i), (ii), (3.7) et

(iii) F est fortement monotone, c'est-à-dire, il existe une fonction intégrable positive γ, tel que

$$\big\langle x - y, u - v \big\rangle \geq \gamma(t)\|u - v\|^2, \ \ \forall\, u, v \in H,\ x \in F(t, u),\ y \in F(t, v) \quad \text{et} \quad \forall t \in I. \tag{3.145}$$

Alors, pour tout $u_0 \in D\big(A(0)\big)$ le problème

$$\big(P_F\big) \begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) & \in & A(t)u(t) + F\big(t, u(t)\big) \quad dt - p.p.\, t \in I, \\ u(0) & = & u_0, \end{cases}$$

admet une solution unique absolument continue. De plus,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K\big(1 + \dot{\beta}(t)\big) \quad p.p.\, t \in I, \tag{3.146}$$

pour une certaine constante K dépendant de $\|u_0\|, c, T, C$ et β.

Démonstration
Pour l'existence, par le Théorème 3.4.2 avec $\big(f \equiv 0\big)$ le problème $\big(P_F\big)$ admet une solution u, avec

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K\big(1 + \dot{\beta}(t)\big) \quad p.p.\, t \in I,$$

où K est une constante dépendant de $\|u_0\|, c, T, C$ et β.

Donc, on montre seulement l'unicité de la solution.
Soient u, v deux solutions du problème $\big(P_F\big)$, alors, il existe deux fonctions $h,\, g : I \to H$ mesurables telles que pour tout $t \in I$, $h(t) \in F\big(t, u(t)\big)$, $g(t) \in F\big(t, v(t)\big)$ et

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + h(t) \quad \text{et} \quad -\dot{v}(t) \in A(t)v(t) + g(t), \tag{3.147}$$

pour p.p. $t \in I$. D'autre part, par l'hypothèse (iii)

$$\Big\langle h(t) - g(t), u(t) - v(t) \Big\rangle \geq \gamma(t)\|u(t) - v(t)\|^2 \quad \forall\, t \in I, \tag{3.148}$$

et par la relation (3.147) et la monotonie de $A(t)$, nous avons pour presque tout $t \in I$,

$$\Big\langle \dot{u}(t) + h(t) - \dot{v}(t) - g(t), u(t) - v(t) \Big\rangle \leq 0,$$

c'est-à-dire,

$$\Big\langle \dot{u}(t) - \dot{v}(t), u(t) - v(t) \Big\rangle \leq -\Big\langle h(t) - g(t), u(t) - v(t) \Big\rangle,$$

par suite, par la relation (3.148), la dernière estimation devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|^2\right) \leq -\gamma(t)\|u(t) - v(t)\|^2 \leq 0,$$

par intégration sur $[0, t]$ $(t \in I)$

$$\|u(t) - v(t)\|^2 \leq \|u(0) - v(0)\|^2 = 0.$$

Par conséquent, $u = v$, ceci termine la preuve du théorème. ■

Voici quelques conséquences des résultats obtenus précédement.

Théorème 3.4.5.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H2)$, $(H5)$ et $(H6)$ avec $D(A(t))$ boule-compact pour tout $t \in I$. Soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes faiblement compactes satisfaisant

1. *$t \mapsto F(t, w(t))$ est scalairement mesurable sur I pour toute application mesurable $w : I \to H$*
2. *Pour tout $t \in I$, fixé, $F(t, \cdot)$ est scalairement semi-continue supérieurement*
3. *$F(t, x) \subset \alpha(t)\overline{B}_H$ pour tout $(t, x) \in I \times H$, pour une certaine application positive $\alpha \in L^1(I, \mathbb{R})$.*

Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$, le problème

$$(P_F)\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & A(t)u(t) + F(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in I; \\ u(0) & = & u_0, \end{cases}$$

admet une solution absolument continue u. De plus,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)) \quad p.p.\ t \in I,$$

pour une certaine constante K dépendant de $\|u_0\|, c, T$ et α. De plus, si F est fortement monotone, alors la solution est unique.

Démonstration
On définit $\Gamma : I \rightrightarrows H$ par $\Gamma(t) := \alpha(t)\overline{B}_H$, alors Γ est une multi-application mesurable intégrablement bornée à valeurs convexes faiblement compactes. Alors, d'après le Théorème 2.4.2, le problème (P_F) admet au moins une solution absolument continue. De plus, Si F est fortement monotone, en répétant les mêmes calculs dans la preuve du Théorème précédent, on obtient l'unicité de la solution. ■

Nous allons démontrer une application directe du résultat indiqué ci-dessus impliquant le sous-différentiel d'une fonction Lipschitzienne. Nous considérons une multi-application absolument continue à valeurs convexes $C : I \rightrightarrows H$ satisfaisant :

$$|d(x, C(t)) - d(y, C(\tau))| \leq \|x - y\| + |\chi(t) - \chi(\tau)|$$

pour tous $t, \tau \in I$ et pour tous $x, y \in H$, où χ est une fonction réelle absolument continue avec $\dot{\chi}(t) \neq 0$ p.p. Considérons le sous-différentiel $\partial[\dot{\chi}(t)d_{C(t)}](x)$ où $d_{C(t)} : x \mapsto d(x, C(t)) = \inf\limits_{y \in C(t)} \|x - y\|$. Ensuite, pour chaque application mesurable $u : I \to H$, la multi-application $t \mapsto \partial[\dot{\chi}(t)d_{C(t)}](u(t))$ est scalairement mesurable (voir la Proposition 1.6.2 et le Théorème 1.6.4) et pour tout $t \in I$ fixé, la multi-application $x \mapsto \partial[\dot{\chi}(t)d_{C(t)}](x)$ est scalairement semi-continue supérieurement (voir le Théorème 1.6.6), car la fonction distance est Lipschitzienne.

Théorème 3.4.6.
Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H1)$, $(H2)$ et $(H6)$ avec $D(A(t))$ boule-compact pour tout $t \in I$. $C : I \rightrightarrows H$ une multi-application absolument continue à valeurs convexes fermées. ALors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$ le problème

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & A(t)u(t) + \partial[\dot{\chi}(t)d_{C(t)}](u(t)) \quad p.p.\ t \in I; \\ u(0) & = & u_0, \end{cases}$$

admet une solution absolument continue u. De plus,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1+\dot{\beta}(t)) \quad p.p.\ t \in I,$$

pour une certaine constante K dépendant de $\|u_0\|, c, T$ et χ. Si de plus, on suppose que $D(A(t)) \subset C(t)$ pour tout $t \in I$, alors

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + N_{C(t)}(u(t)) \quad p.p.\ t \in I.$$

Démonstration

L'existence découle directement du Théorème 2.4.2 du chapitre 1 ou du Théorème 3.4.5. Si $D(A(t)) \subset C(t)$ pour tout $t \in I$, puisque $u(t) \in D(A(t)) \subset C(t)$, alors par la caractérisation du cône via le sous-différentiel de la fonction distance, l'inclusion $\partial[\dot{\chi}(t)d_{C(t)}](u(t)) \subset N_{C(t)}(u(t))$ est valide. Par conséquent, nous obtenons l'inclusion

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + N_{C(t)}(u(t)) \quad p.p.\ t \in I.$$

■

Nous considérons maintenant une multi-application $C : I \times H \rightrightarrows H$ k-Lipschitzienne à valeurs convexes fermées satisfaisant

$$|d(x, C(t,w)) - d(y, C(\tau, z))| \leq \|x-y\| + k\big(|t-\tau| + \|w-z\|\big)$$

pour tous $t, \tau \in I$ et pour tous $x, y, z, w \in H$, où k est une constante positive. Alors c'est facile de vérifier que la multi-application $\partial[k.d_{C(t,x)}](x)$ est scalairement semi-continue supérieurement à valeurs convexes faiblement compactes d'après les Théorèmes 1.6.6 et 1.6.5.

Nous donnons maintenant une variante du résultat précédent.

Théorème 3.4.7.

Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(H1)$ et $(H3)$ avec $D(A(t))$ est boule-compact pour tout $t \in I$. Soit $C : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application k-Lipschitzienne à valeurs convexes fermées. ALors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$ le problème

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & A(t)u(t) + \partial[k.d_{C(t,u(t))}](u(t)) \quad p.p.\ t \in I; \\ u(0) & = & u_0, \end{cases}$$

admet une solution lipschitzienne u. De plus,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K \quad p.p.\ t \in I,$$

pour une certaine constante K dépendant de $\|u_0\|, c, T$ et k. Si de plus, on suppose que $D(A(t)) \subset C(t,x)$ pour tout $(t,x) \in I \times H$, alors

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + N_{C(t,u(t))}(u(t)) \quad p.p.\ t \in I.$$

Démonstration

Comme $A(t)$ est Lipscihtizien en variation et la multi-application $F(t,x) = \partial[k.d_{C(t,u(t))}](u(t))$ est bornée à valeurs convexes faiblement compactes, par le Corollaire 3.3.2, il existe une solution lipschitzienne du problème

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) & \in & A(t)u(t) + \partial[kd_{C(t,u(t))}](u(t)) \quad p.p.\ t \in I; \\ u(0) & = & u_0, \end{cases}$$

Si $D(A(t)) \subset C(t,x)$ pour tout $(t,x) \in I \times D(A(t))$, alors, $u(t) \in D(A(t)) \subset C(t,u(t))$, par suite, par la carctérisation du cône normal via le sous-différentiel de la fonction distance, l'inclusion $\partial[k.d_{C(t,u(t))}](u(t)) \subset N_{C(t,u(t))}(u(t))$ est satisfaite. Par conséquent, nous obtenons l'inclusion

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + N_{C(t,u(t))}(u(t)) \quad p.p.\ t \in I. \blacksquare$$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons étudié l'existence de solutions pour des problèmes d'évolution gouvernés par des opérateurs maximaux monotones.

Dans la première partie, nous avons consacré l'étude au problème d'évolution du premier ordre gouverné par un opérateur maximal monotone et avec une perturbation univoque.

Nos perspectives pour cette partie, c'est d'essayer de démontrer ces résultats sans l'hypothèse de croissance linéaire de l'élément de norme minimale A^0 (l'hypothèse (H2)), et sous des conditions plus générales sur f (supposer que la constante M dépend du temps).

La deuxième partie a été consacrée aux problèmes d'évolution perturbé par somme d'une multi-application semi-continue supérieurement et une application univoque, et là, comme perspectives, c'est d'essayer de démontrer le problème (P) avec d'autres perturbations par exemple multi-application semi continue inférieurement.

Bibliographie

[1] **H. Attouch and A. Damlamian,** *On multivalued evolution equations in Hilbert spaces*, Israel Journal of Mathematics 12.4 (1972) : 373-390.

[2] **J.P. Aubin and A. Cellina**, *On multivalued evolution equations in Hilbert spaces.* Israel Journal of Mathematics 12.4 (1972) : 373-390.

[3] **J.P. Aubin and A. Cellina**, *Differential inclusions-set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin, (1984).

[4] **D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing and M.D.P.M Marques**, *Perturbed evolution problems with absolutely continuous variation in time and applications.* Journal of Fixed Point Theory and Applications, 21, No. 2 (2019) 40.

[5] **D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing and M.D.P.M. Marques**, *Multi-valued perturbation to evolution problems involving time dependent maximal monotone operators.* A paraître .

[6] **D. Azzam-Laouir, C. Castaing and M.D.P.M. Marques**, *Perturbed Evolution Problems with Continuous Bounded Variation in Time and Applications.* Set-Valued Var. Anal., 26, No. 3 (2018) 693-728.

[7] **D. Azzam-Laouir, A. Makhlouf and L. Thibault,** *On perturbed sweeping process.* Applicable Analysis 95.2 (2016) : 303-322.

[8] **V. Barbu**, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces.* Noordhoff Int. Publ. Leyden, (1976).

[9] **H. H. Bauschke and P. L. Combettes**. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces.* Springer, (2017). <hal-01517477>

[10] **P. Bénilan and H. Brézis,** *Solutions faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert.*Annales de l'Institut Fourier, Tome 22 (1972) no. 2, p. 311-329.

[11] **M. Bounkhel**, *Regularity Concepts in Nonsmooth Analysis, Theory and Applications.* Springer Optimization and Its Applications, VOLUME 59.

[12] **M. Bounkhel and L. Thibault**, *Non convex sweeping process and prox-regularity in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal, Vol 6, (2005) 359-374.

[13] **A. Bressan and V. Staicu**, *On nonconvex perturbations of maximal monotone differential inclusions*, Set-Valued Analysis 2.3 (1994) : 415-437.

[14] **H. Brèzis**, *Analyse fonctionnelle theory et application.* Masson, Paris, (1983).

[15] **H. Brézis**, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, *North-Holland, Amsterdam* (1973).

[16] **F. E. Browder**, *Nonlinear maximal monotone operators in Banach space*, Mathematische Annalen 175.2 (1968) : 89-113.

[17] **C. Castaing.** *Topologie de la convergence uniforme sur les parties uniformément intégrables de L^1_E et théorèmes de compacité faible dans certains espaces du type Köthe-Orlicz. Travaux Sém. Anal. Convexe*, 10(1) :exp. no. 5, 27, (1980).

[18] **C. Castaing, TXD. Ha and M. Valadier**, *Evolution equations governed by the sweeping process.* Set-Valued Anal, 1, (1993) 109-139.

[19] **C. Castaing and A. G. Ibrahim.** *Functional evolution equations governed by m-accretive operators.* Advances in Mathematical Economics. Springer, Tokyo, (2003) 23-54.

[20] **C. Castaing and M.D.P.M. Marques,** *Evolution problems associated with non-convex closed moving sets with bounded variation.* Portugal. Math. 53 ; (1996) 73-87.

[21] **C. Castaing, P. Raynaud de Fitte and M. Valadier,** *Young Measures on Topological Spaces with Applications in Control Theory and Probability Theory.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2004).

[22] **C. Castaing and M. Valadier**, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lectures Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 580, (1977).

[23] **A. Cellina and M. V. Marchi.**, *Non-convex perturbations of maximal monotone differential inclusions*, Israel Journal of Mathematics 46.1 (1983) : 1-11.

[24] **I. Chalendar and E. Fricain**, *Compléments en analyse cours, et exercices*, 2010-2011.

[25] **G.Colombo, A. Fonda and A. Ornelas,** *Lower semicontinuous perturbations of maximal monotone differential inclusions*, Israel Journal of Mathematics 61.2 (1988) : 211-218.

[26] **K. Deimling**, *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1992).

[27] **J. F. Edmond and L. Thibault**, *BV solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation*, *J. Differ. Equ* 226 (2006) 135–179.

[28] **J. F. Edmond and L. Thibault**, *Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process.* Mathematical Programming 6 (2005) 347–373.

[29] **A. Grothendieck**, *Espaces Vectoriels Topologiques Mat. Saõ Paulo, São Paulo*, 3rd edn . Publ. Soc, (1964).

[30] **C. Henry**, *An existence theorem for a class of differential inclusions with multivalued right-hand side,* J. Math. Anal. Appl. 41 (1973) 179–186.

[31] **M. Kisieliwicz**, *Differential inclusion and optimal control*, PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, Boston, London (1991).

[32] **M. Kunze and M.D.P.M. Marques**, *BV solutions to evolution problems with time-dependent domains.* Set-Valued Analysis 5.1 (1997) : pp. 57-72.

[33] **M.D.P.M. Marques**, *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems : Shocks and dry friction.* Birkhäuser, Vol. 9. (2013).

[34] **G. Minty**, *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space*, Duke Math. J., 29 (1962), 341-346.

[35] **J. J. Moreau**, *Evolution problem asssociated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Differiential. Equations, Vol 26, (1977) 347-374.

[36] **F. Nacry**, *Berturbed BV sweeping process involving prox-regular sets.* Journal of Nonlinear and Convex Analysis (2017).

[37] **R. Ominetti, J. Peypouquetx, and S. Sorin**, *Strong asymptotic convergence of evolution equations governed by maximal monotone operators with Tikhonov regularization*, Journal of Differential Equations 245.12 (2008) : 3753-3763.

[38] **D. O'Regan,** *Fixed point theorem for weakly sequentially closed maps*, Archivum Mathematicum (Brno) Tome 36, (2000) 61-70.

[39] **N. S. Papageorgiou and N. Shahzad**, *On maximal monotone differential inclusions in* $\mathbf{R}^N$, Acta Math. Hungar. 78 3 (1998), 175-197.

[40] **J. C. Peralba** ,*Un problème d'évolution relatif à un opérateur sous différentiel dépendant du temps*, C.R.A.S., Paris, 275, série A, (1976), 93-96.

[41] **J. Peypouquet and S. Sorin,** *Evolution equations for maximal monotone operators : asymptotic analysis in continuous and discrete time*, arXiv preprint arXiv :0905.1270 (2009).

[42] **M. Valadier,** *Quelques résultats de base concernant le processus de la rafle,* Sém. Anal. Convexe, Montpellier, Vol 3 (1988).

[43] **L. Thibault**, *Propriétés des sous-différentiels de fonctions localement Lipschitziennes définies sur un espace de Banach séparable.* Applications. Thèse, Université Montpellier II (1976).

[44] **A. A. Vladimirov,** *Differential inclusions with nonstationary maximal monotone operators.* Functional Analysis and Its Applications 24(4) :270-279 · October 1990

[45] **A. A. Vladimirov,** *Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space.* Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications 17.6 (1991) : 499-518.

[46] **I. L. Vrabie,** *Compactness methods for Nonlinear evolutions equations.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied mathematics, Longman Scientific and Technical, John Wiley and Sons, Inc. New York, Vol 32 (1987).

[47] **R. Rockafellar,** *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings,*" Pacific Journal of Mathematics 33.1 (1970) : 209-216.

[48] **Y. Sonntag**, *Topologie et Analyse fonctionnelle, ellipses, édition marketing S.A, (1998).*

[49] **V. Staicu**, *Nonconvex perturbations of maximal monotone differential inclusions*,(1998).