REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

N° d'ordre : ....
N° de série : ....

Thèse

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse

Présentée par

Bilal Saoudi

Sur la factorisation des fonctions méromorphes p-adiques

Devant le jury :

Mr. N. Touafek	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel	Président
Mr. T. Zerzaihi	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel	Rapporteur
Mr. A. Bouchair	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel	Examinateur
Mr. M. S. Abdelouahab	Prof	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur
Mr. A. Berkane	Prof	U. Constantine 1	Examinateur
Mr. A. Bellour	MCA	ENS de Constantine	Examinateur
Mr. A. Boutabaa	HDR	U. Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, France)	Invité

Soutenue le : **08 07 2021**

REMERCIEMENTS

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant, qui m'a donné la volonté et le courage pour mener au bout ce travail.

Je voudrais tout d'abord remercier grandement mon directeur de thèse Mr. Tahar Zerzaihi, qui m'a permis de bénéficier de son aide tout au longe de cette expérience, et je le remercie tout spécialement, pour sa disponibilité et pour l'infinie patience qu'il ma accordée pour l'aboutissement de cette thèse.

J'aimerais aussi remercier Monsieur Abdelbaki Boutabba, mon co-directeur de thèse, pour son accueil chaleureux à l'université Blaise Pascal à Clermont-Ferrand (France), pour sa participation dans cette thèse et pour ses nombreuses remarques qui ont contribué au bon déroulement de cette recherche.

Je remercie également l'ensemble des membres de jury, Mr. Nouressadat Touafek, Mr. Abderrahmane Bouchair, Mr. Mohamed-Salah Abdelouahab, Mr. Abdelhak Berkane et Mr. Azzeddine Bellour, pour avoir accepté de juger ce travail et je leur adresse mes sentiments les plus respectueux.

Enfin, je remercie toute ma famille, tous mes collègues et tous les membres du laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA), de l'université Mohammed Seddik Ben Yahia, Jijel.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATION

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.

$\mathbb{K}[[X]]$	:	Le corps des séries formelles $\mathbb{K}$.
$d(a,r)$	:	Le disque fermé de centre a et de rayon r.
$d^{-}(a,r)$	:	Le disque ouvert de centre a et de rayon r.
$C(a,r)$	:	Le cercle de centre a et de rayon r.
v_p	:	La valuation p-adique.
$\vert\,.\,\vert_p$	:	La norme p-adique.
$\mathbb{Z}_p$	:	Anneau des entiers p-adiques.
$\mathbb{Q}_p$	:	Corps des fractions de $\mathbb{Z}_p$.
$\mathbb{L}_p$	:	La clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$.
$\mathbb{C}_p$	:	Le complété de la clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$.
$\vert\mathbb{C}_p^*\vert$	:	L'ensemble des puissances rationnelles de p.
$\mathcal{A}(d(a,r))$	:	L'ensemble des fonctions analytiques sur $d(a,r)$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$	:	L'ensemble des fonctions entiers sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$	:	L'ensemble des fonction entières transcendantes sur $\mathbb{C}_p$.
$\Vert f\Vert = \vert f\vert(r)$	:	Le module de maximum.

v_f	:	La fonction de valuation p-adique.
$\mathcal{M}(d(a,r))$	:	L'ensemble des fonctions méromorphes sur $d(a,r)$.
$\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$	:	L'ensemble des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathbb{C}_p(X)$	:	L'ensemble des fontions rationnelles sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(X)$	:	L'ensemble des fonction méromorphes transcendantes sur $\mathbb{C}_p$.
$N(f,r)$	:	Le nombre de zéros f dans ledisque $d(a,r)$.
$n(f,r)$	:	Le nombre de zéros f dans ledisque $d^{-}(a,r)$.
$A(f,r)$	:	Le nombre de zéros f sur le cercle $C(a,r)$.

INTRODUCTION

La théorie de la factorisation des fonctions méromorphes concerne la question de savoir si une fonction méromorphe donnée peut être exprimée comme une composition de deux fonctions méromorphes non bilinéaires (Transcendante) ou plus. Cette théorie a été développée il y a environ cinq décennies dans l'étude des points fixes d'une fonction.

Dans [41], Rosenbloom a appliqué, dans ses recherches, la théorie de distribution des valeurs (théorèmes de Nevanlinna). Depuis lors, la théorie de la distribution des valeurs a largement enrichi la recherche sur la théorie de la factorisation. De plus, dans le même article, Rosenbloom a pour la première fois introduit le concept de "fonction première" et il a affirmé, sans donner de preuve, que $e^z + z$ est une fonction première et il a remarqué que sa preuve était assez compliquée. Après, en 1968, F. Gross a donné une définition plus large de la factorisation des fonctions méromorphes. Il a non seulement donné une preuve de la primalité de $e^z + z$, mais a également entamé une série d'études sur la théorie de la factorisation (voir par exemple [22], [23], [24], [25]).

Grâce aux recherches de F. Gross et C. Yang aux États-Unis, Goldberg et Prokopovich en U.R.S.S., Baker et Goldstein en Angleterre, Steinmetz en Allemagne et Ozawa, Urabe et Noda au Japon ; la théorie de la factorisation est devenue une nouvelle branche de la théorie de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ (voir par exemple [2], [20], [22],[32], [38], [44], [46]...). Mais, l'article de Bézivin et Boutabaa [8] est à notre connaissance le seul ouvrage dans l'étude de la factorisation des fonctions méromorphes p-adiques. Ils ont utilisé les propriétés de module maximum de la composition et ils ont montré en particulier, que si une fonction entière est première dans $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$, alors elle est première dans $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$. Par conséquent, pour toutes les fonctions entières, on étudie, sans distinction, la factorisation de ces fonctions dans $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ ou $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$. De plus, ce résultat est faux dans $\mathbb{C}$. Car dans [33], Ozawa donné des exemples de fonctions entières qui sont premières dans $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ sans être premières dans $\mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de la factorisation des fonctions méromorphes p-adiques. On considère également la primalité à gauche (resp. à droite) de ces fonctions. En particulier, on donne des conditions suffisantes pour qu'une fonction méromorphe vérifie de telles propriétés. Enfin, nous considérons le problème de la permutabilité de fonctions entières. On généralise certains résultats du cas complexe au cas p-adique. Cependant, notre méthode est basée sur l'utilisation de certains outils p-adiques comme le théorème de Picard p-adique ou le Wronskien de fonctions entières p-adiques. Ce qui nous permet d'obtenir des résultats complètement différents de ceux du cas complexe.

Nous présentons maintenant notre contribution dans cette thèse qui est répartie sur trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la construction du corps $\mathbb{C}_p$ à partir du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$. Puis, on présente les propriétés topologiques et analytiques de ce corps qui sont différentes de celles de cas complexe. On cite par exemple le fait qu'une série converge si et seulement si son terme général tend vers zéro. On termine ce chapitre par les fonctions méromorphes complexes p-adiques et on montre que l'exponentielle p-adique n'est pas entière. Elle est analytique dans le disque ouvert $d^{-}(0, p^{\frac{-1}{p-1}})$. Ce résultat nous donne un inconvénient dans notre étude, car la base d'étude dans le cas complexe est la fonction entière e^z et son ordre de croissance.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la distribution des zéros des fonctions méromorphes, dans lequel on présente une méthode qui nous permet d'étudier la distribution des zéros d'une fonction analytique (module maximum $|.|(r)$). Cette méthode s'étend d'une manière naturelle aux fonctions méromorphes. Puis, on donne la distribution des zéros de la composition $f \circ g$. En suite, on présente la version p-adique du théorème de Picard. Ce théorème joue un rôle majeur dans notre étude et nous permet d'obtenir des résultats différentes du cas complexe. On montre aussi que l'image d'un disque, par une fonction analytique p-adique, est un disque de la même nature, et on donne la version p-adique du théorème de l'inverse locale. A la fin de ce chapitre, on expose les propriétés de Wronskien p-adique.

Dans le dernier chapitre, on applique le théorème de Picard p-adique, le Wronskien p-adique, et on utilise le système

$$\begin{cases} F(x) = \beta \\ F'(x) = 0. \end{cases}$$

Pour étudier la primalité (resp. pseudo-primalité, primalité à gauche, primalité à droite). D'abord, on construit des fonctions entières et méromorphes première (resp. pseudo-première). Puis, on utilise le théorème de l'inverse locale et les propriétés topologiques, pour montrer que de toute fonction entière transcendante on peut construire une fonction première en ajoutant ou multipliant par une fonction affine. On termine ce chapitre par l'étude de la permutabilité des fonctions entières. On montre des outils importants p-adiques et on donne la version p-adique du Théorème 6 dans [5].

CHAPITRE 1

LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES P-ADIQUES $\mathbb{C}_p$

Dans ce chapitre, on présente d'abord la construction analytique du corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$. Ensuite, on traite quelques propriétés de ce corps. Ces propriétés seront très utiles tout au long de cette thèse. On termine par les fonctions méromorphes p-adiques.

1.1 Construction analytique de $\mathbb{C}_p$

1.1.1 La valuation et la norme p-adique

Définition 1.1.1 *(**Valuation p-adique**) Soit p un nombre premier. On appelle valuation p-adique l'application $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, définie comme suit :*

- $v_p(0) = +\infty$;
- *si n un entier non nul,* $v_p(n) = k$ *si* p^k *divise n et* p^{k+1} *ne divise pas n (i.e*

  $v_p(n) = \max\{\alpha \in \mathbb{N},\ p^\alpha | n\})$;
- *si* $n = \dfrac{a}{b}$ *avec a et b des entiers non nuls, alors* $v_p(\dfrac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$.

Proposition 1.1.1 *[1] [29] Pour tout* $x, y \in \mathbb{Z}$*, on a*

1. $v_p(1) = 0$.
2. $v_p(x.y) = v_p(x) + v_p(y)$.
3. $v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$.

Remarque 1.1.1 *Pour tout* $x, y \in \mathbb{Z}^*$*, on a*

$$v_p(x) \neq v_p(y) \Longrightarrow v_p(x + y) = \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

En effet

On prend $v_p(x) < v_p(y)$*, et comme on a*

$$v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}, \forall x, y \in \mathbb{Z}^*,$$

alors $v_p(x + y) \geq v_p(x)$.

Il reste a monter que $v_p(x) \geq v_p(x + y)$*. On a*

$$v_p(x) = v_p(x - y + y) \geq \min\{v_p(x + y), v_p(y)\}.$$

Si $\min\{v_p(x + y), v_p(y)\} = v_p(y)$*, alors* $v_p(x) \geq v_p(y)$*, c'est une contraction avec l'hypothèse, donc* $v_p(x) \geq v_p(x + y)$.

Définition 1.1.2 *(**La norme** p**-adique**) On définit la norme p-adique comme l' application* $|.|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, & si \quad x \neq 0 \\ 0, & sinon \end{cases}$$

tel que $v_p(x)$ *représente la valuation p-adique de x.*

Définition 1.1.3 *On dit que une norme sur un corps* $\mathbb{K}$ *est non archimédienne si elle vérifie*

$$\|x+y\| \leq max(\|x\|, \|y\|), \quad \forall x, y \in \mathbb{K} \quad (\textbf{\textit{inégalité triangulaire forte}}).$$

Proposition 1.1.2 *[29][40] La norme p-adique est une norme non archimédinne sur* $\mathbb{Q}$.

Preuve. Soient $x, y \in \mathbb{Q}$, donc on a

$$\begin{aligned} |x+y|_p = p^{-v_p(x+y)} &\leq p^{-\min\{v_p(x), v_p(y)\}} \\ &= p^{\max\{-v_p(x), -v_p(y)\}} \\ &= \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\} \\ &= \max\{|x|_p, |y|_p\}. \end{aligned}$$

D'où la norme p-adique $|.|_p$ est non archimédinne. ■

Proposition 1.1.3 *[29] Pour tout* $x \in \mathbb{Q}^*$, *on a*

$$\prod_{p \text{ premier}} |x|_p.|x|_\infty = 1,$$

où $|.|_\infty$ *est la valeur absolue usuelle.*

Théorème 1.1.4 ***(d'Ostrowski)*** *[1] Tout norme non triviale sur* $\mathbb{Q}$ *est équivalente à la valeur absolue usuelle ou à la norme p-adique pour un nombre premier p.*

Remarque 1.1.2 1− *La norme p-adique* $|.|_p$ *prend ses valeurs dans l'ensemble discret défini par*

$$|\mathbb{Q}|_p = \{p^n, \; n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

2− *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $|n|_p \leq 1$.

1.1.2 Le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$

Le corps $\mathbb{Q}$ associé à la norme p-adique n'est pas complet, tout comme $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour la valeur absolue usuelle. La propriété suivante donne une caractéristique sur les suites de Cauchy qui n'est pas vraie pour la valeur absolue usuelle.

Proposition 1.1.5 *[1][6] Une suite* $(x_n)_n$ *est de Cauchy dans* $(\mathbb{Q}, |.|_p)$ *si et seulement si* $x_{n+1}-x_n$ *tend vers* 0.

Preuve.
Supposons que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq n_0 : |x_m - x_n|_p < \varepsilon.$$

Donc pour $m = n+1$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |x_{n+1} - x_n|_p < \varepsilon,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = 0.$$

Inversement, supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq n_0$, on ait $|x_{m+1} - x_m|_p < \varepsilon$. D'où pour tout $m \in \mathbb{N}$, tel que $m > n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n|_p &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \ldots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n|_p \\
&\leq \max\{|x_m - x_{m-1}|_p, |x_{m-1} - x_{m-2}|_p, .., |x_{n+1} - x_n|_p\} \\
&< \max\{\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon\} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{Q}, |.|_p)$. ■

On va donner un exemple d'une suite de Cauchy divergente pour $p = 5$. On définit la suite $(x_n)_n$ par $x_0 = a_0 = 2$, et $x_n = x_{n-1} + a_n 5^n$, où $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ est déterminé par la congruence $x_n^2 + 1 \equiv 0[5^n]$.
La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy car

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - x_{n-1}|_5 = \lim_{n\to+\infty} |a_n 5^n|_5 = \lim_{n\to+\infty} |a_n|_5 . 5^{-n} = 0.$$

Cependant, elle ne peut pas converger vers $x \in \mathbb{Q}$, puisque dans ce cas, on obtient $x^2 + 1 = 0$.

Définition 1.1.4 *Le corps des nombres p-adiques, que l'on note $\mathbb{Q}_p$, est le complété de $\mathbb{Q}$ pour la norme $|.|_p$.*

Ce corps a été introduit par le mathématicien Allemand Kurt Hensel à la fin du 19^{me} siècle.

La norme p-adique sur $\mathbb{Q}_p$ est l'étendue de la norme p-adique sur $\mathbb{Q}$ de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbb{Q}_p,\ |x|_p = \lim_{n\to+\infty} |x_n|_p$$

où $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ convergente vers x.

Définition 1.1.5 *On définit l'anneau des entiers p-adiques et on le note $\mathbb{Z}_p$, comme étant la boule unité de $\mathbb{Q}_p$, i. e.*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p;\ |x|_p \leq 1\}.$$

Proposition 1.1.6 *[6]*
L'anneau des entiers p-adiques est un anneau intègre.

Cette proposition nous permet de définir le corps des nombres p-adiques comme le corps de fractions de $\mathbb{Z}_p$, i. e.

$$\mathbb{Q}_p = \{\frac{x}{y};\ x,\ y \in \mathbb{Z}_p \ et\ y \neq 0\}.$$

Proposition 1.1.7 *[1] [29]*

Tout $x \in \mathbb{Q}_p$ admet un unique développement de Hensel

$$x = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n, \text{ où } a_n \in \{0, 1, ..., p-1\}, \text{ et } n_0 \in \mathbb{Z}.$$

Si $a_{n_0} \neq 0$, alors on a $v_p(x) = n_0$.

On peut utiliser le développement de Hensel pour donner une autre définition de l'ensemble des entiers p-adiques comme suit :

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ x = \sum_{n \geq 0} a_n p^n\}.$$

Exemple 1.1.1

Le développement de Hensel de $x = -1$ est donné par

$$\begin{aligned}
-1 &= p - 1 - p = (p-1) + (-1)p \\
&= (p-1) + (p-1-p)p = (p-1) + (p-1)p - p^2 \\
&= (p-1) + (p-1)p + (-1)p^2 = (p-1) + (p-1)p + (p-1-p)p^2 \\
&= (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 - p^3 \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (p-1)p^k,
\end{aligned}$$

alors, on obtient

$$\frac{-1}{p-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p^k,$$

d'où, pour $p = 2$, on a

$$-1 = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k = ...111\cdot$$

.

1.1.3 Le corps $\mathbb{C}_p$

Définition 1.1.6 *On dit qu'un corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clôs si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[x]$ de degré n admet n racines dans $\mathbb{K}$.*

Proposition 1.1.8 *[1] Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs.*

Preuve. On considère le polynôme $P(x) = x^4 + p^6 \in \mathbb{Q}_p[x]$. Puis, si x est une racine de P, alors $v_p(x) = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Donc $x \notin \mathbb{Q}_p$, d'où P n'a pas des racines dans $\mathbb{Q}_p$, i.e. $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs. ∎

Il est donc logique de considérer une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, que l'on note $\mathbb{L}_p$, et qui n'est pas complète (la norme p-adique sur $\mathbb{L}_p$ est l'extension de la norme p-adique de $\mathbb{Q}_p$ voir [29].) Donc nous avons besoin de la compléter pour former un plus grand corps complet, algébriquement clôs, noté $\mathbb{C}_p$. On montre que l'on peut prolonger la norme p-adique à ce corps, qui possède donc aussi une norme non archimédinne, que l'on note toujours $|.|_p$.

1.2 Propriétés analytiques et topologiques de $\mathbb{C}_p$

Proposition 1.2.1 *[29] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}_p$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, où $a \in \mathbb{C}_p^*$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|a_n|_p = |a|_p$.*

Preuve. Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}_p$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$, alors $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0 : |a_m - a_n|_p < \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$\forall m, n \geq n_0, ||a_m|_p - |a_n|_p| \leq |a_m - a_n|_p.$$

Donc $(|a_n|_p)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et comme $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet, alors $(|a_n|_p)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R}$. D'après l'hypothèse on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p = l > 0$.

Pour $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$ fixé, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1,\ ||a_n|_p - l| < \dfrac{l}{2}$, alors

$$\frac{-l}{2} < |a_n|_p - l < \frac{l}{2},$$

donc

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 : |a_n|_p > \frac{l}{2}.$$

De même, d'après la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, on obtient que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, alors

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall (n,m) \geq N_2 : \quad |a_n - a_m|_p < \frac{l}{2}.$$

Quand $n, m \geq \max(N_1, N_2) = n_0$, on a

$$\begin{cases} |a_m|_p = |a_m - a_n + a_n|_p \leq \max\{|a_m - a_n|_p, |a_n|_p\} = |a_n|_p, \\ |a_n|_p = |a_n - a_m + a_m|_p \leq \max\{|a_n - a_m|_p, |a_m|_p\} = |a_m|_p. \end{cases}$$

Donc

$$|a_n|_p = |a_m|_p,\ \forall n, m \geq n_0,$$

alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|a_n|_p = |a_{n_0}|_p = |a|_p.$$

■

Proposition 1.2.2 *[29] Soit la série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *où* $a_n \in \mathbb{C}_p$*. Si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|_p$ *converge dans* $\mathbb{R}$*, alors* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge dans* $\mathbb{C}_p$*.*

Preuve.
On suppose que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|_p$ converge dans $\mathbb{R}$, alors la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|_p$ convergente, donc elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, i. e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0 : |S_m - S_n| < \varepsilon.$$

On a

$$|S_m - S_n| = |\sum_{i=n+1}^{m} |a_i|_p| = \sum_{i=n+1}^{m} |a_i|_p < \varepsilon.$$

Ce qui implique que $S'_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}_p$ ($\mathbb{C}_p$ est complet), alors $(S'_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{C}_p$. D'où $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge dans $\mathbb{C}_p$. ■

Proposition 1.2.3 *[29] Soit* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *une série dans* $\mathbb{C}_p$*. Alors* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$*. Dans ce cas,*

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n|_p \leq \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|_p.$$

Preuve. La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ converge dans $\mathbb{C}_p$, donc S_n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}_p$, d'où

$$|S_n - S_{n-1}|_p \longrightarrow 0.$$

Mais $a_n = S_n - S_{n-1}$, donc (a_n) tend vers zéro dans $\mathbb{C}_p$.
Maintenant, supposons que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 0$, on a le résultat. Sinon, D'après la Proposition 1.2.1, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq N_0$, on a

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n|_p = |\sum_{n=0}^{N} a_n|_p = |\sum_{n=0}^{N_0} a_n|_p. \tag{1.1}$$

D'autre part, on a

$$\max_{0\leq n\leq N_0} \{|a_n|_p\} \leq \max_{n\in\mathbb{N}} \{|a_n|_p\}. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2), on trouve

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n|_p = |\sum_{n=0}^{N_0} a_n|_p \leq \max_{0\leq n\leq N_0} \{|a_n|_p\} \leq \max_{n\in\mathbb{N}} \{|a_n|_p\}.$$

■

Exemple 1.2.1

1− *La série* $\sum\limits_{n\geq 0} p^n$ *converge dans* $\mathbb{C}_p$ *car*

$$\lim_{n\to+\infty} |p^n|_p = \lim_{n\to+\infty} p^{-n} = 0.$$

Mais, cette série diverge dans $\mathbb{C}$, *car*

$$\lim_{n\to+\infty} |p^n| = \lim_{n\to+\infty} p^n = +\infty.$$

2− *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ *est diverge dans* $\mathbb{C}_p$. *En effet*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|_p = \lim_{n\to+\infty} p^{v_p(x)} \neq 0,$$

car $p^{v_p(n)} \geq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Mais, cette série converge dans* $\mathbb{C}$ *d'après la règle de Leibnitz.*

Proposition 1.2.4 *[1][17] Soient* $a, b \in \mathbb{C}_p$ *et* $r, r_0 \in]0, +\infty[$, *on a les propriétés suivantes :*

P1. *Le cercle est un ensemble ouvert dans* $\mathbb{C}_p$.

P2. *Un disque* $d(a, r)$ *est un ensemble ouvert et fermé à la fois.*

P3. *Tout point d'un disque est un centre de ce disque.*

P4. *Soient* $d(a, r)$ *et* $d(b, r_0)$ *deux disques de* $\mathbb{C}_p$, *alors il sont disjoints ou l'un est inclus dans l' autre.*

P5. *Toutes les triangles dans* $\mathbb{C}_p$ *sont isocèles.*

Proposition 1.2.5 *[17][40] Le corps* $\mathbb{C}_p$ *possède les propriétés suivantes :*

1. $\mathbb{C}_p$ *n'est pas localement compact.*
2. $\mathbb{C}_p$ *est algébriquement clôs.*
3. $|\mathbb{C}_p^*|_p = \{p^q, q \in \mathbb{Q}\}$.
4. *Le corps* $\mathbb{C}_p$ *est séparable.*

1.3 Fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}_p$

1.3.1 Séries entières sur $\mathbb{C}_p$

Définition 1.3.1 *Une série entière dans $\mathbb{C}_p$ est une série de la forme $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite des nombres complexes p-adiques appelée suite de coefficients.*

Définition 1.3.2 ***(Rayon de convergence)***
Le rayon de convergence d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, que l'on note R, est défini par

$$R := \sup\{|z|_p; z \in \mathbb{C}_p \ et \ \sum_{n\geq 0} a_n z^n converge\} \in \mathbb{R}^+ \cup +\infty.$$

Remarque 1.3.1 ***(Calcul du rayon de convergence)***
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. Le rayon de convergence de cette série est calculé par l'une des trois formules suivantes :

1. $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}}$ ***(formule d'Hadamard).***
2. $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}}$ ***(formule de Cauchy).***
3. *Si* $a_n \in \mathbb{C}_p^*$, $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_n|_p}{|a_{n+1}|_p}$ ***(formule d'Alembert).***

Théorème 1.3.1 *[29] Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, où $a_n \in \mathbb{C}_p$ et $0 \leq R \leq +\infty$. On a*

1. *Si $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $|z|_p < R$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ converge.*
2. *Si $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $|z|_p > R$; alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge.*
3. *Si $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $|z|_p = R$, alors on peut avoir*
   - *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|R^n = 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ converge sur la totalité du cercle $C(0, R)$.*
   - *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|R^n \neq 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge sur la totalité du cercle $C(0, R)$.*

Remarque 1.3.2 *Le domaine de convergence est toujours un disque ouvert $d^{-}(0,R)$. Ce résultat n'est pas correct dans $\mathbb{C}$. Par exemple, pour la série $\ln(1+x) = \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$, on a d'après d'Alembert*

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\frac{n}{(-1)^{n+1}}\right|, \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Mais, pour $|z| = -1$; la série $-\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.
*Et pour $|z| = 1$; la série $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (**Leibniz**) .*

Proposition 1.3.2 *(**Série dérivée d'une série entière complexe p-adique**) [1]*
Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. La série f est sa série dérivée

$$Df(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1},$$

ont le même rayon de convergence .

Preuve. Soit R_f est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, où $a_n \in \mathbb{C}_p$, alors on a

$$\begin{aligned} R_{Df}^{-1} = \limsup_{n\to+\infty}|na_n|_p^{\frac{1}{n-1}} &= \limsup_{n\to+\infty}(|n|_p^{\frac{1}{n}}|a_n|_p^{\frac{1}{n}}) \\ &= (\limsup_{n\to+\infty}|n|_p^{\frac{1}{n}}).(\limsup_{n\to+\infty}|a_n|_p^{\frac{1}{n}}). \end{aligned}$$

Et comme

$$|n|_p^{\frac{1}{n}} = p^{-\frac{v_p(n)}{n}},$$

alors on a

$$R_{Df}^{-1} = (\limsup_{n\to+\infty} p^{-\frac{v_p(n)}{n}})(\limsup_{n\to+\infty}|a_n|_p^{\frac{1}{n}}).$$

De plus, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_p(n)}{n} = 0$, d'où le résultat. ■

Proposition 1.3.3 *[29] Le domaine de convergence de la série exp*$(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}_p$, *est le disque ouvert* $d^-(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$.

Pour la démonstration, on a besoin du lemme suivant

Lemme 1.3.4 *[29] La valuation p-adique de* $n!$ *est donnée par*

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}, \quad \forall n \geq 0.$$

Où $S_p(n)$ *désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p.*

Preuve. Si $n = 0$, on a $0! = 1$, donc $v_p(1) = 0$. Sinon $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k)$ où $n! = \prod_{k=1}^{n} k$. Et comme on a

$$k = a_i p^i + ... + a_j p^j, \; a_i \neq 0,$$

alors

$$v_p(k) = i.$$

Donc

$$\begin{aligned} k &= a_i p^i + ... + a_j p^j \\ &= p^i + (a_i - 1)p^i + \sum_{s=i+1}^{j} a_s p^s, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} k - 1 &= p^i - 1 + (a_i - 1)p^i + \sum_{s=i+1}^{j} a_s p^s \\ &= (p-1)\sum_{s=0}^{i-1} p^s + (a_i - 1)p^i + \sum_{s=i+1}^{j} a_s p^s. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
S_p(k-1) &= (p-1)\sum_{s=0}^{i-1} 1 + (a_i - 1) + \sum_{s=i+1}^{j} a_s \\
&= i(p-1) + a_i + \sum_{s=i+1}^{j} a_s - 1 \\
&= i(p-1) + S_p(k) - 1 \\
&= v_p(k)(p-1) + S_p(k) - 1,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
v_p(k) &= \frac{S_p(k-1) - S_p(k) + 1}{p-1} \\
v_p(n!) &= \sum_{k=1}^{n} v_p(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_p(k-1) - S_p(k) + 1}{p-1} \\
&= \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{n} S_p(k-1) - S_p(k) + 1 \\
&= \frac{1}{p-1}(-S_p(n) + n) \\
&= \frac{n - S_p(n)}{p-1}.
\end{aligned}$$

■

Preuve du Proposition 1.3.3.

D'après d'Hadamard on a

$$\begin{aligned}
R^{-1} &= \lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|_p} = \lim_{n\to+\infty} \sup \left|\frac{1}{n!}\right|_p^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sup p^{\frac{v_p(n!)}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sup p^{\frac{n - S_p(n)}{n(p-1)}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sup p^{\frac{1}{p-1}(1 - \frac{S_p(n)}{n})} \\
&= p^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

i) Si $|z|_p < R$, alors la série converge sur $d^-(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$.

ii) Si $|z|_p = R$, on a

$$\begin{aligned} |a_n|_p R^n = \left|\frac{1}{n!}\right|_p p^{\frac{-n}{p-1}} &= p^{v_p(n!)} p^{\frac{-n}{p-1}} \\ &= p^{\frac{n-Sp(n)}{p-1}} p^{\frac{-n}{p-1}} \\ &= p^{\frac{-Sp(n)}{p-1}}. \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p R^n \neq 0$.

Donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ diverge sur le cercle $C(0, p^{\frac{-1}{p-1}})$.

■

Par contre la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!} \in \mathbb{C}[[z]]$ a un rayon de convergence infini.

Définition 1.3.3 ***(Fonction développable en série entière)***
Une fonction f de variable complexe p-adique, définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{C}_p$, est dite ***développable en série entière*** *au voisinage de a, s'il existe une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$, avec $a, a_n \in \mathbb{C}$ de rayon de convergence R strictement positif, telle que*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \forall z \in d^-(a, R)$$

Un simple changement de variable permet de se ramener a la développement en série entière au voisinage de zéro .

1.3.2 Fonctions entières et méromorphes sur $\mathbb{C}_p$

Définition 1.3.4 *Une fonction $f : d(a, r) \longrightarrow \mathbb{C}_p$, où $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}_p$ est dite analytique sur $d(a, r)$, s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| r^n = 0 \quad et \quad f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n, \ \forall z \in d(a, r).$$

Définition 1.3.5 *Une fonction* $f : d^-(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}_p$*, où* $r > 0$ *et* $a \in \mathbb{C}_p$ *est dit analytique sur* $d^-(a,r)$*, si pour tout* ρ *tel que* $0 < \rho < r$*, la restriction de* f *à* $d(a,\rho)$ *est une fonction analytique sur le disque* $d(a,\rho)$ *et* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n,\ \forall z \in d^-(a,r)$*.*

Proposition 1.3.5 *[6][18] Une fonction* $f : d^-(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}_p$*, avec* $r > 0$ *et* $a \in \mathbb{C}_p$ *est analytique sur* $d^-(a,r)$ *s'il existe une suite unique* $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ *satisfaisant* $|a_n|\rho^n \longrightarrow 0$ *pour tout* ρ *avec* $0 < \rho < r$*, et* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n,\ \forall z \in d^-(a,r)$*.*

Remarque 1.3.3

1) Une fonction de variable complexe p-adique définie sur un disque $d(a,r)$*, où* $a \in \mathbb{C}_p$ *est dite analytique sur ce disque si elle admet un développement en série entière en tout point de* $d(a,r)$*.*

2) Si $R = +\infty$*, alors* f *est analytique sur tout* $\mathbb{C}_p$ *et on dit que f est entière.*

Exemple 1.3.1

1. *La fonction* $\exp_p(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ *est analytique sur le disque ouvert* $d^-(0, p^{\frac{-1}{p-1}})$*, et elle n'est pas analytique sur le cercle* $C(0, p^{\frac{-1}{p-1}})$ *(d'après la Proposition 1.3.3). Par contre,* $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ *est une fonction entière dans* $\mathbb{C}$*.*
2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} p^n z^n \in \mathbb{C}_p[[z]]$ *on a*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} p^{-n}} = +\infty.$$

   Alors la série $\sum_{n\geq 0} p^n z^n$ *converge sur* $\mathbb{C}_p$*. Donc la fonction* $f : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p$ *définie par* $f(z) = \sum_{n\geq 0} p^n z^n$ *est une fonction entière sur* $\mathbb{C}_p$*.*

Notation 1.1

1) On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ *l'ensemble des fonctions entières sur* $\mathbb{C}_p$ *et* $\mathcal{A}(d(a,r))$ *l'ensemble des fonctions analytiques sur le disque* $d(a,r)$*.*

2) On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[z]$ *l'ensemble des fonction entières, qui ne sont pas des polynômes, et ils s'appellent fonctions entières transcendantes.*

Proposition 1.3.6 *[1][6] Toute fonction analytique non nulle, sur un disque, vérifie le principe de zéros isolés, c'est à dire que si b est un zéro de f, il existe un disque de centre b, de rayon assez petit, où la fonction f n'admet comme zéro que b.*

Preuve. Si b est un zéro de f, on peut écrire la fonction non nulle f sous la forme

$$f(z) = a_m(z-b)^m + a_{m+1}(z-b)^{m+1} + ...,$$

tels que $m \geq 1$ est un entier, et $a_m \neq 0$. Il résulte que si $|z-b|$ est assez petit, et non nul,

$$|f(z)| = |a_m||z-b|^m \neq 0.$$

■

Définition 1.3.6 *(**Points singuliers isolés**) On dit que le point $a \in \mathbb{C}_p$ est un point singulier isolé d'une fonction si f n'est pas analytique en a.*

Définition 1.3.7 *(**Fonction méromorphe**). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}_p$. Une fonction f est dite méromorphe sur U s'il existe un ensemble A de points singuliers isolés dans U, tel que f est analytique sur $U \setminus A$ et tel que les éléments de A soient des pôles de f.*

Notation 1.2 *On note*

- $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ *l'ensemble des fonctions méromorphes définies sur $\mathbb{C}_p$ (le corps des fractions de $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$.*
- $\mathcal{M}(d^-(a,r))$ *l'ensemble des fonctions méromorphes définies sur $d^-(a,r)$(le corps des fractions de $\mathcal{A}(d^-(a,r))$).*

CHAPITRE 2

LA DISTRIBUTIONS DES VALEURS D'UNE FONCTION MÉROMORPHE SUR $\mathbb{C}_p$

Le but de ce chapitre est d'étudier la distributions des valeurs d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}_p$ et de présenter les outils que nous avons employé dans cette étude.

2.1 Polygone de valuation p-adique

2.1.1 Le module maximum

Définition 2.1.1 *Soient* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{A}(d^-(0,R))$ *et* $0 < r < R$. *On définit le module maximum de* f *par la formule*

$$|f|(r) := \max_{n\geq 0} |a_n| r^n.$$

Proposition 2.1.1 *[6][28] L'application de module maximum est une norme non archimédienne sur $\mathcal{A}(d^-(0,R))$.*

Proposition 2.1.2 *[18] Soient $0 < r < R$ et $f \in \mathcal{A}(d^-(0,R))$ une fonction non nulle, alors*

P1. *La fonction $|f|(r)$ est croissante.*

P2. *Si f a un zéro b dans le disque $d(a,r)$, la fonction $|f|(r)$ est strictement croissante pour $r > |b|_p$.*

P3. *La fonction $|f|(r)$ est continue.*

Remarque 2.1.1 *La norme non archimédienne $|.|(r)$ définie sur $\mathcal{A}(d^-(0,R)))$ (resp. sur $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ quand $r \in]0,R[$ (resp. $r \in]0,+\infty[$), s'étend d'une manière naturelle à $\mathcal{M}(d^-(0,R)))$ (resp. à $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ en posant $|f|(r) = \dfrac{|g|(r)}{|h|(r)}$ où $f = \dfrac{g}{h}$ et $g,h \in \mathcal{A}(d^-(0,R))$ (resp. $g,h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$).*

Théorème 2.1.3 *[6] Soient $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d^-(0,R))$, $0 < r < R$ et s un indice tel que l'on ait $|a_s|r^s = |f|(r)$ et $|a_j|r^j < |a_s|r^s$ pour $j > s$. Alors*

i) si $s \geq 1$, la fonction f a exactement s zéros dans le disque $d(0,r)$, compte tenu des multiplicités ;

ii) si $s = 0$, la fonction f n'a aucun zéro dans le disque $d(0,r)$ et la norme p-adique de f est constante dans ce disque.

Théorème 2.1.4 *[6] Soient $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d^-(0,R))$, $0 < r < R$ et l un indice défini par*

$$l = \min\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } |f|(r) = |a_n|r^n\}.$$

Alors,

i) si $l \geq 1$, la fonction f a exactement l zéros dans le disque $d^-(0,r)$, compte tenu des multiplicités ;

ii) si $l = 0$, la fonction f n'a aucun zéro dans le disque $d^-(0,r)$ et la norme p-adique de f est constante dans ce disque.

Notation

- $N(f,r)$ Le nombre de zéros de f dans le disque fermé $|z|_p \leq r$.
- $n(f,r)$ Le nombre de zéros de f dans le disque ouvert $|z|_p < r$.
- $A(f,r)$ Le nombre de zéros de f sur cercle $|z|_p = r$.

Chacun de ces zéros étant compté avec sa multiplicité.

Théorème 2.1.5 *[18] Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ telle que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{C}_p^*$. Si la suite $(|\frac{a_{n-1}}{a_n}|_p)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, alors la suite de zéros de f dans $\mathbb{C}_p$ est une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ telle que $|\gamma_n|_p = |\frac{a_{n-1}}{a_n}|_p$.*

Théorème 2.1.6 *[18] Soit $f \in \mathcal{A}(C(0,r))$ ayant q zéros in $C(0,r)$, en prenant en compte les multiplicités et soit $t = n(f,r)$. Alors $r = \sqrt[q]{|\frac{a_t}{a_{q+t}}|_p}$.*

2.1.2 La fonction de valuation p-adique

Définition 2.1.2 *(**La fonction de valuation p-adique**)*
Soient $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{A}(d^-(0,R))$ et $0 < r < R$, on définit une fonction v_f sur $]-\infty, \log R[$ par

$$v_f : I =]-\infty, \log R[\to \mathbb{R}$$
$$\log r \to v_f(\log r) = \log |f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log |a_n|_p + n\log r\}$$

*Cette fonction est la **fonction de valuation p-adique** de f et son graphe est dit **polyngône de valuation p-adique** de f.*

Proposition 2.1.7 *[28] La fonction v_f vérifie les propriétés suivantes :*

P1. *C'est une fonction convexe, croissante, continue et affine par morceaux .*

P2. *Si f a un zéro b dans $d(a,r)$, v_f est strictement croissante pour $\log r > \log |b|_p$.*

P3. *v_f admet une dérivée à gauche $\frac{d^-v_f}{d(\log r)}$ et une dérivée à droite $\frac{d^+v_f}{d(\log r)}$ en tout point $\log r \in I$ et on a*

- $\frac{d^+v_f}{d(\log r)} = N(f,r)$ *le plus grand entier tel que* $v_f(\log r) = \log |a_i|_p + N(f,r)\log r$.
- $\frac{d^-v_f}{d(\log r)} = n(f,r)$ *le plus petit entier tel que* $v_f(\log r) = \log |a_i|_p + n(f,r)\log r$.
  Donc $A(f,r) = N(f,r) - n(f,r)$ *est le nombre des zéros de* f *sur le cercle* $C(a,r)$

Exemple 2.1.1 *Pour $p = 3$, la fonction de valuation p-adique de $P(z) = 108 + 63z + 66z^2 + 21z^3$ est donnée par*

$$\log |P|(r) = \begin{cases} -3\log 3 \quad , \quad -\infty < \log r \leq -\log 3 \\ -\log 3 + 2\log r \ , \quad -\log 3 \leq \log r \leq 0 \\ -\log 3 + 3\log r \ , \quad \log r \geq 0. \end{cases}$$

2.1.3 La distribution des zéros d'une composition

Proposition 2.1.8 *[8] Soit $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non constantes. Soit ρ_0 un réel positif tel que la fonction $|g|(r)$ soit strictement croissante pour $r > \rho_0$.*
Posons $F = f \circ g$, alors pour tout $r > \rho_0$ on a

i. $n(F,r) = n(f,|g|(r))n(g,r)$.

ii. $N(F,r) = N(f,|g|(r))N(g,r)$.

iii. $A(F,\rho) = A(f,|g|(r))N(g,r) + n(f,|g|(r))A(g,r)$.

Preuve.
Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ telle que $F = f \circ g$ où $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$, donc $|F|(r) = |f|(|g|(r))$, pour tout $r > 0$. Comme la fonction $|g|(r)$ est strictement croissante pour $r > \rho_0$, on déduit que

$$\frac{d^-(v_F)}{d(u)} = \frac{d^-(v_f)}{d(v_g(u))}\frac{d^-(v_g)}{d(u)}$$

et
$$\frac{d^+(v_F)}{d(u)} = \frac{d^+(v_f)}{d(v_g(u))}\frac{d^+(v_g)}{d(u)}$$
pour $u = \log r > \log \rho_0$.

D'après la Proposition 2.1.7, on obtient
$$n(F,r) = n(f,|g|(r))n(g,r) \tag{2.1}$$
et
$$N(F,r) = N(f,|g|(r))N(g,r) \tag{2.2}$$
En faisant la différence entre (2.2) et (2.1), on trouve
$$\begin{aligned} N(f,|g|(r))N(g,r) - n(f,|g|(r))n(g,r) &= N(f,|g|(r))N(g,r) - n(f,|g|(r))n(g,r) \\ &+ n(f,|g|(r))N(g,r) - n(f,|g|(r))N(g,r) \\ &= A(f,|g|(r))N(g,r) + n(f,|g|(r))A(g,r). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.9 *[8] Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[z]$, λ un entier positif fixe. On suppose que sur une infinité de cercles de centre 0 de $\mathbb{C}_p$, F a un nombre de zéros compris entre 1 et λ. Alors toute factorisation de F sous la forme $F = f \circ g$ avec $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ entraine que f ou g est un polynôme de degré compris entre 1 et λ.*

Preuve.

On suppose que les deux fonctions f et g sont de degré supérieur ou égale à $\lambda + 1$ on aurait pour r assez grand
$$N(g,r) \geq \lambda + 1 \quad et \quad n(f,|g|(r)) \geq \lambda + 1.$$
D'autre part, l'hypothèse du théorème et la formule *iii.* de la Proposition 2.1.8, montre que pour une infinité de r arbitrairement grand, on a $A(f,|g|(r)) \neq 0$ où $A(g,r) \neq 0$. Pour un tel r on aurait alors $A(F,r) \geq \lambda + 1$. C'est une contradiction avec l'hypothèse.

Donc f ou g est nécessairement un polynôme de degré compris entre 1 et λ. ■

Corollaire 2.1.10 *[8] Soit $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p(z)$ et λ un entier positif fixe. On suppose que sur une infinité de cercles de centre 0 de $\mathbb{C}_p$, F admet un nombre de zéros compris entre 1 et λ et que sur une infinité de cercles de centre 0 de $\mathbb{C}_p$, F admet un nombre de pôles compris entre 1 et λ. Alors toute factorisation de F sous la forme $F = f \circ g$ avec $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ et $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ entraine que*

$$\begin{cases} g \in \mathbb{C}_p[z] \textit{ tel que } 1 \leq \deg g \leq \lambda \\ \textit{ou bien} \\ f \in \mathbb{C}_p(z) \textit{ tel que } 1 \leq \deg f \leq \lambda. \end{cases}$$

Preuve.
On écrit $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ n'ont pas de zéros communs, d'où

$$F = f \circ g = \frac{f_1 \circ g}{f_2 \circ g}.$$

Ensuite, on applique le Théorème 2.1.9 à chacune des fonctions $f_1 \circ g$ et $f_2 \circ g$. ■

2.2 Théorème de Picard p-adique

Dans cette partie, on va prouver le théorème de Picard p-adique, et on utilise certaines propriétés de polygône de valuation.

Théorème 2.2.1 ***(de Picard** p**-adique)***[28]
Toute fonction entière p-adique non constante prend chaque valeur de $\mathbb{C}_p$. De plus, une fonction entière transcendent p-adique prend chaque valeur de $\mathbb{C}_p$ une infinité de fois (sans aucun exception).

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.2 *(Formule de Jensen) [28]*

Soit $f \in \mathcal{A}(d^-(0,R))$, $R > 0$ et $r \in]0,R[$, tel que $f(0) \neq 0$. Soient $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ les zéros de f (pas nécessairement distincts) sur le disque fermé $d(0,r)$. Alors

$$\log|f|(r) = \log|f(0)|_p + \sum_{|\alpha|_p \leq r} w_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|_p}. \tag{2.3}$$

où $w_\alpha(f)$ est un entier positif, si f a un zéro α d'ordre q alors $w_\alpha(f) = q$, et si $f(\alpha) \neq 0, w_\alpha(f) = 0$.

Preuve.

La démonstration de cette formule est conséquence des propriétés de polygône de valuation p-adique de f.

Soit $f \in \mathcal{A}(d^-(0,R))$, tel que $f(0) \neq 0$. Pour montrer l'égalité (2.3), on suppose que les zéros de f sont dans les cercles $C(0,r_i)$ tel que $i \in \{1,k\}$ avec $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k < r$ pour tout $r \in]0,R[$, et le nombre des zéros dans le disque $d(0,r_i)$ sont $n_i, i \in \{0,k\}$ avec $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n$. On a

$$\log|f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log|a_n|_p + n\log r\},$$

alors pour tout $t \in]0,r]$

$$\begin{aligned}
0 < t \leq r_1 :&\ \log|f|(t) = \log|a_0|_p = \log|f(a)|_p \\
r_1 \leq t \leq r_2 :&\ \log|f|(t) = \log|a_{n_1}|_p + n_1 \log t \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
r_{k-1} \leq t \leq r_k :&\ \log|f|(t) = \log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1} \log t \\
r_k \leq t \leq r :&\ \log|f|(t) = \log|a_{n_k}|_p + n_k \log t.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\log|f|(r) &= [\log|f|(r) - \log|f|(r_k)] + [\log|f|(r_k) - \log|f|(r_{k-1})] + \ldots + [\log|f|(r_2) \\
&\quad - \log|f|(r_1)] + \log|f|(r_1) \\
&= [\log|a_{n_k}|_p + n_k \log r - \log|a_{n_k}|_p - n_k \log r_k] + [\log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1}\log r_k \\
&\quad - \log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1}\log r_{k-1}] + \ldots + [\log|a_{n_1}|_p + n_1 \log r_2 - \log|a_{n_1}|_p \\
&\quad - n_1 \log r_1] + \log|f(0)|_p \\
&= \log|f(0)|_p + n_k \log\frac{r}{r_k} + n_{k-1}\log\frac{r_k}{r_{k-1}} + \ldots + n_1 \log\frac{r_2}{r_1} \\
&= \log|f(0)|_p + n_k \log\frac{r}{r_k} + n_{k-1}\left(\log\frac{r}{r_{k-1}} - \log\frac{r}{r_k}\right) + \ldots + n_1\left(\log\frac{r}{r_1} - \log\frac{r}{r_2}\right) \\
&= \log|f(0)|_p + (n_k - n_{k-1})\log\frac{r}{r_k} + (n_{k-1} - n_{k-2})\log\frac{r}{r_{k-1}} + \ldots + (n_2 - n_1)\log\frac{r}{r_2} \\
&\quad + (n_1 - n_0)\log\frac{r}{r_1} \\
&= \sum_{i=1}^{k}(n_i - n_{i-1})\log\frac{r}{r_i} + \log|f(0)|_p,
\end{aligned}$$

où $(n_i - n_{i-1})$ est le nombre des zéros de f sur le cercle $|z|_p = r_i$, donc $\forall r \in]0, R[$ on a

$$\log|f|(r) = \log|f(0)|_p + \sum_{i=1}^{k}(n_i - n_{i-1})\log\frac{r}{r_i}.$$

Donc

$$\log|f|(r) = \log|f(0)|_p + \sum_{|\alpha|_p \le r} w_\alpha(f)\log\frac{r}{|\alpha|_p}.$$

■

Preuve du Théorème 2.2.1 .

Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ une fonction entière p-adique, alors

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p r^n = 0, \quad \forall r > 0.$$

Donc on a

$$|f|(r) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n,$$

et

$$v_f(\log(r)) = \log |f|(r) = \max_{n \geq 0} \{\log |a_n|_p + n \log r\}.$$

D'après le Lemme 2.2.2, on sait que les zéros de f apparaissent aux **"coins"** son polygône de valuation, et que $|f|(r) = |a_0|_p$ pour r proche de zéro à condition que $a_0 \neq 0$.

Et comme f n'est pas constante, alors pour tout r suffisant grand, on a

$$|f|(r) \neq |a_0|_p,$$

donc le polygône a au moins un coin et f a au moins un zéro.

Si f est transcendent, alors f a une infinité de nombre de coefficients non nul. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe r_n tel que pour tout $r \geq r_n$ on a

$$|f|(r) > |a_n|_p r^n.$$

Par conséquent, le polygône de valuation de f a une infinité de coins, et donc f a une infinité de zéros. ■

Corollaire 2.2.3 *[28] Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non constante. Alors on a $f(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p$.*

Proposition 2.2.4 *[18][28] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ une fonction méromorphe non constante. Alors f prend toutes les valeurs de $\mathbb{C}_p$, sauf au plus un.*

Preuve.
Supposons que f ne prendre que deux valeurs distincts $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_p$. On note $f = \dfrac{g}{h}$, où g et h sont deux fonctions entières sans zéros communs, de sorte que la fonction méromorphe $H = \dfrac{g - \alpha h}{g - \beta h}$ n'a pas de zéros et de pôles. Par conséquent, d'après le

Théorème 2.2.1, H est égal à une constante $\gamma \in \mathbb{C}_p\backslash\{1\}$ et nous avons donc $f = \dfrac{\alpha - \beta\gamma}{1-\gamma}$, qui est une contradiction. ■

2.3 Image d'un disque

L'image d'un disque fermé $d(0,r)$ par une fonction analytique est un disque de même nature et l'image d'un disque ouvert $d^{-}(0,r)$ par une fonction analytique est aussi un disque de même nature .

Théorème 2.3.1 *[18] Soit* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d(0,r))$ *et soit* $t = \max\limits_{n\geq 1} |a_n| r^n$. *Alors*

$$f(d(0,r)) = d(a_0,t) \text{ et } |f - a_0|(r) = t.$$

Preuve. D'après la Définition de module maximum, on a

$$|f - a_0|(r) = \max_{n\geq 1} |a_n| r^n = t.$$

De plus, d'une part, il est clair que $f(d(0,r))$ est inclus dans $d(a_0,t)$ car si $y \in f(d(0,r))$, alors il existe $z_0 \in d(0,r)$ tel que $y = f(z_0)$, d'où

$$\begin{aligned} |y - a_0|_p = |f(z_0) - a_0|_p &\leq \max_{z\in d(0,r)} |f(z) - a_0|_p \\ &= |f - a_0|(r) = \max_{n\geq 1} |a_n| r^n = t, \end{aligned}$$

donc $y \in d(a_0,t)$.
D'autre part, on prend $b \in d(a_0,t)$ et on considère la fonction

$$g(z) = f(z) - b = a_0 - b + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Pour $t = 0$, le Théorème 2.3.1 est trivial, donc on peut supposer $t > 0$. D'où

$$|a_0 - b| \leq t = \max_{n\geq 1} |a_n| r^n,$$

alors d'après l'hypothèse on a $N(g, r) \geq 1$. Ensuite, g admet au moins un zéro dans $d(0, r)$ et donc b appartient à $f(d(0, r))$. ■

Corollaire 2.3.2 *[18]*
Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d^-(0, R))$ *tel que* $0 < r < R$, *et soit* $t = \max_{n\geq 1} |a_n| r^n$. *Si* $t > 0$, *alors*

$$f(d^-(0, r)) = d^-(a_0, t).$$

Preuve. D'une parte, il est claire que $f(d(0, r^-))$ est inclus dans $d^-(a_0, t)$. D'autre parte, soit $b \in d^-(a_0, t)$ et soit $\rho \in]0, r[$ satisfait $\max_{n\geq 1} |a_n| \rho^n \geq |b - a_0|$. Alors, d'après le Théorème 2.3.1, b appartient à $f(d(0, \rho))$ car $f \in \mathcal{A}(d(0, \rho))$. ■

Corollaire 2.3.3 *[18] Soit* $f \in \mathcal{A}(d(0, r))$ *tel que* $N(f, r) \geq 1$, *et soit* $b \in f(d(0, r))$. *Si* $g(z) = f(z) - b$, *alors* $N(g, r) = N(f, r)$.

Preuve. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et on pose $s = N(f, r)$. Alors on a

$$|a_s| r^s \geq |a_n| r^n, \ \ \forall n < s$$

et

$$|a_s| r^s > |a_n| r^n, \ \ \forall n > s.$$

D'où, si $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, on a $b_0 = a_0 - b$ et $b_n = a_n, \forall n \geq 1$. D'après l'hypothèse et le Théorème 2.3.1, on a $b \in f(d(0, r)) = d(a_0, t)$, alors

$$|b_0| = |a_0 - b| \leq t = \max_{n\geq 1} |a_n| r^n.$$

Par conséquent $|b_0| \leq |b_s| r^s$, d'où $N(g, r) = s$. ■

Corollaire 2.3.4 *[18] Soit $f \in \mathcal{A}(d(0,r))$ admet s zéros dans le disque $d(0,r)$ où $s \geq 1$ (en prenant en compte les multiplicités), et soit $b \in f(d(0,r))$. Alors $f - b$ admet aussi s zéros dans le disque $d(0,r)$ (en prenant en compte les multiplicités).*

Preuve. D'après l'hypothèse, on sait que $|f|(r) = |a_s|r^s$ et $N(f,r) = s \geq 1$. Et comme on a $b \in f(d(0,r))$, alors d'après le Corollaire 2.3.3, on a

$$N(f,r) = N(f - b, r) = s.$$

Alors $f - b$ a "s zéros" dans $d(0,r)$. ■

Lemme 2.3.5 *[18] Soient $f \in \mathcal{A}(d(0,r))$, et $s = N(f,r)$ où $s \geq 1$. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_q$ les zéros de f' dans le disque $d(0,r)$. Pour tout $b \in f(d(0,r)) \setminus f(\{\alpha_1, ..., \alpha_q\})$, $f - b$ admet exactement s zéros simples dans le disque $d(0,r)$.*

Preuve. Soit $b \in f(d(0,r)) \setminus f(\{\alpha_1, ..., \alpha_q\})$. Alors d'après le Corollaire 2.3.4, on $f - b$ admet s zéros dans le disque $d(0,r)$(en prenant en compte des multiplicités). Mais, pour tout zéro α de $f - b$, on a $f'(\alpha) \neq 0$ car $\alpha \neq \alpha_j$ pour tout $j = 1, ..., q$. D'où tous les zéros de $f - b$ sont simples. ■

2.4 Théorème de l' inverse locale p-adique

Définition 2.4.1 *Soit $f(z) \in \mathcal{A}(d(0,r))$ (resp. $f(z) \in \mathcal{A}(d^-(0,r))$), on dit que f est strictement injective sur $d(0,r)$ (resp. sur $d^-(0,r)$) si f est injective et $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in d(0,r)$ (resp. $z \in d^-(0,r)$).*

Proposition 2.4.1 *[18] Si $f \in \mathcal{A}(d^-(0,r))$ injective sur $d^-(0,r)$, alors f est strictement injective sur $d^-(0,r)$.*

Preuve. On suppose que f n'est pas strictement injective sur $d^-(0,r)$, alors il existe $\alpha \in d^-(0,r)$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Soit $d(\alpha,\rho)$ un disque inclus dans $d^-(0,r)$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\alpha=0$. Donc pour tout $z\in d(0,\rho)$ on a

$$f(z)=a_0+\sum_{n=q}^{\infty}a_nz^n,\ \text{où } q\geq 2 \text{ et } a_q\neq 0,$$

car $f'(0)=a_1=0$. Alors d'après le Corollaire 2.3.3, on a

$$N(f,\rho)=N(f-a_0,\rho)\geq q\geq 2.$$

On prend $s=N(f,\rho)$, et comme $f^{'}$ n'est pas identiquement nulle, alors f' admet un nombre fini des zéros $\alpha_1=0,\alpha_2,...,\alpha_j\in d(0,\rho)$. Donc pour $b\in f(d(0,\rho))\backslash f(\alpha_1,...,\alpha_j)$, d'après le Lemme 2.3.5, la fonction $f-b$ admet s zéros simples dans $d(0,\rho)$ et cela contredit l'hypothèse "f est injective dans $d(0,\rho)$". ■

Théorème 2.4.2 *[18][28] Soient $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{A}(d(0,r))$, et $t=\max\limits_{n\geq 1}|a_n|r^n>0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(α) $|a_1|>|a_n|r^{n-1}$, $\forall\, n>1$.

(β) $|f(z)-f(y)|=|z-y||a_1|$, $\forall\, z,y\in d(0,r)$.

(γ) f est strictement injective dans $d(0,r)$.

De plus, si les conditions $\alpha),\beta),\gamma)$ sont satisfaites, alors on a, $t=|a_1|r$ et $|f^{'}(z)|=|a_1|$ pour tout $z\in d(0,r)$.

Preuve.

1) On suppose que α) est satisfait. Pour tout $z,y\in d(0,r)$, on a

$$\begin{aligned}f(z)-f(y)&=a_1(z-y)+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(z^n-y^n)\\&=(z-y)\left(a_1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\left(\sum_{j=0}^{n-1}z^jy^{n-1-j}\right)\right).\end{aligned}$$

Et pour tout $n \geq 2$, on voit que

$$|z^j y^{n-1-j}| = |z|^j |y|^{n-1-j} \leq r^j r^{n-1-j} = r^{n-1},$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{j=0}^{n-1} z^j y^{n-1-j}\right)\right| &\leq \max_{n>1} |a_n| r^{n-1} \\ &< |a_1|,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}|f(z) - f(y)| &= |z-y| \left| a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{j=0}^{n-1} z^j y^{n-1-j}\right)\right| \\ &= |z-y||a_1|.\end{aligned}$$

De plus, on remarque que α) implique $|f'(z)| = |a_1|$, pour tout $z \in d(0,r)$ et d'après le Théorème 2.1.3, on a $t = |a_1| r$.

2) On suppose que β) est satisfait. Comme on a $t > 0$, d'après le Théorème 2.1.3, f n'est pas constante, donc $a_1 \neq 0$. Puis, d'après β), on a $f(z) \neq f(y)$ pour tout $z \neq y$.

3) On suppose que γ) est satisfait. Alors pour tout $b \in f(d(0,r))$, on a $s = N(f,r) = N(f-b,r)$.
Si $s \geq 2$, alors $f-b$ admet plusieurs zéros différents, ou bien $f-b$ admet un zéro α d'ordre s. Donc dans les deux cas $f-b$ n'est pas strictement injective, alors f n'est pas strictement injective. D'où $s = 1$, donc $|a_1| > |a_n| r^{n-1}$, $\forall\, n > 1$.

■

Corollaire 2.4.3 *[18] Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d(0,r))$ est une fonction injective dans $d(0,r)$, et $d(a_0,t) = f(d(0,r))$ où $t = \max_{n\geq 1} |a_n| r^n$, alors f^{-1} appartient à $\mathcal{A}(d(a_0,t))$.*

Corollaire 2.4.4 *[18] Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d^-(0,r))$, et supposons que $t = \max_{n\geq 1} |a_n| r^n$ est* *strictement positif. Alors les conditions $\alpha), \beta), \gamma), \delta)$ sont équivalents.*

(α) $|a_1| > |a_n|r^{n-1}, \forall\, n > 1$

(β) $|f(z) - f(y)| = |z - y||a_1|. \forall\, z, y \in d^-(0, r)$

(γ) *f est strictement injectif dans $d^-(0, r)$.*

(δ) $s = |a_1|r$.

De plus, lorsque les conditions $\alpha), \beta), \gamma), \delta)$ sont satisfaites, on a $|f'(z)| = |a_1|$ pour tout $z \in d^-(0, r)$.

Preuve. Pour tout $\rho \in]0, r[$, on applique le Théorème 2.4.2 à $f \in \mathcal{A}(d(a, \rho))$ ■

Corollaire 2.4.5 *[18] Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d^-(0, r))$ est une fonction injective dans $d^-(0, r)$ et si $t = r|f'(0)|$. Alors f^{-1} appartient à $\mathcal{A}(d^-(0, t))$.*

Conséquence 2.4.1 (***Inversion locale entière p-adique***)

Soient $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$, et $\alpha \in \mathbb{C}_p$. On suppose que $f'(\alpha) \neq 0$. Alors il existe $r_\alpha > 0$ tel que $f_{|d_\alpha} : d_\alpha \longrightarrow d_{f(\alpha)}$ où $d_\alpha = d^-(\alpha, r)$ et $d_{f(\alpha)} = f(d_\alpha)$ est bijective, de plus

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \text{ pour tout } z \in d_\alpha.$$

2.5 Wronskien p-adique

2.5.1 La dérivée logarithmique et le Wronskien

Définition 2.5.1 *Soient $f_1, \ldots, f_m$ des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$, et $n_1, \ldots, n_m$ des entiers naturels. Nous posons $f = (f_1, \ldots, f_m)$ et $n = (n_1, \ldots, n_m)$. Nous appellerons Wronskien généralisé, le déterminant*

$$w(f, n) = \begin{vmatrix} f_1^{(n_1)} & \ldots & f_1^{(n_m)} \\ f_2^{(n_1)} & \ldots & f_2^{(n_m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m^{(n_1)} & \ldots & f_m^{(n_m)} \end{vmatrix}$$

Dans le cas $m = 1$, on a $w(f, n) = f_1^{(n_1)}$.

Définition 2.5.2 *Soient $f_1, \ldots, f_m$ des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$. Nous appellerons le Wronskien ordinaire, le déterminant*

$$w(f,q) = \begin{vmatrix} f_1 & \ldots & f_1^{(m-1)} \\ f_2 & \ldots & f_2^{(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m & \ldots & f_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

où $f = (f_1, \ldots, f_m)$ et $q = (0, \ldots, m-1)$.

Théorème 2.5.1 *[6] Soit f une fonction entière p-adique. On a*

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \frac{1}{r}, \quad \textit{pour tout } r > 0.$$

Preuve.

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ donc $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$, d'où pour $r > 0$, on a

$$\begin{aligned} |f'|(r) &= \max_{n\geq 1} |a_n n|_p r^{n-1} \\ &= \frac{1}{r} \max_{n\geq 1} |a_n|_p |n|_p r^n \\ &\leq \frac{1}{r} \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n \quad (\textit{car } |n|_p \leq 1) \\ &\leq \frac{1}{r} |f|(r). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ∎

Théorème 2.5.2 *[6] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $f \in \mathcal{M}(d^-(0,R))$). Pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a*

$$|f'|(r) \leq \frac{1}{r} |f|(r).$$

Preuve. Posons $f = \dfrac{g}{h}$ où $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $g, h \in \mathcal{A}(d^-(0, R))$). Pour $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} = \frac{|g'h - gh'|(r)}{|gh|(r)},$$

comme $|g'h - gh'|(r) \leq \max\{|g'h|(r), |gh'|(r)\}$, on a

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \max\left\{\frac{|g'|(r)}{|g|(r)}, \frac{|h'|(r)}{|h|(r)}\right\}.$$

D'après le Théorème 2.5.1, on a $\dfrac{|g'|(r)}{|g|(r)} \leq \dfrac{1}{r}$ et $\dfrac{|h'|(r)}{|h|(r)} \leq \dfrac{1}{r}$. Ce qui achève la démonstration.
■

2.5.2 Propriétés de Wronskien p-adique

Proposition 2.5.3 *[7] Soient f_1, f_2 deux fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$, et n_1, n_2 des entiers naturels, $f = (f_1, f_2), n = (n_1, n_2)$ et $q = (0, 1)$. On a l'inégalité :*

$$|w(f, n)|(r) \leq \frac{|w(f, q)|(r)}{r^{(n_1+n_2)-1}}, \quad \textit{pour tout } r > 0.$$

Preuve.

On a f_1, f_2 deux fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$ (que l'on peut supposer linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$). On considère l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ f_1 & f_1' & f_1'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \end{vmatrix} = 0. \tag{2.4}$$

Elle s'écrit aussi sous la forme

$$B_2(z)y''(z) + B_1(z)y'(z) + B_0(z)y(z) = 0.$$

D'autre part, pour $f = (f_1, f_2), q_2 = (0, 1), q_1 = (0, 2)$ et $q_0 = (1, 2)$, on a les égalités $B_2(z) = w(f, q_2)$, $B_1(z) = w(f, q_1)$, car $-B_1$ est la dérivée de B_2, et $B_0 = w(f, q_0)$. D'après le Théorème 2.5.1, on a

$$|B_1|(r) \leq \frac{|B_2|(r)}{r}, \ \textit{pour tout } r > 0.$$

Comme f_1 est solution de l'équation différentielle (2.4), on trouve que

$$B_0 = -B_2(z)\frac{f_1''(z)}{f_1(z)} - B_1(z)\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Il en résulte immédiatement que

$$|B_0|(r) \leq \frac{|B_2|(r)}{r^2}, \ \textit{pour tout } r > 0.$$

Car

$$\begin{aligned} |B_0|(r) &= \left| -(B_2\frac{f_1''}{f_1} + B_1\frac{f_1'}{f_1})\right|(r) \\ &= \left|B_2\frac{f_1''}{f_1} + B_1\frac{f_1'}{f_1}\right|(r) \\ &\leq \max\left\{\left|B_2\frac{f_1''}{f_1}\right|(r), \left|B_1\frac{f_1'}{f_1}\right|(r)\right\}. \end{aligned}$$

Donc, si $\max\left\{\left|B_2\frac{f_1''}{f_1}\right|(r), \left|B_1\frac{f_1'}{f_1}\right|(r)\right\} = \left|B_2\frac{f_1''}{f_1}\right|(r)$, alors

$$\begin{aligned} |B_0|(r) &\leq \left|B_2\right|(r)\left|\frac{f_1''}{f_1}\right|(r) \\ &= \frac{|B_2|(r)}{r^2}. \end{aligned}$$

De plus, on a le même résultat si $\max\left\{\left|B_2\frac{f_1''}{f_1}\right|(r), \left|B_1\frac{f_1'}{f_1}\right|(r)\right\} = \left|B_1\frac{f_1'}{f_1}\right|(r)$.

On écrit, maintenant, l'équation différentielle sous la forme suivante :

$$y''(z) = A_1(z)y'(z) + A_0(z)y(z), \tag{2.5}$$

avec $A_1(z) = -\frac{B_1(z)}{B_2(z)}$, et $A_0(z) = -\frac{B_0(z)}{B_2(z)}$. Tout ça montre que $|A_1|(r) \leq \frac{1}{r}$ et $|A_0|(r) \leq \frac{1}{r^2}$, pour tout $r > 0$.

On exprime, maintenant, les dérivées n-ème d'une solution y de (2.5) sous la forme

$$y^{(n)}(z) = A_{1,n}(z)y'(z) + A_{0,n}(z)y(z)$$

On a les relations de récurrence suivantes :

$$A_{1,n+1} = A'_{1,n} + A_{1,n}A_1 + A_{0,n}$$

et

$$A_{0,n+1} = A'_{0,n} + A_{1,n}A_0$$

Montrons que $|A_{1,n}|(r) \leq \dfrac{1}{r^{n-1}}$ et $|A_{0,n}|(r) \leq \dfrac{1}{r^n}$, pour $n \geq 0$ et $r \in]0, +\infty[$.
En effet, ceci est vrai pour $n = 0$, car $A_{0,0} = 1$ et $A_{1,0} = 0$ et pour $n = 1$, car $A_{1,1} = 1$ et $A_{0,1} = 0$ et de même pour $n = 2$, car $A_{1,2} = A_1$ et $A_{0,2} = A_0$. L'autre étape est évidente.
On a, donc, la formule matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} f_1^{(n_1)} & f_1^{(n_2)} \\ f_2^{(n_1)} & f_2^{(n_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_1' \\ f_2 & f_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0,n_1} & A_{0,n_2} \\ A_{1,n_1} & A_{1,n_2} \end{pmatrix}$$

Ce qui, en prenant le déterminant, donne la formule

$$w(f, n) = (A_{0,n_1}A_{1,n_2} - A_{0,n_2}A_{1,n_1})w(f, q)$$

où $f = (f_1, f_2), n = (n_1, n_2)$ et $q = q_2 = (0, 1)$. D'où

$$|w(f, n)|(r) = |A_{0,n_1}A_{1,n_2} - A_{0,n_2}A_{1,n_1}|(r).|w(f, q)|(r) \leq \frac{|w(f, q)|(r)}{r^{(n_1+n_2)-1}}.$$

■

Théorème 2.5.4 *[7] Soient $f_1, \ldots, f_m$ des des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$, et $n_1, \ldots, n_m$ des entiers naturels, $f = (f_1, \ldots, f_m), n = (n_1, \ldots, n_m)$ et $q = (0, \ldots, m-1)$. On a, pour tout $r \in]0, +\infty[$, l'inégalité*

$$|w(f,n)|(r) \leq \frac{|w(f,q)|(r)}{r^{(n_1+\ldots+n_m)-\frac{m(m-1)}{2}}} \tag{2.6}$$

Preuve. Dans toute la suite, le réel r appartient à $]0,+\infty[$.

Le cas $m = 1$.

D'après le Théorème 2.5.1, on a l'inégalité $|f^{(n_1)}|(r) \leq \frac{|f|(r)}{r^{n_1}}$.

Le cas m=2.

L'inégalité (2.6) est vérifiés d'après la Proposition 2.5.3.

Le cas général.

Pour prouver le cas général, nous procédons par récurrence sur m. Nous supposons donc le résultat acquis pour $k \leq m$ fonctions entières, et des indices quelconques. Nous nous donnons maintenant $(m+1)$ fonctions entières $f_1, \ldots, f_{m+1}$, des entiers $n_1, \ldots, n_{m+1}$. Nous posons $f = (f_1, \ldots, f_{m+1}), n = (n_1, \ldots, n_{m+1}), q = (0, \ldots, m)$ et il nous faut démontrer que

$$|w(f,n)|(r) \leq \frac{|w(f,q)|(r)}{r^{(n_1+\ldots+n_{m+1})-\frac{m(m+1)}{2}}}$$

On peut sans perte de généralité supposer que $f_1, \ldots, f_{m+1}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$. Nous allons suivre essentiellement le schéma de démonstration du cas $m = 2$.

Pour cela, nous écrivons l'équation différentielle vérifiée par les fonctions f_j :

$$\begin{vmatrix} y & y' & \ldots & y^{(m+1)} \\ f_1 & f_1' & \ldots & f_1^{(m+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m+1} & f_{m+1} & \ldots & f_{m+1}^{(m+1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.7}$$

Cette équation s'écrit sous la forme

$$B_{m+1}y^{(m+1)} + \ldots + B_0 y = 0,$$

où, en notant toujours $f = (f_1, \ldots, f_{m+1}), n_j = (0, \ldots, \widehat{j}, \ldots, m+1)$, (où le terme $\widehat{j}$ est omis et n_j est donc un $m+1$ -uplet) on a au signe prés $B_j = w(f, n_j)$, avec en particulier

$B_{m+1} = w(f, q)$, où $q = (0, \ldots, m)$.
Nous allons démontrer que l'on a tout d'abord $|B_j|(r) \leq \frac{|B_{m+1}|(r)}{r^{m+1-j}}$ pour $r > 0$ et $j = 0, \ldots, m+1$. C'est évidemment vrai si $j = m+1$. Pour $j = m$, on voit sans peine que B_m est au, signe prés, la dérivée de B_{m+1}, de sorte que $|B_m|(r) \leq \frac{|B_{m+1}|(r)}{r}$. On procède ensuite par récurrence descendante finie sur l'indice k pour montrer l'assertion pour $k \geq 1$: On suppose le résultat acquis pour $m+1, m, \ldots, k+1$, et on le montre pour $k \geq 1$ (on peut supposer que $k \leq m-1$).
On suppose que l'équation (2.7) est vérifiée pour $f_1, \ldots, f_{k+1}$. On note E_j le premier membre de l'équation (2.7) où l'on a remplacé y par f_j, on a donc $E_j = 0$. On considère ensuite le déterminant $(k+1) \times (k+1)$ ayant pour première ligne $E_1, f_1, f_1', \ldots, f_1^{k-1}$, etc, et pour dernière ligne $E_{k+1}, f_{k+1}, f_{k+1}', \ldots, f_{k+1}^{k-1}$.
Ce déterminant est évidemment nul, puisque sa première colonne est nulle.
En développant la première colonne, on trouve que l'expression suivante est nulle :

$$\sum_{l=k}^{m+1} B_l w(g_k, n_{l,k}) \tag{2.8}$$

où $g_k = (f_1, \ldots, f_{k+1}), n_{l,k} = (l, 0, \ldots, k-1)$.
En effet, les déterminants $w(g_k, n_{l,k})$ sont nuls si $l \leq k-1$, car ils ont deux colonnes égales.
Comme $k \leq m-1$, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$|w(g_k, n_{l,k}|(r) \leq \frac{|w(g_k, q_k)|(r)}{r^{l+k(k-1)/2-k(k+1)/2}} = \frac{|w(g_k, q_k)|(r)}{r^{l-k}}$$

avec $q_k = (0, \ldots, k)$.
D'autre part, on a $|B_l|(r) \leq \frac{|B_{m+1}|(r)}{r^{m+1-l}}$ pour $l \geq k+1$. On en déduit qu'à l'exception du premier terme de l'expression (2.8), tous ont leur fonction module maximal majorée par l'expression

$$\frac{|B_{m+1}|(r)}{r^{m+1-l}} \frac{|w(g_k, q_k)|(r)}{r^{l-k}} = \frac{|B_{m+1}|(r) w(g_k, q_k)|(r)}{r^{m+1-k}}$$

Il en est de même pour le premier terme $B_k w(g_k, n_{k,k})$ de l'expression (2.8), et en notant que $w(g_k, n_{k,k}) = \pm w(g_k, q_k)$ et que $w(g_k, q_k)$ est non nul. Ceci prouve l'assertion.
Il reste à montrer le résultat pour $k = 0$; pour cela on suppose que l'équation différen-

tielle (2.7) est vérifiée par f_1, on exprime B_0 en fonction de f_1 et de ses dérivées, et des $B_k, k \geq 1$, et l'inégalité à prouver en résulte.
On écrit maintenant l'équation (2.7) sous la forme

$$y^{m+1} = A_m y^{(m)} + \ldots + A_0 y$$

Avec $A_j = -\dfrac{B_j}{B_{m+1}}$. Donc, on a les A_j sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}_p$ vérifiant $|A_j|(r) \leq \dfrac{1}{r^{m+1-j}}$.
En dérivent cette égalité, on trouve

$$y^{(n)} = A_{m,n} y^{(m)} + \ldots + A_{0,n} y$$

où les $A_{j,n}$ sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}_p$, qui vérifient les relations :

$$A_{j,n+1} = A'_{j,n} + A_{m,n} A_j + A_{j-1,n}$$

si $j \geq 1$, et

$$A_{0,n+1} = A'_{0,n} + A_{m,n} A_0$$

si $j = 0$.
Nous voulons maintenant démontrer que $|A_{j,n}|(r) \leq \dfrac{1}{r^{n-j}}$. Pour tout j et tout n. On vérifie que c'est vrai si $n \leq m$, (on a alors $A_{j,n} = 0$, et 1 si $j = n$), c'est aussi vrai pour $n = m+1$par ce que l'on vient de montrer sur les A_j, et on procède par récurrence sur n.
Si on suppose le résultat acquis pour n, en tenant compte que pour une fonction méromorphe f, et on a encore la formule $|f'|(r) \leq \dfrac{|f|(r)}{r}$, les relations liant les $A_{j,n+1}$ aux A_j montrent le résultat qui est donc vrai en toute généralité.
Nous passons maintenant à la dernière partie de la démonstration, en reprenant la formule matricielle

$$\begin{pmatrix} f_1^{(n_1)} & \ldots & f_1^{(n_{m+1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m+1}^{(n_1)} & \ldots & f_{m+1}^{(n_{m+1})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m+1} & \ldots & f_{m+1}^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0,n_1} & \ldots & A_{0,n_{m+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m,n_1} & \ldots & A_{m,n_{m+1}} \end{pmatrix}$$

qui montre que si D est le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A_{0,n_1} & \dots & A_{0,n_{m+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m,n_1} & \dots & A_{m,n_{m+1}} \end{pmatrix}$$

on a la formule $w(f,n) = Dw(f,q)$.
Si l' on note $a_{i,j} = A_{i-1,n_j}$, pour $1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq m+1$, le déterminant D est combinaison linéaire à coefficients ± 1 de termes de la forme $P = \Pi_{i=1}^{m+1} a_{i,\sigma(i)}$, où σ parcourt les permutations de $\{1, 2, \dots, m+1\}$.
D'après ce qui précède. On a $|a_{i,j}|(r) \leq \dfrac{1}{r^{n_j-(i-1)}}$. Ce qui donne

$$|P|(r) \leq \frac{1}{r^{(n_1+\ldots+n_{m+1})-\frac{m(m+1)}{2}}}.$$

On a donc la même majoration pour le déterminant D. Ce qui termine la démonstration du théorème. ■

Corollaire 2.5.5 *Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}_p$, et $n_1, \dots, n_m$ des entiers naturels, $f = (f_1, \dots, f_m), n = (n_1, \dots, n_m)$ et $q = (0, \dots, m-1)$. On a , pour tout $r \in]0, +\infty[$ l'inégalité*

$$|w(f,n)|(r) \leq \frac{|w(f,q)|(r)}{r^{(n_1+\ldots+n_m)-\frac{m(m-1)}{2}}}$$

Corollaire 2.5.6 *[7] Soit $m \geq 1, P, \dots, P_m$ des polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, et $n_1, \dots, n_m$ des entiers. On pose $P = (P_1, \dots, P_m), n = (n_1, \dots, n_m)$, et $q = (0, \dots, m-1)$. Soit d_1 le degré de $w(P,n)$, et d_2 le degré de $w(P,q)$ (avec la convention que le degré du polynôme nul est $-\infty$). On a alors l'inégalité*

$$d_2 \leq d_1 - (n_1 + \ldots + n_m) + \frac{m(m-1)}{2}$$

Théorème 2.5.7 *[7] Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$. On note $f = (f_1, \dots, f_m)$ et $q = (0, \dots, m-1)$. Si l'on suppose que le Wronskien $w(f,q)$ de ces m fonctions est un polynôme non nul, alors toutes les fonctions f_k sont des polynômes.*

Remarque 2.5.1 ***1)*** *Le résultat n'est pas vrai dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$. En effet, dans le cas de deux fonctions, si on considère les fonctions entières $f_1(z) = Q_1(z)\exp(z)$ et $f_2(z) = Q_2(z)\exp(-z)$ avec Q_1 et Q_2 polynôme non nul, le Wronskien de f_1 et f_2 est $2Q_1(z)Q_2(z) = P(z)$ qui est un polynôme non nul. Mais f_1 et f_2 ne sont pas des polynômes.*

2) *Cela ne marche plus avec des fonctions méromorphes à la place de fonctions entières. Pour cela, soit g une fonction entière non nulle quelconque, et h une primitive de $g(z)^2$. On pose $f_1 = \dfrac{h}{g}$, et $f_2 = \dfrac{1}{g}$. On a alors $f_1' = \dfrac{h'g - g'h}{g^2}$, et $f_2' = \dfrac{g'}{g^2}$, donc*

$$f_1'f_2 - f_1f_2' = h' = \frac{h'}{g^2} = 1.$$

Comme la fonction g est arbitraire, dans le cas méromorphe, le fait que le Wronskien soit constant n'implique pas que les fonctions soient des fractions rationnelles.

CHAPITRE 3

FACTORISATION DES FONCTIONS MÉROMORPHES *P*-ADIQUES

Dans la première section de ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de la factorisation des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}_p$. Beaucoup de mathématiciens ont fait leurs recherches sur ce sujet et la plupart ont été fait dans le corps des nombres complexes (voir par exemple [16], [20], [22], [32], [33]). Nous faisons une étude similaire dans $\mathbb{C}_p$. En particulier, on donne des conditions suffisantes pour qu'une fonction méromorphe vérifie certaines propriétés.

Dans la deuxième section, on construit des fonctions méromorphes premières et pseudo premières. Puis, on montre que l'ensemble $\{a \in \mathbb{C}_p \mid f(z) - az$ n'est pas première$\}$ est au plus un ensemble dénombrable.

Dans la troisième section, on étudie le problème de la permutabilité des fonctions entières dans $\mathbb{C}_p$. Ce problème a été étudié dans le cas complexe par Baker I. N (voir par exemple [4], [5]).

3.1 Étude de la factorisation des fonctions méromorphes p-adiques

Définition 3.1.1 *Soit $f, f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, telle que*

$$f = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$$

On dit qu'on a là une ***factorisation*** *de f et que $f_1, \cdots, f_n$ sont des* ***facteurs*** *de f.*

Définition 3.1.2 (degré d'une fraction rationnelle) *Soit $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle, où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes de $\mathbb{C}_p[z]$ premiers entre eux. On appelle degré de $R(z)$ le nombre*

$$\deg R := \max(\deg P, \deg Q).$$

Si $\deg R = 1$, on dit que R est bilinéaire.

Définition 3.1.3 *[15][22] Soit F une fonction méromorphe. Si $F(z)$ peut être exprimé sous la forme*

$$F(z) = f(g(z))(= f \circ g(z)), \tag{3.1}$$

où f est une fonction méromorphe et g est entière (g peut être méromorphe lorsque f est une fraction rationnelle), alors on appelle l'expression (3.1) une factorisation de F et f, g sont appelés le facteur à gauche et le facteur à droite de F, respectivement.

Définition 3.1.4 *[15][22] Si chaque factorisation de F de la forme ci-dessus implique que f ou g est bilinéaire (**resp.** f ou g est une fraction rationnelle), alors F est appelée **première (resp. pseudo-première)**.*

Définition 3.1.5 *[15][22] Si chaque factorisation de la forme (3.1) implique que f doit être bilinéaire lorsque g est transcendante (resp. g doit être linéaire lorsque f est transcendante), alors F est appelé **première à gauche (resp. première à droit).***

Remarque 3.1.1 *Pour montrer qu'une fonction méromorphe transcendante donnée F est première, on montre que :*

i) F est pseudo-première.

ii) F ne peut pas être exprimé par $F(z) = P(g(z))$ où g est méromorphe et P est une fraction rationnelle de $\deg P \geq 2$.

iii) F ne peut pas être exprimé par $F(z) = h(g(z))$ où $g(z)$ est une fraction rationnelle de $\deg \geq 2$ *et h une fonction méromorphe.*

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour qu'une fonction méromorphe p-adique doit être pseudo-première.

Théorème 3.1.1 *Soit $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(z)$. On suppose que tout les pôles de F sont simples sauf pour un nombre fini, et pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, $F - \beta$ n'a qu'un nombre fini de zéros multiples. Alors F est pseudo-première.*

Pour la démonstration, on besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.1.2 *[19] Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ telles que $f_2 \not\equiv 0$ et $f_1^{'}f_2 - f_1f_2^{'} \equiv c, \quad c \in \mathbb{C}_p$. Si l'une des fonctions f_1, f_2 n'est pas affine, alors $c = 0$ et f_1/f_2 est une constante.*

Preuve.

Supposons $c \neq 0$. Puisque $f_1^{'}f_2 - f_1f_2^{'} \equiv c$, on déduit que tous les zéros de f_1 et f_2 sont des zéros simples et F_1 et f_2 n'ont pas de zéros communs. En plus, comme $f_1^{'}f_2 - f_1f_2^{'} \equiv c$, on a $f_1^{''}f_2 - f_1f_2^{''} \equiv 0$ et

$$\frac{f_1^{''}}{f_1} = \frac{f_2^{''}}{f_2} \tag{3.2}$$

Alors, tout zéro simple de f_1 est aussi un zéro simple de $f_1^{''}$. En effet, soit α un zéro simple de f_1 qui n'est pas un zéro de $f_1^{''}$, donc α est un pôle simple de $\frac{f_1^{''}}{f_1}$ et d'après (3.2) est un pôle simple de $\frac{f_2^{''}}{f_2}$. Par conséquent, α est un zéro de f_2, une contradiction. D'où on déduit que $\varphi = \frac{f_1^{''}}{f_1}$ n'a pas de pôles et donc $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$. ■

Lemme 3.1.3 *[8] Soient F, f, g trois fonctions méromorphes. Si $F = f \circ g$ et f n'est pas une fraction rationnelle, alors g est entière.*

Preuve.
Posons $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ avec f_1 et f_2 des fonctions entières sans zéros communs. Comme f n'est pas rationnelle, alors il existe au plus une valeur $w_0 \in \mathbb{C}_p$ telle que $f_1 - w_0 f_2$ soit un polynôme. Si w est différent de cette valeur éventuelle, alors la fonction entière $f_1(z) - w f_2(z)$ est transcendante et a une infinité de zéros que le note $c_k,\ k \in \mathbb{N}$.
Supposons que g a un pôle z_0. On pose

$$g(z) = \frac{W(z)}{(z - z_0)^n},\ n \in \mathbb{N}^*$$

où $W(z)$ est une fonction analytique qui ne s'annule en aucun point d'un disque ouvert de centre z_0 et de rayon R. Pour tout k, posons $T_k(z) = W(z) - c_k(z - z_0)^n$. Pour l'un de ces k, on choisit $\rho \in]0, R[$ tel que $|c_k|_p \rho^l = |W(z_0)|_p$. Donc, on a

$$\begin{cases} |c_k|_p r^l \leq |W(z_0)|_p & \text{si } 0 < r \leq \rho \\ |c_k|_p r^l \geq |W(z_0)|_p & \text{si } \rho \leq r < R \end{cases}$$

D'autre part, le fait que W n'ait pas de zéro dans $d^-(z_0, R)$ entraine que

$$|W|(r) = |W(z_0)|_p,\ \ \forall r \in]0, R[.$$

Donc on a

$$|T_k|(r) = \begin{cases} |W(z_0)|_p & \text{si } 0 < r \leq \rho \\ |c_k|_p r^l & \text{si } \rho \leq r < R \end{cases}$$

et la fonction $T_k(z)$ admet au moins un zéro z_k sur le cercle $|z - z_0| = \rho$. On a donc $g(z_k) = c_k$, d'où $F(z_k) = w$. Comme les z_k sont en nombre infini, la fonction $F(z) - w$ admet une infinité de zéros dans le disque $|z - z_0|_p < R$. Ce qui est absurde. Donc g n'a aucun pôle et elle est entière. ■

Preuve du Théorème 3.1.1.

On Suppose que F n'est pas pseudo-première. Alors, il existe deux fonctions méromorphes transcendantes f et g telles que $F = f \circ g$. Ensuite, d'après le Lemme 3.1.3, la fonctions g est entière. Et comme on a $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(z)$, alors $f = f_1/f_2$ où f_1, f_2 sont des fonctions entières sans zéros communs et au moins une des fonctions est transcendent. Ainsi, d'après le Lemme 3.1.2, $f_1^{'}f_2 - f_1f_2^{'}$ est une fonction entière non constante. Par conséquent, d'après le Théorème 2.2.1, la fonction $f_1^{'}f_2 - f_1f_2^{'}$ a au moins un zéro α. D'où, on a distingue les deux cas suivants :

1. Si $f_2(\alpha) = 0$, alors $f_1(\alpha) \neq 0$ et $f_2^{'}(\alpha) = 0$. Donc, α est un zéro multiple de f_2, et tous les éléments de l'ensemble $g^{-1}(\{\alpha\})$ sont des zéros multiples de $f_2 \circ g$ (i,e des pôles multiples de F). Comme on a $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$, alors l'ensemble $g^{-1}(\{\alpha\})$ est infini et F a un nombre infini des pôles multiples. C'est une contradiction.

2. Si $f_2(\alpha) \neq 0$, alors $f^{'}(\alpha) = (f_1^{'}f_2 - f_1f_2^{'})(\alpha)/f_2^2(\alpha) = 0$. Soit $\beta = f(\alpha)$. Donc α est un zéro multiple de $f - \beta$. D'où, l' équation $g(z) = \alpha$ admet un nombre infini de solutions , et pour toute solution ω on a

$$\begin{cases} (F-\beta)(\omega) = F(\omega) - \beta = f \circ g(\omega) - \beta = f(\alpha) - \beta = 0, \\ (F-\beta)^{'}(\omega) = F^{'}(\omega) = f^{'}(g(\omega)) \times g^{'}(\omega) = f^{'}(\alpha) \times g^{'}(\omega) = 0. \end{cases}$$

alors $F - \beta$ a une infinité de zéros multiples. Ce qui est encore une contradiction. Par conséquent, F est pseudo-première. ■

Corollaire 3.1.4 *Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$. On suppose que, pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, $F - \beta$ a au plus un nombre fini des zéros multiples. Alors F est pseudo-première.*

Théorème 3.1.5 *Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$. Si pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, $F - \beta$ a au plus un nombre fini des zéros multiples, alors F est première à gauche.*

Preuve.

Supposons que $F = f \circ g$ où $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$ et $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$. D'après le Théorème 3.1.1, on a F est pseudo-première, donc f est un polynôme.

Si on suppose que $\deg f \geq 2$, alors f' admet au moins un zéro α. Et comme on a $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$, alors d'après le Théorème de Picard p-adique, g a une infinité des zéros, et l'ensemble $W = \{z \in \mathbb{C}_p \ | \ g(z) = \alpha\}$ est infini. Soit $\beta = f(\alpha)$. Alors, pour tout $\beta \in W$, on a

$$\begin{cases} (F-\beta)(\omega) = F(\omega) - \beta = f \circ g(\omega) - \beta = f(\alpha) - \beta = 0, \\ (F-\beta)'(\omega) = F'(\omega) = f'(g(\omega)) \times g'(\omega) = f'(\alpha) \times g'(\omega) = 0. \end{cases}$$

D'où $F-\beta$ a une infinité de zéros multiples. Ce qui contredit l'hypothèse. Donc F est première à gauche. ■

Théorème 3.1.6 *Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$. Si pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, la fonction $F-\beta$ a au plus un zéro multiple. Alors F est première.*

Preuve.

D'après le Théorème 3.1.5, F est première à gauche. Donc, il reste à montrer que F est première à droit.

Pour cela, supposons que $F(z) = f \circ g(z)$, où $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$ et $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$. D'après le Corollaire 3.1.4, F est pseudo première, donc g est un polynôme. Supposons que $\deg g = d \geq 2$. Comme on a

$$F'(z) = f'(g(z))g'(z),$$

et $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$, alors la fonction $f' \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$. De plus, f' admet une infinie de zéros.

On choisit un élément w tel que $f'(w) = 0$ et $g - w$ n'a que des zéros simples $\gamma_1, ..., \gamma_d$, Alors, pour $i = 1, ..., d$, on a

$$\begin{cases} F(\gamma_i) = f(w) = \beta \\ (F-\beta)'(\gamma_i) = 0, \end{cases}$$

Cela signifie que tous les γ_i sont des zéros multiples de $F-\beta$. C'est une contradiction. Par conséquent, F est première à droite. ■

Théorème 3.1.7 *Soit $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(z)$. On Suppose que F a un nombre fini des pôles, et pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, la fonction $F-\beta$ a au plus un zéro multiple. Alors F est première à droite.*

Preuve.
Supposons que $F = f \circ g$, où $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(z)$ et $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$. D'après le Théorème 3.1.1, la fonction F est pseudo-première. Alors g est un polynôme. On suppose que $\deg g \geq 2$. On a $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(z)$, alors $f = f_1/f_2$ où f_1, f_2 sont des fonctions entières sans zéros communs. On a $F'(z) = (W(f_2, f_1)/f_2^2)(g(z))g^{'}(z)$. Comme f est transcendante et a un nombre fini de pôles, alors f_1 est transcendante et f_2 est un polynôme. Puisque $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\ \mathbb{C}_p[z]$, alors d'après le Théorème 2.5.7, on conclut que $W(f_2, f_1) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(z)$ et ainsi, admet une infinité des zéros $\{w_n\}$ (qui ne sont pas des zéros de f_2). Donc pour un entier n, assez grand, l'équation $g(z) = w_n$ admet au moins deux racines distinctes qui sont également des racines communes de

$$\begin{cases} F(z) = f(w_n) \\ F^{'}(z) = 0. \end{cases}$$

Alors on a une contradiction, et F est première à droite. ■

Remarque 3.1.2 *Tous les résultats ci-dessus qui concernent la primalité ou la pseudo-primalité des fonctions méromorphes, ne sont pas vrais dans le cas où le corps de bas est $\mathbb{C}$. En effet, la fonction $F(z) = e^z \circ e^z$, satisfait les conditions des théorèmes ci-dessus. Mais elle est même pas pseudo-première.*

3.2 Construction des fonctions méromorphes premières et pseudo-premières

Dans la suite $|.|$ désigne la norme p-adique.

Théorème 3.2.1 *Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une fonction entière p-adique tel que $a_n \neq 0$, pour tout $n \geq N$. Supposons qu'il existe un entier $n_0 \geq N$ tel que la suite $(|a_n/a_{n+1}|)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante et non bornée. Alors, pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, $f - \beta$ a au plus un nombre fini des zéros multiples.*

Preuve.

On pose $r_n = |a_n/a_{n+1}|, \ \forall n \geq 0$. Soit n_0 le plus grand entier naturel tel que $r_{n_0} > \max\{r_0, ..., r_{n_0-1}\}$.

On veut montrer que f a seulement des zéros simples dans $\mathbb{C}_p \backslash d(0, r_{n_0})$.

En effet, soit $r > r_{n_0}$. On a deux cas :

i) Si $r = r_n$, pour $n \geq n_0 + 1$, on a la suite $(r_k)_{k \geq n_0}$ est strictement croissante (i,e $r_{n-1} < r_n < r_{n+1}$), et

$$\frac{|a_{n+1}| r_n^{n+1}}{|a_n| r_n^n} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| r_n = 1,$$

d'où $|a_n| r_n^n = |a_{n+1}| r_n^{n+1}$.

De plus, pour tout entier l, $0 \leq l \leq n-1$, on a

$$\frac{|a_l| r_n^l}{|a_n| r_n^n} = \left| \frac{a_l}{a_n} \right| \frac{1}{r_n^{n-l}} = \left| \frac{a_l}{a_{l+1}} \right| ... \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \frac{1}{r_n^{n-l}} < 1.$$

Donc, on a

$$|a_l| r_n^l < |a_n| r_n^n.$$

Enfin, pour tout entier, $l > n+1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{|a_l| r_n^l}{|a_{n+1}| r_n^{n+1}} &= \left| \frac{a_l}{a_{n+1}} \right| r_n^{l-n-1} \\ &< \left| \frac{a_l}{a_{n+1}} \right| \left| \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \right| ... \left| \frac{a_{l-1}}{a_l} \right| = 1. \end{aligned}$$

D'où $|f|(r_n) = \max\limits_{l \geq 0} |a_l| r_n^l$ est atteint pour les deux valeurs $l = n$ et $l = n+1$. Cela implique, d'après les propriétés de polygône de valuation, que f a seulement un zéro dans le cercle $C(0, r_n)$.

ii) Supposons maintenant que r est différent de r_n pour tout $n > n_0$.

Soit $n \geq n_0$ tel que $r_n < r < r_{n+1}$.

alors, pour tout entier l, $0 \leq l \leq n$, on a

$$\begin{aligned}|a_l|r^l &= \left|\frac{a_l}{a_{l+1}}\right|\left|\frac{a_{l+1}}{a_{l+2}}\right|\ldots\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right||a_{n+1}|r^l \\ &\leq |a_{n+1}|r_n^{n+1-l}r^l \\ &< |a_{n+1}|r^{n+1}.\end{aligned}$$

De plus, pour tout entier $l > n+1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{|a_l|r^l}{|a_{n+1}|r^{n+1}} = \frac{|a_l|}{|a_{n+1}|}r^{l-n-1} &< \frac{|a_l|}{|a_{n+1}|}r_{n+1}^{l-n-1} \\ &\leq \left|\frac{a_l}{a_{n+1}}\right|\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right|..\left|\frac{a_{l-1}}{a_l}\right| = 1.\end{aligned}$$

Alors $|f|(r) = \max_{l\geq 0}|a_l|r^l$ est vérifiée seulement pour $l = n+1$.
Cela implique, d'après les propriétés de polygône de valuation que f n'a pas de zéro sur le cercle $C(0,r)$. D'où tous les zéros de f dans $\mathbb{C}_p \backslash d(0, r_{n_0})$ sont simples.
En effet, pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, il existe $r_\beta > 0$ tel que

$$|f-\beta|(r) = |f|(r), \quad pour \quad r > r_\beta.$$

Donc $f-\beta$ admet seulement des zéros simples dans $\mathbb{C}_p \backslash d(0, \max(r_{n_0}, r_\beta))$.
D'où tous les zéros multiples possibles de $f-\beta$ sont dans $D(0, \max(r_{n_0}, r_\beta))$ et leur nombre est fini.

■

Corollaire 3.2.2 *Soit f une fonction entière p-adique qui satisfait les conditions de Théorème 3.2.1. Alors, pour tout polynôme non nul P, la fonction méromorphe p-adique $g = f/P$ est pseudo-première.*

Preuve.
On peut supposer que f et P n'ont pas de zéros communs. Donc g a un nombre fini de pôles. Pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, on remarque que les zéros de $g-\beta$ sont les mêmes que ceux de

$f - \beta P$. Et comme $f - (f - \beta P) = \beta P$, alors d'après le Théorème 3.2.1 et la Proposition 2.1.7, on trouve que $f - \beta P$ (et donc $g - \beta$) a au plus un nombre fini de zéros multiples. Ainsi, d'après le Théorème 3.1.1, la fonction méromorphes g est pseudo-première. ∎

Corollaire 3.2.3 *Soient $f(z) = \sum_{n \geq N} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n \geq N} b_n z^n$ deux fonctions entières p-adiques telles que $a_n b_n \neq 0, \forall n \geq N$. Soit $n_0 \geq N$ un entier tel que les suites $(|a_n/a_{n+1}|)_{n \geq n_0}$ et $(|b_n/b_{n+1}|)_{n \geq n_0}$ sont strictement croissantes et non bornés. Si $\lim_{r \to +\infty}(|f|(r)/|g|(r)) = +\infty$, alors la fonction méromorphe $h = f/g$ est pseudo-première.*

Preuve.
On suppose que les fonctions f et g n'ont pas de zéros communs. D'après le Théorème 3.2.1, on trouve que f et g ont au plus un nombre fini de zéros multiples, d'où la fonction méromorphe $h = f/g$ a au plus un nombre fini de zéros et de pôles multiples.

Soit $\beta \in \mathbb{C}_p$. On a les zéros de $h - \beta$ et $f - \beta g$ sont les même. De plus, comme $\lim_{r \to +\infty}(|f|(r)/|g|(r)) = +\infty$, il existe $r_\beta > 0$ tel que

$$|f - \beta g|(r) = |f|(r), \ \forall r > r_\beta.$$

Alors, d'après le Théorème 3.2.1 et la Proposition 2.1.7, on trouve que $f - \beta g$ (et donc $h - \beta$) a au plus un nombre fini de zéros multiples. Ainsi, d'après le Théorème 3.1.1, la fonction méromorphes h est pseudo-première. ∎

Remarque 3.2.1 *Si $n_0 = 0$ dans le Théorème 3.2.1, alors la fonction f est première. Ce résultat et une conséquence du Corollaire 1.12 dans [8].*

Rappelons d'abord que, étant donné un nombre réel x, on appelle partie entière de x, l'entier unique $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$. On peut facilement montrer que :

Lemme 3.2.4 *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$E(x - y) \leq E(x) - E(y) \leq E(x - y) + 1.$$

Exemple 3.2.1 *Soit N un nombre entier ≥ 3, et soit $\alpha \in \mathbb{C}_p$ tel que $|\alpha| < 1$.*
Alors la fonction $f(z) = \sum_{n\geq 0} \alpha^{E((n/N)^N)} z^n$ est une fonction entière pseudo-première.

En effet :

On suppose $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, tel que $a_n = \alpha^{E((n/N)^N)}$, pour tout $n \geq 0$.
On peut vérifier facilement que

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| r^n = \lim_{n\to+\infty} |\alpha^{E((n/N)^N)}| r^n = 0, \quad \forall r > 0.$$

D'où f est une fonction entière dans $\mathbb{C}_p$.
Maintenant, on va montrer que si n_0 est un entier $\geq (2N^{N-1}/(N-1))^{1/(N-2)}$, la suite $(|a_n/a_{n+1}|)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.
Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+1}{N})^N) - E((\frac{n}{N})^N)}.$$

Comme la fonction $x \mapsto (1/|\alpha|)^x$ est strictement croissante, alors d'après le Lemme 3.2.4 on conclut que

$$\left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+1}{N})^N - (\frac{n}{N})^N)} \leq \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leq \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+1}{N})^N - (\frac{n}{N})^N)+1}. \tag{3.3}$$

De la même manière, on a aussi

$$\left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+2}{N})^N - (\frac{n+1}{N})^N)} \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right| \leq \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+2}{N})^N - (\frac{n+1}{N})^N)+1} \tag{3.4}$$

De (3.3) *et* (3.4), *il résulte que*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right| - \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \geq \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+2}{N})^N - (\frac{n+1}{N})^N)} - \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E((\frac{n+1}{N})^N - (\frac{n}{N})^N)+1} \tag{3.5}$$

Mais, d'après le Lemme 3.2.4, on a

$$E\left(\left(\frac{n+2}{N}\right)^N-\left(\frac{n+1}{N}\right)^N\right)-E\left(\left(\frac{n+1}{N}\right)^N-\left(\frac{n}{N}\right)^N\right)-1\geq$$
$$E\left(\left[\left(\frac{n+2}{N}\right)^N-\left(\frac{n+1}{N}\right)^N\right]-\left[\left(\frac{n+1}{N}\right)^N-\left(\frac{n}{N}\right)^N\right]\right)-1.$$

Et comme on a

$$\left(\frac{n+2}{N}\right)^N-\left(\frac{n+1}{N}\right)^N=\frac{1}{N^N}\sum_{i=0}^{N-1}(n+2)^i(n+1)^{N-i-1}$$

et

$$\left(\frac{n+1}{N}\right)^N-\left(\frac{n}{N}\right)^N=\frac{1}{N^N}\sum_{i=0}^{N-1}n^i(n+1)^{N-i-1},$$

alors

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{n+2}{N}\right)^N-\left(\frac{n+1}{N}\right)^N\right]-\left[\left(\frac{n+1}{N}\right)^N-\left(\frac{n}{N}\right)^N\right] &= \frac{1}{N^N}\sum_{i=0}^{N-1}(n+1)^{N-i-1}[(n+2)^i-n^i]\\ &= \frac{2}{N^N}\sum_{i=0}^{N-1}(n+1)^{N-i-1}\sum_{j=0}^{i-1}(n+2)^j n^{i-j-1}\\ &\geq \frac{2}{N^N}\sum_{i=0}^{N-1}n^{N-i-1}\sum_{j=0}^{i-1}n^j n^{i-j-1},\\ &\geq \frac{2n^{N-2}}{N^N}\sum_{i=0}^{N-1}i\\ &\geq \frac{n^{N-2}(N-1)}{N^{N-1}}.\end{aligned}$$

Donc pour tout $n\geq n_0$, on a

$$\left[\left(\frac{n+2}{N}\right)^N-\left(\frac{n+1}{N}\right)^N\right]-\left[\left(\frac{n+1}{N}\right)^N-\left(\frac{n}{N}\right)^N\right]\geq 2.$$

Ensuite, pour tout $n\geq n_0$, on a

$$E\left(\left(\frac{n+2}{N}\right)^N-\left(\frac{n+1}{N}\right)^N\right)-E\left(\left(\frac{n+1}{N}\right)^N-\left(\frac{n}{N}\right)^N\right)-1>0.$$

D'où pour tout $n \geq n_0$, on a
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right| > \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$
On termine par l'application du Théorème 3.2.1 .

Remarque 3.2.2 *Si $N = 2$ et $f(z) = \sum_{n\geq 0} \alpha^{E(\frac{n^2}{4})} z^n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E(\frac{(n+1)^2}{4})^N)-E(\frac{n^2}{4})} \geq \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E(\frac{2n+1}{4})}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{E(\frac{2n+1}{4})} = +\infty$, alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = +\infty$$

d'où f est entière.
D'autre part, on a $\left|\frac{a_0}{a_1}\right| < \left|\frac{a_1}{a_2}\right|$, et

$$\forall k \in \mathbb{N} : \begin{cases} \left|\frac{a_{2k+1}}{a_{2k+2}}\right| = \left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+3}}\right| = \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{k+1} \\ et \\ \left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+3}}\right| < \left|\frac{a_{2k+3}}{a_{2k+4}}\right|. \end{cases}$$

Alors d'après le Théorème 2.1.5 et le Corollaire 1.12 *de [8], f est une fonction pseudo-première.*

Dans ce que suit, on montre que de toute fonction entière transcendante p-adique, on peut construire une fonction première en ajoutant ou multipliant par une fonction affine. Ce travaille a été fait dans le cas complexe par Y. Noda (voir [32]).

Théorème 3.2.5 *Soit f une fonction entière transcendantale sur $\mathbb{C}_p$. Alors $\{a \in \mathbb{C}_p \mid f(z) - az$ n'est pas première$\}$ est au plus un ensemble dénombrable.*

Pour démontrer le Théorème 3.2.5, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2.6 *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$. Il existe un ensemble dénombrable $E \subset \mathbb{C}_p$ tel que pour tout $a \in \mathbb{C}_p\backslash E$ et pour tout $b \in \mathbb{C}_p$, la fonction $f(z) - (az + b)$ a ou plus un zéro multiple.*

Preuve. Soit $Z(f'')$ l'ensemble des zéros de f''. Comme $\mathbb{C}_p$ est un espace séparable (cf. [40]), il existe une famille dénombrable de disque $(d_i)_{i\geq 1}$ telle que

$$\mathbb{C}_p \setminus Z(f'') = \cup_{i\geq 1} d_i,$$

et pour tout $i \geq 1$, la restriction f'_i de f' sur d_i est une fonction analytique et bijective sur d_i (d'après le Théorème d'inversion locale). D'où on a

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_p = f'(\mathbb{C}_p) &= f'(\cup_{i\geq 1} d_i \cup Z(f''))\\ &= (\cup_{i\geq 1} D_i) \cup f'(Z(f'')),\ \text{où } D_i = f'(d_i).\end{aligned}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{C}_p$ par $g(z) = f(z) - zf'(z)$. Il convient de noter que même si la famille $(d_i)_{i\geq 1}$ est choisis pour que les disques d_i soient deux à deux disjoints, il n'y a aucune garantie que la famille $(D_i)_{i\geq 1}$ conserve cette propriété. En d'autres termes certains des disques D_i peuvent être emboités. Pour tenir compte de ce fait, on définit

$$\Gamma = \{(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ \mid\ D_i \subsetneq D_j \text{ et } g \circ (f'_i)^{-1} \neq g \circ (f'_j)^{-1} \text{ dans } D_i\};$$

$$\Delta_{ij} = \{z \in D_i \ \mid\ g \circ (f'_i)^{-1}(z) = g \circ (f'_j)^{-1}(z)\}, \forall (i, j) \in \Gamma$$

et

$$\Delta = \cup_{(i,j)\in\Gamma} \Delta_{ij}.$$

Alors, $E = (f'(Z(f''))) \cup \Delta$ est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{C}_p$.

Soit $a \in \mathbb{C}_p\backslash E$, et soit $I_a = \{i \in \mathbb{N}^* \ \mid\ a \in D_i\}$. Puis les disques D_i, pour $i \in I_a$, sont emboités et $(f(z) - (az + b))' = f'(z) - a$, alors l'ensemble des zéros multiples de la fonction $f(z) - (az + b)$ est égal à A où

$$A = \{(f'_i)^{-1}(a) \ \mid i \in I_a \text{ et } f \circ (f'_i)^{-1}(a) = a(f'_i)^{-1}(a) + b\}.$$

On suppose que $(f_i')^{-1}(a)$ et $(f_j')^{-1}(a)$ sont deux éléments distincts de A (on peut prendre $D_i \subsetneqq D_j$). Comme chacun de ces éléments est une solution de l'équation $f(z) - az = b$, on a

$$f((f_i')^{-1}(a)) - (f_i')^{-1}(a)f'((f_i')^{-1}(a)) = f((f_j')^{-1}(a)) - (f_j')^{-1}(a)f'((f_j')^{-1}(a)),$$

où

$$g \circ (f_i')^{-1}(a) = g \circ (f_j')^{-1}(a).$$

Comme $a \notin \Delta$, on déduit

$$g \circ (f_i')^{-1}(z) = g \circ (f_j')^{-1}(z), \forall z \in D_i.$$

D'où, par la dérivation de cette dernière équation, on trouve

$$(f_i')^{-1}(z) = (f_j')^{-1}(z), \forall z \in D_i,$$

et en particulier $(f_i')^{-1}(a) = (f_j')^{-1}(a)$. C'est une contradiction et l'ensemble A admet au plus un élément. ■

Preuve du Théorème 3.2.5. Soit E l'ensemble dénombrable du Lemme 3.2.6, et soit $a \in \mathbb{C}_p \backslash E$. Puisque f est une fonction entière transcendantale, on voit que la fonction $h(z) = f(z) - az$ est aussi une fonction entière transcendantale. Alors le Lemme 3.2.6 ci-dessus garantit que, pour tout $b \in \mathbb{C}_p$, la fonction $h(z) - b = f(z) - az - b$ admet au plus un multiple zéro. Enfin, le Théorème 3.1.6 permet de conclure que la fonction $f(z) - az = h(z)$ est première. ■

Théorème 3.2.7 *Soit f une fonction entière transcendantale sur $\mathbb{C}_p$. Alors $\{a \in \mathbb{C}_p \mid f(z)(z - a)$ n'est pas première$\}$ est au plus un ensemble dénombrable.*

Pour démontrer le Théorème 3.2.7, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2.8 *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[z]$. Il existe un ensemble dénombrable $E' \subset \mathbb{C}_p$ tel que pour tout $a \in \mathbb{C}_p\backslash E'$, et pour tout $b \in \mathbb{C}_p$, la fonction $(z - a)f(z) - b$ a au plus un multiple zéro.*

Preuve.

La procédure est similaire à celle utilisée dans la preuve du Lemme 3.2.6. On peut vérifie facilement qu'un élément ζ de $\mathbb{C}_p$ est un zéro multiple de la fonction $(z-a)f(z)-b$ si et seulement si

$$\begin{cases} (\zeta-a)f(\zeta)-b=0 \\ f(\zeta)+(\zeta-a)f'(\zeta)=0. \end{cases}$$

Cela signifie que

$$\begin{cases} a=\zeta+f(\zeta)/f'(\zeta)=g(\zeta) \\ b=(\zeta-a)f(\zeta)=(\zeta-g(\zeta))f(\zeta)=h(\zeta), \end{cases}$$

où g et h sont des fonctions méromorphes définies dans $\mathbb{C}_p$ par

$$\begin{cases} g(z)=z+f(z)/f'(z) \\ h(z)=(z-g(z))f(z). \end{cases} \tag{3.6}$$

Soit $S(g')$ l'ensemble des zéros et des pôles de g' et soit $(d_i)_{i\geq 1}$ une famille dénombrable de disques tels que

$$\mathbb{C}_p \setminus S(g') = \cup_{i\geq 1} d_i.$$

D'autre part, pour tout $i \geq 1$, la restriction g_i de g sur d_i est une fonction analytique et bijective sur d_i(d'après le Théorème d'inversion locale p-adique). D'où on a

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_p = g(\mathbb{C}_p) &= g(\cup_{i\geq 1} d_i \cup S(g')) \\ &= (\cup_{i\geq 1} D_i) \cup g(S(g')),_{;} \text{ où } D_i = g(d_i). \end{aligned}$$

Comme les disques D_i ne sont nécessairement deux à deux disjoints, on a besoin de définir

$$\Gamma = \{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid D_i \subsetneq D_j \text{ et } h\circ g_i^{-1} \neq h\circ g_j^{-1} \text{ dans } D_i\};$$

$$\Delta_{ij} = \{z \in D_i \mid h\circ g_i^{-1}(z) = h\circ g_j^{-1}(z)\}, \forall (i,j) \in \Gamma$$

et

$$\Delta = \cup_{(i,j)\in\Gamma}\Delta_{ij}.$$

D'où, $E' = g(S(g')) \cup \Delta \cup (\cup_{i\geq 1} Z(f \circ g_i^{-1}))$ est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{C}_p$.

Soient $a \in \mathbb{C}_p \backslash E'$, et $I_a = \{i \in \mathbb{N}^* \mid a \in D_i\}$. Comme les disques D_i, Pour $i \in I_a$, sont emboités et $((z-a)f(z)-b)' = f(z)+(z-a)f'(z)$. On a d'après la Relation (3.4), l'ensemble des zéros multiples de la fonction $(z-a)f(z)-b$ est égal à A où

$$A = \{g_i^{-1}(a) \mid b = h \circ g_i^{-1}(a) \text{ pour } i \in I_a\}.$$

On suppose que $g_i^{-1}(a)$ et $g_j^{-1}(a)$ sont deux éléments distincts A. Alors, on a $h(g_i^{-1}(a)) = h(g_j^{-1}(a)) = b$ (on peut prendre $D_i \subsetneq D_j$). Comme $a \notin \Delta$, on trouve que

$$h \circ g_i^{-1}(z) = h \circ g_j^{-1}(z), \forall z \in D_i. \tag{3.7}$$

D'après la Relation (2.4), on a

$$\begin{aligned} h'(z) &= (1 - g'(z))f(z) + (z + g(z))f'(z) \\ &= (1 - g'(z))f(z) + (z - (z + f(z)/f'(z)))f'(z), \end{aligned}$$

d'où

$$h'(z) = -f(z)g'(z). \tag{3.8}$$

Par la dérivation de (2.5) et l'utilisation de (2.6), on obtient

$$f \circ g_i^{-1}(z) = f \circ g_j^{-1}(z), \forall z \in D_i.$$

En particulier, on a $f \circ g_i^{-1}(a) = f \circ g_j^{-1}(a)$. Mais, comme $a \notin E'$, alors

$$f \circ g_i^{-1}(a) = f \circ g_j^{-1}(a) \neq 0.$$

D'où, d'après la Relation (2.4), on obtient

$$(g_i^{-1}(a) - a)f(g_i^{-1}(a)) = (g_j^{-1}(a) - a)f(g_j^{-1}(a)) = b.$$

Donc $g_i^{-1}(a) = g_j^{-1}(a)$. C'est une contradiction. Par conséquent, l'ensemble A Admet au plus un élément. ■

Preuve du Théorème 3.2.7. Soient E' l'ensemble dénombrable du Lemme 3.2.8, et $a \in \mathbb{C}_p \backslash E'$. Comme f est une fonction entière transcendantale, la fonction $h(z) = f(z)(z-a)$ est aussi une fonction entière transcendantale. Alors le Lemme 3.2.8 nous garantit que, pour tout $b \in \mathbb{C}_p$, la fonction $h(z)-b = f(z)(z-a)-b$ admet au plus un zéro multiple. Enfin, le Théorème 3.1.6 permet de conclure que la fonction $f(z)(z-a) = h(z)$ est première. ■

3.3 Permutabilité des fonctions entières p-adiques

Le théorème suivant est la version p-adique du Théorème 6 dans [5]

Théorème 3.3.1 *Soit P un polynôme non constant, et f une fonction entière transcendante sur $\mathbb{C}_p$ telle que $P \circ f = f \circ P$. Alors le polynôme $P(z)$ est de la forme $P(z) = az$ où $a \in \mathbb{C}_p$ est une racine d'unité.*

Pour la démonstration, on a besoin des lemmes suivants

Lemme 3.3.2 *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un polynôme ;*
2. *il existe $c > 0$ et $d \geq 0$ tels que $|f|(r) \leq cr^d$, pour r assez grand.*

Preuve. Supposons que $f(z) = a_0 + ... + a_n z^n$, où $a_0, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{C}_p$ et $a_n \neq 0$. Donc, pour r assez grand, on a $|f|(r) = |a_n|r^n$. Ainsi, il suffit de prendre $c = |a_n|$ et $d = n$ pour avoir l'inégalité.
Inversement, si il existe $c > 0$ et $d \geq 0$ tel que $|f|(r) \leq cr^d$, pour r assez grand, alors pour tout entier $n > d$, on a

$$|f^{(n)}|(r) \leq |f|(r)/r^n \leq cr^{d-n} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, $f^{(n)} \equiv 0$ et f est un polynôme. ■

Lemme 3.3.3 *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$. Si il existe deux nombres réels $\alpha, \beta > 0$ et un entier $n \geq 2$ tels que*

$$|f|(\alpha r^n) < \beta(|f|(r))^n, \text{ pour } r \text{ assez grand.}$$

Alors f est un polynôme.

Preuve.

On construit des nombres réels $c, d > 0$ tels que $|f|(r) \leq cr^d$, pour r assez grand.
Soit $r_0 > \max\{1, \frac{1}{\sqrt[n-1]{\alpha}}\}$. On choisit $c, d > 0$ tel que

$$\begin{cases} |f|(r_0) < cr_0^d \\ \beta < \dfrac{\alpha^d}{c^{n-1}}, \end{cases}$$

et posons $r_{k+1} = \alpha r_k^n$, pour $k \geq 0$. Ainsi, la suite (r_k) est strictement croissante et tend vers $+\infty$. Donc, on peut montrer par récurrence que

$$|f|(r_k) < cr_k^d, \text{ pour tout } k \geq 0.$$

En effet, la propriété est vraie pour $k = 0$.
Supposons qu'elle est vraie pour un entier $k \geq 0$, donc on a

$$\begin{aligned} |f|(r_{k+1}) &= |f|(\alpha r_k^n) < \beta(|f|(r_k))^n \\ &< \beta c^n r_k^{dn} = c(\beta c^{n-1}) r_k^{dn} \\ &< c\alpha^d r_k^{dn} = c(\alpha r_k^n)^d \\ &= cr_{k+1}^d. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que la propriété est vraie pour $k+1$. Pour tout $r \in [r_k, r_{k+1}]$, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $r = r_k^t r_{k+1}^{1-t}$. Donc d'après la convexité de $\log r \longmapsto \log |f|(r)$, on déduit que

$$\begin{aligned}|f|(r) &\leq (|f|(r_k))^t(|f|(r_{k+1}))^{1-t} = (|f|(r_k))^t(|f|(\alpha r_k^n))^{1-t}\\ &< (|f|(r_k))^t(\beta(|f|(r_k))^n)^{1-t} < (cr_k^d)^t(\beta(cr_k^d)^n)^{1-t}\\ &= c^t r_k^{dt} c^{1-t}(\beta c^{n-1})^{1-t}(r_k^{n(1-t)})^d\\ &< cr_k^{dt}\alpha^{d(1-t)}r_k^{n(1-t)d}\\ &= c(r_k^t(\alpha r_k^n)^{1-t})^d = c(r_k^t r_{k+1}^{1-t})^d\\ &= cr^d.\end{aligned}$$

D'où $|f|(r_k) < cr_k^d$, pour tout $r \geq r_0$.
Alors d'après le Lemme 3.3.2, f est un polynôme. ∎

Preuve du Théorème 3.3.1.
Posons $P(z) = a_0 + ... + a_k z^k$ où $a_0, \ldots, a_k$ sont des éléments de $\mathbb{C}_p$ et $a_k \neq 0$. Alors on a

$$(f \circ P)(z) = (P \circ f)(z) = a_0 + \cdots + a_k(f(z))^k.$$

On suppose que $k \geq 2$. Donc pour $r > 0$, on a $|f|(|P|(r)) = |P|(|f|(r))$. D'où pour r assez grand on a

$$|f|(|a_k|r^k) = |a_k|(|f|(r))^k < 2|a_k|(|f|(r))^k.$$

Alors d'après le Lemme 3.3.3, f est un polynôme, c'est une contradiction. Par conséquent, $k = 1$ et $P(z) = az + b$, où $a, b \in \mathbb{C}_p$ et $a \neq 0$.

Supposons que a n'est pas une racine d'unité. Alors on a $a^k \neq 1$, pour tout entier $k \geq 1$. Soit σ une fonction affine définie par $\sigma(z) = z + b(a-1)^{-1}$. Son inverse σ^{-1} est donné par $\sigma^{-1}(z) = z + b(1-a)^{-1}$. Considérons la fonction $g = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}_p$, on a

$$\begin{aligned}
g(az) &= \sigma(f(az + \tfrac{b}{1-a})) = f(az + \tfrac{b}{1-a}) - \tfrac{b}{1-a} \\
&= f(a(z + \tfrac{b}{1-a}) + b) - \tfrac{b}{1-a} \\
&= af(z + \tfrac{b}{1-a}) + b - \tfrac{b}{1-a} = af(z + \tfrac{b}{1-a}) - \tfrac{ab}{1-a} \\
&= a(f(z + \tfrac{b}{1-a}) - \tfrac{b}{1-a}) \\
&= a(\sigma \circ f \circ \sigma^{-1})(z) \\
&= ag(z).
\end{aligned}$$

donc $g(az) = ag(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}_p$. Si $g(z) = \sum_{n\geq 0} \beta_n z^n$, alors on a $g(az) = \sum_{n\geq 0} \beta_n a^n z^n$. D'où

$$g(az) - ag(z) = \sum_{n\geq 0} (a^n - a)\beta_n z^n = 0,$$

donc $\beta_0 = 0$ et $(a^{n-1} - 1)\beta_n = 0$, pour tout $n \geq 2$. Et comme a n'est pas une racine d'unité, alors $a^{n-1} - 1 \neq 0$, pour tout $n \geq 2$, et par conséquent $\beta_n = 0$, pour tout $n \geq 2$. D'où $g(z) = \beta_1 z$, et $f(z) = \beta_1 z + b(\beta_1 - 1)(a - 1)^{-1}$. C'est une contradiction, car f est transcendante. Par conséquent, a est une racine d'unité.

Supposons maintenant que $b \neq 0$. Pour tout entier positif n, on note par $P^{[n]}$, le polynôme $P \circ P \circ \cdots \circ P$, ($n$ fois). Comme $f \circ P = P \circ f$, on a

$$f(az + b) = af(z) + b, \ \ pour \ \ tout \ \ z \in \mathbb{C}_p.$$

D'où

$$f'(az + b) = f'(z), \ \ pour \ \ tout \ \ z \in \mathbb{C}_p.$$

D'après la Proposition 2.1.7, il existe $\zeta \in \mathbb{C}_p$ tel que $|\zeta| > |b|$ et $f'(\zeta) = 0$. Alors $\zeta, P(\zeta), \ldots, P^{[n]}(\zeta), \ldots$ sont des zéros de f', de plus leur nombre est infini et ils sont dans le cercle $C(0, |\zeta|)$. C'est une contradiction. D'où, $b = 0$. ■

Corollaire 3.3.4 *Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[z]$ où $F(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$. On suppose qu'il existe deux entiers naturels m, l premiers entre eux tels que $a_{m+1} a_{l+1} \neq 0$. Alors l'unique polynôme non constant P tel que $P \circ f = f \circ P$ est $P(z) = z$.*

Preuve.

D'après le Théorème 3.3.1, on a $P(z) = az$ où $a \in \mathbb{C}_p$ est un racine de l'unité. Alors $f(az) = af(z)$, et donc

$$\sum_{n \geq 0} (a^n - a)\, a_n z^n = 0, \quad pour \;\; tout \;\; z \in \mathbb{C}_p.$$

D'où

$$(a^n - 1) a_{n+1} = 0, \quad pour \;\; tout \;\; n \geq 1.$$

Et comme on a $a_{m+1} a_{l+1} \neq 0$, on déduit que $a^m = a^l = 1$. De plus, m, l sont premiers entre eux, alors $a = 1$. ■

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, nous sommes face à deux problématiques.

La première concerne la factorisation d'une fonction méromorphe p-adique. On a donné des conditions suffisantes pour qu'une fonction vérifie de telles propriétés. Notre étude est basée sur la distribution des zéros et des pôles multiples. Grâce aux propriétés de Wronskien p-adique, le théorème de Picard p-adique et l'inégalité triangulaire forte, nous avons obtenu des résultats avec moins de conditions. Ces résultats sont vrais dans $\mathbb{C}_p$ et pas dans $\mathbb{C}$.

Nos perspectives pour cette partie sont

- La généralisation des résultats sur les courbes holomorphes p-adique. Puis, on essaiera d'utiliser le théorème de Nevanlinna p-adique et ses fonctions caractéristiques ($m(r, f)$, $N(r, f)$, $Z(r, f)$, $T(r, f)$, ...) pour étudier la primalité à gauche d'une fonction qui vérifie les conditions du Théorème 3.1.7.
- L' application de ces résultats pour montrer que toutes les solutions méromorphes de l'équation différentielle

$$w^{(n)} + a_n(z)w^{(n-1)} + \ldots + a_2(z)w^{'} + a_1(z)w + a_0(z) = 0,$$

sont pseudo-premières, sachant que, sous certaines conditions sur les coefficients

$a_0(z), ..., a_n(z)$, l'équation ci-dessus admet des solutions méromorphes transcendantes (voie [10]).

La deuxième problématique concerne le problème de la permutabilité des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$, où nous avons prouvé des outils spécifiques au cas p-adique. Ces derniers nous permettent d'obtenir des résultats différents de ceux du cas complexe. Dans cette partie, notre perspective est de généraliser ce résultat aux fonctions méromorphes p-adiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Amice Y., Les nombres p-adiques, *Presses Universitaires de France, Collection SUP, "Le mathématicien", (1975).*

[2] Baker A. J., An introduction to p-adic numbers and p-adic analysis, *Departement of mathematics, University of Glasgow, G128QW, Scotland, (2004).*

[3] Baker I. N. and Gross F., Further results on factorization of entire functions, *Proc. Symposia Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. II, (1968), 30-35.*

[4] Baker I.N., Permutable entire functions, *Math. Zeit., 79 (1962), 243 - 249.*

[5] Baker I. N., Zusammensetzungen ganzer Funktionen, *Math. Zeit., 69 (1958), 121 - 163.*

[6] Bézivin J.P., Dynamique des fractions rationnelles p-adiques, *Cours DEA de mathématique, Université de Caen , (23 Mai 2005).*

[7] Bézivin J. P., Wronskien et équations différentielles p-adiques, *Acta Arithmetica 158 no 1 (2013), 61-78.*

[8] Bézivin J.P. and Boutabaa A., Decomposition of p-adic meromorphic functions, *Annales mathématiques Blaise Pascal, (1995), 51-60.*

[9] Boutabaa A., Théorie de Nevanlinna p-adique, *Manuscripta Math., 67 (1990), 251-269.*

[10] Boutabaa A., Application de la théorie Nevanlinna p-adique. *Collectanea Mathematica 42,1 (1991), 75-93* .

[11] Boutabaa A, Sur les courbes holomorphes p-adique. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouses Vol. V, no 1 (1996), 29-52.*

[12] Boutabaa A. and Escassut A., Applications of the p-adic Nevanlinna theory to functional equations. *Annales de l'Institut Fourier, T.50 (3) (2000), 751-766.*

[13] Boutabaa A. and Escassut A., On uniquenss of p-adic meromorphic functions. *Proc. Amer. Math. Soc., 126 (9) (1998), 2557-2568* .

[14] Boutabaa A. and Escassut A., Urs and Ursim for p-adic meromorphic functions inside a disc. *Proc. of the Edinburgh Mathematical Society 44 (2001), 485-504* .

[15] Chuang C.T. et Yang C.C., Fix points and factorization of meromorphic functions, *World scientific publishing Co. Pte. Ltd, (1990).*

[16] Clunie J., The composition of entire and meromorphic functions, *Mathematical Essays dedicated to A. J. Macintype (Ohio Univ. Press., (1970), 75-92.*

[17] Diarra B., Analyse p-adique, *Cours de DEA-Algèbre commutative FAST, Université du Mali, (Décembre 1999-Mars 2000-Décembre 2000).*

[18] Escassut A., Analytic elements in p-adic analysis, *Word scientific publishing, (1995).*

[19] Escassut A. and Ojeda J., Exceptional values of p-adic analytic functions and derivatives. *Complex variables and eleptic functions, 56, no 1-4 (2011), 263-269.*

[20] Goldstein R., On factorization of certain entire functions, *J. London Math. Soc., (2) (1970), 221-224.*

[21] Goldstein R., On factorization of certain entire functions, II, *Proc. London Math. Soc., 22 (1971), 483-506.*

[22] Gross F., On factorization of meromorphic functions, *Trans, Amer., Math.Sos., 131 (1968), 215-222.*

[23] Gross F., Factorization of entire functions which are periodic mod g, *Indian J. pure and applied Math., 2 (1971), 561-571.*

[24] Gross F., Factorization of meromorphic functions, *U.S. Gov. Printing Office, (1972).*

[25] Gross F., Factorization of meromorphic functions and some open problems, *Complex analysis, Lecture Notes m Math., 599, Springer (1977), 51-67.*

[26] Gross F., C.C. Yang and C. Osgood, Primeable entire functions, *Nagoya Math. Journ., 51 (1973), 123-130.*

[27] Hayman W.K., Meromorphic functions, *Clarendon press, Oxford, (1964).*

[28] Hu P. C. and C. C. Yang, Meromorphic function over non-Archimedean Field. *Kluwer Academic Publishers, (2000).*

[29] Katok S., Real and p-adic analysis, *Course notes for Math 497 C, Mass program, Fall 2000, (2001).*

[30] Khoai H. H., Sur la théorie de Nevanlinna p-adique. *Groupe de travail d'analyse ultramétrique, towe 15 (1987-1988), 35-40. Aequationes Math. 60 (2000), 148-166.*

[31] Nevanlinna R., Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. *Paris, (1929).*

[32] Noda Y., On factorization of entire functions. *Kodai Math. journ., 4 (1981), 480-494.*

[33] Ozawa M., Factorization of entire function, *Tôhoku Math. Journ., 27 (1975), 321-336.*

[34] Ozawa M., On certain criteria for the left-primeness of entire functions, *Kodai Math. Sem. Rep., 26 (1975), 304-317.*

[35] Ozawa, M., On certain criteria for the left-primeness of entire functions, II, *Kodai Math. Sem. Rep., 27 (1976), 1-10.*

[36] Ozawa, M., On the existence of prime periodic entire functions, *Kodai Math. Sem. Rep., 29 (1978), 308-321.*

[37] Prokopovich G.S., On pseudo-simplicity of some meromorphic functions, *Ukrain. Mat. Zh. 21, No.2, March-April (1975), 261-273.*

[38] Prokopovich G.S., Fix-points of merom orphic functions, *Ukrain. Mat. Zh. 25, No.2 (1972), 248-260 (English translation 198-208).*

[39] Ritt J.F., Prime and composite polynomials, *Trans. Amer. Math.Soc., 23 (1922), 51-66.*

[40] Robert A., A course in p-adic Analysis. *Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, No. 198 (2000).*

[41] Rosenbloom P. C., The fix-points of entire functions, *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., Suppl. Bd. M. Riesz (1952), 186-192.*

[42] Saoudi B., Boutabaa A. and Zerzaihi T., On factorization of p-adic meromorphic functions, *Indagationes Mathematicae 31 (2020), 921 - 933.*

[43] Schikhof W. H., Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis, *Combridge University Press (1984).*

[44] Steinmetz N., Uber die fakorisierbaren Losungen gewohnlichen Differentialgleichungen, *Math. Zeit., 110 (1980), 169-180.*

[45] Urabe H., Uniqueness of the factorization under composition of certain entire functions, *J. Math. Kyoto Univ., 18 (1978), 95-120.*

[46] Yang C., Factorization Theory of Meromorphic Functions, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 18 (edited by C. Yang), Marcel Dekker, Inc (1983).*

ABSTRACT

In this thesis, we are interested by the study of factorization of p-adic meromorphic functions. We also consider left (resp. right) primeness of these functions. We give, in particular, sufficient conditions for a meromorphic function to satisfy such properties. Finally, we consider the problem of permutability of entire functions.We generalize some results in the complex case. However, our method, based on the use of some p-adic tools such as the p-adic Picard theorem or the Wronskian of p-adic entire functions, enables us to obtain some results that are completely different from those of the complex case.

ملخص

في هذه الأطروحة ، نهتم بدراسة تفكيك الدوال المرومورفية على $\mathbb{C}_p$ و أيضا الأولية من اليسـار (على التوالي من اليمين) لهذه الدوال. نعطي على وجه الخصوص، شروطًا كافية لتحقق هذه الخصائص. أخيرًا ، نأخذ في الاعتبار إشكالية تبادل الدوال التحليلية على $\mathbb{C}_p$، ونعمم بعض نتـائج الحالة المركبة و ذلك باستخدام بعض أدوات الخاصة بـ$\mathbb{C}_p$ مثل نظرية بيكارد أو فرونسكيان وتمكننا من الحصول على بعض النتائج تختلف تمامًا عن تلك الخاصة بالحالة المركبة.

RESUME

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de la factorisation des fonctions méromorphes p-adiques. On considère également la primalité à gauche (resp. à droite) de ces fonctions. En particulier, on donne des conditions suffisantes pour qu'une fonction méromorphe satisfasse de telles propriétés. Enfin, nous considérons le problème de la permutabilité de fonctions entières. On généralise certains résultats dans le cas complexe. Cependant, notre méthode basée sur l'utilisation de certains outils p-adiques comme le théorème de Picard p-adique ou le Wronskian de fonctions entières p-adiques, nous permet d'obtenir des résultats complètement différents de ceux du cas complexe.