RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BENYAHIA-JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

N° d'ordre :
Série :

T H È S E

Pour obtenir le diplôme de

Doctorat en Sciences

Specialité: Mathématiques
Option: Équations Différentielles
présentée et soutenue par

Messaoude Benguessoum

Thème

Quelques problèmes d'évolution pour des équations et des inclusions différentielles

soutenue le ./../2021

Devant le jury composé de

Président	N. Arada	M.C.A. Université de Jijel
Directeur	D. Azzam-Laouir	Prof. Université de Jijel
Examinateur	A. Aibeche	Prof. Université de Setif 1
Examinateur	M. Benchohra	Prof. Université de Sidi BelAbbes
Examinateur	Y. Daikh	M.C.A. Université de Jijel
Examinateur	K. Mebarki	Prof. Université de Béjaia

Remerciements

En premier lieu, je remercie *AllAH*, le tout puissant pour la volonté et la santé qu'il m'a donné, me permettant de mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma profonde gratitude à ma directrice de thèse, Madame **DALILA AZZAM-LAOUIR**, Professeur à l'université de Jijel, pour avoir dirigé cette thèse avec une attention soutenue, pour ses grandes qualités scientifiques et humaines, je la remercie pour l'aide précieuse et les conseils qu'elle a su me transmettre avec beaucoup de patience et de pédagogie.

Je remercie particulièrement, Dr **Nadir Arada**, M.C.A. à l'université de Jijel, d'avoir accepté la tâche de président du jury.

Je tiens à remercier les membres du jury qui me font l'honneur d'examiner ce travail, Monsieurs **Aissa Aibeche**, Professeur à l'université de Setif 1, **Mouffak Benchohra**, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès, Madame **Yasmina Daikh**, M.C.A. à l'université de Jijel et Madame **Karima Mebarki**, Professeur à l'université de Béjaia.

Je remercie ainsi tous les membres de ma famille qui m'ont apporté leur soutien au quotidien. J'ai traversé des moments difficiles pendant mes études, et je n'oublierai jamais toute l'aide que j'ai reçue de la part de mes proches.

Table des matières

3 Existence de solutions absolument continues pour un système de deux inclusions différentielles l'une gouvernée par un opérateur maximal monotone et l'autre par le cône normal, avec perturbations multivoques

Bibliographie

Introduction

Nous présentons dans cette thèse des résultats d'existence de couple de solutions absolument continues pour un système de deux inclusions différentielles, l'une gouvernée par un opérateur maximal monotone et la deuxième par le cône normal, dans un espace de Hilbert séparable H.

Le processus de la rafle, en anglais "sweeping process" a été introduit et largement étudié par Jean-Jacques Moreau dans les années 1970 (voir [43], [45]) sous la forme

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \;\; p.p.\, t \in [0, T],$$

où $C(t)$ est un ensemble mobile convexe fermé qui varie d'une manière Lipschitzienne ou absolument continue, et où $N_{C(t)}$ est le cône normal à $C(t)$ au sens de l'analyse convexe. La motivation originale de Moreau est venue principalement des applications à l'élasto-plasticité. Au fil des années, le processus de la rafle s'est avéré est important pour de nombreuses autres applications à divers problèmes de mécanique, systèmes d'hystérésis, équilibre de trafic, modélisation sociale et économique, etc ... Les processus de la rafle dont l'ensemble dépend du temps et de l'état, apparaissent dans de nombreuses applications comme les inégalités paraboliques quasi-variationnelles, micromécanique modèle de dommage pour les matériaux en fer avec mémoire, modélisation de 2D et 3D quasi-statique, problèmes d'évolution avec frottement, ect, voir [39, 40].

Une classe d'inclusions différentielles d'évolution, qui comprend comme cas particulier des processus de la rafle, est celle des inclusions différentielles régies par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps. Il existe une vaste littérature à ce sujet, voir par exemple [2, 5, 6, 8, 10, 34, 41, 47, 50, 52, 54]. Ces travaux concernent l'existence de solutions pour ces inclusions différentielles avec divers types de perturbations ainsi que différentes formes de variation de l'opérateur par rapport au temps : absolument continue, continue à variation bornée, continue à droite à variation bornée. Cette variation induit cette même notion de régularité sur la solution. Les opérateurs monotones (multivoques) notamment ceux qui sont maximaux, ont été construits pour être utiles dans divers domaines de mathématiques tels que l'optimisation (les sous- différentiels des fonctions propres convexes semi-continues inférieurement (s.c.i) sont des opérateurs maximaux monotones), les équations différentielles (l'opérateur qui engendre l'équation est souvent maximal monotone) et l'analyse variationnelle, (en particulier les inéquations variationnelles qui sont les plus fort dispositifs pour la construction de modèles mathématiques pour différents problèmes physiques et techniques.)

Récemment, il y a une activité intense dans les problèmes de contrôle optimal pour les processus de la rafle. Voir Adam-Outrata [1], Brokate- Krejčí [19] Cao-Mordukovich [21], Colombo et al [27, 28, 29], Tolstonogov [52] ainsi que beaucop d'autres. Pour un aperçu sur certains problèmes d'optimisation régis par des processus de la rafle avec des ensembles mobiles contrôlés, nous envoyons le lecteur à [44]. Décrivons, par exemple, le problème d'optimisation pour le processus de la rafle traité dans [1, 19] :

Minimiser $\displaystyle\int_0^T L(t, y(t), z(t), a(t))dt$ avec (y, z, a) dans $\mathcal{W}^{1,1}(I, H)$ sujet au système

$$(1.1)\begin{cases} B\dot{y}(t) - \dot{z}(t) \in N_{C(t)}(z(t)) & p.p.\, t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \in C(0, y_0) \\ \dot{y}(t) = f(t, y(t), z(t), a(t)) & p.p.\, t \in [0, T]. \end{cases}$$

Une rapide lecture du problème montre qu'il est complexe, car avant de chercher les solutions optimales, il est nécessaire de s'assurer que ce couple d'inclusions admet des solutions et, de plus, il est clair que le problème optimal pour un tel système est plus général car il contient la plupart des résultats liés à une seule inclusion d'évolution.

Motivés par les travaux cités ci-dessus, vu leur importance et applications dans plusieurs domaines de mathématiques et de physique, nous avons apporté, à travers cette thèse, une contribution dans ce thème de recherche, par l'étude du couple de ces deux types d'inclusions : processus de la rafle et inclusion avec opérateur maximal monotone.

Nous avons considéré le cas le plus général, qui est la dépendence en temps et en état, ainsi que la soumission de nos inclusions à des forces extérieures qu'on appelle pertubations.

Organisation de la thèse

Nous allons donner ici un plan succint et exposerons brièvement les résultats importants que nous avons obtenus.

La thèse est divisée en trois chapitres. Le premier comporte quelques définitions et résultats préliminaires ainsi que des outils de base utilisés dans la démonstration de nos théorèmes principaux.

Le deuxième chapitre est constitué de deux sections. Dans la première, on donne un résultat d'existence d'un couple de solutions absolument continues du système d'évolution suivant :

$$(1.2) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t, v(t))u(t) + f(t, u(t), v(t)), & \text{p.p.}\, t \in [0, T] \\ u(t) \in D(A(t, v(t))) & \forall t \in [0, T] \\ -\dot{v}(t) \in N_{C(t,u(t))}(v(t)) + g(t, u(t), v(t)), & \text{p.p.}\, t \in [0, T] \\ v(t) \in C(t, u(t)), & \forall t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \in D(A(0, v_0)), v(0) = v_0 \in C(0, u_0), \end{cases}$$

où $A(t, x)$ est un opérateur maximal monotone dépendant du temps et de l'état, $D(A(t, x))$ représente le domaine de $A(t, x)$, $C(t, x)$ est un ensemble convexe fermé dépendant du temps et de l'état, et f, g sont des applications de type Carathéodory vérifiant une condition de croissance linéaire. Ce résultat est nouveau est assez général puisque nous avons affaire à un nouveau système dynamique régi par un couple d'inclusions d'évolution impliquant un opérateur maximal monotone $A(t, x)$ dépendant du temps et de l'état et $N_{C(t,x)}$ le cône normal d'un ensemble convexe fermé dépendant aussi du temps et de l'état, en présence de perturbations. Pour notre but, nous avons utilisé une méthode de discrétisation.

Ensuite, nous étudions l'existence de solutions à une variante, qui concerne un système formé d'un processus de la rafle convexe et une équation différentielle de la forme

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t), v(t)) & \text{p.p.}\, t \in [0, T] \\ -\dot{v}(t) \in N_{C(t,u(t))}(v(t)) & \text{p.p.}\, t \in [0, T] \\ v(t) \in C(t, u(t)) & \forall t \in [0, T] \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, \end{cases}$$

où $f : [0, T] \times H \times H \longrightarrow H$ est une application mesurable sur I, Lipschitzienne sur $H \times H$ et vérifiant une condition de croissance linéaire.

La deuxième section contient une application à un problème de minimisation ayant la forme $\int_0^T L(t,u(t),\dot{v}(t))dt$ sur le couple (u,v) dans $\mathcal{W}^{1,2}(I,H)$ soumis au système du problème d'évolution (1.2).

Dans le troisième chapitre, nous présentons l'étude du système suivant

$$(1.3)\quad \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t,v(t))u(t) + F(t,u(t),v(t)) & \text{p.p.}\, t \in [0,T] \\ u(t) \in D(A(t,v(t))), & \forall t \in [0,T] \\ -\dot{v}(t) \in N_{C(t,u(t))}(v(t)) + G(t,u(t),v(t)) & \text{p.p.}\, t \in [0,T] \\ v(t) \in C(t,u(t)), & \forall t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \in D(A(0,v_0)), v(0) = v_0 \in C(0,u_0) & \end{cases}$$

où $C : I \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides, fermées et sous-lisses, $N_{C(t,x(t))}$ désigne le cône normal de Fréchet à $C(t,x(t))$, et $F, G : I \times H \times H \rightrightarrows H$ sont des multi-applications semi-continues supérieurement par rapport à la deuxième variable et à valeurs fermées convexes.

Enfin, un autre résultat pour le problème (1.3) est établi en affaiblissant l'hypothèse supposée sur l'opérateur $A(t,x)$ et l'ensemble $C(t,x)$, mais dans ce cas, une hypothèse supplémentaire sur l'opérateur est nécessaire, en effet, l'opérateur est considéré à domaine fixe.

Soulignons ici que le probème avec une seule inclusion gouvernée par l'opérateur dépendant du temps avec second membre univoque (et multivoque) a été étudié dans les travoux de D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques [5] et D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques [6]. Pour le même problème où l'opérateur dépendant du temps et de l'état, i,e, le problème de la forme

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t,u(t))u(t) + F(t,u(t)), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

des résultats sont récemement établés dans [41] et [47]. Aussi, l'inclusion du premier ordre gouvernée par le cône normal où l'ensemble dépendant du temps (et du temps et de l'état) a été largement étudiùée on peut consulter les références [21, 28, 34, 52].

Le présent travail se propre d'étudier l'éxistence d'un **couple** de solutiosns quand le systeme est composée de deux inclusions différentielles l'une gouvernée par un opérateur maximal monotone et l'autre par le cône normal, avec perturbations univoques (et multivoque).

Les résultats présentés dans le chapitre 2 ont fait l'objet d'une publication internationale dans le journal Set-Valued and Variational Analysis [13], et ceux du chapitre 3 sont rédigés et soumis pour publication [14].

Notations générales

Dans la rédaction de cette thèse, et sauf indication, nous avons utilisé les notations et abbréviations suivantes

$\overline{\mathbb{R}}$	La droite achevée, i.e., $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
H	Un espace de Hilbert réel.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Le produit scalaire de H.
$\\| \cdot \\|$	La norme de H.
I_H	Opérateur identité de H.
2^H	La famille de tous les sous-ensembles de H.
$\overline{B}_H$	La boule unité fermée de H.
$\overline{B}_H(x, r)$	La boule fermée de H de centre x et de rayon $r > 0$.
$B_H(x, r)$	La boule ouverte de H de centre x et de rayon $r > 0$.

Si $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on note par $dom(f)$ l'ensemble :

$$dom(f) = \{x \in H, f(x) < +\infty\}.$$

Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ un espace vectoriel normé, E' son dual topologique, on note par

$\sigma(E, E')$	La topologie faible sur E.
$\sigma(E', E)$	La topologie faible étoile sur E'.
$Fr(C)$	La frontière de l'ensemble $C \subset E$.

$\overline{C}$	L'adhérence de C.
$int(C)$	L'intérieur de C.
$co(C)$	L'enveloppe convexe de C.
$\overline{co}(C)$	L'enveloppe convexe fermée de C.
$\dot{u}(t) = \dfrac{du}{dt}(t)$	La dérivée de u au point t.
$Proj(\cdot, C)$	Projecteur sur le sous-ensemble non vide C de H.
$x_n \to x$	La suite $(x_n)_n$ converge fortement vers x.
$x_n \rightharpoonup x$	La suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers x.

Soit $T > 0$, et soit $I = [0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On note par :

$\mathcal{L}(I)$ La tribu de Lebesgue sur I.

$\mathcal{B}(H)$ La tribu de Borel sur H.

p.p L'abbréviation de presque partout.

$L^p(I, H)$ L'espace des applications p$^{\text{ième}}$ intégrables $(1 \leq p < \infty)$ définies sur I à valeurs dans H muni de la norme

$$\|f(\cdot)\|_{L^p} = \left(\int_0^T \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \forall f \in L^p(I, H).$$

$L^\infty(I, H)$ L'espace des applications essentiellement bornées définies sur I à valeurs dans H, muni de la norme

$$\|f(\cdot)\|_{L^\infty} = \inf \left\{ c \geq 0 : \|f(x)\| \leq c \text{ p.p sur I} \right\}.$$

$\mathcal{C}(I, H)$ L'espace de Banach des applications continues définies sur I à valeurs dans H muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|u(\cdot)\|_{\mathcal{C}} = \sup_{t \in I} \|u(t)\|.$$

$\mathcal{W}^{1,p}(I, H)$ L'espace des applications u absolument continues sur I tel que $\dot{u} \in L^p(I, H)$.

$\mathbf{1}_C(\cdot)$ La fonction caractéristique de $C \subset H$, définie par

$$\mathbf{1}_C(x) = \begin{cases} 1 & x \in C, \\ 0 & x \notin C. \end{cases}$$

$d(\cdot, C)$ ou bien $d_C(\cdot)$ La fonction distance de C, définie par :

$$d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

$\delta_C(\cdot)$ La fonction indicatrice de C, définie par :

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & x \in C, \\ +\infty & x \notin C. \end{cases}$$

$\delta^*(x', C)$ La fonction d'appui de C, définie par

$$\delta^*(x', C) = \sup_{y \in C} \langle x', y \rangle \ \ \forall x' \in H.$$

Enfin, on note par :

s.c.i	L'abréviation de semi-continu inférieurement.
s.c.s	L'abréviation de semi-continu supérieurement.
$\mathcal{F}(X, Y)$	L'espace de toutes les applications $f : X \longrightarrow Y$.

Chapitre 1

Définitions et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons les prérequis nécessaires à la bonne lecture du manuscrit et à la compréhesion des preuves des théorèmes principaux. Nous introduisons d'une manière succincte, tous les résultats qui nous seront utiles par la suite, "souvent sans aller loin dans les détails", mais avec renvoi du lecteur intéressé aux références que nous avons utilisées.

1.1 Rappel sur la Continuité

Pour les résultats de cette section on renvoie le lecteur aux références [26] et [48]. Considérons deux espaces métriques (X, d), (Y, d').

Définition 1.1.1 (Application continue).
Soit $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$. On dit que f est continue au point $x_0 \in X$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

• *f est continue sur X ssi elle est continue en tout point $x \in X$.*

Définition 1.1.2 (Équi-continuité).

Un sous-ensemble K de $\mathcal{F}(X, Y)$ est dit équi-continu au point $x \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x' \in X, \forall f \in K : d(x, x') \leq \eta \Longrightarrow d'(f(x), f(x')) \leq \varepsilon.$$

• *K est dit équi-continu sur X s'il est équi-continu en tout point $x \in X$.*

Considérons dans la suite un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$.

Définition 1.1.3 (Application absolument continue).
Une fonction $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ est dite absolument continue ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $]a_k, b_k[$ vérifiant $\displaystyle\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ on a $\displaystyle\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\|_E < \varepsilon$.

Théorème 1.1.4.
Une fonction $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ est absolument continue, si et seulement si, il existe une fonction intégrable $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [a, b]$

$$f(t) - f(a) = \int_a^t v(s)ds.$$

Dans ce cas f est dérivable presque partout et sa dérivée $\dot{f} = v$ p.p.

• Toute application absolument continue est continue, par contre la réciproque est fausse.

Définition 1.1.5 (Fonction à variation bornée).
Étant donnée une fonction $f : I \longrightarrow E$, on appelle variation totale de f sur I l'expression

$$Var(f, I) = \sup_n \left\{ \sum_{k=1}^n \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|_E : \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T \right\}.$$

Si $Var(f, I) < \infty$, on dit que f est à variation bornée.

1.1.1 Applications semi-continues

On se place dans un espace métrique (X, d) et soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.1.6 (Semi-continuité inférieure).
• *On dit que f est s.c.i au point $x_0 \in X$, ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda < f(x_0)$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $\lambda < f(x)$, pour tout $x \in V_{x_0}$.*
• *f est s.c.i sur X ssi f est s.c.i en tout point de X.*

Définition 1.1.7 (Semi-continuité supérieure).
• *On dit que f est s.c.s au point $x_0 \in X$ ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda > f(x_0)$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $\lambda > f(x)$, pour tout $x \in V_{x_0}$.*
• *f est s.c.s sur X ssi f est s.c.s en tout point de X.*

Proposition 1.1.8.

$$f \text{ est s.c.i au point } x_0 \iff \liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0),$$
$$f \text{ est s.c.s au point } x_0 \iff \limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Définition 1.1.9.

f est continue au point x_0 ssi f est s.c.i et s.c.s au point $x_0 \in X$.

Théorème 1.1.10 (Théorème de différentiation de Lebesgue).
Pour toute fonction intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\tau) d\tau = f(x).$$

1.2 Quelques éléments d'analyse convexe

Définition 1.2.1 (Ensemble convexe).
Soient E un espace vectoriel, S un sous-ensemble de E. On dit que S est convexe ssi

$$\forall u, v \in S, \quad \forall \lambda \in [0, 1] : \quad \lambda u + (1 - \lambda) v \in S.$$

Autrement dit, pour tous $u, v \in S$, le segment de droite

$$[u, v] = \left\{ \lambda u + (1 - \lambda) v : \quad \lambda \in [0, 1] \right\} \subset S.$$

Définition 1.2.2 (Simplexe).
On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble Δ_n défini par

$$\Delta_n = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, ..., n \ et \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.2.3.
Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tout élément $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ tel que $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_n$.

Proposition 1.2.4.
Soit E un espace vectoriel et soit $S \subset E$. Alors S est convexe ssi il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.

Définition 1.2.5 (Enveloppe convexe).
Soit E un espace vectoriel et soit $S \subset E$. On appelle enveloppe convexe de S qu'on note $co(S)$, l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de E qui contiennent S. (En fait $co(S)$ est le plus petit convexe de E qui contient S.)

Définition 1.2.6 (Enveloppe convexe fermé).
Soit E un espace vectoriel topologique et soit $S \subset E$. On appelle enveloppe convexe fermée de S qu'on note $\overline{co}(S)$, le plus petit convexe fermé de E qui contient S.

Définition 1.2.7.
Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est propre si

$$f : E \longrightarrow]-\infty, +\infty] \ et \ f \not\equiv +\infty \big(f \not\equiv \infty \Longleftrightarrow \exists x_0 \in E, f(x_0) \neq +\infty \big),$$

i.e.,

$$f : E \longrightarrow]-\infty, +\infty] \ et \ dom(f) = \big\{ x \in E : f(x) < +\infty \big\} \neq \emptyset.$$

Définition 1.2.8.
Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est convexe ssi

$$\forall x, y \in dom(f), \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Théorème 1.2.9.
Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Théorème 1.2.10.
Soit E un espace vectoriel normé, alors pour tout ensemble non vide $S \subset E$

$$\overline{co}(S) = \Big\{ x \in E : \quad \langle x', x \rangle \leq \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E' \Big\}.$$

Preuve. On pose

$$B = \Big\{ x \in E : \quad \langle x', x \rangle \leq \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E' \Big\}.$$

• Montrons que B est convexe. Soient $x, y \in B$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors

$$\langle x', x \rangle \leq \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E' \tag{1.1}$$

$$\langle x', y \rangle \leq \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E' \tag{1.2}$$

de (1.1) et (1.2) on a

$$\begin{aligned} \langle x', \lambda x \rangle &\leq \lambda \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E' \\ \langle x', (1-\lambda) y \rangle &\leq (1-\lambda) \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \ \langle x', \lambda x + (1-\lambda) y \rangle \leq \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E' \\ &\Longrightarrow \ \lambda x + (1-\lambda) y \in B. \end{aligned}$$

D'où, B est convexe.

• Montrons que B est fermé. Soit $(x_n)_n \subset B$ tel que $x_n \longrightarrow x$, alors

$$\begin{aligned} \langle x', x_n \rangle \ &\leq \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E', \forall n \in \mathbb{N} \\ \Longrightarrow \ & \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x', x_n \rangle \leq \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E' \\ \Longrightarrow \ & \langle x', \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n \rangle \leq \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E' \\ \Longrightarrow \ & \langle x', x \rangle \leq \delta^*(x', S) \ \ \forall x' \in E' \\ \Longrightarrow \ & x \in B. \end{aligned}$$

D'où, B est fermé.

• Montrons que $B = \overline{co}(S)$

$$\begin{aligned} x \in S \ &\Longrightarrow \ \langle x', x \rangle \leq \sup_{y \in S} \langle x', y \rangle \ \ \forall x' \in S \\ &\Longrightarrow \ \langle x', x \rangle \leq \delta^*(x', S) \\ &\Longrightarrow \ x \in B, \end{aligned}$$

i.e., $S \subset B$.
B est un convexe fermé qui contient S, et $\overline{co}(S)$ est le plus petit convexe fermé qui contient S, alors $\overline{co}(S) \subset B$.
• Montrons que $B \subset \overline{co}(S)$. On suppose le contraire i.e., $\exists x \in B$, tel que $x \notin \overline{co}(S)$.
Comme $\overline{co}(S)$ est un convexe fermé, par le Théorème 1.2.9

$$\begin{aligned} \exists x' \in E' \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \langle x', y\rangle \leq \alpha < \langle x', x\rangle \ \forall y \in \overline{co}(S) \quad &\Longrightarrow \quad \sup_{y\in S}\langle x', y\rangle \leq \alpha < \langle x', x\rangle \\ &\Longrightarrow \quad \delta^*(x', S) < \langle x', x\rangle, \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec $x \in B$, alors $B \subset \overline{co}(S)$. D'où, $\overline{co}(S) = B$. ■

Proposition 1.2.11. *[15]*
Soit $S \subset H$ un sous-ensemble fermé , et soit $f : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction Lipschitzienne de rapport $k > 0$ sur un ensemble ouvert convexe Ω contenant S. Tout minimum global x de f sur S est un minimum global de la fonction $f + kd_S$ sur tout l'espace H.

1.3 Topologies faible et faible*

Voir [17].

1.3.1 La topologie faible

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé réel. On note E' l'espace dual, c'est à dire, l'espace des formes linéaires continues sur E, muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in\overline{B}_E} |f(x)| = \sup_{x\in\overline{B}_E} |\langle f, x\rangle|.$$

Définition 1.3.1.
Soit $f \in E'$ et soit

$$\begin{aligned} \varphi_f : E \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \quad \varphi_f(x) = f(x) =: \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

La topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E')$, est la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varphi_f (f \in E')$.

Proposition 1.3.2.

La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.

Proposition 1.3.3.

Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E. Alors

1. *$(x_n)_n$ converge vers x pour $\sigma(E, E')$ (ou faiblement) si et seulement si $(\langle f, x_n\rangle)_n$ converge vers $\langle f, x\rangle$ pour tout $f \in E'$,*
2. *si $(x_n)_n$converge faiblement vers x alors $\big(\|x_n\|_E\big)_n$ est bornée et nous avons*

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E.$$

1.3.2 La topologie faible*

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, E' son dual et E'' son bidual $\big($c'est à dire le dual de $E'\big)$ muni de la norme $\|\xi\|_{E''} = \sup\limits_{f\in\overline{B}_{E'}} |\langle \xi, f\rangle|$. Soit $x \in E$ fixé, alors l'application $f \longmapsto \langle f, x\rangle$ de E' dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur E', et donc est un élément de E'', qu'on note J_x. On a

$$\langle J_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E},\ \forall\, x \in E,\ \forall f \in E'.$$

Sur l'espace E' sont définies déjà deux topologies :
La topologie forte associée à la norme de E' $\left(\|f\|_{E'} = \sup\limits_{x\in\overline{B}_E} |\langle f, x\rangle|\right)$.
La topologie faible $\sigma(E', E'')$.
On définit une troisième topologie comme suit :

Définition 1.3.4.

La topologie faible sur E' est la topologie la moins fine sur E' qui rende continues toutes les applications $J_x (x \in E)$. On la note $\sigma(E', E)$.*

Proposition 1.3.5.
La topologie faible $\sigma(E', E)$ est séparée.*

Proposition 1.3.6.
Soit $(f_n)_n$ une suite de E'. Alors

$(f_n)_n$ converge vers f pour $\sigma(E', E)$ (ou faiblement) si et seulement si $(\langle f_n, x\rangle)_n$ converge vers $\langle f, x\rangle$ pour tout $x \in E$.*

1.4 Quelques résulats de compacité

Voir les références [3], [17], [37] et [48].

Définition 1.4.1.

Soient X un espace topologique séparé et S une partie de X. On dit que S est relativement compacte si son adhérence dans X est compacte.

Définition 1.4.2 (Boule-compacte).
Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'un ensemble $S \subset E$ est boule-compact si son intersection avec toute boule fermée de E est compacte, et S est relativement boule-compact si son intersection avec toute boule fermée est relativement compacte.

Remarque 1.4.3. *Il est clair que tout boule-compact S est fermé.*

En effet, $\big(S$ est fermé $\big) \Longleftrightarrow \big(\forall (x_n)_n \subset S, x_n \longrightarrow x \Longrightarrow x \in S\big)$.
Soit (x_n) une suite de S qui converge vers x, et montrons que $x \in S$. Elle est donc bornée, i.e., il existe $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in S \cap \overline{B}_H(0, r)$, qui est compact. On peut extraire une sous suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers $y \in S \cap \overline{B}_H(0, r)$. Par l'unicité de la limite nous déduisons que, $y = x$ et donc $x \in S$.

Théorème 1.4.4 (Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki).

Soit E un espace de Banach. Alors la Boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie faible $\sigma(E', E)$.*

Théorème 1.4.5.
Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite extraite $(x_{n_k})_k$ qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Théorème 1.4.6 (Banach-Mazur).
Soit E un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers x. Alors il existe une suite $(z_k)_k$ telle que chaque z_k est une combinaison convexe des éléments $x_k, x_{k+1}, \ldots$ et (z_k) converge fortement vers x.

Théorème 1.4.7 (Théorème de Mazur).

Soit E un espace de Banach et soit S un sous-ensemble compact de E. Alors $\overline{co}(S)$ est compacte.

Théorème 1.4.8 (Théorème d'Arzelà-Ascoli).

Soient (X, d) un espace métrique compact, (Y, d') un espace métrique complet, et K un sous-ensemble de $C(X, Y)$, muni de la distance de la convergence uniforme. Alors K est relativement compact ssi K est équi-continu et $K(x)$ est relativement compact pour tout $x \in X$, avec

$$K(x) = \big\{f(x) : \quad f \in K\big\}.$$

Théorème 1.4.9.

Soit (X, d) un espace métrique complet et K un sous-ensemble de X, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *K est relativement compact.*
2. *Pour toute suite $(x_n)_n$ de K, on peut extraire une sous-suite qui converge dans X.*

1.5 Quelques résulats de convergence

Les résultats suivants voir pris de la référence [31].

Théorème 1.5.1 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue).
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et H un espace de Hilbert, soit $1 \leq p < \infty$ et soit $(f_n)_n \subset L^p(I, H)$. On suppose que

1. *$(f_n)_n$ converge presque partout vers une fonction f sur I,*
2. *il existe une fonction positive $g(\cdot) \in L^p(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$|f_n(t)| \leq g(t) \;\; \mu.p.p \;\; t \in I.$$

Alors $f(\cdot) \in L^p(I, H)$ et la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^p(I, H)$.

Théorème 1.5.2 (Réciproque de la convergence de Lebesgue).
Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, H un espace de Hilbert et soit $1 \leq p < +\infty$. Si $f_n \longrightarrow^{L^p} f$ dans $L^p(I, H)$, alors il existe (f_{n_k}), une suite extraite de (f_n), et une fonction positive $g(\cdot) \in L^p(I, \mathbb{R})$ telle que

1. *$f_{n_k} \longrightarrow f$ $\mu.p.p$,*
2. *pour tout k, $|f_{n_k}(t)| \leq g(t)$ $\mu.p.p.$*

Définition 1.5.3 (Valeur d'adhérence).

Soit (X, d) *un espace métrique et soit* $(x_n)_n \subset X$*. On dit que* x *est une valeur d'adhérence pour* $(x_n)_n$ *ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \subset \mathbb{N}, \quad \forall n \in N_0 : \quad d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Théorème 1.5.4.

Soit $(x_n)_n$ *une suite d'éléments de* X*. Posons*

$$S_n = \{x_k : \ k \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Soit S *l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de* $(x_n)_n$*. Alors* $S = \bigcap\limits_n \overline{S_n}$*, et donc* S *est fermé.*

Proposition 1.5.5.

Soit $(x_n)_n$ *une suite d'éléments de* X*. Si* $x_n \longrightarrow x$ *alors* x *est une valeur d'adhérence pour* $(x_n)_n$*.*

1.6 Projection

Pour plus de détails, consulter la référence [17].

Définition 1.6.1.

Soient H *un espace de Hilbert,* S *un sous-ensemble non vide de* H *et* $x \notin S$*. On définit* $Proj(x, S)$ *la projection de* x *sur* S *(qui peut être vide) comme l'ensemble de tous les éléments* $y \in S$ *dont la distance à* x *est minimale, c'est à dire,* $\|x - y\| = d(x, S)$*, i.e.,*

$$Proj(x, S) = \Big\{ y \in S : \|x - y\| = d(x, S) \Big\}.$$

Théorème 1.6.2 (Projecion sur un ensemble convexe fermé).

Soit S *un sous-ensemble convexe fermé non vide de* H*. Alors pour tout* $x \in H$*, il existe un unique élément* $y \in S$ *tel que*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in S} \|x - z\| = d(x, S).$$

De plus, y est caractérisé par la propriété

$$\begin{cases} y \in S, \\ \langle x - y, z - y \rangle \leq 0, \quad \forall z \in S. \end{cases}$$

Dans ce cas, on note $y = proj(x, S)$.

Remarque 1.6.3.
Si S est relativement boule-compact, alors $Proj(x, S) \neq \emptyset$.

En effet, si $x \notin S$, on a $d(x, S) = \inf_{z \in S} \|x - z\|$.
D'après la caractérisation de la borne inférieure, on obtient

$$\forall \epsilon > 0, \exists z_\epsilon \in S, d(x, S) \leq \|x - z_\epsilon\| < d(x, S) + \epsilon$$

$$\text{pour} \quad \epsilon = \frac{1}{k}, \forall k > 0, \exists z_k \in S, d(x, S) \leq \|x - z_k\| < d(x, S) + \frac{1}{k} \tag{1.3}$$

et

$$\begin{aligned} \|z_k\| &< \|x\| + d(x, S) + \frac{1}{k} \\ \|z_k\| &< \|x\| + d(x, S) + 1 =: M, \end{aligned}$$

c'est à dire $(z_k)_k \subset S \cap M\overline{B}_H$. Cet ensemble est relativement compact, donc d'après la propriété (2) du Théorème 1.4.9, il existe une sous-suite $(z_{\varphi(k)})_k$ telle que $z_{\varphi(k)} \longrightarrow z$ lorsque $k \longrightarrow \infty$. De (1.3) on a

$$d(x, S) \leq \lim_{k \longrightarrow \infty} \|x - z_{\varphi(k)}\| \quad \leq \quad d(x, S),$$

et donc

$$\|x - z\| \quad = \quad d(x, S), \ \text{i.e.,} \ \ z \in Proj(x, S).$$

■

Proposition 1.6.4.
Soient S un ensemble fermé non vide de H, $v \in H$ et $x \in S$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $x \in Proj(v, S)$,
2. $\langle v - x, z - x \rangle \leq \frac{1}{2}\|z - x\|^2, \quad \forall z \in S.$

1.7 Généralités sur les multi-applications

Dans la littérature, les applications multivoques sont aussi appelées multi-applications, multi-fonctions, relations ou correspondances.
Pour plus de détails sur ces notions, on renvoie le lecteur aux références [3], [25] et [37].

Définition 1.7.1.
Soient X, Y deux ensembles, $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque, c'est à dire une application de X à valeurs dans 2^Y, l'ensemble de toutes les parties de Y.

1. *On appelle* ***domaine*** *(effectif) de F, qu'on note $D(F)$, le sous-ensemble de X défini par*
$$D(F) = \Big\{ t \in X : F(t) \neq \emptyset \Big\}.$$
2. *On appelle* ***image de*** *F, qu'on note $\mathrm{R}(F)$, le sous-ensemble de Y défini par*
$$\mathrm{R}(F) = \Big\{ y \in Y : \ \exists t \in D(F), \ y \in F(t) \Big\} = \bigcup_{t \in D(F)} F(t).$$
3. *On appelle* ***graphe de*** *F, qu'on note $Gr(F)$, le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par*
$$Gr(F) = \Big\{ (x, y) \in D(F) \times Y : \ y \in F(x) \Big\}.$$
4. *Considérons la multi-application* ***inverse*** *$F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par*
$$t \in F^{-1}(x) \Longleftrightarrow x \in F(t).$$
On a $(F^{-1})^{-1} = F$, $\ D(F^{-1}) = R(F)$ et $R(F^{-1}) = D(F)$.

1.7.1 Distance de Hausdorff

On se place dans un espace métrique (X, d).

Définition 1.7.2.

Soient A, B deux sous-ensembles de X, l'écart entre A et B est défini par
$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B),$$
et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par
$$\mathcal{H}(A, B) = \sup \big(e(A, B), e(B, A) \big).$$

Proposition 1.7.3 (Propriétés élémentaires).

Soient A, B, C des sous-ensembles de X. Nous avons les propriétés suivantes

1. $e(A, \emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$,
2. $e(\emptyset, B) = 0$,
3. $e(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A \subset \overline{B}$,
4. $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$,
5. $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Longleftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,
6. $\mathcal{H}(A, B) \leq \mathcal{H}(A, C) + \mathcal{H}(C, B)$,
7. $|d(x, A) - d(x, B)| \leq \mathcal{H}(A, B), \forall x \in X$.

1.7.2 Continuité des multi-applications

Les résultats suivants sont pris de la référence [25].

Définition 1.7.4.
Soient X, Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.

1. *On dit que F est s.c.s au point $t_0 \in X$ ssi pour tout ouvert U de Y contenant $F(t_0)$ ($F(t_0) \subset U$) il existe un voisinage Ω de t_0 tel que $F(\Omega) \subset U$, i.e., $F(z) \subset U$, $\forall z \in \Omega$.*
2. *Si F est s.c.s en tout point t de X on dit que F est s.c.s sur X, ou tout simplement s.c.s.*

Théorème 1.7.5.
Soit E un espace vectoriel normé et $F : E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides. On suppose que $F(t_0)$ est convexe et faiblement compact. Alors, F est faiblement semi-continue supérieurement au point t_0 si et seulement si la fonction $\delta^*(x', F(\cdot))$ est semi-continue supérieurement au point t_0.

Théorème 1.7.6.
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. Soient E, F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Si $f : \Omega \longrightarrow E$ est intégrable alors $T(f)$ est intégrable et

$$\int_{\Omega} T(f) d\mu \equiv T\bigg(\int_{\Omega} f d\mu\bigg).$$

Proposition 1.7.7.

Soit (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré et soit* X *un espace de Banach séparable. Soit* $F : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides, convexes et faiblement compactes et soit* $G : \Omega \rightrightarrows X$ *une multi-application à valeurs non vides, convexes fermées. Si*

$$\forall x' \in X', \delta^*(x', G(t)) \leq \delta^*(x', F(t)) \; \mu - p.p.$$

Alors,

$$G(t) \subset F(t) \; \mu - p.p.$$

1.7.3 Mesurabilité des multi-applications

Se référer à [25] pour les détails sur cette section.

Définition 1.7.8.

Soient (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique et* $F : \Omega \rightrightarrows X$*. On dit que* F *est* Σ*-mesurable où simplement mesurable si pour tout ouvert* V *de* X

$$F^{-1}(V) = \big\{t \in \Omega : \; F(t) \cap V \neq \emptyset\big\} \in \Sigma.$$

Théorème 1.7.9.

Soient (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré avec* Σ *une tribu* $\mu-$*complète,* E *un espace de Banach séparable,* $f : \Omega \longrightarrow E$ *une application* $\Sigma-$*mesurable et* $\Gamma : \Omega \rightrightarrows E$ *une multi-application* $\Sigma-$*mesurable à valeurs non vides fermées. Alors la multi-application* $G : \Omega \rightrightarrows E$*, définie pour tout* $t \in \Omega$*, par*

$$G(t) = \Bigg\{x \in \Gamma(t) : \|f(t) - x\| = d(f(t), \Gamma(t))\Bigg\}$$

est $\Sigma-$*mesurable.*

Remarquons que pour tout $t \in \Omega$ fixé, $G(t) = Proj\big(f(t), \Gamma(t)\big)$.

Définition 1.7.10.

Soit (Ω, Σ) *un espace mesurable et soit* E *un espace vectoriel normé. Soit* $F : \Omega \rightrightarrows E$ *une multi-application. On dit que* F *est scalairement mesurable si pour tout* $x' \in E'$*, l'application* $t \mapsto \delta^*(x', F(t))$ *est mesurable.*

Proposition 1.7.11.
Soient (Ω, Σ) *un espace mesurable,* E *un espace de Banach séparable. Si* $F : \Omega \rightrightarrows E$ *est une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes, alors* $F(\cdot)$ *est mesurable si et seulement si elle est scalairement mesurable.*

Théorème 1.7.12.

Soient (Ω, Σ) *un espace mesurable,* E *un espace de Banach séparable. Soient* $F : \Omega \times E \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable et* $u : \Omega \to E$ *une application mesurable. Alors la multi-application* $F(\cdot, u(\cdot))$ *est mesurable.*

Preuve.
Soit l'application $f : \Omega \longrightarrow \Omega \times E$ définie par $f(t) = (t, u(t))$ et soit $V \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$, i.e., $V = V_1 \times V_2$, avec $V_1 \in \Sigma$ et $V_2 \in \mathcal{B}(E)$. Nous avons

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \Big\{ t \in \Omega : \ f(t) \in V \Big\} \\ &= \Big\{ t \in \Omega : \ (t, u(t)) \in V_1 \times V_2 \Big\} \\ &= \Big\{ t \in \Omega : \ t \in V_1 \text{ et } u(t) \in \ V_2 \Big\} \\ &= \Big\{ t \in \Omega : \ t \in V_1 \Big\} \cap \Big\{ t \in \Omega : \ u(t) \in \ V_2 \Big\} \\ &= V_1 \times u^{-1}(V_2) \in \Sigma \end{aligned}$$

car $V_1 \in \Sigma$ et u est $(\Sigma, \mathcal{B}(E))-$mesurable.
Considérons maintenant la multi-application $G = F(\cdot, u(\cdot)) : \Omega \rightrightarrows E$ définie par

$$G(t) = F(t, u(t)) = F(f(t)).$$

Soit W un ouvert de E, on a

$$\begin{aligned} G^{-1}(W) &= \Big\{ t \in \Omega : \ G(t) \cap W \neq \emptyset \Big\} \\ &= \Big\{ t \in \Omega : \ F(t, u(t)) \cap W \neq \emptyset \Big\} \\ &= \Big\{ t \in \Omega : \ F(f(t)) \cap W \neq \emptyset \Big\} \\ &= \Big\{ t \in \Omega : \ f(t) \in F^{-1}(W) \Big\} \\ &= f^{-1}\Big(F^{-1}(W) \Big), \end{aligned}$$

comme F est mesurable alors $F^{-1}(W) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$ et comme f est mesurable on obtient $f^{-1}\big(F^{-1}(W)\big) \in \Sigma$, c'est à dire, $G^{-1}(W) \in \Sigma$. Par conséquent $F(\cdot, u(\cdot))$ est $\Sigma-$ mesurable. ■

1.8 Notions d'opérateurs maximaux monotones.

Dans cette section, nous donnons la définition et quelques propriétés des opérateurs maximaux monotones qui nous seront utiles par la suite. Pour plus de détails on peut se référer à [9], [11], [18] et [55].

1.8.1 Concept d'opérateur

Définition 1.8.1.
Soit $A : H \rightrightarrows H$ une multi-application, qu'on appelle aussi opérateur multivoque de H, avec $D(A), R(A)$ et $Gr(A)$ son domaine, rang et graphe, respectivement.

- *L'ensemble des opérateurs est ordonné par l'inclusion des graphes, i.e., si $A : D(A) \rightrightarrows H$ et $B : D(B) \rightrightarrows H$ sont deux opérateurs, alors*

$$A \subset B \Longleftrightarrow Gr(A) \subset Gr(B).$$

Dans la suite, la notation $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ sera souvent remplacée par : A est un opérateur de H.

1.8.2 Opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert

Définition 1.8.2.
Un opérateur A de H est dit monotone si

$$\forall\, (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in Gr(A), \quad \big\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \big\rangle \geq 0.$$

Exemple 1.8.3.
Soit A un opérateur monotone de H alors, A^{-1}, λA $(\lambda > 0)$ sont aussi des opérateurs monotones.

Définition 1.8.4.
Soit A un opérateur de H. On dit que A est une contraction si

$$\forall (x, x') \in Gr(A), (y, y') \in Gr(A), \|y' - x'\| \leq \|y - x\|.$$

Définition 1.8.5.
Un opérateur monotone A de H est dit maximal monotone s'il est maximal parmi les opérateurs monotones.

– Voici une caractérisation d'un opérateur maximal monotone.

Proposition 1.8.6.
Un opérateur monotone A de H est dit maximal ssi

$$\forall (x, y) \in H \times H, \quad \big\langle y - y_0, x - x_0 \big\rangle \geq 0 \quad \forall (x_0, y_0) \in Gr(A) \Longrightarrow (x, y) \in Gr(A). \tag{1.4}$$

Proposition 1.8.7.
Soit A un opérateur de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *A est maximal monotone.*
2. *A est monotone et $R(I_H + A) = H$ (Théorème de Minty).*
3. *Pour tout $\lambda > 0$, $(I_H + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H.*

Proposition 1.8.8.
Soit A un opérateur maximal monotone de H. Alors

i) $Gr(A)$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé dans $H \times H$, i.e.,

$$\forall \left(x_n, y_n\right)_n \subset Gr(A) \ \text{ tel que } \ x_n \longrightarrow x \text{ et } y_n \rightharpoonup y, \text{ alors } (x, y) \in Gr(A).$$

ii) A^{-1} est maximal monotone.

iii) Pour tout $x \in D(A), Ax$ est un sous-ensemble fermé convexe de H.

Remarque 1.8.9.
D'après la propriété (iii) et par le Proposition 1.8.8, pour tout $x \in D(A)$ il existe un élément unique $x' \in Ax$ tel que

$$x' = proj(0, Ax), \qquad \|x'\| = \inf_{y \in Ax} \|y\| = d(0, Ax).$$

Dans toute la suite, cet élément sera noté, $A^0(x)$, i.e., $A^0(x)$ est l'élément de norme minimale de Ax.

Définition 1.8.10.
Soit A un opérateur maximal monotone de H. On appelle section principale de A, tout opérateur univoque $A' \subset A$ avec $D(A) = D(A')$ et tel que pour tout $(x, y) \in \overline{D(A)} \times H$, l'inégalité

$$\big\langle A'(\xi) - y, \xi - x \big\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in D(A)$$

implique que $x \in D(A)$ et $y \in Ax$, i.e., $(x, y) \in Gr(A)$.

1.8.3 Résolvante et Approximation de Yosida d'un opérateur maximal monotone

Définition 1.8.11.
Soit A un opérateur maximal monotone de H. Pour tout $\lambda > 0$, la résolvante de A est définie par

$$J_\lambda^A := \big(I_H + \lambda A\big)^{-1}.$$

Proposition 1.8.12.
La résolvante J_λ^A d'un opérateur maximal monotone A de H est un opérateur univoque défini sur tout H. De plus, c'est une contraction de H, i. e.,

$$\|J_\lambda^A(x) - J_\lambda^A(y)\| \;\leq\; \|x - y\| \quad \forall x, y \in H. \tag{1.5}$$

Définition 1.8.13.
Pour tout $\lambda > 0$, on appelle approximation Yosida de A, qu'on note A_λ, l'opérateur univoque défini par

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I_H - J_\lambda^A).$$

Proposition 1.8.14.
Soit A un opérateur maximal monotone de H. Alors

(i) Pour tout $x \in H$ on a $J_\lambda^A(x) \in D(A)$ et $A_\lambda(x) \in AJ_\lambda^A(x)$.

(ii) A_λ est maximal monotone et Lipschitzien de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

1.8.4 Pseudo-distance de Vladimirov

Définition 1.8.15. *[54]*

Soit A et B deux opérateurs maximaux monotones de H. On définit la pseudo-distance de Vladimirov entre A et B, qu'on note $dis(A,B)$, par

$$dis(A,B) := \sup\left\{\frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle}{\|y_1\| + \|y_2\| + 1}, \quad (x_1,y_1) \in Gr(A),\ (x_2,y_2) \in Gr(B)\right\}. \tag{1.6}$$

Remarque 1.8.16.

• *La pseudo-distance $dis(\cdot,\cdot)$ peut prendre la valeur $+\infty$.*

• *La pseudo-distance $dis(\cdot,\cdot)$ n'est pas une métrique, car, en général l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.*

Lemme 1.8.17.

Soit A et B deux opérateurs maximaux monotones de H. Alors

$$dis(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A = B.$$

Lemme 1.8.18.

Soient A et B deux opérateurs maximaux monotones de H. Alors

$$\mathcal{H}(D(A), D(B)) \leq dis(A,B).$$

Nous terminons cette section par les résultats suivants qui nous seront utiles dans la démonstration de nos théorèmes principaux. Pour plus de détails se référer à [12], [38] et [54].

Lemme 1.8.19.

Soit A un opérateur maximal monotone de H. Alors l'opérateur A^0 est une section principale de A, i.e., si $x \in \overline{D(A)}$, $y \in H$ sont tels que

$$\left\langle A^0(z) - y, z - x\right\rangle \geq 0 \ \ \forall z \in D(A),$$

alors $x \in D(A)$ et $y \in A(x)$.

Lemme 1.8.20.

Soient $A_n (n \in \mathbb{N})$ et A des opérateurs maximaux monotones de H tel que $dis(A_n, A) \to 0$. Supposons aussi que $x_n \in D(A_n)$ avec $x_n \longrightarrow x$ et que $y_n \in A_n x_n$ avec $y_n \rightharpoonup y$ pour $x, y \in H$. Alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Lemme 1.8.21.

Soit A et B deux opérateurs maximaux monotones de H. Alors pour tout $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$

$$\|x - J_\lambda^B(x)\| \leq \lambda \|A^0(x)\| + dis(A,B) + \sqrt{\lambda\big(1 + \|A^0(x)\|\big)\, dis(A,B)}.$$

Lemme 1.8.22.

Soient $A_n (n \in \mathbb{N})$ et A des opérateurs maximaux monotones de H tel que $dis(A_n, A) \to 0$. Supposons que $\|A_n^0 x\| \leq c(1 + \|x\|)$ pour $c > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x \in D(A_n)$, alors pour tout $\eta \in D(A)$, il existe une suite (ξ_n) tel que

$$\xi_n \in D(A_n),\ \xi_n \to \eta \text{ et } A_n^0 \xi_n \to A^0 \eta. \tag{1.7}$$

1.9 Sous-différentiels et cônes normaux

Se référer à [25] pour ces concepts.

1.9.1 Sous-différentiel

Définition 1.9.1.

Soient H un espace de Hilbert, $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $x_0 \in D(f)$. On appelle sous-différentiel de f au point x_0 (au sens de l'analyse convexe) noté $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par

$$\partial f(x_0) = \Big\{ x' \in H :\ f(x) \geq f(x_0) + \langle x', x - x_0 \rangle \ \forall x \in H \Big\}.$$

Un point $x' \in \partial f(x_0)$ est dit sous-gradient de f au point x_0. On dit que f est sous-différentiable au point x_0 si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Théorème 1.9.2.

Soient H un espace de Hilbert, $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe et continue au point $x \in H$, alors $\partial f(x)$ est non vide et faiblement compact dans H.

Proposition 1.9.3.

Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne. Alors, ∂f est une multi-application semi-continue supérieurement sur H.

Définition 1.9.4 (Dérivée directionnelle).

Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction propre s.c.i. La dérivée directionnelle généralisée de* f *est donnée par*

$$f^{\uparrow}(x,h) = \limsup_{\substack{x' \longrightarrow_f x \\ t \downarrow 0}} \inf_{h' \longrightarrow h} \frac{f(x'+th') - f(x')}{t}.$$

La notation $x' \longrightarrow^f x$, *veut dire* $x' \longrightarrow x$ *et* $f(x') \longrightarrow f(x)$.

Définition 1.9.5.

Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction propre s.c.i. Le sous-différentiel de Clarke de* f *au point* x, *noté* $\partial^C f(x)$ *est défini par*

$$\partial^C f(x) = \Big\{ \xi \in H : \ \langle \xi, h \rangle \le f^{\uparrow}(x,h) \ \ \forall h \in H \Big\}.$$

Définition 1.9.6.

Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction Lipschitzienne au voisinage d'un point donné* $x \in H$, *et soit* h *un vecteur dans* H. *La dérivée directionnelle généralisée au sens de Clarke de* f *au point* x *dans la direction* h, *notée* $f^0(x,h)$, *est définie par*

$$f^0(x,h) = \limsup_{(x',t) \longrightarrow (x,0)} \frac{f(x'+th) - f(x')}{t}.$$

Définition 1.9.7.

Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de* $x \in H$. *Alors, le sous-différentiel de Clarke de* f *au point* x *est défini par*

$$\partial^C f(x) = \Big\{ \xi \in H : \ \langle \xi, h \rangle \le f^0(x,h) \ \ \forall h \in H \Big\}.$$

Proposition 1.9.8.

Soit H *un espace de Hilbert et soit* f *une fonction convexe localement Lipschitzienne au voisinage de* x, *alors* $\partial^C f(x)$ *coincïde avec* $\partial f(x)$.

Proposition 1.9.9.

Soit H *un espace de Hilbert et soit* $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de* $x_0 \in H$ *de rapport* $k > 0$. *Alors,* $\partial^C f(x_0)$ *est localement borné i.e., il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\partial^C f(x) \subset \overline{B}_H(0,k), \quad \forall x \in B_H(x_0, \delta).$$

En particulier, si S est une partie de H, alors d_S est $1-$Lipschitzienne i.e., il existe $\delta > 0$ tel que

$$\partial^C d_S(x) \subset \overline{B}_H, \quad \forall x \in B_H(x_0, \delta).$$

Preuve.

On sait que la fonction d_S est une fonction Lipschitzienne sur tout H. Alors, elle est localement Lipschitzienne au voisinage $x_0 \in H$ de rapport 1, donc il existe σ tel que

$$\big|d_S(x) - d_S(y)\big| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in B_H(x_0, \sigma). \tag{1.8}$$

Pour $x \in B_H\Big(x_0, \dfrac{\sigma}{2}\Big)$, montrons que $\partial^C d_S(x) \subset \overline{B}_H$.
Soit $v \in H$ et $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \dfrac{\sigma}{2(1 + \|v\|)} < \dfrac{\sigma}{2}$.
Soit $y \in B_H(x, \epsilon)$ et $h \in]0, \epsilon[$. Alors,

$$\begin{aligned} \|y + hv - x_0\| &= \|y - x + hv + x - x_0\| \\ &\leq \|y - x\| + h\|v\| + \|x - x_0\| \\ &\leq \epsilon + \epsilon\|v\| + \frac{\sigma}{2} = \epsilon(1 + \|v\|) + \frac{\sigma}{2} \\ &< \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma, \end{aligned}$$

et donc $y + hv \in B_H(x_0, \sigma)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \|y - x_0\| &\leq \|y - x\| + \|x - x_0\| \\ &\leq \epsilon + \frac{\sigma}{2} \\ &\leq \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma. \end{aligned}$$

Par la relation (1.8), on a

$$\big|d_S(y + hv) - d_S(y)\big| \leq \|y + hv - y\| = \|hv\|$$

d'où

$$d_S^0(x, v) = \limsup_{\substack{y \longrightarrow x \\ h \downarrow 0}} \frac{\big|d_S(y + hv) - d_S(y)\big|}{h} \leq \|v\|.$$

D'autre part, pour tout $x' \in \partial^C d_S(x)$ on a $\langle x', v\rangle \leq d_S^0(x, v)$ et donc,

$$\langle x', v\rangle \leq \|v\|.$$

Par conséquent pour $v \in H\backslash\{0\}$,

$$\frac{\langle x', v\rangle}{\|v\|} \leq 1. \tag{1.9}$$

vu que $(-v) \in H\backslash\{0\}$, (1.9) donne

$$\begin{aligned} \frac{\langle x', -v\rangle}{\|v\|} &\leq 1, \\ \Longrightarrow \quad -\frac{\langle x', v\rangle}{\|v\|} &\leq 1, \\ \Longrightarrow \quad -1 &\leq \frac{\langle x', v\rangle}{\|v\|}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Combinant (1.9) et (1.10), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\big|\langle x', v\rangle\big|}{\|v\|} \leq 1, \quad \forall v \in H\backslash\{0\} \\ \Longrightarrow \quad &\sup_{v \in H\backslash\{0\}} \frac{\big|\langle x', v\rangle\big|}{\|v\|} \leq 1 \\ \Longrightarrow \quad &\|x'\| \leq 1 \\ \Longrightarrow \quad &x' \in \overline{B}_H. \end{aligned}$$

Donc, il existe $\delta = \dfrac{\sigma}{2} > 0$ tel que $\partial^C d_S(x) \subset \overline{B}_H, \forall x \in B_H(x_0, \delta)$. ■

Définition 1.9.10 (Sous-différentiel de Fréchet).

Soit $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et s.c.i. sur H. On appelle sous-différentiel de Fréchet de f au point x, qu'on note $\partial^F f(x)$, l'ensemble défini par

$$\partial^F f(x) = \Big\{\zeta \in H : \ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \bar{x} \in B_H(x, \delta), \langle \zeta, \bar{x} - x\rangle \leq f(\bar{x}) - f(x) + \epsilon\|\bar{x} - x\|\Big\}.$$

Proposition 1.9.11.

Si $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est localement lipchitzienne au voisinage de x, alors

$$\partial^F f(x) \subset \partial^C f(x), \forall x \in H.$$

Preuve.

Soit

$$\begin{aligned} x' \in \partial^F f(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \text{ t.q } \ \langle x', \overline{x} - x\rangle \leq f(\overline{x}) - f(x) + \epsilon\|\overline{x} - x\|, \forall \overline{x} \in B_H(x, \delta), \\ &\Longrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \text{ t.q } \ \frac{f(\overline{x}) - f(x) - \langle x', \overline{x} - x\rangle}{\|\overline{x} - x\|} \geq -\epsilon, \quad \forall \overline{x} \in B_H(x, \delta)\backslash\{x\}, \\ &\Longrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \text{ t.q } \inf_{\substack{\overline{x} \in B_H(x,\delta) \\ \overline{x} \neq x}} \frac{f(\overline{x}) - f(x) - \langle x', \overline{x} - x\rangle}{\|\overline{x} - x\|} \geq -\epsilon, \end{aligned}$$

Comme

$$\forall \epsilon > 0,\ \ \sup_{\delta \geq 0}\Big(\inf_{\substack{\overline{x} \in B_H(x,\delta) \\ \overline{x} \neq x}} \frac{f(\overline{x}) - f(x) - \langle x', \overline{x} - x \rangle}{\|\overline{x} - x\|} \Big) \geq \inf_{\substack{\overline{x} \in B_H(x,\delta) \\ \overline{x} \neq x}} \frac{f(\overline{x}) - f(x) - \langle x', \overline{x} - x \rangle}{\|\overline{x} - x\|},\ \ \forall \delta > 0,$$

alors,

$$\begin{aligned} \forall \epsilon \ \ > 0,\ \ & \sup_{\delta \geq 0}\Big(\inf_{\substack{\overline{x} \in B_H(x,\delta) \\ \overline{x} \neq x}} \frac{f(\overline{x}) - f(x) - \langle x', \overline{x} - x \rangle}{\|\overline{x} - x\|} \Big) \geq -\epsilon, \\ \Longrightarrow \ \ & \liminf_{\overline{x} \longrightarrow x} \frac{f(\overline{x}) - f(x) - \langle x', \overline{x} - x \rangle}{\|\overline{x} - x\|} \geq 0, \end{aligned}$$

Soit $v \in H \backslash \{0\}$ et $t \geq 0$, alors pour $\overline{x} = x + tv$, on a

$$\begin{aligned} \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x) - \langle x', tv \rangle}{\|tv\|} \geq 0 \ \ & \Longrightarrow \ \ \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t\|v\|} - \frac{\langle x', v \rangle}{\|v\|} \geq 0,\ \ \forall v \in H \backslash \{0\} \\ & \Longrightarrow \ \ \frac{\langle x', v \rangle}{\|v\|} \leq \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t\|v\|} \\ & \Longrightarrow \ \ \langle x', v \rangle \leq \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \\ & \Longrightarrow \ \ \langle x', v \rangle \leq \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \\ & \Longrightarrow \ \ \langle x', v \rangle \leq \limsup_{\substack{y' \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y'+tv) - f(y')}{t} = f^0(x, v) \end{aligned}$$

c'est à dire,

$$x' \in \partial^C f(x).$$

D'où,

$$\partial^F f(x) \subset \partial^C f(x), \quad \forall x \in H.$$

■

1.9.2 Cônes normaux

Définition 1.9.12 (Cône).

Soit K un sous-ensemble de H. On dit que K est un cône si

$$\forall x \in K,\ \forall \lambda \geq 0,\ \ \lambda x \in K,$$

c'est à dire

$$\forall \lambda \geq 0,\ \lambda K \subset K.$$

Remarque 1.9.13.

Un cône est donc une réunion de demi-droites fermées issues de l'origine.

Définition 1.9.14.

Soit K un cône. Alors les trois relations suivantes sont équivalentes :

1. *K est convexe,*
2. *$\forall \alpha \geq 0, \forall \beta \geq 0, \alpha K + \beta K \subset K$,*
3. *$K + K \subset K$.*

Définition 1.9.15 (Cône normal au sens de l'analyse convexe).

Soient H un espace de Hilbert et K un sous-ensemble non vide de H. On appelle cône normal à K au point $x \in K$, l'ensemble défini par

$$N_K(x) = \Big\{ x' \in H : \ \big\langle x', y - x \big\rangle \leq 0, \quad \forall\, y \in K \Big\}.$$

Si $x \notin K$ alors $N_K(x) = \emptyset$.

Proposition 1.9.16.

Soit K un sous-ensemble non vide de H. Les deux assertions suivantes sont vérifieés.

1. *Si $x \in int(K)$, alors $N_K(x) = \{0\}$.*
2. *Si $int(K) \neq \emptyset$ et si $x \in Fr(K)$, alors $N_K(x) \neq \{0\}$.*

Proposition 1.9.17.

Pour tout sous-ensemble K de H et tout $x \in K$, nous avons

$$N_K(x) = \partial \delta_K(x).$$

Preuve.

Comme $x \in K$, $\delta_K(x) = 0$. D'où

$$\begin{aligned}
\partial \delta_K(x) &= \Big\{ x' \in H : \ \delta_K(y) \geq \delta_K(x) + \langle x', y - x \rangle \ \ \forall y \in H \Big\} \\
&= \Big\{ x' \in H : \ \delta_K(y) \geq \langle x', y - x \rangle \ \ \forall y \in K \Big\} \bigcap \\
&\quad \Big\{ x' \in H : \ \delta_K(y) \geq \langle x', y - x \rangle \ \ \forall y \in H \backslash K \Big\} \\
&= \Big\{ x' \in H : \ \delta_K(y) \geq \langle x', y - x \rangle \ \ \forall y \in K \Big\} \bigcap H \\
&= \Big\{ x' \in H : \ \langle x', y - x \rangle \leq 0 \ \ \forall y \in K \Big\} = N_K(x).
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.9.18.

Le cône normal associé à un ensemble convexe fermé non vide K est un opérateur maximal monotone. De plus,

$$D(N_K(\cdot)) = \left\{ x \in H : \; N_K(x) \neq \emptyset \right\} = K.$$

Définition 1.9.19 (Cône polaire).

Dans l'espace de Banach E, le cône polaire d'un sous-ensemble K est défini par

$$K^0 = \left\{ x' \in E' : \; \langle x', v \rangle \leq 0, \forall v \in K \right\}.$$

Proposition 1.9.20.

K^0 est un cône convexe fermé.

Définition 1.9.21 (Cône tangent de Clarke).

Soient E un espace de Banach et K un sous-ensemble fermé de E. On note par $T_K(x)$ le cône tangent de Clarke qui est défini comme suit, on dit qu'un vecteur v appartient au cône tangent de Clarke $T_K(x)$ si pour toute suite $(x_n)_n$ dans K convergeant vers x et pour toute suite de nombres positifs $(t_n)_n$ convergeant vers 0, il existe une suite $(v_n)_n \subset E$ qui converge vers v tel que $x_n + t_n v_n \in K$ pour tout n.

Définition 1.9.22 (Cône normal de Clarke).

Soient E un espace de Banach et K un sous-ensemble fermé de E. Le cône normal de Clarke, de K au point $x \in K$ est défini par

$$N_K^C(x) = \left\{ \zeta \in E' : \; \langle \zeta, v \rangle \leq 0, \forall v \in T_K(x) \right\},$$

c'est à dire que $N_K^C(x)$ est le cône polaire de $T_K(x)$.

Proposition 1.9.23.

Si K est convexe, alors

$$N_K^C(x) = \left\{ x' \in H : \; \left\langle x', y - x \right\rangle \leq 0, \quad \forall \, y \in K \right\} = N_K(x).$$

Proposition 1.9.24.

Soient H un espace de Hilbert, K un sous-ensemble convexe fermé de H, et soient $y \in H$ et $proj(y, K)$ la projection de y sur K, alors

$$x = proj(y, K) \iff y - x \in N_K(x). \tag{1.11}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} x = proj(y,K) &\iff \langle y-x, z-x\rangle \le 0, \ \ \forall z \in K \\ &\iff y - x \in N_K(x). \end{aligned}$$

■

Les résultats suivants sont pris de la référence [15].

Définition 1.9.25 (Cône normal proximal).
Soient S un sous-ensemble non vide et fermé de H, $x \in S$. On définit le cône normal proximal (où le cône proximal) de S au point x de la manière suivante

$$N_S^p(x) = \Big\{ v \in H : \exists t > 0, \quad x \in Proj(x+tv, S) \Big\}.$$

Proposition 1.9.26.

Soient S un ensemble fermé non vide de $H, x \in H$ et $v \in H$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $v \in N_S^p(x)$.

ii) $\exists \sigma \ge 0$ *tel que* $\forall z \in S, \langle v, z-x\rangle \le \sigma \|z-x\|^2$.

Définition 1.9.27 (Cône normal de Fréchet).

Soit S un sous-ensemble fermé de H. On appelle cône normal de Fréchet à S au point x, qu'on note $N_S^F(x)$, l'ensemble défini par

$$N_S^F(x) = \Big\{ \zeta \in H : \ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \langle \zeta, y-x\rangle \le \epsilon\|y-x\|, \forall y \in B_H(x,\delta) \cap S \Big\}.$$

Proposition 1.9.28.

Soit S un sous-ensemble non vide et fermé de H et $x \in S$. Le cône normal de Fréchet coincïde avec le sous-différentiel de la fonction indicatrice de S, i.e.,

$$N_S^F(x) = \partial^F \delta_S(x).$$

Remarque 1.9.29.

L'inclusion suivante est toujours vraie

$$N_S^F(x) \subset N_S^C(x), \quad \forall x \in S.$$

La proposition suivante donne une relation entre le cône normal de Fréchet et le sous-différentiel de Fréchet de la fonction distance.

Proposition 1.9.30.

Pour tout sous-ensemble fermé S de H et tout $x \in S$, nous avons

$$\partial^F d_S(x) = N_S^F(x) \cap \overline{B}_H. \tag{1.12}$$

Preuve.

• Montrons que $\partial^F d_S(x) \subset N_S^F(x) \cap \overline{B}_H$.
Soit $\xi \in \partial^F d_S(x)$, alors par la Définition 1.9.10, pour tout $\epsilon > 0$, il exist $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in B_H(x, \delta)$

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq d_S(y) - d_S(x) + \epsilon \|y - x\|,$$

d'où,

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq \epsilon \|y - x\|, \quad \text{pour tout} \quad y \in B_H(x, \delta) \cap S,$$

ceci implique que $\xi \in N_S^F(x)$, mais comme $\partial^F d_S(x) \subset \overline{B}_H$, on obtient

$$\partial^F d_S(x) \subset N_S^F(x) \cap \overline{B}_H. \tag{1.13}$$

• Montrons maintenant que $N_S^F(x) \cap \overline{B}_H \subset \partial^F d_S(x)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \xi \in N_S^F(x) \cap \overline{B}_H &\iff \xi \in N_S^F(x) \text{ et } \xi \in \overline{B}_H \\ &\iff \xi \in N_S^F(x) \text{ et } \|\xi\| \leq 1. \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Fixons $0 < \epsilon' < \dfrac{\epsilon}{2}$, alors, par la définition du cône normal de Fréchet, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in B_H(x, \delta) \cap S$

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq \epsilon' \|y - x\|. \tag{1.14}$$

Comme la fonction $y \longmapsto -\langle \xi, y - x \rangle + \epsilon' \|y - x\|$ est Lipschtizienne de rapport $l = \|\xi\| + \epsilon'$, par la relation (1.14), $y_0 = x$ est un minimum global pour la fonction $f(y) = -\langle \xi, y - x \rangle + \epsilon' \|y - x\|$ sur $\overline{B}_H\left(x, \dfrac{\delta}{2}\right) \cap S$ qui est fermé de H, donc par la Proposition 1.2.11, $y_0 = x$ est un minimum global sur H de la fonction $f + (\|\xi\| + \epsilon') d_{\overline{B}_H(x, \frac{\delta}{2}) \cap S}$, donc pour tout $y \in H$

$$\begin{aligned} \langle \xi, y - x \rangle &\leq \epsilon' \|y - x\| + (\|\xi\| + \epsilon') d_{B_H(x,\delta) \cap S}(y) \\ &\leq \epsilon' \|y - x\| + d_{B_H(x,\delta) \cap S}(y) + \epsilon' d_{B_H(x,\delta) \cap S}(y) \\ &\leq \epsilon' \|y - x\| + d_{B_H(x,\delta) \cap S}(y) + \epsilon' \|y - x\| \\ &\leq 2\epsilon' \|y - x\| + d_{B_H(x,\delta) \cap S}(y) \end{aligned}$$

Fixons $r > 0$ tel que $0 < 2r < \dfrac{\delta}{2}$. On peut facilement vérifier que pour tout $y \in B_H(x,r)$

$$d_{S\cap B_H(x,2r)}(y) = d_S(y).$$

En effet, $d_S(y) = \inf_{z\in S}\|y-z\| \iff \forall\epsilon > 0, \exists z_\epsilon \in S$ tel que

$$\|y - z_\epsilon\| < d_S(y) + \epsilon \tag{1.15}$$

comme $x \in S$, on a $d_S(y) \leq \|y-x\| < r \quad \forall y \in B_H(x,r)$
donc on peut trouver $\sigma > 0$ assez petit tel que $d_S(y) \leq r - \sigma$, en prenant dans (2.54) $\epsilon = \sigma$, on obtient l'existence de $z_\sigma \in S$ tel que

$$\|y - z_\sigma\| < r - \sigma + \sigma = r$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} \|x - z_\sigma\| &\leq \|x-y\| + \|y - z_\sigma\| < r + r = 2r, \\ &\Longrightarrow z_\sigma \in B_H(x,2r), \end{aligned}$$

i.e., $z_\sigma \in B_H(x,2r)\cap S$ alors, $d_{B_H(x,2r)\cap S}(y) \leq \|y - z_\sigma\| < d_S(y) + \sigma$
d'où, $d_{B_H(x,2r)\cap S}(y) \leq d_S(y) + \sigma$, en faisant tendre σ vers 0, il vient que

$$d_{B_H(x,2r)\cap S}(y) \leq d_S(y). \tag{1.16}$$

D'autre part, $B_H(x,2r)\cap S \subset S$ alors

$$d_S(y) \leq d_{B_H(x,2r)\cap S}(y). \tag{1.17}$$

De (1.16) et (1.17) on obtient

$$d_{B_H(x,2r)\cap S}(y) = d_S(y).$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $y \in B_H(x,r)$

$$\langle \xi, y - x\rangle \leq \epsilon\|y-x\| + d_S(y) - d_S(x).$$

Par conséquent, $\xi \in \partial^F d_S(x)$, d'où

$$N_S^F(x) \cap \overline{B}_H \subset \partial^F d_S(x). \tag{1.18}$$

De (1.13) et (1.18), on a

$$\partial^F d_S(x) = N_S^F(x) \cap \overline{B}_H.$$

■

Remarque 1.9.31.

Une autre propriété importante est la suivante :

$$x \in Proj(v,S) \Longrightarrow v - x \in N_S^F(x) \Longrightarrow v - x \in N_S^C(x). \tag{1.19}$$

En effet, soit $x \in Proj(v,S)$, d'après la Proposition 1.6.4, on a

$$\langle v - x, z - x \rangle \leq \frac{1}{2}\|z - x\|^2, \forall z \in S$$

$\Longrightarrow \exists \sigma = \dfrac{1}{2} > 0, \forall z \in S \quad \langle v - x, z - x \rangle \leq \sigma \|z - x\|^2$. Par la Proposition 1.9.26, $v - x \in N_S^p(x)$. Comme $N_S^p(x) \subset N_S^F(x)$, alors $v - x \in N_S^F(x)$
Aussi, $N_S^F(x) \subset N_S^C(x)$ et donc $v - x \in N_S^C(x)$. ■

Lemme 1.9.32.

Si $A_i = N_{C_i}$, avec $C_i, i = 1, 2,$ des sous-ensembles convexes fermés de H, alors

$$\mathcal{H}(C_1, C_2) = dis(A_1, A_2).$$

Les résultats suivants résument certaines propriétés importantes du sous-différentiel de la fonction distance aux ensembles convexes fermés non vides et fournissent une propriété de semi-continuité supérieure de sa fonction d'appui, nécessaire dans les preuves de nos résultats principaux. Voir [16], [25] et [32].

Proposition 1.9.33.

Soit K un sous-ensemble non vide, convexe fermé de H. Alors
(i) $\partial\, d_K(x) = N_K(x) \cap \overline{B}_H$.
(ii) $\partial\, d_K(x)$ est un sous-ensemble convexe et faiblement compact dans H.

Proposition 1.9.34.

Soit $\{K(t,x) : \ (t,x) \in I \times H\}$ une famille d'ensembles convexes fermés non vides de H et soit $\eta \geq 0$. Supposons qu'il existe une constante $L \geq 0$ et une fonction continue $\vartheta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que, pour tous $x_1, x_2, y \in H$ et $t, s \in I$

$$|d(y, K(t,x_1)) - d(y, K(s,x_2))| \leq |\vartheta(t) - \vartheta(s)| + L\|x_1 - x_2\|.$$

Alors, nous avons les propriétes suivantes.
(i) *Pour tout $(t,x,y) \in Gr(K)$ on a $\eta\partial d_{K(t,x)}(y) \subset \eta\overline{B}_H$.*
(ii) *pour toute suite $(t_n)_n \subset I$ convergeant vers t, toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x, toute suite $(y_n)_n$ convergeant vers $y \in K(t,x)$ avec $y_n \in K(t_n,x_n)$, et tout $\xi \in H$, nous avons*

$$\limsup_{n\to+\infty} \delta^*\big(\xi, \eta\partial d_{K(t_n,x_n)}(y_n)\big) \leq \delta^*\big(\xi, \eta\partial d_{K(t,x)}(y)\big).$$

1.9.3 Ensembles sous-lisses

Nous introduisons dans ce qui suit, la définition et quelques propriétés des ensembles sous-lisses. Nous renvoyons le lecteur à [4] pour plus de détails. Voir aussi [51].

Définition 1.9.35.

On dit qu'un sous-ensemble non vide et fermé S de H est sous-lisse au point $x_0 \in S$, si pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tous $x_1, x_2 \in B_H(x_0, \delta) \cap S$ et tous $\zeta_i \in N_S^C(x_i) \cap \overline{B}_H (i = 1, 2)$ nous avons

$$\langle \zeta_1 - \zeta_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\epsilon \|x_1 - x_2\|. \tag{1.20}$$

L'ensemble S est sous-lisse, s'il est sous-lisse en tout point de S. Nous disons en outre que S est uniformément sous-lisse, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que (1.20) est vérifiée pour tous $x_1, x_2 \in S$ satisfaisant $\|x_1 - x_2\| < \delta$ et pour tous $\zeta_i \in N_S^C(x_i) \cap \overline{B}_H (i = 1, 2)$.

Proposition 1.9.36.

Soit S un sous-ensemble fermé de H et $x_0 \in S$. Si S est sous-lisse au point x_0, alors il est normalement Fréchet régulier en x_0, c'est à dire

$$N_S^F(x_0) = N_S^C(x_0), \tag{1.21}$$

en particulier,

$$\partial^C d_S(x_0) = \partial^F d_S(x_0).$$

Preuve.

• Montrons que $N_S^F(x_0) = N_S^C(x_0)$.

On a l'inclusion $N_S^F(x_0) \subset N_S^C(x_0)$, donc il suffit de montre que $N_S^C(x_0) \subset N_S^F(x_0)$. Soit $\xi \in N_S^C(x_0)$ et soit $\epsilon > 0$, comme S est sous-lisse au point x_0, par la Définition 1.9.35 il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in B_H(x_0, \delta) \cap S$ et tout $\zeta_i \in N_S^C(x_i) \cap \overline{B}_H (i = 1, 2)$, nous avons

$$\langle \zeta_1 - \zeta_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\epsilon \|x_1 - x_2\|.$$

En prenant, $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = \xi, x_1 = v$ et $x_2 = x_0$, ceci implique, pour tout $v \in S$ avec $\|v - x_0\| < \delta$ et tout $\xi \in N_S^C(x_0)$

$$\langle -\xi, v - x_0 \rangle \geq -\epsilon \|v - x_0\|,$$

par conséquent,

$$\langle \xi, v - x_0 \rangle \leq \epsilon \|v - x_0\| \text{ pour tout } v \in B_H(x_0, \delta) \cap S.$$

Cette dernière inégalité implique que $\xi \in N_S^F(x_0)$. Donc, $N_S^C(x_0) \subset N_S^F(x_0)$. Par conséquent, $N_S^F(x_0) = N_S^C(x_0)$.
• Montrons que $\partial^C d_S(x_0) = \partial^F d_S(x_0)$. Soit $\xi \in \partial^C d_S(x_0)$.

$$\Longleftrightarrow \quad \xi \in N_S^C(x_0) \cap \overline{B}_H.$$

Alors, $\|\xi\| \leq 1$ et $\xi \in N_S^C(x_0)$, par la relation (1.21), on a $\xi \in N_S^F(x_0)$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \xi \in N_S^F(x_0) \cap \overline{B}_H \\ &\Longleftrightarrow \quad \xi \in \partial^F d_S(x_0) \end{aligned}$$

par conséquent, $\partial^C d_S(x_0) = \partial^F d_S(x_0)$. ■

Proposition 1.9.37.

Soit S un sous-ensemble sous-lisse alors $\partial^F d_S(x)$ est convexe fermé.

Dans tout ce qui suit, pour un ensemble sous-lisse S, nous allons adopter les notations $N_S(\cdot)$ et ∂d_S pour le cône et le sous-différentiel de Fréchet (de Clarke).

Définition 1.9.38.

Soit $\big(S(q)\big)_{q\in Q}$ une famille d' ensembles fermés de H avec paramètre $q \in Q$. Cette famille est dite uniformément sous-lisse, si pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour chaque $q \in Q$, l'inégalité (1.20) est vérifiée pour tous $x_1, x_2 \in S(q)$ satisfaisant $\|x_1 - x_2\| < \delta$, et pour tout $\zeta_i \in N_{S(q)}(x_i) \cap \overline{B}_H, i = 1, 2$.

Nous terminons cette section par la proposition suivante, qui est cruciale pour la preuve de notre théorème principal.

Proposition 1.9.39.

Soit $\{K(t,x) : \ (t,x) \in I \times H\}$ une famille d' ensembles fermés non vides de H, qui est equi-uniformément sous-lisse et soit un réelle $\eta \geq 0$. Supposons qu'il existe une constante réelle $L \geq 0$ et une fonction continue $\vartheta : I \to \mathbb{R}$ tel que, pour tous $x_1, x_2, y \in H$ et $t, s \in I$

$$|d(y, K(t, x_1)) - d(y, K(s, x_2))| \leq |\vartheta(t) - \vartheta(s)| + L\|x_1 - x_2\|.$$

Alors,
(i) *Pour tout $(t, x, y) \in gph(K)$ nous avons $\eta\partial d_{K(t,x)}(y) \subset \eta\overline{B}_H$.*
(ii) *Pour chaque suite $(t_n)_n \subset I$ convergeant vers t, chaque suite $(x_n)_n$ convergeant vers x, chaque suite $(y_n)_n$ convergeant vers $y \in K(t,x)$ avec $y_n \in K(t_n, x_n)$, et chaque $\xi \in H$, nous avons*

$$\limsup_{n\to+\infty} \delta^*(\xi, \eta\partial d_{K(t_n,x_n)}(y_n)) \leq \delta^*(\xi, \eta\partial d_{K(t,x)}(y)).$$

1.10 Lemmes de Grönwall

Dans nos preuves, nous aurons aussi besoin de ces deux lemmes qui sont des formes discrètes du Lemme de Gronwall .

Lemme 1.10.1. *[36]*

Soit $\alpha > 0$ et soient (γ_i), (a_i) des suites de nombres réels positifs tel que

$$a_{i+1} \leq \alpha + \sum_{k=0}^{i} \gamma_k a_k \quad \textit{pour } i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Alors

$$a_{i+1} \leq \alpha \, \exp\Big(\sum_{k=0}^{i} \gamma_k\Big).$$

Lemme 1.10.2. *[38]*

Soient $(\alpha_i), (\beta_i), (\gamma_i)$ et (a_i) des suites de nombre réels positifs tel que

$$a_{i+1} \leq \alpha_i + \beta_i(a_0 + a_1 + ... + a_{i-1}) + (1 + \gamma_i)a_i \quad \textit{pour } i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Alors,

$$a_j \leq \Big(a_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k\Big) \exp\Big(\sum_{k=0}^{j-1} (k\beta_k + \gamma_k)\Big) \quad \textit{pour } j \in \mathbb{N}.$$

Enfin, ce dernier lemme est trés utilisé pour majorer des fonctions à partir d'inéquations intégrales.

Lemme 1.10.3.

Soient a un réel positif, f, g, h des fonctions définies sur I à valeurs dans $[0, \infty[$ tel que

$$f(t) \quad \leq \quad a + \int_0^t f(s)h(s)ds + \int_0^t g(s)ds.$$

Alors

$$f(t) \quad \leq \quad a \exp\Big(\int_0^t h(s)ds\Big) + \int_0^t g(s) \exp\Big(\int_s^t h(\tau)d\tau\Big)ds.$$

Chapitre 2

Existence de solutions absolument continues pour un système de deux inclusions différentielles l'une gouvernée par un opérateur maximal monotone et l'autre par le cône normal, avec perturbations univoques.

2.1 Introduction

Ce chapitre est consitué de deux parties : dans la première, nous présentons un résultat d'existence de solutions absolument continues pour un problème d'évolution du premier ordre dans un espace de Hilbert séparable H, de la forme suivante :

$$(P_1)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t,v(t))u(t) + f(t,u(t),v(t)), & \text{p.p.}\, t \in I \\ u(t) \in D(A(t,v(t))), & \forall t \in I \\ -\dot{v}(t) \in N_{C(t,u(t))}(v(t)) + g(t,u(t),v(t)), & \text{p.p.}\, t \in I \\ v(t) \in C(t,u(t)), & \forall\, t \in I \\ u(0) = u_0 \in D(A(0,v_0)), v(0) = v_0 \in C(0,u_0), & \end{cases}$$

où $A(t,x)$ est un opérateur maximal monotone dépendant du temps et de l'état, $D(A(0,v_0))$ représente le domaine de l'opérateur $A(0,v_0)$, $C(t,x)$ est un ensemble non vide convexe fermé dépendant du temps et de l'état, $N_{C(t,x(t))}$ est le cône normal à $C(t,x)$, et f, g sont deux perturbations univoques de type Carathéodory. La preuve se base sur la construction de solutions approximantes dont la limite sera la solution du problème considéré.
Dans la deuxième partie, nous appliquons les résultats obtenus à un problème de minimisation.

2.2 Résultat principal

Notre théorème principal sera établi sous les hypothèses suivantes.

• **Hypothèses**

Pour tout $(t,x) \in I \times \mathrm{H}, A(t,x) : D(A(t,x)) \subset \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ un opérateur maximal monotone.

(H_A^1) Il existe une constante réelle positive λ et une fonction $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I,\mathbb{R})$ positive et croissante sur I, tel que

$$dis\,(A(t,x), A(s,y)) \leq |\beta(t) - \beta(s)| + \lambda\|x-y\| \quad \forall t,s \in I, \forall x,y \in \mathrm{H}.$$

(H_A^2) Il existe une constante réelle positive c, tel que

$$\|A^0(t,x)y\| \leq c\big(1 + \|x\| + \|y\|\big) \;\text{ pour }\; t \in I,\;\; x \in \mathrm{H} \quad \text{et}\;\; y \in D\,(A(t,x))\,.$$

(H_A^3) Pour tout sous-ensemble borné $B \subset \mathrm{H}$, l'ensemble $D\left(A(I \times B)\right)$ est relativement boule-compact.

(H_C^1) Soit $C : I \times \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ une multi-application à valeurs non vides. Pour tout $(t, x) \in I \times \mathrm{H}$, l'ensemble $C(t, x)$ est non vide fermé et convexe.

(H_C^2) Il existe une constante réelle positive α, vérifiant $\alpha\lambda < 1$, et une fonction $\eta \in \mathcal{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$ positive et croissante sur I, tel que

$$\left|d_{C(t,x)}(z) - d_{C(s,y)}(z)\right| \leq |\eta(t) - \eta(s)| + \alpha\|x - y\| \ \ \forall t, s \in I, \ \ \forall x, y, z \in \mathrm{H}.$$

(H_C^3) Pour tout sous-ensemble borné $E \subset \mathrm{H}$, l'ensemble $C(I \times E)$ est relativement boule-compact.

(H_f) Soit $f : I \times \mathrm{H} \times \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$ une application séparément mesurable sur I et séparément continue sur $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$, et il existe une constante positive M_f tel que

$$\|f(t, x, y)\| \leq M_f\big(1 + \|x\| + \|y\|\big) \ \ \forall (t, x, y) \in I \times \mathrm{H}.$$

(H_g) Soit $g : I \times \mathrm{H} \times \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$ une application séparément mesurable sur I et séparément continue sur $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$, et il existe une constante positive M_g tel que

$$\|g(t, x, y)\| \leq M_g\big(1 + \|x\| + \|y\|\big) \ \ \forall (t, x, y) \in I \times \mathrm{H}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner le théorème principal de ce chapitre. Sa démonstration utilise des idées et des techniques dans [5], [6], [8] et [45].

Théorème 2.2.1.

Pour tout $(t, x) \in I \times \mathrm{H}$, soit $A(t, x) : D(A(t, x)) \subset \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ un opérateur maximal monotone vérifiant les hypothèses $(H_A^1), (H_A^2)$ et (H_A^3). Soit $C : I \times \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ une multi-application à valeurs non vides satisfaisant $(H_C^1), (H_C^2)$ et (H_C^3). Soient $f, g : I \times \mathrm{H} \times \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$ satisfaisant (H_f) et (H_g), respectivement. Alors, pour tout $(u_0, v_0) \in D(A(0, v_0)) \times C(0, u_0)$, il existe une solution absolument continue $(u, v) : I \longrightarrow \mathrm{H} \times \mathrm{H}$ du problème d'évolution (P_1). De plus, cette solution satisfait les estimations suivantes

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K\big(1 + \dot{\beta}(t) + \dot{\eta}(t)\big) \ \ \text{et} \ \ \|\dot{v}(t)\| \leq \gamma\big(1 + \dot{\beta}(t) + \dot{\eta}(t)\big) \ \text{p.p.}\, t \in I,$$

où, K et γ sont des constantes réelles positives.

Preuve.

Pour tout $n \geq 1$, soit $\left\{t_i^n : i = 0, 1, ..., n\right\}$ une partition quelconque de l'intervalle I, i.e., $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$. Pour $n \geq 1$ et $i = 0, 1, ..., n-1$, on pose

$$\delta_{i+1}^n := |t_{i+1}^n - t_i^n|, \ \ \beta_{i+1}^n := |\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)|, \ \ \eta_{i+1}^n := |\eta(t_{i+1}^n) - \eta(t_i^n)| \tag{2.1}$$

et on suppose que $\beta(0) = \eta(0) = 0$ et

$$\delta_i^n \leq \delta_{i+1}^n, \quad \beta_i^n \leq \beta_{i+1}^n, \quad \eta_i^n \leq \eta_{i+1}^n. \tag{2.2}$$

ce choix est possible grâce à l'absolue continuité de β et η.

Par exemple si $\beta(0) = \beta_0$ on peut prende $\widetilde{\beta}(t) = \beta(t) - \beta_0$ pour avoir $\widetilde{\beta}(0) = \beta(0) - \beta_0 = 0$.

Soit $b(t) := t + \beta(t) + \eta(t)$ pour tout $t \in I$. Comme β et η sont absolument continues, la partition $\{t_i^n : i = 0, ..., n\}$ peut être choisie tel que, pour tout $i = 0, ..., n-1$ et $n \geq 1$,

$$k_{i+1}^n := \delta_{i+1}^n + \beta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n \leq \frac{1}{n} b(T) =: \varepsilon_n. \tag{2.3}$$

La preuve sera donnée en 5 étapes.

***Etape 1.* Construction des suites discrètes.**
Dans cette étape, on construit par récurrence deux suites $\{u_i^n : i = 1, ..., n\}$ et $\{v_i^n : i = 1, ..., n\}$, qui vont nous permettre de définir des fonctions approximantes qui convergent vers la solution de notre problème. Posons
$v_0^n = v_0 \in C(0, u_0), u_0^n = u_0 \in D(A(0, v_0))$, et pour $i = 0, ..., n-1$,

$$v_{i+1}^n = proj\Big(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds, C(t_{i+1}^n, u_i^n)\Big), \tag{2.4}$$

$$u_{i+1}^n \quad = \quad J_{i+1}^n \Big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n) ds\Big) \tag{2.5}$$

où,

$$J_{i+1}^n := J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)} = \Big(I_H + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\Big)^{-1}. \tag{2.6}$$

Observons que la relation (2.4) est bien définie puisque les ensembles $C(t, x)$ sont fermés convexes, et par le Théorème 1.6.2, il est clair que pour $i = 0, ..., n-1$,

$$v_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, u_i^n). \tag{2.7}$$

D'après la relation (1.11) et (2.4), nous avons

$$-\big(v_{i+1}^n - v_i^n\big) \in N_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}(v_{i+1}^n) + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds. \tag{2.8}$$

De plus, en utilisant la propriété (i) de la Propositions 1.8.14 et la relation (2.5), on a

$$u_{i+1}^n \in D\left(A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\right). \tag{2.9}$$

Aussi par les relations (2.5) et (2.6)

$$u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n) ds \in u_{i+1}^n + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n) u_{i+1}^n.$$

D'où

$$-\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\delta_{i+1}^n} \in A\left(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n\right) u_{i+1}^n + \frac{1}{\delta_{i+1}^n} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n) ds. \tag{2.10}$$

***Etape 2.* Estimations et propriétés des suites $\left(u_i^n\right)_n$ et $\left(v_i^n\right)_n$.**
Grâce aux hypothèses (H_C^2), (H_g) et aux relations (2.1), (2.3), (2.4) et (2.7) nous avons, pour chaque $n \geq 1$, et pour tout $i = 0, 1, .., n-1$,

$$\begin{aligned}
& \|v_{i+1}^n - v_i^n\| \\
= \; & \left\| v_{i+1}^n - \left(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds \right) - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds \right\| \\
\leq \; & \left\| v_{i+1}^n - \left(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds \right) \right\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|g(s, u_i^n, v_i^n)\| ds \\
= \; & d\Big(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds, \, C(t_{i+1}^n, u_i^n) \Big) + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|g(s, u_i^n, v_i^n)\| ds \\
\leq \; & d\Big(v_i^n, C(t_{i+1}^n, u_i^n) \Big) + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|g(s, u_i^n, v_i^n)\| ds + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|g(s, u_i^n, v_i^n)\| ds \\
= \; & \Big| d\big(v_i^n, \, C(t_{i+1}^n, u_i^n)\big) - d\big(v_i^n, \, C(t_i^n, u_{i-1}^n)\big) \Big| + 2 \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|g(s, u_i^n, v_i^n)\| ds \\
\leq \; & \Big| d\big(v_i^n, \, C(t_{i+1}^n, u_i^n)\big) - d\big(v_i^n, \, C(t_i^n, u_{i-1}^n)\big) \Big| + 2M_g\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) \delta_{i+1}^n \\
\leq \; & \Big| \eta(t_{i+1}^n) - \eta(t_i^n) \Big| + \alpha \|u_i^n - u_{i-1}^n\| + 2M_g\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) \delta_{i+1}^n \\
\leq \; & k_{i+1}^n + \alpha \|u_i^n - u_{i-1}^n\| + 2M_g\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) k_{i+1}^n \\
= \; & \big(1 + 2M_g\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big)\big) k_{i+1}^n + \alpha \|u_i^n - u_{i-1}^n\|.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

D'autre part, d'après les relations (1.5), (2.5) et le Lemme 1.8.21, on a

$$\begin{aligned}
& \|u_{i+1}^n - u_i^n\| = \left\| J_{i+1}^n \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n) ds \right) - u_i^n \right\| \\
\leq \; & \left\| J_{i+1}^n \left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n) ds \right) - J_{i+1}^n(u_i^n) \right\| + \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
\leq \; & \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, u_i^n, v_i^n)\| ds + \delta_{i+1}^n \|A^0(t_i^n, v_i^n) u_i^n\| + dis\left(A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n), A(t_i^n, v_i^n)\right) \\
+ \; & \sqrt{\delta_{i+1}^n (1 + \|A^0(t_i^n, v_i^n) u_i^n\|) dis\left(A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n), A(t_i^n, v_i^n)\right)}
\end{aligned}$$

Posant $x = \delta^n_{i+1}\big(1+\|A^0(t^n_i,v^n_i)u^n_i\|\big)$ et $y = dis\,\big(A(t^n_{i+1},v^n_{i+1}),A(t^n_i,v^n_i)\big)$ et utilisant le fait que, si a_1,b_1 sont deux réels positifs, alors $\sqrt{2a_1b_1} \le \sqrt{a_1^2+b_1^2} \le a_1+b_1$. Nous obtenons alors pour tout $r>0$

$$\sqrt{x.y} \;=\; \sqrt{2\big(\frac{1}{2r}x.r.y\big)} \le \frac{1}{2r}x + ry.$$

Sachant que $\lambda\alpha<1$, nous pouvons trouver $r>0$ tel que $(1+r)\lambda\alpha<1$ (il suffit de choisir $r<\dfrac{1-\lambda\alpha}{\lambda\alpha}$). Donc, en utilisant nos hypothèses (H^1_A), (H^2_A), (H_f) et les relations (2.1), (2.2), (2.3) et (2.11), on obtient

$$\begin{aligned}
&\|u^n_{i+1}-u^n_i\| \le \delta^n_{i+1}M_f\big(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|\big)+\delta^n_{i+1}c\big(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|\big)\\
+\;& |\beta(t^n_{i+1})-\beta(t^n_i)|+\lambda\|v^n_{i+1}-v^n_i\|+\frac{\delta^n_{i+1}}{2r}\big(1+c(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|)\big)\\
+\;& r\left(|\beta(t^n_{i+1})-\beta(t^n_i)|+\lambda\|v^n_{i+1}-v^n_i\|\right)\\
\le\;& k^n_{i+1}M_f\big(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|\big)+k^n_{i+1}c\big(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|\big)+k^n_{i+1}\\
+\;& \lambda\Big(\big(1+2M_g(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|)\big)k^n_{i+1}+\alpha\|u^n_i-u^n_{i-1}\|\Big)\\
+\;& \frac{k^n_{i+1}}{2r}\big(1+c\big(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|\big)\big)\\
+\;& r\Big(k^n_{i+1}+\lambda\big(\big(1+2M_g\big(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|\big)\big)k^n_{i+1}+\alpha\|u^n_i-u^n_{i-1}\|\big)\Big)\\
\le\;& k^n_{i+1}\big(M_f+c+1+\lambda+2\lambda M_g+\frac{1}{2r}(1+c)+r+\lambda r+2\lambda rM_g\big)\big(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|\big)\\
+\;& (1+r)\lambda\alpha\|u^n_i-u^n_{i-1}\|.
\end{aligned}$$

Si on pose $M_1 := \big(M_f+c+1+\lambda+2\lambda M_g+\dfrac{1}{2r}(1+c)+r+\lambda r+2\lambda rM_g\big)$ et $R:=(1+r)\lambda\alpha<1$, nous pouvons écrire, pour chaque $n\ge1$ et pour $i=0,...,n-1$,

$$\|u^n_{i+1}-u^n_i\| \le R\|u^n_i-u^n_{i-1}\|+M_1\big(1+\|u^n_i\|+\|v^n_i\|\big)k^n_{i+1}. \tag{2.12}$$

En prenant en compte la relation (2.2) et itérant cette dernière inégalité, en supposant $u^n_{-1}=u_0$, on trouve

$$\|u^n_{i+1}-u^n_i\| \le M_1k^n_{i+1}\sum_{j=0}^{i}R^j\big(1+\|u^n_{i-j}\|+\|v^n_{i-j}\|\big). \tag{2.13}$$

En effet, par la relation (2.12) on a

$$\|u^n_i-u^n_{i-1}\| \le R\|u^n_{i-1}-u^n_{i-2}\|+M_1\big(1+\|u^n_{i-1}\|+\|v^n_{i-1}\|\big)k^n_i,$$

en utilisant le fait que $k^n_i \le k^n_{i+1}$

$$\|u^n_i-u^n_{i-1}\| \le R\|u^n_{i-1}-u^n_{i-2}\|+M_1\big(1+\|u^n_{i-1}\|+\|v^n_{i-1}\|\big)k^n_{i+1},$$

en remplaçant dans (2.12) on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq R\Big(R\|u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\| + M_1\big(1 + \|u_{i-1}^n\| + \|v_{i-1}^n\|\big)k_{i+1}^n\Big) + M_1\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big)k_{i+1}^n \\
&= R^2\|u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\| + RM_1\big(1 + \|u_{i-1}^n\| + \|v_{i-1}^n\|\big)k_{i+1}^n + M_1\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big)k_{i+1}^n \\
&= R^2\|u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\| + M_1 k_{i+1}^n \sum_{j=0}^{1} R^j\big(1 + \|u_{i-j}^n\| + \|v_{i-j}^n\|\big)
\end{aligned}$$

On continue l'opération jusqu'à l'ordre $i-1$, on trouve

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq R^i\|u_1^n - u_0^n\| + M_1 k_{i+1}^n \sum_{j=0}^{i-1} R^j\big(1 + \|u_{i-j}^n\| + \|v_{i-j}^n\|\big), \tag{2.14}$$

de la relation (2.12)

$$\|u_1^n - u_0^n\| \leq R\|u_0^n - u_{-1}^n\| + M_1\big(1 + \|u_0^n\| + \|v_0^n\|\big)k_1^n,$$

comme $u_{-1}^n = u_0$ et $k_1^n \leq k_{i+1}^n$, on a

$$\|u_1^n - u_0^n\| \leq M_1\big(1 + \|u_0^n\| + \|v_0^n\|\big)k_{i+1}^n,$$

Remplaçant cette estimation dans la relation (2.14), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq R^i M_1\big(1 + \|u_0^n\| + \|v_0^n\|\big)k_{i+1}^n + M_1 k_{i+1}^n \sum_{j=0}^{i-1} R^j\big(1 + \|u_{i-j}^n\| + \|v_{i-j}^n\|\big) \\
&= M_1 k_{i+1}^n \sum_{j=0}^{i} R^j\big(1 + \|u_{i-j}^n\| + \|v_{i-j}^n\|\big),
\end{aligned}$$

ce qui montre la relation (2.13).

Sachant que $\|u_{i+1}^n - u_0^n\| \leq \sum_{j=0}^{i}\|u_{j+1}^n - u_j^n\|$, en utilisant la relation (2.13) et (2.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_0\| + \sum_{j=0}^{i}\|u_{j+1}^n - u_j^n\| \\
&\leq \|u_0\| + \sum_{j=0}^{i}\left(M_1 k_{j+1}^n \sum_{l=0}^{j} R^l\big(1 + \|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big)\right) \\
&\leq \|u_0\| + M_1\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l + M_1\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big). \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

• Montrons par récurence $\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l \leq \frac{i+1}{1-R}$.

Pour $i=0, \sum_{l=0}^{j} R^l = 1 \leq \frac{1}{1-R}$

donc, la relation est vraie pour $i=0$.

Supposons qu'elle est vrai pour i et montrons la pour $i+1$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{i+1}\sum_{l=0}^{j} R^l &= \sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l + \sum_{l=0}^{i} R^l \\
&\leq \frac{i+1}{1-R} + \sum_{l=0}^{i} R^l \\
&= \frac{i+1}{1-R} + \frac{1-R^{i+2}}{1-R} \leq \frac{i+1+1}{1-R} \\
&= \frac{i+2}{1-R}.
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l \leq \frac{i+1}{1-R}. \tag{2.16}$$

• Montrons par récurence

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l\big(\|u_{j-l}^n\| + \|v_{j-l}^n\|\big) \leq \frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i}\big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) \tag{2.17}$$

plus précisement, pour $a_j = \|u_j^n\| + \|v_j^n\|$

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l a_{j-l} = \sum_{l=0}^{i} \frac{1-R^{i+1-l}}{1-R} a_l$$

Pour $i=0$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l a_{j-l} &= \sum_{l=0}^{0} R^l a_{0-l} = a_0 \\
&\leq \frac{1}{1-R}\sum_{j=0}^{i} a_j
\end{aligned}$$

donc, la relation est vraie pour $i = 0$.
Supposons qu'elle est vrai pour i et montrons la pour $i+1$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{i+1}\sum_{l=0}^{j} R^l a_{j-l} &= \sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l a_{j-l} + \sum_{l=0}^{i+1} R^l a_{i+1-l} \\
&= \sum_{l=0}^{i} \frac{1-R^{i+1-l}}{1-R} a_l + \sum_{l=0}^{i+1} R^l a_{i+1-l} \\
&= \sum_{l=0}^{i} \Big(\frac{1-R^{i+1-l}}{1-R} a_l + R^{i+1-l}\Big) a_l + a_{i+1} \\
&= \sum_{l=0}^{i} \frac{1-R^{i+2-l}}{1-R} a_l + a_{i+1} \\
&= \sum_{l=0}^{i+1} \frac{1-R^{i+2-l}}{1-R} a_l.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l a_{j-l} \;\le\; \sum_{l=0}^{i} \frac{1}{1-R} a_l = \frac{1}{1-R}\sum_{l=0}^{i} a_l.$$

Combinant (2.16) et (2.17) on obtint

$$\|u_{i+1}^n\| \;\le\; \|u_0\| + M_1\varepsilon_n \left(\frac{i+1}{1-R}\right) + \frac{M_1\varepsilon_n}{1-R}\sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big).$$

En remarquant que $i+1 \le n$, et donc par la relation (2.3), $(i+1)\varepsilon_n \le n\varepsilon_n = b(T)$, on obtient

$$\|u_{i+1}^n\| \;\le\; \|u_0\| + M_1\frac{b(T)}{1-R} + \frac{M_1\varepsilon_n}{1-R}\sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) =: c_1 + c_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big),$$

c'est à dire

$$\|u_{i+1}^n\| \le c_1 + c_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big). \tag{2.18}$$

D'autre part, nous avons par (2.11) et (2.13),

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n - v_i^n\| \;&\le\; k_{i+1}^n + 2M_g k_{i+1}^n\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) \\
&+\; \alpha M_1 k_i^n \sum_{j=0}^{i-1} R^j \big(1 + \|u_{i-1-j}^n\| + \|v_{i-1-j}^n\|\big).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

D'où, en utilisant (2.3) et (2.19), et en supposant que $u_{-1}^n = u_0$ et $v_{-1}^n = v_0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n\| &\leq \|v_0\| + \sum_{j=0}^{i} \|v_{j+1}^n - v_j^n\| \\
&\leq \|v_0\| + (1+2M_g)\sum_{j=0}^{i} k_{j+1}^n + 2M_g \sum_{j=0}^{i} k_{j+1}^n \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) \\
&+ \sum_{j=0}^{i} \alpha M_1 k_j^n \sum_{l=0}^{j-1} R^l \big(1 + \|u_{j-1-l}^n\| + \|v_{j-1-l}^n\|\big) \\
&\leq \|v_0\| + (1+2M_g)(i+1)\varepsilon_n + 2M_g\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) \\
&+ \alpha M_1 \frac{i+1}{1-R}\varepsilon_n + \alpha M_1 \varepsilon_n \sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} R^l \big(\|u_{j-1-l}^n\| + \|v_{j-1-l}^n\|\big) \\
&\leq \|v_0\| + (1+2M_g)b(T) + \alpha M_1 \frac{b(T)}{1-R}\big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) \\
&+ \left(2M_g + \frac{\alpha M_1}{1-R}\right)\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) \\
&=: d_1 + d_2 \varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big). \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

En additionnant les relations (2.18) et (2.20), il vient que

$$\|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\| \leq (c_1 + d_1) + (c_2 + d_2)\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big).$$

Grâce au Lemme 1.10.1, on obtient pour tout $n \geq 1$ et $i = 0, ..., n-1$,

$$\|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\| \leq (c_1 + d_1)\exp\Big((c_2 + d_2)\sum_{j=0}^{i}\varepsilon_n\Big) \leq (c_1 + d_1)\exp\big((c_2 + d_2)b(T)\big) =: K_1,$$

c'est à dire, pour tout $n \geq 1$ et $i = 0, ..., n-1$,

$$\|u_{i+1}^n\| \leq K_1 \ \text{ et } \ \|v_{i+1}^n\| \leq K_1.$$

Remplaçons ces estimations dans (2.13) et (2.19), on obtient

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \frac{M_1}{1-R}(1 + K_1)k_{i+1}^n$$

et

$$\|v_{i+1}^n - v_i^n\| \leq \Big(1 + \big(2M_g + \frac{\alpha M_1}{1-R}\big)(1+K_1)\Big)k_{i+1}^n.$$

Posant $K := \max\left\{K_1, \frac{M_1}{1-R}(1+K_1)\right\}$ et $\gamma := \max\left\{K_1, 1 + \big(2M_g + \frac{\alpha M_1}{1-R}\big)(1+K_1)\right\}$, on conclut que pour tout $0 \leq i \leq n$ (resp. $0 \leq i \leq n-1$)

$$\|u_i^n\| \leq K \quad (\text{resp. } \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K k_{i+1}^n), \tag{2.21}$$

et

$$\|v_i^n\| \leq \gamma \quad (\text{resp. } \|v_{i+1}^n - v_i^n\| \leq \gamma k_{i+1}^n). \tag{2.22}$$

***Etape 3.* Construction des suites approximantes $\big(u_n\big)_n$ et $\big(v_n\big)_n$.**

Pour chaque $n \geq 1$, nous définissons les applications $u_n, v_n : I \longrightarrow H$ comme suit : pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $0 \leq i \leq n-1$,

$$\begin{cases} u_n(t) = u_i^n + \dfrac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\Big(u_{i+1}^n - u_i^n + \displaystyle\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\Big) - \displaystyle\int_{t_i^n}^{t} f(s, u_i^n, v_i^n)ds \\ u_n(T) = u_n^n, \end{cases} \tag{2.23}$$

et

$$\begin{cases} v_n(t) = v_i^n + \dfrac{b(t) - b(t_i^n)}{k_{i+1}^n}\Big(v_{i+1}^n - v_i^n + \displaystyle\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n)ds\Big) - \displaystyle\int_{t_i^n}^{t} g(s, u_i^n, v_i^n)ds \\ v_n(T) = v_n^n. \end{cases} \tag{2.24}$$

Clairement, les applications u_n et v_n sont absolument continues avec $u_n(t_i^n) = u_i^n, v_n(t_i^n) = v_i^n$, et pour $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\dot{u}_n(t) = \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\Big(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\Big) - f(t, u_i^n, v_i^n), \tag{2.25}$$

et

$$\dot{v}_n(t) = \frac{\dot{b}(t)}{k_{i+1}^n}\Big(v_{i+1}^n - v_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n)ds\Big) - g(t, u_i^n, v_i^n). \tag{2.26}$$

Par la relation (2.10) nous avons

$$-\frac{1}{\delta_{i+1}^n}\Big(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\Big) \;\in\; A\left(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n\right) u_{i+1}^n,$$

et par (2.25) ceci est équivalent à

$$-\dot{u}_n(t) - f(t, u_i^n, v_i^n) \in A\left(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n\right) u_{i+1}^n. \tag{2.27}$$

De même, prenant en compte (2.8), on a

$$-v_{i+1}^n - v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n)ds \quad \in \quad N_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}\big(v_{i+1}^n\big),$$

et grâce à la définition du cône normal et à la relation (2.26), ceci est équivalent à

$$-\dot{v}_n(t) - g(t, u_i^n, v_i^n) \in N_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}(v_{i+1}^n). \tag{2.28}$$

Dans la suite on va montrer que (u_n) est bornée. Par l'hypothèse (H_f) et la relation (2.23), pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_i^n\| &= \left\|\frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\Big(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\Big) - \int_{t_i^n}^{t} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\right\| \\
&\leq \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\left\|u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\right\| + \left\|\int_{t_i^n}^{t} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\right\| \\
&\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, u_i^n, v_i^n)ds\| \\
&\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2M_f\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big)\delta_{i+1}^n.
\end{aligned}$$

Grâce aux relations (2.3), (2.21) et (2.22), il vient que

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_i^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2M_f\big(1 + K + \gamma\big)\delta_{i+1}^n \\
&\leq Kk_{i+1}^n + 2M_f\big(1 + K + \gamma\big)k_{i+1}^n \\
&\leq \big(K + 2M_f(1 + K + \gamma)\big)\varepsilon_n =: \widehat{\beta}\varepsilon_n.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

D'où, par la relation (2.3), pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $\|u_n(t)\| \leq K + \widehat{\beta}\varepsilon_n \leq K + \widehat{\beta}b(T)$. Par conséquent,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|_{\mathcal{C}} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{t\in I}\|u_n(t)\|\right) \quad \leq \quad K + \widehat{\beta}b(T),$$

et

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} \; Var(u_n) &= \sup_{n\geq 1}\sum_{i=0}^{n-1}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K\sum_{i=0}^{n-1}k_{i+1}^n \\
&= K\sum_{i=0}^{n-1}\big(\delta_{i+1}^n + \beta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big) \\
&= K\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\big(t_{i+1}^n - t_i^n\big) + \big(\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)\big) + \big(\eta(t_{i+1}^n) - \eta(t_i^n)\big)\Big) \\
&= K\big(t_n^n + \beta(t_n^n) + \eta(t_n^n)\big) = Kb(T).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Donc, (u_n) est une suite uniformément bornée en norme et en variation.
D'autre part, pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K\big(b(t) - b(s)\big) + \big(K + 2\widehat{\beta}\big)\varepsilon_n. \tag{2.31}$$

En effet, fixons $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n[$ avec $j > i$. Alors, par les relations (2.3), (2.21) et (2.29) on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_n(s)\| &\leq \|u_n(t) - u_j^n\| + \|u_j^n - u_i^n\| + \|u_i^n - u_n(s)\| \\
&\leq \|u_i^n - u_j^n\| + 2\widehat{\beta}\varepsilon_n \\
&\leq \sum_{p=0}^{j-i-1} \|u_{i+p+1}^n - u_{i+p}^n\| + 2\widehat{\beta}\varepsilon_n \leq K \sum_{p=0}^{j-i-1} k_{i+p+1}^n + 2\widehat{\beta}\varepsilon_n \\
&\leq K \sum_{p=0}^{j-i-1} \left(\delta_{i+p+1}^n + \beta_{i+p+1}^n + \eta_{i+p+1}^n\right) + 2\widehat{\beta}\varepsilon_n \\
&\leq K \sum_{p=0}^{j-i-1} \Big(\big(\delta_{i+p+1}^n - \delta_{i+p}^n\big) + \big(\beta_{i+p+1}^n - \beta_{i+p}^n\big) + \big(\eta_{i+p+1}^n - \eta_{i+p}^n\big)\Big) + 2\widehat{\beta}\varepsilon_n \\
&= K\Big(\big(\delta_j^n - \delta_i^n\big) + \big(\beta_j^n - \beta_i^n\big) + \big(\eta_j^n - \eta_i^n\big)\Big) + 2\widehat{\beta}\varepsilon_n \\
&= K\Big(\big(\delta_j^n + \beta_j^n + \eta_j^n\big) - \big(\delta_i^n + \beta_i^n + \eta_i^n\big)\Big) + 2\widehat{\beta}\varepsilon_n \\
&= K\Big(b(t_j^n) - b(t_i^n)\Big) + 2\widehat{\beta}\varepsilon_n \leq K\Big(b(t) - b(t_i^n)\Big) + 2\widehat{\beta}\varepsilon_n \\
&\leq K\Big(\big(b(t) - b(s)\big) + \big(b(s) - b(t_i^n)\big)\Big) + 2\widehat{\beta}\varepsilon_n \\
&\leq K\left(\big(b(t) - b(s)\big) + \big(b(t_{i+1}^n) - b(t_i^n)\big)\right) + 2\widehat{\beta}\varepsilon_n \\
&= K\big(b(t) - b(s)\big) + K k_{i+1}^n + 2\widehat{\beta}\varepsilon_n \\
&\leq K\big(b(t) - b(s)\big) + (K + 2\widehat{\beta})\varepsilon_n.
\end{aligned}$$

Maintenant, observons que par l'hypothèse (H_f), et les relations (2.3), (2.21) et (2.25), nous avons, pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_n(t)\| &\leq \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2M_f\big(1 + K + \gamma\big) \leq K\frac{k_{i+1}^n}{\delta_{i+1}^n} + 2M_f\big(1 + K + \gamma\big) \\
&= K\left(1 + \frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} + \frac{\eta(t_{i+1}^n) - \eta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right) + 2M_f\big(1 + K + \gamma\big).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Comme β et η sont absolument continues, on a par le Théorème de différentiation de Lebesgue (Théorème 1.1.10) pour presque tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} = \dot{\beta}(t) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\eta(t_{i+1}^n) - \eta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} = \dot{\eta}(t),$$

si bien qu' il existe un sous-ensemble $N' \subset I$ de mesure négligeable tel que pour tout $t \in I \setminus N'$, nous pouvons assurer l'existence de $\mu_t < +\infty$ tel que

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \mu_t. \tag{2.33}$$

Nous montrons dans ce qui suit que $(\dot{u}_n)$ est bornée dans $L^2(I, H)$. En effet, pour tout $t \in I$, on pose $a(t) := K\big(1 + \dot{\beta}(t) + \dot{\eta}(t)\big)$, qui est une fonction dans $L^2(I, \mathbb{R})$ car $\dot{\beta}$ et $\dot{\eta}$ le sont. Par la relation (2.32), on a pour chaque $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \frac{1}{t_{i+1}^n - t_i^n} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} a(\tau)\, d\tau + K_2,$$

où $K_2 := 2M_f\big(1 + K + \gamma\big)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient que

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{t_{i+1}^n - t_i^n}} \left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (a(\tau))^2\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + K_2.$$

Compte tenu de cette dernière relation, et du fait que pour tous réels positifs x, y on a $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_n\|_{L^2}^2 &= \int_0^T \|\dot{u}_n(t)\|^2\, dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{u}_n(t)\|^2\, dt \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{t_{i+1}^n - t_i^n}} \left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (a(\tau))^2\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \right)^2 dt \\
&\leq 2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left(\frac{1}{t_{i+1}^n - t_i^n} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (a(\tau))^2\, d\tau + K_2^2 \right) dt \\
&= 2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (a(\tau))^2\, d\tau + 2K_2^2 T \\
&= 2 \int_0^T (a(\tau))^2\, d\tau + 2K_2^2 T = 2\|a\|_{L^2}^2 + 2K_2^2 T =: K_3 < +\infty.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

La suite $(\dot{u}_n)$ est donc bornée dans $L^2(I, H)$. Or la même manière, nous allons montrer que la suite (v_n) est uniformément bornée en norme et en variation. Par l'hypothèse (H_g) et les relations (2.3) et (2.24) pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned}
\|v_n(t) - v_i^n\| &= \left\| \frac{b(t) - b(t_i^n)}{k_{i+1}^n} \left(v_{i+1}^n - v_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds \right) - \int_{t_i^n}^{t} g(s, u_i^n, v_i^n) ds \right\| \\
&\leq \frac{b(t) - b(t_i^n)}{k_{i+1}^n} \left\| v_{i+1}^n - v_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds \right\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|g(s, u_i^n, v_i^n)\| ds \\
&\leq \|v_{i+1}^n - v_i^n\| + 2 \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|g(s, u_i^n, v_i^n)\| ds \\
&\leq \|v_{i+1}^n - v_i^n\| + 2M_g\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big)\delta_{i+1}^n,
\end{aligned}$$

par les relations (2.21) et (2.22), nous avons

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - v_i^n\| &\leq \|v_{i+1}^n - v_i^n\| + 2M_g\big(1 + \gamma + K\big)k_{i+1}^n \\ &\leq \big(\gamma + 2M_g\big(1 + \gamma + K\big)\big)k_{i+1}^n =: \widetilde{\gamma}k_{i+1}^n, \end{aligned} \tag{2.35}$$

d'où, par (2.3) pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\|v_n(t)\| \leq \|v_i^n\| + \widetilde{\gamma}\varepsilon_n \leq \gamma + \widetilde{\gamma}b(T).$$

et donc

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|v_n\|_{\mathcal{C}} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{t\in I}\|v_n(t)\|\right) \leq \gamma + \widetilde{\gamma}b(T)),$$

et

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} Var(v_n) &\leq \gamma\sum_{i=0}^{n-1}k_{i+1}^n = \gamma\sum_{i=0}^{n-1}\big(\delta_{i+1}^n + \beta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n\big) \\ &= \gamma\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\big(t_{i+1}^n - t_i^n\big) + \big(\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)\big) + \big(\eta(t_{i+1}^n) - \eta(t_i^n)\big)\Big) \\ &= \gamma\big(t_n^n + \beta(t_n^n) + \eta(t_n^n)\big) \\ &= \gamma b(T). \end{aligned} \tag{2.36}$$

D'autre part, en utilisant les relations (2.3), (2.22), (2.35) et en suivant les mêmes calculs de la preuve de la relation (2.31), on trouve pour $n \geq 1$ et $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|v_n(t) - v_n(s)\| \leq \gamma\big(b(t) - b(s)\big) + \big(\gamma + 2\widetilde{\gamma}\big)\varepsilon_n. \tag{2.37}$$

Maintenant, par les relations (2.21), (2.22) et (2.26), pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\begin{aligned} \|\dot{v}_n(t)\| &\leq \frac{\dot{b}(t)}{k_{i+1}^n}\Big\|v_{i+1}^n - v_i^n\Big\| + \big(\dot{b}(t) + 1\big)M_g\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) \\ &\leq \gamma\dot{b}(t) + \big(\dot{b}(t) + 1\big)M_g\big(1 + K + \gamma\big) =: m(t), \end{aligned} \tag{2.38}$$

d'où,

$$\|\dot{v}_n\|_{L^2} \leq \|m\|_{L^2}, \tag{2.39}$$

c'est à dire, la suite $(\dot{v}_n)$ est bornée dans $L^2(I, H)$.
Considérons, alors les fonctions étagées $\theta_n, \varphi_n : I \longrightarrow I$ définie par

$$\begin{cases} \theta_n(t) = t_{i+1}^n, \quad \varphi_n(t) = t_i^n, \quad \text{si } t \in]t_i^n, t_{i+1}^n] \\ \theta_n(0) = \varphi_n(0) = 0, \qquad\qquad . \end{cases}$$

et observons que pour chaque $t \in I$, il existe $i \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$. Par conséquent

$$\left|\theta_n(t) - t\right| \leq \left|t_{i+1}^n - t_i^n\right| \leq \varepsilon_n \to 0 \;\text{ et }\; \left|\varphi_n(t) - t\right| \to 0 \;\text{ lorsque } n \to +\infty, \tag{2.40}$$

et grâce à la continuité des fonctions β et η, il est clair que

$$\left|b(\theta_n(t)) - b(t)\right| \to 0 \;\text{ et }\; \left|b(\varphi_n(t)) - b(t)\right| \to 0 \;\text{ lorsque } n \to +\infty. \tag{2.41}$$

Posons pour $n \geq 1$, $f_n(t) = f(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t)))$, et $g_n(t) = g(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t)))$, pour tout $t \in I$. Alors, par les relations (2.7), (2.9), (2.27) et (2.28), et le fait que $u_n(t_i^n) = u_i^n$ et $v_n(t_i^n) = v_i^n$ on peut écrire

$$-\dot{u}_n(t) \in A\left(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\right) u_n(\theta_n(t)) + f_n(t) \quad \text{p.p. } t \in I, \tag{2.42}$$

$$-\dot{v}_n(t) \in N_{C(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t)))}(v_n(\theta_n(t))) + g_n(t) \quad \text{p.p. } t \in I, \tag{2.43}$$

$$v_n(\theta_n(t)) \in C\left(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t))\right) \;\forall t \in I, \tag{2.44}$$

$$u_n(\theta_n(t)) \in D\left(A(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t)))\right) \;\forall t \in I. \tag{2.45}$$

***Etape 4.* Convergence des suites $\left(u_n\right)_n$, $\left(\dot{u}_n\right)_n$ et $\left(v_n\right)_n$, $\left(\dot{v}_n\right)_n$.**
En premier lieu, montrons que (u_n) converge uniformément sur I.
On commence par montrer que pour tout $t \in I$, l'ensemble $\left\{u_n(t) : n \geq 1\right\}$ est relativement compact. En effet, d'après les relations (2.21), (2.22) et (2.45) nous avons pour tout $t \in I$,

$$\left(u_n(\theta_n(t))\right)_n \subset D\left(A(I \times \gamma \overline{B}_H)\right) \cap K\overline{B}_H.$$

Cet ensemble est, par l'hypothèse (H_A^3), relativement compact et on conclut alors que la suite $(u_n(\theta_n(t)))_n$ est relativement compacte. Mais, par (2.31) et (2.41) nous avons pour tout $t \in I$

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| \longrightarrow 0 \;\text{ et } \|u_n(\varphi_n(t)) - u_n(t)\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \; n \longrightarrow \infty.$$

Il en découle que, pour tout $t \in I$, l'ensemble $\left\{u_n(t) : n \geq 1\right\}$ est relativement compact dans H. D'autre part, la suite $(u_n)_n$ est équi-continue car nous avons pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_n(s)\| &\leq \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\| d\tau \leq \left(\int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} (t-s)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\dot{u}_n\|_{L^2} (t-s)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Par le Théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 1.4.8), on conclut que la suite $(u_n)_n$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, H)$. Donc, on peut extraire une sous-suite, notée aussi $(u_n)_n$, qui converge uniformément et fortement vers une certaine application continue u, i.e.,

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{C}} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

De plus, pour tout $t \in I$, nous avons

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \leq \|u_n(t) - u(t)\| + \|u_n(t) - u_n(\theta_n(t))\|.$$

Alors,

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty, \tag{2.47}$$

et de même

$$\|u_n(\varphi_n(t)) - u(t)\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty. \tag{2.48}$$

Maintenant, on montre que la sous-suite $(\dot{u}_n)$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^2(I, H)$. Grâce à (2.34), la suite $(\dot{u}_n)$ est bornée dans $L^2(I, H)$. Utilisant le Théorème 1.4.5, on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement dans $L^2(I, H)$ vers une application $y \in L^2(I, H)$, i.e, pour tout $z \in L^2(I, H)$,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle z, \dot{u}_n \rangle = \langle z, y \rangle \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T \langle z(\tau), \dot{u}_n(\tau) \rangle d\tau = \int_0^T \langle z(\tau), y(\tau) \rangle d\tau.$$

Par conséquent, en appliquant le Théorème 1.7.6, pour tout $t \in]0, T]$ et $\zeta \in H$ on a

$$\begin{aligned}
\langle \zeta, u(t) - u(0) \rangle &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle \zeta, u_n(t) - u_n(0) \rangle = \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle \zeta, \int_0^t \dot{u}_n(\tau) d\tau \rangle \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^T \langle \zeta\, 1_{]0,t[}(\tau), \dot{u}_n(\tau) \rangle d\tau \\
&= \int_0^T \langle \zeta\, 1_{]0,t[}(\tau), y(\tau) \rangle d\tau \\
&= \int_0^t \langle \zeta(\tau), y(\tau) \rangle d\tau \\
&= \langle \zeta, \int_0^t y(\tau) d\tau \rangle
\end{aligned}$$

c'est à dire, pour $t \in I$, $u(t) - u(0) = \int_0^t y(\tau) d\tau$. Par conséquent u est absolument continue et $\dot{u} = y$ p.p. sur I (voir Théorème 1.1.4) et alors, $(\dot{u}_n)$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^2(I, H)$.

En second lieu, montrons que (v_n) converge uniformément sur I.

D'abord, nous allons montrer que pour tout $t \in I$, l'ensemble $\{v_n(t), n \geq 1\}$ est relativement compact. Par les relations (2.21), (2.22) et (2.44), nous avons pour tout $t \in I$,

$$(v_n(\theta_n(t)))_n \subset C(I \times K\overline{B}_H) \cap \gamma \overline{B}_H.$$

Par conséquent, grâce à l'hypothèse (H_C^3), la suite $(v_n(\theta_n(t)))_n$ est relativement compacte. Mais, de (2.37) et (2.41), on a pour tout $t \in I$,

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| \longrightarrow 0 \text{ et } \|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \quad n \longrightarrow \infty, \tag{2.49}$$

alors, on conclut que, pour tout $t \in I$, $\{v_n(t) : n \geq 1\}$ est aussi relativement compact dans H. Comme, par (2.38), la suite $(v_n)_n$ est équi-continue, car nous avons pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - v_n(s)\| &\leq \int_s^t \|\dot{v}_n(\tau)\| d\tau \leq \Big(\int_s^t \|\dot{v}_n(\tau)\|^2 d\tau \Big)^{\frac{1}{2}} (t-s)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\dot{v}_n\|_{L^2} (t-s)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On obtient grâce au Théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 1.4.8) que $(v_n)_n$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, H)$ et on peut en extraire une sous-suite, notée similairement, qui converge uniformément et fortement vers une application continue v, i.e.,

$$\|v_n - v\|_{\mathcal{C}} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

et pour tout $t \in I$,

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| \leq \|v_n(t) - v(t)\| + \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.50}$$

et de même

$$\|v_n(\varphi_n(t)) - v(t)\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \quad n \longrightarrow \infty. \tag{2.51}$$

D'autre part, grâce à la relation (2.39), la suite des dérvées $(\dot{v}_n)$ est bornée dans $L^2(I, H)$. En utilisant des arguments similaires à ceux de la preuve de la convergence faible d'une sous-suite de $(\dot{u}_n)$ vers $\dot{u}$, on conclut que v est absolument continue et que $(\dot{v}_n)$ converge faiblement dans $L^2(I, H)$ vers $\dot{v}$.

Enfin, par les hypothèses (H_f), (H_g) on sait que pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot, \cdot)$ et $g(t, \cdot, \cdot)$ sont continues. Utilisant les relations (2.48) et (2.51), on obtient pour tout $t \in I$,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} f(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t))) = f(t, u(t), v(t)), \tag{2.52}$$

et

$$\lim_{n \to \infty} g_n(t) = \lim_{n \to \infty} g(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t))) = g(t, u(t), v(t)), \tag{2.53}$$

et d'après l'hypothèse (H_f) et (H_g), une deuxième fois et les relations (2.21) et (2.22), on a

$$\|f_n(t)\| \leq M_f\big(1 + \|u_n(\varphi_n(t))\| + \|v_n(\varphi_n(t))\|\big) \leq M_f\big(1 + K + \gamma\big), \tag{2.54}$$

$$\|g_n(t)\| \leq M_g\big(1 + \|u_n(\varphi_n(t))\| + \|v_n(\varphi_n(t))\|\big) \leq M_g\big(1 + K + \gamma\big). \tag{2.55}$$

Par conséquent, pour chaque n, f_n (resp. g_n) est bornée dans $L^2(I, H)$, on conclut l'existence d'une sous-suite de $(f_n)_n$ (resp. $(g_n)_n$) qui converge fortement vers $f(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$ (resp. $g(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$) dans $L^2(I, H)$, ceci grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.5.1) dans $L^2(I, H)$.

***Etape 5.* Existence de solution.**

On va montrer dans cette dernière étape que le couple (u, v) est une solution de notre problème (P_1).

Premièrement, on montre que $u(t) \in D(A(t, v(t)))$ pour tout $t \in I$. Soit $t \in I$ fixé. Grâce à la relation (2.45), nous avons que $u_n(\theta_n(t)) \in D\left(A(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\right)$. D'autre part, par l'hypothèse (H_A^1) et les relations (2.1), (2.3) et (2.50), pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} dis\big(A(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))), A(t, v(t))\big) &\leq |\beta(\theta_n(t)) - \beta(t)| + \lambda\|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| \\ &\leq \varepsilon_n + \lambda\|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{2.56}$$

lorsque $n \to +\infty$, et par (H_A^2), (2.21) et (2.22), on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|A^0\big(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\big)u_n(\theta_n(t)\big)\| &\leq c\big(1 + \|v_n(\theta_n(t))\| + \|u_n(\theta_n(t))\|\big) \\ &\leq c(1 + K + \gamma). \end{aligned}$$

La suite $(y_n) := \big(A^0(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t)))u_n(\theta_n(t))\big)$ est donc bornée dans H et elle est faiblement relativement compacte (Théorème 1.4.4) dans H. Par extraction d'une sous-suite, on peut supposer qu'elle converge faiblement vers une application y. Remarquons aussi que vu que $y_n \in A(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t)))u_n(\theta_n(t)$, on peut appliquer le Lemme 1.8.20 à la suite $(x_n)_n = (u_n(\theta_n(t)))$, qui converge dans H vers $u(t)$, et à une sous-suite de (y_n) pour conclure que $u(t) \in D(A(t, v(t)))\ \ \forall t \in I$.

Ensuite on montre que $d\,(v(t), C(t, u(t))) = 0\ \ \forall t \in I$. Par l'hypothèse (H_C^2) et les relations (2.3), (2.44), (2.48) et (2.50), pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} & d\,(v(t), C(t, u(t))) \\ \leq\ & \|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| + d\,(v_n(\theta_n(t)), C(t, u(t))) = \|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| \\ +\ & \left|d\,(v_n(\theta_n(t)), C(t, u(t))) - d\left(v_n(\theta_n(t)), C\big(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t))\big)\right)\right| \\ \leq\ & \|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| + |\eta(\theta_n(t)) - \eta(t)| + \alpha\|u_n(\varphi_n(t)) - u(t)\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $n \to +\infty$. Ce qui prouve que $v(t) \in C(t, u(t))$ pour tout $t \in I$ puisque $C(t, u(t))$ est fermé.

Nous allons montrer dans ce qui suit que (u, v) vérifie les inclusions dans (P_1) presque par tout.

Comme la suite $(\dot{u}_n + f_n)$ converge faiblement vers $\big(\dot{u} + f(\cdot, u(\cdot), v(\cdot)\big)$ dans $L^2(I, H)$, par le Théorème de Mazur, (Théorème 1.4.6), il existe une suite (z_j) tel que pour chaque $j \in \mathbb{N}, z_j \in co\big\{\dot{u}_k + f_k, \quad k \geq j\big\}$ et (z_j) converge fortement vers $\dot{u} + f(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$ dans $L^2(I, H)$. On peut alors extraire de (z_j) une sous-suite qui converge presque partout vers $\dot{u} + f(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$, i.e., il existe un sous-ensemble N_0 de I de mesure de Lebesgue nulle et une sous-suite (j_p) de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in I \setminus N_0$, $(z_{j_p}(t))$ converge vers $\dot{u}(t) + f(t, u(t), v(t))$ lorsque $p \longrightarrow \infty$, de sorte que, pour $t \in I \setminus N_0$, $\dot{u}(t) + f(t, u(t), v(t))$ est un point d'adhérence de $(z_{j_p}(t))$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) + f(t, u(t), v(t)) &\in \overline{(z_{j_p}(t))_{p\in\mathbb{N}}} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{(z_{j_p}(t))} \\
&\subset \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{co\big\{\dot{u}_k(t) + f_k(t), k \geq j_p\big\}} \\
&= \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{co}\big\{\dot{u}_k(t) + f_k(t), k \geq j_p\big\},
\end{aligned}$$

ce qui implique que, pour $t \in I \setminus N_0$ et pour chaque $\zeta \in H$, par le Théorème 1.2.10,

$$\begin{aligned}
\big\langle \zeta, \dot{u}(t) + f(t, u(t), v(t)) \big\rangle &\leq \delta^*\big(\zeta, \{\dot{u}_k(t) + f_k(t), k \geq j_p\}\big) \quad \forall p \in \mathbb{N} \\
&= \sup_{k\geq j_p} \big\langle \zeta, \dot{u}_k(t) + f_k(t) \big\rangle \qquad \forall p \in \mathbb{N} \\
&\leq \inf_{p\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq j_p} \big\langle \zeta, \dot{u}_k(t) + f_k(t) \big\rangle
\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\big\langle \zeta, \dot{u}(t) + f(t, u(t), v(t)) \big\rangle \leq \limsup_{p\to\infty} \big\langle \zeta, \dot{u}_p(t) + f_p(t) \big\rangle. \tag{2.57}$$

Comme pour tout $t \in I, u(t) \in D\left(A(t, v(t))\right)$, pour montrer que $\dot{u}(t) + f(t, u(t), v(t)) \in -A\left(t, v(t)\right) u(t)$ p.p, il suffit d'applique le Lemme 1.8.19, et de montrer que pour tout $\xi \in D\left(A(t, v(t))\right)$

$$\big\langle \dot{u}(t) + f(t, u(t), v(t)), u(t) - \xi \big\rangle \leq \big\langle A^0(t, v(t))\xi, \xi - u(t) \big\rangle, \quad p.p. \ t \in I.$$

Pour cela, en utilisant l'hypothèse (H_A^2), on peut appliquer le Lemme 1.8.22 aux opérateurs maximaux monotones $A\left(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\right)$ et $A\left(t, v(t)\right)$, qui vérifient la relation (2.56), pour assurer l'existence d'une suite (ξ_n) tel que

$$\xi_n \in D\big(A(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\big),$$

$$\xi_n \longrightarrow \xi \quad \text{et} \quad A^0\left(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\right)\xi_n \longrightarrow A^0\left(t, v(t)\right)\xi. \tag{2.58}$$

Pour $n \geq 1$, désignons par $I \setminus N_n$ l'ensemble sur lequel la relation (2.42) est satisfaite. Comme $-\dot{u}_n(t) - f_n(t) \in A\left(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t)) u_n(\theta_n(t)\right), \forall t \in I \setminus N_n$ et $A^0\left(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\right)\xi_n \in A\left(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\right)\xi_n, \forall t \in I$ et comme pour chaque $(t,x) \in I \times H$, $A(t,x)$ est monotone, on obtient pour $t \in I \setminus N_n$,

$$\big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\theta_n(t)) - \xi_n \big\rangle \leq \big\langle A^0\left(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\right)\xi_n, \xi_n - u_n(\theta_n(t)) \big\rangle. \tag{2.59}$$

D'où, par les relations (2.33), (2.59) et l'hypothèse (H_f) ainsi que (2.21) et (2.22), on obtient pour tout $t \in I \setminus \Big(\underset{n \geq 0}{\cup} N_n \cup N' \Big)$,

$$\begin{aligned}
\big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u(t) - \xi \big\rangle &= \big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\theta_n(t)) - \xi_n \big\rangle \\
&+ \big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), (u(t) - u_n(\theta_n(t))) - (\xi - \xi_n) \big\rangle \\
&\leq \big\langle A^0\big(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\big)\xi_n, \xi_n - u_n(\theta_n(t)) \big\rangle \\
&+ \big(\mu_t + M_f(1 + K + \gamma)\big)\big(\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| + \|\xi_n - \xi\|\big).
\end{aligned}$$

Ainsi, les relations (2.47) et (2.58) impliquent que

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u(t) - \xi \big\rangle \leq \big\langle A^0(t, v(t))\xi, \xi - u(t) \big\rangle,$$

et grâce à (2.57), nous déduisons que

$$\big\langle \dot{u}(t) + f(t, u(t), v(t)), u(t) - \xi \big\rangle \leq \big\langle A^0(t, v(t))\xi, \xi - u(t) \big\rangle.$$

Par conséquent

$$\dot{u}(t) + f(t, u(t), v(t)) \in -A\left(t, v(t)\right)u(t) \ \text{ p.p } \ t \in I.$$

Maintenant, nous allons montrer que $-\dot{v}(t) - g(t, u(t), v(t)) \in N_{C(t,u(t))}(v(t))$ *p.p.* $t \in I$. Par (2.38) et (2.55), nous avons pour presque tout $t \in I$,

$$\|\dot{v}_n(t) + g_n(t)\| \leq \|\dot{v}_n(t)\| + \|g_n(t)\| \leq m(t) + M_g\big(1 + K + \gamma\big) =: \widetilde{m}(t).$$

Donc, en utilisant (2.43) et la propriété (i) de Proposition 1.9.33, on a pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
-\dot{v}_n(t) - g_n(t) &\in N_{C\left(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t))\right)}(v_n(\theta_n(t))) \bigcap \widetilde{m}(t)\overline{B}_H \\
&= \widetilde{m}(t)\partial d_{C(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t)))}(v_n(\theta_n(t))).
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Comme la suite $\big(\dot{v}_n + g_n\big)$ converge faiblement vers $\dot{v} + g(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$ dans $L^2(I, H)$. Par le Théorème de Banach Mazur (Théorème 1.4.6), il existe une suite (w_j) tel que pour chaque $j \in \mathbb{N}, w_j \in co\big\{\dot{v}_k + g_k, k \geq j\big\}$ et (w_j) converge fortement vers $\dot{v} + g(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$ dans $L^2(I, H)$. Donc, on peut extraire une sous-suite de (w_j) qui converge presque partout vers $\dot{v} + g(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$, c'est à dire, il existe un sous-ensemble N'' de I de mesure de Lebesgue nulle et une sous-suite (j_q) de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in I \setminus N''$, $(w_{j_q}(t))$ converge vers $\dot{v}(t) + g(t, u(t), v(t))$, c'est à dire $\dot{v}(t) + g(t, u(t), v(t))$ est un point d'adhérence de $(w_{j_q}(t))$, alors

$$\begin{aligned}
\dot{v}(t) + g(t, u(t), v(t)) &\in \overline{(w_{j_q}(t))_{q\in\mathbb{N}}} = \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \overline{(w_{j_q}(t))} \\
&= \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \overline{\big\{\dot{v}_k(t) + g_k(t),\ k \geq j_q\big\}} \\
&\subset \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \overline{co\big\{\dot{v}_k(t) + g_k(t),\ k \geq j_q\big\}} \\
&= \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \overline{co}\big\{\dot{v}_k(t) + g_k(t),\ k \geq j_q\big\}.
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in I \setminus N''$ et tout $y \in H$, le Théorème 1.2.10 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\big\langle y, \dot{v}(t) + g(t, u(t), v(t))\big\rangle &\leq \sup_{k\geq j_q}\big\langle y, \dot{v}_k(t) + g_k(t)\big\rangle, \forall q \in \mathbb{N} \\
&\leq \inf_q \sup_{k\geq j_q}\big\langle y, \dot{v}_k(t) + g_k(t)\big\rangle
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\big\langle y, \dot{v}(t) + g(t, u(t), v(t))\big\rangle \leq \limsup_{q\longrightarrow\infty}\big\langle y, \dot{v}_q(t) + g_q(t)\big\rangle. \tag{2.61}$$

Par conséquent, d'après les relations (2.60), (2.61), on aura

$$\big\langle y, \dot{v}(t) + g(t, u(t), v(t))\big\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*\big(y, -\widetilde{m}(t)\partial d_{C(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t)))}(v_n(\theta_n(t)))\big). \tag{2.62}$$

Par la propriété (ii) de Proposition 1.9.34, et en prenant en compte les relations (2.40), (2.48), (2.50) et (2.62) on obtient

$$\big\langle y, \dot{v}(t) + g(t, u(t), v(t))\big\rangle \leq \delta^*\big(y, -\widetilde{m}(t)\partial d_{C(t,u(t))}(v(t))\big).$$

Comme la multi-application $t \mapsto \widetilde{m}(t)\partial d_{C(t,u(t))}(v(t))$ est mesurable à valeurs faiblement compactes et convexes et H est séparable, par la Proposition 1.7.7, on déduit que

$$-\dot{v}(t) - g(t, u(t), v(t)) \in \widetilde{m}(t)\partial d_{C(t,u(t))}(v(t)) \subset N_{C(t,u(t))}(v(t)) \quad p.p.\ t \in I$$

car $v(t) \in C(t, u(t))$, pour tout $t \in I$. Alors,

$$-\dot{v}(t) - g(t, u(t), v(t)) \in N_{C(t,u(t))}(v(t)) \quad p.p.\ t \in I.$$

Par conséquent, (u, v) est une solution de notre problème (P_1), et par (2.31) et (2.37) cette solution satisfait les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}(t)\| &= \left\| \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{u_n(t) - u_n(s)}{t-s} \right\| \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{K(b(t) - b(s)) + (K + 2\widehat{\gamma})\varepsilon_n}{t-s} \right) \\
&= K \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{b(t) - b(s)}{t-s} + \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(K + 2\widehat{\gamma})}{t-s}\varepsilon_n \\
&= K\dot{b}(t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}(t)\| &= \left\| \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{v_n(t) - v(s)}{t-s} \right\| \leq \gamma \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{b(t) - b(s)}{t-s} + \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(\gamma + 2\widehat{\beta})}{t-s}\varepsilon_n \\
&= K\dot{b}(t).
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du théorème. ■

Une inspection de la preuve du Théorème 2.2.1, fournit un résultat qui concerne l'existence de solutions à une variante du problème (P_1), qui est la suivante

$$(P_2) \begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t), v(t)) & \text{p.p.}\ t \in I, \\ -\dot{v}(t) \in N_{C(t,u(t))}(v(t)) & \text{p.p.}\ t \in I, \\ v(t) \in C(t, u(t)) & \forall\, t \in I, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0. \end{cases}$$

Ce résultat d'existence conduit à plusieurs applications, comme des problèmes de minimisation soumis aux systèmes d'évolution de la forme (P_2).
Nous soulignons que ce résultat n'est pas une conséquence directe du Théorème 2.2.1. En effet, si dans (P_1), $A(t, x)y = \{0\}$, pour tout $y \in H$, il est clair que $D(A(t, x)) = H$, qui n'est pas boule-compact. L'hypothèse (H_A^3) n'est alors pas satisfaite. Pour surmonter le manque de compacité et obtenir la convergence de la suite approximante (u_n), on supposera une hypothèse de Lipschitz sur f, ce qui nous permettra de prouver que (u_n) est une suite de Cauchy.

Théorème 2.2.2.
Soit $C : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides satisfaisant (H_C^1), (H_C^2) et (H_C^3). Soit $f : I \times H \times H \longrightarrow H$ satisfaisant la condition (H_f). Supposons aussi que pour

chaque $\rho > 0$, il existe une fonction réelle positive $L_\rho \in L^1(I, \mathbb{R})$ tel que pour tout $t \in I$ et pour tous $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \overline{B}_H(0, \rho)$,

$$\|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})\| \leq L_\rho(t)\big(\|x - \overline{x}\| + \|y - \bar{y}\|\big). \tag{2.63}$$

Alors, pour chaque $(u_0, v_0) \in H \times C(0, u_0)$, il existe une solution absolument continue $(u, v) : I \longrightarrow H \times H$ du problème (P_2). De plus,

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \widetilde{M} \;\; et \;\; \|\dot{v}(t)\| \leq \gamma\big(1 + \dot{\eta}(t)\big) \quad p.p.\, t \in I,$$

où γ, $\widetilde{M}$ sont des constantes reélles positives.

Preuve.
Pour $n \geq 1$, soit $\{t_i^n : i = 0, 1, .., n\}$ une partition de l'intervalle I. Pour $i = 0, 1, ..., n-1$, on pose

$$\delta_{i+1}^n := \left|t_{i+1}^n - t_i^n\right|, \;\; \eta_{i+1}^n := \left|\eta(t_{i+1}^n) - \eta(t_i^n)\right| \tag{2.64}$$

et on suppose que $\eta(0) = 0$ et

$$\delta_i^n \leq \delta_{i+1}^n, \;\; \eta_i^n \leq \eta_{i+1}^n. \tag{2.65}$$

Comme la fonction η est absolument continue, la partition $\{t_i^n : i = 0, ..., n\}$ peut être choisie tel que pour tout $i = 0, ..., n-1$ et $n \geq 1$,

$$k_{i+1}^n := \delta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n \leq \frac{1}{n}\big(T + \eta(T)\big) =: \varepsilon_n. \tag{2.66}$$

Posons $b(t) = t + \eta(t) \;\; \forall t \in I$.

***Etape 1.* Construction des suites** $\{u_i^n : i = 1, ..., n\}$ et $\{v_i^n : i = 1, ..., n\}$.
Posons $v_0^n = v_0$, $u_0^n = u_0$, et pour $i = 0, ..., n-1$,

$$v_{i+1}^n = proj\left(v_i^n, C(t_{i+1}^n, u_i^n)\right), \tag{2.67}$$

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n) ds. \tag{2.68}$$

Alors, nous avons par la relation (2.67),

$$v_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, u_i^n) \tag{2.69}$$

et de (1.11) et (2.67), on trouve que

$$-(v_{i+1}^n - v_i^n) \in N_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}(v_{i+1}^n). \tag{2.70}$$

***Etape 2.* Estimations et propriétés des suites discrètes.**

Par l'hypothèse (H_f), et les relations (2.64), (2.66) et (2.68), on a pour tout $n \geq 1$ et $i = 0, 1, .., n-1$,

$$\begin{aligned} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \Big\| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n) ds \Big\| \\ &\leq \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, u_i^n, v_i^n)\| ds \leq M_f \big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) \big(t_{i+1}^n - t_i^n\big) \\ &= M_f \big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) \delta_{i+1}^n \\ &\leq M_f \big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) k_{i+1}^n. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Par conséquent

$$\|u_{i+1}^n\| \leq \|u_i^n\| + M_f \big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) k_{i+1}^n. \tag{2.72}$$

En itérant cette dernière inégalité, et en utilisant le fait que par (2.66) $k_{i+1}^n \leq \varepsilon_n$, on obtient

$$\|u_{i+1}^n\| \leq \|u_0\| + (i+1) M_f \varepsilon_n + M_f \varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big). \tag{2.73}$$

Comme $(i+1) \leq n$, par la relation (2.66), $(i+1)\varepsilon_n \leq n\varepsilon_n = b(T)$ on obtient

$$\|u_{i+1}^n\| \leq \|u_0\| + M_f b(T) + M_f \varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big). \tag{2.74}$$

De même, tenant en compte l'hypothèse (H_C^2), et les relations (2.64), (2.66), (2.67), (2.69) et (2.71), on a

$$\begin{aligned} \|v_{i+1}^n - v_i^n\| &= d\left(v_i^n, C(t_{i+1}^n, u_i^n)\right) \\ &= \left| d\left(v_i^n, C(t_{i+1}^n, u_i^n)\right) - d\left(v_i^n, C(t_i^n, u_{i-1}^n)\right) \right| \\ &\leq |\eta(t_{i+1}^n) - \eta(t_i^n)| + \alpha \|u_i^n - u_{i-1}^n\| \\ &= \eta_{i+1}^n + \alpha \|u_i^n - u_{i-1}^n\| \leq k_{i+1}^n + \alpha \|u_i^n - u_{i-1}^n\| \\ &\leq \big(1 + \alpha M_f \big(1 + \|u_{i-1}^n\| + \|v_{i-1}^n\|\big)\big) k_{i+1}^n, \end{aligned} \tag{2.75}$$

et donc,

$$\|v_{i+1}^n\| \leq \|v_i^n\| + \big(1 + \alpha M_f (1 + \|u_{i-1}^n\| + \|v_{i-1}^n\|)\big) k_{i+1}^n. \tag{2.76}$$

De maniére similaire, en itérant cette dernière inégalité, et en supposant que $u_{-1}^n = u_0$ et $v_{-1}^n = v_0$, on obtient

$$\|v_{i+1}^n\| \leq \|v_0\| + (i+1)(1 + \alpha M_f) \varepsilon_n + \alpha M_f \varepsilon_n \sum_{j=-1}^{i-1} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big). \tag{2.77}$$

Comme $(i+1) \leq n$, par la relation (2.66), $(i+1)\varepsilon_n \leq n\varepsilon_n = b(T)$ on obtient

$$\|v_{i+1}^n\| \leq \|v_0\| + (1+\alpha M_f)b(T) + \alpha M_f \varepsilon_n \sum_{j=-1}^{i-1} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big). \tag{2.78}$$

En additionnant les relations (2.74) et (2.78), on a

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\| &\leq \big(\|u_0\| + \|v_0\|\big) + \big(1 + M_f + \alpha M_f\big)b(T) \\
&+ \alpha M_f\big(\|u_0| + \|v_0\|\big) + \max(\alpha M_f, M_f)\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big) \\
&=: k_1 + k_2\varepsilon_n \sum_{j=0}^{i} \big(\|u_j^n\| + \|v_j^n\|\big).
\end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 1.10.1, on obtient, pour $i = 0, 1, 2, .., n-1$,

$$\|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\| \leq k_1 \exp\big(k_2 \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_n\big) \leq k_1 \exp\big(k_2 b(T)\big) =: K_1,$$

si bien que, pour $n \geq 1$ et $i = 1, 2, .., n$,

$$\|u_i^n\| \leq K_1 \quad \text{et} \quad \|v_i^n\| \leq K_1.$$

Remplaçant dans (2.71) et (2.75), on trouve

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq M_f(1+K_1)k_{i+1}^n \ \text{ et } \ \|v_{i+1}^n - v_i^n\| \leq \big(1 + \alpha M_f(1+K_1)\big)k_{i+1}^n.$$

Posons $K := \max\big\{K_1, M_f(1+K_1)\big\}$ et $\gamma := \max\big\{K_1, (1+\alpha M_f(1+K_1))\big\}$, on conclut que pour $0 \leq i \leq n$ (resp. $0 \leq i \leq n-1$)

$$\|u_i^n\| \leq K \quad (\text{resp. } \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K k_{i+1}^n). \tag{2.79}$$

et

$$\|v_i^n\| \leq \gamma \quad (\text{resp. } \|v_{i+1}^n - v_i^n\| \leq \gamma k_{i+1}^n). \tag{2.80}$$

***Etape 3.* Construction des applications étagées $\big(u_n\big)_n$ et $\big(v_n\big)_n$.**
Pour chaque $n \geq 1$, on définit les applications $u_n, v_n : I \longrightarrow H$ comme suit :
pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[, 0 \leq i \leq n-1$,

$$u_n(t) = u_i^n + \int_{t_i^n}^{t} f(s, u_i^n, v_i^n)ds, \quad u_n(T) = u_n^n, \tag{2.81}$$

et

$$v_n(t) = v_i^n + \frac{b(t) - b(t_i^n)}{k_{i+1}^n}\big(v_{i+1}^n - v_i^n\big), \quad v_n(T) = v_n^n. \tag{2.82}$$

Il est clair que les applications u_n et v_n sont absolument continues avec $u_n(t_i^n) = u_i^n, v_n(t_i^n) = v_i^n$, et pour $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$\dot{u}_n(t) = f(t, u_i^n, v_i^n), \tag{2.83}$$

et

$$\dot{v}_n(t) = \frac{\dot{b}(t)}{k_{i+1}^n}\big(v_{i+1}^n - v_i^n\big). \tag{2.84}$$

Alors, de (2.70) et (2.84), nous avons

$$-\dot{v}_n(t) \in N_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}\big(v_{i+1}^n\big). \tag{2.85}$$

De plus, par l'hypothèse (H_f) et les relations (2.66), (2.79), (2.80) et (2.81), pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, on a l'estimation

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_i^n\| &= \Big\| \int_{t_i^n}^t f(s, u_i^n, v_i^n) ds \Big\| \le \int_{t_i^n}^t \|f(s, u_i^n, v_i^n)\| ds \\
&\le M_f\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big)\delta_{i+1}^n \\
&\le M_f\big(1 + K + \gamma\big)\varepsilon_n,
\end{aligned}$$

et donc, en répètant les mêmes calculs dans la preuve du Théorème 2.2.1 et en se référant à cette dernière inégalité et (2.79) on a, pour $n \ge 1$ et $0 \le s \le t \le T$,

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \le K\big(b(t) - b(s)\big) + \big(K + 2M_f(1 + K + \gamma)\big)\varepsilon_n. \tag{2.86}$$

De maniére similaire, pour $n \ge 1$ et $0 \le s \le t \le T$,

$$\|v_n(t) - v_n(s)\| \le \gamma\big(b(t) - b(s)\big) + 3\gamma\varepsilon_n. \tag{2.87}$$

D'autre part, la relation (2.83) et l'hypothèse (H_f) impliquent

$$\|\dot{u}_n(t)\| = \|f(t, u_i^n, v_i^n)\| \le M_f\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big)$$

et grâce à (2.79) et (2.80)

$$\|\dot{u}_n(t)\| \le M_f\big(1 + K + \gamma\big).$$

De plus, les relations (2.84) et (2.80) donnent

$$\|\dot{v}_n(t)\| = \Big\| \frac{\dot{b}(t)}{k_{i+1}^n}\big(v_{i+1}^n - v_i^n\big) \Big\| \le \dot{b}(t)\gamma.$$

Donc, les suites $(\dot{u}_n)$ et $(\dot{v}_n)$ sont bornées dans $L^2(I,H)$.

Finalement, en prenant en compte la définition des applications étagées θ_n et φ_n, nos relations (2.69), (2.83) et (2.85) s'écrivent comme suit :

$$\dot{u}_n(t) = f\left(t, u_n(\varphi_n(t), v_n(\varphi_n(t))\right) \text{ p.p. } t \in I, \tag{2.88}$$

$$-\dot{v}_n(t) \in N_{C(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t)))}(v_n(\theta_n(t))) \text{ p.p. } t \in I, \tag{2.89}$$

$$v_n(\theta_n(t)) \in C\left(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t))\right) \ \forall t \in I. \tag{2.90}$$

***Etape 4.* Convergence des suites** $\big(u_n\big)_n, \big(v_n\big)_n$ et $\big(\dot{u}_n\big)_n, \big(\dot{v}_n\big)_n$.
Dans cette étape, on va montrer la convergence uniforme des suites (u_n) et (v_n) et la convergence faible dans $L^2(I,H)$ des suites $(\dot{u}_n)$ et $(\dot{v}_n)$. Concernant la convergence uniforme de (v_n) vers une application absolument continue v et la convergence faible dans $L^2(I,H)$ d'une sous-suite de $(\dot{v}_n)$ vers $\dot{v}$, il suffit de reprendre la même preuve du Théorème 2.2.1.

Maintenant, on montre que (u_n) converge uniformément vers u sur I. On pose pour chaque $t \in I$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = f\big(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t))\big)$. Se référant aux relations (2.79) et (2.80), en posant $\rho := \max\big\{K, \gamma\big\}$, on a pour $n, m \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in I$, en utilisant (2.63), que

$$\begin{aligned}
\|f_n(t) - f_m(t)\| &\leq L_\rho(t)\big(\|u_n(\varphi_n(t)) - u_m(\varphi_m(t))\| + \|v_n(\varphi_n(t)) - v_m(\varphi_m(t))\|\big) \\
&\leq L_\rho(t)\big(\|u_n(\varphi_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_m(t)\| + \|u_m(t) - u_m(\varphi_m(t))\|\big) \\
&+ L_\rho(t)\|v_n(\varphi_n(t)) - v_m(\varphi_m(t))\|.
\end{aligned}$$

D'où, pour $n, m \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in I$, on a par (2.83)

$$\begin{aligned}
\big\langle u_n(t) - u_m(t), \dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t)\big\rangle &\leq \|u_n(t) - u_m(t)\|\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_m(t)\| \\
&= \|u_n(t) - u_m(t)\|\|f_n(t) - f_m(t)\| \\
&\leq L_\rho(t)\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 + \Delta_{n,m}(t),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\Delta_{n,m}(t) &:= L_\rho(t)\|u_n(t) - u_m(t)\|\Big(\|u_n(\varphi_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_m(t) - u_m(\varphi_m(t))\| \\
&+ \|v_n(\varphi_n(t)) - v_m(\varphi_m(t))\|\Big).
\end{aligned}$$

Il est clair que, $\Delta_{n,m} \in L^1(I, \mathbb{R})$, et par la relation (2.86) et la convergence uniforme de la suite (v_n), nous avons $\Delta_{n,m}(t) \to 0$ lorsque $n, m \to \infty$, pour tout $t \in I$. Par conséquent, en utilisant le fait que $u_n(0) = u_m(0) = u_0$, on obtient pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_n(s) - u_m(s)\|^2 ds \\
&= \int_0^t \langle u_n(s) - u_m(s), \dot{u}_n(s) - \dot{u}_m(s)\rangle ds \\
&\leq \int_0^t L_\rho(s)\|u_n(s) - u_m(s)\|^2 ds + \int_0^t \Delta_{n,m}(s) ds.
\end{aligned}$$

Par le Lemme de Gronwall (Lemme 1.10.3), on a

$$\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 \leq \left(2\int_0^T \Delta_{n,m}(s)ds\right) \exp\left(2\int_0^T L_\rho(s)ds\right),$$

en utilisant le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue Théorème 1.5.1 sur $\Delta_{n,m}$, on conclut que (u_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(I, H)$, et donc, elle converge uniformément et fortement vers une application $u \in \mathcal{C}(I, H)$. D'autre part, on sait que la suite $(\dot{u}_n) = (f_n)$ est bornée dans $L^2(I, H)$, par le Théorème 1.4.5, il existe une sous-suite qui converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^2(I, H)$. De plus, par la relation (2.63), et la convergence uniforme des suites (u_n) et (v_n) vers u et v respectivement, nous avons pour presque tout $t \in I$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} f\big(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t))\big) = f(t, u(t), v(t)),$$

de sorte que, par le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.5.1), on obtient la convergence de (f_n) vers $f(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$ dans $L^2(I, H)$, et alors, $\dot{u}(t) = f(t, u(t), v(t))$ pour presque tout $t \in I$.

Reste à prouver que $v(t) \in C(t, u(t))$ pour tout $t \in I$, et $-\dot{v}(t) \in N_{C(t,u(t))}(v(t))$ p.p $t \in I$. Pour ça, on répète la même preuve du Théorème 2.2.1.

Enfin, comme $\dot{u}(t) = f(t, u(t), v(t))$ p.p, alors $\|\dot{u}(t)\| \leq M_f(1 + K + \gamma) =: \widetilde{M}$ p.p et par (2.87), $\|\dot{v}(t)\| \leq \gamma(1 + \dot{\eta}(t))$ p.p. Ceci termine la preuve. ∎

2.3 Application à un Problème de minimisation

Avant d'aller plus loin, on note que dans les résultats obtenus ci-dessus (cf Théorème 2.2.1 et Théorème 2.2.2) on a établi non seulement l'existence d'un couple de solutions absolument continues, mais aussi les estimations de leurs vitesses, nous permettant plusieurs applications tel que les problèmes de minimisation, et de contrôle optimal, dans la veine de [1, 19, 21], dans un nouveau cadre. Pour plus de simplicité, on ne traite qu'un seul exemple, mais nos techniques permettent d'obtenir plusieurs variantes. Pour notre objectif, on commence par énoncer un résultat qu'on va utiliser dans notre preuve. Voir [6] pour la partie (A) et [7] pour la partie (B).

Théorème 2.3.1.

Soit pour chaque $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone vérifiant les hypothèses suivantes.
(H_1) Il existe une fonction $\beta \in W^{1,2}(I, \mathbb{R})$ positive sur I et croissante, avec $\beta(0) = 0$, tel que

$$dis(A(t), A(s)) \leq |\beta(t) - \beta(s)| \; \forall t, s \in I.$$

(H_2) Il existe une constante réelle positive c, tel que

$$\|A^0(t, x)\| \leq c(1 + \|x\|) \;\; pour \;\; t \in I, \;\; x \in D(A(t)).$$

(A) Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$ le problème

$$(P) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) \text{ p.p. } t \in I \\ u(t) \in D(A(t)) \; \forall t \in I \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

admet une solution unique absolument continue u vérifiant

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t)) \;\; p.p. \; t \in I, \tag{2.91}$$

pour une certaine constante K positive dépendant de $\|u_0\|$, c, T et β.
(B) Supposons en outre que
(H_3) $t \mapsto J_\lambda(t)(x) = \big(I_H + \lambda A(t)\big)^{-1} x$ est mesurable pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $x \in H$.
Alors, l'opérateur de composition $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset L^2(I, H) \rightrightarrows L^2(I, H)$ défini par

$$\mathcal{A}u = \Big\{ v \in L^2(I, H) : \;\; v(t) \in A(t, u(t)) \, p.p. \; t \in I \Big\}$$

pour chaque $u \in D(\mathcal{A})$ où

$$D(\mathcal{A}) := \Big\{ u \in L^2(I, H) : \; \exists \, y \in L^2(I, H), (u(t), y(t)) \in Gr(A(t)), \; p.p. \, t \in I \Big\}$$

est maximal monotone. Par conséquent, le graphe de $\mathcal{A}$ est fortement faiblement séquentiellement fermé dans $L^2(I, H) \times L^2(I, H)$. (Voir la propriété (i) de la Proposition 1.8.8).

Maintenant, nous sommes en mesure de donner une application du Théorème 2.2.1 à un problème de minimisation. On note ici que, l'opérateur maximal monotone dans le système ne dépend que du temps.

Proposition 2.3.2.

Soit pour tout $t \in I$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone vérifiant les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) du Théorème 2.3.1. Supposons aussi que pour tout $t \in I$, $D(A(t))$ est boule-compact.
Soit $C : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides vérifiant les hypothèses (H_C^1), (H_C^2) et (H_C^3). Soient $f : I \times H \times H \longrightarrow H$ satisfaisant (H_f), $(u_0, v_0) \in D(A(0)) \times C(0, u_0)$ et soit $L : I \times H \times H \longrightarrow [0, \infty[$ une application semi-continue inférieurement tel que $L(t, x, \cdot)$ est convexe sur H pour tout $(t, x) \in I \times H$. Alors le problème de minimisation de la fonction coût $\int_0^T L(t, u(t), \dot{v}(t))dt$ soumis au problème

$$(P_3) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) & p.p.\, t \in I \\ u(t) \in D(A(t)) & \forall\, t \in I \\ -\dot{v}(t) \in N_{C(t,u(t))}(v(t)) + f(t, u(t), v(t)) & p.p.\, t \in I \\ v(t) \in C(t, u(t)) & \forall\, t \in I \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \end{cases}$$

admet une solution optimale.

Preuve.
Soit

$$\mathcal{X} := \Big\{ (u, v) : (u, v) \text{ solution absolument continue de } \ (P_3) \Big\}$$

Posons

$$m := \inf_{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{X}} \int_0^T L(t, \tilde{u}(t), \dot{\tilde{v}}(t))dt.$$

Par la caractérisation de la borne inférierure on a
$\forall n > 0, \exists (u_n, v_n) \in \mathcal{X}$ tel que

$$\begin{aligned} m \quad &\le \quad \int_0^T L(t, u_n(t), \dot{v_n}(t))dt < m + \frac{1}{n} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^T L(t, u_n(t), \dot{v_n}(t))dt = m \end{aligned}$$

i.e., (u_n, v_n) est une suite minimisante. Par le preuve du Théorème 2.2.1, (u_n), (v_n) satisfont les estimations suivantes $\|\dot{u}_n(t)\| \le \gamma(t)$ p.p. et $\|\dot{v}_n(t)\| \le \eta(t)$ p.p., pour certaines

fonctions réelles non négatives $\gamma, \eta \in L^2(I, \mathbb{R})$. et on a
(i) $u_n \to u \in W^{1,2}(I, H)$ uniformément.
(ii) $\dot{u}_n \to \dot{u}$ pour la topologie $\sigma(L^2(I, H), L^2(I, H))$.
(iii) $v_n \to v \in W^{1,2}(I, H)$ uniformément.
(iv) $\dot{v}_n \to \dot{v}$ pour la topologie $\sigma(L^2(I, H), L^2(I, H))$.
En effet, montrons dans un premier lien les relations (i) et (ii).
On a $\|\dot{u}_n(t)\| \le \gamma(t)$ p.p., par suite

$$\|u_n(t) - u_0\| = \left\| \int_0^t \dot{u}_n(s) ds \right\| \le \int_0^t \|\dot{u}_n(s)\| ds \le \int_0^t \gamma(s) ds \le \|\gamma(\cdot)\|_{L^1(I, \mathbb{R})},$$

par conséquent,

$$\|u_n(t)\| \le \|\gamma(\cdot)\|_{L^1(I, \mathbb{R})} + \|u_0\| = \widetilde{\gamma}, \quad \forall t \in I.$$

Donc, $(u_n(t))_n \subset \widetilde{\gamma}\overline{B}_H$. D'autre part, on sait que pour tout $t \in I$, $D(A(t))$ est boule-compact, et la suite $(u_n(t))_n \subset D(A(t)) \cap \widetilde{\gamma}\overline{B}_H$, alors $(u_n(t))_n$ est relativement compacte, i.e., l'ensemble $\{u_n(t) : n \ge 1\}$ est relativement compact dans H. De plus, la suite $(u_n)_n$ est équi-continue car pour tous $0 \le s \le t \le T$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_n(s)\| &\le \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\| d\tau \le \left(\int_s^t |\gamma(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} (t-s)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|\gamma\|_{L^2(I, \mathbb{R})} (t-s)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par le Théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 1.4.8), on conclut que la suite $(u_n)_n$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I, H)$. Alors, on peut extraire une sous-suite, notée aussi $(u_n)_n$ qui converge uniformémement et fortement vers une certaine application continue u, i.e.,

$$\|u_n(t) - u(t)\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty, \quad \forall t \in I. \tag{2.92}$$

Aussi on a,

$$\|\dot{u}_n\|_{L^2(I, H)} \le \|\gamma\|_{L^2(I, \mathbb{R})},$$

alors, la suite $(\dot{u}_n)_n$ est bornée dans $L^2(I, H)$, utilisant le Théorème 1.4.5, on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement dans $L^2(I, H)$ vers une application $y \in L^2(I, H)$, i.e, pour tout $z \in L^2(I, H)$, $\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle z, \dot{u}_n \rangle = \langle z, y \rangle$, ceci s'écrit

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^T \langle z(\tau), \dot{u}_n(\tau) \rangle d\tau = \int_0^T \langle z(\tau), y(\tau) \rangle d\tau.$$

Par conséquent, en appliquant le Théorème 1.7.6, pour tout $t \in]0,T]$ et $\zeta \in H$ on a

$$\begin{aligned}\big\langle \zeta, u(t)-u(0)\big\rangle &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\big\langle \zeta, u_n(t)-u_n(0)\big\rangle = \lim_{n\longrightarrow\infty}\big\langle \zeta, \int_0^t \dot{u}_n(\tau)d\tau\big\rangle \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^T \big\langle \zeta\, 1_{]0,t[}(\tau), \dot{u}_n(\tau)\big\rangle d\tau \\ &= \int_0^T \big\langle \zeta\, 1_{]0,t[}(\tau), y(\tau)\big\rangle d\tau = \big\langle \zeta, \int_0^t y(\tau)d\tau\big\rangle,\end{aligned}$$

c'est à dire, pour $t \in I$, $u(t)-u(0) = \displaystyle\int_0^t y(\tau)d\tau$. Par conséquent, u est absolument continue et $\dot{u} = y$ p.p. sur I (voir Théorème 1.1.4) et alors, $(\dot{u}_n)$ converge faiblement vers $\dot{u}$ dans $L^2(I,H)$.

• Montrons maintenant (iii) et (iv).

On a $\|\dot{v}_n(t)\| \le \eta(t)$ p.p., par suite

$$\|v_n(t)-v_0\| \le \int_0^t \eta(s)ds \le \|\eta(\cdot)\|_{L^1(I,\mathbb{R})},$$

par conséquent,

$$\|v_n(t)\| \le \|\eta(\cdot)\|_{L^1(I,\mathbb{R})} + \|v_0\| = \widetilde{\eta},$$

donc, $(v_n(t))_n \subset \widetilde{\eta}\overline{B}_H$, et comme pour tout $t \in I, v_n(t) \in C(t, u_n(t))$, donc, en obtient que pour tout $t \in I$,

$$(v_n(t))_n \subset C(I \times \widetilde{\gamma}\overline{B}_H) \cap \widetilde{\eta}\overline{B}_H,$$

alors, par l'hypothèse (H_C^3), la suite $(v_n(t))_n$ est relativement compacte, i.e., pour tout $t \in I$, l'ensemble $\{v_n(t) : n \ge 1\}$ est relativement compact dans H. D'autre part, la suite $(v_n)_n$ est équi-continue car pour tous $0 \le s \le t \le T$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|v_n(t)-v_n(s)\| &\le \int_s^t \|\dot{v}_n(\tau)\|d\tau \le \Big(\int_s^t |\eta(\tau)|^2 d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|\eta\|_{L^2(I,\mathbb{R})}(t-s)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Par le Théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 1.4.8), la suite $(v_n)_n$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(I,H)$. Donc, on peut extraire une sous-suite, notée aussi $(v_n)_n$ qui converge uniformémement et fortement vers une certaine application continue v, i.e.,

$$\|v_n(t)-v(t)\| \longrightarrow 0 \ \text{ lorsque } \ n \longrightarrow \infty \ \ \forall t \in I. \tag{2.93}$$

Aussi, on a $\|\dot{v}_n(t)\| \le \eta(t)$ p.p., d'où,

$$\|\dot{v}_n\|_{L^2(I,H)} \le \|\eta\|_{L^2(I,\mathbb{R})},$$

c'est à dire, la suite $(\dot{v}_n)_n$ est bornée dans $L^2(I,H)$, par les mêmes étapes précédentes, on obtient que v est absolument continue et que $(\dot{v}_n)$ converge faiblement vers $\dot{v}$ dans $L^2(I,H)$.
Maintenant, on applique la semi-continuité inférieure de la fonction intégrable L (voir Théorème 8.1.6 dans [24]) pour obtenir

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^T L(t,u_n(t),\dot{v}_n(t))dt \geq \int_0^T L(t,u(t),\dot{v}(t))dt.$$

Donc, on conclut que

$$m = \inf_{(\tilde{u},\tilde{v})\in\mathcal{X}}\int_0^T L(t,\tilde{u}(t),\dot{\tilde{v}}(t))dt = \int_0^T L(t,u(t),\dot{v}(t))dt.$$

Reste à vérifier que (u,v) est solution de (P_3), i.e., $-\dot{u}(t)\in A(t)u(t)$ p.p. et $-\dot{v}(t)\in N_{C(t,u(t))}(v(t))+f(t,u(t),v(t))$ p.p. Comme $-\dot{u}_n(t)\in A(t)u_n(t)$ p.p. et $u_n(t)\in D(A(t)),\forall t\in I$ alors $-\dot{u}_n\in\mathcal{A}u_n$. Par le Théorème 2.3.1, en utilisant les propriétés (i) et (ii), on déduit que $-\dot{u}\in\mathcal{A}u$, et par la définition de l'opérateur $\mathcal{A}$, on conclut que $u(t)\in D(A(t))\;\;\forall t\in I$ et $-\dot{u}(t)\in A(t)u(t)$ p.p.
D'autre part, des convergences (i) et (ii) ci-dessus, nous avons $v(t)\in C(t,u(t))$ pour tout $t\in I$. En effet, par l'hypothèse (H_C^2), comme $v_n(t)\in C(t,u_n(t)),\forall t\in I$, alors par les relations (2.92) et (2.93), pour tout $t\in I$,

$$\begin{aligned}
& d\left(v(t),C(t,u(t))\right)\\
\leq\;& \|v_n(t)-v(t)\|+d\left(v_n(t),C(t,u(t))\right)=\|v_n(t)-v(t)\|\\
+\;& \left|d\left(v_n(t),C(t,u(t))\right)-d\left(v_n(t),C\big(t,u_n(t)\big)\right)\right|\\
\leq\;& \|v_n(t)-v(t)\|+|\eta(t)-\eta(t)|+\alpha\|u_n(t)-u(t)\|\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

lorsque $n\to+\infty$. Ce qui prouve que $v(t)\in C(t,u(t))$ pour tout $t\in I$. Aussi par l'hypothèse (H_f) on a

$$\begin{aligned}
\|f_n(t)\| = \|f(t,u_n(t),v_n(t))\| &\leq M_f\big(1+\|u_n(t)\|+\|v_n(t))\|\big)\\
&\leq M_f\big(1+\widetilde{\gamma}+\widetilde{\eta}\big) := \widetilde{K},
\end{aligned}$$

donc, (f_n) est bornée dans $L^2(I,H)$, grâce au Théorème 1.4.5, il existe une sous-suite $(f_n)_n$ qui converge faiblement vers $\xi\in L^2(I,H)$, c'est à dire, pour tout $z\in L^2(I,H)$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^T\langle z(\tau),f_n(\tau)\rangle d\tau = \int_0^T\langle z(\tau),\xi(\tau)\rangle d\tau$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle z(\tau), \xi(\tau)\rangle d\tau &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^T \langle z(\tau), f_n(\tau)\rangle d\tau \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^T \langle z(\tau), f(\tau, u_n(\tau), v_n(\tau))\rangle d\tau \\ &= \int_0^T \langle z(\tau), f(\tau, u(\tau), v(\tau))\rangle d\tau\end{aligned}$$

c'est à dire la suite (f_n) converge faiblement vers $f(\cdot, u(\cdot), v(\cdot)) \in L^2(I, H)$.
Donc, $\dot{v}_n + f(\cdot, u_n(\cdot), v_n(\cdot)) \to \dot{v} + f(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$ par rapport à la topologie $\sigma(L^2(I, H), L^2(I, H))$, avec

$$-\dot{v}_n(t) - f(t, u_n(t), v_n(t))) \in N_{C(t,u_n(t))}(v_n(t)) \text{ p.p.} \tag{2.94}$$

Mais, nous avons pour tout n et pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}\|\dot{v}_n(t) + f(t, u_n(t), v_n(t))\| &\leq \|\dot{v}_n(t)\| + \|f(t, u_n(t), v_n(t))\| \\ &\leq \|\eta(t)\| + \widetilde{K} := z(t),\end{aligned}$$

pour la fonction non négative $z \in L^2(I, \mathbb{R})$, c'est à dire

$$\dot{v}_n(t) + f(t, u_n(t), v_n(t)) \in z(t)\overline{B}_H. \tag{2.95}$$

De (2.94) et (2.95) on a

$$-\dot{v}_n(t) - f(t, u_n(t), v_n(t)) \in z(t)\overline{B}_H \bigcap N_{C(t,u_n(t))}(v_n(t)).$$

Par la propriété (i) de la Proposition 1.9.33, on obtient pour presque tout $t \in I$,

$$-\dot{v}_n(t) - f(t, u_n(t), v_n(t)) \in z(t)\partial d_{C(t,u_n(t))}(v_n(t)).$$

Selon la propriété de semi-continuité supérieure de l'opérateur sous-différentiel $\partial d_{C(\cdot,\cdot)}(\cdot)$ (voir (ii) de la Proposition 1.9.34), on déduit que pour presque tout $t \in I$,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \delta^*(\xi, z(t)\partial d_{C(t,u_n(t))}(v_n(t))) \leq \delta^*(\xi, z(t)\partial d_{C(t,u(t))}(v(t))).$$

Comme la multi-application $\partial d_{C(\cdot,\cdot)}(\cdot)$ est à valeurs convexes et faiblement compactes et H est séparable, on conclut par la Proposition 1.7.7 que

$$-\dot{v}(t) - f(t, u(t), v(t)) \in z(t)\partial d_{C(t,u(t))}(v(t)) \subset N_{C(t,u(t))}(v(t)) \ \ p.p.$$

i.e.,

$$-\dot{v}(t) - f(t, u(t), v(t)) \in N_{C(t,u(t))}(v(t)) \ \ p.p.$$

Ceci montre que (u, v) est une solution optimale pour le problème de minimisation considéré. ■

Chapitre 3

Existence de solutions absolument continues pour un système de deux inclusions différentielles l'une gouvernée par un opérateur maximal monotone et l'autre par le cône normal, avec perturbations multivoques

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va généraliser le résultat du chapitre 2 obtenu dans le Théorème 2.2.1, dans deux directions, on va considérer des perturbations multivoques et la classe des ensembles sous-lisses qui contient strictement celle des ensembles convexes. En effet, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solution absolument continue du système différentiel suivant

$$(S_1)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t,v(t))u(t) + F(t,u(t),v(t)) & \text{p.p. } t \in I \\ u(t) \in D(A(t,v(t))) & \forall t \in I \\ -\dot{v}(t) \in N_{C(t,u(t))}(v(t)) + G(t,u(t),v(t)) & \text{p.p. } t \in I \\ v(t) \in C(t,u(t)) & \forall\, t \in I \\ u(0) = u_0 \in D(A(0,v_0)), v(0) = v_0 \in C(0,u_0), \end{cases}$$

où pour chaque $(t,x) \in I \times \mathrm{H}, A(t,x) : D(A(t,x)) \subset \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ est un opérateur maximal monotone, $\{C(t,x) : \ (t,x) \in I \times \mathrm{H}\}$ est une famille équi-uniformément sous-lisse d' ensembles fermés, $N_{C(t,x)}(\cdot)$ le cône normal de Fréchet à $C(t,x)$, et $F, G : I \times \mathrm{H} \times \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ deux multi-applications à valeurs non vides, convexes fermées.

3.2 Résultat Prnicipal

Nous commençons par formuler les hypothèses nécessaires à l'établissement de notre résultat principal.

(H_A^1) Il existe une constante réelle positive λ et une fonction $\beta \in \mathcal{W}^{1,2}(I,\mathbb{R})$ positive et croissante sur I, tel que

$$dis\,(A(t,x), A(s,y)) \leq |\beta(t) - \beta(s)| + \lambda\|x-y\| \quad \forall t,s \in I, \forall x,y \in \mathrm{H}.$$

(H_A^2) Il existe une constante réelle positive c, tel que

$$\|A^0(t,x)y\| \leq c(1 + \|x\| + \|y\|) \text{ pour } (t,x) \in I \times \mathrm{H} \quad \text{et} \quad y \in D\,(A(t,x)).$$

(H_A^3) Pour chaque sous-ensemble borné $B \subset \mathrm{H}$, l'ensemble $D\,(A(I \times B))$ est relativement boule-compact.

(H_C^1) La famille $\{C(t,x) : \ (t,x) \in I \times \mathrm{H}\}$ est équi-uniformément sous-lisse.

(H_C^2) Il existe une constante positive α, vérifiant $\alpha\lambda < 1$, et une fonction $\eta \in \mathcal{W}^{1,2}(I, \mathbb{R})$, positive et croissante sur I, tel que

$$\left| d_{C(t,x)}(z) - d_{C(s,y)}(z) \right| \leq |\eta(t) - \eta(s)| + \alpha \|x - y\| \quad \forall t, s \in I, \forall x, y, z \in \mathrm{H}.$$

(H_C^3) Pour chaque sous-ensemble borné $E \subset \mathrm{H}$, l'ensemble $C(I \times E)$ est relativement boule-compact.

(H_F^1) (resp. (H_G^1)) F (resp. G) est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$ mesurable.

(H_F^2) (resp. (H_G^2)) pour chaque $t \in I, F(t, \cdot, \cdot)$(resp.$G(t, \cdot, \cdot)$) est scalairement semi-continue supérieurement sur $H \times H$, i.e., pour tout $\xi \in H$, la fonction d'appui $\delta^*(\xi, F(t, \cdot, \cdot))$ (resp. $\delta^*(\xi, G(t, \cdot, \cdot))$) est semi-continue supérieurement sur $H \times H$.

(H_F^3) (resp. (H_G^3)) Il existe une constante positive M_F (resp. M_G) tel que

$$d(0, F(t, x, y)) \leq M_F(1 + \|x\| + \|y\|) \text{ pour } t \in I \text{ et } x, y \in \mathrm{H}.$$

(resp.

$$d(0, G(t, x, y)) \leq M_G(1 + \|x\| + \|y\|) \text{ pour } t \in I \text{ et } x, y \in \mathrm{H}.)$$

Maintenant, nous présentons le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 3.2.1.

Soit pour tout $(t, x) \in I \times \mathrm{H}, A(t, x) : D(A(t, x)) \subset \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ un opérateur maximal monotone vérifiant les hypothèses $(H_A^1), (H_A^2)$ et (H_A^3). Soit $C : I \times \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ une multi-application à valeurs non vides fermées, satisfaisant $(H_C^1), (H_C^2)$ et (H_C^3). Soit $F : I \times \mathrm{H} \times \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ (resp. $G : I \times \mathrm{H} \times \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$) une multi-application à valeurs non vides convexes et fermées satisfaisant $(H_F^1), (H_F^2)$ et (H_F^3) (resp. $(H_G^1), (H_G^2)$) et (H_G^3)). Alors, pour tout $(u_0, v_0) \in D(A(0, v_0)) \times C(0, u_0)$, il existe une solution absolument continue $(u, v) : I \longrightarrow \mathrm{H} \times \mathrm{H}$ du problème d'évolution (S_1). De plus, cette solution satisfait les estimations suivantes :

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t) + \dot{\eta}(t)) \ \text{ et } \ \|\dot{v}(t)\| \leq \gamma(1 + \dot{\beta}(t) + \dot{\eta}(t)) \quad p.p.\, t \in I,$$

où, K et γ sont des constantes réelles positives.

Preuve.

Comme dans la preuve du Théorème 2.2.1, considérons pour tout $n \geq 1$, $\{t_i^n : i = 0, 1, ..., n\}$ une partition quelconque de l'intervalle I, i.e., $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$. Pour $n \geq 1$ et $i = 0, 1, ..., n-1$, on pose

$$\delta_{i+1}^n := |t_{i+1}^n - t_i^n|, \ \ \beta_{i+1}^n := |\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)|, \ \ \eta_{i+1}^n := |\eta(t_{i+1}^n) - \eta(t_i^n)| \tag{3.1}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\beta(0) = \eta(0) = 0$. Posons $b(t) := t + \beta(t) + \eta(t)$ pour tout $t \in I$.
Comme β et η sont absolument continues, la partition $\{t_i^n : i = 0, ..., n\}$ peut être choisie de telle sorte que pour tout $i = 0, ..., n-1$ et $n \geq 1$,

$$k_{i+1}^n := \delta_{i+1}^n + \beta_{i+1}^n + \eta_{i+1}^n \leq \frac{1}{n} b(T) =: \varepsilon_n. \tag{3.2}$$

Pour chaque $(t, x, y) \in I \times H \times H$, désignons par $f(t, x, y)$ (resp. $g(t, x, y)$) l'élément de norme minimale de l'ensemble convexe fermé $F(t, x, y)$ (resp. $G(t, x, y)$) de H, i.e.,

$$f(t, x, y) = F^0(t, x, y) = proj(0, F(t, x, y))$$

$$g(t, x, y) = G^0(t, x, y) = proj(0, G(t, x, y)).$$

Pour chaque $(x, y) \in H \times H$, l'application $t \mapsto f(t, x, y)$ (resp $t \mapsto g(t, x, y)$) est $\mathcal{L}(I)$-mesurable grâce à l'hypothèse (H_F^1) (resp. (H_G^1)) et la séparabilité de H, voir Théorème 1.7.9. De plus, par les hypothèses (H_F^3), (H_G^3),

$$\|f(t, x, y)\| \leq M_F(1 + \|x\| + \|y\|) \ \ \forall (t, x, y) \in I \times H \times H, \tag{3.3}$$

$$\|g(t, x, y)\| \leq M_G(1 + \|x\| + \|y\|) \ \ \forall (t, x, y) \in I \times H \times H. \tag{3.4}$$

***Etape 1.* Construction des applications étagées $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.**
Pour tout $n \geq 1$, on définit les applications $u_n, v_n : I \longrightarrow H$ comme suit :
pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $0 \leq i \leq n-1$,

$$u_n(t) = u_i^n + \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\right) - \int_{t_i^n}^{t} f(s, u_i^n, v_i^n)ds \tag{3.5}$$

$$v_n(t) = v_i^n + \frac{b(t) - b(t_i^n)}{k_{i+1}^n}\left(v_{i+1}^n - v_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n)ds\right) - \int_{t_i^n}^{t} g(s, u_i^n, v_i^n)ds \tag{3.6}$$

et $u_n(T) = u_n^n$, $v_n(T) = v_n^n$, où $v_0^n = v_0$, $u_0^n = u_0$ et pour $i = 0, ..., n-1$,

$$v_{i+1}^n \in Proj\left(v_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n)ds,\ C(t_{i+1}^n, u_i^n)\right), \tag{3.7}$$

$$u_{i+1}^n \ = \ J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\right), \tag{3.8}$$

où,

$$J_{i+1}^n := J_{\delta_{i+1}^n}^{A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)} = \left(I_H + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\right)^{-1}.$$

Observons que la relation (3.7) est bien définie puisque les ensembles $C(t,x)$ sont relativement boule-compacts (voir Remarque 1.6.3) et clairement, pour $i = 0, ..., n-1$,

$$v_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, u_i^n). \tag{3.9}$$

D'après, les relations (1.19) et (3.7), on a

$$-\left(v_{i+1}^n - v_i^n\right) \in N_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}(v_{i+1}^n) + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds. \tag{3.10}$$

D'autre part, en utilisant la propriété (i) de la Proposition 1.8.14, nous avons de (3.8),

$$u_{i+1}^n \in D\left(A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)\right), \tag{3.11}$$

et

$$-\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\delta_{i+1}^n} \in A\big(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n\big) u_{i+1}^n + \frac{1}{\delta_{i+1}^n} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n) ds. \tag{3.12}$$

Évidemment, les applications u_n et v_n sont absolument continues, $u_n(t_i^n) = u_i^n$, $v_n(t_i^n) = v_i^n$, et pour $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\dot{u}_n(t) = \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n) ds\right) - f(t, u_i^n, v_i^n), \tag{3.13}$$

$$\dot{v}_n(t) = \frac{\dot{b}(t)}{k_{i+1}^n}\left(v_{i+1}^n - v_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} g(s, u_i^n, v_i^n) ds\right) - g(t, u_i^n, v_i^n). \tag{3.14}$$

D'après, les relations (3.12) et (3.13) on trouve, pour $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$-\dot{u}_n(t) - f(t, u_i^n, v_i^n) \in A\left(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n\right) u_{i+1}^n, \tag{3.15}$$

et des relations (3.10) et (3.14) on a

$$-\dot{v}_n(t) \in N_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}(v_{i+1}^n) + g(t, u_i^n, v_i^n). \tag{3.16}$$

***Etape 2.* Estimations et propriétés des suites** $(u_n), (v_n)$.
Sous les hypothèses (H_A^1), (H_A^2) et (H_C^2) et les relations (3.3) et (3.4) et en reppettant les mêmes calculs et arguments de la preuve de l'étape 2 du Théorème 2.2.1, il existe des

constantes réelles positives K, γ de telle sorte que, pour $n \geq 1$ et $i = 0, ..., n-1$, (resp. $0 \leq i \leq n-1$)

$$\|u_i^n\| \leq K \quad (\text{resp. } \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K k_{i+1}^n), \tag{3.17}$$

et

$$\|v_i^n\| \leq \gamma \quad (\text{resp. } \|v_{i+1}^n - v_i^n\| \leq \gamma k_{i+1}^n). \tag{3.18}$$

Des relations (3.2), (3.3), (3.5), (3.17) et (3.18), pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, nous avons les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_i^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2M_F\big(1 + K + \gamma\big)\delta_{i+1}^n \\ &\leq K k_{i+1}^n + 2M_F\big(1 + K + \gamma\big)k_{i+1}^n \\ &\leq \big(K + 2M_F(1 + K + \gamma)\big)\varepsilon_n =: \widehat{\beta}\varepsilon_n. \end{aligned} \tag{3.19}$$

D'où, pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $\|u_n(t)\| \leq K + \widehat{\beta}\varepsilon_n \leq K + \widehat{\beta}b(T)$, i.e.,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{\mathcal{C}} \leq K + \widehat{\beta}b(T),$$

et par (3.17)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \; var(u_n) = \sup_{n\geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K \sum_{i=0}^{n-1} k_{i+1}^n \leq K b(T). \tag{3.20}$$

En ce qui concerne la suite $(v_n)_n$, nous avons par les relations (3.2), (3.4), (3.6), (3.17) et (3.18), pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\|v_n(t) - v_i^n\| \leq \widehat{\gamma}\varepsilon_n,$$

et alors,

$$\|v_n(t)\| \leq \|v_i^n\| + \widehat{\gamma}\varepsilon_n \leq \gamma + \widehat{\gamma}b(T).$$

d'où,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_{\mathcal{C}} \leq \gamma + \widehat{\gamma}b(T), \tag{3.21}$$

et par (3.18)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \; Var(v_n) \leq \gamma \sum_{i=0}^{n-1} k_{i+1}^n \leq \gamma b(T). \tag{3.22}$$

Aussi par les mêmes calculs dans la preuve du Théorème 2.2.1, on a pour $n \geq 1$ et $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq K\big(b(t) - b(s)\big) + \big(K + 2\widehat{\beta}\big)\varepsilon_n. \tag{3.23}$$

et

$$\|v_n(t) - v_n(s)\| \leq \gamma\big(b(t) - b(s)\big) + \big(\gamma + 2\widehat{\gamma}\big)\varepsilon_n. \tag{3.24}$$

Maintenant, observons que par les relations (3.2), (3.3), (3.13), (3.17) et (3.18), nous avons pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_n(t)\| &\leq K\frac{k_{i+1}^n}{\delta_{i+1}^n} + 2M_F\big(1 + K + \gamma\big) = 2M_F\big(1 + K + \gamma\big) \\ &+ K\Big(1 + \frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} + \frac{\eta(t_{i+1}^n) - \eta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n}\Big). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Comme β et η sont absolument continues, en utilisant le Théorème de dérivation de Lebesgue (Théorème 1.1.10), on obtient pour presque tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta(t_{i+1}^n) - \beta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} = \dot{\beta}(t) \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{\eta(t_{i+1}^n) - \eta(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n} = \dot{\eta}(t).$$

Par conséquent, nous inférons l' existence d'un sous-ensemble négligeable $N' \subset I$, tel que pour tout $t \in I \setminus N'$, il existe $R_t < +\infty$ tel que

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq R_t. \tag{3.26}$$

Les suites $(\dot{u}_n)$ et $(\dot{v}_n)$ sont bornées dans $L^2(I, H)$, avec

$$\|\dot{u}_n\|_{L^2}^2 \leq \big(\|a\|_{L^2}^2 + Td^2\big) < +\infty, \tag{3.27}$$

et pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq \psi(t),$$

avrc $\psi \in L^2(I, H)$.

C'est à dire, il y a un sous-ensemble négligeable N'' de I tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq \psi(t) \quad \forall t \in I \setminus N'', \tag{3.28}$$

Maintenant, considérons les fonctions étagées $\theta_n, \varphi_n : I \longrightarrow I$ definies par $\theta_n(t) = t_{i+1}^n$ et $\varphi_n(t) = t_i^n$ si $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$ et $\theta_n(0) = \varphi_n(0) = 0$. Clairement,

$$|\theta_n(t) - t| \to 0 \text{ et } |\varphi_n(t) - t| \to 0 \text{ si } n \to +\infty, \tag{3.29}$$

et

$$|b(\theta_n(t)) - b(t)| \to 0 \text{ et } |b(\varphi_n(t)) - b(t)| \to 0 \ \textit{si } n \to +\infty. \tag{3.30}$$

Pour tout $t \in I$, on pose, $f_n(t) = f(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t)))$ et $g_n(t) = g(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t)))$. Par les relations (3.9), (3.11), (3.15) et (3.16), il s'en suit que, pour tout $n \geq 1$, il existe un sous-ensemble négligeable N_n de I tel que

$$-\dot{u}_n(t) \in A\left(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t))\right) u_n(\theta_n(t)) + f_n(t) \;\; \forall t \in I \setminus N_n. \tag{3.31}$$

$$u_n(\theta_n(t)) \in D\left(A(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t)))\right) \;\; \forall t \in I. \tag{3.32}$$

$$f_n(t) \in F(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t))) \;\; \forall t \in I. \tag{3.33}$$

$$-\dot{v}_n(t) \in N_{C(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t)))}(v_n(\theta_n(t))) + g_n(t) \;\; \forall t \in I \setminus N_n. \tag{3.34}$$

$$v_n(\theta_n(t)) \in C\left(\theta_n(t), u_n(\varphi_n(t))\right) \;\; \forall t \in I. \tag{3.35}$$

$$g_n(t) \in G(t, u_n(\varphi_n(t)), v_n(\varphi_n(t))) \;\; \forall t \in I. \tag{3.36}$$

***Etape 3.* Convergences des suites.**

La preuve de cette étape est similaire à celle de l'étape 4 de la preuve du Théorème 2.2.1. Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent uniformément vers des applications absolument continues u et v de plus, pour tout $t \in I$, nous avons

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \longrightarrow 0 \;\text{ lorsque }\; n \longrightarrow \infty, \tag{3.37}$$

et

$$\|u_n(\varphi_n(t)) - u(t)\| \longrightarrow 0 \;\text{ lorsque }\; n \longrightarrow \infty. \tag{3.38}$$

$$\|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| \longrightarrow 0 \;\text{ lorsque }\; n \longrightarrow \infty, \tag{3.39}$$

et de même

$$\|v_n(\varphi_n(t)) - v(t)\| \longrightarrow 0 \;\text{ lorsque }\; n \longrightarrow \infty. \tag{3.40}$$

Maintenant, des relations (3.27) et (3.28), on sait que les suites $(\dot{u}_n)$ et $(\dot{v}_n)$ sont bornées dans $L^2(I, H)$, donc, par extraction de sous-suites, notées de la même manière, on peut supposer qu'elles convergent faiblement dans $L^2(I, H)$ vers $\dot{u}$ et $\dot{v}$, respectivement.

***Etape 4.* Existence de solution.**

Notons pour tout $t \in I$ fixé, et chaque $n \geq 1$, $A_n := A(\theta_n(t), v_n(\theta_n(t)))$, $A := A(t, v(t))$,

$x_n := u_n(\theta_n(t)) \longrightarrow u(t)$ et $y_n := A_n^0(x_n)$. Nous avons par l'hypothèse (H_A^1) et les relations (3.1), (3.2) et (3.39),

$$dis\big(A_n, A\big) \leq |\beta(\theta_n(t)) - \beta(t)| + \lambda\|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.41}$$

$$\|A_n^0 x_n\| \leq c(1 + \|x_n\|). \tag{3.42}$$

Par les mêmes arguments de la preuve de l'étape 5 du Théorème 2.2.1, on trouve $u(t) \in D(A(t, v(t))$ et de même $v(t) \in C(t, u(t))\ \ \forall t \in I$.

Maintenant, remarquons que nous avons pour chaque $n \geq 1$, en utilisant les relations (3.3), (3.4), (3.17) et (3.18),

$$\begin{aligned}\|f_n(t)\| &\leq M_F\big(1 + \|u_n(\varphi_n(t))\| + \|v_n(\varphi_n(t))\|\big)\\ &\leq M_F\big(1 + K + \gamma\big)\end{aligned} \tag{3.43}$$

et

$$\|g_n(t)\| \leq M_G\big(1 + K + \gamma\big), \tag{3.44}$$

Donc, on peut supposer (prendre des sous-suites si nécessaire) que (f_n) (resp. (g_n)) converge faiblement dans $L^2(I, H)$ vers une certaine application $\widetilde{f}$ (resp. $\widetilde{g}$).
Par suite, comme la suite $(\dot{u}_n + f_n)$ (resp. (f_n)) converge faiblement dans $L^2(I, H)$ vers $\dot{u} + \widetilde{f}$ (resp. vers $\widetilde{f}$), par le Théorème de Mazur (Théorème 1.4.6), il existe une suite (z_j) (resp. $\big(\overline{z}_j)\big)$ tel que pour chaque $j \in \mathbb{N}$, $z_j \in co\big\{\dot{u}_k + f_k, k \geq j\big\}$ (resp. $\overline{z}_j \in co\big\{f_k, k \geq j\big\}$ et (z_j) (resp. $(\overline{z}_j)$) converge fortement dans $L^2(I, H)$ vers $\dot{u} + \widetilde{f}$ (resp. vers $\widetilde{f}$). Par conséquent, il existe un sous-ensemble I_0 (resp. I_1) de I, de mesure de Lebesgue nulle et une sous-suite (j_p) (resp. $(j_{\bar{p}})$) de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in I \setminus I_0$ (resp. $t \in I \setminus I_1$) $\big(z_{j_p}(t)\big)$ (resp. $\big(\overline{z}_{j_{\bar{p}}}(t)\big)$) converge vers $\dot{u}(t) + \widetilde{f}(t)$ (resp. vers $\widetilde{f}(t)$). D'où, pour $t \in I \setminus I_0$ (resp. $t \in I \setminus I_1$)

$$\dot{u}(t) + \widetilde{f}(t) \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{co}\big\{\dot{u}_k(t) + f_k(t), k \geq j_p\big\},$$

(resp.

$$\widetilde{f}(t) \in \bigcap_{\bar{p}\in\mathbb{N}} \overline{co}\big\{f_k(t), k \geq j_{\bar{p}}\big\},)$$

c'est à dire, pour $t \in I \setminus I_0$ (resp. $t \in I \setminus I_1$) et pour chaque $\zeta \in H$

$$\big\langle \zeta, \dot{u}(t) + \widetilde{f}(t)\big\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \big\langle \zeta, \dot{u}_n(t) + f_n(t)\big\rangle. \tag{3.45}$$

(resp.

$$\big\langle \zeta, \widetilde{f}(t)\big\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \big\langle \zeta, f_n(t)\big\rangle.) \tag{3.46}$$

En répétant les mêmes arguments sur la suite $(\dot{v}_n + g_n)$ (resp. (g_n)), on déduit l'existence d'un sous-ensemble I'_0 (resp. I'_1) de I, de mesure de Lebesgue nulle tel que pour $t \in I \setminus I'_0$ (resp. $t \in I \setminus I'_1$) et pour tout $\zeta \in H$

$$\big\langle \zeta, \dot{v}(t) + \widetilde{g}(t) \big\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \big\langle \zeta, \dot{v}_n(t) + g_n(t) \big\rangle \tag{3.47}$$

(resp.

$$\big\langle \zeta, \widetilde{g}(t) \big\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \big\langle \zeta, g_n(t) \big\rangle.) \tag{3.48}$$

On termine cette étape par montrer que u et v satisfont le système (S_1).
En utilisant (H_A^2), on peut appliquer le Lemme 1.8.22, aux opérateurs maximaux monotones A_n et A, qui vérifient (3.41) et (3.42) pour assurer, pour tout $\xi \in D(A)$, l'existence d'une suite (ξ_n) tel que

$$\xi_n \in D\left(A_n\right), \quad \xi_n \longrightarrow \xi \quad \text{et} \quad A_n^0(\xi_n) \longrightarrow A^0(\xi). \tag{3.49}$$

Puisque pour chaque $(t,x) \in I \times H$, $A(t,x)$ est monotone, par la relation (3.31), on a pour $t \in I \setminus N_n, \forall n \geq 1$

$$\big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\theta_n(t)) - \xi_n \big\rangle \leq \big\langle A_n^0(\xi_n), \xi_n - u_n(\theta_n(t)) \big\rangle. \tag{3.50}$$

D'où, par les relations (3.26), (3.50) et (3.43), on obtient pour tout $t \in I \setminus \Big(\bigcup\limits_{n\geq 1} N_n \bigcup N' \bigcup I_0 \Big)$,

$$\begin{aligned}
\big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u(t) - \xi \big\rangle &= \big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\theta_n(t)) - \xi_n \big\rangle \\
&+ \big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), (u(t) - u_n(\theta_n(t))) - (\xi - \xi_n) \big\rangle \\
&\leq \big\langle A_n^0(\xi_n), \xi_n - u_n(\theta_n(t)) \big\rangle \\
&+ \big(R_t + M_F(1 + K + \gamma)\big)\big(\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| + \|\xi_n - \xi\|\big).
\end{aligned}$$

Les relations (3.37) et (3.49) donnent

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \big\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u(t) - \xi \big\rangle \leq \big\langle A^0(\xi), \xi - u(t) \big\rangle,$$

ce qui implique, par (3.45),

$$\big\langle \dot{u}(t) + \widetilde{f}(t), u(t) - \xi \big\rangle \leq \big\langle A^0(\xi), \xi - u(t) \big\rangle.$$

Comme pour tout $t \in I$, $u(t) \in D\left(A(t, v(t))\right)$, par Lemme 1.8.19, on conclut que

$$-\dot{u}(t) - \widetilde{f}(t) \in A\left(t, v(t)\right) u(t) \ \ p.p.\, t \in I.$$

Maintenant, de (3.28) et (3.44), on a pour presque tout $t \in I$,

$$\big(\dot{v}_n(t) - g_n(t)\big) \subset \bar{\psi}(t)\overline{B}_H, \tag{3.51}$$

où

$$\bar{\psi}(t) := \psi(t) + M_G\big(1 + K + \gamma\big).$$

Alors, par les relations (1.12), (3.34) et (3.51), on a pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned} -\dot{v}_n(t) - g_n(t) &\in N_{C(\theta_n(t),u_n(\varphi_n(t)))}\big(v_n(\theta_n(t))\big)\bigcap \bar{\psi}(t)\overline{B}_H \\ &= \bar{\psi}(t)\partial d_{C(\theta_n(t),u_n(\varphi_n(t)))}(v_n(\theta_n(t))). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Fixons $t \in I \setminus \Big((\bigcup_{n\geq 1} N_n) \bigcup N' \bigcup I_0 \Big)$ et $\zeta \in H$, cette dernière relation et la relation (3.47) nous donnent, par l'utilisation de la propriété (ii) de la Proposition 1.9.39, en prenant en compte les relations (3.29), (3.38) et (3.39),

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \dot{v}(t) + \widetilde{g}(t)\rangle &\leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*\big(\zeta, -\bar{\psi}(t)\partial d_{C(\theta_n(t),u_n(\varphi_n(t)))}(v_n(\theta_n(t)))\big) \\ &\leq \delta^*\big(\zeta, -\bar{\psi}(t)\partial d_{C(t,u(t))}(v(t))\big) \end{aligned}$$

Comme $-\bar{\psi}(t)\partial d_{C(t,u(t))}(v(t))$ est un ensemble fermé convexe, on déduit par le Théorème 1.2.10, que

$$-\dot{v}(t) - \widetilde{g}(t) \in \bar{\psi}(t)\partial d_{C(t,u(t))}(v(t)) \subset N_{C(t,u(t))}(v(t)).$$

Il reste à vérifier que pour presque tout $t \in I$, $\widetilde{f}(t) \in F(t, u(t), v(t))$ (resp. $\widetilde{g}(t) \in G(t, u(t), v(t))$). Par (3.33) et (3.46) on a, par l'utilisation de l'hypothèse (H_F^2),

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \widetilde{f}(t)\rangle &\leq \limsup_{n\to\infty} \delta^*\big(\zeta, F(t, u_n(\theta_n(t)), v_n(\theta_n(t)))\big) \\ &\leq \delta^*\big(\zeta, F(t, u(t), v(t))\big). \end{aligned}$$

Comme F est a valeurs fermées et convexes, en appliquant le Théorème 1.2.10, on conclut que $\widetilde{f}(t) \in F(t, u(t), v(t))$ p.p. $t \in I$. En utilisant des arguments similaires, on obtient aussi $\widetilde{g}(t) \in G(t, u(t), v(t))$ $\forall t \in I$. Par conséquent, (u, v) est une solution de (S_1). De plus, de (3.23) et (3.24) cette solution satisfait

$$\|u(t) - u(s)\| \leq K|b(t) - b(s)|, \quad \|v(t) - v(s)\| \leq \gamma|b(t) - b(s)| \;\; \forall t, s \in I,$$

Ceci complète la preuve. ∎

Dans le théorème qui suit, on va donner un autre résultat d'existence en affaiblissant les hypothèses (H_A^1) et (H_C^2) : en prenant $\beta \in \mathcal{W}^{1,1}(I, \mathbb{R})$, c'est à dire $A(\cdot, x)$ et $C(t, x)$ varient d'une manière absolument continue. Dans ce cas le prix à payer est de prendre le domaine de $A(t, x)$, $D(A(t, x))$, fixe.

Théorème 3.2.2.

Soit pour tout $(t,x) \in I \times \mathrm{H}, A(t,x) : D(A(t,x)) \subset \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ *un opérateur maximal monotone vérifiant les hypothèses* (H_A^2) *et*

$(H_A^1)'$ *Il existe une constante réelle positive* λ *et une fonction* $\beta \in \mathcal{W}^{1,1}(I,\mathbb{R})$ *positive et croissante sur* I*, tel que*

$$dis\left(A(t,x), A(s,y)\right) \leq |\beta(t) - \beta(s)| + \lambda\|x-y\| \quad \forall t,s \in I, \forall x,y \in \mathrm{H}.$$

$(H_A^3)'$ *L'ensemble* $D\left(A(t,x(t))\right) = D$ *est relativement boule-compact.*

Soit $C : I \times \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ *une multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant* $(H_C^1), (H_C^2)'$ *et* (H_C^3) *tel que*

$(H_C^2)'$ *Il existe une constante positive* α*, vérifiant* $\alpha\lambda < 1$*, et une fonction* $\eta \in \mathcal{W}^{1,1}(I,\mathbb{R})$*, positive et croissante sur* I*, tel que*

$$\left|d_{C(t,x)}(z) - d_{C(s,y)}(z)\right| \leq |\eta(t) - \eta(s)| + \alpha\|x-y\| \quad \forall t,s \in I, \forall x,y,z \in \mathrm{H}.$$

Soit $F : I \times \mathrm{H} \times \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ *(resp.* $G : I \times \mathrm{H} \times \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$*) une multi-application à valeurs non vides convexes et fermées satisfaisant* $(H_F^1), (H_F^2)$ *et* (H_F^3) *(resp.* $(H_G^1), (H_G^2)$*) et* (H_G^3) *). Alors, pour tout* $(u_0, v_0) \in D(A(0,v_0)) \times C(0,u_0)$*, il existe une solution absolument continue* $(u,v) : I \longrightarrow \mathrm{H} \times \mathrm{H}$ *du problème d'évolution* (S_1)*. De plus, cette solution satisfait les estimations suivantes :*

$$\|\dot{u}(t)\| \leq K(1 + \dot{\beta}(t) + \dot{\eta}(t)) \ \ et \ \ \|\dot{v}(t)\| \leq \gamma(1 + \dot{\beta}(t) + \dot{\eta}(t)) \quad p.p.\, t \in I,$$

où, K *et* γ *sont des constantes réelles positives.*

Preuve.

On choisit la même subdivision de I que celle dans la preuve du Théorème 3.2.1, avec les propriétés (3.1) et (3.2). Aussi les applications f et g vérifiant les mêmes propriétés et les estimations (3.3) et (3.4).

***Etape 1.* Estimations et convergences des suites** $(u_n)_n, (\dot{u}_n)_n$ et $(v_n)_n, (\dot{v}_n)_n$.
Comme dans la preuve du Théorème 3.2.1, on montre que les suites (u_n), (v_n) sont bornées en norme et en variation. En effet, par les relations (3.2), (3.3), (3.5), (3.17) et (3.18), pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, on a

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_i^n\| &\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + 2M_F\big(1 + K + \gamma\big)\delta_{i+1}^n \\
&\leq Kk_{i+1}^n + 2M_F\big(1 + K + \gamma\big)k_{i+1}^n \\
&\leq \big(K + 2M_F(1 + K + \gamma)\big)\varepsilon_n =: \widehat{\beta}\varepsilon_n. \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

D'où, pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $\|u_n(t)\| \leq K + \widehat{\beta}\varepsilon_n \leq K + \widehat{\beta}b(T)$, i.e.,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{\mathcal{C}} \leq K + \widehat{\beta}b(T),$$

et par (3.17)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \ Var(u_n) = \sup_{n\geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq K \sum_{i=0}^{n-1} k_{i+1}^n \leq Kb(T). \tag{3.54}$$

D'autre part, la suite $(v_n)_n$, nous avons par les relations (3.2), (3.4), (3.6), (3.17) et (3.18), pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$,

$$\|v_n(t) - v_i^n\| \quad \leq \quad \widehat{\gamma}\varepsilon_n,$$

et alors,

$$\|v_n(t)\| \leq \|v_i^n\| + \widehat{\gamma}\varepsilon_n \leq \gamma + \widehat{\gamma}b(T).$$

d'où,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_{\mathcal{C}} \leq \gamma + \widehat{\gamma}b(T), \tag{3.55}$$

et par (3.18)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \ Var(v_n) \leq \gamma \sum_{i=0}^{n-1} k_{i+1}^n \leq \gamma b(T). \tag{3.56}$$

Aussi, pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$ la suite $(\dot{v}_n)_n$ est bornée dans $L^1(I, H)$, i.e., il y a un sous-ensemble négligeable N'' de I tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\|\dot{v}_n(t)\| \leq \psi(t) \quad \forall t \in I \setminus N''.$$

Maintenant, on va montre que notre suite $(\dot{u}_n)$ est bornée dans $L^1(I, H)$. Par l'hypothèse (H_A^2) et les relations (3.3), (3.7), (3.13), (3.17) et (3.18), la propriété (ii) de la Proposition

1.8.14 et le fait que $u_i^n \in D(A(t_i^n, v_i^n)) = D(A(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)) = D$ on a

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_n(t)\| &= \left\| \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\right) - f(t, u_i^n, v_i^n)\right\| \\
&\leq \left\| \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\right) - J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\right)\right\| + \|f(t, u_i^n, v_i^n)\| \\
&= \left\| A_{\delta_{i+1}^n}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\right)\right\| + \|f(t, u_i^n, v_i^n)\| \\
&= \left\| A_{\delta_{i+1}^n}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\right) - A_{\delta_{i+1}^n}(u_i^n) + A_{\delta_{i+1}^n}(u_i^n)\right\| + \|f(t, u_i^n, v_i^n)\| \\
&\leq \left\| A_{\delta_{i+1}^n}\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, u_i^n, v_i^n)ds\right) - A_{\delta_{i+1}^n}(u_i^n)\right\| + \|A_{\delta_{i+1}^n}(u_i^n)\| + \|f(t, u_i^n, v_i^n)\| \\
&\leq \frac{1}{\delta_{i+1}^n}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, u_i^n, v_i^n)\|ds + \|A_{\delta_{i+1}^n}(u_i^n)\| + \|f(t, u_i^n, v_i^n)\| \\
&\leq M_F\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) + \|A^0(t_{i+1}^n, u_i^n)\| + M_F\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) \\
&\leq 2M_F\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) + c\big(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|\big) \\
&\leq 2M_F\big(1 + K + \gamma\big) + c\big(1 + K + \gamma\big) \\
&= \big(2M_F + c\big)\big(1 + K + \gamma\big) := \widehat{K}.
\end{aligned}$$

Donc, la suite $(\dot{u}_n)_n$ est bornée dans $L^\infty(I, H)$. Alors, on peut lui extraire une sous-suite notée aussi $(\dot{u}_n)_n$ qui converge faiblement vers un élément $y \in L^\infty(I, H)$. En répétant la même preuve de l'étape 4 du Théorème 3.2.1, on montre que $(\dot{u}_n)_n$ converge faiblement dans $L^\infty(I, H)$ vers $\dot{u}$.

Etape 2. **Existence de solution.**

La preuve de cette étape est similaire à celle de l'étape 4 du Théorème 3.2.1. ■

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons montré l'existence de solution absolument continue pour un système de deux inclusions différentielles, l'une gouvernée par un opérateur maximal monotone et la deuxième par le cône normal à des ensembles convexes fermés, dans un espace de Hilbert séparable. Notre premier objectif était l'étude du système avec des perturbations univoques de type Carathéodory. Nous avons aussi considéré le cas où $A(t,x)(\cdot) = \{0\}$ et nous avons donné une application à un problème de mininisation d'une fonctionnelle s.c.i. Dans une deuxième partie de ce travail, nous avons considéré le même système avec les mêmes hypothèses, mais avec des perturbations multivoques et le cône normal à des ensembles sous-lisses. Enfin, une variante du même problème était prise en considération, il s'agissait d'affaiblir les conditions supposées sur la variation de l'opérateur maximal monotone et l'ensemble dans le cône normal, en revanche en prenant des opérateurs à domaines fixes.

Dans les perspectives prôches, nous allons essayer d'étudier l'existence de solution continue à variation bornée pour ce type de système.

Bibliographie

[1] **L. Adam et J. Outrata**, *On optimal control of a sweeping process coupled with an ordinary differential equation.* Discrete Contn. Dyn. Syst. Ser. B 19 (9), 2709-2738 (2014).

[2] **H. Attouch, A. Cabot et M.O. Czarnecki**, *Asymptotic behavior of nonautonomous monotone and subgradient evolution equations,* Trans. Amer. Math. Soc., 370, 755-790 (2018).

[3] **J.P. Aubin et A. Cellina**, *Differential inclusions-set-valued maps and viability theory.* Springer-Verlag, Berlin (1984).

[4] **D. Aussel, A. Daniilidis et L. Thibault**, *Subsmooth sets : functional characterizations and related concepts.* Trans. Amer. Math. Soc. 357, 1275-1301 (2005).

[5] **D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques**, *Perturbed evolution problems with absolutely continuous variation in time and applications.* Journal of Fixed Point Theory and Applications, 21, No. 2,40 (2019).

[6] **D. Azzam-Laouir, W. Belhoula, C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques**, *Multi-valued perturbation to evolution problems involving time dependent maximal monotone operators.* Evolution Equations & Control Theory, 9(1), 219-254 (2020).

[7] **D. Azzam-Laouir et I. Boutana**, *Mixed semicontinuous perturbation to an evolution problem with time-dependent maximal monotone operator.* J. Nonlinear and Convex Analysis, Vol. 20, 1 39-52 (2019).

[8] **D. Azzam-Laouir, C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques**, *Perturbed evolution problems with continuous bounded variation in time and applications*. Set-Valued Var. Anal., 26, No.3 693-728 (2018).

[9] **V. Barbu**, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*. Noordhoff Int. Publ. Leyden, (1976).

[10] **V. Barbu**, *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces.* Springer (2010).

[11] **H.H. Bauschke et P. L. Combettes**, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. Springer, (2017).

[12] **W. Belhoula**, *Résultats d'existence de solutions pour des inclusions différentielles gouvernéés par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps.* Thèse doctorat LMD (2019).

[13] **M. Benguessoum, D. Azzam-Laouir et C. Castaing**, *On a time and state dependent maximal monotone operator coupled with a sweeping process with perturbations.* Set-Valued Var. Anal. (2020).

[14] **M. Benguessoum, D. Azzam-Laouir et C. Castaing**, *Multi-valued perturbations to a couple of differential inclusions governed by maximal monotone operators.* Springer Journals Editorial Office Mediterranean Journal of Mathematics (2020).

[15] **M. Bounkhel**, *Regularity concepts in nonsmooth analysis, Theory and Applications.* Springer Science Business Media. LLC (2012).

[16] **M. Bounkhel et L. Thibault**, *On various notions of regularity of sets in nonsmooth analysis.* Nonlinear Anal. 48, 223-246 (2002).

[17] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris, (1983).

[18] **H. Brézis**, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam (1973).

[19] **M. Brokate et P. Krejčí**, *Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality.* Discrete Contn. Dyn. Syst. Ser. B, 18 (2), 331-348 (2012).

[20] **F.E. Browder**, *Nonlinear maximal monotone operators in Banach space*, Mathematische Annalen 175.2, 89-113 (1968).

[21] **T.H. Cao, B.S. Mordukovich**, *Optimal control of nonconvex perturbed sweeping process.* J. Differiential. Equations, Vol. 266, 1003-1050 (2019).

[22] **C. Castaing**, *Topologie de la convergence uniforme sur les parties uniformément intégrables de L^1_E et théorèmes de compacité faible dans certains espaces du type Köthe-Orlicz.* Travaux Sém. Anal. Convexe, 10 (1) exp. no. 5, 27 (1980).

[23] **C. Castaing, M.D.P. Monteiro Marques et P. Raynaud de Fitte**, *A Skorohod problem governed by a closed convex moving set.* Journal of Convex Analysis, 23 No 2, 387-423 (2016).

[24] **C. Castaing, P. Raynaud de Fitte et M. Valadier**, *Young Measures on Topological Spaces with Applications in Control Theory and Probability Theory.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2004).

[25] **C. Castaing et M. Valadier**, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 580 (1977).

[26] **I. Chalendar et E. Fricain**, *Compléments en analyse cours, et exercices*, 2010-2011.

[27] **G. Colombo, R. Henrion, N.D. Hoang et B.S. Mordukhovich**, *Discrete approximations of a controlled sweeping process.* Set-Valued Var. Anal. 23, 69-86 (2015).

[28] **G. Colombo, R. Henrion, N.D. Hoang et B.S. Mordukhovich**, *Optimal control of the sweeping process over polyhedral controlled sets.* J. Differiential. Equations, 260, 3397-3447 (2016).

[29] **G. Colombo et M. Palladino**, *The minimum time function for the controlled Moreau's sweeping process.* Siam J. Control Optim. Vol. 54, No. 4, 2036-2062 (2016).

[30] **K. Deimling**, *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1992).

[31] **R.D. Descombes**, *Cours d'analyse. Librairie Vuibert*, Paris, (1962).

[32] **J.F. Edmond et L. Thibault**, *BV solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation*, J. Differiential. Equations, 226, 135-179 (2006).

[33] **J.F. Edmond et L. Thibault**, *Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process.* Mathematical Programming 6, 347-373 (2005).

[34] **T. Haddad, J. Noel et L. Thibault**, *Perturbed sweeping process with a subsmooth set depending on the state.* Linear and Nonlinear Analysis, 2, Number 1, 155-174 (2013).

[35] **C. Henry**, *An existence theorem for a class of differential inclusions with multivalued right-hand side,* J. Math. Anal. Appl. 41, 179-186 (1973).

[36] **J.M. Holte**, *Discrete Gronwall Lemma and applications.* http ://homepages.gac.edu/ holte/publications/GronwallLemma.pdf.

[37] **M. Kisieliwicz**, *Differential inclusion and optimal control*, PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic ublishers, Dortrecht, Boston, London (1991).

[38] **M. Kunze et M.D.P. Monteiro Marques**, *BV solutions to evolution problems with time-dependent domains.* Set-Valued Analysis 5.1, pp. 57-72 (1997).

[39] **M. Kunze et M.D.P. Monteiro Marques**, *On parabolic quasi-variational inequalities and state dependent sweeping process.* Topol. Methods Nonlinear Anal. 12, 16, 179-191 (1998).

[40] **M. Kunze et M.D.P. Monteiro Marques**, *An introduction to Moreau's sweeping process.* In : Brogliato, B. (ed.) Impacts in Mechanical Systems. Lecture Notes in Physics, vol. 551. Springer-Verlag, Berlin, 17 (2000).

[41] **B.K.Le**, *Well-posedeness and nonsmooth Lyapunov pairs for state-dependent maximal monotone differential inclusions.* Optimization. DOI : 10.1080/02331934.2019.1686504 (2019).

[42] **G. Minty**, *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space*, Duke Math. J., 29, 341-346 (1962).

[43] **M.D.P. Monteiro Marques**, *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems : Shocks and dry friction.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, Vol. 9. (1993).

[44] **B.S. Mordukovich**,*Variational analysis and optimization of sweeping processes with controlled moving sets.* Revista Investigatión Operacional, Vol. 39, No. 3, 283-302 (2018).

[45] **J. J. Moreau**, *Evolution problem asssociated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Differiential. Equations, Vol 26, 347-374 (1977) .

[46] **J. Noel**, *Inclusions différentielles d'´evolution associées à des ensembles sous-lisses*, Thèse doctorat de l'université Montpellier II (2013).

[47] **F. Selamnia, D. Azzam-Laouir et M.D.P. Monteiro Marques**, *Evolution problems involving state-dependent maximal monotone operators.* Appl. Anal. (2020).

[48] **Y. Sonntag**, *Topologie et Analyse fonctionnelle.* Ellipses, édition marketing S.A, (1998).

[49] **V. Staicu**, *Nonconvex perturbations of maximal monotone differential inclusions.* (1998).

[50] **A. Tanwani, B. Brogliato et C. Prieur**, *Well-posedness and output regulation for implicit time-varying evolution variational inequalities*. SIAM J. Control Optim. 56, 751-781 (2018).

[51] **L. Thibault**, *Submooth functions and sets.* Journal of Linear and Nonlinear Analysis. 1-107 (2018).

[52] **A.A. Tolstonogov**, *Control sweeping process.* J. Convex Anal. 23, 1099-1123 (2016).

[53] **M. Valadier**, *Quelques résultats de base concernant le processus de la rafle,* Sém. Anal. Convexe, Montpellier, Vol 3 (1988).

[54] **A.A. Vladimirov**, *Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space.* Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications 17.6, 499-518 (1991).

[55] **I.I. Vrabie**, *Compactness methods for Nonlinear evolution equations.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied mathematics, Longman Scientific and Technical, John Wiley and Sons, Inc. New York, Vol 32 (1987).