

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BENYAHIA DE JIJEL  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES



## THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat en sciences

Filière : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : **Abdelghafour Bazeni**

---

# Log-concavité et fonctions symétriques pour des triangles généralisés et leurs analogues

---

Soutenue le Mercredi 15/12/2021 devant le jury :

Président :	N. Touafek	Professeur	Université Mohamed Seddik Benyahia, Jijel
Rapporteur :	A. Bouchair	Professeur	Université Mohamed Seddik Benyahia, Jijel
Co-rapporteur :	M. Ahmia	MCA	Université Mohamed Seddik Benyahia, Jijel
Examineurs :	D. Behloul	Professeur	USTHB, Alger
	M. Mihoubi	Professeur	USTHB, Alger
	L. Noui	Professeur	Université de Batna 2
Invité :	H. Belbachir	Professeur	USTHB, Alger

*Merci, Dieu tout-puissant*  
*A mes très chers parents, source du courage*  
*A ma chère épouse et mes enfants, source de vie*  
*A mes chers frères et soeurs, source de joie et de bonheur*  
*A toute ma famille*  
*A tous mes amis*

*Je dédie ce travail à mes parents*

# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier A. Bouchair Professeur à l'Université de Jijel et M. Ahmia Docteur à l'Université de Jijel, d'avoir dirigé ce travail. qu'ils soient aussi remercier de leurs présence et encouragement toute au long de cette thèse.

J'adresse également, tous mes remerciements à Monsieur N. Touafek, Professeur à l'Université de Jijel, qui a accepté d'être président du jury de cette thèse.

J'exprime ma gratitude à Messieurs M. Mihoubi et D. Behloul, Professeurs à l'USTHB, ainsi qu'à Monsieur L. Noui, Professeur à l'Université de Batna, de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être examinateurs de cette thèse.

Je remercier aussi H. Belbachir Professeur à l'USTHB, qui a répondu présent, et d'être parmi les jury dans cette thèse. Je tiens à lui exprimer mes salutations..

Je remercie également Monsieur J. Gabriel-Luque, Professeur des universités à Rouen, pour m'avoir invité au sein de Laboratoire LITIS. Je tiens à lui exprimer mes salutations.

Enfin une mention particulière à mes parents et à ma famille. A mon épouse, qui m'a soutenu, encouragé, et qui me supporte toujours.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>6</b>
1.1 Principes fondamentaux du comptage . . . . .	7
1.2 Structures élémentaires . . . . .	9
1.3 Objets combinatoires . . . . .	12
1.4 Fonctions symétriques . . . . .	22
1.5 Coefficients binomiaux et bi <sup>s</sup> nomiaux . . . . .	26
1.6 Nombres de Stirling . . . . .	29
<b>2 Fonction symétrique élémentaire généralisée</b>	<b>36</b>
2.1 Pavages des rectangles $1 \times n$ . . . . .	37
2.2 Les coefficients $q$ -binomiaux . . . . .	38
2.3 Les analogues des coefficients bi <sup>s</sup> nomiaux . . . . .	40
2.4 Fonction symétrique élémentaire généralisée . . . . .	41
2.5 Interprétation des coefficients bi <sup>s</sup> nomiaux et leurs analogues par les chemins	44
2.6 Quelques identités des coefficients $q$ -bi <sup>s</sup> nomiaux . . . . .	46
2.7 Interprétation des coefficients $q$ -bi <sup>s</sup> nomiaux par les pavages . . . . .	48
<b>3 Nombres de Stirling généralisés</b>	<b>50</b>
3.1 Nombres de Stirling généralisés . . . . .	51
3.2 Nombres de Stirling généralisés de première espèce . . . . .	52
3.3 Interprétation combinatoire de $s$ -Stirling . . . . .	56
3.4 Analogues des nombres de Stirling généralisés . . . . .	59
3.5 Interprétation combinatoire des analogues des nombres de Stirling généralisés	61
<b>4 Log-concavité des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux et leurs analogues</b>	<b>65</b>
4.1 Généralité sur la log-concavité et l'unimodalité . . . . .	66
4.2 Un peu d'histoire . . . . .	67
4.3 Chemins et étiquetage . . . . .	68
4.4 Résultats principaux . . . . .	70
4.5 Applications . . . . .	74
<b>Conclusion</b>	<b>78</b>

# Table des figures

1.1	Une permutation circulaire. . . . .	16
1.2	Diagramme de Ferrers et leur conjugué. . . . .	18
1.3	Tableau de Young semi-standard. . . . .	18
1.4	Tableau de Young standard. . . . .	19
1.5	Tous les tableaux standards de forme $(2, 2, 1)$ . . . . .	20
1.6	Un chemin nord-est de $(0,0)$ à $(5,4)$ . . . . .	20
1.7	Les nombres de chemins . . . . .	21
1.8	Tous les chemins de $(0,0)$ à $(2,2)$ et les mots correspondants. . . . .	21
1.9	Correspondance entre un tableau de $\lambda = (4,3)$ et un chemin de $(0,0)$ à $(4,3)$ . . . . .	21
1.10	Tous les chemins et l'aires correspondantes de $(0,0)$ à $(2,2)$ . . . . .	22
1.11	Les deux tableaux semi-standards de $\lambda = (2,1)$ pour $n = 2$ . . . . .	26
1.12	Les nombres de Stirling de deuxième espèce $S(3,k) = 1, 3, 1$ . . . . .	32
2.1	8 pavages avec deux couleurs. . . . .	38
2.2	Les six chemins allant de $(0,0)$ à $(4,2)$ . Ces chemins sont associés à $E_4^{(2)}(3) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$ . . . . .	44
2.3	Les six chemins allant de $(0,0)$ à $(4,2)$ . L'exposant de $q$ (sur $p$ , respectivement) dans le poids de chaque chemin est donné en comptant le nombre de carrés qui correspondent en dessous (au dessus, respectivement) et à droite (respectivement, à gauche) du chemin. . . . .	45
2.4	On voit ici une correspondance entre le pavage et leur chemin associé. Le pavage reçoit le poids $q^2$ et le chemin de partition 2. . . . .	49
4.1	Illustration $x_1^2 x_2$ de $E_4^{(2)}(3)$ par l'étiquetage $E^{(2)}$ . . . . .	68
4.2	L'involution $\varphi$ . . . . .	69
4.3	L'involution $\sigma$ . . . . .	69
4.4	L'application de l'involution $\varphi$ sur les deux termes soulignés ci-dessus. . . . .	71
4.5	L'application de l'involution $\varphi$ sur les deux $E^{(2)}$ -monomiaux ci-dessus. . . . .	73
4.6	L'application de la Composition (4.11) dans l'exemple au dessus. . . . .	76

# Liste des tableaux

1.1	Triangle de Pascal. . . . .	27
1.2	Triangle des coefficients binomiaux $s = 2$ . . . . .	29
1.3	Nombre de Stirling de première espèce. . . . .	30
1.4	Nombre de Stirling de deuxième espèce. . . . .	33
2.1	Tableau des valeurs de coefficients $q$ -trinomiaux. . . . .	43
2.2	Tableau des valeurs de coefficients $p, q$ -trinomiaux. . . . .	43
3.1	2-Stirling de première espèce $c^{(2)}(n, k)$ . . . . .	54
3.2	Le $q$ -analogue de 2-Stirling de première espèce. . . . .	60
3.3	Le $p, q$ -analogue de 2-Stirling de première espèce. . . . .	60

# Introduction

J. Dieudonné (1977) :

*Il se peut que le problème étudié soit résolu, mais qu'il n'en résulte aucun progrès pour aucun autre problème.*

Netto (1901) :

*L'art de placer, ordonner ou choisir certaines choses ensemble.*

Pierre Cartier (1982) :

*La combinatoire est en gros l'étude de la géométrie finis.*

C'est ainsi qu'ils définissent la combinatoire. Objets : dénombrement de permutations, dénombrement de partitions, formules de sommation, . . . Méthodes : introduction des séries génératrices, utilisation des fonctions symétriques, . . . Bel et bien, on parle de la combinatoire.

Anciens : Bhaskara, Gersonide, Khayyam, Leibniz, Pascal, . . . Récents : MacMahon, Netto, Andrews, Young, . . . Ces auteurs marquent l'histoire de la combinatoire.

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la combinatoire énumérative qui consiste à déterminer le nombre d'un ensemble et aussi compter le nombre d'occurrences d'un résultat discret. À titre d'exemple : placer des objets dans des urnes, sélectionner des entités à partir d'une population finie, arranger des objets de façon linéaire ou circulaire, etc. Elle consiste de plus profond à manipuler des objets combinatoires pour expliquer et interpréter certaines suites ou identités combinatoire.

La combinatoire est une science aux ramifications multiples. Berge a proposé une définition qui repose sur la notion de configuration [B68]. Cette configuration se manifeste à chaque fois que l'on veut ranger des objets sous certaines exigences. Il a classifié les configurations combinatoires comme suit,

1. La configuration est connue : on se ramène à étudier les propriétés intrinsèques de cette configuration.
2. La configuration est inconnue : on doit démontrer l'existence ou non de la configuration pour des propriétés constatées.

3. Le dénombrement des configurations : dans ce cas on doit répondre à la question combien de configurations existent-elles? l'outil des probabilités et d'un coup de pouce important.
4. Le dénombrement approximatif des configurations : on cherche le nombre des configurations avec une propriété donnée, on cherche certaines informations sur ce nombre sans donner des formules exactes ni même récurrentes.
5. L'énumération des configurations : en plus de les dénombrer, on veut les recenser ou les énumérer.
6. L'optimisation : c'est dans la recherche opérationnelle qu'on traite ces problèmes ; qui consistent à chercher une configuration  $x_0$  parmi les autres configurations  $x$ , afin d'optimiser une fonction dite *économique*.

## Objectif

Le but de notre travail sera d'utiliser les techniques basées sur la théorie des fonctions symétriques pour comprendre et prouver la log-concavité et l'unimodalité des suites numériques connues, telles que les suites en relation avec les éléments du triangle de Pascal généralisé et celles liées à leurs analogues. On s'intéresse aussi aux interprétations combinatoires [V80] de ces nombres en utilisant des approches par les chemins et les pavages. Manipuler des  $s$ -uplets  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s)$  de permutations de  $[n]$  avec exactement  $k$  cycles, pour construire une nouvelle suite interprétant ce que l'on qualifie à être les nombres de Stirling généralisés de première espèce.

## Contexte

### Fonction génératrice

Les fonctions génératrices ont été introduites par de Moivre pour résoudre le problème général de récurrence linéaire [CS19, L03, DW14, N69, T12]. Chercher une solution à un problème combinatoire, c'est souvent essayer de déterminer une fonction génératrice au lieu d'arriver à trouver une récurrence appropriée. Cependant, construire une telle fonction, dans plusieurs cas, nécessite des efforts et qui n'est pas une tâche facile à manipuler, voir difficile à déterminer les éléments des sous-ensembles associés au problème.

Chaque fois que nous voulons déterminer ou avoir des informations sur une suite de nombres  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , nous pouvons établir une somme infinie en fonction de l'indéterminé  $x$ ,

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n x^n. \quad (1)$$

L'utilité des fonctions génératrices réside dans le fait qu'on peut trouver une formule de récurrence plus aux moins facile à utiliser dans les démarches de calculs. Par exemple, voilà



une approche algébrique pour retrouver la fonction génératrice de la suite  $(1, 2, 3, 4, \dots)$ . Pour ce faire, si on pose  $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ , alors on obtient,

$$\begin{aligned} S - xS &= (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots) - x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots) \\ &= 1 + x^2 + x^3 + \dots \\ S(1 - x) &= \frac{1}{1 - x} \\ S &= \frac{1}{(1 - x)^2} \quad (\text{accroissement infini}). \end{aligned}$$

On voit bien que la forme  $\frac{1}{(1-x)^2}$  est plus facile à utiliser que la série  $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

### Fonctions symétriques

La théorie des fonctions symétriques remonte aux *XVI<sup>e</sup>* et *XVII<sup>e</sup>* siècles et aux tentatives des mathématiciens de résoudre les équations polynomiales de degré supérieur à 2. Elle a de nombreuses applications en combinatoire énumérative, ainsi que dans d'autres branches des mathématiques comme la théorie des groupes et la géométrie algébrique [E19, M95, S99].

Soient  $X = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  un ensemble d'indéterminés, et soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une fonction homogène et symétrique de degré  $n$  sur un anneau commutatif  $Z$  est une série de puissance formelle,

$$f(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, x_{\omega(3)}, \dots) = f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n. \quad (2)$$

L'ensemble de toutes les fonctions symétriques homogènes de degré  $n$  sur  $Z$  est noté  $A_Z^n$ . L'un des objectifs de la théorie des fonctions symétriques consiste à décrire les différentes bases de l'espace vectoriel  $A_Q^n$  (si les coefficients sont dans  $\mathbb{Q}$ ) et les matrices de passages entre les paires de ces bases.

### Log-concavité, unimodalité

Stanley dans son travail intitulé « *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics and geometry* » fournit une vue d'ensemble des connections entre les problèmes d'unimodalité et diverses branches des mathématiques, ainsi que de nombreux problèmes ouverts. Pour vérifier la log-concavité et l'unimodalité des suites, on doit utiliser les techniques de preuves inductives et injective (parmi d'autre). Toutefois trouver une fonction symétrique qui interprète ces suites est nécessaire (pas la seule) pour pouvoir appliquer de mieux ces techniques combinatoires.

En effet, pour prouver la log-concavité et l'unimodalité des suites associées à une classe particulière des fonctions symétriques nécessitent un ensemble de connaissances suffisantes en combinatoire, afin de bien sélectionner l'approche la mieux adaptée parmi les preuves combinatoires connues dans la littérature ou améliorées pour cet objectif.

## Résultats obtenus

Dans le cadre de la réalisation de notre thèse, on a pu réaliser les travaux suivants :

- ◇ Un travail a été publié dans Turkish journal of mathematics, intitulé «*Connection between binomial coefficients with their analogs and symmetric functions* ». Dans cet article, nous avons proposé une fonction symétrique qui interprète les coefficients binomiaux (les éléments du triangle de Pascal généralisé) et leur analogues.

$$E_k^{(s)}(n) = E_k^{(s)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_n=k \\ 0 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq s}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}, \quad (3)$$

Ensuite, à l'aide de cette fonction, une interprétation de ces coefficients par les chemins et les pavages, a été réalisée.

**Théorème 0.0.1.** Pour  $0 \leq k \leq sn$ , soient  $u_1 = (0, 0)$  et  $v_1 = (k, n - 1)$  deux points. le nombre des chemins dans le plan  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  allant de  $u_1$  à  $v_1$  en prenant au maximum  $s$  sommets dans la direction Est (Est-Nord) est exactement les coefficients binomiaux  $\binom{n}{k}_s$ .

**Théorème 0.0.2.** Le coefficient  $q$ -binomial est obtenu en faisant la somme des poids de tous les pavages de  $T_{n,k}^s$ . C'est,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{T \in T_{n,k}^s} q^{w_T}. \quad (4)$$

- ◇ Un autre travail a été publié dans Indian Journal of Pure and Applied Mathematics intitulé «*Log-concave sequences of binomial coefficients with their analogs and symmetric functions* ». Dans cet article, nous avons prouvé la log-concavité et l'unimodalité de certaines suites associées à la nouvelle classe de fonction symétrique proposée et citée en (3). Comme applications de nos résultats, nous avons établi la  $q$ -log-concavité forte des coefficients  $q$ -binomiaux et leurs suites situées sur les transversales du triangle de Pascal généralisé sous certaines conditions. Les outils et les techniques utilisés pour montrer nos principaux résultats sont basés sur l'utilisation de l'approche des chemins proposé par Viennot et appliqué par Sagan.
- ◇ Le troisième travail est achevé et soumis intitulé «*A new generalization of Stirling numbers of the first kind*». Dans cet article, on donne une extension des nombres de Stirling de première espèce et leurs analogues. Ensuite on aborde une définition réursive et une fonction génératrice ordinaire de ces nombres, que nous interprétons comme une spécialisation de la fonction symétrique  $E_k^{(s)}(n)$  et que nous désignons par  $c^{(s)}(n, k)$ .

## Plan de la thèse

Cette thèse est organisée en 4 chapitres.

Le chapitre 1 sert de préliminaires aux autres chapitres. On présente les principes de base des ensembles et quelques structures élémentaires nécessaires pour le reste de ce manuscrit. On parle également des objets combinatoires, des fonctions symétriques et abordant les nombres de Stirling des deux espèces.

Le chapitre 2 parle et étudie les interprétations combinatoires (preuve bijective) des coefficients  $bi^s$ nomiaux et leurs analogues par les fonctions symétriques, les chemins et les pavages. On définit une nouvelle fonction symétrique notée  $E_k^{(s)}(n)$  afin que ces coefficients puissent être exprimés comme des spécialisations de cette fonction, et pour nous facilitera la tâche, à mieux comprendre comment appliquer ces interprétations aux coefficients  $q$ - $bi^s$ nomiaux.

Le chapitre 3 présente une généralisation des nombres de Stirling de première espèce et leurs analogues. Les suites de ces nombres seront générés par la fonction symétrique généralisée (3), en remplaçant chaque objet  $x_i$  dans la fonction par l'entier  $i$ . On aborde aussi une interprétation combinatoire de ces nombres dans le cas classiques en termes des  $s$ -uplets de permutations de  $[n]$  avec  $k$  cycles. Ensuite on utilise le principe de la statistique d'inversion sur ces  $s$ -uplets dans le cas des analogues.

Le chapitre 4 étudie et prouve la log-concavité des coefficients  $bi^s$ nomiaux et leurs analogues, en utilisant la fonction symétrique (3) et basant sur l'approche des chemins dans le plan  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . On fait appelle aux techniques et outils de l'interprétation combinatoire des déterminants proposés par Gessel et Viennot, afin de les utiliser pour concrétiser l'objectif.

## Chapitre 1

# Préliminaires

### Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions primordiales et essentielles pour la suite de ce travail. On commence par présenter dans la section 1.1 les principes de base des ensembles de façon combinatoire. Puis, dans la section 1.2 on rappelle quelques structures élémentaires nécessaires pour la compréhension du reste des chapitres. Ensuite, on aborde dans la section 1.3 des familles d'objets combinatoires tels, Mots, Permutations et tableaux, etc. Et citant quelques exemples explicatifs pour chaque notion. On présente dans la section 1.4 la théorie des fonctions symétriques en tant que des séries formelles invariantes sous toutes les permutations possibles. Les fonctions symétriques monomiales, élémentaires, complètes et de puissances seront abordés. On termine ce chapitre par la présentation, dans les deux sections 1.5 et 1.6, de quelques nombres connus à savoir les nombres de Stirling des deux espèces et les coefficients binomiaux.

## 1.1 Principes fondamentaux du comptage

### 1.1.1 L'addition

**Définition 1.1.1.** Soit  $A$  un ensemble et  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  sont des sous-ensembles de  $A$  satisfaisant,

1.  $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$ ,
2.  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ .

On dit que ces ensembles partitionnent  $A$ .

**Principe combinatoire de la somme :** Si  $A_i$  partitionnent  $A$ , alors le nombre d'éléments dans  $A$  est la somme des nombres d'éléments de chacun des sous-ensembles,

$$|A| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

Ceci revient à dire que si une tâche peut être complétée soit de  $n_1$  façons ou de  $n_2$  façons, et aucune de ces méthodes sont en commun, alors il y a  $n_1 + n_2$  façons de compléter la tâche.

### 1.1.2 La multiplication

**Définition 1.1.2.** Soient  $A$  et  $B$  sont deux ensembles, on définit le produit cartésien  $A \times B$  comme étant,

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

**Exemple 1.1.3.** Si  $A = \{a, b, c\}$  alors,

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}.$$

**Principe combinatoire du produit :** Si  $A_i$  sont des ensembles, alors le nombre de façons de choisir un élément de  $A_1$  et de  $A_2$  et ainsi de suite jusqu'à  $A_n$  est le produit du nombre d'éléments de chacun de ces ensembles,

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| |A_2| \dots |A_n|.$$

Ceci revient à dire que s'il y a  $n_1$  façons de compléter la tâche  $a_1$  et  $n_2$  façons de compléter la tâche  $a_2$ . . . et  $n_n$  façons de compléter la tâche  $a_n$ , alors il y a  $n_1 n_2 \dots n_n$  façons de compléter toutes les tâches.

**Remarque 1.1.4.** Dans un produit cartésien l'ordre d'un couple  $(a, b)$  est important, les couples  $(a, b)$  et  $(b, a)$  sont différents.

### 1.1.3 La soustraction (principe d'inclusion et d'exclusion)

Parmi 25 étudiants, 14 étudient les mathématiques, 10 étudient l'informatique, et 5 étudient les deux. *Combien y a-t-il d'étudiants qui n'étudient ni les mathématiques ni l'informatique?* Nous devons avoir  $14 - 5 = 9$  personnes qui étudient les mathématiques mais pas l'informatique. Et  $10 - 5 = 5$  personnes qui étudient l'informatique mais pas les mathématiques. Il reste donc  $25 - (9 + 5 + 5) = 6$  personnes qui n'étudient ni les mathématiques ni l'informatique.

On peut obtenir ce résultat facilement en utilisant le principe d'inclusion-exclusion qui donne le nombre d'étudiants ne possédant pas ces deux propriétés,  $25 - 14 - 10 + 5 = 6$ .

**Principe combinatoire de l'inclusion-exclusion :** Si  $A_1$  et  $A_2$  sont deux ensembles de  $A$ , alors on inclue l'ensemble entier, ensuite on exclue (soustrait) les ensembles simples  $A_1$  et  $A_2$ , et enfin on inclue (ajoute) l'intersection des 2 ensembles  $A_1 \cap A_2$ ,

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |A| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|.$$

Soit  $S_k$  la somme des cardinalités de toutes les intersections de  $k$ -uplets des  $A_i$ . On généralise la formule d'inclusion-exclusion de façon alternative comme suit [T12],

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |A| - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^k S_k + \cdots + (-1)^n S_n. \quad (1.1)$$

### 1.1.4 L'égalité (la bijection)

Le principe de la bijection fait que deux problèmes ont la même solution.

**Définition 1.1.5.** Une fonction  $f : A \rightarrow B$  est dite injective si elle vérifie,

$$\forall (x, x') \in A, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

**Sens combinatoire :** Si deux objets ne sont pas affectés à la même boîte, alors la fonction est univoque, ou injective.

**Définition 1.1.6.** Une fonction  $f : A \rightarrow B$  est dite surjective si elle vérifie,

$$\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y.$$

**Sens combinatoire :** Le placement d'objets de l'ensemble  $A$  dans les boîtes de l'ensemble  $B$  ne laisse aucune boîte vide.

**Définition 1.1.7.** Une fonction  $f : A \rightarrow B$  est une bijection si c'est une injection et une surjection.

**Le principe de la bijection :** Deux ensembles ont la même cardinalité si et seulement s'il existe une bijection entre les deux ensembles. Le principe est en fait applicable à n'importe quel ensemble, peut importe leur cardinalité.

**Exemple 1.1.8.** Il y a autant de sous ensembles de  $A$  ayant  $k$  éléments que de sous-ensemble de  $A$  ayant  $n - k$  éléments. Trouvant une bijection entre les sous-ensembles? Il suffit de remarquer que si  $B \subseteq A$  est un ensemble de  $k$  éléments, alors  $A \setminus B$  sera un ensemble de  $n - k$  éléments. Le processus est inversible et il y a autant de sous-ensembles de  $k$  éléments que de sous-ensembles de  $n - k$  éléments.

En plus, si  $A$  et  $B$  sont des ensembles finis, respectivement de cardinalités  $n$  et  $k$ , alors on a les égalités suivantes,

$$\begin{array}{ll} 1) |B^n| = k^n, & 2) |\text{Fonction}[A, B]| = k^n, \\ 3) |\text{Surj}[A]| = n!, & 4) |\text{Inj}[A, B]| = k^n. \end{array}$$

Rappelons nous les notions suivantes ( $x$  une variable),

- Factorielle décroissante :  $x^{\underline{k}} = x(x-1)(x-2) \cdots (x-k+1)$ ,
- factorielle croissante :  $x^{\overline{k}} = x(x+1)(x+2) \cdots (x+k-1)$ .

### 1.1.5 Existence

Principe des tiroirs de Dirichlet ou principe du pigeonnier, est un principe mathématiques particulièrement simple à énoncer et à comprendre, et qui a plusieurs applications particulièrement intéressantes en mathématiques. Ce principe a été appliqué pour la première fois par Peter Dirichlet en 1834. Il nous permet de répondre aux questions de la forme "Il existe au moins un...".

**Le principe du pigeonnier :** Si on souhaite placer  $n + 1$  objets ou plus dans  $n$  boites, alors au moins une boite contiendra deux objets ou plus.

**Exemple 1.1.9.** On veut montrer que dans une classe de 13 étudiants, au moins deux étudiants sont né le même mois. Les boites sont les mois et les objets sont les étudiants. Le principe du pigeonnier nous affirme donc qu'au moins un mois de l'année désigne plus qu'un étudiant. c'est à dire qu'au moins deux étudiants sont né le même mois.

Pour plus d'informations sur le sujet de cette section consulter [DW14, T12].

## 1.2 Structures élémentaires

**Définition 1.2.1.** Une classe combinatoire est un ensemble  $\mathcal{A}$  fini ou dénombrable sur lequel une application de taille est défini,

$$|\cdot| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N},$$

qui associe à chaque élément  $a \in \mathcal{A}$  un entier  $|a|$ . Régulièrement, on dénote  $\mathcal{A}_n$  l'ensemble des objets  $a_n$  de taille  $n$  qui utilisent les mêmes éléments de  $\mathcal{A}$ .

Dans une classe combinatoire, on cherche une formule explicite qui compte le nombre d'objets de taille  $n$ , sous certaines conditions. Cependant, une telle formule n'est pas toujours facile à déterminer d'une façon directe. Associer une fonction génératrice ordinaire au problème qui code le nombre des objets comme le nombre d'occurrences de  $z^n$  est une étape importante dans le processus de la solution [CS19]. Des exemples d'objets : Permutations, Mots, Arbres, Graphes, Chemins, etc.

**Exemple 1.2.2.** Soit  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ . L'ensemble de tous les objets est,

$$(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0} = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots, 110010, \dots\}.$$

Le nombre d'objets possibles de taille  $n$  est,

$$|\mathcal{A}_n| = 2^n.$$

**Définition 1.2.3.** On appelle série formelle toute suite  $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$  d'éléments  $a_n$  de  $\mathcal{A}$  écrite sous la notation,

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n. \quad (1.2)$$

Par exemple, écrivant quelques séries connues qui ont des coefficients en forme explicite,

$$(1, 2/6, 16/120, \dots, T_n/(2n+1)!, \dots) \iff \sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = \tan x,$$

$$(1, 1, 1/2, \dots, 1/n!, \dots) \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

$$\left( \binom{0}{n}, \binom{1}{n}, \dots, \binom{n}{n} \right) \iff \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} x^k,$$

où  $T_n$  sont les nombres tangents qui comptent les *permutations alternantes* de  $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$ .

On peut enrichir cette définition par quelques propriétés

1. **L'addition** : L'addition de deux séries s'écrit,

$$\mathcal{A}(x) + \mathcal{H}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} d_n x^n,$$

$$\text{avec } d_n = a_n + b_n, \quad (n \geq 0).$$

2. **La multiplication** : La multiplication de deux séries s'écrit,

$$\mathcal{A}(x) \cdot \mathcal{H}(x) = \left( \sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} d_n x^n,$$

$$\text{avec } d_n = \sum_{k \geq 0} a_k b_{n-k}, \quad (n \geq 0).$$



3. **La puissance** : La puissance d'une série s'écrit,

$$\mathcal{A}^m(x) = \left( \sum_{n \geq 0} a_n x^n \right)^m = \sum_{\substack{i_1 + i_2 + \dots + i_m = n \\ i_1, \dots, i_m \geq 0}} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} x^{i_1 + i_2 + \dots + i_m}.$$

Consultez [L03, Chapitre 2] pour des suites bien connues des fonctions génératrices.

**Définition 1.2.4** (Laplace et Euler). Soit  $a_n = (a_1, \dots, a_n)$  une suite de réels ou de complexes. On appelle fonction génératrice ordinaire et fonction génératrice exponentielle sur l'ensemble des  $a_n$ , les deux séries formelles  $Gen$  et  $Exp$ , données respectivement par,

$$Gen(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n. \quad (1.3)$$

$$Exp(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}. \quad (1.4)$$

**Exemple 1.2.5.** On cite deux exemples,

1.  $\binom{n}{k}$  est le coefficient binomial,

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k \geq 0} n^k \frac{x^k}{k!} = (1+x)^n.$$

2.  $F_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  nombre de Fibonacci,

$$\sum_{n \geq 0} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

**Remarque 1.2.6.** Il existe une correspondance biunivoque entre une suite et sa fonction génératrice [CS19]. Cela peut être représenté par,

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \iff \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Vous trouverez des fonctions génératrices pour certains nombres dans les sections qui suivent dans ce chapitre.

**Remarque 1.2.7.** L'algèbre du développement correspondant aux fonctions génératrices ordinaires est connue sous le nom d'algèbre de Cauchy et aux fonctions génératrices exponentielles est appelée calcul symbolique.

Pour voir plus de détails, des informations sont disponibles dans diverses sources, notamment [C74, DW14, L03, L17, N69, W06].

**Définition 1.2.8.** Un poset (partially ordered set) est un ensemble  $P$  muni d'une relation d'ordre  $\leq$ . C-à-d,

1. de réflexivité :  $\forall x \in P, x \leq x$ ,

2. de transitivité :  $\forall x, y, z \in P$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq z$  alors  $x \leq z$ ,
3. d'antisymétrie :  $\forall x, y \in P$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq x$  alors  $x = y$ .

**Définition 1.2.9.** Soit  $\zeta : P_1 \rightarrow P_2$  une application d'un poset  $P_1$  vers un poset  $P_2$ . On dit que  $\zeta$  est un morphisme de posets si  $\zeta$  préserve l'ordre des éléments. C'est-à-dire,

$$x \leq_{P_1} y \Rightarrow \zeta(x) \leq_{P_2} \zeta(y), \quad \forall x, y \in P_1. \quad (1.5)$$

Consulter les documents [DP02, M37].

### 1.2.1 Choisir des objets

On s'intéresse au problème de choisir  $k$  objets parmi un ensemble de  $n$  objets. Pour résoudre le problème, on est en présence de 4 cas par rapport à l'ordre et la remise comme le montre le tableau au dessous.

Choisir k objets parmi n		
	Sans remise	Avec remise
Sans ordre	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Avec ordre	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$n^k$

Maintenant, on s'intéresse au nombre de permutations de  $n_1$  objets de type 1,  $n_2$  objets de type 2,  $n_3$  objets de type 3, ...,  $n_k$  objets de type  $k$ . On appelle ce nombre par le coefficient multinomial donné par la formule,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (1.6)$$

## 1.3 Objets combinatoires

### 1.3.1 Mots

**Définition 1.3.1.** Un alphabet  $W$ , est simplement un ensemble fini de lettres.

**Définition 1.3.2.** Un mot de longueur  $n$  sur l'alphabet  $W$  est une suite de  $n$  lettres,

$$w = w_1 w_2 \dots w_n, \quad w_i \in W.$$

On dénote :

- $|w|$  la longueur d'un mot qu'est le nombre de lettres qu'il contient.
- $W^n$  l'ensemble de tous les mots de longueur  $n$ .
- $W^*$  l'ensemble de tous les mots, c.-à-d. :  $W^* = \sum_{n=0}^{\infty} W^n$ .
- Le mot  $w = abccddwzzz$  a pour évaluation  $abc^2d^2wz^3$ .

**Exemple 1.3.3.** Soit  $W = \{a, b\}$ , on a donc :

$$W^2 = \{aa, ab, ba, bb\},$$

$$W^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, abb, bbb, baa, bba, \dots\}.$$

### 1.3.2 Partitions

**Définition 1.3.4.** Une partition de l'entier  $n$  est une suite d'entiers positifs écrit sous la forme,

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \quad \text{ou} \quad \lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k,$$

avec,

1.  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ ,
2.  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ .

Et on dénote,

- $\lambda \vdash n$  : la partition (partage) de  $n$ ,
- $\lambda_i$  : les parts de  $\lambda$ ,
- $l(\lambda) = l$  : la longueur de la partition,
- $\mathcal{P}(n)$  : l'ensemble des partitions de  $n$ ,
- $P(n)$  : le nombre de partitions de  $n$ ,
- $P(n, k)$  : le nombre de partitions de  $n$  avec exactement  $k$  parts,
- $P(n, k, j)$  : le nombre de partitions de  $n$  avec  $k$  parts dont la plus grande est  $\leq j$ ,
- On peut écrire  $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, l^{m_l})$ ,  $m_i$  est la multiplicité de  $i$  dans  $\lambda$ .

**Exemple 1.3.5.** 1. Le partage de l'entier 50 peut s'écrire comme,

$$50 = (9, 8, 8, 7, 5, 5, 5, 3), \quad \text{ou} \quad 50 = 98875553.$$

2. On détermine l'ensemble des partitions des entiers 0, 3 et 6 comme suits,

$$\mathcal{P}(0) = \{0\},$$

$$\mathcal{P}(3) = \{3, 21, 111\},$$

$$\mathcal{P}(6) = \{6, 51, 42, 33, 411, 321, 222, 3111, 2211, 21111, 111111\}.$$

3. On calcul aussi,

$$P(6) = 11, P(6, 1) = P(6, 5) = P(6, 6) = 1, P(6, 2) = 3, P(6, 3) = 3 \text{ et } P_4(6) = 2,$$

$$P(6, 3, 3) = 3, P(6, 2, 3) = 1, \text{ et ainsi de suite.}$$

Le nombre de partitions de  $n$  en  $k$  parts vérifie la relation de récurrence suivante,

$$P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k),$$

avec  $P_0(0) = 1$ .

On dispose pas d'une formule exacte ( simple ) pour calculer le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{P}(n)$ . Cependant, une formule approximative remarquable a été donnée par l'indien Srinivasa Ramanujan [CG96],

$$P(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp(\pi\sqrt{2n/3}). \quad (1.7)$$

On peut définir algébriquement le nombre de partitions par la fonction génératrice suivante,

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)} = 1 + P(1)x + P(2)x^2 + \cdots + P(k)x^k. \quad (1.8)$$

**Remarque 1.3.6.** Hardy et Ramanujan ont donné une formule exacte plus complexe et modifier plus tard par Rademacher en 1937.

### 1.3.3 Permutations

Les lecteurs qui sont intéressés par cette section, sont invités à consulter [B68, B04].

**Définition 1.3.7.** Une permutation  $\sigma$  de taille  $n$  est une bijection entre l'ensemble  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  et lui même. Une permutation  $\sigma$  de  $E$  est,

$$\sigma = \{(i, \sigma_i) \mid i \in E\}.$$

L'ensemble des permutations est noté  $S[E]$ . Le cardinal de  $S[E]$  est  $n!$ . On peut représenter une permutation comme,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n.$$

On note l'ensemble de permutations d'un ensemble de cardinalité  $n$  par *permutation de  $S_n$* .

**Exemple 1.3.8.** Soit  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ . Le nombre de permutations est  $4! = 24$ .

$$\begin{aligned} [4] &= \{1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, \\ &\quad 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431 \\ &\quad 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421 \\ &\quad 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321\}. \end{aligned}$$

Par exemple On choisit une permutation  $\sigma$  de  $[4]$  et on l'écrit sous forme matricielle,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Inversions d'une permutation de  $[n]$  :** On dit qu'un couple  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  forme une inversion de la permutation  $\sigma$  si,

$$i < j \text{ alors } \sigma_i > \sigma_j.$$

On dénote  $inv(\sigma)$  le nombre d'inversion de  $\sigma$ . Par exemple le nombre des inversions de l'ensemble de permutation  $[4]$  est,

$inv(\sigma)$	$\sigma$
0	1234
1	1243, 1324, 2134,
2	1342, 1423, 2143, 2314, 3124
3	1432, 2341, 2413, 3142, 3214, 4123
4	2431, 3241, 3412, 4132, 4213
5	3421, 4231, 4312
6	4321

Pour voir l'application de ce principe, consultez la section 3.5 du chapitre 3.

### 1.3.4 Orbites, décomposition en cycles

**Définition 1.3.9.** On appelle orbite la partition  $\mathcal{O}_\sigma$  de  $E$  qui a comme parts les sous-ensembles,

$$\mathcal{O}(\sigma_i) = \{\sigma^k(i), k \in \mathbb{Z}\} \text{ pour tout } i \in E.$$

**Exemple 1.3.10.** Reprenant la permutation précédente  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ . On a,

$$\mathcal{O}(1) = \{1, \sigma^1(1), \sigma^2(2)\} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{O}(4) = \{4\}.$$

La permutation  $\sigma$  admet 2 orbites.

**Définition 1.3.11.** On dit qu'une permutation  $\sigma$  est circulaire de  $E$ , si

$$\mathcal{O}_{\sigma_i} = E, \quad \forall i \in E.$$

**Définition 1.3.12.** Le support d'une permutation  $\sigma$  est l'ensemble définie par,

$$supp(\sigma) = \{1 \leq i \leq n \mid \sigma_i \neq i\}. \tag{1.9}$$

Pour l'exemple 1.3.10,  $supp(\sigma) = \{1, 2, 3\}$ .

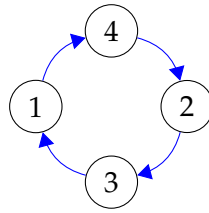


FIGURE 1.1 – Une permutation circulaire.

**Définition 1.3.13.** Le point  $i$  est dit point fixe pour  $\sigma$  si,

$$\sigma(i) = i.$$

Dans l'exemple 1.3.10, le nombre 4 est un point fixe.

**Définition 1.3.14.** Un cycle de longueur  $l$  ( $2 \leq l \leq n$ ) est une permutation  $\sigma$ , tel que

1.  $\text{supp}(\sigma) = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ ,
2.  $\sigma_{i_j} = i_{j+1}$  et  $\sigma_{i_{l-1}} = i_1$ , avec  $j = 0, 2, \dots, l - 1$ .

Ce cycle de longueur  $l$  est noté  $(i_1, i_2, \dots, i_l)$ .

**Définition 1.3.15.** Une permutation  $\sigma$  de taille  $n$  est un cycle si tous ses éléments appartiennent à la même orbite (Une autre définition).

**Remarque 1.3.16.** La démarche à suivre pour construire les différents cycles de longueur  $n$ , c'est de prendre l'élément 1 comme point fixe et faire permuer les autres  $n - 1$  éléments.

- Le nombre de cycles de longueur 4 d'une permutation  $[4]$  est,

$$\{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}.$$

- Le nombre de cycles de longueur 2 d'une permutation  $[4]$  s'écrit en cycles disjoints comme suit,

$$\{(1)(234), (1)(243), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (134)(2), (143)(2), \\ (124)(3), (142)(3), (123)(4), (132)(4)\}.$$

**Remarque 1.3.17.** 1. Le nombre de permutations de  $[n]$  à un cycle de longueur  $n$  égale  $(n - 1)!$ .

2. Le nombre de permutations de  $[n]$  composées de  $k$  cycles disjoints égale au nombre de Stirling de première espèce  $c(n, k)$ .

### 1.3.5 Groupe symétrique

**Définition 1.3.18.** Une transposition  $\tau$  est une permutation qui échange deux éléments distincts, en fixant les autres. On note  $\tau(ab)$  la transposition  $\tau$  qui change  $a$  et  $b$ , définie

par,

$$\tau(a) = b, \tau(b) = a \text{ et } \tau(i) = i, \forall i \notin \{a, b\}. \quad (1.10)$$

**Exemple 1.3.19.** La transposition (13) de la permutation 143265 est la permutation 341265.

**Définition 1.3.20.** Soit  $E$  un ensemble non vide. On appelle groupe symétrique sur  $E$ , l'ensemble  $\mathfrak{S}_E$  des bijections de  $E$  dans  $E$ , muni d'une loi de composition et d'un élément neutre. Les éléments de  $E$  sont les permutations possibles.

**Exemple 1.3.21.** Soit  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ .  $\sigma$  et  $\mu$  sont des permutations de  $E$ , alors

$$\sigma = 2314 \in \mathfrak{S}_4, \text{ et } \mu = 4312 \in \mathfrak{S}_4.$$

Les compositions de  $\sigma \circ \mu$ ,  $\mu \circ \sigma$  et  $\sigma^{-1}$  sont,

$$\sigma \circ \mu = 4123,$$

$$\mu \circ \sigma = 2413,$$

$$\sigma^{-1} = 3124.$$

En appliquant la transposition  $\tau$  sur les paires d'éléments de l'ensemble  $E$ , alors le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  sera construit.

### 1.3.6 Diagrammes de Ferrers

**Définition 1.3.22.** Un diagramme de Ferrers  $F$  est un ensemble de  $n$  points du plan, ayant les coordonnées  $(i, j)$  entières, tels que  $(i, j) \in F$ . On écrit,

$$F = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq j \leq k-1 \text{ et } 0 \leq i \leq \lambda_j - 1\},$$

avec  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  une partition de l'entier  $n$ .

**Définition 1.3.23.** Si on transpose les lignes et les colonnes d'un diagramme de Ferrers d'une partition  $\lambda$ , on obtient un diagramme de Ferrers d'une autre partition  $\tilde{\lambda}$ . Ce diagramme est appelé le diagramme conjugué. Le partage  $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \dots)$  dont  $\tilde{\lambda}_i$  est le nombre de parts de  $\lambda$  qui sont  $\geq i$ .

**Exemple 1.3.24.** Le diagramme de Ferrers pour  $n = 14$ ,  $\lambda = (4, 3, 1, 1)$  et la partition conjuguée  $\tilde{\lambda} = (4, 2, 2, 1)$  sont,

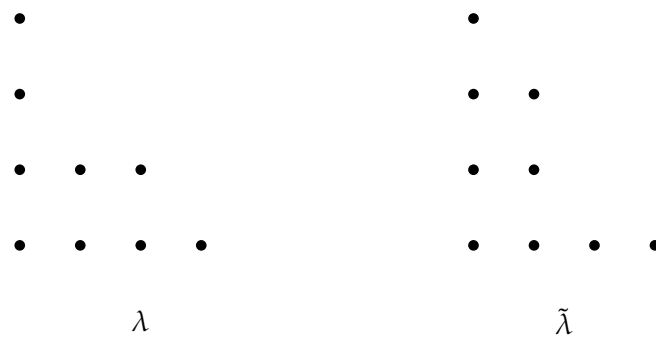


FIGURE 1.2 – Diagramme de Ferrers et leur conjugué.

### 1.3.7 Tableaux de Young

**Définition 1.3.25.** Si on remplace les points par des carrés juxtaposés dans le diagramme de Ferrers, alors on appelle le diagramme résultant le diagramme de Young.

**Définition 1.3.26.** Un tableau de Young  $T$  semi-standard ( $TSS$ ) est un remplissage du diagramme de Ferrers de  $\lambda$  tel que les entrées (entiers) soient croissantes au sens large sur les lignes de la gauche vers la droite, et soient strictement croissantes sur les colonnes du bas vers le haut, c’est-à-dire

$$\{T(i, j) \leq T(i + 1, j)\} \quad \text{et} \quad \{T(i, j) < T(i, j + 1)\}.$$

**Exemple 1.3.27.** Un des tableaux de Young semi-standard pour  $n = 13$  et  $\lambda = (5, 4, 2, 2)$  est représenté dans la Figure 1.3.

8	8			
4	4			
2	2	12	7	
1	1	3	4	9

FIGURE 1.3 – Tableau de Young semi-standard.

On peut lire dans le tableau de Young de deux façons. La première est la lecture ligne, en lisant les lignes de  $T$  de la gauche vers la droite et du bas vers le haut. La deuxième est la lecture diagonale de  $T$ , en lisant du bas vers le haut sur chaque diagonale  $D_k$ , dans l’ordre décroissant des  $k$ . L’évaluation d’un diagramme de Young  $T$  de taille  $n$  est une composition  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ , où  $\mu_i$  est le nombre d’occurrences de la lettre  $i$  dans  $T$ .

**Exemple 1.3.28.** On lit le diagramme de la Figure 1.3 comme suit,

- La lecture ligne : 11349 | 22127 | 44 | 88,



- La lecture diagonale : 8 | 48 | 24 | 12 | 112 | 37 | 4 | 9,
- L'évaluation : (2, 2, 1, 3, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 0).

**Définition 1.3.29.** Le nombre de Kostka  $K_{\lambda\mu}$  est le nombre de tableaux de Young de forme  $\lambda$  et d'évaluation  $\mu$ .

**Définition 1.3.30.** Un tableau de Young  $T$  standard est le tableau ayant pour lecture ligne une permutation ( $\mu = (1, 1, \dots, 1)$ ).

8	11			
4	10			
2	6	12	13	
1	3	5	7	9

FIGURE 1.4 – Tableau de Young standard.

### 1.3.7.1 Formule d'équerres

La formule des équerres est une formule qui permet de calculer le nombre de tableaux de Young standard de  $\lambda$ , due à Frame et al [D59]. L'équerre  $H_{i,j}$  est défini par les cellules se trouvant à la droite de  $(i, j)$  sur la ligne  $i$  et au-dessus de  $(i, j)$  sur la colonne  $j$  et la cellule  $(i, j)$  elle-même. L'équerre correspondant est,

$$H_{i,j} = \{(i, j)\} \cup \{(i, j') | j' > j\} \cup \{(i', j) | i' > i\},$$

où  $h_{i,j} = |H_{i,j}|$  la longueur de l'équerre partant de la cellule  $(i, j)$ .

**Exemple 1.3.31.** L'équerre partant de l'étoile est de longueur 4, on a donc  $h_{2,1} = 4$ .

.				
*	.	.		

**Théorème 1.3.32** (Formule des équerres). Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\lambda$  une partition de  $n$ . Alors on a la formule suivante qui calcule le nombre de tableaux de Young standard de forme  $\lambda$ ,

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{i,j}}, \tag{1.11}$$

où le produit porte sur toutes les cases du tableau de Young de forme  $\lambda$ .

**Exemple 1.3.33.** Pour le partage  $(2, 2, 1) \vdash 5$ , on a

$$f^{(2,2,1)} = \frac{5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1} = 5 \text{ tableaux standards de la forme } (2, 2, 1).$$

Le lecteur est invité à consulter [K70, S90, S13, Y00].

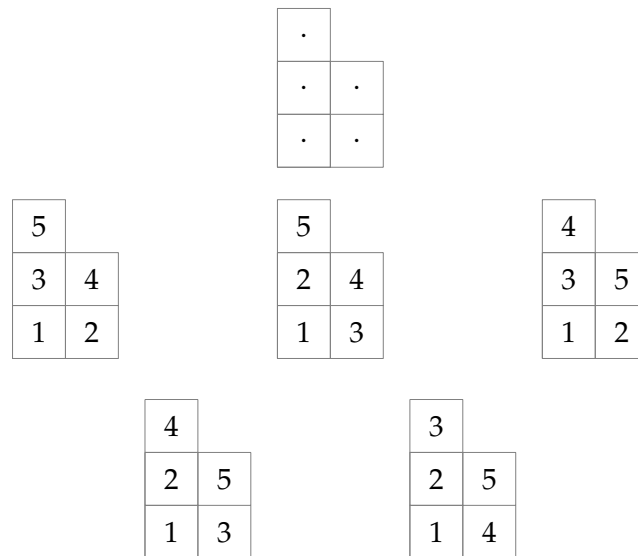


FIGURE 1.5 – Tous les tableaux standards de forme  $(2,2,1)$ .

### 1.3.8 Chemins dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

L'étude des chemins dans la combinatoire énumérative est intéressante, et des applications importantes existent dans presque tous les domaines des mathématiques [H10, HKS03, K65, M79]. On trouve dans [BA17] un aperçu général sur les résultats récents sur le sujet.

**Définition 1.3.34.** Un chemin nord-est  $P = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ , dans le plan discret  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , est une suite des pas (nord-est) qui commence par l'origine  $(0,0)$  et se termine au point  $(k,n)$ , tel que

$$(i, j) = \begin{cases} (i-1, j-1) + (0, 1), & \text{pas verticale (nord);} \\ (i-1, j-1) + (1, 0), & \text{pas horizontale (est).} \end{cases}$$

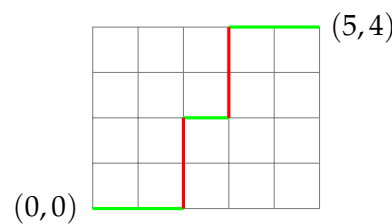


FIGURE 1.6 – Un chemin nord-est de  $(0,0)$  à  $(5,4)$ .

L'ensemble des chemins dans un plan de  $k$  pas horizontales et  $n$  pas verticales est énuméré par les coefficients binomiaux  $\binom{n+k}{k}$ . En d'autre terme, les coefficients binomiaux énumèrent tous les chemins allant de  $(0,0)$  au point  $(n-k, k)$ .

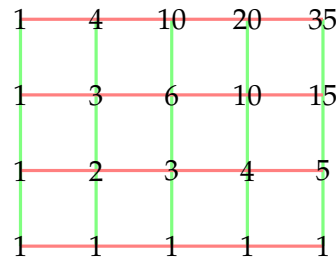


FIGURE 1.7 – Les nombres de chemins

On peut représenter un chemin sous la forme d'un mot  $\omega$  construit par la concaténation des deux alphabets  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et  $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ . Les  $x_i$  sont les pas horizontaux dans le niveau  $i (i = \overline{1, n})$ , et les  $y_j$  sont les pas verticaux dans le niveau  $j (j = \overline{1, m})$  (voir 1.8).

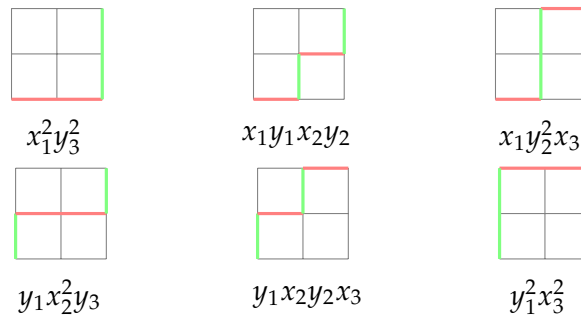


FIGURE 1.8 – Tous les chemins de  $(0,0)$  à  $(2,2)$  et les mots correspondants.

### 1.3.8.1 Correspondance entre tableaux de Young et chemins

Dans un tableau standard de Young de partition  $\lambda = (k, n)$ , les cases sont remplies de gauche à droite dans chaque ligne. Si le  $i$ ème pas dans le chemin  $P$  est un pas horizontal, entrer le  $i$  dans la première case non remplie de la première ligne. S'il s'agit d'un pas vertical, entrer le  $i$  dans la première case non remplie de la deuxième ligne. L'illustration suivante assure cette correspondance,

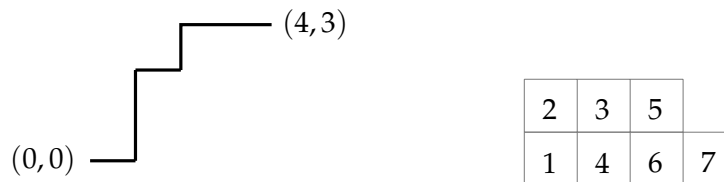


FIGURE 1.9 – Correspondance entre un tableau de  $\lambda = (4,3)$  et un chemin de  $(0,0)$  à  $(4,3)$ .

### 1.3.8.2 Aire de chemin

Soit  $h(p_i)$  le nombre de cases qui se trouvent sous le pas horizontal  $p_i$ .

**Définition 1.3.35.** L'aire de  $P$  est le nombre de cases (dont l'aire est l'unité de surface) qui se trouvent sous le chemin, c-à-d :

$$\text{Aire}(P) := \sum_{p_i \text{ horizontal}} h(p_i) \tag{1.12}$$

**Exemple 1.3.36.** L'aire de l'exemple dans la Figure 1.6 est égal 10.

**Définition 1.3.37.** L'énumération de cette aire associée au chemin  $P$  donne les coefficients  $q$ -binomiaux,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \sum q^{\text{Aire}(P)}.$$

**Exemple 1.3.38.** Pour  $n = 4$  et  $k = 2$  on présente les 6 chemins, et le polynôme correspondant,

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4.$$

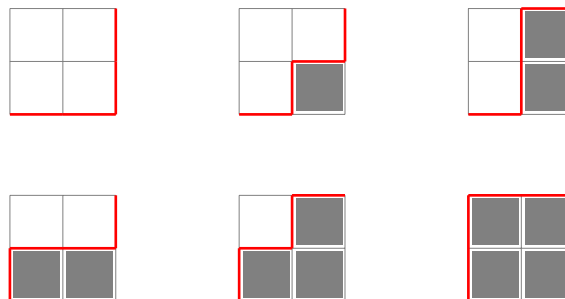


FIGURE 1.10 – Tous les chemins et l'aires correspondantes de  $(0,0)$  à  $(2,2)$ .

Le lecteur est invité à consulter [B18, DP02, M79].

## 1.4 Fonctions symétriques

La théorie des fonctions symétriques a de nombreuses applications en combinatoire énumérative, ainsi qu'à d'autres branches des mathématiques comme la théorie des groupes et la géométrie algébrique [M95].

Soient  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  un ensemble dénombrable et  $Z[x_1, x_2, \dots]$  l'anneau des polynômes, à coefficients entiers, en les variables  $x_1, x_2, \dots$ . Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_X$  des permutations de  $X$  agit de façon naturelle sur l'anneau  $Z[x_1, x_2, \dots]$ . Les polynômes invariants par permutation des variables sont dites *symétriques* et  $Z[x_1, x_2, \dots]^{\mathfrak{S}_X}$  le sous-anneau des polynômes symétriques.

**Définition 1.4.1.** Soit  $X = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  un ensemble de variables dénombrables. Une fonction symétrique homogène est une série formelle invariante sous toutes les permutations possibles de ses variables  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . On écrit,

$$f(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, x_{\omega(3)}, \dots) = f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n. \quad (1.13)$$

### 1.4.1 Fonctions symétriques monomiales

**Définition 1.4.2.** Soit  $\lambda$  une partition de longueur  $\leq n$ . Pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , on appelle fonction symétrique monomiale tout polynôme  $m_\lambda$  écrit,

$$m_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\alpha} x^\alpha, \quad (1.14)$$

avec  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  est un monôme de  $m_\lambda$ .

**Exemple 1.4.3.** Pour  $n = 4$ , on a

$$\begin{aligned} m_1(4) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, & m_{11111}(4) &= 0, \\ m_{11}(4) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\ m_2(4) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \end{aligned}$$

**Proposition 1.4.4.** Pour tout  $k \geq 0$ , l'ensemble  $\{m_\lambda \mid \lambda \vdash k\}$  des fonctions symétriques monomiales est une base de  $Z_k$ . En plus  $\dim Z_k = P(k)$ , le nombre de partitions de  $k$ .

Pour voir la démonstration de cette proposition consulter [E19, chapitre 1].

### 1.4.2 Fonctions symétriques élémentaires et complètes

**Définition 1.4.5.** La fonction symétrique élémentaire est la somme de tous les produits de  $n$  variables distinctes  $x_i$  donnée par la formule,

$$e_k(n) = m_{(1^k)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \quad (1.15)$$

avec  $e_0 = m_\emptyset = 1$ .

**Exemple 1.4.6.** Pour  $n = 4$ , on a

$$\begin{aligned} e_1(4) &= m_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ e_2(4) &= m_{11} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\ e_3(4) &= m_{111} = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

La fonction génératrice des  $e_k(n)$  est,

$$\sum_{k=0}^n e_k t^k = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t). \quad (1.16)$$

**Interprétation :** On peut donner une interprétation de  $e_3(4)$  par partition et pour  $n = 4$  (la première colonne de chaque diagramme de TSS),

3	4	4	4
2	2	3	3
1	1	1	2

Le monôme associé à un tableau est le produit de tous les  $x_{i,(i=1,\dots,4)}$ . Alors,

$$e_3(4) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4.$$

**Remarque 1.4.7.** Pour chaque partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , on introduit

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_k}.$$

Par exemple pour  $n = 4$ , on a :  $e_{(1,1)} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$ .

**Remarque 1.4.8.** Le sous-anneau  $Z[x_1, x_2, \dots]^{\mathfrak{S}_x}$  est engendré par les fonctions symétriques élémentaires.

**Définition 1.4.9.** La fonction symétrique complète est la somme de tous les produits de  $n$  variables distinctes  $x_i$  donnée par la formule,

$$h_k(n) = \sum_{|\lambda|=k} m_\lambda = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad (1.17)$$

avec  $h_0 = m_\emptyset = 1$ .

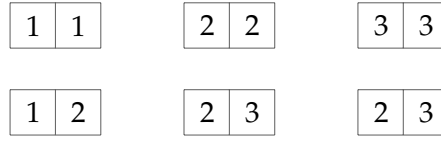
La fonction génératrice des  $h_k(n)$  est

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k t^k = \prod_{i=1}^n (1 - x_i t)^{-1}. \quad (1.18)$$

**Exemple 1.4.10.** Pour  $n = 3$ , on a

$$\begin{aligned} h_1(3) &= m_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ h_2(3) &= m_2 + m_{11} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \\ h_3(3) &= m_3 + m_{21} + m_{111} \\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

**Interprétation :** On peut donner une interprétation de  $h_3(2)$  par partition et pour  $n = 4$  (la première ligne de chaque diagramme de TSS),



Le monôme associé à un tableau est le produit de tous les  $x_{i,(i=1,2)}$ . Alors,

$$h_2(3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, .$$

**Remarque 1.4.11.** Pour chaque partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , on introduit

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_k}.$$

Par exemple pour  $n = 3$ , on a :  $h_{(2,1)}(3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3)$ .

En regardant les deux fonctions génératrices de  $e_\lambda$  et  $h_\lambda$ , on peut conclure les liens fondamentaux entre les fonctions symétriques élémentaires et complètes données par les relations suivantes,

$$e(t)h(-t) = 1, \tag{1.19}$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k e_k h_{n-k} = 0, \quad n \geq 1. \tag{1.20}$$

### 1.4.3 Sommes de puissances

**Définition 1.4.12.** La fonction symétrique somme de puissances est la somme de tous les  $n$  variables distinctes  $x_i$  donnée par la formule,

$$p_k(n) = \sum_{|\lambda|=k} m_k = \sum_{i=1}^n x_i^k, \tag{1.21}$$

avec  $p_0 = m_\emptyset = 1$ .

La fonction génératrice des  $p_k(n)$  est

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k t^{k-1} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(1 - x_i t)}. \tag{1.22}$$

**Exemple 1.4.13.** Pour  $n = 3$ , on a

$$\begin{aligned} p_1(3) &= m_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ p_2(3) &= m_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ p_3(3) &= m_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3. \end{aligned}$$

**Remarque 1.4.14.** Pour chaque partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , on introduit

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_k}.$$

Par exemple pour  $n = 3$ , on a :  $p_{(2,1)}(3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3)$ .

#### 1.4.4 Fonction Schur

Les fonctions Schur ont été introduites par Schur, et elles interviennent de manière profonde dans les applications des fonctions symétriques.

**Définition 1.4.15.** (Combinatoire) Pour toute partition  $\lambda$  et tout entier  $n \geq 1$ . On appelle  $s_\lambda$  la fonction Schur associée à  $\lambda$  notée par,

$$s_\lambda = \sum_{T \in TSS(\lambda)} x^T, \quad (1.23)$$

où  $TSS$  sont tous les tableaux semi-standards définient en 1.3.26.

**Exemple 1.4.16.** Les tableaux semi-standard de  $\lambda = (2, 1)$  pour  $n = 2$  sont,

2	1	1		2	1	2
1	1			1	2	

FIGURE 1.11 – Les deux tableaux semi-standards de  $\lambda = (2, 1)$  pour  $n = 2$ .

Et la fonction de Schur s'écrit,

$$s_{21} = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1.$$

Pour s'enrichir et avoir plus de détails sur les fonctions symétriques, consultez la documentation [E19, F74, M37, M60, M95, Ma79, MR15, S82, S91].

## 1.5 Coefficients binomiaux et binomiaux

### 1.5.1 Coefficients binomiaux

Le Traité du triangle arithmétique est une des œuvres les plus célèbres de Pascal. Cependant, les historiens se sont contestés à Pascal l'originalité de cette découverte, bien qu'ils trouvaient déjà ce triangle en Inde, chez les musulmans (Omar khayyám) et même chez de nombreux auteurs occidentaux du XVI<sup>e</sup> siècle [G19, B93].

**Définition 1.5.1.** Soient  $n, k \in \mathbb{N}$  avec  $k \leq n$ . On appelle coefficient binomial le nombre  $\binom{n}{k}$  qui égale au nombre de sous-ensembles à  $k$  éléments d'un ensemble de  $n$  éléments. Ces



coefficients peuvent être obtenus à partir de la fonction génératrice comme les coefficients dans le développement de l'expression,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad (1.24)$$

avec,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad k \leq n.$$

Comme propriétés déjà établies, on a

1. la relation de la symétrie,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

2. la relation de récurrence,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Pour plus d'identités, voir [R68].

En plaçant les valeurs des coefficients binomiaux dans un tableau de forme triangulaire, on obtient le triangle de pascal.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

TABLE 1.1 – Triangle de Pascal.

### 1.5.2 Coefficients binomiaux

Bondarenko [B93] a donné une interprétation combinatoire des éléments  $\binom{n}{k}_s$  de triangle de Pascal généralisé, comme étant le nombre de façons différentes de répartir  $k$  objets uniformes sur  $n$  boîtes, chaque boîtes pouvant contenir au plus  $s$  objets,  $0 \leq k \leq sn$ .

Les coefficients binomiaux sont une extension naturelle des coefficients binomiaux, et ils sont définis de la manière suivante ([AB87, B86, B93, SH79] et récemment Belbachir et al [BBK08]),

soient  $s \geq 1$  et  $n \geq 0$  deux entiers, pour un entier  $k = 1, 2, \dots, sn$ , le coefficient bi<sup>s</sup>omial  $\binom{n}{k}_s$  est défini comme étant le  $k$ -ième coefficient dans le développement,

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^s)^n = \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s x^k, \quad (1.25)$$

avec  $\binom{n}{k}_s = 0$  pour  $k < 0$  ou  $k > sn$ .

**Remarque 1.5.2.** Si  $s = 1$ , alors  $\binom{n}{k}_1 = \binom{n}{k}$  est le coefficient binomial classique.

Une expression via les coefficients binomiaux,

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_s = k} \binom{n}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-1}}{j_s}. \quad (1.26)$$

**Exemple 1.5.3.** Pour  $s = 2$  et  $n = 2$  on écrit la formule de bi<sup>2</sup>omial,

$$(1 + x + x^2)^2 = \sum_{k=0}^4 \binom{2}{k}_2 x^k,$$

et comme,

$$\binom{2}{0}_2 = 1, \quad \binom{2}{1}_2 = 2, \quad \binom{2}{2}_2 = 3, \quad \binom{2}{3}_2 = 2, \quad \binom{2}{4}_2 = 1,$$

donc,

$$(1 + x + x^2)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4.$$

On présente ici quelques propriétés déjà établies dans la littérature des coefficients bi<sup>s</sup>omiaux,

1- La relation de symétrie

$$\binom{n}{k}_s = \binom{n}{sn - k}_s, \quad (1.27)$$

2- La relation de récurrence longitudinale

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^s \binom{n-1}{k-m}_s, \quad (1.28)$$

3- La relation de récurrence diagonale

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^s \binom{n}{m} \binom{m}{k-m}_{s-1}. \quad (1.29)$$

Le théorème de Moivre [M67] au dessous donne une expression qui exprime les coefficients bi<sup>s</sup>omiaux avec un unique symbole de sommation.

**Théorème 1.5.4.** L'identité suivante est satisfaite,

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j=0}^{\lfloor k/(s+1) \rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{k-j(s+1)n-1}{n-1}. \quad (1.30)$$

On présente les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux pour  $s = 2$  par le tableau de forme triangulaire suivant,

$n/k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1												
1	1	1	1										
2	1	2	3	2	1								
3	1	3	6	7	6	3	1						
4	1	4	10	16	19	16	10	4	1				
5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1		
6	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1

TABLE 1.2 – Triangle des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux  $s = 2$

## 1.6 Nombres de Stirling

Cette section est consacrée à l'étude des nombres introduits au xviii<sup>e</sup> siècle par James Stirling et intervenant en particulier en théorie des probabilités et dans l'étude de la fiabilité de certains circuits électroniques. Il en existe deux espèces, nommés les nombres de Stirling de première espèce et les nombres de Stirling de deuxième espèce [S30, DW14].

Diverses notations sont utilisées pour les nombres de Stirling, mais celles que l'on utilise sont,

- ◇  $c(n, k)$  pour les nombres de Stirling de première espèce,
- ◇  $S(n, k)$  pour les nombres de Stirling de deuxième espèce.

Répondant aux deux questions suivantes,

- $Q_1$  : Combien y a-t-il de permutations de  $[n]$  qui contiennent exactement  $k$  cycles ?
- $Q_2$  : Combien y a-t-il de partitions de  $[n]$  en  $k$  blocs ?

### 1.6.1 Nombres de Stirling de première espèce

Dans cette section, on étudie les propriétés élémentaires des nombres de Stirling de première espèce (non signé) ainsi que leur interprétation combinatoire (voir [K92]).

$R_1$  : On sait que le nombre de permutations de  $[3]$  est 6, comme il est montré au dessous,

$$[3] = \{123, 132, 213, 312, 231, 321\}.$$

Maintenant, cherchant une autre configuration qui consiste à déterminer tous les cycles possibles de  $[3]$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 (123)(132) & ((1)(23))((12)(3))((13)(2)) & ((1)(2)(3)) \\
 1 \text{ cycle} & 2 \text{ cycles} & 3 \text{ cycles}
 \end{array}$$

L'exemple précédent peut se généraliser sur  $k$  cycles de  $[n]$ .

**Définition 1.6.1.** Le nombre de permutations de  $[n]$  qui fournissent exactement  $k$  cycles est le nombre de Stirling de première espèce  $c(n, k)$ .

En gardant le même principe, le nombre de Stirling de première espèce peut être interpréter comme la somme de tous les produits de  $n - k$  éléments de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ . Par exemple  $c(5, 2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 50$ .

### 1.6.1.1 Relations de récurrence

Utilisant le principe de l'élément distingué. Pour se faire, on applique le principe sur le dernier élément  $a_n$  de l'ensemble  $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

On est en présence de deux cas,

**Cas 1 :**  $a_n$  est un point fixe. Ceci revient à dire qu'il y a une seule façon de chercher le nombre de permutations de  $[n - 1]$  en  $k - 1$  cycles, c'est  $c(n - 1, k - 1)$ .

**Cas 2 :**  $a_n$  est un élément. Ceci revient à dire qu'il y a  $n - 1$  façon de placer  $a_n$  dans les permutations de  $[n - 1]$  qui contient exactement  $k$  cycles, c'est  $(n - 1)c(n - 1, k)$ .

En résumant, à partir de ces deux cas, le nombre de permutations de  $[n]$  en  $k$  cycles est fournit par la récurrence suivante,

$$c(n, k) = c(n - 1, k - 1) + (n - 1)c(n - 1, k). \tag{1.31}$$

avec  $c(0, 0) = 1$  et  $c(n, 0) = 0$  lorsque  $n > 0$ .

À partir de cette récurrence, on peut illustrer le triangle du Stirling de première espèce qui est de même format que celui du Pascal.

$n/k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
7	0	720	1767	1624	735	175	21	1

TABLE 1.3 – Nombre de Stirling de première espèce.

Une autre façon de voir ces nombres, comme étant des coefficients des polynômes  $x^n$  dans la base  $x^{\bar{k}}$ . C-à-d, on peut écrire de façon unique le polynôme  $x^n$  comme combinaison linéaire des polynômes  $x^{\bar{k}}$ .

**Définition 1.6.2.** Les nombres de Stirling de première espèce sont les nombres qui figurent comme coefficients dans la base  $x^{\bar{n}}$ ,

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n c(n, k) x^k, \quad (1.32)$$

avec,  $x^{\bar{n}} = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)$ .

**Exemple 1.6.3.**  $x^{\bar{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3) = 6x^1 + 11x^2 + 6x^3 + x^4 = c(4, 1)x^1 + c(4, 2)x^2 + c(4, 3)x^3 + c(4, 4)x^4$ .

### Séries génératrices

**Théorème 1.6.4.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^{n-k} c(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{\log^k(1+x)}{k!}. \quad (1.33)$$

*Démonstration.* On a,

$$\begin{aligned} (1+x)^y &= \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{x^n}{n!}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n s(n, k) y^k \right) \frac{x^n}{n!}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!} \right) y^k, \end{aligned}$$

en outre et d'après le développement de Taylor on a,

$$(1+x)^y = \exp^{y \log(1+x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k(1+x)}{k!} y^k,$$

par identification, on trouve

$$\sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^{n-k} c(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{\log^k(1+x)}{k!}.$$

□

Voici une formule explicite assez importante pour les nombres de Stirling de première espèce.

$$c(n, k) = \frac{n!}{k!} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \frac{1}{n_1 n_2 \dots n_k}. \quad (1.34)$$

### 1.6.2 Nombres de Stirling de deuxième espèce

$\mathbf{R}_2$  : Pour donner une idée global, regardant la configuration au dessous qui montre le nombre de façons de ranger trois boules numéroté de 1 à 3 en blocs ( $k = \overline{1,3}$ ).

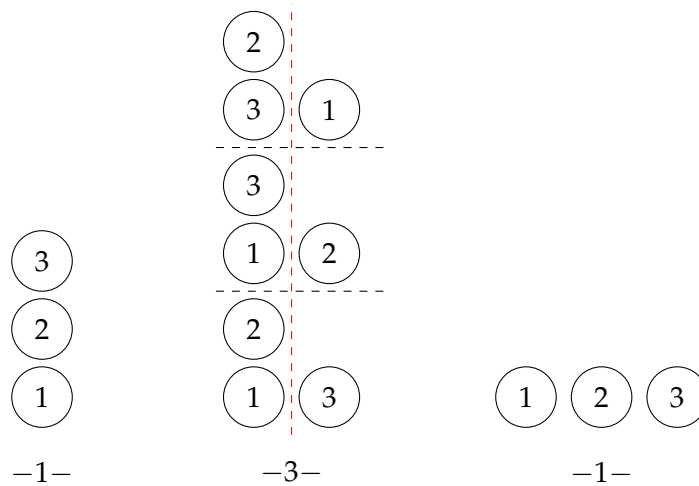


FIGURE 1.12 – Les nombres de Stirling de deuxième espèce  $S(3, k) = 1, 3, 1$ .

**Définition 1.6.5.** Le nombre de partitions de  $[n]$  en  $k$  blocs est le nombre de Stirling de deuxième espèce  $S(n, k)$ .

#### 1.6.2.1 Relations de récurrence

**Première relation :** Utilisant le principe de l'élément distingué. Pour partitionner  $[n]$  en  $k$  blocs, il faut partitionner  $[n - 1]$ , puis le dernier entier.

On est en présence de deux cas,

**Cas 1 :** On peut partitionner  $[n - 1]$  en  $k - 1$  blocs, et il reste une seule façon pour le dernier entier, dans ce cas c'est le nombre  $S(n - 1, k - 1)$ .

**Cas 2 :** On peut partitionner  $[n - 1]$  en  $k$  blocs, et il reste  $k$  façons pour le dernier entier, dans ce cas c'est le nombre  $kS(n - 1, k)$ .

Ce qui reste est de regrouper les deux cas. Alors, on peut écrire la relation de récurrence du nombre de Stirling de deuxième espèce,

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k), \quad (1.35)$$

avec  $S(0, 0) = 1$  et  $S(n, 0) = 0$  lorsque  $n > 0$ .

À partir de cette récurrence, on peut illustrer le triangle du Stirling de deuxième espèce qui est du même format que celui du Pascal.

$n/k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

TABLE 1.4 – Nombre de Stirling de deuxième espèce.

**Deuxième relation :** Considérons cette fois le bloc dans lequel  $n$  apparaît. Le choix de placer certains entiers  $l$ , ( $l = 0, \dots, n - 1$ ) dans ce bloc est  $\binom{n-1}{l}$ . Cela dit qu'il nous reste de placer  $n - 1 - l$  entiers dans  $k - 1$  blocs. Donc la récurrence est :

$$S(n, k) = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} S(n-1-l, k-1). \tag{1.36}$$

Une autre façon de voir ces nombres, comme étant des coefficients des polynômes  $x^n$  dans la base  $x^k$ . C-à-d, on peut écrire de façon unique le polynôme  $x^n$  comme combinaison linéaire des polynômes  $x^k$ .

**Définition 1.6.6.** Les nombres de Stirling de deuxième espèce sont les nombres qui figurent comme coefficients dans la base  $x^k$ ,

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) x^k, \tag{1.37}$$

avec,  $x^k = x(x-1)(x-2) \dots (x-k+1)$ .

**Exemple 1.6.7.**  $x^4 = S(4, 1)x^1 + S(4, 2)x^2 + S(4, 3)x^3 + S(4, 4)x^4 = x^1 + 7x^2 + 6x^3 + x^4$ .

**Définition 1.6.8.** Le nombre total de partitions de  $[n]$  sur tous les blocs est le nombre de Bell,

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k). \tag{1.38}$$

Les premières valeurs des nombres de Bell sont les suivantes,

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$B_n$	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	...

### 1.6.2.2 Formules explicites

**Théorème 1.6.9.** Pour tout  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$  on a,

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \tag{1.39}$$

Pour voir plus de détail sur cette formule voir [C74, SPS01].

*Démonstration. (Preuve combinatoire)* On sait qu'il y a  $k^n$  façons de ranger  $n$  boules différentes en  $k$  urnes différentes. Mais dans notre cas les urnes ne doivent pas être vides. Pour corriger ce mécanisme, on doit retirer les cas où les urnes sont vides. On a  $\binom{k}{i}$  façons de choisir  $i$  urnes vides et  $(k-i)^n$  façons de ranger  $n$  boules sur  $k-i$  urnes. Maintenant, le problème est qu'on a retiré  $i+1$  fois les cas où aux moins  $i+1$  urnes sont vides. Il faut donc les ajouter au fur et à mesure à nouveau de cette façon,

$$\begin{aligned} & k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n, \\ & k^n + \binom{k}{2}(k-2)^n, \\ & \dots \\ & \sum_i^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \end{aligned}$$

Finalement, on doit retirer les cas où les urnes sont ordonnées, car pour les nombre de Stirling de 2<sup>ième</sup> espèce les groupes sont identiques (blocs). Alors, on obtient la formule,

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

□

Voici d'autres formules explicites assez importantes pour les nombres de Stirling de seconde espèce.

$$S(n, k) = \frac{n!}{k!} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \frac{1}{n_1!n_2!\dots n_k!}. \quad (1.40)$$

$$S(n, k) = \sum_{r_1+r_2+\dots+r_k=n-k} 1^{r_1} 2^{r_2} \dots k^{r_k}. \quad (1.41)$$

### Séries génératrices

Comme on a vu dans la section des séries génératrices que plusieurs importantes suites, possèdent des séries génératrices ordinaires et exponentielles, c'est le cas de la suite des nombres de Stirling de deuxième espèce. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}. \quad (1.42)$$

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}. \quad (1.43)$$

Pour s'enrichir au niveau de démonstration voir [S99, DW14].



**Note :** Henry Goud dans ces travaux [G60a, G60b] a pu établir un lien entre les deux nombre de Stirling de deuxième et de première espèce par la relation,

$$S(n, k) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k-1+j}{k-k+j} \binom{2n-k}{k-k-j} c(n-k+j, j). \quad (1.44)$$

## Chapitre 2

# Fonction symétrique élémentaire généralisée

### Introduction

Dans ce chapitre, d'une part, on propose une extension de la fonction symétrique élémentaire pour interpréter les coefficients binomiaux et leurs analogues. D'autre part, selon cette fonction, on donne une interprétation de ces coefficients par les chemins dans le plan  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  et par les pavages des rectangles  $1 \times n$ . Enfin, certaines identités de ces coefficients seront établies. Ces résultats sont la suite du travail effectué par Belbachir et Benmezai [BA14].

Il existe de nombreuses généralisations possibles du triangle de Pascal, comme.

- Pyramides de Pascal. Soit  $r \geq 2$  un entier (la dimension), et considérons l'application

$$\begin{aligned} p : \mathbb{N}^r &\rightarrow \mathbb{N} \\ (n_1, \dots, n_r) &\mapsto \binom{n_1 + \dots + n_r}{n_1, \dots, n_r}. \end{aligned}$$

L'application  $p$  fournit le nombre de façons de diviser un ensemble de  $n_1 + \dots + n_r$  objets distincts en sous-ensembles disjoints par paires  $S_i$  de cardinalité  $n_i, i = 1, \dots, r$ . Lorsque  $r = 2$ , l'application renvoie les coefficients binomiaux classiques dans le triangle de Pascal, (pour plus de détails, voir [B86, B93]).

- Triangles arithmétiques avec la règle de Pascal. C'est le terme qui a été utilisé pour le triangle original par Pascal lui-même. Soit maintenant les deux suites réelles  $(a_n)$  et  $(b_n)$  données avec  $a_0 = b_0$ . Ensley [E13] a défini l'objet du triangle arithmétique généralisé (TAG, en abrégé) pour  $(a_n)$  et  $(b_n)$  comme suit. Soit  $G(n, 0) = a_n, G(n, n) = b_n$  et

$$G(n, k) = G(n-1, k-1) + G(n-1, k) \text{ si } 1 \leq k \leq n-1.$$

H. Belbachir et L. Szalay [BS14] ont établi un concept plus général de triangles arithmétiques généralisés.

- Triangles de Pascal hyperboliques. Belbachir et al. [BN16] ont introduit une nouvelle généralisation du triangle de Pascal. On l'appelle le triangle de Pascal hyperbolique car le contexte mathématique remonte aux pyramides régulières sur le plan hyperbolique. Ils ont décrit précisément la procédure permettant d'obtenir un type donné de triangle de Pascal hyperbolique à partir d'une pyramide. L. Németh [N16] a introduit ce type dans les pyramides de Pascal.
- Triangles de Pascal généralisé [B86, B93, BBK08]. Voir la Section 1.5 du Chapitre 1.

## 2.1 Pavages des rectangles $1 \times n$

Dans cette section, on va étudier le nombre de façons dont un pavage rectangulaire  $1 \times n$  peut être coloré avec des carrés de deux couleurs. ou un mélange de carrés  $1 \times 1$  et de dominos  $1 \times 2$ .

### 2.1.1 Pavage de deux couleurs

Soit  $T^n$  désigne le nombre de façons de colorier un pavage de  $n$  carrés avec deux couleurs. On constate qu'il y a deux façons de colorier un pavage de  $n$  carrés sachant le nombre  $T^{n-1}$ . Le dernier carré ajouté au pavage de  $n-1$  carrés soit coloré ou non. Il apparaît donc que nous avons la relation de récurrence,

$$T^n = 2T^{n-1}.$$

En itérant la récurrence avec la condition initiale  $T^0 = 1$ , on a

$$T^n = 2T^{n-1} = 2(2T^{n-2}) = \dots = 2^n.$$

**Exemple 2.1.1.** Soit un pavage de 3 carrés, il y a 8 façons possibles de colorier ce pavage.

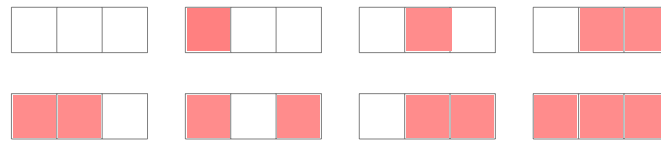


FIGURE 2.1 – 8 pavages avec deux couleurs.

### 2.1.2 Pavage de $k$ carrés en rouges

Soit  $T^{n,k}$  désigne le nombre de façons de colorer un pavage  $1 \times n$  avec  $k$  carrés rouges et  $n - k$  carrés verts. On constate qu'il y a deux possibilités,

1. Le dernier carré du pavage est rouge et le nombre possible des pavages est  $T^{n-1,k-1}$ .
2. Le dernier carré du pavage est vert et le nombre possible des pavages est  $T^{n-1,k}$ .

Donc, il est bien évident que nous avons la relation de récurrence,

$$T^{n,k} = T^{n-1,k-1} + T^{n-1,k}. \tag{2.1}$$

**Remarque 2.1.2.** Le nombre de façons de choisir  $k$  carrés parmi  $n$  est exactement le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$ .

**Remarque 2.1.3.** Le nombre de façons de remplir un pavage  $1 \times n$  avec des carrés et des dominos est donné par le  $n$ ème nombre de Fibonacci  $F_n$ . Tel que,

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2. \tag{2.2}$$

## 2.2 Les coefficients $q$ -binomiaux

Le  $q$ -analogue d'un théorème, d'une identité ou d'une expression est une généralisation impliquant un nouveau paramètre  $q$  qui se spécialise en le théorème original lorsque l'on prend le cas limite où  $q$  tend vers 1. Les premiers  $q$ -analogues furent les séries hypergéométriques basiques, introduites au  $XIX^e$  siècle. Pour plus d'informations voir Exton [E83].

**Définition 2.2.1.** — Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on définit son  $q$ -analogue  $[n]_q$  comme un polynôme en  $q$ ,

$$[n]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

— Ensuite, le  $q$ -factoriel est défini de manière naturel comme,

$$[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [2]_q [1]_q.$$

**Remarque 2.2.2.** On note que si  $q = 1$  alors,

$$[n]_1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n,$$

$$[n]_1! = n!.$$

**Définition 2.2.3.** Le  $q$ -analogue du coefficient binomial, appelé aussi le polynôme de Gauss [1], est défini pour  $0 \leq k \leq n$  par,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}, \quad (2.3)$$

où  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q=1} = \binom{n}{k}$  est le coefficient binomial classique.

Les coefficients  $q$ -binomiaux satisfont les relations de la symétrie et de récurrence suivantes.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q, \quad \text{pour } k \leq n, \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n. \quad (2.5)$$

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur le corps  $\mathcal{F}_q$  de  $q$  éléments. Andrews [A98], a montré que  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  compte le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  tel que,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q)(q^k - q^2) \cdots (q^k - q^{k-1})} = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}.$$

Dans [K71], Knuth donna une interprétation combinatoire des coefficients  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  comme étant le nombre de partitions dont le diagramme de Ferrers s'inscrit dans un rectangle  $k(n-k)$ , pondéré par la taille de la partition. C'est-à-dire,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{\lambda \subset (n-k)^k} q^{|\lambda|}, \quad (2.6)$$

où  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  avec  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq n-k$ , et  $|\lambda| = \sum \lambda_i$ .

**Exemple 2.2.4.** Par exemple le coefficient  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1$ . Cela nous donne un total de six partitions distinctes qui correspondent à un rectangle  $2 \times 2$  et que celles-ci comportent une partition du nombre 4, une du nombre 3, deux du nombre 2, une de 1 et une de 0.

Ce nombre est souvent réinterpréter en termes de nombre d'inversions comme suit,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{inv \omega \in \mathcal{C}(1^k 2^{n-k})} q^{inv \omega},$$

où  $\mathcal{C}(1^k 2^{n-k})$  est l'ensemble des mots  $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$  composés en  $k$  lettres du nombre 1 et  $n - k$  lettres de 2. Le nombre d'inversions de  $\omega$ , est le nombre de  $i < j$  tel que  $\omega_i > \omega_j$ .

**Exemple 2.2.5.** Pour le nombre  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q$  l'ensemble des mots est,

$$\mathcal{C}(1^2 2^2) = \{\underbrace{1122}_{q^4}, \underbrace{1212}_{q^3}, \underbrace{1221}_{q^2}, \underbrace{2112}_{q^2}, \underbrace{2121}_q, \underbrace{2211}_{q^0}\},$$

ce qui fait,  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1$ .

En d'autre terme, on sait que les coefficients  $q$ -binomiaux se manifestent dans l'expression,

$$\prod_{k=1}^n (1 + q^{k-1} x) = \sum_{k=0}^{n-1} q^{\frac{1}{2}k(k-1)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k. \quad (2.7)$$

### 2.3 Les analogues des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux

Warnaar [W97] a introduit un  $q$ -analogue des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux. Esuite, Il a donnée à ses coefficients une interprétation combinatoire.

**Définition 2.3.1.** Pour  $p = 0, \dots, s$ , on définit les coefficients  $q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux comme,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = \sum_{j_1 + j_2 + \cdots + j_s = k} q^{\sum_{l=1}^{s-1} (n-j_l)j_{l+1} - \sum_{l=s-p}^{s-1} j_{l+1}} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} n \\ j_s \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

avec  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = 0$  pour  $k > sn$  et  $\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = \delta_{k,0}$  (Symbole de Kronecker).

Maintenant, On présente quelques propriétés de la symétrie et de la récurrence comme suit,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = q^{(s-p)(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ sn-k \end{bmatrix}_{s-p}^{(p)} \text{ et } \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(0)} = \begin{bmatrix} n \\ sn-k \end{bmatrix}_0^{(0)}, \quad (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = \sum_{m=0}^{s-p} q^{m(n-1)} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-m \end{bmatrix}_s^{(m)} + \sum_{m=s-p+1}^s q^{n(s-p)-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-m \end{bmatrix}_s^{(m)} \quad (2.10)$$

Une autre variante était proposée par Belbachir et Benmazai [BB14]

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} := \sum_{j_1 + j_2 + \cdots + j_s = k} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} n \\ j_s \end{bmatrix} q^{\sum_{r=1}^s \binom{j_r}{2}} (-1)^k a^{-\sum_{r=1}^s r j_r}, \quad (2.11)$$

avec  $a = \exp i \frac{2\pi}{s+1}$   $i^2 = -1$ .

En plus, les derniers auteurs ont proposé le coefficient  $q$ -bi<sup>s</sup>nomial de  $k$ -ième terme du produit.

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left( 1 + q^j z + \cdots + (q^j z)^s \right) = \sum_{k=0}^{sn} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} z^k. \quad (2.12)$$

Ils ont aussi suggéré dans [B18] de définir les coefficients  $p, q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux par,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} := \sum_{j_1 + j_2 + \cdots + j_s = k} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix}_{p,q} \cdots \begin{bmatrix} n \\ j_s \end{bmatrix}_{p,q} q^{\sum_{r=1}^s \binom{j_r}{2}} p^{\sum_{r=1}^s \binom{n-j_r}{2}} (-1)^k a^{-\sum_{r=1}^s r j_r}, \quad (2.13)$$

Le  $p, q$ -analogue des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux satisfait la relation,

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{t=0}^s (p^j x)^t (q^j y)^{s-t} \right) = \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} x^{ns-k} y^k. \quad (2.14)$$

Ces coefficients satisfont les récurrences,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} = \sum_{j=0}^s p^{n(s-j)} q^{nj} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}, \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} = \sum_{j=0}^s p^{ns-k+j} q^{k-j} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}. \quad (2.16)$$

## 2.4 Fonction symétrique élémentaire généralisée

Plusieurs extensions et commentaires sur ces coefficients ont été étudiés dans la littérature. Par exemple, Bondarenko [B93] donna une interprétation combinatoire des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s$  comme étant le nombre de différentes manières de distribuer  $k$  boules parmi  $n$  où chaque urne contient au plus  $s$  boules.

On désigne par  $x_i$  le nombre de boules dans une urne, l'interprétation combinatoire précédente donnée par Bondarenko est équivalente à évaluer le nombre de solutions du système

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k, \\ 0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \leq s, \end{cases} \quad (2.17)$$

Voir aussi, [BBK08].

En utilisant (2.17), une nouvelle fonction symétrique est donné pour interpréter les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux et leurs analogues comme suit.

**Définition 2.4.1.** Soit  $s$  un entier positif. On définit la fonction symétrique élémentaire généralisée par,

$$E_k^{(s)}(n) := E_k^{(s)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k \\ 0 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq s}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}, \quad (2.18)$$

avec  $E_0^{(s)}(n) = 1$ ,  $E_k^{(s)}(n) = 0$  si  $sn < k < 0$ .

**Exemple 2.4.2.** On pose  $s = 2$ .

$$\begin{array}{l}
 1 \\
 2 \\
 3
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{lll}
 E_0^{(2)}(1) = 1 & E_1^{(2)}(1) = x_1 & E_2^{(2)}(1) = x_1^2 \\
 E_0^{(2)}(2) = 1 & E_1^{(2)}(2) = x_1 + x_2 & E_2^{(2)}(2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \\
 E_3^{(2)}(2) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 & E_4^{(2)}(2) = x_1^2x_2^2 & \\
 E_0^{(2)}(3) = 1 & E_1^{(2)}(3) = x_1 + x_2 + x_3 & E_2^{(2)}(3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3
 \end{array}
 \right.$$

La fonction symétrique élémentaire généralisée satisfait la relation de récurrence suivante.

**Proposition 2.4.3.** Pour  $s$  entier positif, on a

$$E_k^{(s)}(n) = \sum_{j=0}^s x_n^j E_{k-j}^{(s)}(n-1). \quad (2.19)$$

*Démonstration.* On sait que,

$$E_k^{(s)}(n-1) = E_k^{(s)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=k \\ 0 \leq i_1, i_2, \dots, i_{n-1} \leq s}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_{n-1}^{i_{n-1}}$$

alors,

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^s x_n^j E_{k-j}^{(s)}(n-1) &= \sum_{j=0}^s x_n^j \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=k-j \\ 0 \leq i_1, i_2, \dots, i_{n-1} \leq s}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_{n-1}^{i_{n-1}} \\
 &= \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}+i_n=k \\ 0 \leq i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n \leq s}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_{n-1}^{i_{n-1}} x_n^{i_n} \\
 &= E_k^{(s)}(n).
 \end{aligned}$$

□

Remplaçant  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  par  $(1, q, \dots, q^{n-1})$  dans la Proposition 2.4.3, on obtient le résultat de Belbachir et Benmezai [BB14] (Théorème 2.5, Relation (13)).

**Corollaire 2.4.4.** Les coefficients  $q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux satisfont la relation de récurrence suivante,

$$\left[ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]_q^{(s)} = \sum_{j=0}^s q^{(n-1)j} \left[ \begin{array}{c} n-1 \\ k-j \end{array} \right]_q^{(s)}. \quad (2.20)$$

Comme les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux, ces coefficients sont construits à travers le  $s$ -triangle de Pascal, connu sous le nom de " $q$ -analogue de  $s$ -triangle de Pascal". Appliquant la relation de récurrence (2.20), on peut illustrer le triangle des coefficients  $q$ -trinomial.



$n/k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1	1		
2	1	$1 + q$	$1 + q + q^2$	$q + q^2$	$q^2$
3	1	$1 + q + q^2$	$1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$	$\dots$	$\dots$
4	1	$1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$	$1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^4 + q^6$	$\dots$	$\dots$

TABLE 2.1 – Tableau des valeurs de coefficients  $q$ -trinomialux.

Remplaçant  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  par  $(p^{n-1}, p^{n-2}q, \dots, q^{n-1})$  dans la Proposition 2.4.3, on obtient le résultat suivant,

**Corollaire 2.4.5.** Les coefficients  $p, q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux satisfont la relation de récurrence suivante,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} = \sum_{j=0}^s p^{k-j} q^{(n-1)j} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-j \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}. \tag{2.21}$$

Comme les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux, ces coefficients sont construits à travers le  $s$ -triangle de Pascal, connu sous le nom de " $p, q$ -analogue de  $s$ -triangle de Pascal". Appliquant la relation de récurrence (2.21), on peut illustrer le triangle des coefficients  $p, q$ -trinomialux.

$n/k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1	1		
2	1	$p + q$	$p^2 + pq + q^2$	$p^2q + pq^2$	$p^2q^2$
3	1	$p^2 + pq + q^2$	$p^4 + p^3q + 2p^2q^2 + pq^3 + q^4$	$\dots$	$\dots$
4	1	$p^3 + p^2q + pq^2 + q^3$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

TABLE 2.2 – Tableau des valeurs de coefficients  $p, q$ -trinomialux.

**Remarque 2.4.6.** Remplaçant  $s = 1$  dans la Définition 2.4.1, on obtient immédiatement la fonction symétrique homogène élémentaire  $e_k(n) = e_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , qui donne les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux et leurs analogues.

Par identification des Relations (1.28), (2.20) et (2.21) avec la relation de la Proposition (2.4.3), on aura les résultats suivants.

**Corollaire 2.4.7.** 1-  $E_k^{(s)}(1, 1, \dots, 1) = \binom{n}{k}_s$ ,

2-  $E_k^{(s)}(1, q, \dots, q^{n-1}) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}$ ,

3-  $E_k^{(s)}(p^{n-1}, p^{n-2}q, \dots, q^{n-1}) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)}$ .

## 2.5 Interprétation des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux et leurs analogues par les chemins

Dans cette section, on utilise le nombre des chemins dans le plan  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  entre deux points pour interpréter les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux  $\binom{n}{k}_s$ .

**Théorème 2.5.1.** Pour  $0 \leq k \leq sn$ , soient  $u_1 = (0,0)$  et  $v_1 = (k, n - 1)$  deux points. Le nombre de chemins dans le plan  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  allant de  $u_1$  à  $v_1$  en prenant au maximum  $s$  pas dans la direction Est (Est-Nord) est exactement les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux  $\binom{n}{k}_s$ .

*Démonstration.* On sait que les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux sont des spécialisations de la fonction symétrique élémentaire généralisée. Donc, il suffit d'interpréter cette fonction par les chemins. Il est facile de voir que la fonction symétrique élémentaire généralisée est une fonction génératrice de poids des chemins entre deux points. Pour chaque variable unitaire  $x_i$  en  $E_k^{(s)}(n)$ , on associe un pas unitaire horizontale (Est) pour chaque  $P$ , et si on suppose que chaque chemin commence par  $u_1 = (0,0)$ , il se termine sûrement par  $v_1 = (k, n - 1)$  avec au plus  $s$  pas dans la direction Est. Alors, les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux sont le nombre des chemins associés à  $E_k^{(s)}(n)$  (voir la Figure 2.2).  $\square$

La Figure 2.2 montre l'interprétation des chemins pour  $n = 3, s = 2$  et  $k = 4$ .

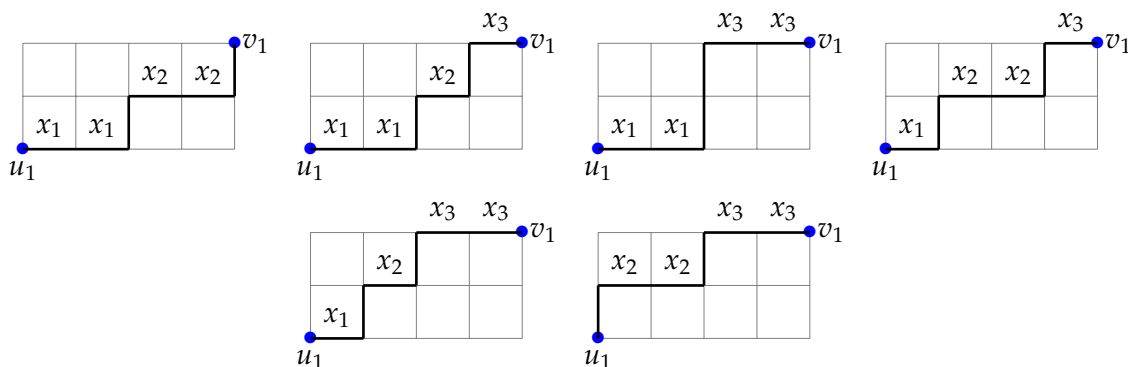


FIGURE 2.2 – Les six chemins allant de  $(0,0)$  à  $(4,2)$ . Ces chemins sont associés à  $E_4^{(2)}(3) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$ .

Pour calculer l'aire de chemin, on doit placer des carrés unitaires en dessous (au-dessus, respectivement) et à droite (à gauche, respectivement) dans la grille des chemins définis par le Théorème 3.3.3. Donc, on établit deux résultats comme suit.

**Proposition 2.5.2.** Soient les entiers positifs  $n, k$ , et  $s \geq 1$ . Le nombre  $q$ -bi<sup>s</sup>nomial (resp.  $p, q$ -bi<sup>s</sup>nomial) est une fonction génératrice de  $q$  (resp. de deux variables  $p$  et  $q$ ), pour des partitions avec  $k$  parts tel que chaque part apparaît au plus  $s$  fois et la plus grande part est  $\leq n - 1$ . Ce nombre est défini dans un diagramme  $k \times (n - 1)$ , comme suit

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q^{(s)} = \sum_{\lambda \subset (n-1)^k} q^{|\lambda|}, \tag{2.22}$$

et

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{(s)} = \sum_{\lambda \subset (n-1)^k} p^{|\lambda^c|} q^{|\lambda|}, \quad (2.23)$$

respectivement, où  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  avec  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq n-1$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_{i+s}$  pour  $i \geq 1$ ,  $\lambda_i^c = (n-1) - \lambda_i$ , et  $|\lambda| = \sum \lambda_i$ .

*Démonstration.* On utilise une interprétation par les chemins associés. Chaque partition qui correspond au diagramme  $k \times (n-1)$  est déterminée uniquement par un chemin allant de  $(0,0)$  à  $(k, n-1)$  défini dans le Théorème 3.3.3. Ensuite, on prend le poids du chemin pour être le poids de la partition associée.  $\square$

La Figure 2.3 montre cette interprétation pour  $n = 3, s = 2$  et  $k = 4$ .

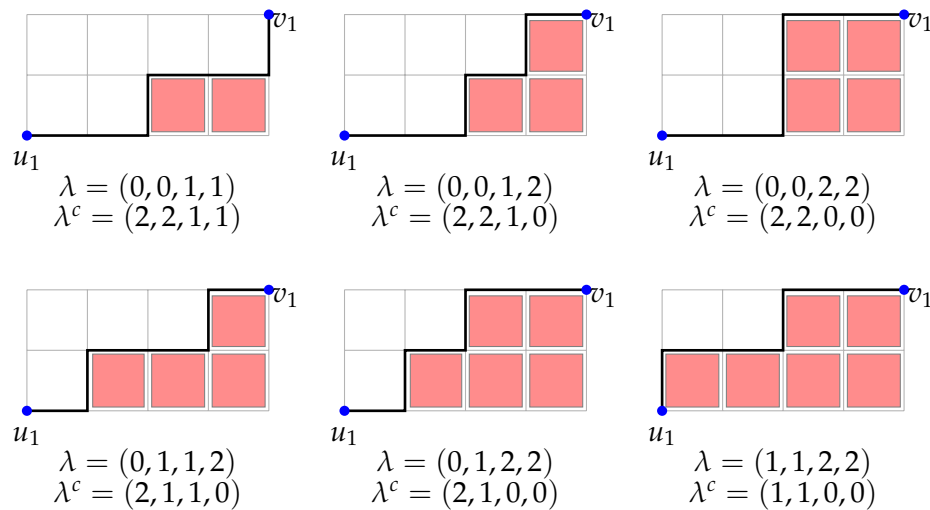


FIGURE 2.3 – Les six chemins allant de  $(0,0)$  à  $(4,2)$ . L'exposant de  $q$  (sur  $p$ , respectivement) dans le poids de chaque chemin est donné en comptant le nombre de carrés qui correspondent en dessous (au dessus, respectivement) et à droite (respectivement, à gauche) du chemin.

**Corollaire 2.5.3.** Le nombre  $q$ -binomial (resp.  $p, q$ -binomial) est une fonction génératrice du nombre de partitions en  $k$  distingués parts et la plus grande parts est  $\leq n-1$ . Ce nombre est défini dans un diagramme  $k \times (n-1)$ , comme suit

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{-\binom{k}{2}} \sum_{\lambda \subset (n-1)^k} q^{|\lambda|}, \quad (2.24)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = p^{-\binom{k}{2}} q^{-\binom{k}{2}} \sum_{\lambda \subset (n-1)^k} p^{|\lambda^c|} q^{|\lambda|}, \quad (2.25)$$

respectivement, tel que  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , avec  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k \leq n-1$ ,  $\lambda_i^c = (n-1) - \lambda_i$  et  $|\lambda| = \sum \lambda_i$ .

## 2.6 Quelques identités des coefficients $q$ -bi<sup>s</sup> nominaux

Dans cette section, on aborde deux identités pour les coefficients  $q$ -bi<sup>s</sup> nomiaux. Pour la démarche de la preuve, on utilise l'approche des chemins et la Relation (2.12) pour la première et la deuxième identité, respectivement.

**Proposition 2.6.1.** Pour  $0 \leq k \leq sn$ , on a

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = q^{(n-1)k - \frac{sn(n-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ sn - k \end{bmatrix}_q^{(s)}. \quad (2.26)$$

*Démonstration.* Soient,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_P q^{w(P)}, \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ sn - k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{P'} q^{w(P')}. \quad (2.28)$$

Où

- $w(P)$  est le poids de chaque chemin  $P$  allant de  $(0, 0)$  à  $(k, n - 1)$  avec au plus  $s$  pas dans la direction Est,
- $w(P')$  est le poids de chaque chemin  $P'$  allant de  $(0, 0)$  à  $(sn - k, n - 1)$  avec au plus  $s$  pas dans la direction Est.

Assumant que

- Le poids le plus élevé est associé au chemin commençant par  $(0, 0)$  et se termine par  $(sn, n - 1)$ , ce qui vaut  $q^{\frac{sn(n-1)}{2}}$  ;
- Le poids total de la grille entre le point  $(0, 0)$  et le point  $(k, n - 1)$  est égal à  $q^{(n-1)k}$ .

Donc, pour chaque chemin  $P$ , il n'existe qu'un chemin  $P'$ , tel que

$$q^{w(P')} = q^{\frac{sn(n-1)}{2} - ((n-1)k - w(P))}.$$

Comme  $\sum_P = \sum_{P'}$ , d'après le Théorème 3.3.3 et la Relation (1.27), on obtient

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ sn - k \end{bmatrix}_q^{(s)} &= \sum_{P'} q^{w(P')} = \sum_P q^{\frac{sn(n-1)}{2} - ((n-1)k - w(P))}, \\ &= q^{\frac{sn(n-1)}{2} - (n-1)k} \sum_P q^{w(P)}, \\ &= q^{\frac{sn(n-1)}{2} - (n-1)k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = q^{(n-1)k - \frac{sn(n-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ sn-k \end{bmatrix}_q^{(s)}.$$

□

L'identité  $q$ -Chu-Vandermonde peut être étendue au  $q$ -analogue des coefficients binomiaux comme suit.

**Proposition 2.6.2.** On a,

$$\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} m \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} q^{n(k-j)}, \quad (2.29)$$

ou

$$\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q^{(s)} q^{nj}. \quad (2.30)$$

*Démonstration.* Considérons le coefficient polynomial de  $x^k$  dans le produit,

$$\prod_{j=0}^{n+m-1} (1 + q^j z + \cdots + (q^j z)^s).$$

Par la Relation (2.12) ce coefficient polynomial est  $\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}$ . On a aussi

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n+m-1} (1 + q^j z + \cdots + (q^j z)^s) &= \prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j z + \cdots + (q^j z)^s) \\ &\quad \prod_{j=0}^{(m-1)} (1 + q^{n+j} z + \cdots + (q^{n+j} z)^s), \end{aligned}$$

en appliquant deux fois la Relation (2.12) à droite, on trouve

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n+m-1} (1 + q^j z + \cdots + (q^j z)^s) &= \prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j z + \cdots + (q^j z)^s) \\ &\quad \prod_{j=0}^{m-1} (1 + q^{n+j} z + \cdots + (q^{n+j} z)^s) \\ &= \sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} z^k \sum_{j=0}^{ms} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q^{(s)} (zq^n)^j \\ &= \sum_{k=0}^{(n+m)s} z^k \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} m \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} q^{n(k-j)}, \end{aligned}$$

ou

$$\prod_{j=0}^{n+m-1} (1 + q^j z + \cdots + (q^j z)^s) = \sum_{k=0}^{(n+m)s} z^k \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} q^{nj}.$$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} m \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} q^{n(k-j)},$$

ou

$$\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q^{(s)} q^{nj}.$$

□

**Corollaire 2.6.3.** Pour  $n \geq 0$  et  $s \geq 1$ , on a

$$\begin{bmatrix} 2n \\ sn \end{bmatrix}_q^{(s)} = q^{\frac{sn(n-1)}{2}} \sum_{k=0}^{sn} \left( \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} \right)^2 q^k. \quad (2.31)$$

*Preuve.* Via les deux Propositions 2.6.1 et 2.6.2, on a

$$\begin{bmatrix} 2n \\ sn \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{k=0}^{sn} \begin{bmatrix} n \\ sn-k \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} q^{nk} = q^{\frac{sn(n-1)}{2}} \sum_{k=0}^{sn} \left( \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} \right)^2 q^k.$$

□

**Remarque 2.6.4.** D'une manière similaire, on peut trouver facilement le  $p, q$ -analogue des identités (2.26), (2.29), (2.30) et (2.31) pour le cas des coefficients  $p, q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux.

## 2.7 Interprétation des coefficients $q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux par les pavages

Soit  $T_{n,k}^s$  est l'ensemble de tous les pavages de tailles  $(n+k-1)$  carrés, en utilisant exactement  $k$  carrés rouges et  $n-1$  carrés verts avec au plus  $s$  carrés rouges successifs. Soit également  $q^{w_T}$  le poids du pavage  $T$ . On calcule  $w_T$  pour chaque  $T \in T_{n,k}^s$  comme suit,

1. Attribuer un poids pour chaque carré du pavage. Un carré vert reçoit toujours le poids 1. Le carré rouges reçoit le poids  $q^m$ , tel que  $m$  est égale au nombre de carrés verts à gauche de ce carré rouges dans le pavage.
2. Calculer  $w_T$  en multipliant le poids  $q^m$  de tous les carrés rouges.

**Théorème 2.7.1.** Le coefficient  $q$ -bi<sup>s</sup>nomial est obtenu en faisant la somme des poids de tous les pavages de  $T_{n,k}^s$ . C'est,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{T \in T_{n,k}^s} q^{w_T}. \quad (2.32)$$

*Démonstration.* Notez qu'il existe une bijection évidente entre cette interprétation par pavage et l'interprétation des coefficients  $q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux par les partitions associés aux chemins. Pour chaque pavage de taille  $(n+k-1)$ , et de  $k$  carrés rouges dont au plus  $s$  successifs et  $n-1$  carrés verts, on construit un chemin associé allant de  $(0,0)$  à  $(k, n-1)$ .

Chaque carré vert représente un déplacement d'une unité vers le Nord et chaque carré rouge représente un déplacement d'une unité vers l'Est (voir la Figure 2.4).

Cette bijection donne clairement le même nombre de pavages et de partitions/chemins. Il ne reste plus qu'à montrer que le poids du pavage et le poids de partitions/chemins associés sont les mêmes. Pour voir cela, notons qu'on peut calculer le poids du chemin en additionnant une colonne à la fois. Autrement dit, étant donné que chaque colonne correspond à un déplacement à droite, le poids de cette colonne est donné par le nombre de déplacements vers le haut qui précèdent ce déplacement à droite dans le chemin. C'est précisément ainsi que nous calculons le poids de nos pavages, puisque le poids de chaque carré rouge est déterminé par le nombre de carrés verts qui le précèdent. Par conséquent, la bijection entre les chemins et les pavages préserve le poids. Puisque  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}$  compte le nombre de partitions dans un diagramme de taille  $k \times (n - 1)$  pondéré par la taille de la partition, il compte également le nombre de  $(n + k - 1)$  pavages avec  $k$  carrés rouges et  $n - 1$  carrés verts pondérés comme décrit ci-dessus.  $\square$

Par exemple, le poids du pavage est  $q^{0+0+1+1} = q^2$ , comme le montre la Figure 2.4.



FIGURE 2.4 – On voit ici une correspondance entre le pavage et leur chemin associé. Le pavage reçoit le poids  $q^2$  et le chemin de partition 2.

**Corollaire 2.7.2.** Le coefficient binominal  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s$  compte le nombre de façons de paver un rectangle de longueur  $n + k - 1$  en utilisant  $k$  carrés rouges et  $n - 1$  carrés verts avec au plus  $s$  carrés rouges successifs.

## Chapitre 3

# Nombres de Stirling généralisés

### Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier la généralisation des nombres de Stirling de première espèce. Cette étude se fera dans les deux versions : classique et analogue. Cette généralisation s'appuie essentiellement sur la fonction symétrique  $E_k^{(s)}(n)$  proposée au chapitre 2. D'un côté, ces nombres apparaissent comme des coefficients de  $x^k$  dans l'expression  $\prod_{j=0}^{n-1} (x^s + jx^{s-1} + \dots + j^{s-1}x + j^s)$ . De l'autre côté, le triangle formé par ces nombres représente une généralisation naturelle du triangle de Stirling de première espèce. On donne aussi une interprétation combinatoire de ces nombres dans le cas classique en terme des  $s$ -uplets de permutations de  $[n]$  avec  $k$  cycles, de plus on utilise le principe de la statistique d'inversion sur ces cycles dans le cas des analogues. Pour terminer, un lien entre les nombres de Legendre-Stirling et les nombres de Stirling généralisés de première espèce sera établie, ainsi de nouvelles formules et propriétés utiles seront proposées.



### 3.1 Nombres de Stirling généralisés

Dans la littérature, on trouve plusieurs généralisations sur les nombre de Stirling [M19]. Hsu et Shiue [HS98] ont montré que diverses généralisations bien connues des nombres de Stirling de première et de deuxième espèce peuvent être unifiées. Les nombres de Stirling dues à Riordan [R12] appelés nombres de Stirling associés, à Comet [C74] et Howard [H80] appelés nombres de Stirling  $s$ -associés et aussi, à Carlitz [C79] appelés nombres de Stirling pondérés et d'autres sont des cas particuliers. Howard [H80], Broder [B84] et Belbachir et al. [BBB14] ont utilisé des méthodes combinatoires pour étudier certaines propriétés de certains nombres de Stirling généralisés. Cependant, Carlitz [C79, C80] a utilisé les fonctions génératrices.

Les nombres  $r$ -Stirling représentent une certaine généralisation des nombres de Stirling classique, qui ont été nommés par Nielsen [N06] en l'honneur de James Stirling, et qui les a calculés dans sa "*Methodus Viſſerentialis*" [S30] en 1730. Ils comptent le nombre de certaines permutations restreintes ou certaines partitions restreintes [B84]. Pour tout  $r$  positif, on peut définir ces nombres comme suit,

- Le  $r$ -Stirling de première espèce  $c_r(n, k)$  est le nombre de permutations de  $[n]$  en  $k$  cycles, tel que les nombres  $1, 2, \dots, r$  sont dans des différents cycles.
- Le  $r$ -Stirling de deuxième espèce  $S_r(n, k)$  est le nombre de partitions de  $[n]$  en  $k$  blocs, tel que les nombres  $1, 2, \dots, r$  sont dans des différents blocs.

On note que, les Stirling classiques peuvent s'exprimer comme,

$$c(n, k) = c_1(n, k), \quad \text{et} \quad S(n, k) = S_1(n, k) \quad n > 0.$$

Les nombres  $r$ -Stirling satisfont la même relation de récurrence que les nombres Stirling classiques, sauf pour les conditions initiales.

Les nombres  $r$ -Stirling de première espèce satisfont la récurrence,

$$c_r(n, k) = 0, \quad n < r \quad (3.1)$$

$$c_r(n, k) = \delta_{k,r}, \quad n = r \quad (3.2)$$

$$c_r(n, k) = (n-1)c_r(n-1, k) + c_r(n-1, k-1), \quad n > r, \quad (3.3)$$

où  $\delta_{k,r}$  est le symbole de Kronecker.

Aussi, les nombres  $r$ -Stirling de deuxième espèce satisfont la récurrence,

$$S_r(n, k) = 0, \quad n < r \quad (3.4)$$

$$S_r(n, k) = \delta_{k,r}, \quad n = r \quad (3.5)$$

$$S_r(n, k) = kS_r(n-1, k) + S_r(n-1, k-1), \quad n > r. \quad (3.6)$$

Mihoubi et Maamra [MM12] ont introduit une généralisation des nombres de  $r$ -Stirling de deuxième espèce appelés  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling. Ils comptent le nombre de  $k$ -partitions de  $[n]$ , dont les éléments de chaque part  $P_{i, i=1, \dots, p}$  sont dans des parts distinguées.

Gould [G61] et Carlitz [C33], ont étudié Le  $q$ -analogue des nombres de Stirling de première et deuxième espèce, respectivement. Leurs relations de récurrences sont données par,

- Les nombres  $q$ -Stirling (non signé) de première espèce sont notés par  $c[n, k]_q$  et satisfont,

$$c[n, k]_q = c[n-1, k-1]_q + [n-1]_q c[n-1, k]_q, \quad n \geq 1, \quad c[0, k] = \delta_{0, k}. \quad (3.7)$$

- Les nombres  $q$ -Stirling de deuxième espèce sont notés par  $S[n, k]$  et satisfont,

$$S[n, k]_q = S[n-1, k-1]_q + [k]_q S[n-1, k]_q, \quad n \geq 1, \quad S[0, k] = \delta_{0, k}. \quad (3.8)$$

En arrivant à la fin de ce travail, qu'on a su que la fonction symétrique  $E_k^{(s)}$  (étudiée au deuxième chapitre) existe déjà sur une autre dénomination équivalente dans l'article de Doly et Walker [DW92], appelée fonction symétrique complète modulaire. Fu et Mei [FM20] et Grinberg [G04] ont indépendamment introduit la même fonction  $E_k^{(s)}$ . Grinberg l'a appelé fonction symétrique de Petrie, tandis que Fu et Mei l'ont appelée fonction symétrique tronquée. Ce qu'il faut dire, que notre approche est basée sur le fait qu'on cherche essentiellement une fonction symétrique qui reflète le principe de manipuler une permutation de  $[n]$  sur le partage  $k$  dont la plus grande part est  $s$ . En outre, c'est une pensée énumérative et pas algébrique.

## 3.2 Nombres de Stirling généralisés de première espèce

Dans cette section, on propose une généralisation des nombres de Stirling de première espèce en utilisant la fonction symétrique  $E_k^{(s)}$ , à laquelle on donne une définition récursive et une fonction génératrice ordinaire. Certes, il faut noter que la classe combinatoire, dans ce cas, représente le nombre de cycles possibles à construire.

Récemment, Egge [E10] a donné pour les nombres de Legendre-Stirling de première espèce, notés  $[[n]_k]$  une définition récursive,

$$[[n]_k] = [[n-1]_{k-1}] + n(n-1) [[n-1]_k], \quad (3.9)$$

avec  $[[n]_0] = \delta_{n,0}$ ,  $[[0]_k] = \delta_{0,k}$ .

Ensuite, une interprétation combinatoire en termes de paires de permutations de  $[n]$  avec  $k$  cycles, dans lequel  $[[n]_k]$  est introduit pour la première fois par Andrews et Littlejohn

[AL09] via,

$$\langle x \rangle_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k, \quad (3.10)$$

avec  $\langle x \rangle_n = x(x-2)(x-6)\cdots(x-n(n-1))$ .

**Définition 3.2.1.** Pour tout entier positif  $n$ , notons  $c^{(s)}(n, k)$  les nombres de Stirling généralisés de première espèce, qui sont donnés par les conditions initiales,

$$c^{(s)}(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad c^{(s)}(0, k) = \delta_{0,k},$$

et la relation de récurrence,

$$c^{(s)}(n, k) = \sum_{j=0}^s (n-1)^j c^{(s)}(n-1, k-s+j), \quad (3.11)$$

avec  $c^{(s)}(n, k) = 0$  sauf si  $s \leq k \leq sn$ .

Si on fait remplacer l'élément  $x_i$  par  $i$  dans  $E_k^{(s)}(n)$ , alors les suites formées par ce changement représentent les nombres de Stirling généralisés de première espèce  $c^{(s)}(n, k)$ . En effet, de la Définition 3.2.1 et la Définition 2.4.1 on donne la proposition suivante.

**Proposition 3.2.2.** Pour  $n \geq 1$  et  $s \leq k \leq sn$ ,

$$c^{(s)}(n, k) = E_{sn-k}^{(s)}(1, 2, \dots, n-1). \quad (3.12)$$

*Démonstration.* Remplaçant  $n = 2$ , on a

$$\begin{aligned} c^{(s)}(2, k) &= \sum_{j=0}^s c^{(s)}(1, k-s+j), \\ &= \sum_{j=0}^s E_{2s-k-j}^{(s)}(0), \end{aligned}$$

Supposons que cette hypothèse soit vraie pour  $n$ . Nous montrons que cela reste vraie pour  $n+1$ ,

$$\begin{aligned} c^{(s)}(n+1, k) &= \sum_{j=0}^s (n)^j c^{(s)}(n, k-s+j), \\ &= \sum_{j=0}^s (n)^j E_{sn-k+s-j}^{(s)}(n-1), \\ &= \sum_{j=0}^s (n)^j \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}=sn-k+s-j} 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots (n-1)^{\alpha_{n-1}}, \\ &= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=sn-k+s} 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}, \quad (\alpha_n \text{ varie avec } j) \\ &= E_{s(n+1)-k}^{(s)}(n). \end{aligned}$$

D'après le principe de l'induction la preuve est complète.  $\square$

Il est facile de constater qu'à partir de la relation de récurrence et les conditions initiales dans la Définition 3.2.1, on peut construire la table des nombres de Stirling généralisés et on le nome "*s-Stirling de première espèce*". Comme exemple, on construit le triangle du 2-Stirling de première espèce  $c^{(2)}(n, k)$ .

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	0	1								
2	0	0	1	1	1						
3	0	0	4	6	7	3	1				
4	0	0	36	66	85	54	25	6	1		
5	0	0	576	1200	1660	1270	701	250	65	10	1

TABLE 3.1 – 2-Stirling de première espèce  $c^{(2)}(n, k)$ .

Selon la relation de récurrence (3.11), nous montrerons ci-dessous que  $c^{(s)}(n, k)$  est le coefficient du  $k^{i\grave{e}me}$  terme du produit.

**Théorème 3.2.3.** On a,

$$\prod_{j=0}^{n-1} (x^s + jx^{s-1} + \dots + j^{s-1}x + j^s) = \sum_{k=0}^{sn} c^{(s)}(n, k)x^k. \quad (3.13)$$

*Démonstration.* Remplaçant  $n = 1$ , on a

$$x^s = 0 + 0 \times x + \dots + 0 \times x^{s-1} + 1 \times x^s = \sum_{k=0}^s c^{(s)}(1, k)x^k.$$

Supposons que cette hypothèse soit vraie pour  $n$ . Nous montrons que cela reste vraie pour  $n + 1$ ,

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^n (x^s + jx^{s-1} + \dots + j^{s-1}x + j^s), &= (x^s + nx^{s-1} + \dots + n^{s-1}x + n^s), \\ &\times \prod_{j=0}^{n-1} (x^s + jx^{s-1} + \dots + j^{s-1}x + j^s), \\ &= \sum_{j=0}^s n^j x^{s-j} \sum_{k=0}^{sn} c^{(s)}(n, k)x^k, \\ &= \sum_{k=0}^{s(n+1)} \left[ \sum_{j=0}^s n^j c^{(s)}(n, k - s + j) \right] x^k, \\ &= \sum_{k=0}^{s(n+1)} c^{(s)}(n + 1, k)x^k. \end{aligned}$$

Par hypothèse d'induction et la Relation (3.11), la preuve est complète.  $\square$

Maintenant, on peut donner une relation entre ces nombres et les nombres de Stirling de première espèce. Les nombres  $s$ -Stirling, en faite, sont la somme des produits des nombres de Stirling partitionnés en  $j_l, l=1, \dots, s$  cycles sous certaines conditions comme le montre le théorème suivant.

**Théorème 3.2.4.** On a,

$$c^{(s)}(n, k) = \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} c(n, j_1) \times \dots \times c(n, j_s) (-1)^k a^{\sum_{r=1}^s r j_r}, \quad (3.14)$$

avec  $a = e^{i \frac{2\pi}{s+1}}$ .

*Démonstration.* Pour  $a = e^{i \frac{2\pi}{s+1}}$ , on peut remarquer que

$$1 + x + \dots + x^s = \prod_{r=1}^s (x - a^r).$$

Alors par le Théorème 3.2.3, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{sn} c^{(s)}(n, k) x^k &= \prod_{j=0}^{n-1} (x^s + jx^{s-1} + \dots + j^{s-1}x + j^s), \\ &= x^{ns} \prod_{j=0}^{n-1} \left( 1 + \left(\frac{j}{x}\right) + \dots + \left(\frac{j}{x}\right)^{s-1} + \left(\frac{j}{x}\right)^s \right), \\ &= \left(\frac{1}{z}\right)^{ns} \prod_{j=0}^{n-1} \left( 1 + (jz) + \dots + (jz)^{s-1} + (jz)^s \right) \\ &\quad \text{en remplaçant } z = \frac{1}{x}, \\ &= \left(\frac{1}{z}\right)^{ns} \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{r=1}^s (jz - a^r), \\ &= \prod_{r=1}^s \prod_{j=0}^{n-1} (j - a^r x). \end{aligned}$$

Par la Relation (1.32) et remplaçant  $x = -a^r x$ , pour  $r = 1, \dots, s$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{sn} c^{(s)}(n, k) x^k &= \prod_{r=1}^s \sum_{k=0}^n c(n, k) (-a^r x)^k, \\ &= \sum_{j_1=0}^n c(n, j_1) (-1)^{j_1} a^{j_1} x^{j_1} \times \dots \times \sum_{j_s=0}^n c(n, j_s) (-1)^{j_s} a^{j_s} x^{j_s}, \\ &= \sum_{k=0}^{sn} \left[ \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} c(n, j_1) \times \dots \times c(n, j_s) (-1)^k a^{\sum_{r=1}^s r j_r} \right] x^k. \end{aligned}$$

Par identification, nous obtenons

$$c^{(s)}(n, k) = \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} c(n, j_1) \times \dots \times c(n, j_s) (-1)^k a^{\sum_{r=1}^s r j_r}.$$

□

### 3.3 Interprétation combinatoire de $s$ -Stirling

Rappelant que les nombres de Stirling de première espèce comptent les permutations de  $[n]$  en  $k$  cycles. Dans cette section, on donne une interprétation combinatoire cyclique pour les nombres  $s$ -Stirling de première espèce. Pour arriver à cette fin, on a besoin de donner la définition suivante, les *maximas* de cycle d'une permutation donnée sont les nombres qui sont les plus grands dans leurs cycles. Par exemple, si  $\pi = (1, 3, 5)(2, 6, 8)(7)(4, 9)(10)$  est une permutation de  $S_{10}$ , écrite en notation cyclique, les *maximas* de cycle sont alors 5, 7, 8, 9 et 10.

**Définition 3.3.1.** Les  $s$ -uplets de permutations de Stirling généralisés de longueur  $n$  sont les  $s$ -uplets  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$  avec  $\pi_1, \dots, \pi_s \in S_n$  pour lesquels les critères suivants sont vérifiés,

1. Pour tout  $1 \leq j \leq s - 1$ , le nombre de cycles de  $\pi_j$  est supérieur ou égal au nombre de cycles de  $\pi_{j+1}$ .
2. Pour tout  $1 \leq j \leq s - 1$ , les maximas de cycles de  $\pi_{j+1}$  sont inclus dans les maximas de cycles de  $\pi_j$ .

**Exemple 3.3.2.** Pour  $n = 3$  et  $s = 2$ , les paires de permutations possibles de Stirling généralisés  $(\pi_1, \pi_2)$  de longueur 3 sont,

2	(123, 123)	(123, 132)	(132, 123)	(132, 132)
3	((1)(23), 123) ((12)(3), 123)	((1)(23), 132) ((12)(3), 132)	((13)(2), 123)	((13)(2), 132)
4	((1)(2)(3), 123) ((12)(3), (12)(3))	((13)(2), (12)(3)) ((13)(2), (13)(2))	((12)(3), (13)(2)) ((1)(23), (1)(23))	((1)(2)(3), 132)
5	((1)(2)(3), (13)(2))	((1)(2)(3), (1)(23))		
6	((1)(2)(3), (1)(2)(3))			

**Théorème 3.3.3.** Pour  $n \geq 1$  et  $s \leq k \leq sn$ , le nombre des  $s$ -uplets de permutations de Stirling généralisés  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$  de longueur  $n$  ayant simultanément  $k$  cycles est  $c^{(s)}(n, k)$ .

*Démonstration.* Soit  $p^{(s)}(n, k)$  le nombre des  $s$ -uplets de permutations de Stirling généralisés  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$  de longueur  $n$  ayant ensemble exactement  $k$  cycles. Il est clair que,

$$p^{(s)}(n, 0) = \delta_{n,0} \text{ et } p^{(s)}(0, k) = \delta_{0,k},$$

donc en vertu de la Relation (3.11) il suffit de montrer que si  $n > 0$  et  $k > 0$  alors,

$$p^{(s)}(n, k) = p^{(s)}(n-1, k-s) + \sum_{j=1}^s (n-1)^j p^{(s)}(n-1, k-s+j). \quad (3.15)$$

Pour un  $s$ -uplet  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$  de permutations du  $s$ -Stirling de longueur  $n$ , le 1 est un point fixe dans  $\pi_s$  si et seulement s'il s'agit d'un point fixe dans chaque  $\pi_i \in \{\pi_1, \dots, \pi_{s-1}\}$  (condition 2 de la Définition 3.3.1). Les  $s$ -uplets  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$  dans lequel le 1 est un point fixe dans chaque  $\pi_i \in \{\pi_1, \dots, \pi_s\}$  sont en bijection avec les  $s$ -uplets  $(\sigma_1, \dots, \sigma_s)$  de longueur  $n-1$  ayant ensemble exactement  $k-s$  cycles en supprimant le 1 de chaque permutation et en diminuant toutes les autres entrées de 1, c'est le nombre  $p^{(s)}(n-1, k-s)$ .

Chaque  $s$ -uplet  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$  dans lequel le 1 est un point fixe uniquement dans  $\pi_i \in \{\pi_1, \dots, \pi_{s-j}\}$  peut être construit uniquement en choisissant  $s$ -uplet  $(\sigma_1, \dots, \sigma_s)$  de longueur  $n-1$  ayant ensemble  $k-(s-j)$  cycles, augmentant chaque entrée de chaque permutation de 1 et insérant le 1 comme point fixe dans chaque permutation  $\sigma_i \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_{s-j}\}$  et comme nouvelle entrée dans chaque permutation  $\sigma_i \in \{\sigma_{s-j+1}, \dots, \sigma_s\}$ . Il y a une seule façon d'insérer le 1 comme point fixe dans chaque permutation  $\sigma_i \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_{s-j}\}$ , et il existe  $(n-1)^j$  façons d'insérer le 1 comme nouvelle entrée dans chaque permutation  $\sigma_i \in \{\sigma_{s-j+1}, \dots, \sigma_s\}$ , c'est le nombre  $(n-1)^j p^{(s)}(n-1, k-s+j)$ . Ainsi la Relation (3.15) est vérifiée.  $\square$

**Définition 3.3.4.** Le nombre harmonique est la somme des inverses des  $k$  premiers entiers naturels non nuls,

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}.$$

Selon le Théorème 3.3.3, les nombres de Stirling généralisés,  $c^{(s)}(n, k)$ , satisfont les identités suivantes.

**Proposition 3.3.5.** On a,

- (i)  $c^{(s)}(n, s) = [(n-1)!]^s = [c(n, 1)]^s$ ,
- (ii)  $c^{(s)}(n, s+1) = [(n-1)!]^{s-1} c(n, 2) = [(n-1)!]^s H_{n-1}$ ,
- (iii)  $c^{(s)}(n, sn) = 1$ ,
- (iv)  $c^{(s)}(n, sn-1) = c(n, n-1) = \binom{n}{2}$ ,
- (v)  $\sum_{k=0}^{sn} (-1)^{sn-k} c^{(s)}(n, k) = 0$  si  $s$  est impair,
- (vi)  $\left[ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = n \times c^{(2)}(n, 2)$ .

*Démonstration.* (i) Pour chaque permutation  $\pi_i \in (\pi_1, \dots, \pi_s)$ , il existe  $(n-1)!$  façons pour permuter  $\pi_i$  dans un seul cycle. Donc il y a

$$[(n-1)!]^s = [c(n, 1)]^s$$

façons pour permuter  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$  ensemble dans  $s$  cycles.

$$c^{(s)}(n, s) = [(n-1)!]^s = [c(n, 1)]^s.$$

(ii) Il est facile de voir que  $\pi_1$  a exactement deux cycles et chaque  $\pi_i \in \{\pi_2, \dots, \pi_s\}$  a un cycle, car  $\pi_1, \pi_2, \dots$  et  $\pi_s$  ont ensemble exactement  $s+1$  cycles. Ainsi, il existe  $c(n, 2)$  façons de permuter  $\pi_1$  en deux cycles et  $(n-1)!$  façons de permuter chaque  $\pi_i \in \{\pi_2, \dots, \pi_s\}$  en un cycle. Ainsi,

$$c^{(s)}(n, s+1) = [(n-1)!]^{s-1} c(n, 2),$$

et comme  $c(n, 2) = (n-1)! H_{n-1}$  on obtient,

$$c^{(s)}(n, s+1) = [(n-1)!]^s H_{n-1}.$$

(iii) La preuve que  $c^{(s)}(n, sn) = 1$  est triviale, puisque chaque  $\pi_i \in \{\pi_1, \dots, \pi_s\}$  a exactement  $n$  cycles.

(iv) Chaque  $\pi_i \in \{\pi_1, \dots, \pi_{s-1}\}$  a  $n$  cycles et  $\pi_s$  a  $n-1$  cycles, parce que  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s$  ont ensemble exactement  $sn-1$  cycles. Par conséquent, en vertu de (iii), il y a une seule façon pour construire chaque  $\pi_i \in \{\pi_1, \dots, \pi_{s-1}\}$ . Et il y a  $c(n, n-1)$  façons pour permuter  $\pi_s$  en  $n-1$  cycles. Donc,

$$c^{(s)}(n, sn-1) = c(n, n-1) = \binom{n}{2}.$$

(v) Du Théorème 3.2.3, on peut avoir

$$\sum_{k=0}^{sn} (-1)^{sn-k} c^{(s)}(n, k) x^k = x^s \prod_{j=1}^{n-1} (x^s - jx^{s-1} + \dots + (-1)^s j^s).$$

Remplaçant  $x = 1$  et prenant  $s$  impair, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{sn} (-1)^{sn-k} c^{(s)}(n, k) &= 1 \times \prod_{j=1}^{n-1} (1 - j + j^2 + \dots + (-1)^s j^s), \\ &= 0 \times \prod_{j=2}^{n-1} (1 - j + j^2 + \dots + (-1)^s j^s), \\ &= 0. \end{aligned}$$



(vi) Remplaçant  $s = 2$  dans (i) on obtient,

$$c^{(2)}(n, 2) = [(n-1)!]^2.$$

En d'autre part, les Relations (3.9) et (3.10) donnent,

$$\left[ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = n!(n-1)! = n [(n-1)!]^2.$$

Donc,

$$\left[ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = n \times c^{(2)}(n, 2).$$

□

La relation entre les nombres de Stirling généralisés pour  $s = 2$  et les nombres de Legendre-Stirling est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 3.3.6.** Le nombre de paires de permutations de Legendre-Stirling  $(\sigma_1, \sigma_2)$  de longueur  $n$  est exactement le nombre de paires de permutation de Stirling généralisés  $(\pi_1, \pi_2)$  de longueur  $n$ , ie :

$$\sum_{k=0}^{2n} c^{(2)}(n, k) = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right].$$

*Démonstration.* De la Relation (3.10), on a

$$\sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k = \prod_{j=0}^{n-1} (x + j(j+1)). \quad (3.16)$$

Prenant  $s = 2$  dans le Théorème 3.2.3, on obtient

$$\sum_{k=0}^{2n} c^{(2)}(n, k) x^k = \prod_{j=0}^{n-1} (x^2 + jx + j^2) = \prod_{j=0}^{n-1} (x^2 + j(j+x)). \quad (3.17)$$

Remplaçant  $x = 1$  dans les Relations (3.16) et (3.17), on aura

$$\sum_{k=0}^{2n} c^{(2)}(n, k) = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right].$$

□

### 3.4 Analogues des nombres de Stirling généralisés

Maintenant, nous sommes en mesure de proposer une définition des analogues de Stirling généralisés de première espèce.

**Définition 3.4.1.** Pour tout entier positif  $n$ , on note  $c_q^{(s)}[n, k]$  (resp.  $c_{p,q}^{(s)}[n, k]$ ) les nombres  $q$ -stirling généralisés (resp.  $p, q$ -stirling généralisés) de première espèce, qui sont donnés par les conditions initiales suivantes,

$$c_q^{(s)}[n, 0] = c_{p,q}^{(s)}[n, 0] = \delta_{n,0}, \quad c_q^{(s)}[0, k] = c_{p,q}^{(s)}[0, k] = \delta_{0,k},$$

et les Relations de récurrences,

$$c_q^{(s)}[n, k] = \sum_{j=0}^s [n-1]_q^j c_q^{(s)}[n-1, k-s+j], \tag{3.18}$$

$$c_{p,q}^{(s)}[n, k] = \sum_{j=0}^s [n-1]_{p,q}^j c_{p,q}^{(s)}[n-1, k-s+j], \tag{3.19}$$

avec  $c_q^{(s)}[n, k] = c_{p,q}^{(s)}[n, k] = 0$  sauf si  $s \leq k \leq sn$ .

Ces nombres, comme les nombres de Stirling généralisés de première espèce, sont construits à travers le premier triangle  $s$ -Stirling, on le nomme “ $q$ -analogue (resp.  $p, q$ -analogue) de  $s$ -Stirling de première espèce”. Pour illustrer la relation de récurrence (3.18), on construit le  $q$ -analogue de premier triangle 2-Stirling.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	0	1				
2	0	0	1	1	1		
3	0	0	$1 + 2q + q^2$	$2 + 3q + q^2$	$3 + 3q + q^2$	$2 + q$	1

TABLE 3.2 – Le  $q$ -analogue de 2-Stirling de première espèce.

De même pour la relation de récurrence (3.19), on construit le  $p, q$ -analogue du premier triangle 2-Stirling.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	0	1		
2	0	0	1	1	1
3	0	0	$p^2 + 2pq + q^2$	$p^2 + q^2 + 2pq + p + q$	$p^2 + q^2 + 2pq + p + q + 1$

TABLE 3.3 – Le  $p, q$ -analogue de 2-Stirling de première espèce.

Faisant une comparaison de la Définition 3.4.1 avec la fonction symétrique élémentaire généralisée  $E_k^{(s)}(n)$  et la Relation (3.18) (resp. (3.19)) et par une pensée inductive on trouve.

**Proposition 3.4.2.** Pour  $n \geq 1$  et  $s \leq k \leq sn$ ,

$$c_q^{(s)}[n, k] = E_{sn-k}^{(s)}\left([1]_q, [2]_q, \dots, [n-1]_q\right), \tag{3.20}$$

$$c_{p,q}^{(s)}[n, k] = E_{sn-k}^{(s)} \left( [1]_{p,q}, [2]_{p,q}, \dots, [n-1]_{p,q} \right). \quad (3.21)$$

En utilisant cette proposition, nous pouvons également proposer la définition suivante pour les analogues des nombres de Stirling généralisés.

**Remarque 3.4.3.** Le nombre du  $q$ -Stirling (resp.  $p, q$ -Stirling) généralisé de première espèce  $c_q^{(s)}[n, k]$  (resp.  $c_{p,q}^{(s)}[n, k]$ ) est défini comme les  $\binom{n-1}{sn-k}_s$  sommes des produits possibles, chaque facteur apparaît au plus  $s$  fois dans chaque produit, qui peut être formé à partir des  $(n-1)$  premiers  $q$ -nombres  $[1]_q, [2]_q, \dots, [n-1]_q$  (resp.  $p, q$ -nombres  $[1]_{p,q}, [2]_{p,q}, \dots, [n-1]_{p,q}$ ).

Pour illustrer,

$$\begin{aligned} c_q^{(2)}[3, 2] &= [1]_q^2 [2]_q^2; & c_q^{(2)}[3, 3] &= [1]_q^2 [2]_q + [1]_q [2]_q^2; \\ c_q^{(2)}[3, 4] &= [1]_q^2 + [2]_q^2 + [1]_q [2]_q; & c_q^{(2)}[3, 5] &= [1]_q + [2]_q; & c_q^{(2)}[3, 6] &= 1. \end{aligned}$$

De plus, les résultats suivants apparaissent comme des analogues naturels du Théorème 3.2.3.

**Théorème 3.4.4.** On a,

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n-1} (x^s + [j]_q x^{s-1} + \dots + [j]_q^{s-1} x + [j]_q^s) &= \sum_{k=0}^{sn} c_q^{(s)}[n, k] x^k, \\ \prod_{j=0}^{n-1} (x^s + [j]_{p,q} x^{s-1} + \dots + [j]_{p,q}^{s-1} x + [j]_{p,q}^s) &= \sum_{k=0}^{sn} c_{p,q}^{(s)}[n, k] x^k. \end{aligned}$$

*Démonstration.* A partir des Relations (3.20) et (3.21) données dans la Proposition 3.4.2, on utilise la même méthode de la preuve proposée dans le théorème 3.2.3.  $\square$

La méthode de la preuve utilisée dans le Théorème 3.2.4 peut être appliquée à leurs analogues.

**Théorème 3.4.5.** On a,

$$c_q^{(s)}[n, k] = \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} c_q[n, j_1] \times \dots \times c_q[n, j_s] (-1)^k a^{\sum_{r=1}^s r j_r},$$

et

$$c_{p,q}^{(s)}[n, k] = \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} c_{p,q}[n, j_1] \times \dots \times c_{p,q}[n, j_s] (-1)^k a^{\sum_{r=1}^s r j_r}.$$

### 3.5 Interprétation combinatoire des analogues des nombres de Stirling généralisés

On sait que les minimas d'un cycle d'une permutation donnée sont les nombres les plus petits dans leurs cycles. Par exemple, si  $\pi = (135)(268)(7)(49)$  est une permutation

écrite en notation de cycle dans  $S_9$ , alors les minimas de tous les cycles sont 1, 2, 4 et 7.

Le nombre d'inversions d'une permutation  $\pi = \sigma_1 \dots \sigma_n \in \mathfrak{S}_n$  est,

$$\text{inv}(\pi) = \{(i, j) : i < j, \sigma_i > \sigma_j\}.$$

La statistique d'inversion dans l'histoire remonte aux travaux de Cramer (1750), Lezout (1764) et Laplace (1772). Netto a énuméré les éléments du groupe symétrique par la statistique d'inversion en 1901 [N01], et en 1916 MacMahon [M16] a donné le développement du  $q$ -factorial  $\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv}(\pi)} = [n]_q!$ .

Maintenant, avant de donner la formule de  $q$ -Stirling généralisé. Procédant en premier lieu, à un arrangement dont lesquels les cycles de chaque permutation  $\pi_i$  donnée dans la Définition 3.3.1, seront organisés dans l'ordre croissant de gauche à droite selon les minimas de chaque cycle. En deuxième lieu, après avoir supprimé les parenthèses des cycles, on considère tous les cycles de chaque  $\pi_i \in (\pi_1, \dots, \pi_s)$  comme un seul cycle et on note ces nouvelles permutations par  $\pi_i^{(\leq, c)}$ .

**Exemple 3.5.1.** Pour la permutation  $\pi = (1, 3, 5)(2, 6, 8)(7)(4, 9)$  on a  $\pi^{(\leq, c)} = 135268497$ .

**Définition 3.5.2.** Soit  $\mathcal{Q}_s(n, m)$  l'ensemble de toutes les  $s$ -uplets de permutations de type  $(\pi_1^{(\leq, c)}, \dots, \pi_s^{(\leq, c)})$  associé à toutes les  $s$ -uplets de permutations de Stirling généralisé  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$  de longueur  $n$  ayant simultanément  $m$  cycles.

**Théorème 3.5.3.** Le nombre  $q$ -Stirling généralisé de première espèce  $c_q^{(s)}[n, k]$  est donné par,

$$c_q^{(s)}[n, k] = \sum_{(\pi_1^{(\leq, c)}, \dots, \pi_s^{(\leq, c)}) \in \mathcal{Q}_s(n, k)} q^{\sum_{i=1}^s \text{inv}(\pi_i^{(\leq, c)})}, \quad (3.22)$$

où la somme couvre toutes les  $s$ -uplets de permutations  $(\pi_1^{(\leq, c)}, \dots, \pi_s^{(\leq, c)})$  associées à toutes les  $s$ -uplets de permutations de Stirling généralisé  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$  de longueur  $n$  ayant simultanément  $k$  cycles.

*Démonstration.* En vertu de la Relation (3.18) il suffit de montrer, pour  $n > 0$  et  $k \geq s$ , que

$$\sum_{(\pi_1^{(\leq, c)}, \dots, \pi_s^{(\leq, c)}) \in \mathcal{Q}_s(n, k)} q^{\sum_{i=1}^s \text{inv}(\pi_i^{(\leq, c)})} = c_q^{(s)}[n-1, k-s] + \sum_{j=1}^s [n-1]_q^j c_q^{(s)}[n-1, k-s+j].$$

Pour ce faire, notons d'abord que par la condition 2 de la Définition 3.3.1, si  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$  est une  $s$ -uplet de permutations de Stirling généralisé de longueur  $n$  alors,  $n$  est un point fixe dans  $\pi_s$  ssi il est un point fixe dans tout  $\pi_i$  de  $\{\pi_1, \dots, \pi_{s-1}\}$ . Les  $s$ -uplets  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$  dont lequel  $n$  est un point fixe dans chaque  $\pi_i$  de  $\{\pi_1, \dots, \pi_s\}$ , sont en bijection avec les  $s$ -uplets  $(\sigma_1, \dots, \sigma_s)$  de longueur  $n-1$  qui ont simultanément  $k-s$  cycles, cela se fait en supprimant

$n$  de chaque permutation. Donc, par la Définition 3.5.2 les  $s$ -uplets  $(\pi_1^{(\leq, c)}, \dots, \pi_s^{(\leq, c)})$  de longueur  $n$  sont aussi en bijection avec  $(\sigma_1^{(\leq, c)}, \dots, \sigma_s^{(\leq, c)})$  de longueur  $n - 1$  ce qui conclure le nombre  $c_q^{(s)}[n - 1, k - s]$ . Chaque  $s$ -uplet  $(\pi_1, \dots, \pi_s)$  dont lequel  $n$  est un point fixe seulement dans  $\pi_i$  de  $\{\pi_1, \dots, \pi_{s-j}\}$  peut être construit uniquement en choisissant  $s$ -uplet  $(\sigma_1, \dots, \sigma_s)$  de longueur  $n - 1$  qui ont simultanément  $k - (s - j)$  cycles, se faisait par l'insertion du  $n$  comme point fixe dans chaque permutation  $\sigma_i \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_{s-j}\}$  et comme une nouvelle entrée dans  $\sigma_i \in \{\sigma_{s-j+1}, \dots, \sigma_s\}$ . On compte  $c^{(s)}(n - 1, k - s + j)$  des  $s$ -uplets  $(\sigma_1, \dots, \sigma_s)$  et donc les  $s$ -uplets  $(\sigma_1^{(\leq, c)}, \dots, \sigma_s^{(\leq, c)})$  vont contribuer par la quantité  $c_q^{(s)}[n - 1, k - s + j]$ , par ailleurs il existe une seule façon d'insérer  $n$  comme un point fixe dans chaque  $\sigma_i \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_{s-j}\}$  cela implique que le poids total de  $n$  dans  $(\sigma_1^{(\leq, c)}, \dots, \sigma_{s-j}^{(\leq, c)})$  est  $q^0 + \dots + 0 = 1$ . Ensuite il y a aussi  $(n - 1)^j$  façons d'insérer  $n$  comme une nouvelle entrée dans  $\sigma_i \in \{\sigma_{s-j+1}, \dots, \sigma_s\}$ , cela implique que le poids total de  $n$  dans  $\sigma_i^{(\leq, c)}$  de  $\{\sigma_{s-j+1}^{(\leq, c)}, \dots, \sigma_s^{(\leq, c)}\}$  est  $1 + q + \dots + q^{n-2} = [n - 1]_q$ . Le poids total de toutes les permutations  $(\sigma_{s-j+1}^{(\leq, c)}, \dots, \sigma_s^{(\leq, c)})$  est  $[n - 1]_q^j$ . On résume que la Relation (3.18) est construite.  $\square$

**Exemple 3.5.4.** On se réfère à l'exemple 3.3.2, les paires de permutations de Stirling généralisée  $(\pi_1, \pi_2)$  de longueur 3 qui ont simultanément 3 cycles sont,

$$\begin{aligned}
 & ((1)(23), 123) - ((1)(23), 132) - ((13)(2), 123) - \\
 & ((13)(2), 132) - ((12)(3), 123) - ((12)(3), 132),
 \end{aligned}$$

Cependant, suivant notre procédé les paires de permutations  $(\pi_1^{(\leq, c)}, \pi_2^{(\leq, c)})$  sont,

$$(123, 123) - (123, 132) - (132, 123) - (132, 132) - (123, 123) - (123, 132).$$

On trouve,

$$\begin{aligned}
 c_q^{(2)}[3, 3] &= q^{\text{inv}(123) + \text{inv}(123)} + q^{\text{inv}(123) + \text{inv}(132)} + q^{\text{inv}(132) + \text{inv}(123)} \\
 &+ q^{\text{inv}(132) + \text{inv}(132)} + q^{\text{inv}(123) + \text{inv}(123)} + q^{\text{inv}(123) + \text{inv}(132)} \\
 &= 2 + 3q + q^2.
 \end{aligned}$$

Remplaçant  $s = 1$  dans le Théorème 3.5.3, on obtient le résultat intéressant de Gessel [GV85].

**Corollaire 3.5.5.** Le nombre  $q$ -Stirling de première espèce  $c_q[n, k]$  est donné par,

$$c_q[n, k] = \sum_{\pi^{(\leq, c)} \in \mathcal{Q}(n, k)} q^{\text{inv}(\pi^{(\leq, c)})}, \quad (3.23)$$

où la somme couvre toutes les permutations  $\pi^{(\leq, c)}$  associées à  $\pi$  de longueur  $n$  et qui ont  $k$  cycles.

D'une façon similaire à la Proposition 3.3.5, il est facile de voir à partir du Théorème 3.5.3 et du Théorème 3.4.4 que les analogues du nombre de Stirling généralisé satisfont les identités suivantes.

**Proposition 3.5.6.** On a,

- (i)  $c_q^{(s)}[n, sn] = 1$ ;
- (ii)  $c_q^{(s)}[n, s] = [[n-1]_{q!}]^s = [c_q[n, 1]]^s$ ;
- (iii)  $\sum_{k=0}^{sn} (-1)^{sn-k} c_q^{(s)}[n, k] = 0$  si  $s$  est pair.

## Chapitre 4

# Log-concavité des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux et leurs analogues

### Introduction

L'étude de la log-concavité et l'unimodalité seront l'essentiel de ce chapitre. L'objectif est d'arriver à appliquer l'inégalité énoncée dans la définition de la log-concavité sur les différentes suites représentant les fonctions symétrique élémentaire généralisée. Pour concrétiser cet objectif, on fait appel aux techniques et outils de l'interprétation combinatoire des déterminants proposés par Gessel et Viennot, afin de les utiliser dans le formalisme de la preuve du théorème principal. Ce principe de déterminant est appliqué par Sagan dans son Article intitulé "*Log concave sequences of symmetric functions and analogs of the Jacobi- Trudi determinants*".

Par la suite, on applique le principe général de cette preuve sur le triangle de Pascal généralisé. En plus, on montre que les coefficients  $q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}$  sont fortement  $q$ -log-concave, ainsi leurs suites situées sur les transversales  $\left\{ \begin{bmatrix} n_0 + j\alpha \\ k_0 - j\beta \end{bmatrix}_q^{(s)} \right\}_{j \geq 0}$  restreint par  $\alpha\beta > 0$ . Ce qui nous permis d'établir l'unimodalité des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux  $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_s$  et leurs suites situées sur les transversales.

## 4.1 Généralité sur la log-concavité et l'unimodalité

Les suites unimodales et log-concaves apparaissent naturellement en combinatoire, en algèbre, en analyse, en géométrie, en informatique, en probabilité et en statique. Nous renvoyons le lecteur aux documents de Stanley [S89] et Brenti [B89, B94] pour les divers résultats et techniques sur ces propriétés.

Voici un aperçu sur certaines définitions et théorèmes utiles dans le reste du travail.

**Définition 4.1.1.** Une suite  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  de nombres réels est appelée log-concave si  $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, k-1$ .

**Définition 4.1.2.** (Définition équivalente) Une suite  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  de nombres réels est appelée log-concave si  $a_i a_j \geq a_{i-1} a_{j+1}$  pour  $1 \leq i \leq j \leq k-1$ .

**Définition 4.1.3.** Une suite  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  de nombres réels est dite unimodale s'il existe un indice  $0 \leq j \leq k$ , tel que  $a_i \leq a_{i+1}$  pour  $i = 0, \dots, j-1$  et  $a_i \geq a_{i+1}$  pour  $i = j, \dots, k-1$ .

**Remarque 4.1.4.** On dit qu'il n'y a pas de zéros internes s'il n'y a pas trois indices  $0 \leq i < j < d \leq k$  tels que  $a_i, a_d \neq 0$  et  $a_j = 0$ .

**Théorème 4.1.5.** [B89] Une suite log-concave  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  sans zéros internes est aussi unimodale.

**Théorème 4.1.6.** [B89] Une suite log-concave  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  sans zéros internes est log-concave si et seulement si elle est strictement log-concave.

**Exemple 4.1.7.** Les éléments du triangle de Pascal forment une suite log-concave en  $k$  car,

$$\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}} = \frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} > 1.$$

**Définition 4.1.8.** Une suite de polynômes  $(a_k(q))$ , est  $q$ -log-concave si  $a_k(q)^2 - a_{k-1}(q)a_{k+1}(q)$  a des coefficients non négatifs en  $q$ .

**Définition 4.1.9.** Un polynôme  $a_k(q)$  est dit être un  $q$ -analogue d'un entier  $a_k$  si  $a_k(1) = a_k$ .

**Définition 4.1.10.** Une suite de polynômes  $(a_k(q))_{k=0}^n$  est fortement  $q$ -log-concave si  $a_i(q)a_j(q) - a_{i-1}(q)a_{j+1}(q)$  a des coefficients non négatifs en  $q$  pour  $1 \leq i \leq j$ .

**Exemple 4.1.11.** Le coefficient  $q$ -binomial  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  est le  $q$ -analogue du coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  et le  $q$ -Stirling du deuxième espèce  $S_q(n, k)$  est le  $q$ -analogue de Stirling du deuxième espèce  $S(n, k)$ .

Le lecteur est invité à consulter [B90, L90, S92, WW91].



## 4.2 Un peu d'histoire

Les premiers résultats obtenus sur l'unimodalité et la log-concavité pour les éléments du triangle de Pascal sont dû aux Tanny et Zuker [TZ74]. Vous trouvez au-dessus quelques résultats déjà réalisés dans la littérature.

1. Les suites des coefficients binomiaux  $\left\{\binom{n}{k}\right\}_{n,k \geq 0}$  sont log-concave,
2. les nombres de Stirling non signés de première espèce  $\{s(n, k)\}_{k \geq 0}$  sont log-concave,
3. les nombres de Stirling de second espèce  $\{S(n, k)\}_{n,k \geq 0}$  sont log-concave,
4. Les nombres Eulériens  $\{A(n, k)\}_{k \geq 0}$  sont log-concave,
5. Les suites correspondants a des transversales dans le triangles de Pascal  $\left\{\binom{n-k}{k}\right\}_{k \geq 0}$  et  $\left\{\binom{n-\alpha k}{k}\right\}_{k \geq 0}$  [TZ74, TZ76] sont log-concave,
6. Belbachir et Szalay [BS08] ont traité la log-concavité dans les transversales des triangles de Pascal ordinaire et généralisé  $\left\{\binom{u+\alpha k}{v+\beta k}\right\}_{k \geq 0}$  et  $\left\{\binom{u+\alpha k}{v+\beta k}_s\right\}_{k \geq 0}$  sous certaines conditions sur les paramètres  $\alpha, \beta, u$  et  $v$ .
7. Ahmia et Belbachir ont étudié exhaustivement la log-concavité, la log-convexité et l'unimodalité des suites et des polynômes associés au triangle de Pascal généralisé et les analogues du triangle de Pascal [AB12, AB18, ABq18, AB19, ABq19, AB20].

Le premier résultat obtenue de la  $q$ -log-concavité des éléments du  $q$ -triangle de Pascal est dû à Butler [B90], qui a montré que la suite des coefficients  $q$ -binomiaux  $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q$  est  $q$ -log-concave. Krattenthaler dans [K89] a prouvé la conjecture de Butler [B87] affirmant que le polynôme  $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q \left[\begin{smallmatrix} m \\ l \end{smallmatrix}\right]_q - \left[\begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix}\right]_q \left[\begin{smallmatrix} m \\ l+1 \end{smallmatrix}\right]_q$  a des coefficients non négatifs en  $q$ . Ensuite, Sagan [S92] a généralisé les travaux cités précédemment, en utilisant la théorie des fonctions symétriques et l'interprétation combinatoire des déterminants associés aux chemins dû au Gessel et Viennot [GV85]. De plus, Sagan a montré que les suites  $\{e_k(n)\}_{n \geq 0}$ ,  $\{e_{k-j}(n+j)\}_{j \geq 0}$ ,  $\{h_k(n)\}_{n \geq 0}$  et  $\{h_{k-j}(n+j)\}_{j \geq 0}$  sont tous fortement  $q$ -log-concaves si  $\{(x_j)_q\}_{j \geq 1}$  est fortement  $q$ -log-concave. Répondant à une question de Sagan sur la  $q$ -log-concavité forte de certaines suites de fonctions symétriques, Su et al [SW11] ont prouvé que les suites  $\{e_{k_0-j\beta}(n_0+j\alpha)\}_{j \geq 0}$  et  $\{h_{k_0-j\beta}(n_0+j\alpha)\}_{j \geq 0}$  sont fortement  $q$ -log-concaves, et cela implique la  $q$ -log-concavité forte des suites des polynômes situées sur les transversales du  $q$ -triangle de Pascal  $\left\{\left[\begin{smallmatrix} n_0+j\alpha \\ k_0-j\beta \end{smallmatrix}\right]_q\right\}_{j \geq 0}$  avec  $\alpha\beta > 0$ .

Maintenant, motivé par les résultats décrits auparavant, on commence à étudier la log-concavité et l'unimodalité des suites associées par la fonction élémentaire généralisée.

### 4.3 Chemins et étiquetage

On a expliqué dans le deuxième chapitre, que la fonction élémentaire généralisée  $E_k^{(s)}(n)$  est interprétée comme étant une fonction génératrice des poids pour chaque chemin figurant entre les deux points  $u_1 = (0, 0)$  et  $v_1 = (k, n - 1)$  avec aux plus  $s$  pas horizontaux. Cette section est consacrée à la présentation de certaines notations et terminologies, afin de les utiliser comme des outils pour mieux manipuler le formalisme des démonstrations.

Soit  $P_{n,k}^s$  l'ensembles de tous les chemins possibles entre les deux points  $u_1 = (0, 0)$  et  $v_1 = (k, n - 1)$  avec aux plus  $s$  pas horizontaux. Pour chaque chemin  $P = (p_1, p_2, \dots, p_{k+n-1}) \in P_{n,k}^s$ , on associe un étiquetage  $E^{(s)}$  et ça pour chaque pas horizontal comme suit,

$$L(p_i) = (\text{le nombre des pas verticaux } p_j \text{ qui précèdent } p_i) + 1.$$

Après cette notation, on peut écrire  $E_k^{(s)}$  comme suit,

$$E_k^{(s)}(n) = \sum_{P \in P_{n,k}^s} x^P \quad \text{avec} \quad x^P = \prod_{p_i \in P} x_{L(p_i)}, \quad (4.1)$$

$x^P$  représente chaque monôme de la fonction étiquetée  $E_k^{(s)}$  (voir figure 4.1).

**Remarque 4.3.1.** Si le monôme de la fonction  $E_k^{(s)}$  est représenté par un paire de chemin  $(P_1, P_2)$ , alors la notation s'écrit

$$x^{P_1} x^{P_2} = x^{P_1 P_2}.$$

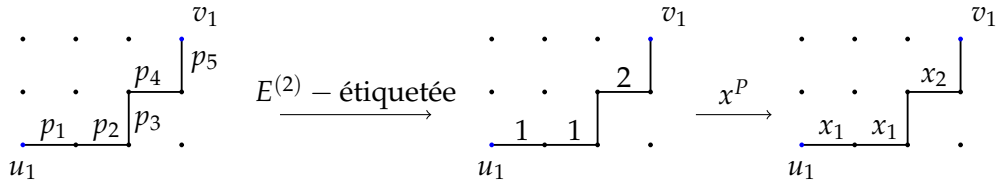


FIGURE 4.1 – Illustration  $x_1^2 x_2$  de  $E_4^{(2)}(3)$  par l'étiquetage  $E^{(2)}$ .

Les définitions décrites au dessous jouent un role important dans la compréhension du Théorème 4.4.1. En effet, l'idée est de prouver l'inégalité,

$$[E_k^{(s)}(n)]^2 - E_{k-1}^{(s)}(n)E_{k+1}^{(s)}(n) \geq_x 0.$$

**Notation :**  $u \xrightarrow{P} v$  :  $u$  est le point initial du chemin  $P$  et  $v$  le point d'arrivée.

**Définition 4.3.2.** Soient  $u_1 \xrightarrow{P_1} v_1$  et  $u_2 \xrightarrow{P_2} v_2$ . On définit l'involution  $\varphi$  par,

$$\varphi(P_1, P_2) = (P'_1, P'_2), \quad (4.2)$$

vérifiant,

1. Si  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ , alors  $P'_1 = P_1$  et  $P'_2 = P_2$ ,
2.  $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ , alors  $P'_1 = u_1 \xrightarrow{P_1} v_0 \xrightarrow{P_2} v_2$  et  $P'_2 = u_2 \xrightarrow{P_2} v_0 \xrightarrow{P_1} v_1$ ,

avec,  $v_0$  est le point du dernier croisement de  $P_1$  et  $P_2$ , tel que le niveau de  $v_0$  contient au plus  $s$  pas horizontaux. En d'autre terme, l'involution  $\varphi$  commute les deux portions qui situent juste après  $v_0$  (voir la Figure 4.2).

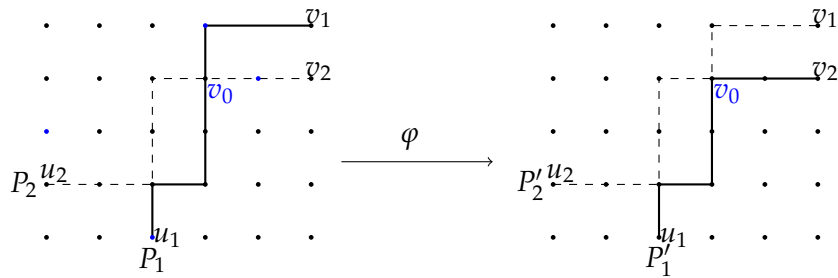


FIGURE 4.2 – L'involution  $\varphi$ .

**Définition 4.3.3.** On considère la translation  $\tau_d$  définie par,

$$\tau_d(P_1, P_2) = (P'_1, P'_2), \tag{4.3}$$

avec  $P'_1$  est le chemin  $P_1$  translaté par un pas dans la direction  $d = W$  ou  $S$  et  $P'_2$  reste le même chemin  $P_2$ .

**Définition 4.3.4.** Soit l'involution  $\sigma$ , qui a un sens commutative, définie par,

$$\sigma(P_1, P_2) = (P'_1, P'_2), \tag{4.4}$$

dont  $P'_1$  est le même chemin que  $P_2$  mais translaté pour commencer du point initial de  $P_1$  et vice versa pour  $P'_2$  (expliquée dans la Figure 4.3).

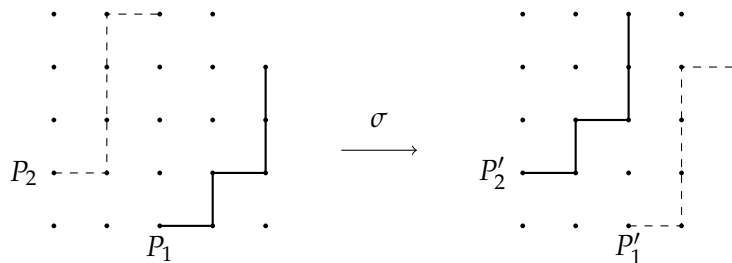


FIGURE 4.3 – L'involution  $\sigma$ .

## 4.4 Résultats principaux

Le théorème cité au dessous est le principal résultat obtenu de ce Chapitre. On prouve que nombreuses suites de fonction symétrique  $E_k^{(s)}(n)$  sont log-concave. Une conséquence directe de ce résultat est que les coefficients bi<sup>s</sup> nomiaux et leurs analogues sont log-concave. Cette propriété est étudiée sur les trois niveaux : horizontal, vertical et sur la transversale. La condition exigée sur la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  dans  $E_k^{(s)}(n)$  est quelle soit fortement  $x$ -log-concave.

**Théorème 4.4.1.** Si la suite des polynômes  $(x_n)_{n \geq 1}$  est fortement  $x$ -log-concave, alors les suites suivantes,

1.  $(E_k^{(s)}(n))_{k \geq 0}$ ,
2.  $(E_k^{(s)}(n))_{n \geq 0}$ ,
3.  $(E_{k-j}^{(s)}(n+j))_{j \leq k}$ ,

l'ont aussi.

*Démonstration.* 1. **Pour  $n$  fixe.**

Tout d'abord, nous allons prouver l'inégalité,

$$\left[ E_k^{(s)}(n) \right]^2 - E_{k-1}^{(s)}(n) E_{k+1}^{(s)}(n) \geq_x 0. \quad (4.5)$$

A partir de l'étiquetage  $E^{(s)}$  et de la Relation (4.1), on peut réécrire l'Inégalité (4.5) comme suit,

$$\left[ E_k^{(s)}(n) \right]^2 - E_{k-1}^{(s)}(n) E_{k+1}^{(s)}(n) = \sum_{P_1, P_2} (-1)^{P_1 P_2} x^{P_1 P_2}, \quad (4.6)$$

où,

- $v_1 = (k, n-1)$  et  $v_2 = (k+1, n-1)$ ,
- $u_1 = (0, 0)$  est le point de départ de  $P_1$ ,
- $u_2 = (1, 0)$  est le point de départ de  $P_2$ ,
- $(-1)^{P_1 P_2} = \begin{cases} +1 & \text{si } v_1 \text{ est le dernier point de } P_1 \text{ et } v_2 \text{ est le dernier de } P_2, \\ -1 & \text{si } v_2 \text{ est le dernier point de } P_1 \text{ et } v_1 \text{ est le dernier de } P_2. \end{cases}$

Appliquer l'involution  $\varphi$  donnée par la Définition 4.3.2 sur chaque monôme  $x^{P_1 P_2}$  associé aux paires de chemins  $(P_1, P_2)$  avec le signe  $-1$  en Relation (4.6), on obtient toujours au moins un monôme  $x^{P'_1 P'_2}$  associé aux paires de chemins  $(P'_1, P'_2)$  avec le signe  $+1$  égal à  $x^{P_1 P_2}$  (i. e.  $x^{P'_1 P'_2} - x^{P_1 P_2} = 0$ ) en Relation (4.6), parce que  $P_1$  et  $P_2$  commencent sur la même ligne horizontale (un exemple est donné dans la Figure 4.4). Cela implique l'existence d'une injection entre l'ensemble des paires de chemins  $(P'_1, P'_2)$  et l'ensemble des paires de chemins  $(P_1, P_2)$ . Ainsi, l'Inégalité (4.5) est vérifiée.

Enfin, pour prouver

$$E_l^{(s)}(n)E_k^{(s)}(n) - E_{l-1}^{(s)}(n)E_{k+1}^{(s)}(n) \geq_x 0, \text{ pour } l \leq k, \quad (4.7)$$

on utilise la même approche avec  $u_2 = (k - l + 1, 0)$  comme nouvelle condition. On peut pas appliquer un changement sur le  $v_2$  car le  $u_1$  est fixe, cela dit qu'on peut pas dépasser  $k + 1$ .

Par exemple, si nous prenons  $n = 3, l = 1, k = 2$  et  $s = 2$  alors l'Inégalité (4.7) est vérifiée car,

$$\begin{aligned} E_1^{(2)}(3)E_2^{(2)}(3) - E_0^{(2)}(3)E_3^{(2)}(3) &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 \\ &+ x_1x_3 + x_2x_3) - 1.(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 \\ &+ x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_1x_2x_3) \\ &= x_1(x_1^2) + x_1(x_2^2) + x_1(x_3^2) + x_1(x_1x_2) \\ &+ x_1(x_1x_3) + x_1(x_2x_3) + x_2(x_1^2) \\ &+ x_2(x_2^2) + x_2(x_3^2) + x_2(x_1x_2) \\ &+ x_2(x_1x_3) + x_2(x_2x_3) + x_3(x_1^2) \\ &+ x_3(x_2^2) + x_3(x_3^2) + x_3(x_1x_2) \\ &+ \underline{x_3(x_1x_3)} + x_1(x_2x_3) - (x_1^2x_2 \\ &+ x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + \underline{x_1x_3^2} + x_2^2x_3 \\ &+ x_2x_3^2 + x_1x_2x_3) \\ &\geq_x 0. \end{aligned}$$

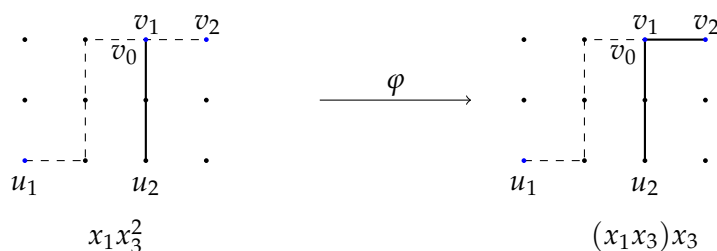


FIGURE 4.4 – L'application de l'involution  $\varphi$  sur les deux termes soulignés ci-dessus.

**Remarque 4.4.2.** Notez que la configuration  $(P_1, P_2) \longrightarrow (P'_1, P'_2)$  corrige le degré.

2. Pour  $k$  fixe.

Du premier cas, on sait que pour établir la  $x$ -log-concavité forte de  $(E_k^{(s)}(n))_{n \geq 0}$  il

suffit de prouver,

$$E_k^{(s)}(m)E_k^{(s)}(n) - E_k^{(s)}(m-1)E_k^{(s)}(n+1) = \sum_{P_1, P_2} (-1)^{P_1 P_2} x^{P_1 P_2} \geq_x 0, \quad (4.8)$$

avec  $n \geq m$  et,

- $v_1 = (k, n-1)$  et  $v_2 = (k, n)$ ,
- $u_1 = (0, 0)$  est le point de départ de  $P_1$ ,
- $u_2 = (0, n-m+1)$  est le point de départ de  $P_2$ ,
- $(-1)^{P_1 P_2} = \begin{cases} +1 & \text{si } v_1 \text{ est le dernier point de } P_1 \text{ et } v_2 \text{ est le dernier de } P_2, \\ -1 & \text{si } v_2 \text{ est le dernier point de } P_1 \text{ et } v_1 \text{ est le dernier de } P_2. \end{cases}$

En appliquant l'involution  $\varphi$  donnée par la Définition 4.3.2 sur chaque monôme  $x^{P_1 P_2}$  associé aux paires de chemins  $(P_1, P_2)$  avec le signe  $-1$  dans (4.8), on obtient au moins un monôme  $x^{P'_1 P'_2}$  associé aux paires de chemins  $(P'_1, P'_2)$  avec le signe  $+1$  dans (4.8) et satisfait,

$$x^{P'_1 P'_2} - x^{P_1 P_2} = y \left( \prod_i x_{a_i} x_{b_i} - \prod_i x_{a_i-1} x_{b_i+1} \right),$$

où  $a_i \leq b_i$  pour tous  $i$ , parce que  $P_1$  et  $P_2$  se terminent sur la même ligne verticale et  $y$  est un monôme fixe (tout ce qui se trouve au sud-ouest de  $v_0$ ), voir la Figure 4.5. Ainsi, si  $(x_n)_{n \geq 1}$  est fortement  $x$ -log-concave alors  $x^{P'_1 P'_2} - x^{P_1 P_2} \geq_x 0$ . Donc l'Inégalité (4.8) est vérifiée.

Par conséquent, la suite  $(E_k^{(s)}(n))_{n \geq 0}$  est  $x$ -log-concave.

Par exemple, si  $n = 3$ ,  $m = 2$ ,  $k = 2$  et  $s = 2$  alors on trouve dans (4.8) les deux  $E^{(2)}$ -monomials comme il est indiqué au dessous et dans la Figure 4.5

$$\begin{aligned} x^{P_1 P_2} &= x_1^2 x_2 x_4 = x_1 x_2 (x_1 x_4), \\ x^{P'_1 P'_2} &= x_1 x_2^2 x_3 = x_1 x_2 (x_2 x_3). \end{aligned}$$

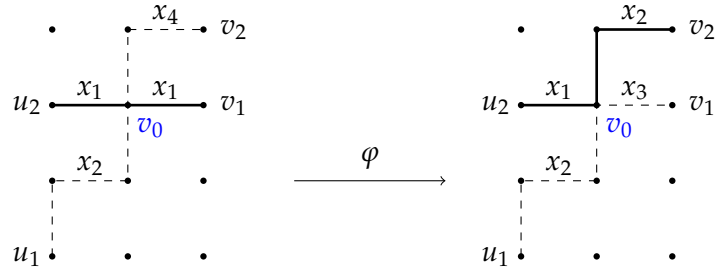
On remarque que  $x_1 x_2 (x_2 x_3) - x_1 x_2 (x_1 x_4) \geq_x 0$  si  $(x_n)_{n \geq 0}$  est fortement  $x$ -log-concave.

### 3. Pour $n$ et $k$ fixes.

Maintenant, nous allons illustrer le cas général

$$E_k^{(s)}(n)E_l^{(s)}(m) - E_{k-1}^{(s)}(n+1)E_{l+1}^{(s)}(m-1) \geq_x 0, \quad (4.9)$$

avec  $m \leq n, k \leq l \leq sm$  et  $k+n = l+m$ .


 FIGURE 4.5 – L'application de l'involution  $\varphi$  sur les deux  $E^{(2)}$ -monomiaux ci-dessus.

Ainsi, il suffit de prouver

$$\sum_{P_1, P_2} (-1)^{P_1 P_2} x^{P_1 P_2} \geq_x 0, \quad (4.10)$$

avec,

- $v_1 = (k, n - 1)$  et  $v_2 = (k - 1, n)$ ,
- $u_1 = (0, 0)$  est le point initial de  $P_1$ ,
- $u_2 = (k - l - 1, n - m + 1)$  est le point initial de  $P_2$ ,
- $(-1)^{P_1 P_2} = \begin{cases} +1 & \text{si } v_1 \text{ est le dernier point de } P_1 \text{ et } v_2 \text{ est le dernier de } P_2, \\ -1 & \text{si } v_2 \text{ est le dernier point de } P_1 \text{ et } v_1 \text{ est le dernier de } P_2. \end{cases}$

Pour vérifier l'Inégalité (4.10), il suffit de montrer que pour chaque monôme  $x^{P_1 P_2}$  de paires de chemins  $(P_1, P_2)$  avec signe  $-1$ , il existe au moins un monôme  $x^{P'_1 P'_2}$  de paires de chemins  $(P'_1, P'_2)$  avec signe  $+1$ , tel que  $x^{P'_1 P'_2} \geq_x x^{P_1 P_2}$ . Pour ce faire, nous combinons entre les deux approches précédentes, dans lequel on utilise les trois applications des Définitions 4.3.2, 4.3.3 et 4.3.4 dans la composition suivante,

$$(P_1, P_2) \xrightarrow{\tau_W \varphi \tau_W^{-1}} (P'_1, P'_2) \xrightarrow{\sigma \tau_S^{n-m+1} \tau_W^{k-l} \varphi \tau_S^{m-n-1} \tau_W^{l-k}} (P''_1, P''_2) \quad (4.11)$$

Puisque, après  $\tau_W^{-1}$  et avant le traitement de  $\varphi$  les chemins  $P_1$  et  $P_2$  se terminent sur la même ligne verticale (ne commence pas sur la même ligne horizontale), et par la  $x$ -log-concavité forte de  $(x_n)_n$  (l'approche du second cas), on obtient nécessairement dans la première partie de la Composition (4.11),

$$x^{P'_1 P'_2} \geq_x x^{P_1 P_2} \quad (4.12)$$

Avant d'appliquer  $\varphi$  dans la deuxième partie de la Composition (4.11),  $P'_1$  et  $P'_2$  commencent sur la même ligne horizontale, de sorte que pour chaque  $x_{a_i}$  correspond un  $x_{b_i}$  (l'approche du premier cas). Cela donne,

$$x^{P'_1 P'_2} = x^{P''_1 P''_2} \quad (4.13)$$

Nos applications sont donc toutes des injections. Par conséquent, de (4.12) et (4.13), on obtient

$$x^{P_1' P_2''} \geq_x x^{P_1 P_2}.$$

L'inégalité est vérifiée.

Par exemple, si  $n = 4, m = 3, k = 2, l = 3$  et  $s = 2$  alors on trouve dans (4.10) les deux  $E^{(2)}$ -monomiaux suivants comme indiqué dans la Figure 4.6

$$\begin{aligned} x^{P_1 P_2} &= x_1^2 x_2^2 x_5 = x_1^2 x_2 (x_2 x_5), \\ x^{P_1' P_2'} &= x_1^2 x_2 x_3 x_4 = x_1^2 x_2 (x_3 x_4), \\ x^{P_1'' P_2''} &= x_1^2 x_2 x_3 x_4 = x_1^2 x_2 (x_3 x_4). \end{aligned}$$

On remarque que  $x^{P_1'' P_2''} = x^{P_1' P_2'}$ , et  $x^{P_1'' P_2''} - x^{P_1 P_2} \geq_x 0$ , parce que  $(x_n)_{n \geq 1}$  est fortement  $x$ -log-concave.  $\square$

## 4.5 Applications

En guise d'applications les corollaires ci-dessus sont des résultats immédiats du théorème principal.

**Corollaire 4.5.1.** Pour  $s \geq 1$ , les suites suivantes sont fortement  $q$ -log-concave,

$$\left\{ \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q^{(s)} \right\}_{k \geq 0}, \quad \left\{ \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q^{(s)} \right\}_{n \geq 0}, \quad \left\{ \left[ \begin{matrix} n+j \\ k-j \end{matrix} \right]_q^{(s)} \right\}_{j \geq 0},$$

et donc sont  $q$ -log-concave.

**Corollaire 4.5.2.** Pour  $s \geq 1$ , les suites suivantes sont log-concaves

$$\left\{ \binom{n}{k}_s \right\}_{k \geq 0}, \quad \left\{ \binom{n}{k}_s \right\}_{n \geq 0}, \quad \left\{ \binom{n+j}{k-j}_s \right\}_{j \leq k},$$

et donc sont unimodales.

Appliquant la même approche que celle proposée respectivement dans le premier et le deuxième cas du Théorème 4.4.1, on obtient le résultat suivant.

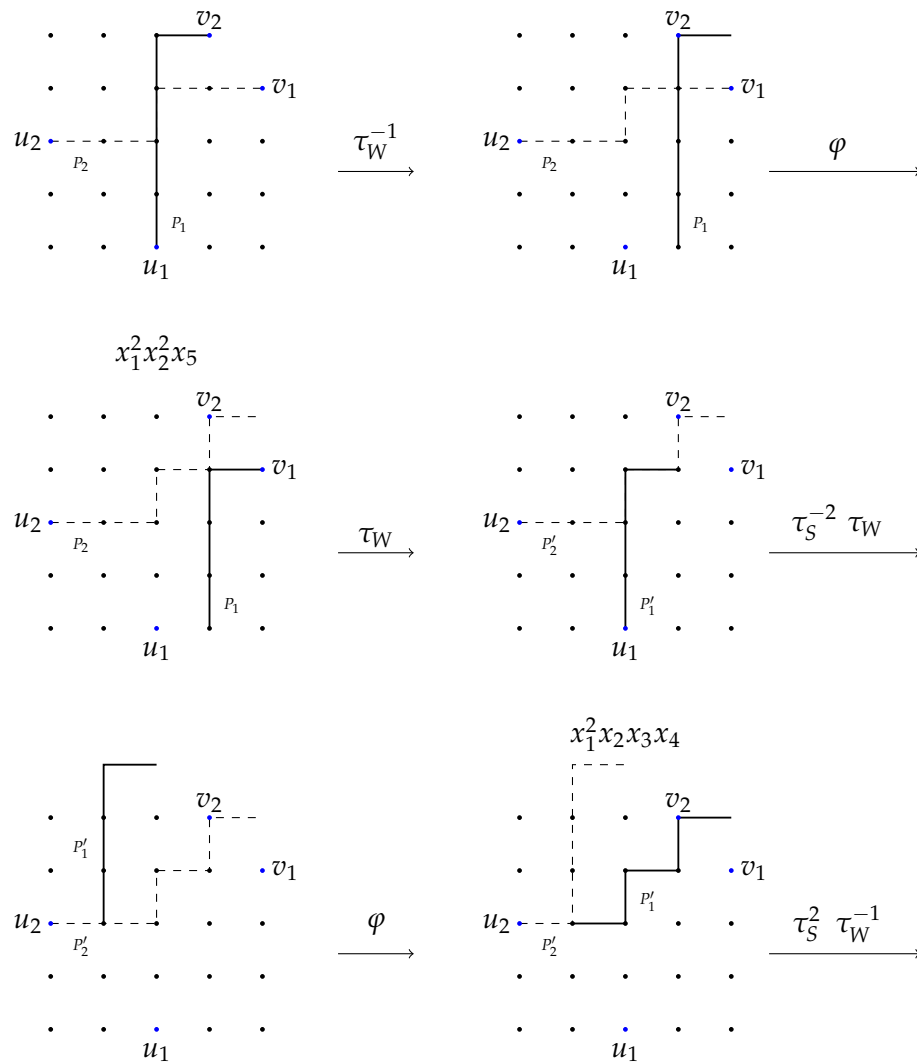
**Théorème 4.5.3.** Pour  $s \geq 1$ . Si la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est polynomiale en  $q$  avec des coefficients non négatifs, alors pour  $n \geq m$  et  $l \geq k$  on a,

$$(a) \quad E_k^{(s)}(n) E_l^{(s)}(m) \geq_q E_{k-1}^{(s)}(n) E_{l+1}^{(s)}(m).$$

De plus, si la suite des polynômes  $(x_n)_{n \geq 1}$  est fortement  $q$ -log-concave, alors

$$(b) \quad E_k^{(s)}(n) E_l^{(s)}(m) \geq_q E_k^{(s)}(n+1) E_l^{(s)}(m-1).$$





En vertu du Théorème 4.5.3, on arrive au résultat suivant qui est une généralisation d'un résultat de Sagan [Sa92].

**Corollaire 4.5.4.** Pour  $n \geq m$  et  $l \geq k$ , on a les inégalités suivantes,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_q^{(s)} &\geq_q \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} m \\ l+1 \end{bmatrix}_q^{(s)}, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_q^{(s)} &\geq_q \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} \begin{bmatrix} m-1 \\ l \end{bmatrix}_q^{(s)}. \end{aligned}$$

A partir des Théorèmes 4.4.1 et 4.5.3, et selon l'approche de Su et Wang [SW11], on a le théorème suivant.

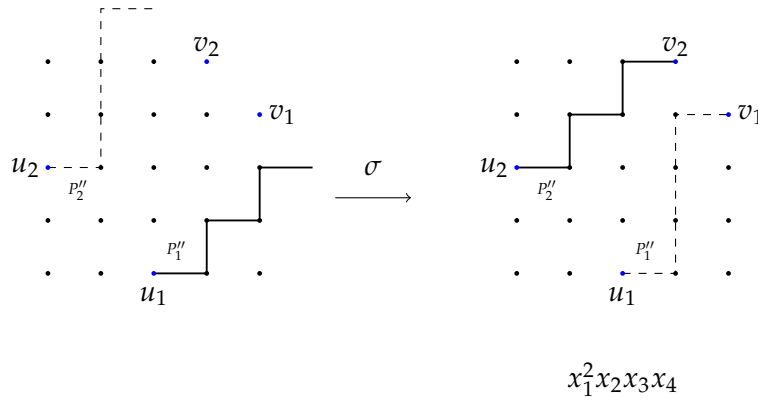


FIGURE 4.6 – L’application de la Composition (4.11) dans l’exemple au dessus.

**Théorème 4.5.5.** Si la suite des polynômes  $(x_n)_{n \geq 1}$  est fortement  $q$ -log-concave, alors pour les entiers fixes  $\alpha, \beta, n_0$  et  $k_0$  satisfont  $\alpha\beta > 0$ , et  $sn_0 \geq k_0$ , la suite des polynômes

$$\left( E_{k_0 - \beta j}^{(s)}(n_0 + \alpha j) \right)_{j \geq 0},$$

est fortement  $q$ -log-concave.

*Démonstration.* On sait que  $\alpha$  et  $\beta$  ont le même signe, alors il suffit de prendre à la fois  $\alpha$  et  $\beta$  positif. Ainsi, pour montrer que la suite des polynômes  $\left( E_{k_0 - \beta j}^{(s)}(n_0 + \alpha j) \right)_{j \geq 0}$  est fortement  $q$ -log-concave, il suffit de prouver que

$$E_k^{(s)}(n)E_l^{(s)}(m) \geq_q E_{k-\beta}^{(s)}(n+\alpha)E_{l+\beta}^{(s)}(m-\alpha), \quad (4.14)$$

où  $l \geq k, n \geq m$  avec  $k = k_0 - \beta j, l = k_0 - \beta i, n = n_0 + \alpha j, m = n_0 + \alpha i$  pour  $j \geq i$ .

Appliquant le Théorème 4.5.3 (a) et (b) à plusieurs reprises, on obtient

$$E_{k-\beta}^{(s)}(n+\alpha)E_{l+\beta}^{(s)}(m-\alpha) \leq_q E_{k-\beta}^{(s)}(n+\alpha-1)E_{l+\beta}^{(s)}(m-\alpha+1) \leq_q \cdots \leq_q E_{k-\beta}^{(s)}(n)E_{l+\beta}^{(s)}(m)$$

et

$$E_{k-\beta}^{(s)}(n)E_{l+\beta}^{(s)}(m) \leq_q E_{k-\beta+1}^{(s)}(n)E_{l+\beta-1}^{(s)}(m) \leq_q \cdots \leq_q E_k^{(s)}(n)E_l^{(s)}(m).$$

Ainsi (4.14) est vérifiée. □

Prenant  $(x_1, x_2, \dots, x_{n_0 + j\alpha}) = (1, q, \dots, q^{n_0 + j\alpha - 1})$  dans le Théorème 4.5.5, on obtient.

**Corollaire 4.5.6.** Soit  $n_0, k_0, \alpha, \beta$  quatre entiers non négatifs, où  $sn_0 \geq k_0$ . La suite suivante est fortement  $q$ -log-concave,

$$\left\{ \left[ \begin{matrix} n_0 + j\alpha \\ k_0 - j\beta \end{matrix} \right]_q^{(s)} \right\}_{j \geq 0}, \quad \alpha\beta > 0,$$

donc  $q$ -log-concave.

Prenant  $(x_1, x_2, \dots, x_{n_0+j\alpha}) = (1, 1, \dots, 1)$  dans le Théorème 4.5.5 on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 4.5.7.** Soit  $n_0, k_0, \alpha, \beta$  quatre entiers non négatifs, où  $sn_0 \geq k_0$ . La suite suivante est log-concave,

$$\left\{ \binom{n_0 + j\alpha}{k_0 - j\beta}_s \right\}_{j \geq 0}, \quad \alpha\beta > 0,$$

donc unimodal.

## Conclusion

Regarder le triangle de Pascal généralisé, ces éléments  $\binom{n}{k}_s$  et la théorie des fonctions symétriques, nous a permis de construire la fonction  $E_k^{(s)}(n)$  et obtenir plusieurs résultats. Premièrement, on a pu faire une extension du travail de Belbachir et Benmezai [BB14], où cette fonction a été grandement utilisée. Des interprétations combinatoires par les chemins dans le plan  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  et par les pavages ont été établis pour les coefficients  $\binom{n}{k}_s$  et leurs analogues, respectivement.

Deuxièmement, cette fonction nous a appris qu'en remplaçant chaque indéterminé  $x_i$  par l'entier  $i$ , alors un autre triangle arithmétique s'illustre. Les éléments de ce triangle représentent les nombres de Stirling généralisés de première espèce. Effectivement, une interprétation combinatoire de ces nombres comme des  $s$ -uplets de permutations de  $[n]$  avec  $k$  cycles a été abordée. De façon similaire, les analogues de ces nombres ont été interprétés par les statistiques d'inversions sur les même  $s$ -uplets de permutations.

Parfois, utiliser les approches analytiques directes pour prouver la log-concavité et l'unimodalité des suites est difficile, c'est bien que le cas de notre travail. Cependant, cette fonction symétrique nous a aidé à appliquer l'approche proposée dans le travail de Sagan [Sa92] pour prouver la log concavité et l'unimodalité des suites des coefficients bi $s$ nomiaux  $\binom{n}{k}_s$  et leurs analogues.

Ce travail ouvre quelques perspectives de recherche :

- Le travail effectué sur l'unimodalité de polynôme de Gauss (le  $q$ -binomial en tant que polynôme en  $q$ ) par Pak et Panova [PP14], nous laisse voir l'importance de ce résultat par les coefficients  $q$ -bi $s$ nomiaux .
- Certaines généralisations des nombres de  $r$ -Stirling peuvent être réfléchies et construites en utilisant les fonctions symétriques  $E_k^{(s)}(n)$ .
- La fonction symétrique Schur  $S_\lambda(n)$  d'une partition  $\lambda$  peut être généraliser. Par exemple, on peut définir la fonction Schur généralisée  $S_\lambda^{(s)}(n)$  en terme de la fonction symétrique  $E_k^{(s)}(n)$  comme,

$$S_\lambda^{(s)} := \det(E_{\lambda_i - i + j}^{(s)})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Il serait très intéressant d'étudier les propriétés de cette fonction Schur.

# Bibliographie

- [AB20] M. Ahmia. H. Belbachir. Log-concavity and Lc-positivity for generalized triangles. *J. Integer Seq.*, 23,5, 2020.
- [AB19] M. Ahmia. H. Belbachir. Preserving log-concavity for  $p, q$ -binomial coefficient. *Discrete Math. Algorithms Appl.*, 11, 2 :1950017, 2019.
- [ABq19] M. Ahmia. H. Belbachir.  $Q$ -total positivity and strong  $q$ -log-convexity for some generalized triangular arrays. *Ramanujan J.*, 49 :341-352, 2019.
- [AB18] M. Ahmia. H. Belbachir. Unimodality polynomials and generalized Pascal triangles. *Algebra Discrete Math.*, 26, 1 :1-7, 2018.
- [ABq18] M. Ahmia. H. Belbachir.  $p, q$ -analogue of a linear transformation preserving log-convexity. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 49,3 :549-557, 2018.
- [AB12] M. Ahmia. H. Belbachir. Preserving log-convexity for generalized Pascal triangles. *Electron. J. Combin.*, 19, 2, 16, 2012.
- [AS70] M. Abramowitz, I. Stegun. Handbook of Mathematical functions with formulas, graphs, and Mathematical tables. *Washington : U.S. Govt Printing office*, 1970.
- [A97] V. Adamchik. On Stirling Numbers and Euler Sums. *J. Comput. Appl. Math.*, 1997.
- [AH88] O. Albertson, P. Hutchinson. Discrete mathematics with algorithms. *by John Wiley and Sons, Inc., New Jersey*, 1988.
- [A98] G. Andrews. The theory of partitions. *Cambridge university press*, 1998
- [AL09] G. Andrews, L. Littlejohn. A combinatorial interpretation of the Legendre-Stirling numbers. *Proc. Amer. Math. Soc.* 137 :2581-2590, 2009.
- [AB87] G. Andrews, J. Baxter. Lattice gas generalization of the hard hexagon model III  $q$ -trinomial coefficients. *J. Stat. Phys.*, 47 :297-330, 1987.
- [BAB21] A. Bazeniari, M. Ahmia, A. Bouchair. Log-concave sequences of  $bi^s$ nomial coefficients with their analogs and symmetric functions. *Indian J. Pure Appl. Math.*, <https://doi.org/10.1007/s13226-021-00018-7>, 2021.
- [BAH18] A. Bazeniari, M. Ahmia, H. Belbachir. Connection between  $bi^s$ nomial coefficients with their analogs and symmetric functions. *Turkish J. Math.*, 42 :807-818, 2018.
- [B15] A. Beeler. How to count An introduction to combinatorics and its applications. *Springer, Cham*, 2015.
- [BB14] H. Belbachir, A. Benmezai. A  $q$ -analogue for  $bi^s$ nomial coefficients and generalized Fibonacci sequences. *C.R. Acad. Sci. I.* 352 :167-171, 2014.

- [B18] A. Benmezai. Le  $q$ -analogue des suites de Fibonacci et de Lucas. *Thèse de Mathématiques, USTHB*, 2016.
- [BBK08] H. Belbachir, S. Bouroubi, A Khelladi. Connection between ordinary multinomials, Fibonacci numbers, Bell polynomials and discrete uniform distribution. *Ann. Math. Inform.*, 35 :21-30, 2008.
- [BN16] H. Belbachir, L. Németh, Szalay L. Hyperbolic Pascal triangles. *Appl. Math. comput.*, 273 :453-464, 2016.
- [BS14] H. Belbachir, L. Szalay. On the arithmetic triangles. *Šiauliai Math. Sem.*, 9, 17 :15-26, 2014.
- [BS08] H. Belbachir, L. Szalay. Unimodal rays in the regular and generalized Pascal triangles. *J. Integer Seq.*, 11, 2, 2008.
- [BPQ02] T. Benjamin, O. Preston et J. Quinn. A Stirling Encounter with Harmonic Numbers. *Mathematics Magazine*, 75, 2, 2002.
- [B68] C. Berge. Principe de la combinatoire. *Dunod, Paris*, 1968.
- [B17] P. Bogart. Enumerative Combinatorics Through Guided Discovery. *CreateSpace Independent, Publishing Platform*, 2017.
- [B86] R. Bollinger. A note on Pascal T-triangles, Multinomial coefficients and Pascal pyramids. *Fibonacci Quart.*, 24 :140-144, 1986.
- [B04] M. Bona. Combinatorics of Permutations. *Discrete Math. Appl.*, 2004.
- [B93] B. Bondarenko. Generalized Pascal triangles and Pyramids, their fractals, graphs and applications. The Fibonacci Association, *Santa Clara*, translated from Russian by R. Bollinger, 1993.
- [BA17] A. Bostan. Computer algebra for lattice path combinatorics. *PhD thesis, Université Paris 13*, 2017.
- [B18] N. Bouffard. Combinatoire 1. *Université Saint-Boniface*, 1818.
- [B94] F. Brenti. Log-concave and unimodal sequence in algebra, combinatorics and geometry. *an update. Contemp. Math.*, AMS, Providence, 178 :71-89, 1994.
- [B89] F. Brenti. Unimodal, log-concave and Pólya frequency sequences in combinatorics. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 413, 1989.
- [B84] Z. Broder. The  $r$ -Stirling Numbers. *Discrete Math.*, 49 :241-259, 1984.
- [B90] L. Butler. On The  $q$ -Log-Concavity of  $q$ -Binomial Coefficients. *J. Combin. Theory Ser. A*, 54 :54-63, 1990.
- [B87] L. Butler, A unimodality result in the enumeration of subgroups of a finite abelian group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 101, 771-775, 1987.
- [C80] L. Carlitz. Weighted Stirling numbers of the first and second kind. I. *Fibonacci Quart.*, 18, 2 :147-162, 1980.

- [C79] L. Carlitz. Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers. *Utilitas Math.*, 15 :51–88, 1979.
- [C33] L. Carlitz, On Abelian fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 35 :122-136, 1933.
- [CS19] R. Chattamvelli, R. Shanmugam. Generating Functions in Engineering and the Applied Sciences. *MC Publishers series*, DOI : 10.2200/S00942ED1V01Y201907ENG037, 2019.
- [C74] L. Comtet. Advanced Combinatorics : the art of finite and infinite expansions. *Springer science and business media*, 1974.
- [CG96] H. Conway, K. Guy. The book of numbers. *Springer-Verlag, New York, Inc*, 1996.
- [C08] R. Corcino. On  $p, q$ -binomial coefficients. *Integers*, 8, 16, 2008. ISSN 1867-0652.
- [DP02] A. Davey, A. Priestley. Introduction to lattices and order. *Cambridge University Press, New York, 2th ed.*, 2, 15, 2002.
- [D59] H. DeGroot. Unbiased sequential estimation for binomial populations. *Ann. Math. Statist.*, 30 :80-101, 1959.
- [DW14] D. Detemple, W. Webb. Combinatorial reasoning : an introduction to the art of counting. *by John Wiley and Sons, Inc., New Jersey*, 2014.
- [DW92] S. Doty, G. Walker. Modular symmetric functions and irreducible modular representations of general linear groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 82,1 :1-26, 1992.
- [E83] H. Exton.  $q$ -Hypergeometric Functions and Applications. *New York : Halstead Press, Chichester : Ellis Horwood*, 1983.
- [E19] S. Egge. An Introduction to Symmetric Functions and Their Combinatorics. *AMS, Student Mathematical Library*, 91, 2019.
- [E10] E. Egge. Legendre-Stirling permutations. *European J. Combin.*, 31 :1735-1750, 2010.
- [E13] D. Ensley. Fibonacci's triangle and other abominations. *MMath. Assoc. America.*, 11, 1 :10-14, 2013.
- [F74] O. Foulkes. A survey of some combinatorial aspects of symmetric functions and Permutations. *Gauthier-Villars, Paris*, 1974.
- [FM20] H. Fu, Z. Mei. Truncated homogeneous symmetric functions. *Linear Multilinear A*, 2020.
- [GR93] I. Gessel, C. Reutenauer. Counting permutations with given cycle structure and descent set. *J. Comb. Theory ser. A*, 64 :198-215, 2, 1993.
- [GV85] I. Gessel, G. Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. *Adv. Math.*, 58 :300-321, 1985.
- [G84] I. Gessel. Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions. *Combinatorics and algebra. C. Greene, Contemporary Mathematics* 34 :289-301, 1984.

- [G82] I. Gessel. A  $q$ -analog of the exponential formula. *Discrete Math.*, 40 :69-80, 1982.
- [GR70] J. Goldman, G. Rota. On the foundations of combinatorial theory, Finite vector spaces, Eulerian generating functions. *Stud. Appl. Math.*, 49 :239-258, 3, 1970.
- [G19] C. Goldstein. Oeuvres d'Ernest Coumet. *Presses universitaires de Franche-Comté, Besançon*, DOI : 10.4000/books.pufc.14888, 2, 2019.
- [G61] W. Gould. The  $q$ -Stirling numbers of the first and second kinds. *Duke Math. J.*, 28 :281-289, 1961.
- [G60a] W. Gould. The Lagrange interpolation formula and Stirling numbers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 :421-425, 1960.
- [G60b] W. Gould. Stirling number representation problems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 :447-451. 1960.
- [G04] D. Grinberg. Petrie symmetric functions. *arXiv*, 11194v1, 2004.
- [H80] T. Howard. Associated Stirling numbers. *Fibonacci Quart.*, 18,4 :303–315, 1980.
- [HKS03] J. Herman, R. Kucera, J. Simsa. Counting and Configurations. *CMS, Springer-Verlag New York, Inc.*, 2003.
- [HS98] C. Hsu, S. Shiue. A unified approach to generalized Stirling numbers. *Adv. in Appl. Math.*, 20,3 :366–384, 1998.
- [H10] K. Humphreys. A history and a survey of lattice path enumeration. *J. Statist. Plann. Inference*, 140 :2237-2254, 2010.
- [K92] D. Knuth. Two notes on notation. *Amer. Math. Monthly*, 99 :403-422, 1992.
- [K71] D. Knuth. Subspaces, subsets, and partitions. *J. Comb. theory ser. A*, 10 :178-180, 1971.
- [K70] D. Knuth. Permutations, matrices, and generalized young tableaux. *Pacific J. Math.*, 34, 3 :709–727, 1970.
- [K89] C. Krattenthaler. On the  $q$ -log-Concavity of Gaussian Binomial Coefficients. *Monatsh. Math.*, 107 :333-339, 1989.
- [K65] G. Kreweras. Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers. *Cahiers du B.U.R.O. Univ de Rech Opér*, 6, 5105, 1965.
- [L03] K. Lando. Lectures on Generating Functions. *AMS*, 2003.
- [L96] A. Lascoux, P. Schützenberger. Treillis et bases des groupes de coxeter. *Electron. J. Combin.*, 3, 2, 1996.
- [L90] P. Leroux. Reduced matrices and  $q$ -log-concavity properties of  $q$ -Stirling numbers. *J. Comb. Theory ser. A*, 54 :64-84, 1990.
- [L17] N. Loehr. Combinatorics. *second ed. Chapman and Hall/CRC*, 2017.
- [M95] I. Macdonald. Symmetric Functions and Hall Polynomials. *Oxford Science Publications, seconde edition*, 1995.



- [M37] M. MacNeille. Partially ordered sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 42 :416–460, 3, 1937.
- [M16] P. MacMahon. Two applications of general theorems in combinatory analysis. *P. Lond. Math. Soc.*, 15 :314-321, 1916.
- [M60] P. MacMahon. Combinatorial analysis. *Cambridge University Press*, 1915, Chelsea reprint 1960.
- [M93] A. De Médicis, P. Leroux. A unified combinatorial approach for  $q$ -(and  $p, q$ -) Stirling numbers. *J. Statist. Plann. Inference*, 34 :89-105, 1993.
- [M19] I. Mező. Combinatorics and Number Theory of Counting Sequences. *CRC Press*, 2019.
- [MR15] A. Mendes, J. Remmel. Counting with Symmetric Functions, *Springer International Publishing Switzerland*, 2015.
- [MM12] M. Mihoubi, M. Maamra. The  $(r_1, \dots, r_p)$ - Stirling numbers of the second kind. *Integers*, 12, 5 :1047-1059, 2012.
- [M79] S. Mohanty. Lattice Path Counting and Applications. *Academic Press, INC. New York*, 1979.
- [M67] A. de Moivre. The doctrine of chance. *enprinted by Chelsea, NY*, 1967.
- [N16] L. Németh. On the hyperbolic Pascal pyramid. *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, 57, 4 :913–927, 2016.
- [N01] E. Netto. Lehrbuch der Combinatorik. *Chelsea, New York*, 1901.
- [N06] N. Nielsen. Hundbuch der Theorie der Gummufunktion. *B.G. Teubner, Leipzig*, 1906. reprinted under the title :Die Gammufunktion, *Chelsea, New York*, 1965.
- [N69] I. Niven. Formal power series, *Amer. Math. Monthly*, 76 :871–889, DOI 10.2307/2317940.MR252386, 1969.
- [PP14] I. Pak, G. Panova. Unimodality via Kronecker products. *J. Algebraic Combin.*, 40, 1103-1120, 2014.
- [R12] J. Riordan. Introduction to combinatorial analysis. *Courier Corporation*, Reprint of the 1956 original, 2012.
- [R68] J. Riordan. Combinatorial identities, *New York, Wiley*, 256, 1968.
- [S92] B. Sagan. On Inductive proofs of  $q$ -log-concavity. *Discrete Math.*, 99 :289-306, 1992.
- [Sa92] B. Sagan. Log concave sequences of symmetric functions and analogs of the Jacobi- Trudi determinants. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 329 :795-811, 1992.
- [S91] B. Sagan. The symmetric group : representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions. *Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove*, 1991.
- [S90] B. Sagan. The ubiquitous Young tableau, Invariant Theory and Tableaux. *Dennis Stanton, IMA, Math. Appl.*, 19 :262-298, 1990.

- [SPS01] J. Sixdeniers, K. Penson and A. Solomon. Extended Bell and Stirling Numbers From Hypergeometric Exponentiation. *J. Integer Seq.*, 4, 2001.
- [S] N. Sloane. The online Encyclopedia of Integer sequences. *Published electronically* at <http://www.research.att.com/~njas/sequences>.
- [SH79] C. Smith, V. Hogatt. Generating functions of central values of generalized Pascal triangles. *Fibonacci Quart.*, 17 :58–67, 1979.
- [S89] R. Stanley. Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics and geometry. *Ann. NY. Acad. Sci.*, 576 :500-534, 1989.
- [S99] R. Stanley. Enumerative combinatorics. *Cambridge University Press*, T2, 62, 1999.
- [S12] R. Stanley. Enumerative combinatorics. *Cambridge University Press*, second edition, T1, 49, 2012.
- [S13] R. Stanley. Algebraic combinatorics : Walks, Trees, Tableaux, and More. *Springer*, 77-99, 2013.
- [S30] J. Stirling. Methodus Differentialis. *Sive Tractatus De Summatione et Interpolatione Serierum Infinitorum*, London, 1730.
- [S82] J. Sylvester. A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion. *Amer. J. Math.*, 5 :251-330, 1882.
- [SW11] X. Su, Y. Wang. Unimodality problems of multinomial coefficients and symmetric functions. *Electron. J. Combin.*, 18, 2011.
- [TZ76] S. Tanny, M. Zuker. On unimodal sequence of binomial coefficients 2. *J. Combin. Inform. System Sci.*, 1 :81-81, 1976.
- [TZ74] S. Tanny, M. Zuker. On unimodal sequence of binomial coefficients. *Discrete Math.*, 9 :79-89, 1974.
- [T12] A. Tucker. Applied Combinatorics. *by John Wiley and Sons, Inc., New Jersey*, 6th ed., 2012.
- [V80] G. Viennot. Interprétation combinatoire des nombres d'Euler et de Genocchi. *Séminaire de Théorie des Nombres*, 11, 1980.
- [W97] S. Warnaar. The Andrews-Grdon identities and the  $q$ -Multinomials coefficients. *Comm. Math. Phys.*, 184 :203-232, 1997.
- [W06] H. Wilf, generatingfunctionology. *A K Peters, Ltd., Wellesley, MA*, MR2172781, 2006.
- [WW91] M. Wachs, D. White.  $p, q$ -Stirling numbers and set partition statistics. *J. Comb. Theory ser. A*, 51 :27-46, 1991.
- [Y00] A. Young. On quantitative substitutional analysis. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1, 1 :97–145, 1900.

**Résumé** Le domaine de cette thèse est la combinatoire énumérative, notamment la combinatoire des fonctions symétriques et des interprétations combinatoires. Dans un premier temps, on propose une fonction symétrique qui interprète les coefficients binomiaux et leurs analogues. On donne aussi des identités de symétries et de récurrences dans le cas des analogues. On obtient ainsi donc de nouvelles interprétations combinatoires par les chemins dans le plan  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  et par les pavages. Ensuite, on étudie des nouvelles suites générées par cette fonction que nous l'ont appelons les nombres de Stirling généralisés. En terme d'interprétation combinatoire, ils représentent le nombre des  $s$ -uplets de permutations de  $[n]$  avec  $k$  cycles. Enfin, inspirant de Sagan, on prouve la log-concavité des coefficients binomiaux en utilisant le croisement de deux chemins, sous certaines restrictions, pour vérifier l'inégalité de cette propriété.

**Mots clés :** Log-concavité, Unimodalité, Fonctions Symétriques, Tableaux de Young, Permutations, Inversions des Permutations, Stirling généralisés, Chemins, Pavages.

**Abstract** The field of this thesis is enumerative combinatorics, in particular the combinatorics of symmetric functions and combinatorial interpretations. First, we propose a symmetric function that interprets the binomial coefficients and their analogues. We also give identities of symmetries and recurrences in the case of analogues. We thus obtain new combinatorial interpretations by paths in a plane and by tilings. Then, we study new sequences generated by this function that we call the generalized Stirling numbers. In terms of combinatorial interpretation, they represent the number of  $s$ -uplets of permutations of  $[n]$  with  $k$  cycles. Finally, inspired by Sagan, we prove the log-concavity of binomial coefficients by using the crossing of two paths, under certain restrictions, to verify the inequality of this property.

**Key words :** Log-concavity, Unimodality, Symmetric Functions, Young Tableaux, Permutations, Inversions of Permutations, Generalized Stirling, Paths, Tiling.

الملخص مجال هذه الأطروحة هو التوافقية العددية، ولا سيما التوافقية بين الدوال التناظرية و تفسيراتها. أولاً، نقترح دالة تناظرية تفسر المعاملات ذات سحدين ونظائرها. نعطي أيضاً الخاصيات التناظرية والتراجعية في حالة النظائر. وبالتالي نحصل على تفسيرات اندماجية جديدة من خلال المسارات الموجودة في المستوى ومن خلال المتراسات. بعد ذلك، ندرس المتتاليات الجديدة الناتجة عن هذه الدالة التي نسميها أعداد ستيرلنج المعممة. من حيث التفسير التوافقي، فإنها تمثل عدد المنافذ من التبديل  $[n]$  مع  $k$  دورة. أخيراً، مستوحاة من فكرة سقان، أثبتنا التقعر اللوغاريتمي للمعاملات ذات سحدين باستخدام تقاطع مسارين، في ظل قيود معينة، للتحقق من صحة المتراحة في هذه الخاصية.

**الكلمات المفتاحية** التقعر اللوغاريتمي، المنوال، الدوال المتماثلة، جداول يونغ، التبادلية، انعكاسات التبادلية، ستيرلنج المعمم، المسارات، المتراسات.