

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



N° d'ordre :.....

Série :.....

Université Mohammed Seddik

BENYAHIA - Jijel

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département : Génie Civil et Hydraulique

Thèse Présentée

Pour l'obtention du Diplôme de Doctorat 3^{ème} Cycle

Spécialité : **Modélisation des structures et des Géomatériaux**

Par :

HAMAIDIA Achref

Thème :

Contrôle des instabilités dans les structures à parois minces

Soutenue publiquement le 20 / 02 /2020. Devant le jury composé de :

Mr. BOUZERIRA Chérif	Professeur	U.M.S.B Jijel	Directeur de thèse
Mr. MOHRI Foudil	HDR	U. Lorraine, France	Codirecteur de thèse
Mr. LAMARA Mohamed	Professeur	U.M.S.B Jijel	Président
Mr. MESSIOUD Salah	MCA	U.M.S.B Jijel	Examineur
Mr. GHRICI Mohamed	Professeur	U.H.B Chlef	Examineur
Mr. ADMAN Redouane	Professeur	U.S.T.H.B Alger	Examineur

Remerciements

Ma gratitude s'adresse tout d'abord à Mr le professeur *Mohri Foudil* de l'université de Lorraine, pour la grande disponibilité qu'il m'a réservée à chacune de mes nombreuses sollicitations. Je ne passerai pas sous silence ses qualités humaines qui m'ont guidé de façon quasi filiale dans mes moments de doute ou d'incertitude. Mais surtout j'ai tiré un profit certain de la haute technicité qu'il investit dans son domaine de compétence.

Je voudrais également ici remercier, Mr le professeur *Cherif Bouzzerira*, de l'université de Jijel, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je tiens aussi à remercier messieurs les membres du jury : Mr le professeur *Lamara Mohamed*, Mr le professeur *Ghrici Mohamed*, Mr le professeur *Adman Redouane* et Mr le docteur *Messioud Salah*, pour avoir accepté d'examiner ce travail et de participer au jury. Je tiens à les remercier pour le temps précieux qu'ils ont consacré à la lecture et à la critique de ce mémoire est à inscrire à l'actif de leur patience, afin de porter à ce travail tout enrichissement qu'ils considèrent comme utile.

Mes sincères remerciements vont également à Mme *Bouali Meriam*, professeur de l'université de Souk Ahras, pour son soutien, ses précieux conseils et nombreuses discussions.

Je souhaite aussi adresser mes remerciements au, Corps professoral et administratif des universités de Jijel et de Lorraine qui m'ont aidé à mener à son terme la présente thèse. Enfin, je ne terminerai pas sans évoquer dans mes pensées ma famille, mes amis et toutes les personnes qui m'ont encouragé à ne pas céder en face de quelques passages difficiles.

TABLE DES MATIERES

Résumé.....	I
Abstract.....	III
ملخص.....	IV
Liste des figures	V
Liste des tableaux	VII
Introduction générale	1
Objectif de la thèse	4
Chapitre 1 : La torsion des barres à parois minces avec section ouverte	6
1.1 Introduction	7
1.2 Types de section droite.....	7
1.3 Etude de la torsion.....	8
1.3.1 Torsion uniforme.....	8
1.3.2 Torsion non uniforme des sections ouvertes.....	12
1.4 Caractéristiques de torsion des sections à parois minces.....	16
1.4.1 Moments d'inertie.....	16
1.4.2 Coordonnée sectorielle	17
1.4.3 Centre de torsion	19
1.5 Bimoment	22
1.6 Modèle de Vlasov pour les poutres à parois minces et à sections ouvertes	22
1.7 Exemple : Etude comparative	27
1.8 Energie de déformation des poutres à parois minces et à sections ouvertes	31
1.9 Conclusion.....	33
Chapitre 2 : Flambement des barres à sections minces ouvertes avec modes supérieurs	34
2.1 Introduction	35
2.1 Modèle analytique pour l'analyse du Flambement 3D	37
2.2 Détermination des modes de flambement d'ordre supérieur	39
2.2.1 Flambement d'une barre à section double symétrique	41
2.2.2 Flambement d'une barre à section mono-symétrique.....	42
2.2.2.1 Section transversale symétrique par rapport à l'axe (y-y).....	42

2.2.2.2	Section transversale symétrique par rapport à l'axe (z-z).....	43
2.2.3	Flambement d'une barre à section Asymétrique	43
2.3	La résistance au flambement selon l'Eurocode 3	44
2.4	Conclusion.....	48
Chapitre 3: Déversement des poutres à sections minces ouvertes avec modes supérieurs.....		49
3.1	Introduction	50
3.2	Déversement des poutres à section doublement symétrique sous différentes charges.....	52
3.2.1	Poutres soumises à une charge uniforme répartie.....	52
3.2.2	Poutre soumise à une charge concentrée au milieu	57
3.2.3	Poutres soumises à deux moments égaux.....	60
3.3	Formule générale des modes de déversement d'ordre supérieurs	62
3.4	La résistance au déversement selon l'Eurocode 3	63
3.5	Conclusion.....	64
Chapitre 4: Eléments finis des poutres à parois minces		65
4.1	Introduction	66
4.1	Equations d'équilibre	67
4.2	Discrétisation par éléments finis	71
4.3	Conclusion.....	74
Chapitre 5: Validations numériques et contrôle des instabilités		75
5.1	Introduction	76
5.2	Résultats et validations numériques	76
5.2.1	Validité des solutions analytiques dans le cas de flambement	76
5.2.1.1	Exemple 1 : Flambement d'une barre à section en I bi-symétrique.....	77
5.2.1.2	Exemple 2: Flambement des barres à section mono-symétrique par rapport à l'axe (y-y)	79
5.2.1.3	Exemple 3: Flambement des barres à section mono-symétrique par rapport à l'axe (z-z).....	81
5.2.1.4	Exemple 4: Flambement des barres à section quelconque (arbitraire)	85
5.2.2	Validité des solutions analytiques dans le cas de déversement.....	87
5.3	Effets des maintiens latéraux et contrôle des instabilités.....	96
5.3.1	Incidence sur la résistance au flambement	97
5.3.1.1	Exemple 1: la résistance au flambement des poutres simplement appuyées retenues et non retenues latéralement.	97

5.3.1.2 Exemple 2: la résistance au flambement des poutres consoles retenues et non retenues latéralement.....	99
5.3.2 Incidence sur la résistance au déversement.....	101
5.4 Conclusion.....	104
Conclusion générale.....	107
Références bibliographies	110
Annexes.....	115

Résumé

La présente thèse porte sur l'analyse des instabilités 3D des poutres à parois minces en présence des charges axiales et de flexion, couramment appelées flambement et déversement. Dans le cas des poutres non retenues latéralement en plus des modes classiques de flambement en flexion (Flambement Eulerien) les modes de torsion et les modes couplés flexion torsion contrôlent les instabilités de ces structures. Dans la pratique d'ingénieur comme dans les règlements en vigueur, comme les Eurocodes, le dimensionnement des structures se fait souvent selon le premier mode. Dans ce cas, la résistance peut être très faible dans les éléments très élancés. Une première solution consiste à augmenter les dimensions de la section au dépens du poids. Elle devient alors très inefficace. L'autre solution avantageuse consiste à recourir aux appuis latéraux dans le but de réduire l'effet des instabilités (entretoises). En présence des structures retenues latéralement, le flambement et le déversement sont prédominants par les modes supérieurs. Des solutions analytiques sont développées pour les modes supérieurs de flambement des barres simplement appuyées avec des sections transversales quelconques. D'autres solutions analytiques sont proposées pour le calcul des modes supérieurs de déversement des poutres à parois et à section doublement symétrique sollicitées initialement en flexion avec des charges excentrées. Pour des cas plus généraux, un modèle en éléments finis est adopté. En présence des structures poutres à parois minces et section ouverte, le gauchissement est important en présence de la torsion, pour cela, des éléments poutres 3D à 7 degrés de liberté (DDL) par nœud sont considérés. Le modèle est capable d'analyser les modes supérieurs de flambement des barres sous compression ou les modes de déversement des poutres initialement en flexion. Les résultats analytiques et numériques des présents modèles sont comparés aux résultats des simulations par éléments finis en utilisant les codes commerciaux « Abaqus » et « Adina » et par les résultats trouvés dans la littérature. L'efficacité des solutions analytiques et de l'approche numérique proposées sont vérifiées avec succès. Par ailleurs, la vérification de la résistance au flambement et au déversement selon l'Eurocode 3 a été présentée. Une attention particulière est portée sur les modes de flambement en torsion et en flexion-torsion qui ne sont pas pris en compte dans l'Eurocode 3. À la fin, quelques solutions s'appuyant sur des exemples sont proposées

afin de couvrir la résistance parfaite des barres et des poutres en présence d'instabilités. Cette proposition rend les structures en acier plus performantes et plus attractives lorsque les effets des instabilités sont limités au minimum.

Mots clés : poutre; barre ; flambement; déversement, Eurocode 3; éléments finis; mode supérieur, section ouverte.

Abstract

The present thesis investigates the flexural-torsional buckling of struts under axial loads and lateral buckling of beams initially in bending. In the highlight of braced structures, the buckling and lateral buckling stabilities are predominant by the higher buckling modes. For this purpose, analytical solutions are derived for higher 3D buckling modes of simply supported struts with arbitrary cross-sections. Closed-form solutions are also investigated for lateral buckling strength of beams with doubly symmetric cross-sections under eccentric loads (load height parameter). For more general cases, the finite element approach is adopted. In presence of torsion, warping is of primary importance. For this aim, 3D beams with 7 degrees of freedom (DOFs) per node are adopted in the analysis. The model is able to carry out higher buckling modes of bars under compression or lateral buckling modes of beams initially in bending. The analytical and the numerical results of the present models are compared to finite element simulations of some commercial codes « Abaqus », « Adina » and to some available benchmark solutions of the literature. The efficiency of the closed-form solutions and the numerical approach is successfully verified. In addition, the resistance of buckling and lateral buckling according to Eurocode 3 was presented. A particular attention is pointed out to torsion and flexural-torsional buckling modes not considered in Eurocode 3. At the end, some solutions based on examples are proposed in order to cover the full strength of columns and beams in presence of instabilities. This proposal makes steel structures more performant and attractive when effects of instabilities are limited at a minimum.

Keywords: beam; barre; buckling; lateral buckling, Eurocode 3; finite element; higher mode, open section.

ملخص

تتناول هذه الأطروحة تحليل التحنيب والتحنيب الجانبي للقضبان ذات الشكل المفتوح والمكونة من جدران رقيقة. في ظل وجود هياكل مدعمة بشكل جانبي، يكون التحنيب والتحنيب الجانبي سائدين في الأوضاع العليا. لهذا يتم تطوير الحلول التحليلية للأوضاع العليا للتحنيب الأعمدة المسندة (متمفصل) من الطرفين وذات مقاطع عرضية مفتوحة ومتغيرة، وكذلك أيضا يتم اقتراح حلول تحليلية لحساب الأنماط العليا للتحنيب الجانبي للعوارض ذات المقطع العرضية المفتوحة على شكل I.

للحالات الأكثر عمومية، يتم اعتماد نموذج العناصر المحدودة. في حالة وجود جوائز معدنية مقاطعها مفتوحة وذات جدران رقيقة، فإن التزييف مهم في وجود الالتواء، لذلك، يتم الاعتماد على عناصر ثلاثية الأبعاد وذات 7 درجات من الحرية لكل عقدة وتستخدم الطرق التكرارية في الحل. هذا النموذج العددي المقترح قادر على تحليل الأنماط العلوية لأعمدة المعرضة للضغط أو العوارض المعرضة إلى عزم انعطاف. مختلف الحلول المقترحة تتم مناقشتهم ومقارنتهم مع تلك النتائج العددية باستخدام البرامج التجارية "Abaqus" و "Adina" وبالنتائج الموجودة في الأدبيات. يتم التحقق من فعالية الحلول التحليلية المقترحة وكذلك النموذج العددي بنجاح. بالإضافة إلى ذلك، تم تقديم الطرق المستخدمة في تحقيق أمان التحمل ضد التحنيب والتحنيب الجانبي وفقاً لـ Eurocode 3 ، ويتم إيلاء اهتمام خاص لأنماط التحنيب الدوراني والتحنيب الدوراني الفراغي التي لم يتم أخذها في الاعتبار في Eurocode 3.

في النهاية، تم اقتراح بعض الحلول القائمة على أمثلة من أجل زيادة قدرة التحمل للأعمدة والعوارض المعرضة لحالات عدم الاستقرار. هذا الاقتراح يجعل المنشآت المعدنية أكثر كفاءة ومطلوبة وهذا عندما يتم التحكم في حالات عدم الاستقرار إلى أكبر حد ممكن.

الكلمات المفتاحية: العوارض، الأعمدة، التحنيب، التحنيب الجانبي، Eurocode 3، نموذج العناصر المحدودة، الأنماط العليا، روافد ذات مقاطع مفتوحة.

Liste des figures

Figure 1: Variation du facteur de réduction χ en fonction du rapport $\alpha_{cr}=P_{cr}/Af_y$	3
Figure 1.1 : Section droites typiques : a) massives ;(b) fermées à parois minces ; ouvertes à parois minces.....	8
Figure 1.2 : Torsion d'une barre cylindrique.....	9
Figure 1.3 : Contraintes tangentielles de torsion dans une section rectangulaire.....	10
Figure 1.4 : section ouverte à parois minces.....	11
Figure 1.5 : Poutre console soumise à un moment de torsion M_x	12
Figure 1.6 : Décomposition des déformations de la section et contraintes tangentielles induites.....	13
Figure 1.7 : Sections ouvertes à parois minces : les moments statiques et quadratiques classiques.....	16
Figure 1.8 : Détermination de la Coordonnée sectorielle.....	17
Figure 1.9 : Détermination des surfaces sectorielles.....	18
Figure 1.10 : Détermination du centre de torsion.....	20
Figure 1.11 : Poutre à parois minces et à section ouverte.....	23
Figure 1.12: Les axes tangent et normal à la paroi de la pièce.....	24
Figure 1.13 : Caractéristiques géométriques et sollicitation.....	27
Figure 1.14: Variation de l'angle de torsion le long de la poutre.....	28
Figure 1.15 : Variation du gauchissement le long de la poutre.....	29
Figure 1.16 : Variation du bimoment le long de la poutre.....	29
Figure 1.17 : Variation des contraintes normales aux angles (C_1 et C_2) des semelles le long de la poutre.....	30
Figure 1.18 : Comparaison entre la théorie de Vlasov et la simulation par Robot Structural Analysis.....	31
Figure 2.1 : Modes de flambement d'une barre simplement comprimée. (a) Flambement par flexion, (b) Flambement par torsion et (c) Flambement par flexion-torsion.....	35
Figure 2.2 : Poteau en compression avec maintien latéraux type poutre (a), treillis (b) ou barre (c).....	36
Figure 2.3 : Analyse de flambement 3D des poutres à parois minces.....	38
Figure 2.4: Courbes de flambement européennes des barres en acier [13].....	47
Figure 3.1 : Le déversement d'une poutre à section en I double symétrique. (a) description général, (b). Déplacement induits par le déversement.	50

Figure 3.2 : Poutre à section bi-symétrique soumise à une charge uniforme répartie.....	52
Figure 3.3 : Poutre à une section bi-symétrique sous une charge concentrée au milieu.....	57
Figure 3.4 : Poutre à section bi-symétrique soumise à deux moments égaux.....	60
Figure 4.1 : Poutre à section ouverte : cinématique et chargement.....	67
Figure 5.1 : Barre à une section en I bi-symétrique: les conditions aux limites, le chargement appliqué et les dimensions de la section.....	77
Figure 5.2 : barre à une section en C: les conditions aux limite, le chargement appliqué et Les dimensions de la section.....	80
Figure 5.3 : barre à une section en mono-symétrique d'axe z-z (a): les conditions aux limites, le chargement (b) : Les dimensions de la section en I (c) : Les dimensions de la section en Té.....	82
Figure 5.4 : barre à une section quelconque avec conditions aux limites, chargement appliqué et dimensions de la section.....	85
Figure 5.5 : Poutre à section transversale bi-symétrique sollicitée par une charge uniformément répartie et une charge concentrée toute deux appliquées au niveau : de la semelle supérieure (TF), du centre de torsion (SC), et de la semelle inférieure en (BF).....	87
Figure 5.6 : Variation du moment critique de déversement en fonction de la longueur L . (a) cas de la charge uniformément répartie, (b) cas de la charge concentrée.....	90
Figure 5.7 : Poutre bi-symétrique sollicitée par une charge uniformément répartie : Variation des moments critiques analytiques et numériques en fonction du mode de flambage k	92
Figure 5.8 : Poutre bi-symétrique sollicitée par une charge concentrée : Variation des moments critiques analytiques et numériques en fonction du mode de flambage k	94
Figure 5.9 : Poutre à section transversale bi-symétrique sollicitée par deux moments égaux.....	94
Figure 5.10 : Variation du moment critique de déversement en fonction de la longueur L	95
Figure 5.11 : Poutre bi-symétrique sollicitée par deux moments égaux : Variation des Moments critiques analytiques et numériques en fonction du mode de flambage k	96
Figure 5.12 : Poutre avec et sans maintiens latéraux, Conditions aux limites.	98
Figure 5.13 : Poutre avec et sans maintiens latéraux, position et conditions aux limites.....	100
Figure 5.14 : Poutre sans et avec maintiens avec conditions aux limites et positions des appuis intermediares.....	102
Figure 5.15 : Poutre sous une charge uniforme: l'effet des appuis intermédiaires et la position de la charge sur la résistance au déversement.	103
Figure 5.16 : Poutre sous une charge concentrée : l'effet des appuis intermédiaires et la position de la charge sur la résistance au déversement.....	103

Liste des tableaux

Tableau 1.1 : Valeurs de τ_{max} et de I_t pour une section rectangulaire.....	10
Tableau 1.2 : Coefficients α et β	11
Tableau 1.3 : Caractéristiques de torsion des sections à parois minces.....	20
Tableau 2.1 : les Valeurs du facteur d'imperfection.....	45
Tableau 2.2 : Choix des courbes pour le calcul au flambement (Tab 6.2 EC3).....	46
Tableau 5.1 : Caractéristiques géométriques et mécaniques du profilé IPE 300.....	77
Tableau 5.2 . Comparaison analytique et numérique des charges critiques de flambement d'une barre ayant une section bi-symétrique.....	78
Tableau 5.3 . Comparaison analytique et numérique des quatre premiers modes de flambement d'une barre ayant une section bi-symétrique. (FP: mode en flexion pure, TP: mode en torsion pure).....	79
Tableau 5.4 : Caractéristiques géométriques et mécaniques de la section C.....	80
Tableau 5.5 : Comparaison analytique et numérique des charges critiques de flambement d'une barre ayant une section en C mono-symétrique	80
Tableau 5.6 : Comparaison analytique et numérique des quatre premiers modes de flambement d'une barre ayant une section en C mono-symétrique	81
Tableau 5.7 : Caractéristiques géométriques et mécaniques de la section (a) : en I mono-symétrique , (b) : en T.....	82
Tableau 5.8 . Comparaison analytique et numérique des charges critiques de flambement d'une barre ayant une section en I mono-symétrique	83
Tableau 5.9 : Comparaison analytique et numérique des quatre premiers modes de flambement d'une barre ayant une section en I mono-symétrique	83
Tableau 5.10 : Comparaison analytique et numérique des charges critiques de flambement d'une barre ayant une section en Té.....	84
Tableau 5.11 : Comparaison analytique et numérique des quatre premiers modes de flambement d'une barre ayant une section en Té.....	84
Tableau 5.12 : Comparaison analytique et numérique des charges critiques de flambement d'une barre ayant une section quelconque.....	86
Tableau 5.13 : Comparaison analytique et numérique des quatre premiers modes de flambement d'une barre ayant une section quelconque.....	86
Tableau 5.14 : Capacité portante d'une barre simplement appuyée sans et avec maintiens.....	99
Tableau 5.15 : Capacité portante d'une barre encastée sans et avec maintiens.....	101

Introduction générale

Introduction générale

Actuellement, l'optimisation des structures consiste à rechercher les formes à poids minimal sans perte de résistance ce qui conduit à recourir à des structures de plus en plus minces et élancées. Cette tendance est recherchée dans tous les domaines de l'ingénierie comme l'aéronautique, l'industrie automobile et la mécanique. Dans le domaine du génie civil, cette solution est courante dans les structures en acier. Avec l'amélioration de la qualité et la résistance des structures en béton (Béton à haute résistance, Bétons fibres) et des structures en bois (lamellé collé), la même tendance est observée (poids minimal, résistance optimale).

La plupart des structures à parois minces ont des formes de sections ouvertes. Il en résulte des éléments ayant une faible résistance à la torsion. En présence des structures poutres à parois minces et à section ouverte, l'analyse globale est compliquée par le fait que la flexion et la torsion sont couplées, de plus la torsion est accompagnée par le gauchissement. Du point de vue comportement, ces structures sont dominées par les instabilités globales (flambement, déversement) ou locales (voilement, distorsion) et aussi par des phénomènes de torsion (torsion non uniforme). C'est la raison pour laquelle le domaine de recherche à parois minces devient attractif et intéresse de nombreux chercheurs à travers le monde. Tout d'abord, il est important de savoir que la théorie classique du flambement d'Euler [1,2] en flexion n'est plus valable pour la stabilité des poutres à paroi mince où un comportement 3D est présent et où les instabilités 3D sont caractérisées par des modes en flexion et en torsion qui peuvent être présents soit couplés ou découplés. À notre connaissance, les premiers travaux sur le comportement 3D des poutres à parois minces sont disponibles dans des ouvrages de référence [1, 3-8].

En plus des phénomènes des instabilités, les imperfections géométriques créent une perte de résistance par rapport à la charge critique élastique, selon l'approche de Tetmayer, la théorie d'Engesser et la formulation de type Aytron-Perry [1, 9, 10]. Pour le calcul de ces structures, deux stratégies sont alors possibles, la première consiste à adopter des solutions efficaces de résolution itérative du problème non linéaire. Le flambement, les imperfections géométriques et matérielles sont tous inclus dans l'analyse. Dans ce cas, le temps de calcul nécessaire devrait être important en présence de structures avec de grands nombres de degrés de liberté. Cette procédure est couramment adoptée dans le domaine aéronautique [11, 12].

La deuxième stratégie est suivie dans les codes de conceptions de génie civil comme dans les Eurocodes 3, 4 et 5 [13-15]. Dans ces codes, les charges critiques de flambement sont d'abord obtenues par la théorie linéaire élastique. Des solutions analytiques sont suggérées pour des cas simples et le recours à des simulations numériques est nécessaire dans des cas plus généraux. Dans ce cas, les charges de flambement sont obtenues en résolvant le problème des valeurs propres. Dans cette étape, les charges de flambement sont évaluées dans le cas d'éléments parfaits. Les effets des imperfections géométriques et matérielles sont pris en compte dans la deuxième étape de la conception.

Dans l'Eurocodes 3 [13], la résistance au flambement d'une barre de section **A** et d'une limite d'élasticité f_y se base sur le facteur de réduction χ . Ce coefficient est fonction d'élançement réduit $\bar{\lambda}$ où $\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{rd}}{P_{cr}}} = \sqrt{\frac{Af_y}{P_{cr}}}$ et les imperfections géométriques fournies par les courbes européennes (**a0**, **a-d**). (Plus de détails à la section 2.3 au chapitre 2 du présent travail). La variation du facteur de réduction χ en fonction du rapport $\alpha_{cr} = P_{cr}/Af_y$ est présentée ci-dessous pour les quatre courbes de flambement (a-d). On remarque que:

- a- Lorsque la charge critique P_{cr} et la résistance parfaite N_{rd} coïncident ($\alpha_{cr} = 1$), le coefficient χ est proche de 0,5. La perte due au flambement est alors proche de 50%.
- b- Lorsque P_{cr} est inférieur à N_{rd} ($\alpha_{cr} < 1$), le coefficient χ est inférieur à 0,5. La perte due au flambement est supérieure à 50%.
- c- Afin d'améliorer la résistance au flambement, la valeur du facteur de réduction doit être proche de 1, Cette condition ne peut être remplie que si la charge critique de flambement P_{cr} est plus élevée que N_{rd} . Pour atteindre cette valeur P_{cr} doit être supérieur à 15 fois N_{rd} .

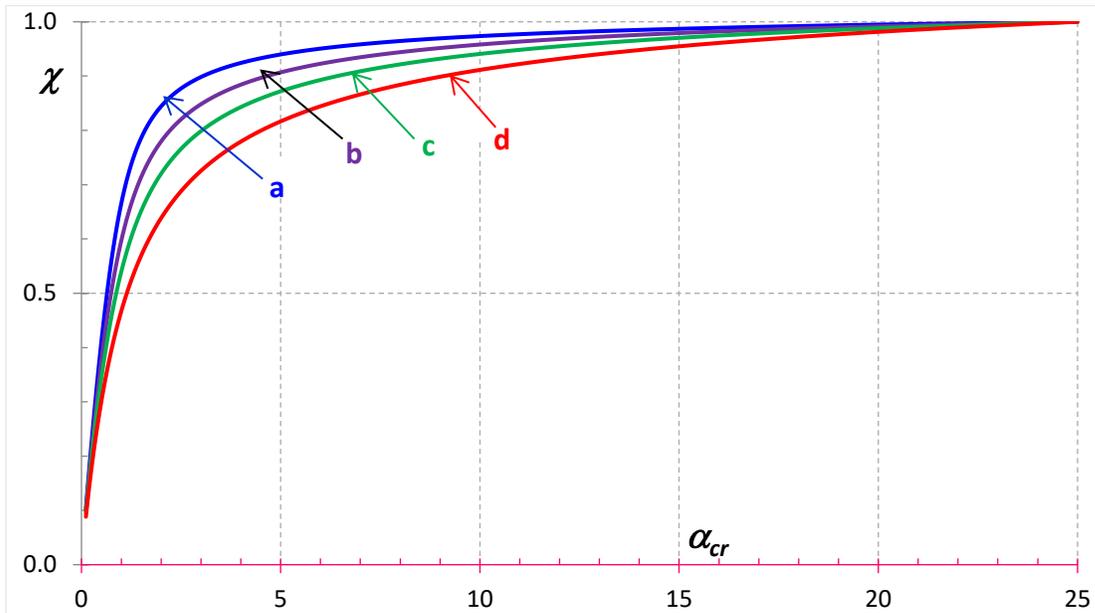


Figure 1: Variation du facteur de réduction χ en fonction du rapport $\alpha_{cr} = P_{cr} / A f_y$.

Dans les solutions réglementaires (Eurocode 3, EC3), l'analyse de flambement est basée sur des hypothèses plan 2D (en flexion : type Euler), de plus la résistance d'un élément au flambement et au déversement est effectuée selon le premier mode. Lorsque la charge de flambement est inférieure à la résistance maximale, les remarques (a, b) sont observées, La perte due au flambement devrait être importante et peut dépasser 50%. L'avantage des structures à parois minces devrait alors être moins attractif.

Une solution possible pour améliorer la résistance des éléments au flambement et au déversement consiste à accroître les dimensions de la section droite ou d'adopter les profilés de nuances d'acier plus élevés. Ces solutions ne sont pourtant pas économiques. Une autre stratégie possible et plus efficace pour limiter les instabilités et augmenter la capacité portante des éléments est le recours aux maintiens latéraux (Bracing en anglais). Dans ce cas, le flambement et le déversement sont prédominants par les modes supérieurs. De nos jours, cette solution est couramment adoptée dans les conceptions de génie civil, c'est le cas des poutres et des colonnes montées dans les bâtiments ou des contreventements latéraux dans les ponts. Ces solutions sont adoptées dans la pratique, mais de façon empirique. On sait que sans ces éléments secondaires, la résistance totale du bâtiment n'est pas garantie et le risque de défaillance due à des déformations hors plan est présent.

Objectif de la thèse

Un premier objectif de cette recherche consiste à développer des modèles théorique et numérique pour le calcul des modes supérieurs de flambement et de déversement des poutres à parois minces et à sections ouvertes. Ces modes apportent une compréhension plus raffinée sur la stabilité de ces éléments.

Un second objectif, qui constitue une finalité concrète de ce travail est d'établir une méthode de vérification permettant d'évaluer correctement la résistance au flambement et au déversement des poutres en tenant en compte des effets des maintiens latéraux et ce afin de contrôler et limiter les phénomènes d'instabilité et de couvrir la résistance parfaite des poutres.

Ce mémoire est structuré en Cinq chapitres principaux ainsi que suit:

Le premier chapitre, comprend un bref aperçu sur les différentes théories de torsion, où nous nous intéressons plus particulièrement à la torsion non uniforme dans les poutres à parois minces et à sections ouvertes. Nous donnons les principaux paramètres propres à la torsion non uniforme ainsi que le modèle de Vlasov où nous considérons un comportement linéaire. Afin de montrer l'efficacité de ce modèle, une étude comparative entre le modèle de Vlasov et la simulation par éléments finis avec le code Abaqus a été présentée. Nous nous appuyons sur le modèle de Vlasov à partir duquel l'énergie de déformation qui permet d'étudier les instabilités dues au Flambement et au déversement des éléments à parois minces et à sections ouvertes a été obtenue.

Le deuxième chapitre, est consacré à une analyse analytique du flambement des barres à parois minces et à section ouvertes sous à une charge axiale de compression. En se basant sur la méthode de Ritz, des solutions analytiques sont développées pour le calcul des modes supérieurs de flambement où nous considérons différentes sections : double symétrique, mono-symétrique et asymétrique (arbitraire). Nous présentons par la suite, une analyse règlementaire du flambement selon la norme européenne l'Eurocode 3.

Dans le troisième chapitre, nous traitons le problème de déversement des poutres à une section en I bi-symétriques, en considérant les cas de charges : charge répartie, charge concentrée et à deux moments égaux. En se basant sur la méthode de Ritz, des solutions analytiques de moment de déversement au mode k ont été développées. L'influence de la position de la charge par rapport au centre de torsion est

prise en compte. Une évaluation réglementaire selon l'Eurocode 3 de la résistance au déversement a été présentée.

Dans le quatrième chapitre, un modèle en éléments finis pour le calcul des poutres à parois minces et à sections ouvertes est développé où nous considérons un comportement linéaire. Dans ce modèle, des éléments poutres 3D à 14 degrés de liberté sont considérés.

Le cinquième chapitre est consacré à la validation des modèles théorique et numérique proposée dans ce travail, pour ce faire des exemples ont été traités et comparés aux résultats des simulations par éléments finis en utilisant les codes commerciaux « Abaqus » et « Adina » et par les résultats trouvés dans la littérature. Par ailleurs, la résistance au flambement et au déversement des poutres avec et sans maintiens a été examinée. Des exemples sont établis pour étudier l'influence des maintiens latéraux sur la capacité portante et justifiant par la même occasion l'importance des modes supérieurs.

**Chapitre 1 : La torsion des barres à parois minces
avec section ouverte**

1.1 Introduction

L'utilisation des éléments à parois minces et à section ouvertes répond à des exigences technologiques telles que la bonne rigidité et la légèreté de la structure. Or, ces éléments préservent des particularités qui doivent être prises en compte dans leur analyse, en particulier la résistance à la torsion. Il est impossible de négliger les effets de la torsion pour l'étude des instabilités. L'application brutale de modèle classique de poutre (Euler-Bernoulli) conduit à des prédictions erronées et donc à un dimensionnement incorrect, du fait de leurs rapports géométriques particuliers et de la grande déformabilité en torsion due au gauchissement. Pour pallier ces limitations de la théorie des poutres, Vlasov [3] a été amené à construire des théories de poutres plus fines incorporant en particulier la possibilité de gauchissement des sections droites dans les transformations envisagées.

La théorie de la torsion des poutres élastiques développée au siècle dernier par Navier et Saint Venant a reçu une extension importante, due essentiellement à Timoshenko [1] et Vlasov [3] et subsidiairement à Wagner [16], Goodier [17] et d'autres. La théorie de la torsion comprend deux parties : la torsion uniforme de St. Venant et la torsion non uniforme de Vlasov. La réponse en torsion d'un élément dépend des conditions aux limites et de la forme d'une section transversale. La torsion de Saint-Venant est prédominante pour les membres avec une section pleine, tandis que la torsion de Vlasov est prédominante pour les sections ouvertes à parois minces.

Ce chapitre est consacré à illustrer le phénomène de la torsion dans les poutres ayant des sections à parois minces ouvertes ainsi qu'à exposer le modèle de Vlasov qui est associé à ce type de poutre.

1.2 Types de section droite

Les sections peuvent être classées en deux catégories principales : les sections massives et les sections à parois minces et pour ces dernières on différencie les sections fermées et les sections ouvertes.

La section est massive si ses diverses dimensions sont du même ordre de grandeur (figure 1.1 -a).

Une pièce est dite à parois minces si elle est composée d'éléments (parois) dont l'une des dimensions, - l'épaisseur-, est faible vis-à-vis des deux autres. Soit l'épaisseur t des parois, la largeur b de la section et la longueur L d'une pièce. Lorsque les proportions satisfont les relations:

$$\frac{t}{b} \leq 0.1 \quad \text{et} \quad \frac{b}{L} \leq 0.1 \quad (1.1)$$

Selon Vlasov [3], la pièce considérée peut être classée comme barre à parois minces quelle que soit la forme de sa section. La section d'une pièce de ce genre est fermée, tubulaire ou en caisson si elle contient une ou plusieurs cavités (figure 1.1-b) ou, dans le cas contraire ouvertes (figure 1.1-c). De telles sections peuvent être décrites par la ligne moyenne de leurs parois si on fixe l'épaisseur en chaque point de cette ligne [18].

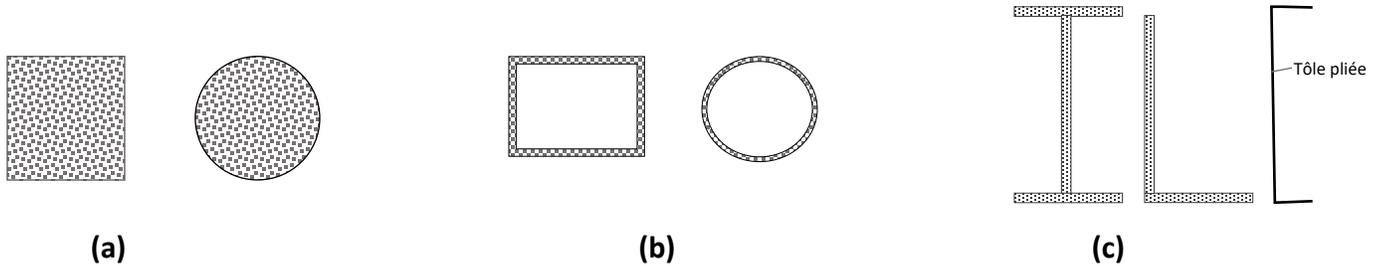


Figure 1.1 : Section droites typiques : a) massives ;(b) fermées à parois minces ; ouvertes à parois minces.

1.3 Etude de la torsion

Dans le cas général, la résistance d'une barre sollicitée par un moment de torsion peut se décomposer en deux modes de résistance : d'une part la torsion uniforme ou de Saint Venant et d'autre part la torsion non uniforme (Warping Torsion en anglais). L'influence de la torsion non uniforme est faible, et souvent négligeable, pour les sections massives et fermées, alors qu'elle peut être très importante dans les sections ouvertes [19].

1.3.1 Torsion uniforme

Dans les poutres à section massives, la torsion s'appuie sur le principe de Saint-Venant formulé en 1855 (appelée St-Venant). La torsion uniforme de St-Venant suppose la conservation des sections planes, c'est-à-dire la nullité de la contrainte normale en tout point de la section droite. Il n'existe que des contraintes de cisaillement (dites aussi tangentielles) qui sont tangentes au contour de la section.

Dans l'étude de la torsion uniforme, on admet les hypothèses fondamentales de la statique des barres et de la résistance des matériaux, c'est-à-dire :

- Les déformations sont petites par rapport aux dimensions du corps

- Le matériau est continu, homogène et isotrope.
- La loi de Hooke est applicable.
- Les sections transversales conservent leur forme.

Considérons une barre cylindrique soumise à deux moments de torsion M_x égaux et opposés, appliqués sur les sections extrêmes (voir figure 1.2). La déformation due à la torsion est caractérisée par l'angle de rotation θ_x d'une section située à l'abscisse x d'une section origine. L'angle de rotation spécifique $\theta_x(x)$ d'un élément de barre de longueur dx , est alors défini par la relation suivante, qui est l'équation différentielle du premier ordre de la torsion uniforme:

$$\theta'_x = \frac{M_x}{GI_t} \quad (1.2)$$

Avec :

G : Le module de cisaillement.

I_t : Moment d'inertie de torsion uniforme.

GI_t : rigidité de torsion uniforme.

Dans cette formule, la notation (.) signifie la première dérivation par rapport à la variable x . La solution de l'équation (1.2) donne un angle de torsion linéaire le long de la poutre.

Dans le cas d'une section circulaire, les contraintes varient proportionnellement de zéro au centre de la section, jusqu'à la valeur maximale à la fibre extrême (figure 1.2).

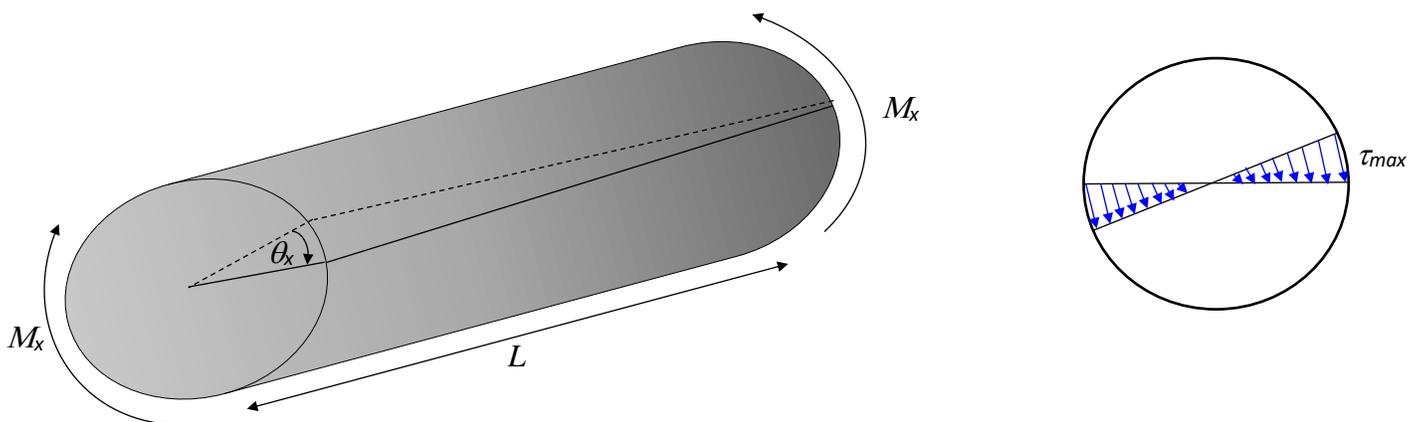


Figure 1.2 : Torsion d'une barre cylindrique.

La distribution des contraintes de cisaillement dues à la torsion uniforme dans une section massive quelconque ne se prête pas à une formulation analytique simple. Nous pouvons avoir recours à l'analogie de la membrane (qui permet de déterminer la grandeur et la direction des contraintes tangentielles) pour résoudre le problème. A l'aide de cette analogie, il est possible d'établir les contraintes de cisaillement dans le cas d'une section rectangulaire ayant une hauteur b et une épaisseur t , les contraintes tangentielles τ ont l'allure donnée par la figure 1.3 et τ_{max} se produit au milieu du grand coté. Les valeurs exactes de τ_{max} et de I_t donnés dans les tableaux 1.1 et 1.2.

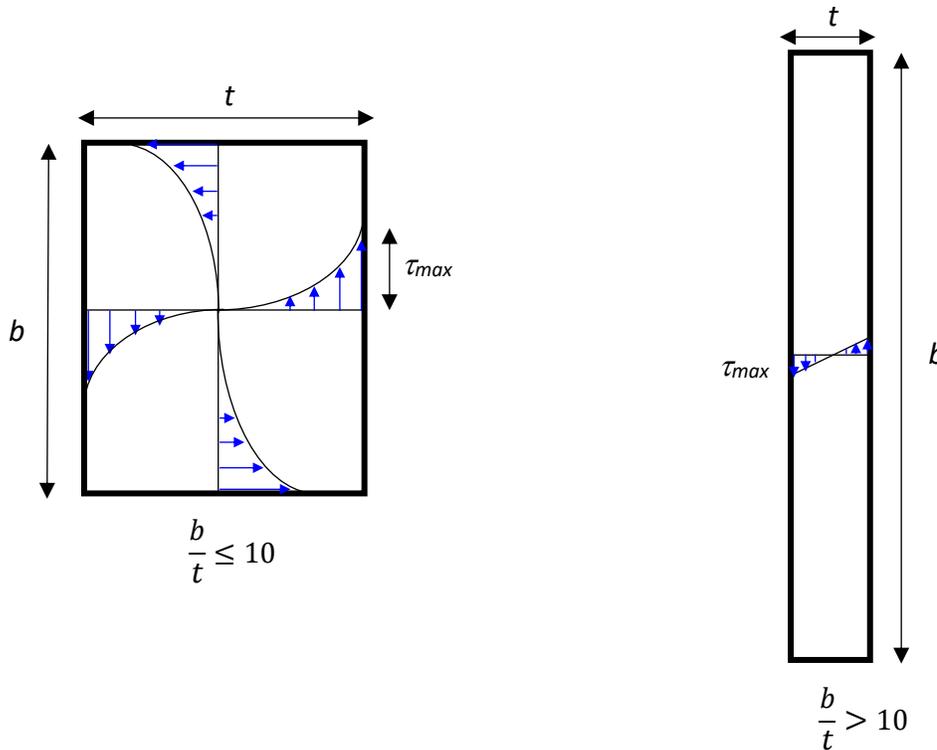


Figure 1.3 : Contraintes tangentielles de torsion dans une section rectangulaire.

Section	τ_{max}	I_t
Rectangulaire avec $b/t \leq 10$	$\frac{M_x}{\alpha bt^2}$	βbt^3
Rectangulaire avec $b/t > 10$	$\approx \frac{3M_x}{bt^2}$	$\approx \frac{1}{3}bt^3$

Tableau 1.1 : Valeurs de τ_{max} et de I_t pour une section rectangulaire.

Les coefficients α et β sont donnés par le tableau suivant :

b/t	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0
α	0.208	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313
β	0.141	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313

Tableau 1.2 : Coefficients α et β .

Dans le cas des sections se composant d'éléments rectangulaires étroits ($b/t > 10$) (on parle alors de section ouverte à parois minces, voir figure 1.4), la valeur maximale τ_{max} de la contrainte tangentielle dans chaque élément n est alors donnée par l'équation suivante, basée sur le principe de l'analogie de la membrane :

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_t} t_k \quad (1.3-a)$$

Où:

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n b_k t_k^3 \quad (1.3-b)$$

avec :

n : Nombre du segment qui compose la section.

b_k : longueur du segment "k".

t_k : épaisseur du segment "k".

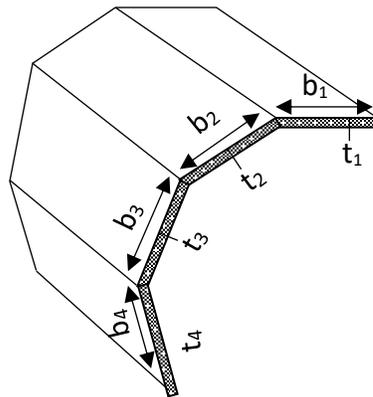


Figure 1.4 : section ouverte à parois minces.

1.3.2 Torsion non uniforme des sections ouvertes

La théorie de la torsion non uniforme des poutres ayant une section bi-symétrique en I a été développée par Timoshenko [2]. Wagner [16] a étendu cette théorie aux sections ouvertes de forme quelconque et Vlasov [3] a édifié une doctrine complète de la torsion non uniforme des poutres à parois minces à section ouverte et fermée.

Sous l'effet d'un moment de torsion, les barres ayant une section à parois minces ouverte se déforment hors de leur plan : on dit qu'elles « gauchissent ». Lorsque leur gauchissement est empêché par des conditions d'appui adéquates, il amène en plus des contraintes de cisaillement, des contraintes normales très importantes qui peuvent se propager notablement dans la zone intérieure de la section et dominer son comportement global. En d'autres termes, la section a tendance à résister à la torsion par flexion hors plan des ailes. Ce cas s'appelle torsion non uniforme et la solution de Saint Venant perd son statut de solution idoine.

Ce concept s'explique plus facilement par l'entremise d'un exemple : Soit une poutre console dont la section mince est ouverte (section en I) et soumise à son extrémité libre à un moment de torsion M_x (Figure 1.5).

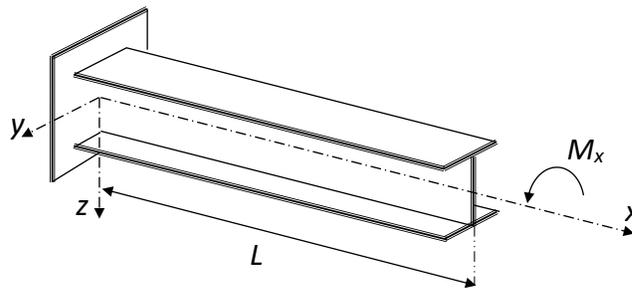


Figure 1.5 : Poutre console soumise à un moment de torsion M_x .

Si nous représentons les déformations de la barre à l'abscisse x (Figure 1.6), nous constatons que déformation de la section à l'abscisse x peut être décomposée en :

- Un déplacement angulaire θ_x par rapport à son axe longitudinal x , dû aux flux fermés des contraintes tangentielles τ_v , qui, constituent le moment de torsion uniforme M_{sv} (Saint-Venant).
- Un déplacement latéral v des deux semelles du profilé, dû aux flux de contraintes normales σ_w et tangentielles τ_w , qui, constituent le moment de torsion non uniforme M_{ω} .

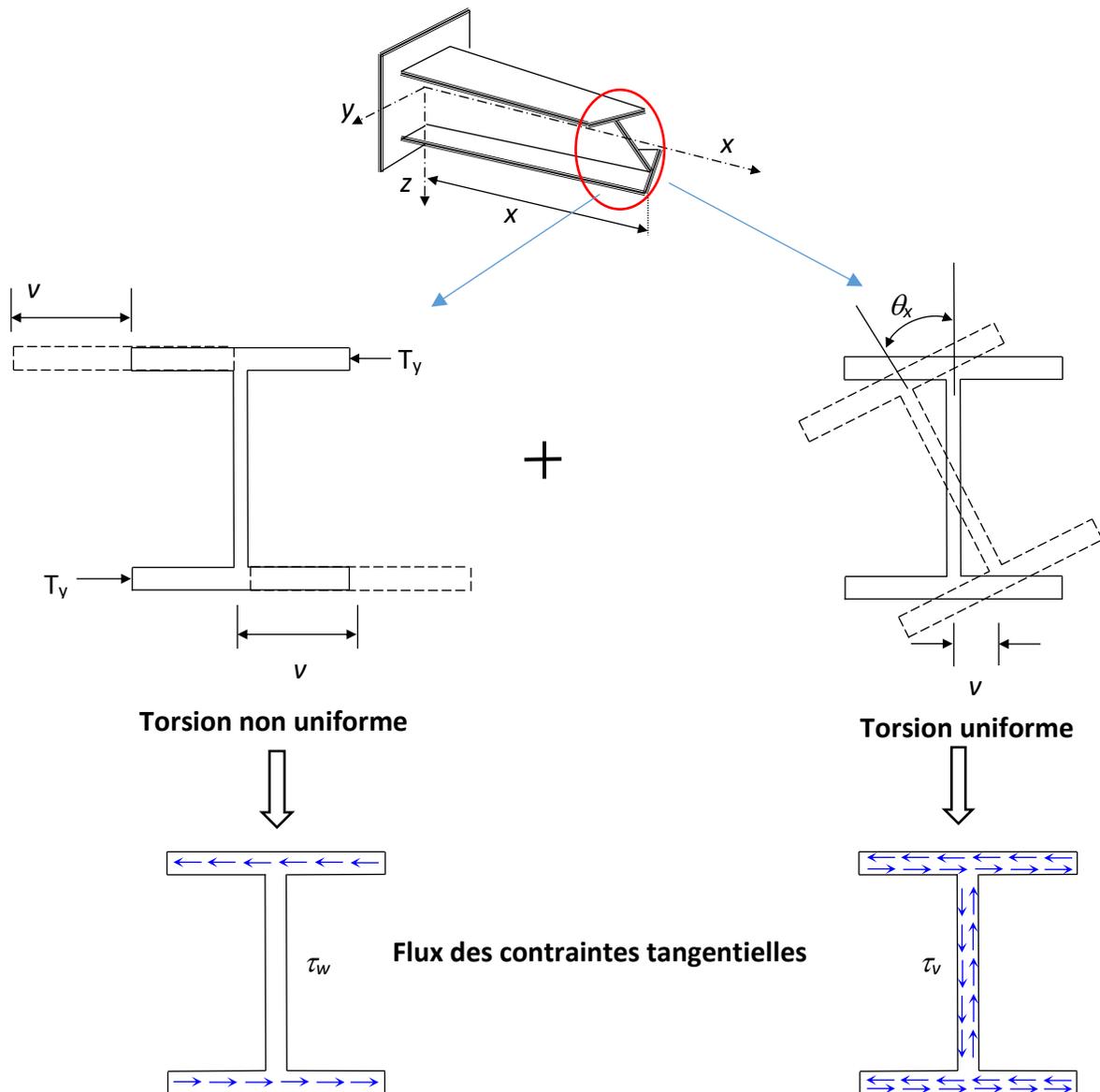


Figure 1.6 : Décomposition des déformations de la section et contraintes tangentielles induites.

En torsion non uniforme pure, le moment de torsion intérieur M_ω dans une section droite quelconque d'une barre, est repris par un couple d'efforts tranchants T_y , égaux et opposés, dans les deux ailes du profil (figure 1.6). Sous l'effet de ce couple de forces T_y , chaque aile fléchit, l'une vers le bas et l'autre vers le haut. A ce couple d'efforts tranchants T_y correspond dans les ailes un couple de moments M , égaux et opposés. La résultante statique de ce couple de moments est nulle dans chaque section. Le bimoment de torsion B_ω dans la section considérée désigne l'ensemble de ces deux moments M égaux et opposés. Le bimoment est donc l'effort intérieur qui provoque le gauchissement des sections.

Dans le cas des sections ouvertes à parois minces (section en I) sollicitées en torsion, on remarque que la torsion non uniforme est toujours accompagnée de la torsion uniforme. Alors, le moment de torsion appliqué est équilibré par une combinaison de moment de torsion uniforme ainsi que le moment de gauchissement dû aux efforts de cisaillement T_y dans les semelles, donc :

$$M_x = M_{sv} + M_\omega = GI_t \frac{d\theta_x}{dx} + T_y h \quad (1.4)$$

M_{sv} : le moment de torsion de Saint Venant, (générateur de la contrainte tangentielle τ_v)

M_ω : le moment de la torsion gauchissement, (générateur de la contrainte normale σ).

Dans l'hypothèse des petits déplacements, on peut exprimer v en fonction de θ_x par la relation:

$$v = \frac{\theta_x h}{2} \quad (1.5)$$

Le déplacement latéral de la semelle v est relié au moment fléchissant M_z par :

$$M_z = -EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (1.6)$$

Où I_z est le moment d'inertie quadratique.

L'effort de cisaillement T_y est défini comme étant la dérivée première de M_z , donc :

$$T_y = \frac{dM_z}{dx} \quad (1.7)$$

En tenant compte de (1.5) et (1.6), (1.7) devient:

$$T_y = -EI_z \frac{h}{2} \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \quad (1.8)$$

Le moment de la torsion de gauchissement développé au niveau d'une semelle s'écrit :

$$M_{\omega} = T_y h \quad (1.9)$$

Donc M_{ω} s'écrit :

$$M_{\omega} = T_y h = -EI_z \frac{h^2}{2} \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \quad (1.10)$$

On définit I_{ω} comme étant le moment d'inertie sectorielle :

$$I_{\omega} = \frac{I_z h^2}{2} \quad (1.11)$$

En remplaçant (1.11) par sa valeur, l'équation (1.10) devient

$$M_{\omega} = -EI_{\omega} \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \quad (1.12)$$

En fin, l'équation différentielle reliant le moment de torsion M_x et l'angle de torsion est donnée par :

$$M_x = M_{sv} + M_{\omega} = GI_t \frac{d\theta_x}{dx} - EI_{\omega} \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \quad (1.13)$$

où :

I_{ω} : Moment d'inertie de gauchissement.

$E I_{\omega}$: rigidité de la torsion non uniforme.

L'équation (1.13) a été mise en évidence pour la première fois par Vlasov [3], elle est à rapprocher de (1.4), et lie le moment de torsion appliqué à l'angle de torsion dans la poutre, en fonction des inerties de torsion de Saint Venant et de gauchissement. Elle est d'application pour l'étude de la torsion non uniforme des poutres à parois minces et section ouverte. La solution de l'équation (1.13) donne un angle de torsion non linéaire le long de la poutre.

La solution de l'équation (1.13) dépend, comme toute équation différentielle, des conditions frontières du problème spécifique étudié. Pour une poutre encastree parfaitement à l'une de ses extrémités et soumis à un moment de torsion extérieur M_0 , à son autre extrémité libre, les conditions se traduisent par les équations suivantes :

$$\theta(x=0) = 0, \theta'(x=0) = 0, \theta''(x=l) = 0 \text{ et } M(x=l) = M_0$$

A partir de ces conditions on peut résoudre l'équation (1.13). On obtient ainsi :

$$\theta_x = \frac{M_0}{G I_t} \left(x - \frac{L}{K} th(K) - \frac{L}{K} sh\left(\frac{K}{L} x\right) + \frac{L}{K} th(K) ch\left(\frac{K}{L} x\right) \right) \quad (1.14-a)$$

où :

$$K = \sqrt{\frac{G I_t L^2}{E I_\omega}} \quad (1.14-b)$$

ch, sh, th: fonctions hyperboliques .

L'effort de gauchissement est défini par :

$$\theta'_x(x) = \frac{d\theta_x}{dx} = \frac{M_0}{G I_t} \left(1 - ch\left(\frac{K}{L} x\right) + th(K) sh\left(\frac{K}{L} x\right) \right) \quad (1.15)$$

1.4 Caractéristiques de torsion des sections à parois minces

On complète les caractéristiques géométriques habituelles de la section tels que : le centre de gravité, l'aire de la section et les moments d'inertie statiques et quadratiques (S , I_x , I_y , . . .) par des caractéristiques géométriques faisant intervenir la torsion non uniforme. En particulier : le centre de torsion, la cordonnée sectorielle, le moment d'inertie de gauchissement et de torsion uniforme.

1.4.1 Moments d'inertie

Les moments statiques et quadratiques classiques (liés à la théorie des poutres), sont Donnés par les relations suivantes:

$$A = \int dA \quad , \quad S_y = \int_A z dA \quad , \quad S_z = \int_A y dA \quad (1.16)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad , \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad , \quad I_{yz} = \int_A yz dA \quad (1.17)$$

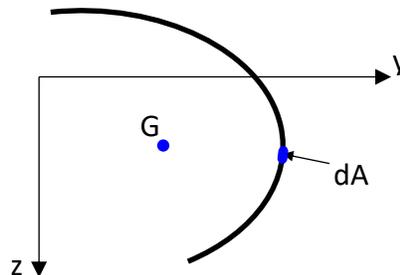


Figure 1.7 : Sections ouvertes à parois minces : les moments statiques et quadratiques classiques.

Dans l'analyse des poutres à parois minces et profils ouverts, les coordonnées d'un point qui se trouve sur le contour de la section transversale, est repéré par rapport aux axes principaux centraux. La position de l'origine et de la direction de ces axes principaux est définie par les trois conditions données par les équations suivantes:

$$S_y = \int_A z dA = 0 \quad (1.18-a)$$

$$S_z = \int_A y dA = 0 \quad (1.18-b)$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA = 0 \quad (1.18-c)$$

Les deux équations (1.18-a et 1.18-b) sont utilisées pour localiser l'origine des coordonnées principales. Ce point particulier est appelé: " le centre de gravité de la section transversale". L'équation (1.18-c) donne la direction des axes principaux.

1.4.2 Coordonnée sectorielle

On introduit une nouvelle coordonnée, appelée coordonnée sectorielle $\omega(s)$, qu'on définit de la manière suivante. Soit M_1 l'origine de l'abscisse curviligne du contour Γ du profil ouvert (figure 1.8). C est le centre de torsion. On considère un point D , appelé pôle, et les deux extrémités M et M_1 d'un segment élémentaire de longueur ds . Si r désigne la distance entre le pôle D et la tangente au contour au point M , alors la coordonnée sectorielle du point M est définie par le double de l'aire du triangle DMM_1 (au signe près).

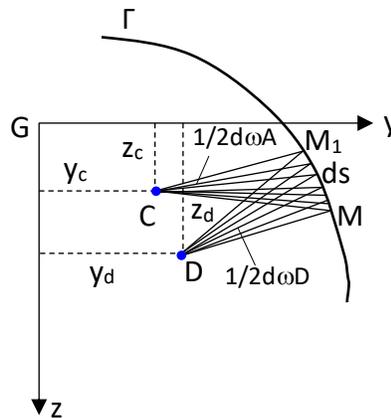


Figure 1.8 : Détermination de la Coordonnée sectorielle.

Soient ω_c, ω_D les surfaces sectorielles qui correspondent respectivement aux pôles C et D . L'aire du triangle CMM_1 , selon la figure 1.9, est donnée par [20] :

$$CMM_1 = CAM - CBM_1 - BMM_1 \quad (1.19)$$

D'où:

$$\text{aire}(CMM_1) = \frac{1}{2}[(y - y_c) + dy][(z - z_c) + dz] - \left(z - z_c + \frac{1}{2}dz\right) dy - \frac{1}{2}(y - y_c)(z - z_c) \quad (1.20-a)$$

L'aire du triangle DMM_1 est donnée par:

$$\text{aire}(DMM_1) = \frac{1}{2}[(y - y_d) + dy][(z - z_d) + dz] - \left(z - z_d + \frac{1}{2}dz\right) dy - \frac{1}{2}(y - y_d)(z - z_d) \quad (1.20-b)$$

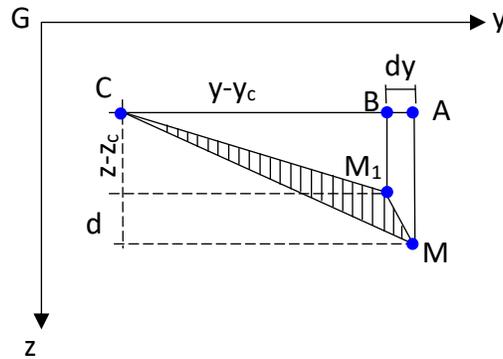


Figure 1.9 : Détermination des surfaces sectorielles.

Comme la surface sectorielle est le double de l'aire balayée par le point M , en se déplaçant sur le contour transversal de la section par rapport à un pôle quelconque, on a :

$$d\omega_c = 2 \times \text{aire}(CMM_1) = (y - y_c)dz - (z - z_c)dy \quad (1.21-a)$$

$$d\omega_D = 2 \times \text{aire}(DMM_1) = (y - y_d)dz - (z - z_d)dy \quad (1.21-b)$$

La différence des deux surfaces sectorielles (1.21-a) et (1.21-b) donne :

$$d(\omega_c - \omega_D) = \omega_D + (z_c - z_d)dy - (y_c - y_d)dz \quad (1.22)$$

L'intégration de l'équation (1.22) donne:

$$\omega_c = \omega_D + (z_c - z_d)y - (y_c - y_d)z + C_0 \quad (1.23)$$

Où C_0 est un constant arbitraire, dépendant du point initial à partir duquel on mesure les surfaces sectorielles.

On suppose que le point $M_1(y_1, z_1)$ est l'origine des arcs s et en supposant que les surfaces sectorielles ω_C, ω_D sont également comptées à partir de ce point, c'est à dire que pour $s = 0$ on a $\omega_C = \omega_D = 0$. D'après ces conditions:

$$C_0 = -(z_c - z_d)y_1 - (y_c - y_d)z_1 \quad (1.24)$$

Après avoir remplacé C_0 par sa valeur, l'équation (1.23) devient :

$$\omega = \omega_C = \omega_D + (z_c - z_d)(y - y_1) - (y_c - y_d)(z - z_1) \quad (1.25)$$

A partir de la relation 1.25, on constate que l'unité de ω est le m^2 .

Les caractéristiques sectorielles sont définies par rapport au centre de torsion, elles sont données par :

$$\left. \begin{aligned} S_\omega &= \int_A \omega \, dA \quad , \quad I_\omega = \int_A \omega^2 \, dA \\ S_{\omega y} &= \int_A z \omega \, dA \quad , \quad S_{\omega z} = \int_A y \omega \, dA \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

1.4.3 Centre de torsion

Le centre de torsion (shear center en anglais) est un point où le moment des forces engendrées par les contraintes dues à l'effort tranchant est nul. Pour déterminer les coordonnées du centre de torsion d'un profil ouvert, il existe deux méthodes. La première consiste à déterminer les contraintes de cisaillement de flexion. La seconde fait appel à la notion d'aire sectorielle. Dans cette partie, nous présentons le calcul du centre de torsion par la deuxième méthode (la méthode sectorielle).

Le centre de torsion a pour propriété de rendre la surface sectorielle orthogonale aux coordonnées (y, z) mesurées dans les axes principaux centraux d'inertie, ce qui se traduit par :

$$\int_A y \omega \, dA = 0 \quad \int_A z \omega \, dA = 0 \quad (1.27)$$

Après avoir remplacé (1.24) par sa valeur, on trouve:

$$\int_A y \omega_D \, dA - \int_A y^2 (z_c - z_d) \, dA - \int_A (y_c - y_d) z y \, dA = 0 \quad (1.27-a)$$

$$\int_A z \omega_D \, dA - \int_A z^2 (y_c - y_d) \, dA - \int_A (z_c - z_d) z y \, dA = 0 \quad (1.27-b)$$

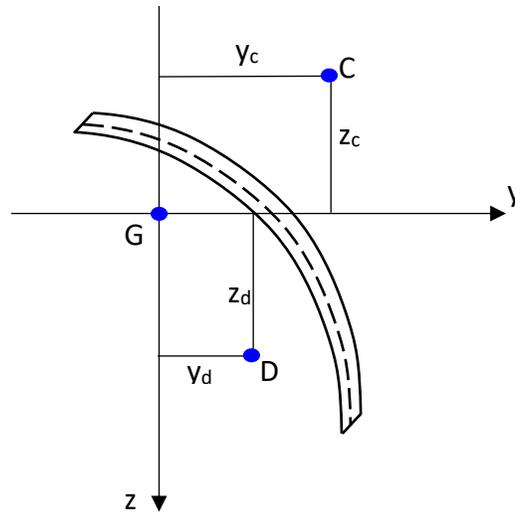


Figure 1.10 : Détermination du centre de torsion.

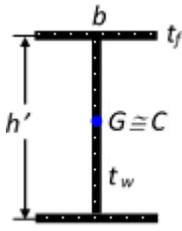
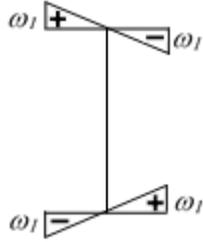
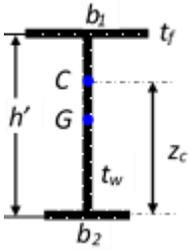
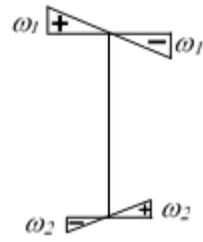
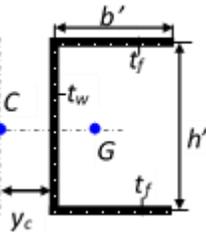
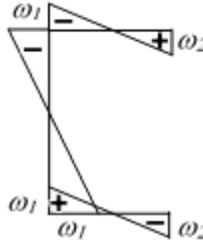
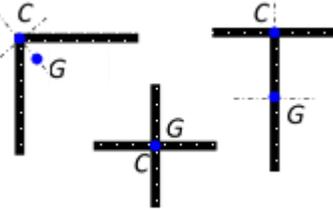
En identifiant ces deux expressions (1.27-a) et (1.27-b), on trouve les coordonnées (x_C, y_C) du centre de torsion, par rapport à celles du point D:

$$\left. \begin{aligned} y_C &= y_d + \frac{I_z \int_A \omega_D z dA - I_{yz} \int_A \omega_D y dA}{I_z I_y - I_{yz}^2} \\ z_C &= z_d - \frac{I_y \int_A \omega_D y dA - I_{yz} \int_A \omega_D z dA}{I_z I_y - I_{yz}^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Dans le cas particulier où les axes y et z de la section sont des axes principaux, l'équation (1.28) devient:

$$\left. \begin{aligned} y_C &= y_d + \frac{\int_A \omega_D z dA}{I_y} \\ z_C &= z_d - \frac{\int_A \omega_D y dA}{I_z} \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

En général, le centre de torsion n'est pas confondu avec le centre de gravité. Mais il se trouve sur le plan de symétrie du profil. Donc, si le profil a au moins deux plans de symétrie, le centre de torsion se trouve au centre de gravité. Le tableau 1.3 donne la répartition de la coordonnée sectorielle principale des profils ouverts, la position du centre de torsion et l'expression du moment d'inertie de gauchissement en fonction des caractéristiques géométriques de la section.

Section	Coordonnée sectorielle ω (m ²)	Caractéristique de torsion
		$\omega_1 = \frac{bh'}{4} \quad h' = h - t_f$ $I_\omega = I_z \left(\frac{h'}{4}\right)^2 = \frac{t_f b^3 h'^2}{24}$
		$z_c = \frac{(I_z)_1}{(I_z)_1 + (I_z)_2} h'$ $\omega_1 = \frac{b_1(h' - z_c)}{2}, \quad \omega_2 = z_c \frac{b_2}{2}$ $I_\omega = (I_z)_1 (h' - z_c)^2 + (I_z)_2 (z_c)^2$
		$b' = b - \frac{t_w}{2} \quad ; \quad h' = h - t_f$ $y_c = \frac{b^2 t_f}{2bt_f + \frac{h' t_w}{3}}$ $\omega_1 = y_c \frac{h'}{2}, \quad \omega_2 = \frac{h'(b' - y_c)}{2}$ $I_\omega = \frac{1}{6} (b' - 3y_c) b'^2 h'^2 t_f + I_z y_c^2$
	Gauchissement négligeable	$I_\omega = 0$

$(I_z)_1$ $(I_z)_2$: moment d'inertie de la semelle supérieure et inférieure.

Tableau 1.3 : Caractéristiques de torsion des sections à parois minces.

De nombreux logiciels de calculs de pièces permettent de trouver l'aire d'une section ouverte à parois minces quelconque, la position de son centre de gravité ainsi que le centre de torsion, la valeur des moments quadratiques axiaux et principaux. La méthode utilisée n'étant généralement pas donnée par le fournisseur ou le créateur du logiciel.

1.5 Bimoment

Par définition le bimoment est une grandeur statique, il s'exprime en force par longueur au carré (i.e. $\text{kn} \cdot \text{m}^2$). Il se produit lors de l'application des charges transversales ou longitudinale suite, au gauchissement. Le bimoment peut être positif ou négatif comme les autres éléments de réductions. Le bimoment crée dans un profil ouvert, par une charge N appliquée dans le sens longitudinal en un point k , est donnée par :

$$B = P\omega_k \quad (1.30)$$

Où :

ω_k : est aire sectorielle de la section au point k .

Le bimoment provoqué dans un profil ouvert par les charges transversales est définie par :

$$B_\omega = EI_\omega \theta_x'' \quad (1.31)$$

Pour une poutre console sous moment de torsion M_0 en bout, l'effort de gauchissement le long de la poutre a l'expression suivante :

$$B_\omega(x) = \frac{M_0 L}{K} \left(sh\left(\frac{K}{L}x\right) - th(K) ch\left(\frac{K}{L}x\right) \right) \quad (1.32)$$

Le bimoment peut être aussi calculé à partir des déformations normales par la relation suivante :

$$B_\omega = \int_A E\omega \varepsilon_x \quad (1.33)$$

Cette équation est aussi équivalente à celle donnée par la théorie classique $M_y = \int_A E z \varepsilon_x$.

1.6 Modèle de Vlasov pour les poutres à parois minces et à sections ouvertes

On considère un élément à parois minces et à section ouverte dans un repère 3D (figure 1.11). Les axes y et z sont les axes principaux d'inertie. Le centre de torsion C est repéré par ses coordonnées (y_c, z_c) . Un point M est défini sur le contour par ses coordonnées y, z et ω où ω la coordonnée sectorielle, définit le gauchissement de la section en ce point. Les hypothèses fondamentales utilisées dans le modèle de Vlasov sont les suivantes :

1. Le corps est constitué d'un matériau homogène et isotrope.
2. La section droite est indéformable dans son plan.

3. Les propriétés mécaniques du matériau tant en compression qu'en traction sont les mêmes
4. On ne tient pas compte de l'influence locale des forces extérieures.
5. On considère que les variations des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur des parois sont négligeables, autrement dit, on néglige la distorsion des parois sur leur épaisseur.
6. La loi de comportement est élastique linéaire (Loi de Hooke). E et G sont les modules d'élasticité longitudinale et transversale.
7. Les déformations tangentielles sont nulles le long du contour.

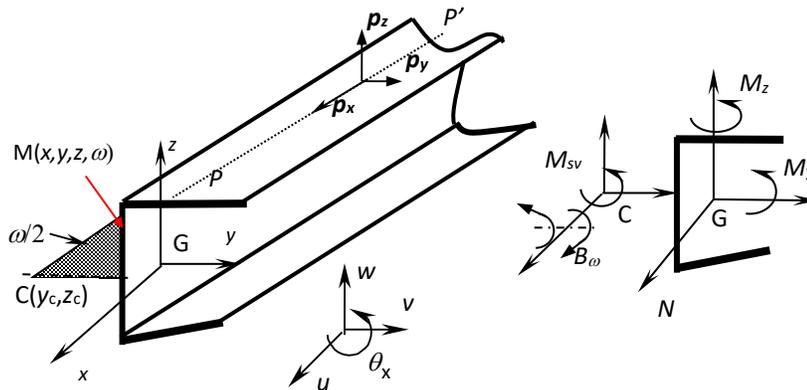


Figure 1.11 : Poutre à parois minces et à section ouverte.

En utilisant les deux premières hypothèses, les déplacements v_M , et w_M , du point M peuvent être exprimés en fonction de ceux du centre de torsion C par les relations suivantes (Mohri [21], [22]) :

$$v_M = v - (z - z_c)\sin\theta_x - (y - y_c)(1 - \cos\theta_x) \quad (1.34-a)$$

$$w_M = w + (y - y_c)\sin\theta_x - (z - z_c)(1 - \cos\theta_x) \quad (1.34-b)$$

Dans ces équations, v et w sont les déplacements transversaux de centre de torsion et θ_x est l'angle de torsion. On peut trouver le déplacement longitudinal u_M par la condition de nullité de déformation tangentielle dans la surface moyenne (deuxième hypothèse). En se rapportant au système de coordonnées curvilignes M_{tn} , ayant les axes tangent et normal à la paroi de la pièce (Figure 1.12), En désignant par v_t et w_t les composantes du déplacement du point M dans cette base.

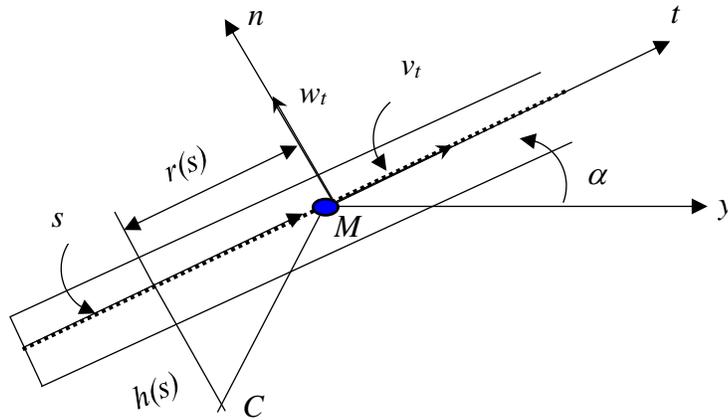


Figure 1.12: Les axes tangent et normal à la paroi de la pièce.

On obtient pour les déplacements tangentiels v_t et w_t normal les expressions suivantes:

$$\begin{cases} v_t = v_M \cos \alpha + w_M \sin \alpha \\ w_t = w_M \cos \alpha - v_M \sin \alpha \end{cases} \quad (1.35-a,b)$$

Dans ces relations, α représente l'angle entre l'axe y et la tangente M_t . Après avoir remplacé les équations (1.34) par leurs valeurs dans (1.35), on obtient:

$$\begin{cases} v_t = v \cos \alpha + w \sin \alpha + h \sin \theta_x + r(\cos \theta_x - 1) \\ w_t = -v \sin \alpha + w \cos \alpha + r \sin \theta_x - h(\cos \theta_x - 1) \end{cases} \quad (1.36-a,b)$$

$h(s)$ et $r(s)$ sont les coordonnées du centre de cisaillement C dans la base M_{tn} . La figure (1.12), nous permet d'écrire les équations suivantes :

$$\frac{\partial h}{\partial s} = 0 \quad (1.37-a)$$

$$dy = ds \cos \alpha \quad (1.37-b)$$

$$dz = ds \sin \alpha \quad (1.37-c)$$

$$d\omega = h ds \quad (1.37-d)$$

Conformément aux hypothèses, la déformation tangentielle de Green le long du contour égale à zéro, on a :

$$\varepsilon_{xs} = \frac{\partial u_M}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x} + \frac{\partial v_t}{\partial x} \frac{\partial v_t}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial x} \frac{\partial w_t}{\partial s} = 0 \quad (1.38)$$

Comme le déplacement v_t et w_t sont déjà donnés par les équations (1.36), nous en déduisons le déplacement longitudinal u_M et en tenant compte de (1.37), et en résolvant (1.38) on obtient (Mohri,[21]) :

$$u_M = v - y(v' \cos \theta_x + w' \sin \theta_x) - z(\omega' \cos \theta_x - v' \sin \theta_x) - \omega \theta'_x \quad (1.39)$$

Les expressions de déplacements M données par Eqs. (1.34) et (1.39) sont non linéaires et dépendent de l'approximation donnée aux fonctions $\cos \theta_x$ et $\sin \theta_x$. Le modèle de Vlasov peut être obtenues à partir de (1.34-a), (1.34-b) et (1.39) en utilisant l'approximation $\cos \theta_x = 1$, $\sin \theta_x = \theta_x$ et en ignorant les termes non linéaires quadratiques supplémentaires obtenus. Les déplacements linéarisés de M sont alors:

$$u_M = u - yv' - zw' - \omega \theta'_x \quad (1.40-a)$$

$$v_M = v - (z - z_c)\theta_x \quad (1.40-b)$$

$$w_M = w - (y - y_c)\theta_x \quad (1.40-c)$$

Le modèle de Vlasov obtenu ne comporte que quatre paramètres cinématiques : u , v , w et θ , comme un modèle classique de poutre à section indéformable de type Euler-Bernoulli. En effet, le déplacement hors plan des points de la section ne dépend que de la variation $d\theta/dx$ de l'angle de torsion le long de la poutre (*i.e.* la courbure de torsion) et des propriétés géométriques initiales de la section à travers la fonction ω . Le champ de déplacement (1.40) est adopté par plusieurs auteurs dont Mohri [23], Trahair [24], Barsoum [25] et Bazant [26]. Ils considèrent un comportement linéaire. Toutes les solutions réglementaires de l'Eurocode 3 ont comme base la cinématique (1.40) (Mohri [23]).

Connaissant les déplacements des points de la surface moyenne de la poutre, nous pouvons maintenant trouver la déformation de cette surface en un point quelconque M . Le tenseur de Green incluant les grands déplacements est défini par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.41)$$

Pour le cas des poutres à parois minces, le tenseur de déformation longitudinale est divisé en déformations linéaires et non-linéaires comme suit :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} \quad (1.42)$$

Avec :

$$\varepsilon_l = u' - yv'' - zw'' - \omega\theta_x'' \quad (1.42-a)$$

$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2 + R^2\theta_x'^2) + (y - y_c)w'\theta_x' - (z - z_c)v'\theta_x' \quad (1.42-b)$$

$$R^2 = (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \quad (1.42-c)$$

La formule (1.42) montre que les déformations ε_{xx} le long de la ligne de profil $x = \text{cte}$ s'obtiennent par addition d'une part des déformations dépendant des coordonnées y et z d'un point de la ligne de profil et calculés selon la théorie des poutres (surface plane), et d'autre part des déformations de gauchissement, calculées selon la théorie de torsion non uniforme.

Les déformations tangentielles sont données par les expressions suivantes :

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\left(z - z_c + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\theta_x' \quad (1.43-a)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(y - y_c - \frac{\partial\omega}{\partial z}\right)\theta_x' \quad (1.43-b)$$

En utilisant la loi de Hooke entre les contraintes et les déformations, on peut déterminer la contrainte totale σ due à la torsion-fléchie. On prend l'équation (1.42) donnant les déformations linéaires (Vlasov), on obtient :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.44)$$

$$\sigma = E(u' - yv'' - zw'' - \omega\theta_x'') \quad (1.44)$$

L'effort normal N , les moments de flexion M_y et M_z et le gauchissement sont reliés au déformation par les relations suivantes:

$$N = \int_A E\varepsilon_l dA = EAu' \quad (1.45-a)$$

$$M_y = \int_A E\varepsilon_l z dA = -EI_y w'' \quad (1.45-b)$$

$$M_z = \int_A E\varepsilon_l y dA = EI_z v'' \quad (1.45-c)$$

$$B_\omega = -\int_A E\varepsilon_l \omega dA = EI_\omega \theta_x'' \quad (1.45-d)$$

L'équation 1.44 est donnée sous forme algébrique. En utilisant la relation entre les éléments de réduction et les courbures, on arrive à :

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_f + \sigma_\omega \quad (1.46)$$

Avec :

$$\sigma_N = \frac{N}{A} \quad \text{Compression ou traction} \quad (1.46-a)$$

$$\sigma_f = \sigma_y + \sigma_z = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad \text{Flexion dans les deux plans} \quad (1.46-b)$$

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega} \omega(s) \quad \text{Gauchissement} \quad (1.46-c)$$

L'équation (1.46), montre que les contraintes normales σ superposition des contraintes réparties dans la section $x = \text{cte}$ suivant la loi des sections planes, et des contraintes (σ_ω) qui varient avec l'arc s suivant la loi des surfaces sectorielle.

1.7 Exemple : Etude comparative

Dans cette partie, on donne un exemple numérique afin de comparer entre la théorie de Vlasov et la simulation par éléments finis. Les résultats numériques sont obtenus avec le code Abaqus [27] pour lequel l'éléments poutres B31OS est choisi. L'élément poutre B31OS à deux nœuds à sept degrés de liberté par nœud, il tient compte du gauchissement et il utilise des fonctions de forme cubique. Il se définit ainsi : (**B** : Beam ; **3** : A three-dimensional (3D); **1** : Linear case ; **OS** : Open Section)

On considère une poutre console de longueur $L = 3\text{m}$ constituée par un profil *IPE 300* en acier *S235*. L'encastrement est supposé parfait. La poutre est soumise à un moment de torsion de 1kN.m à son extrémité libre figure (voir figure 1.13).

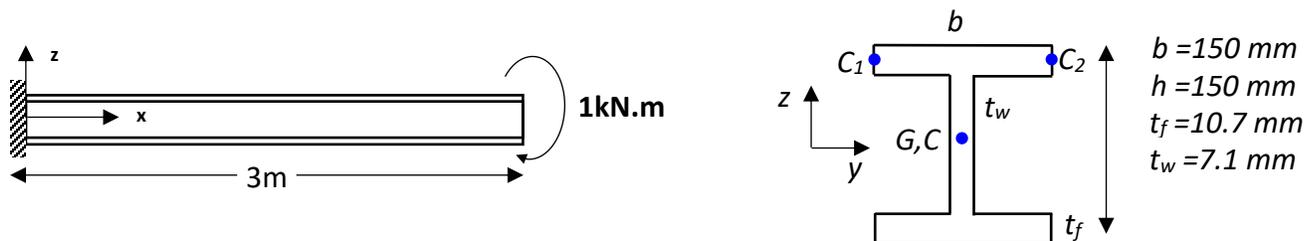


Figure 1.13 : Caractéristiques géométriques et sollicitation.

La figure (1.14) présente la variation de l'angle de torsion le long de la poutre, calculé analytiquement selon l'équation (1.14) et numériquement avec Abaqus (B31OS). D'après ces courbes, On remarque que l'angle de torsion augmente en allant de l'encastrement vers l'extrémité libre. Il est constaté un accord probant entre la théorie de Vlasov et Abaqus.

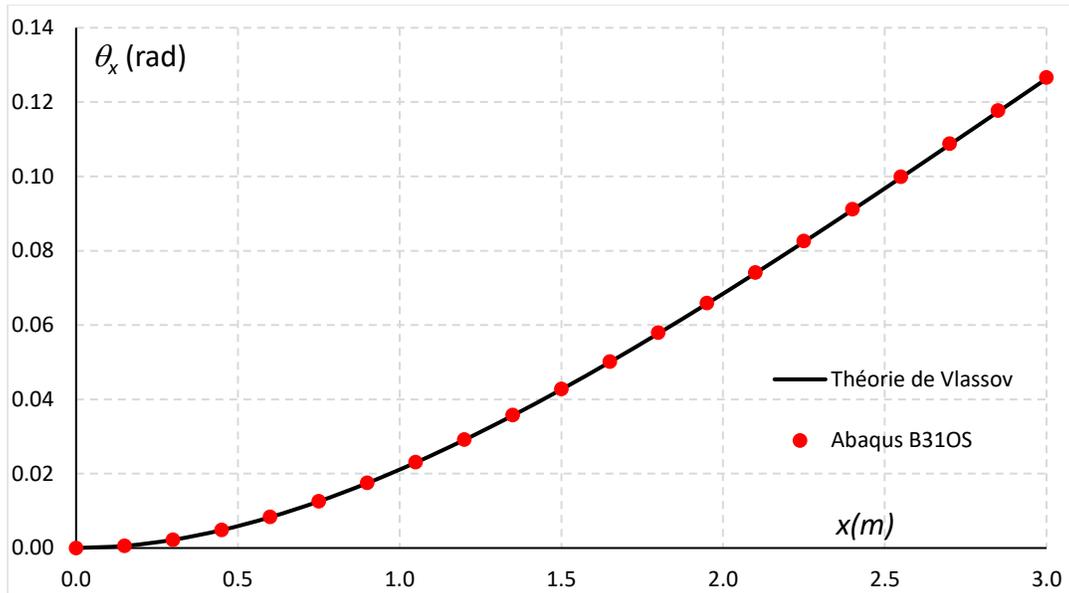


Figure 1.14 : Variation de l'angle de torsion le long de la poutre.

La figure (1.15) donne la variation du gauchissement le long de la poutre. Les solutions analytiques sont obtenues à partir de la relation (1.15). Le gauchissement est croissant quand on passe de l'encastrement vers l'extrémité.

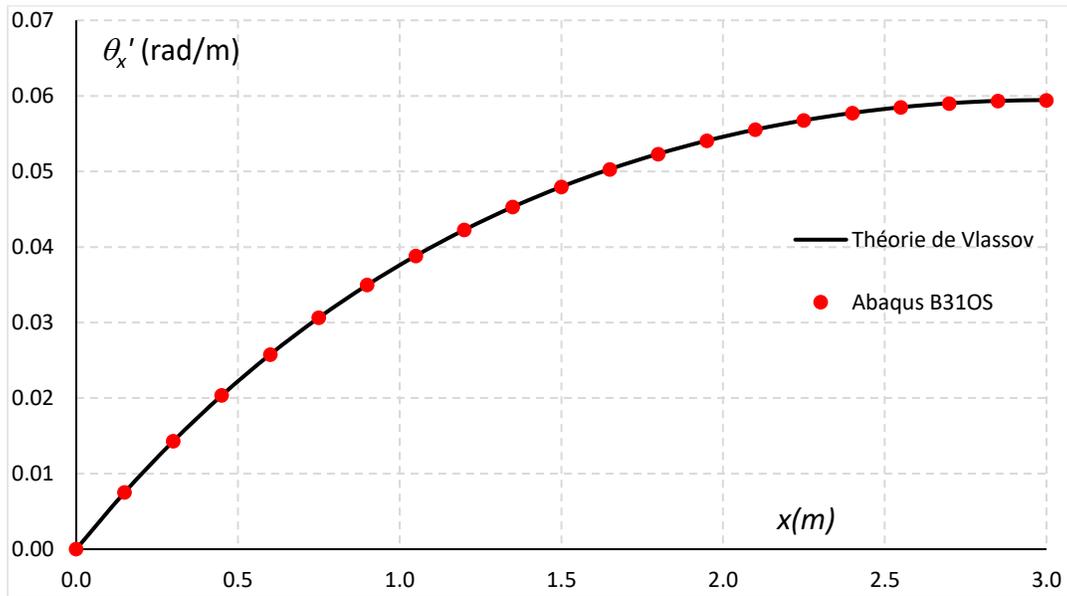


Figure 1.15 : Variation du gauchissement le long de la poutre.

La figure (1.16) présente celle du bimoment le long de la poutre, calculé analytiquement selon (1.32). Le bimoment varie hyperboliquement. Il diminue en allant de l'encastrement vers l'extrémité libre.

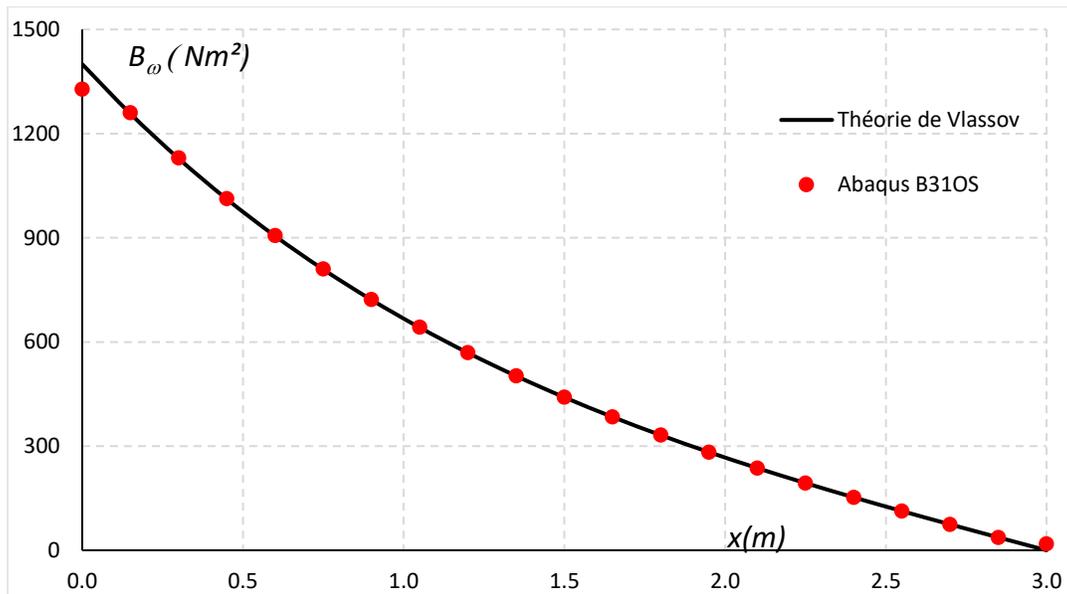


Figure 1.16 : Variation du bimoment le long de la poutre.

Sur la figure (1.17) est représentée la variation des contraintes normales au niveau des extrémités des semelles. (Point de section C_1 et C_2) le long de la poutre. On peut voir que les contraintes normales diminuent en allant de l'encastrement vers l'extrémité libre.

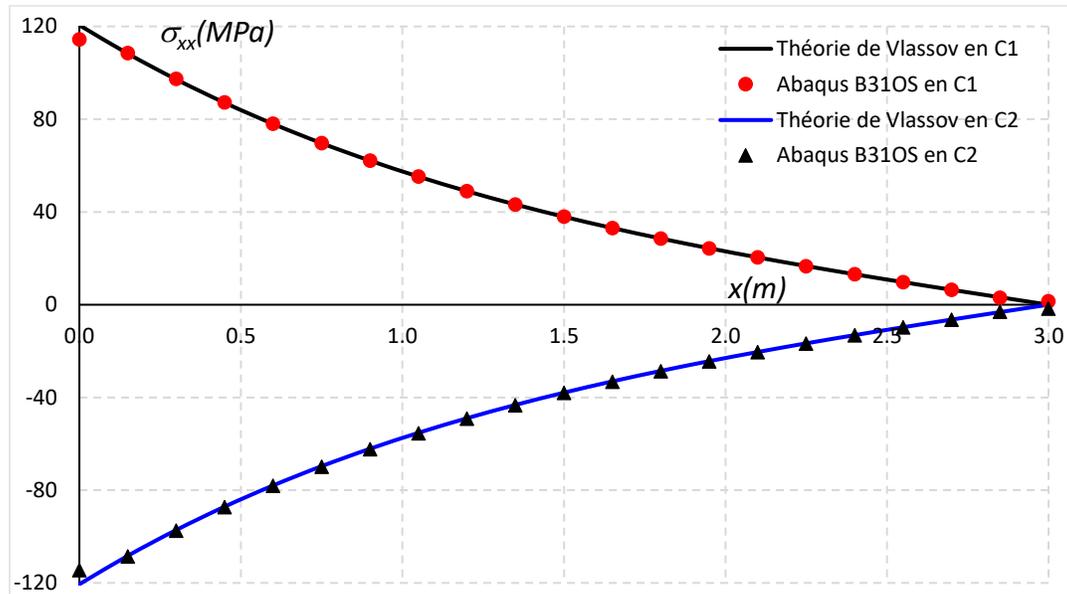


Figure 1.17 : Variation des contraintes normales aux angles (C_1 et C_2) des semelles le long de la poutre.

Dans cet exemple étudié, les courbes théoriques et numériques se superposent parfaitement, puisqu'on ne peut même pas distinguer les courbes. L'erreur maximale observée entre les courbes théoriques et celles traitées avec Abaqus est de 0.9 % et est probablement due aux arrondis inévitables.

La grande majorité des logiciels ne considèrent pas le phénomène de gauchissement et implémentent la théorie de torsion de St-Venant qui néglige les effets du gauchissement. On prend comme un exemple le logiciel Robot Structural Analysis [28], si on compare les résultats obtenus précédemment dans le cas de l'angle de torsion avec les résultats traités avec le code de calcul Robot Structural Analysis (Voir figure 1.18). On remarque que les courbes obtenues présentent un écart évident et une nature différente (droite dans le calcul avec Robot) et (d'allure parabolique) obtenue précédemment. L'écart relevé entre les 2 courbes tient au fait que le principe fondé par Robot sur Saint Venant ne fournit pas le comportement réel de la poutre à paroi mince.

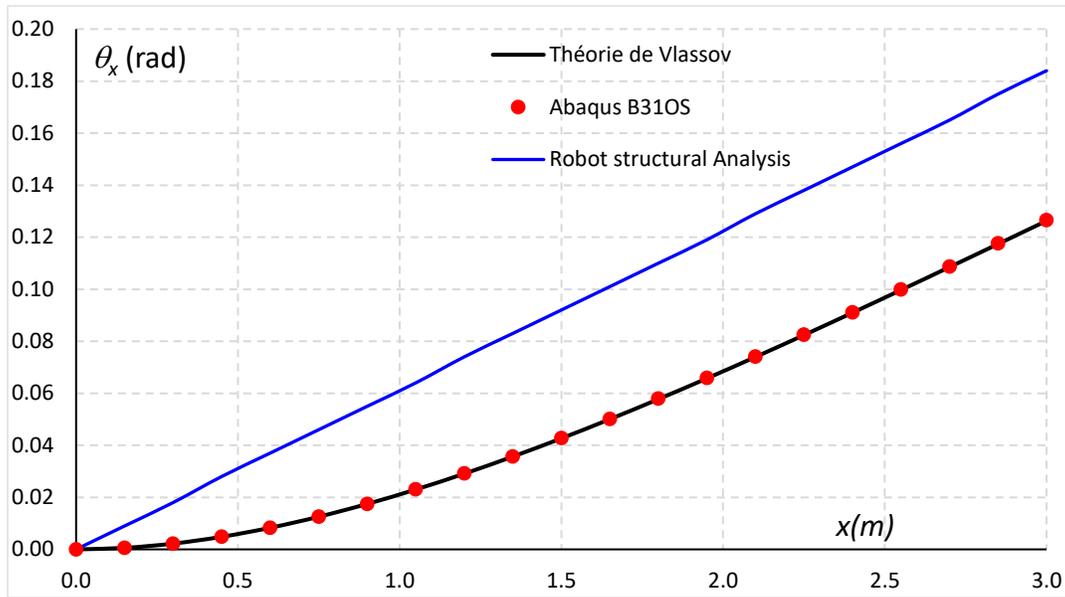


Figure 1.18 : Comparaison entre la théorie de Vlasov et la simulation par Robot Structural Analysis.

1.8 Energie de déformation des poutres à parois minces et à sections ouvertes

L'énergie de déformation de l'élément en présence de la torsion est :

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_{xx}^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L G I_t (\theta'_x)^2 dx \quad (1.47)$$

Le dernier terme correspond à l'énergie de déformation des contraintes tangentielles de St Venant. En tenant compte de (1.42), l'équation (1.47) devient :

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) dA dx + \frac{1}{2} \int_L G I_t (\theta'_x)^2 dx \quad (1.48)$$

Dans le domaine élastique nous pouvons facilement négliger certains termes non-linéaires qui sont plus petits par rapport aux autres dans les relations des déformations alors , la contribution ε_{nl}^2 de est négligée. On a alors:

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_l^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L G I_t (\theta'_x)^2 dx + \int_L \int_A E \varepsilon_l \varepsilon_{nl} dA dx \quad (1.49)$$

L'énergie de déformation ainsi obtenues peuvent être présentés sous la forme :

$$U = U_l + U_{nl} \quad (1.50)$$

Avec :

$$U_l = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_l^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L GI_t (\theta'_x)^2 dx \quad (1.50-a)$$

$$U_{nl} = \int_L \int_A E \varepsilon_l \varepsilon_{nl} dA dx \quad (1.50-b)$$

En remplaçant les déformations par leurs valeurs et en tenant compte des propriétés géométriques des axes centraux principaux, on obtient:

$$U_l = \frac{1}{2} \int_L (EA(u')^2 + EI_z(v'')^2 + EI_y(w'')^2 + EI_\omega(\theta''_x)^2) dx + \frac{1}{2} \int_L GI_t(\theta'_x)^2 dx \quad (1.51)$$

De la même manière, en basant sur les équation (1.42-a, c) et en tenant compte des propriétés géométriques des axes centraux principaux, la deuxième partie de l'énergie de déformation U_{nl} est donnée par :

$$U_{nl} = U_{nl}(N) + U_{nl}(M_y) + U_{nl}(M_z) + U_{nl}(B_\omega) \quad (1.52)$$

Avec:

$$U_{nl}(N) = \int_L N \left(\frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{I_0}{2} \theta_x'^2 + z_c v' \theta_x' - y_c w' \theta_x' \right) dx \quad (1.52-a)$$

$$U_{nl}(M_y) = \int_L M_y (\beta_z \theta_x'^2 + v'' \theta_x) dx \quad (1.52-b)$$

$$U_{nl}(M_z) = - \int_L M_z (\beta_y \theta_x'^2 - w'' \theta_x) dx \quad (1.52-c)$$

$$U_{nl}(\beta_\omega) = - \int_L \beta_\omega \theta_x'^2 dx \quad (1.52-d)$$

$\beta_y, \beta_z, \beta_\omega$ sont les coefficients d'asymétrie appelés :coefficients de Wagner . I_0 est le rayon de giration.

Ils sont définis comme suit :

$$\beta_y = \frac{1}{2I_z} \int_S y(y^2 + z^2) dS - y_c \quad (1.53-a)$$

$$\beta_z = \frac{1}{2I_y} \int_S z(y^2 + z^2) dS - z_c \quad (1.53-b)$$

$$\beta_\omega = \frac{1}{2I_\omega} \int_S \omega(y^2 + z^2) dS \quad (1.53-c)$$

$$I_0 = \frac{I_0 + I_0}{A} + y_c^2 + z_c^2 \quad (1.53-d)$$

L'énergie de déformation permet d'étudier les instabilités globales des éléments à parois minces et à sections ouvertes. Dans les problèmes de flambement des barres, seules les charges axiales sont appliquées ($N \neq 0$ et $M_y = M_z = \beta_\omega = 0$). L'expression de l'énergie de déformation est alors réduite à :

$$U = U_l + U_{nl}(N) \quad (1.54)$$

Les charges de flambement en flexion pure, en torsion pure ou en flexion-torsion peuvent être calculées à partir de (1.54).

Dans le cas du déversement de poutres chargées initialement en flexion autour de l'axe ($y-y$), les contraintes résultantes sont réduites à M_y ($M_y \neq 0$ et $N = M_z = \beta_\omega = 0$). L'énergie de déformation est alors :

$$U = U_l + U_{nl}(M_y) \quad (1.55)$$

1.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord présenté les différentes théories de torsion, en nous concentrant plus particulièrement sur la torsion non uniforme qui affecte les poutres à parois minces et à sections ouvertes. Dans ce type de poutres, le comportement en torsion est fortement influencé par le gauchissement. La torsion non uniforme fait intervenir des nouveaux paramètres quantités (statique, mécanique et géométrique) qui s'ajoutent à ceux, déjà, utilisés dans la méthode des sections planes. Ensuite, nous avons présenté le modèle de Vlasov pour le calcul des poutres à parois minces et à sections ouvertes, Ce modèle est basé sur les hypothèses des petites déformations et de l'indéformabilité de la section transversale dans son plan. Puis, une étude comparative entre la théorie de Vlasov et les simulations du code commercial Abaqus en utilisant l'élément B31OS. Les résultats montrent un très bon accord entre la théorie de Vlasov et l'élément de poutre B31OS. Finalement, l'appui sur les déplacements de Vlasov, nous a permis d'obtenir l'énergie de déformation qui permet d'étudier les instabilités globales (le Flambement, et le déversement) des éléments à parois minces et à sections ouvertes.

Chapitre 2 : Flambement des barres à sections minces ouvertes avec modes supérieurs

2.1 Introduction

En abordant les structures à parois minces, on doit immédiatement considérer le phénomène de flambement qui se produit dans tous les systèmes ou éléments soumis à des contraintes de compression. Le flambement peut se manifester sous diverses formes selon les spécificités de la section transversale. Le phénomène auquel on se réfère le plus souvent est le flambement dit « par flexion » car le mode d'instabilité fait apparaître de la flexion dans la barre. Dans certains cas particuliers, la résistance au flambement d'une barre peut être gouvernée par un mode d'instabilité beaucoup moins connu : il s'agit du flambement par torsion ou par flexion-torsion. La nature complexe de ces types de flambements réside dans le fait que la charge critique réelle de telles barres peut être inférieure à celle prédite par la formule d'Euler en raison de leurs faible raideur torsionnelle.

La figure 2.1 montre les modes d'instabilité ainsi que le déplacement de la section droite à mi-longueur d'une barre soumise à un effort de compression supposé appliqué au centre de gravité, selon le type de section pour lequel le mode concerné peut représenter un mode potentiel de flambement.

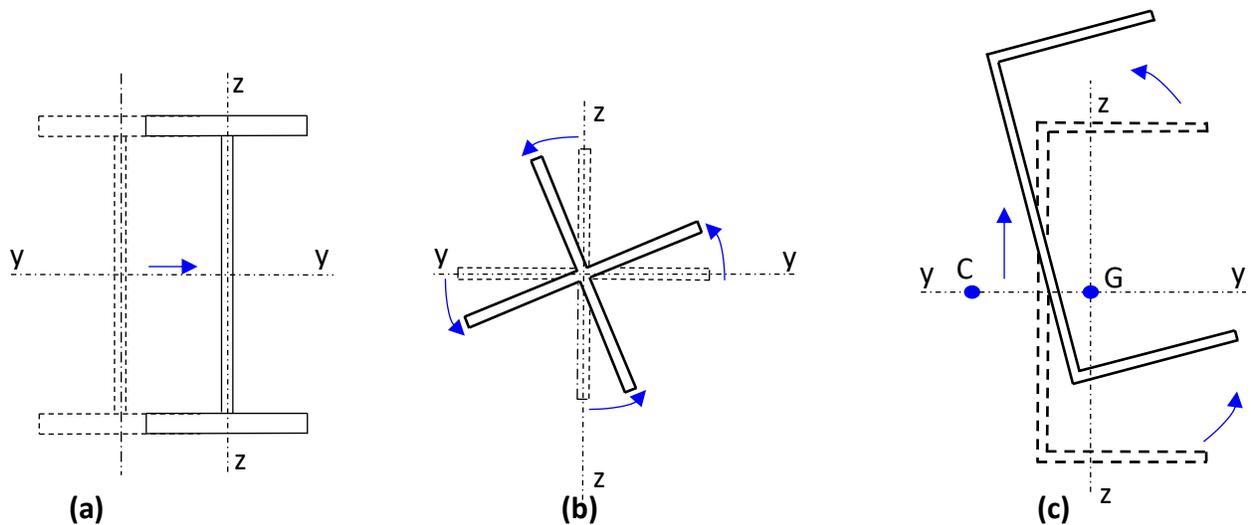


Figure 2.1 : Modes de flambement d'une barre simplement comprimée. (a) Flambement par flexion, (b) Flambement par torsion et (c) Flambement par flexion-torsion.

La théorie du flambement par flexion-torsion est présentée dans différentes références Timoshenko [1], Goodier [17], Bleich [29], Wagner et Pretschner [30], Ostenfeld [31], Kappus [32], Lundquist et Fligg [33] et Hoff [34]. Tous ces auteurs se sont basés sur les hypothèses de l'indéformabilité de la section transversale dans son plan.

Lorsqu'une barre non maintenue latéralement soumise à une charge axiale de compression, la charge critique la plus faible sera toujours obtenue pour le premier mode c'est-à-dire que la barre, flambra toujours dans son premier mode. En revanche, si l'on considère le cas d'un maintien latéral à mi-hauteur d'un poteau s'opposant au déplacement transversal de la section, sans s'opposer à sa rotation autour de l'axe du poteau (voir figure 2.2), ce maintien apporte une rigidité latérale supplémentaire aux extrémités de la barre. Cette rigidité supplémentaire est très importante puisqu'elle influence le mode de flambement. Si le maintien est très rigide, le flambement par torsion peut devenir déterminant car la longueur de flambement par torsion est la longueur de la barre, alors que la longueur de flambement par rapport à l'axe de faible inertie est la moitié de la longueur de la barre. Le maintien a amélioré la résistance au flambement de manière à modifier le mode de flambement, en d'autres termes, la barre flambra selon le deuxième mode qui est un mode supérieur de flambement.

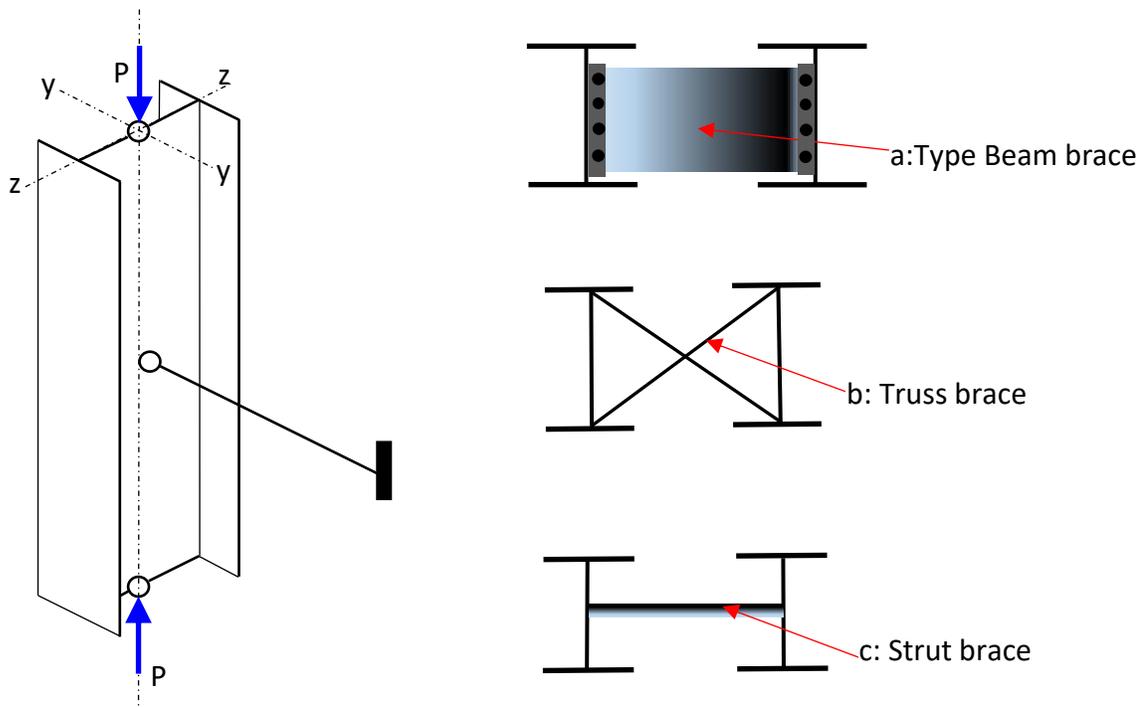


Figure 2.2 : Poteau en compression avec maintien latéraux type poutre (a), treillis (b) ou barre (c).

Dans l'Eurocode 3, aucune méthode de calcul permettant de prendre en compte la présence des maintiens latéraux ou en rotation dans l'évaluation de la charge critique de flambement. Cette configuration est pourtant très fréquemment rencontrée dans la pratique. Les maintiens latéraux ou en torsion sont placés empiriquement afin qu'ils aient suffisamment de résistance et de rigidité pour empêcher le flambement des membrures qu'ils supportent.

Face à cette problématique, ce chapitre a pour principal objet de développer des expressions analytiques qui permettent de calculer les modes supérieurs de flambement. Ces modes de flambement présentent un grand intérêt dans la conception des barres contreventées.

2.1 Modèle analytique pour l'analyse du Flambement 3D

Considérons une barre à section transversale ouverte et à parois minces, sollicitée par une charge de compression P appliquée au niveau de centre de gravité de la section transversale (figure 2.3). Le flambement est caractérisé par l'apparition des déplacements v et θ_x . Dans l'étude de flambement, en plus des hypothèses déjà données au paragraphe (1.6), nous admettons que :

- a- Les déplacements considérés sont ceux dus d'une part, à la flexion de la colonne dans le plan d'inertie Faible de la section transversale et, d'autre part, à son raccourcissement ;
- b- Il n'y a pas de contraintes résiduelles ;
- c- Il n'y a pas de déformée initiale et la pièce est donc parfaitement rectiligne ;
- d- Les charges de compression sont parfaitement centrées sur les centres de gravité des sections extrêmes ;
- e- Les appuis sont des rotules parfaites.

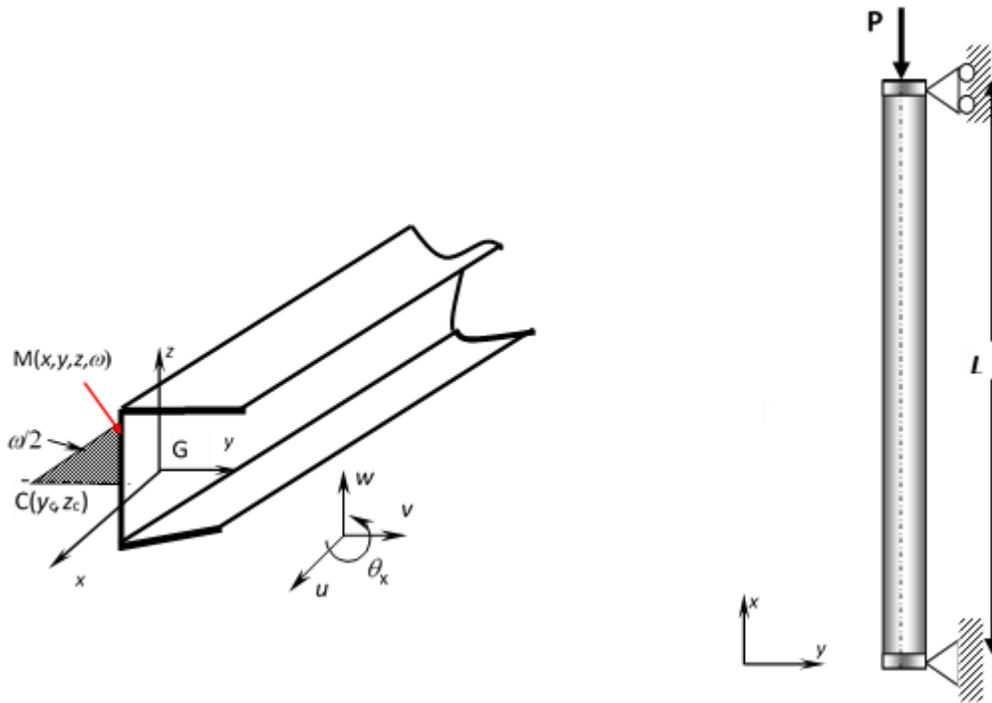


Figure 2.3 : Analyse de flambement 3D des poutres à parois minces.

D'après la relation (1.54), l'énergie de déformation est alors donnée par la forme suivante :

$$U = \frac{1}{2} \int_L (EA(u')^2 + EI_z(v'')^2 + EI_y(w'')^2 + EI_\omega(\theta_x'')^2 + GI_t(\theta_x')^2) dx + \int_L N \left(\frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{I_0}{2} \theta_x'^2 + z_c v' \theta_x' - y_c w' \theta_x' \right) dx \quad (2.1)$$

Le travail des forces extérieures est donné par :

$$W = \int_0^L (p_x u) dx \quad (2.2)$$

Le potentiel total de l'élément est alors :

$$\Pi = U - W \quad (2.3)$$

En portant les équations (3.1, 3.2) dans l'équation précédente (3.3), on aura :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L (EAu'^2 + EI_z v''^2 + EI_y w''^2 + GI_t \theta_x'^2 + EI_\omega \theta_x''^2) dx + \int_0^L N \left(\frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{I_0}{2} \theta_x'^2 + z_c v' \theta_x' - y_c w' \theta_x' \right) dx - \int_0^L (p_x u) dx \quad (2.4)$$

Dans le cas des barres simplement appuyées sollicitées par une charge concentrée P appliquée au niveau de centre de gravité ($N=-P=cte$). Le potentiel est alors Mohri [21]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L (EI_z v''^2 + EI_y w''^2 + GI_t \theta_x'^2 + EI_\omega \theta_x''^2) dx - P \int_0^L \left(\frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{I_0}{2} \theta_x'^2 + z_c v' \theta_x' - y_c w' \theta_x' \right) dx \quad (2.5)$$

Pour une barre simplement appuyée en flexion et en torsion, on a les conditions aux limites suivantes:

$$v(0) = v(L) = 0 \quad (2.6-a)$$

$$w(0) = w(L) = 0 \quad (2.6-a)$$

$$\theta_x(0) = \theta_x(L) = 0 \quad (2.6-a)$$

2.2 Détermination des modes de flambement d'ordre supérieur

Des solutions analytiques donnant les charges critiques de flambement des barres avec différentes sections ouvertes sollicitées par une charge de compression sont proposées dans la bibliographie [1] [4] [5]. Les méthodes de Ritz et de Galerkin sont les plus utilisées dans ces études. La méthode de Ritz est basée sur la minimisation du potentiel total Π . La méthode de Galerkin est appliquée aux équations différentielles d'équilibre obtenues par application des variations au potentiel total Π . Dans notre cas d'étude la méthode de Ritz est adoptée. Dans le cas où la charge critique correspondant au premier mode est recherchée, les composantes de déplacements sont approximées par un seul terme sinusoïdal correspondant à un mode symétrique. Les fonctions utilisées dans ce cas pour approcher les déplacements v , w et θ_x correspondant au mode 1 sont:

$$\begin{aligned} v(x) &= v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ w(x) &= w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ \theta(x) &= \theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (2.7-a,c)$$

Avec :

V_0 , w_0 et θ_0 sont les amplitudes maximales.

Dans cette étude, nous nous intéressons aux modes supérieurs de flambement, Les solutions recherchées doivent satisfaire les conditions aux limites données dans l'équation (2.6), ce qui nous amène à considérer des fonctions de la forme :

$$v(x) = v_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.8-a)$$

$$w(x) = w_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.8-b)$$

$$\theta(x) = \theta_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.8-c)$$

Où :

v_k , w_k et θ_k sont les amplitudes indéterminées. $k=1\dots n$ désigne le nombre de d'ondes. On a ajouté le terme k dans les équations (2.8) pour tenir compte des modes supérieurs. Les intégrales suivantes sont utilisées pour évaluer l'équation (2.5)

$$\int_L \sin^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \int_L \cos^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \quad (2.9)$$

En utilisant les fonctions (2.8) dans l'équation (2.5), après intégration et simplification nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} = & \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{L} \left\{ \left(\frac{k^2 \pi^2 EI_z}{L^2} - P \right) v_k^2 + \left(\frac{k^2 \pi^2 EI_y}{L^2} - P \right) w_k^2 + \left[\frac{1}{I_0} \left(\frac{k^2 \pi^2 EI_\omega}{L^2} + GI_t \right) - P \right] I_0 \theta_k^2 - \right. \\ & \left. 2P \theta_k (z_c v_k - y_c w_k) \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nous posons:

$$P_z(k) = \frac{k^2 \pi^2 EI_z}{L^2} \quad (2.11-a)$$

$$P_y(k) = \frac{k^2 \pi^2 EI_y}{L^2} \quad (2.11-b)$$

$$P_\theta(k) = \frac{1}{I_0} \left(\frac{k^2 \pi^2 EI_\omega}{L^2} + GI_t \right) \quad (2.11-c)$$

En tenant compte des équations (2.11), l'équation précédente (2.10) devient:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{L} \left\{ (P_z - P) v_k^2 + (P_y - P) w_k^2 + (P_\theta - P) I_0 \theta_k^2 - 2P \theta_k (z_c v_0 - y_c w_0) \right\} \quad (2.12)$$

Cette expression quadratique peut se représenter sous la forme d'un produit matriciel comprenant une matrice carrée 3 x 3 et le vecteur amplitudes des déplacements 3D:

$$\Pi = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{L} \{v_k \quad w_k \quad \theta_k\}^t \begin{bmatrix} P_z(k) - P & 0 & \frac{-z_c P}{2} \\ 0 & P_y(k) - P & \frac{y_c P}{2} \\ \frac{-z_c P}{2} & \frac{y_c P}{2} & I_0(P_\theta(k) - P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_k \\ w_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

A l'équilibre, la condition de stationnarité est vérifiée $\delta\Pi = 0$. Cela conduit à :

$$\begin{bmatrix} P_z(k) - P & 0 & \frac{-z_c P}{2} \\ 0 & P_y(k) - P & \frac{y_c P}{2} \\ \frac{-z_c P}{2} & \frac{y_c P}{2} & I_0(P_\theta(k) - P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_k \\ w_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} = 0 \quad \forall \delta v_k, \delta w_k, \delta \theta_k \quad (2.14)$$

Pour avoir des solutions non triviales, le déterminant de la matrice doit être nul. On arrive à la solution du problème suivant :

$$\Delta = (P_z(k) - P)(P_y(k) - P)(P_\theta(k) - P) - P^2(P_z(k) - P)\frac{y_c^2}{I_0} - P^2(P_y(k) - P)\frac{z_c^2}{I_0} = 0 \quad (2.15)$$

Les charges de flambement peuvent être obtenues à partir des solutions de l'équation. (2.15). Les solutions analytiques explicites (fermés) sont possibles pour les sections transversales double symétrique et mono-symétrique. Cependant, les solutions analytiques pour une section transversale arbitraire sont tâche difficile. Une procédure semi-analytique est possible pour la résolution de cette équation.

2.2.1 Flambement d'une barre à section double symétrique

Dans le cas d'une section transversale doublement symétrique, le centre de cisaillement coïncide avec le centre de gravité ; par conséquent, $y_c = 0$ et $z_c = 0$. (Comme les sections I et H ...). Dans ce cas l'équation (2.15) est réduite à :

$$(P_z(k) - P)(P_y(k) - P)(P_\theta(k) - P) = 0 \quad (2.16)$$

Les charges de flambement peuvent être calculées à partir de l'équation (2.16). Ces charges sont données par la relation :

$$P_{cr} = \min(P_z(k), P_y(k), P_\theta(k)) \quad (2.17)$$

$P_z(k)$, $P_y(k)$ et $P_\theta(k)$ sont les forces critiques de flambement de mode k , en flexion et en torsion. Elles sont définies dans les équations (2.11a-c).

Pour une section doublement symétrique ($y_c = z_c = 0$), l'équation (2.16) est totalement découplée. Les charges critiques de flambement pour le mode k ($k = 1 \dots n$) sont données dans (2.17). La barre peut se flamber en flexion pure classique (flambement d'Euler) ou en torsion pure. On peut facilement obtenir les charges de flambement classiques utilisées dans la conception en mettant $k = 1$. Dans ce cas, puisque la charge de flambement P_y est la plus élevée, on comprend aisément que la charge critique de flambement est la plus petite parmi les charges critiques P_z et de P_θ .

De plus, les équations (2.11) permettent d'obtenir les charges de flambement d'une poutre en présence des appuis intermédiaires rigides. Selon ces solutions, en présence de n_y , n_z et n_θ appuis positionnés le long de la poutre dans les directions y , z et en torsion, il se produit des charges de flambement supérieures, données par:

$$P_z = (n_z + 1)^2 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}, P_y = (n_y + 1)^2 \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \text{ et } P_\theta = \frac{1}{I_0} \left((n_\theta + 1)^2 \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} + GI_t \right) \quad (2.18-a,c)$$

Les 3 charges de flambement présentent un grand intérêt pratique dans la conception des barres retenues latéralement avec des entretoises.

2.2.2 Flambement d'une barre à section mono-symétrique

2.2.2.1 Section transversale symétrique par rapport à l'axe (y-y)

Lorsque la section transversale est symétrique par rapport à l'axe y - y , le centre de torsion se trouve sur l'axe y - y par conséquent, $z_c = 0$, (comme la section en C). L'équation (3.15) devient :

$$(P_z(k) - P)(P_y(k) - P)(P_\theta(k) - P) - P^2(P_z(k) - P) \frac{y_c^2}{I_0} = 0 \quad (2.19)$$

La solution de l'équation (2.19) donne les charges de flambement suivantes:

$$P_{cr} = \min(P_z(k), P_{y\theta}(k)) \quad (2.20-a)$$

Dans cette expression, $P_z(k)$ est définie dans l'équation (2.11-a). $P_{y\theta}(k)$ est la charge critique de flambement en flexion-torsion combinant les forces critiques $P_y(k)$ et $P_\theta(k)$. Elle est donnée par:

$$P_{y\theta}(k) = \frac{P_y(k) + P_\theta(k) \pm \sqrt{(P_y(k) + P_\theta(k))^2 - 4a_c P_y(k)P_\theta(k)}}{2a_c}$$

avec:

$$a_c = \left(1 - \frac{y_c^2}{I_0}\right) \quad (2.20-b,c)$$

2.2.2.2 Section transversale symétrique par rapport à l'axe (z-z)

Dans le cas d'une section symétrique par rapport à l'axe z-z (comme la section T), la centre de torsion se trouve sur l'axe z-z par conséquent, par conséquent, $y_c = 0$. Le problème se ramène à :

$$(P_z(k) - P)(P_y(k) - P)(P_\theta(k) - P) - P^2(P_y(k) - P)\frac{z_c^2}{I_0} = 0 \quad (2.21)$$

$$P_{cr} = \min(P_y(k), P_{z\theta}(k)) \quad (2.22-a)$$

Où :

$P_y(k)$ est définie dans l'équation (3.11-b) . $P_{z\theta}(k)$ est la charge critique de flambement en flexion-torsion combinant les forces critiques $P_z(k)$ et $P_\theta(k)$. Elle est donnée par :

$$P_{z\theta}(k) = \frac{P_z(k) + P_\theta(k) \pm \sqrt{(P_z(k) + P_\theta(k))^2 - 4a_t P_z(k)P_\theta(k)}}{2a_t}$$

Avec :

$$a_t = \left(1 - \frac{z_c^2}{I_0}\right) \quad (2.22-b,c)$$

Il est important de mentionner que pour $k = 1$, on obtient le premier mode de flambement utilisé dans les méthodes classiques de conception. Ces solutions analytiques sont similaires aux solutions obtenues par Mohri [21]. Rappelons que selon les équations (2.20-a,b) ou (2.22-a,b), trois solutions sont possibles pour les charges de flambement: une en flexion pure et deux autres en flexion-torsion. Les trois solutions sont nécessaires pour les analyses des modes supérieurs de flambement.

2.2.3 Flambement d'une barre à section Asymétrique

Si la section ne possède aucun axe de symétrie ($y_c \neq 0$, $z_c \neq 0$), l'équation (2.15) ne peut être simplifiée et tous les modes de flambement sont totalement couplés. Dans ce cas, les solutions analytiques de forme fermée ne sont pas possibles. Les trois solutions de l'Eq. (2.15) correspondent à un flambement par flexion-torsion. Ces solutions sont inférieures à toutes les charges critiques non couplées $P_y(k)$, $P_z(k)$

et $P_{\theta}(k)$. C'est la raison pour laquelle les solutions de (3.15) sont plus importantes dans la conception. Ces 3 solutions sont toutes nécessaires dans le cadre d'analyses en mode supérieur. Dans la présente contribution, les solutions de (2.15) sont introduites dans le code Matlab [35] pour tout mode k . Rappelons que dans la littérature, les solutions disponibles pour les charges supérieures de flambement n'existent que dans le cas de la flexion pure (théorie classique du flambement d'Euler [1-2]). Les solutions de forme fermée figurant dans ce travail pour le flambement en flexion-torsion sont originales.

2.3 La résistance au flambement selon l'Eurocode 3

La vérification du flambement se base sur le facteur de réduction χ , qui prend en compte tous les effets qui diminuent la capacité due au flambement. La résistance au flambement selon Eurocode 3 peut être déterminée avec:

$$N_{b,rd} = \chi A f_y \quad (2.23)$$

f_y : est la limite d'élasticité de l'acier.

Le coefficient de réduction χ se détermine comme étant la valeur minimale selon l'expression :

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad (2.24)$$

$$\phi = 0.5(1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2) \quad (2.25)$$

Où :

α : est le facteur d'imperfection défini ci-dessous.

À partir des équations (2.24) et (2.25), Il apparaît que la résistance au flambement dépend de l'élançement réduit, $\bar{\lambda}$.

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A f_y}{P_{cr}}} \quad (2.26)$$

où :

P_{cr} : est la charge critique de flambement donnée dans la théorie classique du flambement, c'est-à-dire la charge critique théorique sans tenir compte des imperfections initiales et les contraintes résiduelles.

En pratique, les imperfections et les contraintes résiduelles diminuent influençant la résistance au flambement. L'Eurocode 3 tient compte de ces effets en utilisant des courbes de flambement. Ces courbes tiennent compte du type et de la géométrie de la section, ainsi que des imperfections géométriques et matérielles. Le choix des courbes de flambement est donné dans les tableaux (2.1) et (2.2).

Courbe de flambement	a₀	a	b	C	d
facteur d'imperfection α	0.13	0.21	0.34	0.49	0.76

Tableau 2.1: Valeurs des coefficients d'imperfection adoptés dans l'Eurocode 3.

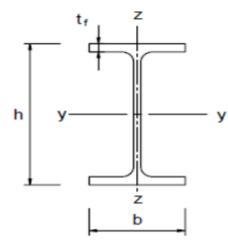
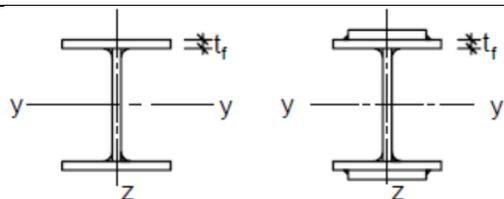
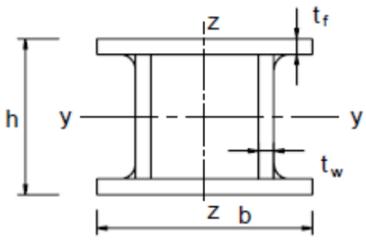
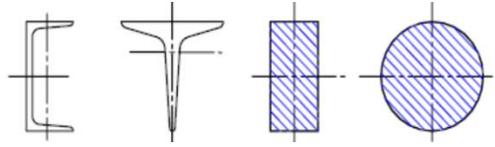
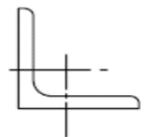
Type de section	Limites	Axe de flambement	Courbe de flambement	
			S 235 S 275 S 355 S 420	S 460
Sections en I laminées 	$h/b > 1,2$	y-y z-z	a b	a ₀ a ₀
			$40\text{mm} < t_f \leq 100$	b c
	$h/b \leq 1,2$	y-y z-z	b c	a a
			$t_f > 100$	d d
Sections en I soudées 	$t_f \leq 40\text{mm}$	y-y z-z	b c	b c
	$t_f > 40\text{mm}$	y-y z-z	c d	c d
Sections creuses 	Fini à chaud	Quelconque	a	a ₀
	Fini à froid	Quelconque	c	c
Caissons soudés 	En général (sauf comme indiqué ci-dessous)	Quelconque	b	b
	Soudure épaisses : $a > 0,5t_f ; b/t_f < 30 ; h/t_w < 30$	Quelconque	c	c
Sections en U, T et sections pleines 		Quelconque	c	c
Sections en L 		Quelconque	b	b

Tableau 2.2: Choix des courbes pour le calcul au flambement (Tab 6.2 EC3).

La figure (2.4) présente cinq courbes de flambement d'une barre simplement comprimée en commençant par celle qui est la plus basse et c'est elle qui présente une forte imperfection de la barre (courbe d) en allant vers celle qui présente une faible imperfection (courbe a_0). À notre connaissance, ces courbes ne sont utiles que pour les imperfections et le flambement par flexion uniquement (flambement d'Euler). Cela signifie que l'analyse de flambement est sous hypothèse 2D. Le choix des courbes de flambement est fonction des formes de section (tableau 3.1 et 3.2). Par exemple, dans le cas d'une section en I à une semelle courte (sections en I classiques, pour lesquelles le rapport $h/b > 1,2$), la courbe **a** est utilisée lorsque $P_{cr} = P_z$ (c'est-à-dire l'axe z-z). La courbe **b** est choisie lorsque $P_{cr} = P_y$ (c.-à-d. Axe y-y). Pour les sections en I avec une large semelle $h / b < 1,2$, les courbes b et c sont utilisées respectivement. Dans l'analyse de flambement 3D, la charge de flambement doit être soit P_y , P_z or P_θ . Dans le dernier cas, il n'y a pas de recommandation pour le choix de la courbe d'imperfection à utiliser lorsque $P_{cr}=P_\theta$. Ainsi que pour les sections étudiées en section (2.3.2) et (2.3.3) où tous les modes de flambement sont flexion-torsion. À notre avis, les contraintes de torsion dues au gauchissement étant plus importantes que les contraintes de flexion, il serait prudent et raisonnable d'adopter la courbe **d** en présence de modes de torsion pure ou de flambement torsion-flexion. Cette décision sera considérée ultérieurement.

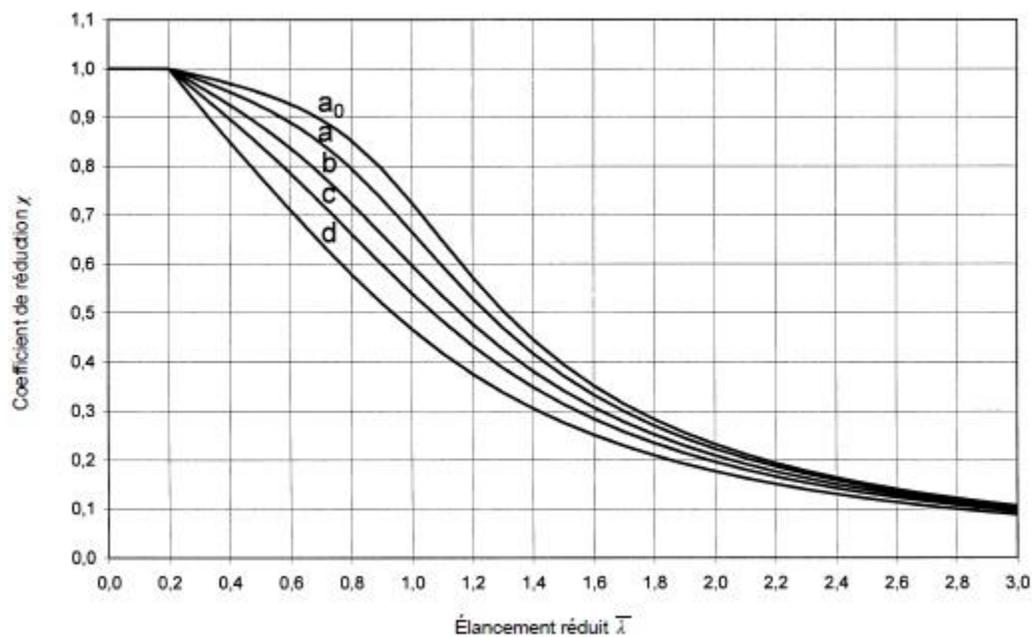


Figure 2.4: Courbes de flambement européennes des barres en acier [13].

2.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté une analyse analytique du flambement des barres à parois minces et à section ouvertes, soumises à une charge axiale de compression. Différentes sections sont investiguées : double symétrique, mono-symétrique et asymétrique. Les modes de déplacements en flexion et en torsion sont rapprochés par des fonction sinusoïdale afin d'en tirer les équations d'équilibre algébriques. En appliquant la méthode de Ritz, une équation différentielle plus générale est obtenu. De cette équation, des solutions analytiques sont proposées pour le calcul des modes supérieurs de flambement. Dans le cas d'une section bi-symétrique, les modes de flambement sont totalement découplés, dans le cas d'une section monosymétrique, les modes de flambement en flexion ou en flexion-torsion peuvent être présents. Dans le cas d'une section arbitraire, tous les modes de flambement sont couplés et ils sont en flexion-torsion. La validation des solutions proposées ainsi que leur effet sur la résistance au flambement interviendront dans le chapitre 5.

Dans l'Eurocode 3, la résistance au flambement s'effectue en se basant sur les courbes de flambement, qui tiennent compte d'un ensemble de caractéristique de l'élément à vérifier. Les modes en torsion ainsi que l'effet des maintiens sur la résistance au flambement ne sont pas prise en compte dans l'Eurocode 3.

Chapitre 3: Déversement des poutres à sections minces ouvertes avec modes supérieurs

3.1 Introduction

À la recherche de l'économie dans les constructions métalliques, on utilise les profils minces ouverts, de grande portée qui sont plus résistants en flexion ainsi que plus légers de masse, cet avantage se fait en éloignant le plus possible la matière du centre de gravité et en éliminant au maximum la matière selon l'axe faible. Les poutres à section en (I ou H), sont particulièrement indiquées pour leur efficacité lors d'un effort de flexion en ce sens qu'elles possèdent une grande inertie selon l'axe fort pour un minimum de matière. Ces poutres peuvent subir un phénomène d'instabilité connu sous le nom de déversement qui apparaît lorsque la flexion atteint un niveau critique. La figure 3.1 présente un exemple d'une poutre simplement appuyée doublement symétrique, chargée dans son plan de plus grande rigidité par des moments identiques. Le déversement génère soudainement et simultanément une déformation latérale de flexion et une rotation longitudinale de torsion le long de la portion non maintenue de la poutre.

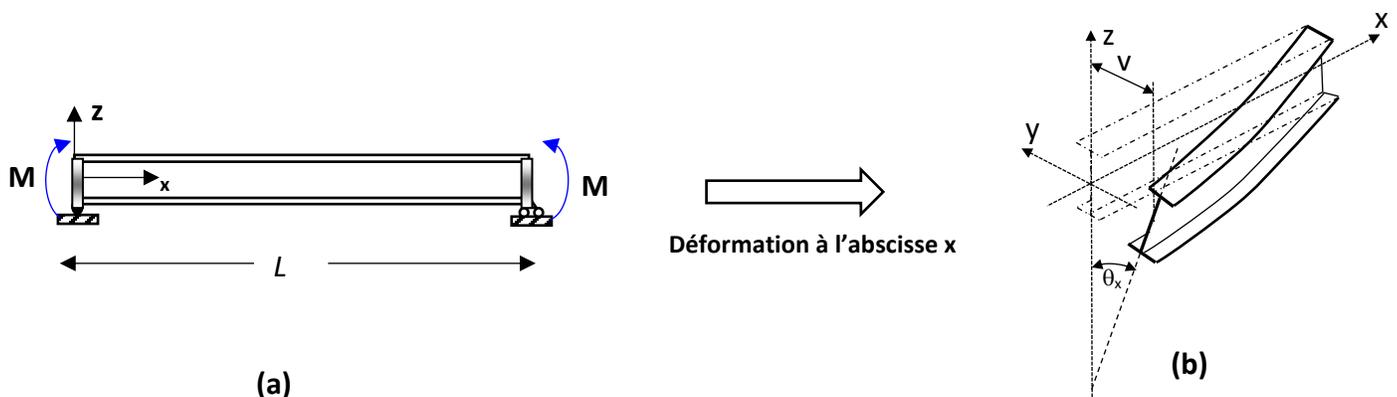


Figure 3.1 : Le déversement d'une poutre à section en I double symétrique. (a) description général, (b). Déplacement induits par le déversement.

Le déversement est compliqué par le fait que la flexion et la torsion sont couplées. De plus, la torsion est souvent accompagnée par le gauchissement. Le déversement doit donc être vérifié de façon stricte, non seulement pour la configuration de service des structures mais aussi pour les phases de construction. De nombreux travaux s'intéressent au déversement des poutres à parois minces et section ouverte. Des modèles analytiques et numériques pour l'analyse de déversement des poutres à sections en I bi-symétrique sont proposés dans [36-40]. D'autres modèles concernent le déversement des poutres à sections en I mono-symétrique s sont proposés dans [23], [41-46].

Une des solutions couramment utilisées par les constructeurs pour réduire le risque de déversement consiste à disposer des maintiens latéraux ou en rotation. La présence de ces maintiens ne modifie pas la flexion dans le plan principal de chargement. Mais augmente la rigidité de la poutre suivant l'axe de faible inertie et réduit la longueur de déversement, donc augmente le moment critique. Les maintiens jouent latéralement un rôle d'appui élastique ou à ressorts, pour cela le déversement d'une poutre appuyée latéralement par des retenues latérales se ramène à un problème d'une poutre continue avec des ressorts translationnels ou torsionnels. Deux modèles sont proposés dans la littérature pour calculer la résistance au déversement d'une poutre avec des appuis élastiques. Le premier se ramène à un problème d'une poutre appuyée latéralement par des ressorts qui ne travaillent qu'en translation représentant la rigidité des supports latéraux. Différents auteurs ont utilisé ce modèle pour évaluer le moment critique de déversement [47-49]. En utilisant une approche énergétique, McCann [50] propose une formulation analytique simplifiée pour le calcul du moment critique de déversement, dans le cas d'une poutre bi-symétrique soumise à un moment uniforme et retenue par des ressorts translationnels intermédiaires situés à des intervalles réguliers. La position des maintiens par rapport au centre de torsion est prise en compte.

Le deuxième modèle traite la poutre au complet mais remplace les retenues offertes par les maintiens par des ressorts torsionnels. Taylor et Ojalvo [51] ont proposé une solution analytique du moment critique de déversement des poutres en I appuyées discrètement en torsion. En se basant sur une approximation numérique, Trahair [24] a proposé une formule de la rigidité en torsion nécessaire pour considérer l'appui latéral situé à mi portée comme un appui rigide. Mutton et Trahair [52], Nethercot [53], Medland [54] et Tong et Chen [55] Valentino et Trahair [56] ont étudié les effets de retenue en torsion sur la résistance des poutres pour différentes conditions de chargement. Cependant, presque toutes leurs études se limitent à une seule retenue torsionnelle sur la longueur. Récemment, Dans Nguyen et al [57] ont été étudiés le déversement des poutres en I appuyées discrètement en torsion sous un moment constant. Une solution analytique du moment critique de déversement a été proposée et qui prend en compte les appuis latéraux discrets. Plus récemment, des études ont été menées par Mohamadi et al [58] sur le déversement des poutres à sections en I mono-symétrique s'appuyées discrètement en torsion et sous chargement de moment constant. L'étude considère des études numériques aux éléments finis en utilisant le code LTBeam [59].

Si les maintiens sont infiniment rigides, la poutre va déverser entre ces retenues, la longueur de déversement sera la distance entre les appuis latéraux. Au point de vue mode, la poutre déversera selon un nombre d'ondes supérieur au premier mode (i.e avec modes supérieurs). On ne pourra donc pas négliger le calcul des modes supérieurs. Ce dernier problème est celui qui nous intéresse. Pour ce faire nous proposons dans ce chapitre une étude du déversement des poutres à sections en I bi-symétrique. La présence des maintiens latéraux en flexion et en torsion est possible et donc plus complète. L'originalité du travail est orientée vers la recherche des modes supérieurs de déversement.

3.2 Déversement des poutres à section doublement symétrique sous différentes charges

Le déversement des poutres ayant une section en I bi-symétrique est investigué dans cette partie. Différents cas de charge sont considérés : une charge répartie, une charge concentrée et un gradient de moments. Ces cas de charges sont les plus importants dans les applications pratiques. L'influence de la position de la charge par rapport au centre de torsion est prise en compte. En appliquant la méthode de Ritz, les expressions analytiques des moments de déversement correspondants aux modes supérieurs ont été obtenues pour les différents cas de charges.

Dans le cas où la section de la poutre présente une section à double symétrie, $\beta_z = 0$, et soumise à un système de charges transversales l'énergie de déformation (1.52) prend la forme :

$$U = \frac{1}{2} \int_L (EI_z(v'')^2 + EI_y(w'')^2 + EI_\omega(\theta_x'')^2) dx + \frac{1}{2} \int_L GI_t(\theta_x')^2 dx + \int_L M_y(v''\theta_x) dx \quad (3.1)$$

3.2.1 Poutres soumises à une charge uniforme répartie

Considérons une poutre simplement appuyée à section transversale bi-symétrique (Figure 3.2), soumise à une charge uniformément répartie q_z appliquée à une distance e_z par rapport au centre de torsion de la section transversale de la poutre.

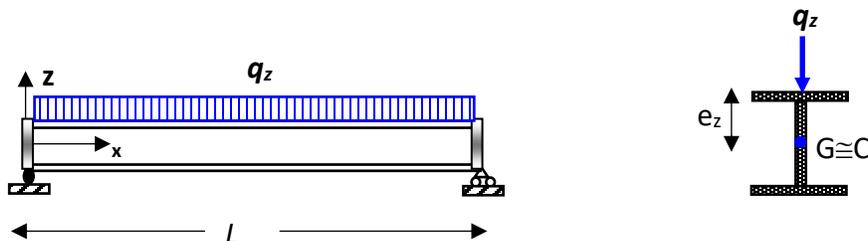


Figure 3.2 : Poutre à section bi-symétrique soumise à une charge uniforme répartie.

Le moment de flexion M_y selon l'axe fort donné par :

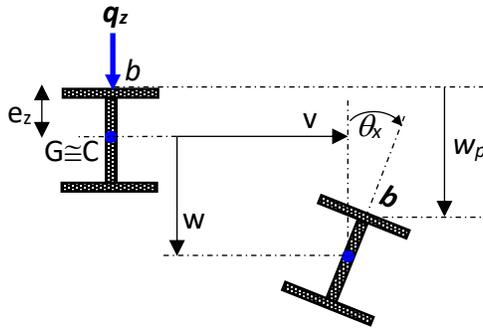
$$M_y(x) = \frac{q_z x}{2} (L - x) \quad (3.2)$$

Le travail des forces extérieures qui se retrouve au dehors de centre de torsion est donné par :

$$W = \int_0^L q_z w_b dx \quad (3.3-a)$$

Où :

w_b est le déplacement vertical du point b , illustré dans le schéma suivant :



Le déplacement w_b est donné par (Mohri [23]) :

$$w_b = w - e_z(1 - \cos\theta_x) \quad (3.3-b)$$

La fonction $\cos\theta_x$ peut s'approximer sous la forme suivante :

$$\cos\theta_x = 1 - \frac{\theta_x^2}{2} \quad (3.3-c)$$

L'expression finale du travail des forces extérieures s'écrit:

$$W = \int_L q_z w dx - \frac{1}{2} \int_L q_z e_z \frac{\theta_x^2}{2} dx \quad (3.3-d)$$

L'énergie totale est donnée par:

$$\begin{aligned} \Pi = U - W = & \frac{1}{2} \int_L \left(EI_y (w'')^2 + EI_z (v'')^2 + GI_t (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta_x'')^2 \right) dx + \int_L M_y (v'' \theta_x) dx - \\ & \int_L q_z w dx + \frac{1}{2} \int_L q_z e_z \theta_x^2 dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dans la stabilité linéaire, on peut négliger les termes $\int_L EI_y (w'')^2 dx$ et $\int_L E q_z w dx$, qui n'ont pas un effet significatif sur la charge critique. L'équation (3.4) devient alors :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L \left(EI_z (v'')^2 + GI_t (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta_x'')^2 \right) dx + \int_L M_y (v'' \theta_x) dx + \frac{1}{2} \int_L q_z e_z \theta_x^2 dx \quad (3.5)$$

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues à partir de la condition de stationnarité $\delta \Pi = 0$, l'équation différentielle qui régit alors le problème est :

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_L (EI_z v'' \delta v'' + GI_t \theta_x' \delta \theta_x' + EI_\omega \theta_x'' \delta \theta_x'') dx + \int_L M_y (v'' \delta \theta_x + \\ & \theta_x \delta v'') dx + \int_L q_z e_z \theta_x \delta \theta_x dx = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Le système d'équations différentielles obtenu est donc:

$$EI_z v^{(4)} + M_y \theta_x'' = 0 \quad (3.7-a)$$

$$EI_\omega \theta_x^{(4)} - (GI_t) \theta_x'' + q_z e_z \theta_x + M_y v'' = 0 \quad (3.7-b)$$

En intégrant l'équation (3.7-a), on obtient:

$$v'' = \frac{M_y}{EI_z} \theta_x \quad (3.7-c)$$

En substituant l'équation 3.7-c dans 3.7-b, nous obtenons l'équation différentielle du 4^{ème} ordre qui s'exprime en fonction de θ_x et s'écrit :

$$EI_\omega \theta_x^{(4)} - (GI_t) \theta_x'' + q_z e_z \theta_x - \frac{M_y^2}{EI_z} \theta_x = 0 \quad (3.8)$$

C'est cette équation différentielle qui définit le déversement. La solution de l'équation 3.8 dépend, comme toute équation différentielle, des conditions frontières du problème spécifique étudié et pour une poutre simplement appuyée les conditions se traduisent par les équations données dans (2.6).

Il existe deux méthodes principales dans la littérature sur la résolution analytique de la poutre lors de l'instabilité pour définir le moment de déversement: la méthode de Galerkin et la méthode de Ritz. La méthode de Galerkin est appliquée aux équations d'équilibre différentielles. En revanche la méthode de Ritz est basée sur une analyse énergétique du phénomène, nous avons à résoudre une équation intégrale et non un système d'équations différentielles. Avec les deux méthodes, il convient d'approximer les modes de déplacement par des fonctions satisfaisant aux conditions limites.

Dans cette étude, nous nous intéressons aux modes supérieurs de déversement pour obtenir des solutions analytiques à ce problème, la méthode de Ritz est utilisée et le système algébrique résultant doit être résolu en utilisant les conditions frontières du problème. Les solutions analytiques sont dérivées selon un mode k . Dans le cas des poutres simplement appuyées en flexion et en torsion, les composantes de déplacement en flexion $v(x)$, $w(x)$ et l'angle de torsion $\theta(x)$ sont approximés par les fonctions données dans l'expression (2.8). Dans le cas où le moment critique de déversement correspondant au premier mode d'une poutre bi-articulée est cherché on prend les fonctions définie dans (2.7).

En utilisant la méthode de Ritz à la solution de l'équation (3.5) et compte tenu des équations (2.8), l'énergie potentielle totale s'écrit :

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_L \left(\left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 EI_z v_k^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 GI_t \theta_k^2 \cos^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 EI_\omega \theta_k^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) dx + \\ \int_L \left(-\frac{q_z x}{2} (L-x) \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 v_k \theta_k \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) dx + \frac{1}{2} \int_L q_z e_z \theta_k^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les intégrales suivantes sont nécessaires pour évaluer l'équation (3.9)

$$\int_L \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx = \int_L \cos^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx = \frac{L}{2} \quad (3.10-a)$$

$$\int_L (xL - x^2) \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx = \frac{L^3}{12} + \frac{L^3}{4k^2\pi^2} \quad (3.10-b)$$

En tenant compte des relations (3.10), et après intégration, l'énergie totale Π se met sous la forme suivante :

$$\Pi = \left(\frac{1}{2} \frac{L}{2} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 EI_z v_k^2 + \frac{1}{2} \frac{L}{2} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 GI_t \theta_k^2 + \frac{1}{2} \frac{L}{2} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 EI_\omega \theta_k^2 \right) + \left(- \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \frac{q_z}{2} \left(\frac{L^3}{12} + \frac{L^3}{4k^2\pi^2} \right) v_k \theta_k \right) + \frac{1}{2} \frac{L}{2} q_z e_z \theta_k^2 \quad (3.11)$$

Le moment fléchissant maximal dû à l'application de la charge uniformément répartie est donné par la formule suivante:

$$M_b = \frac{q_z L^2}{8} \quad (3.12)$$

On remplace (3.12) dans (3.11), l'expression de l'énergie potentielle prend alors la forme suivante :

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{L}{2} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \left[\left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_z v_k^2 + GI_t \theta_k^2 + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_\omega \theta_k^2 + \left(-M_b \left(\frac{4(k^2\pi^2+3)}{3k^2\pi^2} \right) v_k \theta_k \right) + \frac{8}{\pi^2} e_z M_b \theta_k^2 \right] \quad (3.13)$$

L'équation quadratique en terme des déplacements (3.13) s'écrit sous forme matricielle :

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{L}{2} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \begin{Bmatrix} v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_z & -M_b \left(\frac{2(k^2\pi^2+3)}{3k^2\pi^2} \right) \\ -M_b \left(\frac{2(k^2\pi^2+3)}{3k^2\pi^2} \right) & \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_\omega \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2\pi^2 EI_\omega} \right) \left[\frac{8}{k^2\pi^2} e_z \right] M_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

à l'équilibre $\delta\Pi = 0$, cela conduit à :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_z & -M_b \left(\frac{2(k^2\pi^2+3)}{3k^2\pi^2} \right) \\ -M_b \left(\frac{2(k^2\pi^2+3)}{3k^2\pi^2} \right) & \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_\omega \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2\pi^2 EI_\omega} \right) \left[\frac{8}{k^2\pi^2} e_z \right] M_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} = 0 \quad \forall \delta v_k, \delta \theta_k \quad (3.15)$$

Pour avoir des solutions non-triviales, il faut alors poser comme étant nul le déterminant de cette matrice, le problème à résoudre s'écrit alors:

$$- \left(2 \frac{k^2\pi^2+3}{3k^2\pi^2} \right) M_b^2 + P_z(k) \left(\frac{8}{k^2\pi^2} e_z \right) M_b + (P_z(k))^2 \frac{I_\omega}{I_z} \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2\pi^2 EI_\omega} \right) = 0 \quad (3.16)$$

Où nous avons posé :

$$P_z(k) = \frac{k^2\pi^2 EI_z}{L^2}$$

La solution de l'équation (3.16) donne la nouvelle expression du moment de déversement:

$$\mathbf{M}_{Gr}^{\pm}(\mathbf{k}) = \mathbf{C}_1(\mathbf{k})P_z(k) \left[(\mathbf{C}_2(\mathbf{k})e_z) \pm \sqrt{(\mathbf{C}_2(\mathbf{k})e_z)^2 + \frac{I_{\omega}}{I_z} \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2 \pi^2 EI_{\omega}} \right)} \right] \quad (3.17)$$

et les coefficients C_1 et C_2 sont donnés par :

$$\mathbf{C}_1(\mathbf{k}) = \frac{3k^2 \pi^2}{2(k^2 \pi^2 + 3)} \quad (3.18-a)$$

$$\mathbf{C}_2(\mathbf{k}) = \frac{6}{k^2 \pi^2 + 3} \quad (3.18-b)$$

3.2.2 Poutre soumise à une charge concentrée au milieu

Considérons ci-dessous une poutre simplement appuyée à section transversale bi-symétrique (Figure 3.3), soumise à une charge concentrée P appliquée au milieu de la poutre à une distance e_z par rapport au centre de torsion de la section transversale.

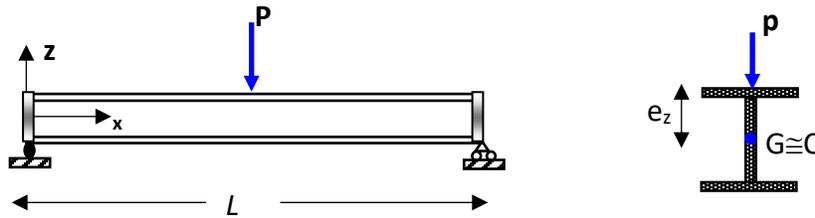


Figure 3.3 : Poutre à une section bi-symétrique sous une charge concentrée au milieu.

Le moment de flexion peut être exprimé par :

$$M_y(x) = \frac{P}{2}x \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq L/2 \quad (3.19-a)$$

$$M_y(x) = \frac{P}{2}(L - x) \quad \text{pour} \quad L/2 \leq x \leq L \quad (3.19-b)$$

Le moment maximal dans la poutre sous la charge concentrée P est :

$$M_b = \frac{PL}{4} \quad (3.20)$$

Le travail de la charge concentrée qui se retrouve en dehors du centre de torsion est donné par :

$$W = -\frac{1}{2} P e_z \theta_x^2 \quad (3.21)$$

Dans ce cas l'énergie totale prend la forme suivante :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L \left(EI_z (v'')^2 + GI_t (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta_x'')^2 \right) dx + \int_L M_y (v'' \theta_x) dx + \frac{1}{2} P e_z \theta_x^2 \quad (3.22)$$

En utilisant la méthode de Ritz à la solution de l'équation (3.22) et compte tenu des équations (3.8), on peut distinguer deux cas :

- Pour des nombres impairs de k , c'est-à-dire ($k \in 1, 3, 5, 7, \dots$), l'énergie potentielle totale est donnée par :

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_L \left(\left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 EI_z v_k^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 GI_t \theta_k^2 \cos^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 EI_\omega \theta_k^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) dx + \\ & \int_{L/2} \left(-\frac{P}{2} x \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 v_k \theta_k \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) dx + \int_L \left(-\frac{P}{2} (L-x) \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 v_k \theta_k \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) dx + \frac{1}{2} P e_z \theta_k \quad (3.23) \end{aligned}$$

Les intégrales suivantes sont nécessaires pour évaluer l'équation (3.23)

$$\int_0^{L/2} x \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx = \frac{L^2}{16} + \frac{L^2}{4k^2\pi^2} \quad (3.24-a)$$

$$\int_{L/2}^L (L-x) \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx = \frac{L^2}{16} + \frac{L^2}{4k^2\pi^2} \quad \forall k \in \{1, 3, 5, \dots\} \quad (3.24-b)$$

Après intégration sur la longueur, on trouve

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \left[\left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_z v_k^2 + GI_t \theta_k^2 + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_\omega \theta_k^2 - M_b \left(\frac{k^2\pi^2 + 4}{k^2\pi^2} \right) v_k \theta_k + \frac{8}{k^2\pi^2} e_z M_b \theta_k^2 \right] \quad (3.25)$$

Autrement dit, sous forme matricielle :

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{L}{2} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \begin{Bmatrix} v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_z & -\frac{M_b}{2} \left(\frac{k^2\pi^2+4}{\pi^2} \right) \\ -\frac{M_b}{2} \left(\frac{k^2\pi^2+4}{k^2\pi^2} \right) & \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_\omega \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2\pi^2 EI_\omega} \right) \left[\frac{8}{k^2\pi^2} e_z \right] M_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Son déterminant est donné par :

$$-\left(\frac{k^2\pi^2+4}{2k^2\pi^2} \right)^2 M_b^2 + P_{z,k} \left(\frac{8}{k^2\pi^2} e_z \right) M_b + (P_z(k))^2 \frac{I_\omega}{I_z} \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2\pi^2 EI_\omega} \right) = 0 \quad (3.27)$$

On trouve la même relation précédente donnée dans (3.17) avec les coefficients C_1 et C_2 donnés par :

$$C_1(k) = \frac{2k^2\pi^2}{k^2\pi^2+4} \quad (3.28-a)$$

$$C_2(k) = \frac{8}{k^2\pi^2+4} \quad (3.28-b)$$

➤ Pour des nombre pairs de k , c'est-à-dire ($k \in 2, 4, 6, 8, \dots$), l'énergie potentielle totale est donnée par :

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_L \left(\left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 EI_z v_k^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 GI_t \theta_k^2 \cos^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 EI_\omega \theta_k^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) dx + \\ & \int_{L/2} \left(-\frac{P}{2} x \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 v_k \theta_k \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) dx + \int_L \left(-\frac{P}{2} (L-x) \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 v_k \theta_k \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) dx \end{aligned} \quad (3.29)$$

On peut remarquer dans l'équation (3.29) que le dernier terme $\frac{1}{2} P e_z \theta_x^2$ est absent, ce qui explique que l'effet de la position de la charge n'a aucune influence sur le moment de déversement dans le cas des modes paires.

Nous allons avoir recours aux intégrales suivantes pour évaluer l'équation (3.29)

$$\int_0^{L/2} x \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx = \frac{L^2}{16} \quad (3.30-a)$$

$$\int_{L/2}^L (L-x) \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx = \frac{L^2}{16} \quad \forall k \in \{2, 4, 6 \dots\} \quad (3.30-b)$$

Après intégration et simplification, on trouve :

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{L}{2} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \left[\left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_z v_k^2 + GI_t \theta_k^2 + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_\omega \theta_k^2 - M_b v_k \theta_k \right] \quad (3.31)$$

que l'on exprime sous la forme matricielle :

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{L}{2} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \begin{Bmatrix} v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_z & -\frac{M_b}{2} \\ -\frac{M_b}{2} & \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_\omega \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2 \pi^2 EI_\omega} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

$$-\frac{1}{4} M_b^2 + (P_z(k))^2 \frac{I_\omega}{I_z} \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2 \pi^2 EI_\omega} \right) = 0 \quad (3.33)$$

La résolution de l'équation (3.33) nous a permis d'obtenir les coefficients C_1 et C_2 suivants :

$$C_1 = 2 \quad (3.34-a)$$

$$C_2 = 0 \quad (3.34-b)$$

3.2.3 Poutres soumises à deux moments égaux

Considérons une poutre à section transversale bi-symétrique, soumise à deux moments égaux M_0 en ses extrémités figure 3.4.

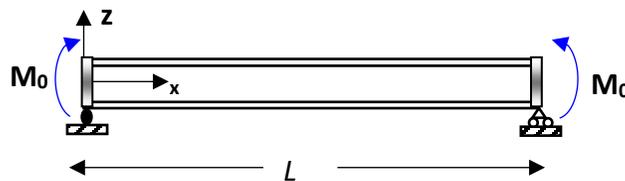


Figure 3.4 : Poutre à section bi-symétrique soumise à deux moments égaux.

Dans ce cas l'expression de l'énergie potentielle se réduit à:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L \left(EI_z (v'')^2 + GI_t (\theta'_x)^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 \right) dx + \int_L M_0 (v'' \theta_x) dx \quad (3.35)$$

En utilisant la méthode de Ritz, on obtient :

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_L \left(\left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 EI_z v_k^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 GI_t \theta_k^2 \cos^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 EI_\omega \theta_k^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) dx - \\ & \int_L \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 M_0 \left(v_k \theta_k \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) dx \end{aligned} \quad (3.36)$$

En intégrant l'équation précédente, on obtient après simplification :

$$\Pi = \frac{1}{2} L \left(\left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 EI_z v_k^2 + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 GI_t \theta_k^2 + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 EI_\omega \theta_k^2 - 2M_0 \left(\left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 v_k \theta_k \right) \right) \quad (3.37)$$

dont la forme matricielle est:

$$\Pi = \frac{1}{2} L \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \begin{Bmatrix} v_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_z & -M_0 \\ -M_0 & \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_\omega \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2 \pi^2 EI_\omega} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

L'équation (3.38) est satisfaite lorsque:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_z & -M_0 \\ -M_0 & \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 EI_\omega \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2 \pi^2 EI_\omega} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

Il existe une solution non-triviale si le déterminant de l'équation (3.39) est égal à zéro, soit :

$$-M_0^2 + (P_z(k))^2 \frac{I_\omega}{I_z} \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2 \pi^2 EI_\omega} \right) = 0 \quad (3.40)$$

L'équation (3.40) permet de déterminer le moment de déversement correspond au mode k d'une poutre simple en flexion pure s'exprime comme suit :

$$\mathbf{M}_{cr}^\pm(k) = \mathbf{C}_1(P_z(k)) \left[\pm \sqrt{\frac{I_\omega}{I_z} \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2 \pi^2 EI_\omega} \right)} \right] \quad (3.41)$$

Avec:

$$\mathbf{C}_1 = 1 = \text{cte} \quad (3.42)$$

3.3 Formule générale des modes de déversement d'ordre supérieurs

D'après les constatations précédentes, on peut établir la relation suivante comme étant la formule générale du déversement d'une poutre à section bi-symétrique et qui déverse selon un mode k .

$$\mathbf{M}_{cr}^{\pm}(\mathbf{k}) = \mathbf{C}_1(\mathbf{k})(P_z(k) \left[(\mathbf{C}_2(\mathbf{k})e_z) \pm \sqrt{(\mathbf{C}_2(\mathbf{k})e_z)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left(1 + \frac{GI_t L^2}{k^2 \pi^2 EI_\omega} \right)} \right]) \quad (3.43)$$

Alors la formule proposée dans cette étude est plus générale et permet de prévoir le moment de déversement pour un mode k . La racine négative correspond au moment de déversement lorsque le moment appliqué est inversé. Les coefficients \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 et la torsion de Saint Venant ainsi que la charge d'Euler P_z sont fonction du mode de déversement. Les valeurs de \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 dépendent du type de chargement appliqué à la poutre. \mathbf{C}_1 traduit l'influence de la distribution des moments de flexion le long de la poutre et \mathbf{C}_2 figure le coefficient du point d'application des charges transversales par rapport au centre de torsion. Dans le cas d'une poutre sollicitée par une charge répartie ou des charges concentrées, les deux coefficients \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 interviennent dans les calculs. Par contre dans le cas d'une poutre sollicitée par un gradient de moments appliqués aux appuis, seuls \mathbf{C}_1 intervient dans la solution analytique (car $e_z = 0$ dans ce cas). De plus, dans le cas d'une poutre sollicitée par une charge concentrée, les 2 coefficients \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 dépendent des modes pairs ou impairs. En présence des mode pairs $k= 2, 4, 6, 8$, le coefficient \mathbf{C}_2 n'intervient pas dans le calcul.

La formule (3.43) est équivalente à la solution adoptée par l'Eurocode 3 lorsqu'on pose la valeur de $k=1$, On obtient :

$$\mathbf{M}_{cr}^{\pm} = \mathbf{C}_1 P_z \left[(\mathbf{C}_2 e_z) \pm \sqrt{(\mathbf{C}_2 e_z)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left(1 + \frac{GI_t L^2}{\pi^2 EI_\omega} \right)} \right] \quad (3.44)$$

On se rappelle que l'équation 3.44 proposée dans l'Eurocode 3 prédisait que le mode de déversement d'une poutre non retenue qui serait toujours le premier mode. Pour une poutre appuyée latéralement sur des appuis intermédiaire rigides, le mode critique de déversement fera passer à $k=2, k=3, k=4....$. L'équation (3.43) permet d'obtenir le moment critique de déversement d'une poutre retenue avec des appuis intermédiaires rigides. Selon cette solution, en présence de n_b appuis positionnés à $\frac{x_i L}{n_b + 1}$, où x_i

est la coordonnée des appuis dans la direction x ($x_i = 1, 2, 3, \dots, n_b$). Il se produit le moment de déversement, donné par :

$$M_{cr}^{\pm}(n_b + 1) = C_1(n_b + 1)(P_z(n_b + 1)) \left[(C_2(n_b + 1)e_z) \pm \sqrt{(C_2(n_b + 1)e_z)^2 + \frac{I_{\omega}}{I_z} \left(1 + \frac{GI_t L^2}{(n_b + 1)^2 \pi^2 EI_{\omega}} \right)} \right] \quad (3.45)$$

Dans l'équation (3.45) nous avons remplacé k par $(n_b + 1)$.

3.4 La résistance au déversement selon l'Eurocode 3

Dans l'Eurocode 3, le principe de vérification du déversement se base sur le facteur de réduction χ_{LT} , qui prend en compte tous les effets qui diminuent la capacité due au déversement. La résistance au moment de flexion selon Eurocode 3 peut être déterminée avec :

$$M_{b,rd} = \chi_{LT} W f_y \quad (3.46)$$

Où :

f_y = est la limite d'élasticité de l'acier

χ_{LT} : est le coefficient de réduction.

W : est le module de section, selon la classification des sections suivante :

- ✓ $W = W_{pl,y}$: le module de section plastique pour les sections de classe de 1 et 2.
- ✓ $W = W_{el,y}$: le module de section élastique pour les sections de classe 3.
- ✓ $W = W_{eff,y}$: le module de section efficace pour les sections de classe 4.

L'élanement réduit, $\bar{\lambda}_{LT}$ est donné par :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W f_y}{M_{cr}}} \quad (3.47)$$

M_{cr} : est le moment critique de déversement.

Comme le flambement, l'expression du coefficient de réduction de χ_{LT} est donnée par :

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \beta \bar{\lambda}_{LT}^2}} \quad (3.48)$$

Où $\bar{\lambda}_{LT}$ est l'élanement réduit donné par (3.47). La fonction ϕ_{LT} est définie par :

$$\phi_{LT} = 0.5 \left(1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_{LT}) + \beta \bar{\lambda}_{LT}^2 \right) \quad (3.49)$$

Les valeurs recommandées pour β et $\bar{\lambda}_{LT}$ sont $\beta=0.75$ et $\bar{\lambda}_{LT}=0.4$ (élancement limite).

α_{LT} est le paramètre de défaut. Les valeurs utilisées dans l'EC3 sont fonction des imperfections (Tableau 3.1). Le choix des constantes à prendre dépend de la forme de la section étudiée (Tableau 3.2).

Courbe d'imperfection	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
α_{LT}	0.21	0.34	0.49	0.76

Tableau 3.1 : valeurs des coefficients d'imperfections.

	Limites	courbe
Sections Laminées	$h/b \leq 2$	<i>a</i>
	$h/b > 2$	<i>b</i>
Sections Soudées	$h/b \leq 2$	<i>c</i>
	$h/b > 2$	<i>d</i>
Autres	Quelques soit	<i>d</i>

Tableau 3.2 : Choix des courbes pour le calcul au déversement.

3.5 Conclusion

Le déversement des poutres en I bi-symétriques sous différents cas de charge a été étudié. Ces cas de charge sont : charge répartie, charge concentrée et deux moments égaux. Ces cas de charges sont les plus importants dans les applications de conception technique. L'influence de la position de la charge par rapport au centre de torsion est prise en compte. En se basant sur la méthode de Ritz, des solutions analytiques de moment de déversement au mode k ont été développées par l'approximation des déplacements par des fonctions sinusoïdales à plusieurs termes afin de tenir compte des modes supérieurs de déversement. Ces solutions analytiques seront validées au chapitre 5.

Chapitre 4: Eléments finis des poutres à parois minces

4.1 Introduction

La majorité des problèmes d'ingénierie sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites définies sur un domaine et son contour. La résolution analytique d'équations différentielles pose parfois des difficultés considérables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver. Toutefois, l'analyse devient vite complexe lorsqu'il s'agit de structures composées de poutres formées de profils ouverts à parois minces, la compréhension de leur fonctionnement étant beaucoup moins intuitive. En général on recourt au calcul par éléments finis, mais on ne peut en interpréter les résultats si l'on n'a pas bien identifié certains phénomènes grâce à une réflexion théorique approfondie.

Plusieurs études portent sur l'analyse de la stabilité des poutres minces à sections ouvertes, En utilisant la méthode des éléments finis. En se s'appuyant sur le modèle de Vlasov, des auteurs tels que Barsoum, et Gallagher [25], Attard [43], Krajcinovic [60], Laudiero et Zaccaria [61], Powel et Klingner [62], Battini et Pacoste [63], ont proposé des modèles éléments finis pour l'analyse de la stabilité linéaire des poutres à paroi mince, en particulier le comportement au flambement et au déversement.

Récemment, d'autres modèles sont intervenus, améliorant les premiers et ont donné des résultats meilleurs pour la stabilité linéaire, comme l'énoncent Wu et Mohareb [64] qui développent un modèle éléments finis pour analyse des poutres à en I bi-symétrique, Ce modèle prend en considération les déformations de cisaillement et les excentricités des chargements. Erkmén et al [65] quant à lui a proposé un modèle d'éléments finis pour l'analyse du flambement des éléments à parois minces basé sur les conditions de stationnarité de l'énergie potentielle. Des modèles en torsion modérée ont été développés récemment et ont donné des résultats meilleurs tant pour la stabilité que pour le comportement non linéaire [22,66-68]. Un modèle non linéaire pour l'analyse de la stabilité des poutres minces à sections ouvertes a été proposé dans les travaux de Mohri et al [69]. Ce modèle prend en considération les effets de raccourcissement des déformations de pré-flambage, les grandes torsions et le couplage flexion-torsion.

La méthode des éléments finis n'a pas de limitation concernant les conditions de bords, formes de structures, types d'actions et discontinuités locales. En principe, tous les phénomènes inhérents aux structures à parois minces peuvent être modélisés en utilisant les éléments finis ici.

L'objectif de ce chapitre est de présenter un modèle numérique pour le calcul des modes supérieurs de flambement et de déversement des poutres formées de profils ouverts à parois minces, La formulation du problème par éléments finis et l'utilisation des poutres 3D avec sept degrés de liberté par nœud ont été adoptées. Les bases de ce modèle sont détaillées dans (Mohri et al [22]).

4.1 Equations d'équilibre

On considère un élément à parois minces et à section ouverte dans un repère 3D (figure 4.1). Le centre de torsion C est repéré par ses coordonnées (y_c, z_c) . Un point M est défini sur le contour par ses coordonnées y, z et ω où ω la coordonnée sectorielle, définit le gauchissement de la section en ce point. Conformément à ce qui a été précédemment établi dans le chapitre 1, les déplacements $u_M, v_M,$ et $w_M,$ du point M peuvent être exprimés de la manière suivante :

$$u_M = u - y(v') - z(w') - \omega\theta'_x$$

$$v_M = v - e_z\theta_x \quad w_M = w - e_y\theta_x \quad (4.1a-c)$$

Avec :

$$e_y = y - y_c ; \quad e_z = z - z_c$$

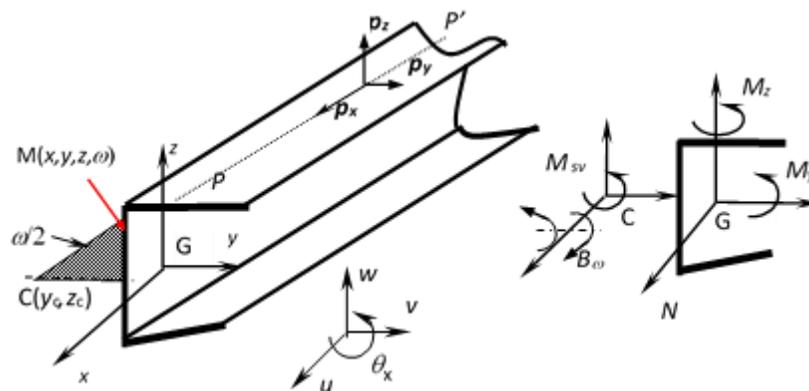


Figure 4.1: Poutre à section ouverte : cinématique et chargement.

Le tenseur de Green est défini par:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon - yk_z - zk_y - \omega\theta_x'' + \frac{1}{2}R^2\theta_x'^2 \\ \varepsilon_{xy} &= -\frac{1}{2}\left(e_z + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\theta_x' \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(e_y - \frac{\partial\omega}{\partial z}\right)\theta_x'\end{aligned}\quad (4.2a-c)$$

dans (2a):

$$\begin{aligned}\varepsilon &= u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) - (y_c w' - z_c v')\theta_x' \\ k_y &= w'' + v'\theta_x' \quad k_z = v'' - w'\theta_x' \\ R^2 &= e_y^2 + e_z^2\end{aligned}\quad (4.3a-d)$$

Le présent modèle est appliqué dans le cas d'une loi de comportement élastique linéaire avec E et G comme modules d'élasticité longitudinale et transversale, les éléments de réduction dans le domaine élastique sont définis par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}N &= \int_A E\varepsilon_{xx}dA = EA\varepsilon + \frac{1}{2}EAI_0\theta_x'^2 \\ M_y &= \int_A E\varepsilon_{xx}zdA = -EI_y(k_y - \beta_z\theta_x'^2)\end{aligned}\quad (4.4a-d)$$

$$\begin{aligned}M_z &= \int_A E\varepsilon_{xx}ydA = -EI_z(k_z - \beta_y\theta_x'^2) \\ M_{sv} &= 2 \int_A (G\varepsilon_{xz}(e_y - \frac{\partial\omega}{\partial z}) - G\varepsilon_{xy}(e_z - \frac{\partial\omega}{\partial y}))dA = GI_t\theta_x' \\ B_\omega &= \int_A E\varepsilon_{xx}\omega dA = EI_\omega(\theta_x'' - \beta_\omega\theta_x'^2)\end{aligned}\quad (4.4e)$$

$$M_R = EAI_0\varepsilon - 2EI_z\beta_y k_z - 2EI_y\beta_z k_y - 2EI_\omega\beta_\omega\theta_x'' + \frac{1}{2}EI_R\theta_x'^2 \quad (4.4f)$$

les composants de vecteurs de contrainte et de déformation sont définis ainsi:

$$\begin{aligned}\{S\}^t &= \{N \quad M_y \quad M_z \quad M_{sv} \quad B_\omega \quad M_R\} \\ \{\gamma\}^t &= \left\{ \varepsilon \quad -k_y \quad -k_z \quad \theta_x' \quad \theta_x'' \quad \frac{1}{2}\theta_x'^2 \right\}\end{aligned}\quad (4.5a,b)$$

la relation de contrainte-déformation s'écrit sous forme de matrice :

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \\ M_{sv} \\ B_\omega \\ M_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & EAI_0 \\ 0 & EI_y & 0 & 0 & 0 & 2EI_y\beta_z \\ 0 & 0 & EI_z & 0 & 0 & 2EI_z\beta_y \\ 0 & 0 & 0 & GI_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_\omega & -2EI_\omega\beta_\omega \\ EAI_0 & 2EI_y\beta_z & 2EI_z\beta_y & 0 & -2EI_\omega\beta_\omega & EI_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ -k_y \\ -k_z \\ \theta'_x \\ \theta''_x \\ \frac{1}{2}\theta_x'^2 \end{Bmatrix} = [D]\{\gamma\} \quad (4.6)$$

$\{S\}$ et $\{\gamma\}$ sont les vecteurs contraintes et déformations. $[D]$ est la matrice de comportement. Elle est fonction des constantes élastiques et des caractéristiques géométriques de la section ouverte. A est l'aire de la section. I_y et I_z les moments d'inertie de flexion autour des axes y et z . I_t et I_ω sont respectivement, le moment d'inertie de St-Venant et le moment d'inertie de gauchissement. I_0 est le moment d'inertie polaire de la section autour du centre de torsion. β_y , β_z et β_ω sont les coefficients de Wagner. I_R est le moment d'inertie de gauchissement non-linéaire. Leurs expressions sont données dans Mohri [21] et une méthode numérique de calcul efficace est développée dans ce chapitre. Les équations d'équilibre sont dérivées à partir de la condition stationnaire de potentiel total donnée par :

$$\delta U - \delta W = 0 \quad (4.7)$$

Où :

δU et δW sont respectivement l'énergie de déformation et le travail des forces extérieures. Leur variation en fonction des déplacements virtuels ainsi que de leurs dérivées sont développées séparément ci-dessous. Nous Basons sur les composantes de déplacements virtuels et après intégration sur la section A , la variation de l'énergie de déformation s'exprime par:

$$\delta U = \int_L \left(N\delta\varepsilon - M_y\delta k_y - M_z\delta k_z + M_{sv}\delta\theta'_x + B_\omega\delta\theta''_x + \frac{1}{2}M_R\delta(\theta'_x)^2 \right) dx \quad (4.8a)$$

En notation matricielle, selon (5a, b), on peut mettre:

$$\delta U = \int_L \{\delta\gamma\}^t \{S\} dx \quad (4.8b)$$

Les vecteurs $\{\gamma\}$ et $\{S\}$ peuvent être décomposés en fonction des déplacements de la façon suivante :

Selon la définition du vecteur $\{\gamma\}$ dans (5b) et selon (2a) et (3), on peut écrire:

$$\{\gamma\} = \left([H] + \frac{1}{2}[A(\theta)] - [A_c(\theta)] \right) \{\theta\} \quad (4.9)$$

Les matrices $[H]$ et $[A(\theta)]$ sont classiques en mécanique des structures non linéaire. La dernière matrice $[A_c(\theta)]$ prend en compte l'effet de couplage flexion-torsion. Les termes non nuls de cette matrice sont:

$$A_c(1,4) = y_c w' - z_c v' \quad A_c(2,4) = v' \quad A_c(3,4) = -w' \quad (4.10a-c)$$

Les composants du vecteur $\{\theta\}$ sont les suivants:

$$\{\theta\}^t = \{u' \quad v' \quad w' \quad \theta'_x \quad v'' \quad w'' \quad \theta''_x \quad \theta_x\} \quad (4.11)$$

La variation de $\{\delta\gamma\}$ est nécessaire dans l'évaluation de l'énergie de déformation (8b), on obtient ainsi :

$$\{\delta\gamma\} = ([H] + [A(\theta)] - [A_c(\theta)] - [\tilde{A}(\theta)])\{\delta\theta\} \quad (4.12)$$

La matrice $[\tilde{A}(\theta)]$ résulte de la variation de $[A_c(\theta)]$. Les termes non nuls de cette matrice sont:

$$\tilde{A}(1, 2) = -z_c \theta'_x \quad \tilde{A}(1, 3) = y_c \theta'_x \quad \tilde{A}(2, 2) = \theta'_x \quad \tilde{A}(3, 3) = -\theta'_x \quad (4.13a-c)$$

En forme matricielle, la variation de l'énergie de déformation devient:

$$\delta U = \int_0^L \{\delta\theta\}^t ([H] + [A(\theta)] - [A_c(\theta)] - [\tilde{A}(\theta)])^t \{S\} dx \quad (4.14)$$

Pour la variation du travail extérieur (δW), des charges réparties sont appliquées aux parois de la poutre le long de la ligne (pp', Fig.1). Leurs composantes $\lambda(\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z)$ sont supposées proportionnelles au facteur de charge λ . La variation du travail extérieur s'exprime sous la forme suivante:

$$\delta W = \lambda \int_L (p_x \delta u_p + p_y \delta v_p + p_z \delta w_p(e_z)) dx \quad (4.15)$$

Afin de prendre en compte les termes de torsion de second ordre des charges p_z , l'expression de w_p est dérivée en présence de termes de torsion quadratique Mohri [23]:

$$w_p(e_z) = w_p - e_z \frac{\theta_x^2}{2} \quad (4.16)$$

En opérant la variation sur les composants de déplacement -selon la cinématique (1a, b) et (16)- la variation du travail extérieur est décomposée en deux parties, écrites comme suit:

$$\delta W = \delta W_c + \delta W_{nc} \quad (4.17a)$$

Où :

δW_c est la contribution de la charge classique. δW_{nc} est la contribution de l'effet de l'excentricité des charges verticales.

$$\begin{aligned} \delta W_c &= \lambda \int_L (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w + m_x \delta \theta_x + m_y \delta w' + m_z \delta v' + b_\omega \delta \theta'_x) dx \\ &= \lambda \int (\{\delta q\}^t \{p\} + \{\delta \theta\}^t \{m\}) dx \end{aligned} \quad (4.17b)$$

$$\delta W_{nc} = -\lambda \int_L (p_z e_y \theta_x \delta \theta_x) dx = -\lambda \int \{\delta q\}^t [m_1] \{q\} dx \quad (4.17c)$$

Cette partie conduit à un moment de torsion non linéaire proportionnel à $(\mathbf{p}_z \mathbf{e}_z \theta_x)$. Dans les équations (17), $(\mathbf{m}_y = -\mathbf{p}_x \mathbf{z}, \mathbf{m}_z = -\mathbf{p}_x \mathbf{y}, \mathbf{m}_x = -\mathbf{p}_y \mathbf{e}_z + \mathbf{p}_z \mathbf{e}_y, \text{ et } \mathbf{b}_\omega = -\mathbf{p}_x \boldsymbol{\omega})$ définissent respectivement les moments de

flexion externes, le moment de torsion et le bimoment. Pour la formulation matricielle de (δW) , les vecteurs supplémentaires suivants ont été utilisés:

$$\{q\}^t = \{u \quad v \quad w \quad \theta_x\}$$

$$\{p\}^t = \{p_x \quad p_y \quad p_z \quad m_x\} \quad (4.18a,c)$$

$$\{m\}^t = \{0 \quad m_z \quad m_y \quad b_\omega \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

$[m_1]$ est une matrice carrée (4, 4). Le terme non nul de cette matrice est $m_1(4,4) = p_z e_z$

L'expression finale du travail des forces extérieures, est :

$$\delta W = \lambda \int_L (\{\delta q\}^t \{p\} + \{\delta \theta\}^t \{m\}) dx - \lambda \int_L \{\delta q\}^t [m_1] \{q\} dx \quad (4.19)$$

Le système d'équilibre est obtenu à partir de (15) et (19), combinaison avec la loi de comportement (6) et (9) pour obtenir:

$$\begin{cases} \int_L \{\delta \theta\}^t ([H] + [A(\theta)] - [A_c(\theta)] - [\tilde{A}(\theta)])^t \{S\} dx \\ -\lambda \int_L (\{\delta q\}^t \{p\} + \{\delta \theta\}^t \{m\}) dx + \lambda \int \{\delta q\}^t [m_1] \{q\} dx \\ \{S\} = [D] \left([H] + \frac{1}{2} [A(\theta)] - [A_c(\theta)] \right) \{\theta\} \end{cases} \quad \forall \{\delta q\}, \{\delta \theta\} \quad (4.20)$$

La discrétisation par éléments finis de ce système est étudiée ci-dessous.

4.2 Discrétisation par éléments finis

Dans la littérature des poutres à parois minces à section ouverte, la déformation due au gauchissement est d'une importance primordiale. Pour cette raison, le gauchissement est considéré comme un déplacement indépendant supplémentaire par rapport aux éléments poutre 3D classiques. La discrétisation par éléments finis de la poutre de longueur L est effectuée en divisant la poutre en plusieurs éléments finis poutres à deux nœuds et à 7 degrés de liberté 7 (7 ddl) par nœud. En notant les déplacements nodaux par $(\{r\}_i^t = \{u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad v' \quad w' \quad \theta'_x\}_i; i = 1,2)$. Des fonctions de forme linéaires sont choisies pour le déplacement axial. Les fonctions cubiques d'Hermite sont adoptées pour les autres composantes v , w et θ_x . Leurs expressions sont données dans [70] et [71], ces fonctions de forme sont données dans l'annexe. Les vecteurs $\{q\}$ et $\{\theta\}$ sont liés aux variables nodales $\{r\}$ par:

$$\{q\} = [f(\xi)]\{r\} \quad ; \quad \{\theta\} = [g(\xi)]\{r\} \quad (4.21a,b)$$

$[f(\xi)]$ et $[g(\xi)]$ sont des matrices regroupant les fonctions de forme. La variation de $\{\delta q\}$ et $\{\delta \theta\}$ est nécessaire pour évaluer l'équation (20). En appliquant ces relations aux équations d'équilibre, on obtient:

$$\begin{cases} U_e \frac{l}{2} \left(\int_{-1}^1 [B(\theta)]^t \{S\}_e d\xi \right) - \lambda \{F\} + \lambda \{F(r)\} = 0 \\ \{S\}_e = [D] \left([B_l] + \frac{1}{2} [B_{nl}(\theta)] - [B_c(\theta)] \right) \{r\}_e \end{cases} \quad (4.22a,b)$$

U_e désigne le processus d'assemblage sur les éléments de base. Les matrices et vecteurs utilisés dans (22) sont:

$$[B(\theta)] = [B_l] + [B_{nl}(\theta)] - [B_c(\theta)] - [\tilde{B}_c(\theta)] \quad (4.23a)$$

$$[B_l] = [H][g] \quad [B_{nl}(\theta)] = [A(\theta)][g] \quad (4.23b,c)$$

$$[B_c(\theta)] = [A_c(\theta)][g] \quad [\tilde{B}_c(\theta)] = [\tilde{A}(\theta)][g] \quad (4.23d,e)$$

$$\{F\} = U_e \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \{F\}_e d\xi = U_e \frac{l}{2} \int_{-1}^1 ([f]^t \{p\}_e + [g]^t \{m\}_e) d\xi \quad (4.24a)$$

$$\{F(r)\} = U_e \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \{F_1(r)\}_e d\xi = U_e \frac{l}{2} \left(\int_{-1}^1 [f]^t [m_1] [f] d\xi \right) \{r\} \quad (4.24b)$$

Les matrices $[B_l]$ et $[B_{nl}(\theta)]$ sont connues en analyse non linéaire. Les matrices $[B_c(\theta)]$ résultent d'un couplage flexion-torsion. $\{F\}$ étant le vecteur de force nodal classique. Le vecteur de force supplémentaire $\{F(r)\}$ n'est pas constant et dépend des déplacements et de l'excentricité de la charge. Pour résoudre le problème (22), la méthode itérative classique de Newton-Raphson peut être appliquée. Par conséquent, nous devons calculer la matrice de rigidité tangente (ou Jacobienne) et on considère ensuite l'état fondamental correspondant à la déflexion initiale à l'état de pré-flambement, cette procédure se présente comme suit :

$$\{r\} = \{r_0\} + \{\Delta r\} \quad \{S\} = \{S_0\} + \{\Delta S\} \quad \lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda \quad (4.25a,c)$$

Si la solution $(\{r_0\}, \{S_0\}, \lambda_0)$, est supposée initiale, les incréments du problème $(\{\Delta r\}, \{\Delta S\}, \Delta \lambda)$ remplissent les conditions suivantes:

$$U_e \frac{l}{2} \int_{-1}^1 ([B(\theta_0)]^t \{\Delta S\} + [\Delta B(\theta)]^t \{S_0\}) d\xi - \Delta \lambda \{F\} + \Delta(\lambda \{F(r)\}) = 0 \quad (4.26a)$$

Avec:

$$\{\Delta S\} = [D]\{\Delta \gamma\} = [D][B(\theta)]\{\Delta r\} \quad (4.26b)$$

En raison des termes de couplage impliqués dans la matrice $[B(\theta)]$, les incréments $[\Delta B(\theta)]$ dans (26a) ne sont pas simples et doivent être calculés avec prudence. Selon (26b), on peut écrire pour la partie de la matrice de rigidité géométrique :

$$[\Delta B(\theta_0)]^t \{\Delta S\} = [B(\theta_0)]^t [D][B(\theta_0)]\{\Delta r\} = [K_g]\{\Delta r\}$$

Le deuxième terme mène à la matrice de rigidité due aux contraintes initiales. Suite à la procédure adoptée dans Mohri [22], on arrive à :

$$[\Delta B(\theta)]^t \{S_0\} = [g]^t \left([\bar{S}_0] - [\bar{S}_0] - [\bar{S}_0]^t \right) [g]\{\Delta r\} = [g]^t [S_0][g]\{\Delta r\} = [K_{S_0}]\{\Delta r\} \quad (4.27)$$

Dans (27) nous avons posé :

$$[S_0] = [\bar{S}_0] - [\bar{S}_0] - [\bar{S}_0]^t$$

Les termes non nuls des matrices de contraintes initiales sont les suivants :

$$\bar{S}_0(2,2) = \bar{S}_0(3,3) = N_0, \quad \bar{S}_0(4,4) = M_{R0} \quad (4.28a, b)$$

$$\bar{S}_0(4,2) = -N_0 z_c + M_{y0}, \quad \bar{S}_0(4,3) = N_0 y_c - M_{z0} \quad (4.28c, d)$$

Dans la présente étude, l'influence du point d'application de la charge par rapport au centre de torsion est prise en compte. Rappelons que la contribution de charge a été déduite dans (24) par sa composante classique $\{F\}$ (24a) étant la partie dépendant du déplacement $\{F(r)\}$ (24b). Alors :

$$\Delta \lambda \{F\} - \Delta(\lambda \{F(r)\}) = \Delta \lambda (\{F\} - \{F(r_0)\}) - \lambda_0 \{F(\Delta r)\} \quad (4.29a)$$

Avec :

$$\{F(r_0)\} = U_e \frac{l}{2} \left(\int_{-1}^1 [f]^t [m_1] [f] d\xi \right) \{r_0\}$$

$$\{F(\Delta r)\} = U_e \frac{l}{2} \left(\int_{-1}^1 [f]^t [m_1] [f] d\xi \right) \{\Delta r\} = [K_F]\{\Delta r\} \quad (4.29b, c)$$

Finalement, la forme matricielle globale du problème incrémental (26) peut s'écrire comme suit :

$$[K_t]\{\Delta r\} = \Delta \lambda \{F\} \quad (4.30a)$$

La matrice de rigidité tangente $[K_t]$ est donnée par :

$$[K_t] = [K_g] + [K_{S_0}] + [K_F] \quad (4.30b)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
[K_g] &= U_e \frac{l}{2} \left(\int_{-1}^1 [B(\theta_0)]^t [D] [B(\theta_0)] d\xi \right) \\
[K_{S_0}] &= U_e \frac{l}{2} \left(\int_{-1}^1 [g]^t [S(\theta_0)] [g] d\xi \right) \\
[K_F] &= \lambda_0 \left\{ U_e \frac{l}{2} \left(\int_{-1}^1 [f]^t [m_1] [f] d\xi \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.30c-e}$$

$[K_g]$ est la matrice de rigidité géométrique et $[K_{S_0}]$ est la matrice des contraintes initiales. La matrice $[K_F]$ est la contribution des charges et tient compte de l'influence du point d'application de la charge. Le système (30) peut être résolu à l'aide des méthodes itératives et les courbes de déplacements peuvent être obtenues. Cette tâche a été effectuée dans le cas plus général et en présence d'amplitudes de torsion importantes ou infimes en [22, 72]. En présence des instabilités, les charges critiques sont calculées par les points singuliers de la matrice tangente $[K_t]$. Alors l'analyse de flambement mène au problème des valeurs propres d'un système d'équations:

$$\left([K_g] - \lambda_0 ([K_{S_0}] - [K_F]) \right) \{r\} = \{0\} \tag{4.31}$$

λ_0 et $\{r\}$ sont les charges de flambement et les modes propres correspondants. Elles sont réalisées selon un solveur efficace du problème des valeurs propres. Dans Abaqus [27], les méthodes de Lanczos et de sous-espace (subspace en anglais) sont possibles. Dans ce travail, nous avons adopté le solveur efficace de Matlab [35] pour résoudre le problème de valeur propre. Le présent modèle d'éléments finis est implémenté dans ce code. Il est référencié B3Dw (B :Beam ;3D : 3 Dimensional ;W : Warping) dans la partie application.

4.3 Conclusion

Un modèle numérique des poutres à parois minces et à sections ouvertes est développé dans ce chapitre. Le présent modèle est capable d'analyser des poutres en compression ou en flexion. Le modèle numérique utilise des poutres 3D à 7 ddl par nœud. Ce modèle peut être qualifié de général car il tient compte à la fois de l'effet de l'excentricité de la charge par rapport au centre de torsion et du couplage flexion –torsion. Son utilisation est donc adaptée à une grande variété de formes de poutres. Le présent élément fini est implanté sur Matlab et appelé B3Dw. La validité de ce modèle sera vérifiée dans le chapitre 5.

Chapitre 5: Validations numériques et contrôle des instabilités

5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de vérifier la validité des présents modèles théorique et numérique pour l'analyse du flambement et du déversement des poutres à parois minces et à sections ouvertes d'une part et d'autre part d'étudier l'effet des maintiens latéraux sur la résistance au flambement et au déversement.

Pour atteindre ces objectifs, le chapitre se compose de deux parties principales, la partie 5.2 expose l'analyse et la comparaison des résultats obtenus par les modèles théorique et numérique ayant fait l'objet des chapitres 2,3,4 avec les simulations numériques en utilisant les codes commerciaux Abaqus et Adina [73]. La partie 5.3 traite des exemples de calcul de la résistance au flambement et au déversement en tenant compte les effets des maintiens latéraux.

5.2 Résultats et validations numériques

Cette partie est divisée en deux sections, le flambement des barres sous une charge de compression est abordé dans la section 5.2.1, tandis que le déversement des poutres est étudié à la section 5.2.2. Les charges de flambement et de déversement fournies par les présents modèles sont comparées avec celles données par la simulation par éléments finis en utilisant les codes commerciaux Abaqus et Adina. Dans le code Adina, les poutres sont modélisées par l'élément poutre. Cependant dans le code Abaqus, l'élément poutre B31OS est adopté dans l'analyse. Dans chacun des deux codes, les caractéristiques géométriques des sections ouvertes peuvent être choisies avec deux possibilités. Soit on donne les dimensions de la section (largeurs et les épaisseurs des semelles et de l'âme), dans ce cas les propriétés géométriques et mécaniques des sections sont calculées par le code. Soit on donne directement les propriétés de la section (A , I_y , I_z , $I_{\omega}...$). Dans le cas de notre étude, afin d'utiliser les mêmes propriétés géométriques des sections, on a adopté la 2^{ème} méthode. Dans le processus de maillage, on a prêté plus d'attention à l'exactitude de ce dernier. Le nombre d'éléments a été augmenté jusqu'à ce que la solution devienne insensible au maillage.

5.2.1 Validité des solutions analytiques dans le cas de flambement

Afin d'évaluer la validité de la solution analytique proposée dans le chapitre 2 et du présent modèle d'éléments finis (appelé B3Dw) qui est été formulé au chapitre 4, une étude comparative implique l'analyse de stabilité au flambement des barres en variant la longueur de barre L , ainsi que le type de

section (bi-symétrique, mono-symétrique et arbitraire), avec les mêmes conditions aux limites (poutre simplement appuyée). Dans tous les exemples, l'acier a été adopté avec les constantes élastiques suivantes: module de Young ($E = 210$ GPa), module de cisaillement ($G = 80,77$ GPa). Pour toutes les barres étudiées, deux configurations sont analysées (1): la variation des charges critiques de flambement du premier mode en fonction de la longueur de barre, (2): l'analyse des modes supérieurs de flambement pour une longueur fixe. Les présentes solutions analytiques et numériques sont comparées à des simulations du code commercial Abaqus ou à des solutions de référence lorsque cela est possible.

5.2.1.1 Exemple 1 : Flambement d'une barre à section en I bi-symétrique

Dans cet exemple, on considère une barre de longueur L et de section en I bi-symétrique « IPE 300 ». La barre est simplement supportée à ses deux côtés et soumise à une charge axiale de compression P (Figure 5.1). Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la section sont données dans le tableau (5.1).

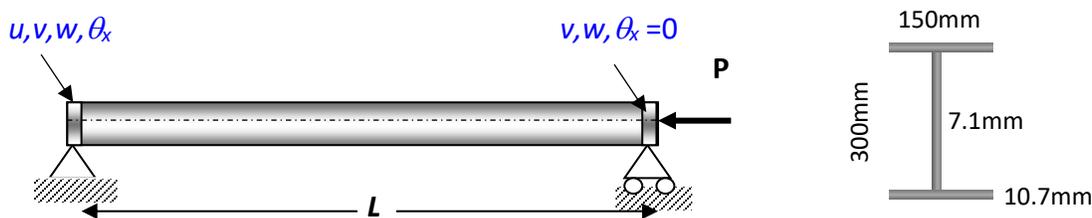


Figure 5.1: Barre à une section en I bi-symétrique: les conditions aux limites, le chargement appliqué et les dimensions de la section.

$A = 51,88 \text{ cm}^2$	$I_y = 7998,98 \text{ cm}^4$	$I_z = 602,71 \text{ cm}^4$	$z_c = 0,0 \text{ cm}$
$I_t = 15,57 \text{ cm}^4$	$I_\omega = 125930 \text{ cm}^6$		$y_c = 0,0 \text{ cm}$

Tableau 5.1 : Caractéristiques géométriques et mécaniques du profilé IPE 300.

Dans le tableau (5.2), on illustre la variation des charges critiques de flambement du premier mode en fonction de la longueur L . Pour cela on fait varier la longueur de 2 à 8m. Les solutions analytiques sont obtenues à partir de la relation (2.17), en mettant $k = 1$. Dans ce tableau, les charges critiques de

flambement estimées par les présents modèles sont comparées avec celles données par la modélisation à l'aide du code Abaqus.

On observe une diminution de la charge critique de flambement lorsque la longueur L augmente. On peut remarquer aussi que pour toutes les longueurs, le mode de flambement est en flexion par rapport à l'axe z-z. Un excellent accord est obtenu entre les charges de flambement obtenues par les méthodes proposées et celles données par Abaqus.

L (m)	Théorie Min(P_z, P_y, P_θ)	Présent B3Dw	Abaqus (B31OS)	Mode de flambement	Ecart %
2	3118,67	3119,28	3104,50	En flexion selon z-z	0,48
3	1386,07	1386,35	1383,30		0,22
4	779,67	779,82	778,78		0,13
5	498,99	499,08	498,62		0,09
6	346,52	346,58	346,51		0,02
7	254,59	254,63	254,49		0,06
8	194,92	194,95	194,86		0,05

Tableau 5.2. Comparaison analytique et numérique des charges critiques de flambement d'une barre ayant une section bi-symétrique.

Afin d'évaluer les modes supérieurs de flambement, on fixe la longueur $L = 4\text{m}$. dans ce cas, les quatre premières charges de flambement associées aux quatre premiers modes supérieurs ont été cherchées. Les résultats obtenus sont présentés au tableau (5.3). Les modes de flambement analytique ont été également calculés par l'équation (2.17). La dernière colonne nous donne l'erreur observée entre les résultats de B3Dw et ceux fournis par Abaqus. Les résultats mettent en évidence que le mode de flambement 1 et 3 sont en flexion autour de l'axe faible z-z alors que pour les modes 2 et 4 sont en torsion. La figure A1 de l'annexe expose les formes des modes de flambement de la barre.

Les modes supérieurs de flambement pour $L=4m$					
Mode	P_{cr} (Théorie, kN)	Présent B3Dw	Abaqus B31OS	Type de mode	Ecart %
1	779,67	779,82	778,78	FP	0,13
2	1743,32	1742,39	1741,80	TP	0,03
3	3118,67	3118,28	3104,80	FP	0,43
4	4687,22	4686,49	4658,50	TP	0,60

Tableau 5.3. Comparaison analytique et numérique des quatre premiers modes de flambement d'une barre ayant une section bi-symétrique. (FP: mode en flexion pure, TP: mode en torsion pure).

5.2.1.2 Exemple 2: Flambement des barres à section mono-symétrique par rapport à l'axe (y-y)

Le flambement des barres ayant une section mono-symétrique selon l'axe y-y (section en C) est analysé dans cet exemple. Les dimensions de la section sont présentées dans la figure 5.2. Les caractéristiques géométriques de cette section sont calculées selon Mohri [21]. Dans le tableau (5.4), les charges critiques de flambement du premier mode sont données pour les différentes valeurs de la longueur L . Les solutions analytiques sont calculées à partir de l'équation (2.20). Ces solutions sont possibles à partir des charges de flambement non couplées de la section reproduites dans les trois premières colonnes du tableau (5.5). Ensuite on a comparé ces résultats avec les résultats numériques donnés par B3Dw et le code Abaqus.

On peut également remarquer que les charges critiques de flambement diminuent avec l'augmentation de la longueur. Les résultats indiquent également que le flambement flexion-torsion est le mode de flambement dominant lorsque la longueur de la barre $L < 3$ m. La charge de flambement en flexion d'Euler est présente pour des longueurs supérieures à 3 m. Sur la base de ces résultats on peut conclure que le comportement au flambement de la section en C dépend de la longueur de la barre. On note un bon accord entre les résultats analytiques et le présent modèle d'éléments finis et les simulations fournis par Abaqus. L'erreur entre B3Dw et Abaqus n'est pas supérieure à 1%.

D'autre part, les modes supérieurs de flambement sont investigués. Pour cela la même section en C est reconsidérée avec une portée fixée à $L = 4m$ et les quatre premiers modes supérieurs de flambement sont recherchés. Les comparaisons entre les prédictions analytiques, B3Dw et Abaqus sont présentées

dans le tableau (5.6). Pour cette longueur, les modes 1 et 4 sont en flexion pure (FP), tandis que les autres modes (2 et 3) sont en flexion- torsion (FT). Les formes de ces modes sont détaillées dans la figure A2 de l'annexe.

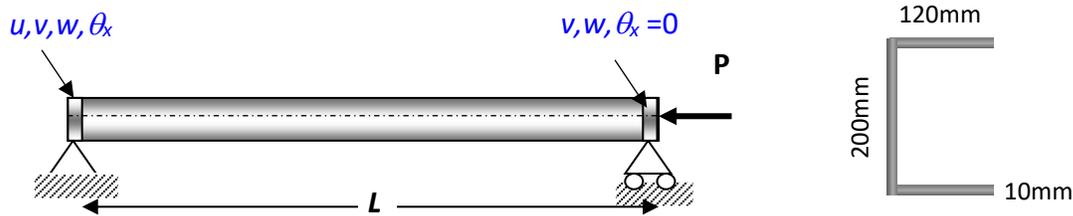


Figure 5.2: barre à une section en C: les conditions aux limite, le chargement appliqué et Les dimensions de la section.

$A = 42,00 \text{ cm}^2$	$I_y = 2654,00 \text{ cm}^4$	$I_z = 600,64 \text{ cm}^4$	$z_c = 0,0 \text{ cm}$
$I_t = 13,95 \text{ cm}^4$	$I_\omega = 38142 \text{ cm}^6$		$y_c = 7,61 \text{ cm}$

Tableau 5.4 : Caractéristiques géométriques et mécaniques de la section C.

L (m)	P_y	P_z	P_θ	$P_{y\theta}$	$P_{cr,th}$ Min($P_z, P_{y\theta}$)	Présent B3Dw	Abaqus B310S	Type de Mode	Ecart (%)
	(kN)								
2	13717,27	3095,90	2269,38	2104,77	2104,77	2104,78	2117,00	FT	0,58
3	6 096,56	1375,96	1470,89	1314,88	1314,88	1314,89	1322,00	FT	0,54
4	3 429,32	773,98	1191,42	1009,65	773,98	773,98	772,77	FP	0,16
5	2 194,76	495,34	1062,07	838,44	495,34	495,35	494,85	FP	0,10
6	1 524,14	343,99	991,80	716,99	343,99	343,99	343,75	FP	0,07
7	1 119,78	252,73	949,43	619,11	252,73	252,73	252,60	FP	0,05
8	857,33	193,49	921,94	536,04	193,49	193,50	193,42	FP	0,04

Tableau 5.5 : Comparaison analytique et numérique des charges critiques de flambement d'une barre ayant une section en C mono-symétrique.

(FT: mode en flexion-Torsion, FP: mode en flexion pure).

Les modes supérieurs de flambement pour $L=4m$					
Mode	P_{cr} (Théorie, kN)	Présent B3Dw	Abaqus B31OS	Type de Mode	Ecart %
1	773,98	773,98	772,77	FP	0,16
2	1009,34	1009,65	1014,60	FT	0,49
3	2104,13	2104,78	2117,00	FT	0,58
4	3095,91	3095,92	3076,40	FP	0,63

Tableau 5.6 : Comparaison analytique et numérique des quatre premiers modes de flambement d'une barre ayant une section en C mono-symétrique.
(FT: mode en flexion-Torsion, FP: mode en flexion pure).

5.2.1.3 Exemple 3: Flambement des barres à section mono-symétrique par rapport à l'axe (z-z)

Le présent exemple vise à examiner le comportement au flambement des barres ayant une section mono-symétrique selon l'axe z-z. Deux sections sont étudiées. La première est une section en I mono symétrique et la seconde est une section en T. Leurs dimensions sont présentées en figure 5.3. Pour les deux sections, la variation de la charge critique est analysée avec une longueur L variant de 2 à 8 m. Le tableau (5.8) compare les charges de flambement de la section en I mono-symétrique. Les solutions analytiques sont obtenues à partir de l'équation (2.22). Afin d'éclaircir cette solution, les charges de flambement non couplées de cette section sont reproduites dans les trois premières colonnes. Les solutions analytiques obtenues sont comparées avec les résultats numériques donnés par B3Dw et le code Abaqus. La même procédure est suivie pour la section transversale en T et les résultats sont donnés dans le tableau (5.10). Pour les deux sections, il est observé que le mode de flambement flexion-torsion contrôle le comportement pour toutes les longueurs considérées. Les charges critiques de flambement déduites des présents modèles sont en bon accord avec ceux donnés par Abaqus. L'erreur maximale ne dépasse pas 1,20%.

Les modes supérieurs de flambement sont examinés pour les deux sections. Pour ce faire, la longueur est fixée à $L = 4 m$ et les quatre premiers modes de flambement sont définis. Les charges de flambement résultantes sont illustrées dans le tableau (5.9) pour la section I mono-symétrique et le tableau (5.11) pour la section en T. On peut voir que tous les modes supérieurs sont en flexion-torsion et qu'aucun

mode de flexion n'est présent dans les quatre premiers modes. Là encore, dans l'analyse des modes supérieurs, la résistance de barre dépend uniquement des modes de torsion en flexion. Les formes des modes de flambage de la section en té sont présentées à la Figure A3 de l'Annexe.

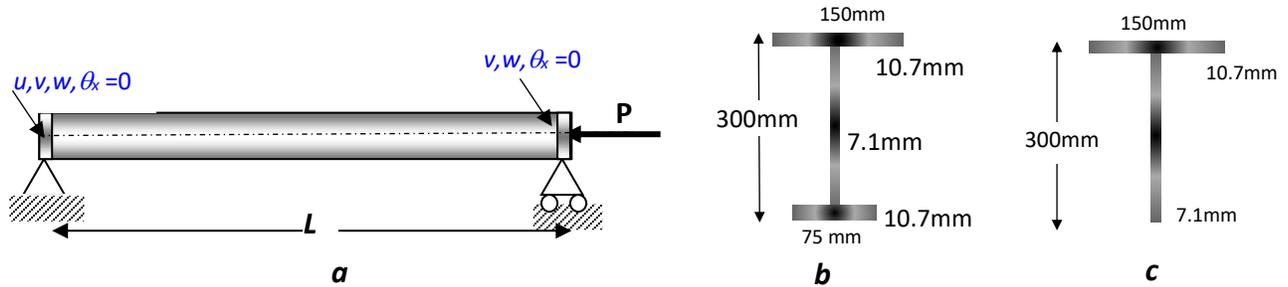


Figure 5.3: barre à une section en mono-symétrique d'axe z-z (a) : les conditions aux limites, le chargement (b) : Les dimensions de la section en I (c) : Les dimensions de la section en Té.

$A = 43,86 \text{ cm}^2$	$I_y = 6011,84 \text{ cm}^4$	$I_z = 339,39 \text{ cm}^4$	$z_c = 8,6 \text{ cm}$
$I_t = 12,51 \text{ cm}^4$	$I_\omega = 27985 \text{ cm}^6$		$y_c = 0 \text{ cm}$

(a)

$A = 36,59 \text{ cm}^2$	$I_y = 3461,3 \text{ cm}^4$	$I_z = 301,8 \text{ cm}^4$	$z_c = 8,37 \text{ cm}$
$I_t = 9,374 \text{ cm}^4$	$I_\omega = 746,98 \text{ cm}^6$		$y_c = 0 \text{ cm}$

(b)

Tableau 5.7 : Caractéristiques géométriques et mécaniques de la section en I mono-symétrique (a), section en Te (b).

L (m)	P_y	P_z	P_θ	$P_{z\theta}$	$P_{cr,th}$	Présent	Abaqus	Type de	Ecart
	(kN)				Min($P_y, P_{z\theta}$)	B3Dw	B31OS	mode	(%)
2	31150,40	1758,56	3280,87	1149,96	1149,96	1149,96	1152,70	FT	0,24
3	13844,62	781,58	2185,65	577,88	577,88	577,88	578,33	FT	0,08
4	7787,60	439,64	1802,32	354,51	354,51	354,51	354,63	FT	0,03
5	4984,06	281,37	1624,89	240,42	240,42	240,42	240,46	FT	0,01
6	3461,16	195,40	1528,52	173,59	173,59	173,59	173,59	FT	0,01
7	2542,89	143,56	1470,40	130,99	130,99	130,99	131,00	FT	0,01
8	1946,90	109,91	1432,68	102,21	102,21	102,21	102,21	FT	0,01

Tableau 5.8. Comparaison analytique et numérique des charges critiques de flambement d'une barre ayant une section en I mono-symétrique. (FT: mode en flexion-Torsion).

Les modes supérieurs de flambement pour $L=4m$					
Mode	P_{cr} (Théorie, kN)	Présent B3Dw	Abaqus B31OS	Type de mode	Ecart %
1	354,51	354,51	354,63	FT	0,03
2	1149,96	1149,96	1152,70	FT	0,23
3	2354,08	2354,10	2369,20	FT	0,63
4	4004,48	4004,50	4053,80	FT	1,20

Tableau 5.9 : Comparaison analytique et numérique des quatre premiers modes de flambement d'une barre ayant une section en I mono-symétrique.
(FT: mode en flexion-Torsion).

L (m)	P_y	P_z	P_θ	$P_{z\theta}$	$P_{cr,th}$	Présent	Abaqus	Type de	Ecart
	(kN)				$\text{Min}(P_y, P_{z\theta})$	B3Dw	B31OS	mode	(%)
2	17934,87	1563,79	459,95	403,15	403,15	403,15	402,99	FT	0,04
3	7971,05	695,02	447,52	328,30	328,30	328,30	328,07	FT	0,07
4	4483,72	390,95	443,17	253,51	253,51	253,51	253,31	FT	0,08
5	2869,58	250,21	441,16	191,03	191,03	191,03	190,90	FT	0,07
6	1992,76	173,75	440,06	144,90	144,90	144,90	144,82	FT	0,06
7	1464,07	127,66	439,40	112,09	112,09	112,09	112,04	FT	0,04
8	1120,93	97,74	438,98	88,64	88,64	88,64	88,61	FT	0,03

Tableau 5.10 : Comparaison analytique et numérique des charges critiques de flambement d'une barre ayant une section en Té. (FT: mode en flexion-Torsion).

Les modes supérieurs de flambement pour $L=4m$					
Mode	P_{cr} (Théorie, kN)	Présent B3Dw	Abaqus B31OS	Type de mode	Ecart %
1	253,51	253,51	253,31	FT	0,08
2	403,14	403,15	402,99	FT	0,04
3	459,86	459,87	460,10	FT	0,05
4	508,78	508,78	510,02	FT	0,24

Tableau 5.11 : Comparaison analytique et numérique des quatre premiers modes de flambement d'une barre ayant une section en Té. (FT: mode en flexion-Torsion).

5.2.1.4 Exemple 4: Flambement des barres à section quelconque (arbitraire)

Cette section transversale arbitraire a été étudiée par Papp [74]. Les propriétés géométriques de cette section transversale sont représentées dans la figure 5.4. Dans cet exemple, les charges critiques de flambement ont été calculées en fonction de l'élanement L variant de 2 à 8 m. Les charges critiques analytique et numérique sont récapitulées dans le tableau (5.12). Le modèle présent est comparé aux simulations Abaqus. Étant donné que la section transversale est arbitraire, les solutions analytiques de la charge de flambement ne sont pas simples. Dans le présent modèle, elles ont été obtenues numériquement par des solutions de l'équation (2.15). À cet effet, les charges de flambement non couplées P_y , P_z et P_θ sont nécessaires. Elles sont données dans le tableau (5.12). Les résultats d'analyse sont inclus dans la colonne 5 à des fins de comparaison. Les résultats analytiques et numériques concordent bien avec celle d'Abaqus. De plus, Papp [74] n'a pris en compte que l'élanement $L = 4$ m et a obtenu une charge de flambement $P_{cr} = 299,16$ kN. Ce résultat est en bon accord avec notre modèle où $P_{cr} = 299,07$ kN est obtenu numériquement et 299,06 de manière analytique. On se rappelle que pour cette section, tous les modes de flambement sont en flexion-torsion. Les déplacements v , w et l'angle de torsion θ_x sont présents dans tous les modes.

Pour cette section, les modes supérieurs de flambement sont évalués pour une longueur de barre $L = 4$ m. Les quatre premiers modes de flambement ont été calculés. Ils sont présentés dans le tableau (5.13). Il est confirmé que tous les modes supérieurs sont également en flexion-torsion. Un bon accord entre les différentes solutions est remarqué. L'erreur ne dépasse pas 1%. Les formes des quatre premiers modes de flambement de cette section sont données en figure A4 de l'annexe.

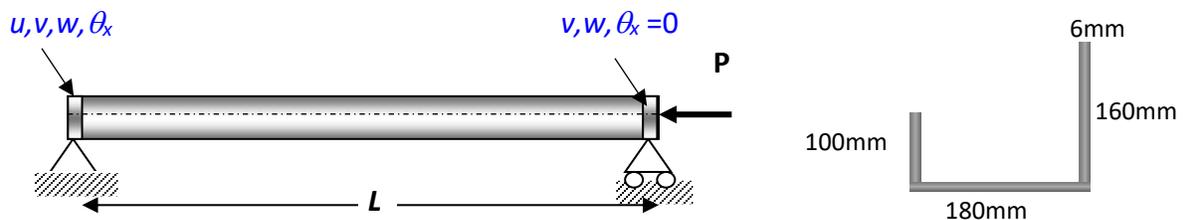


Figure 5.4 : barre à une section quelconque avec conditions aux limites, chargement appliqué et dimensions de la section.

L (m)	P_y	P_z	P_θ	$P_{cr,th}$ (Eq,2.15)	Présent B3Dw	Abaqus B31OS	Type de mode	Ecart (%)
2	2429,11	7575,41	808,82	764,32	764,36	771,94	FT	0,98
3	1079,60	3366,85	452,85	421,51	421,53	421,27	FT	0,06
4	607,28	1893,85	328,27	299,06	299,07	299,13	FT	0,02
5	388,66	1212,07	270,60	239,68	239,69	239,35	FT	0,14
6	269,90	841,71	239,27	204,52	204,52	204,20	FT	0,16
7	198,29	618,40	220,39	179,58	179,57	179,29	FT	0,16
8	151,82	473,46	208,13	149,95	149,89	149,89	FT	0,00

Tableau 5.12 : Comparaison analytique et numérique des charges critiques de flambement d'une barre ayant une section quelconque. (FT: mode en flexion-Torsion).

Les modes supérieurs de flambement pour $L=4m$					
Mode	P_{cr} (Théorie, kN)	Présent B3Dw	Abaqus B31OS	Type de mode	Ecart %
1	299,06	299,07	299,13	FT	0,02
2	608,91	608,65	607,55	FT	0,18
3	764,32	764,37	765,22	FT	0,11
4	1531,36	1531,61	1534,80	FT	0,21

Tableau 5.13 : Comparaison analytique et numérique des quatre premiers modes de flambement d'une barre ayant une section quelconque. (FT: mode en flexion-Torsion).

5.2.2 Validité des solutions analytiques dans le cas de déversement

L'objectif de cette section est de valider et d'étudier la précision et l'efficacité des solutions analytiques proposées pour l'analyse des modes supérieurs de déversement. Pour ce faire, on considère une poutre simplement appuyée à une section transversale bi-symétrique (IPE300) sollicitée par les cas de chargements : une charge uniformément répartie et une charge concentrée, comme indiqué dans la figure 5.5. Les mêmes propriétés du matériau (l'acier) sont utilisées. L'excentricité des charges verticales par rapport au centre de torsion est prise en compte.

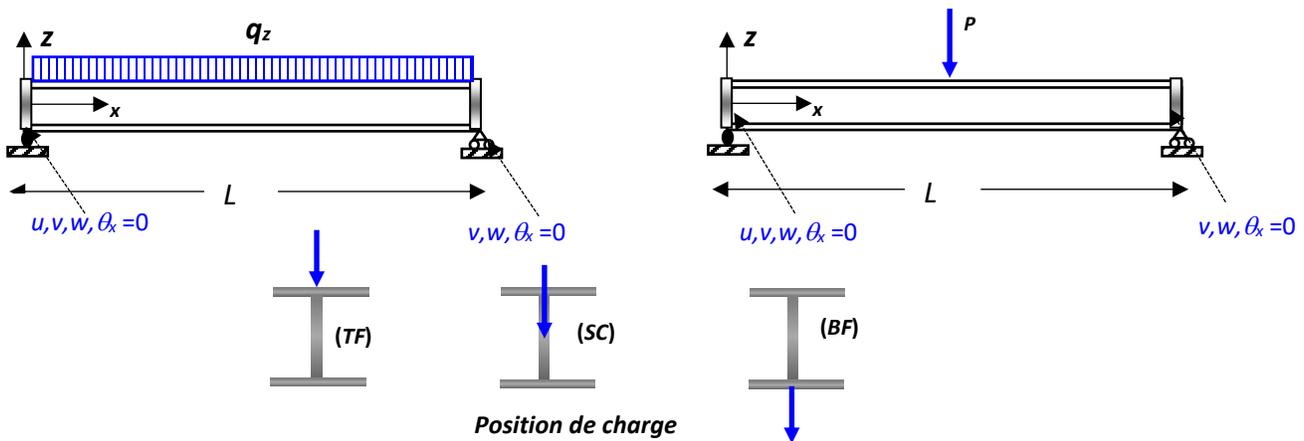


Figure 5.5: Poutre à section transversale bi-symétrique sollicitée par une charge uniformément répartie et une charge concentrée toute deux appliquées au niveau : de la semelle supérieure (TF), du centre de torsion (SC), et de la semelle inférieure en (BF).

Les solutions sont vérifiées ci-dessous en suivant la même procédure que pour l'analyse de flambement considérée précédemment. Dans cette analyse, des comparaisons sont établies avec les solutions analytiques proposées et les solutions obtenues par éléments finis en utilisant B3Dw, Abaqus et Adina. Dans un premier temps, on étudie la variation du moment critique de déversement en fonction de la longueur L . Dans cette étude paramétrique, la longueur des poutres L varie de 4 m à 8 m. Les charges peuvent être appliquées au niveau : de la semelle supérieure, du centre de torsion, ou de la semelle inférieure.

Les résultats sont illustrés dans la figure 5.6 pour les 3 positions de charge. Le cas de charge uniforme est illustré à la Figure 5.6-a et le cas de charge concentrée est présenté à la Figure 5.6-b. On remarque

que dans ces cas de charge, la résistance au déversement est meilleure lorsque la charge est appliquée au niveau de la semelle inférieure et que les valeurs les plus basses sont obtenues lorsque les charges sont appliquées au niveau de la semelle supérieure.

Pour chaque cas et position de charge, un bon accord est constaté entre les solutions analytiques et numériques proposées et le code Abaqus. Cependant, les simulations d'Adina surestiment le moment de déversement lorsque la charge est appliquée au niveau de la semelle inférieure. La différence n'est pas importante et diminue avec l'élanement.

L'étude est suivie par une évaluation des modes supérieurs de déversement pour une poutre à une portée fixe $L=6\text{m}$, en tenant compte de l'effet d'applications de chargement.

Dans cette analyse les quatre premiers modes supérieurs du déversement sont recherchés en termes de positions de charge pour les deux cas de charge. Les résultats du cas de charge uniforme sont présentés sur les figures (5.7-a,c), suivis du cas de charge concentrée sur la figure (5.8-a,c). En ordonnée, les moments de déversement non dimensionnels $M_{cr}(k) / M_{cr,ref}$ sont rapportés. $M_{cr}(k)$ indique le moment de déversement du mode k et $M_{cr,ref}$ est le moment critique de déversement du premier mode pour la position de chargement sur le centre de torsion (SC). Ces valeurs sont respectivement $M_{cr,ref} = 94,23$ kN.m pour le cas de charge uniforme et $M_{cr,ref} = 113,22$ kN.m pour le cas de charge concentrée. À partir de ces courbes on remarque que:

- Tous les résultats ont la même tendance en fonction de mode k et de la position de chargement. Un bon accord est observé entre les présents modèles (analytique, B3Dw) et les autres codes d'éléments finis.
- Une différence est constatée avec le code Adina lorsque la charge transversale est uniforme et appliquée au niveau de la semelle supérieure ou inférieure. Ce constat a également été rapporté dans [75]. L'erreur maximale de 8% est obtenue dans le cas où la charge uniforme est appliquée à la semelle supérieure (Figure 5.7-b).
- Lorsque le chargement est appliqué au niveau du centre de torsion ou semelle supérieure, les solutions analytiques sont bien concordantes avec les résultats numériques. Cependant, une petite différence est observée dans le cas de la charge concentrée lorsque la charge est appliquée au niveau de la semelle inférieure. La différence n'est pas supérieure à 3%. Cette différence reste acceptable.

Des constatations intéressantes se dégagent de la comparaison de l'effet de la variation du moment de déversement en fonction de mode k :

- Dans le cas d'une charge uniformément répartie, l'augmentation du moment de déversement M_{cr} est très sensible aux positions de charge.
- Dans le cas d'une charge concentrée, l'effet de la position de la charge est présent en mode impair, tandis que pour le mode pair, le moment de déversement est indépendant de la position de charge. On obtient pour $k = 2$ et $k = 4$, le rapport est respectivement de 3,93 et 15,41 pour les trois positions de charge (Figure 5.8-a,c). Ces résultats importants sont en accord avec les solutions analytiques dérivées dans (3.36).
- Sous une charge uniformément répartie (Figure 5.7), l'augmentation du rapport $M_{cr}(k)/M_{cr,ref}$ dans le mode 4 par rapport au 1^{er} mode atteint respectivement 12,77, 13,30 et 13,86 pour les positions TF, SC et BF.
- Dans le cas d'une charge concentrée (Figure 5.8), l'amélioration est plus importante. En mode 4, le rapport atteint la même valeur 15,41 pour les 3 positions de charge.

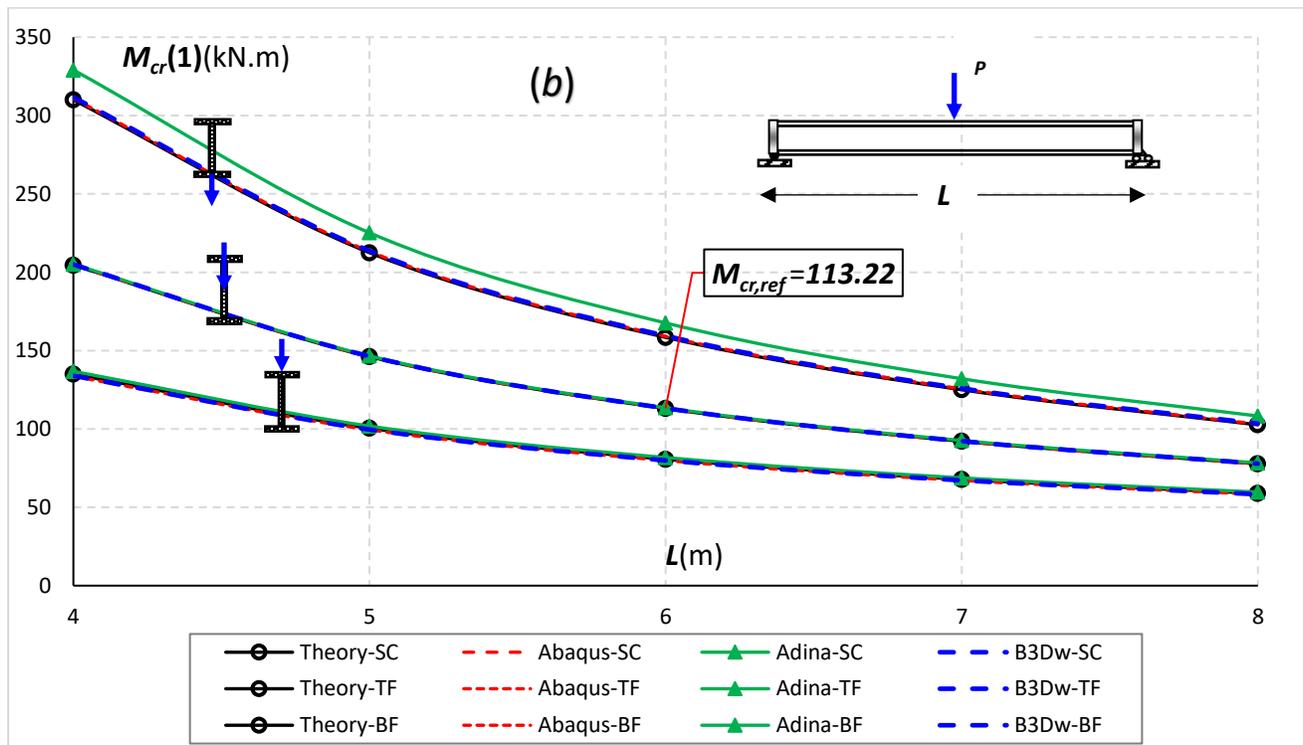
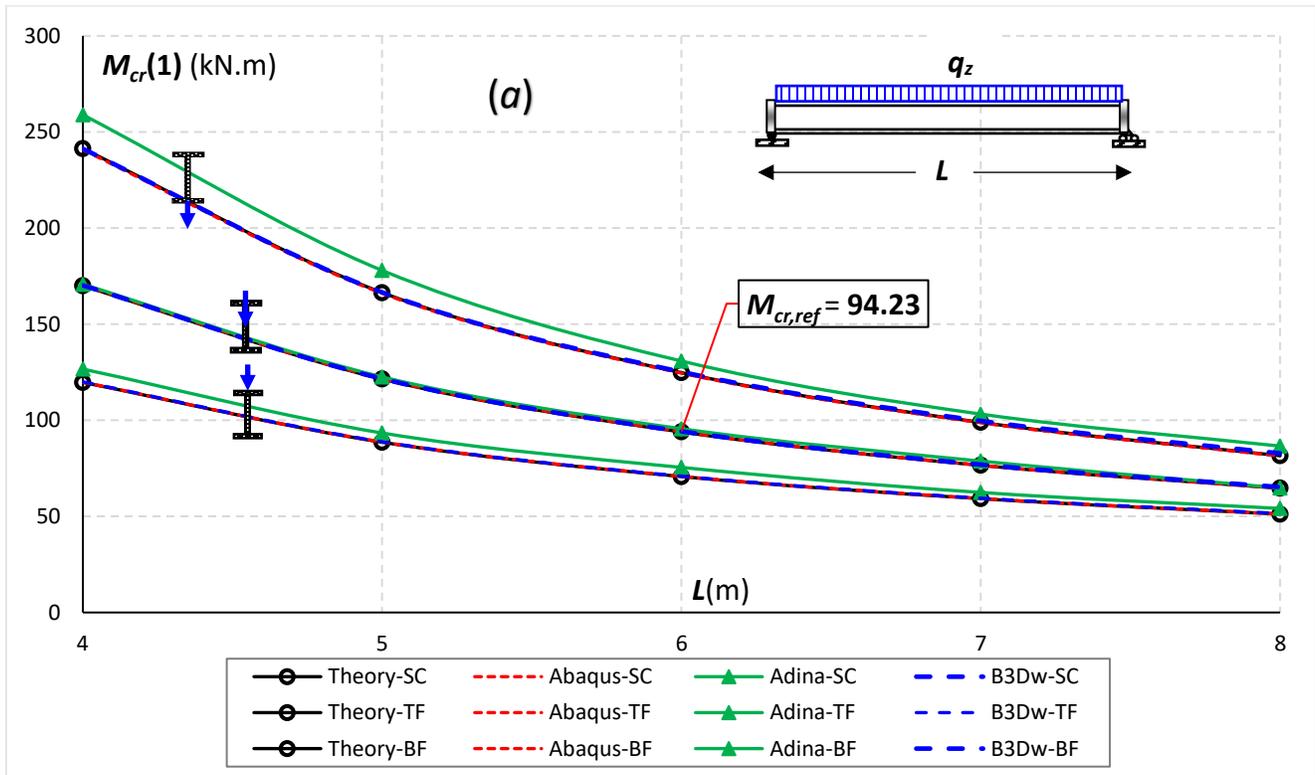
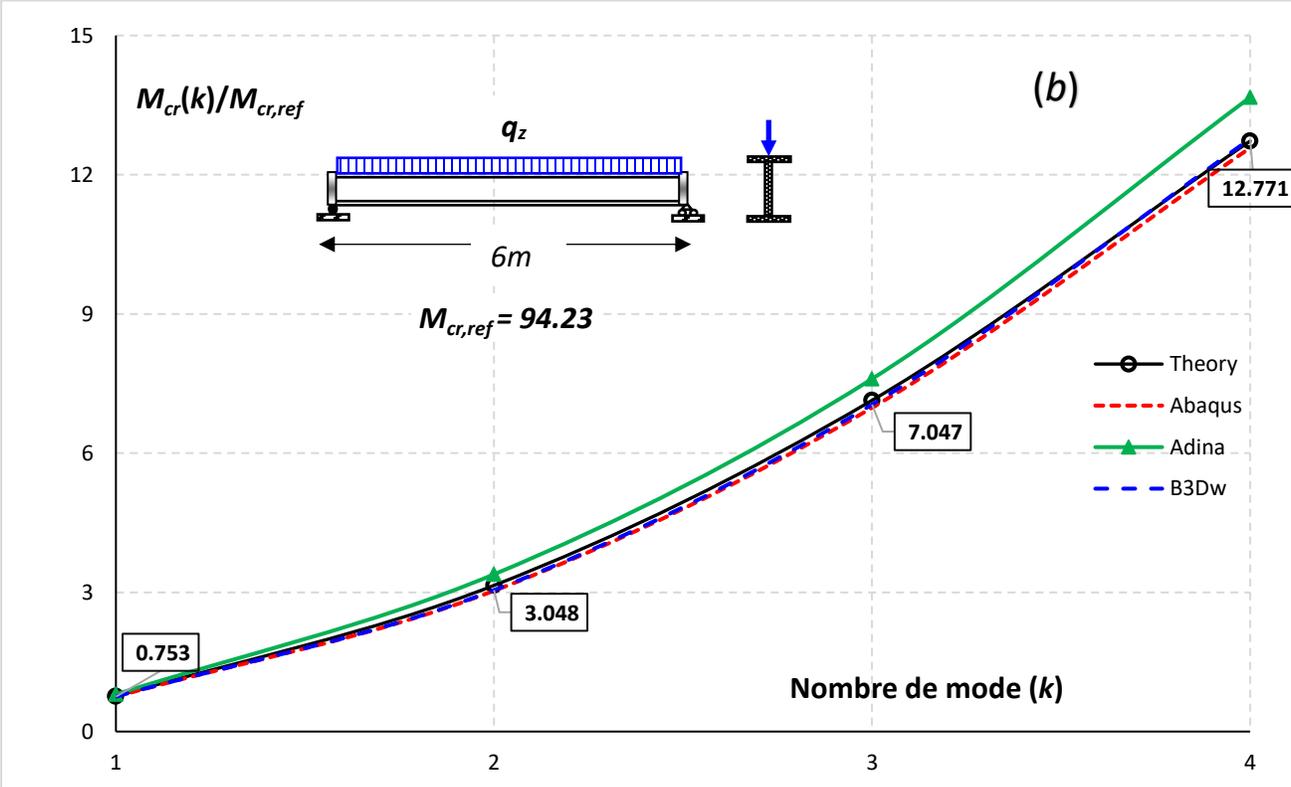
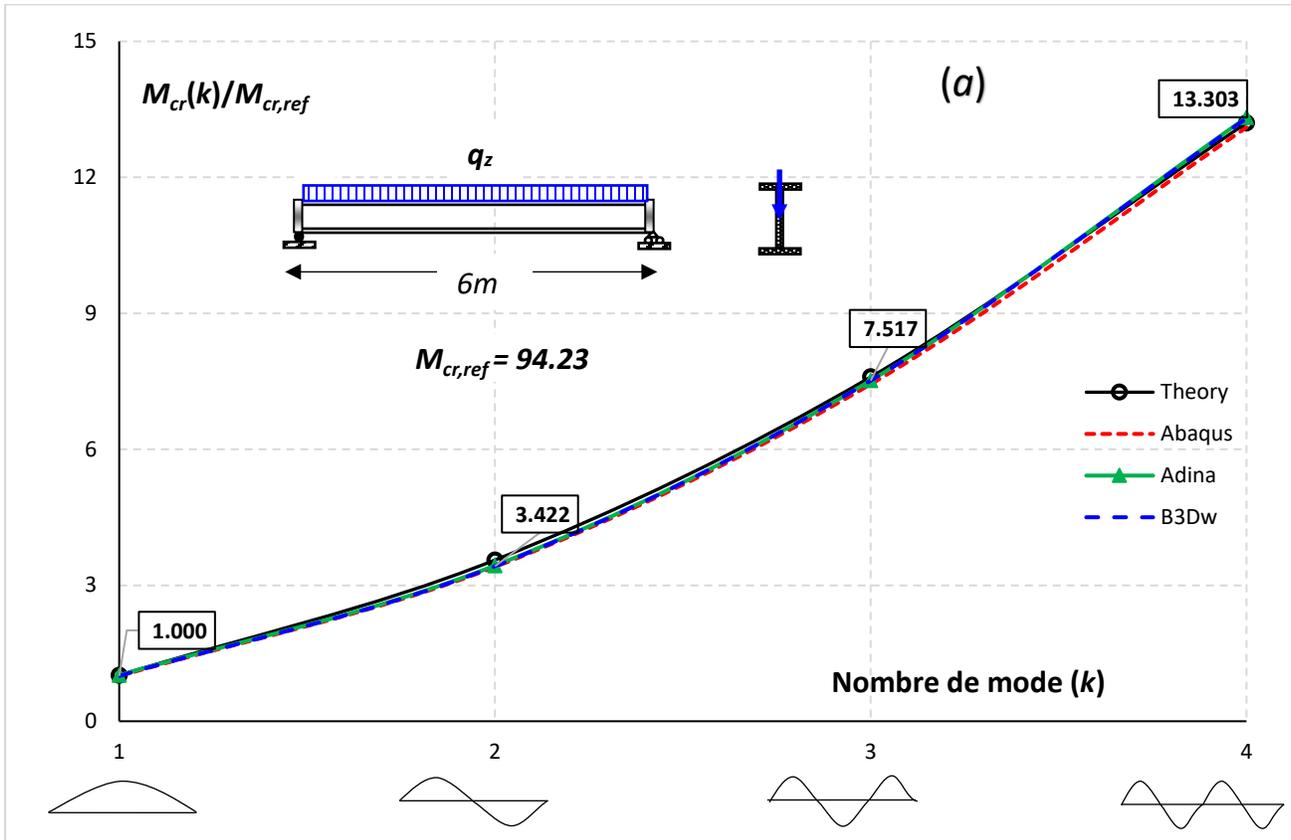


Figure 5.6: Variation du moment critique de déversement en fonction de la longueur L . (a) cas de la charge uniformément répartie, (b) cas de la charge concentrée.



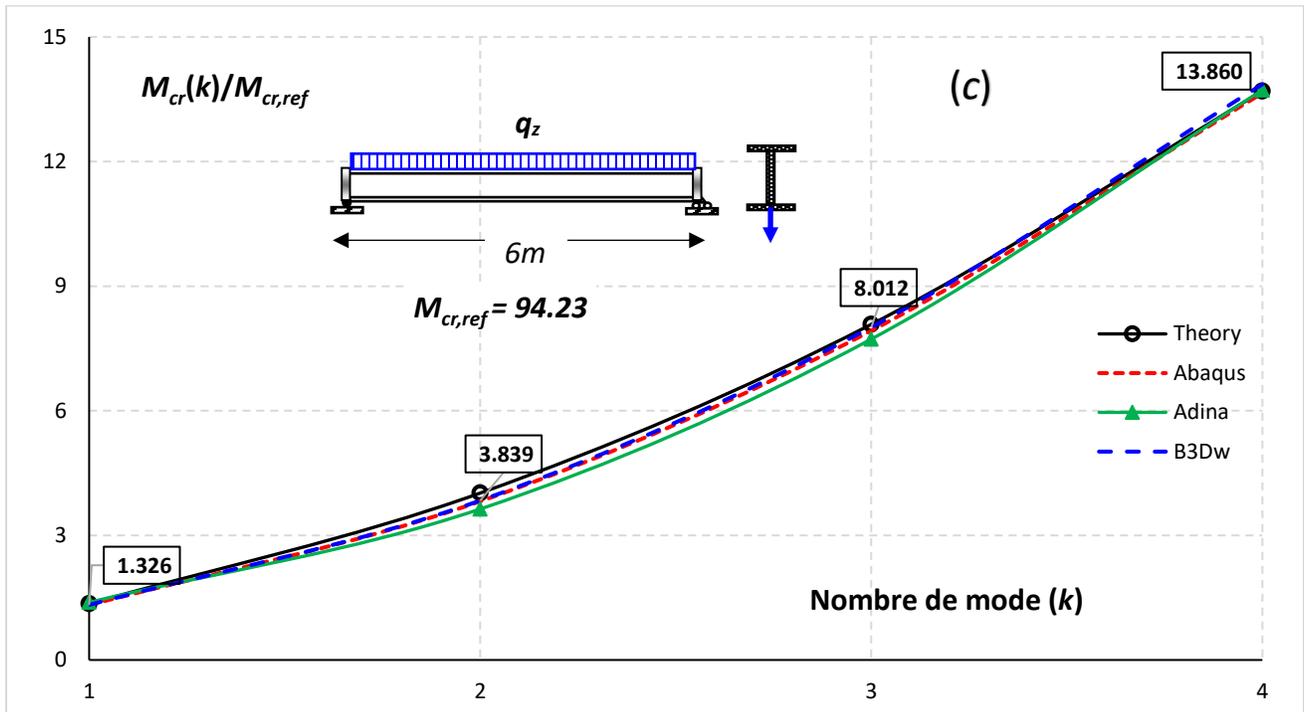
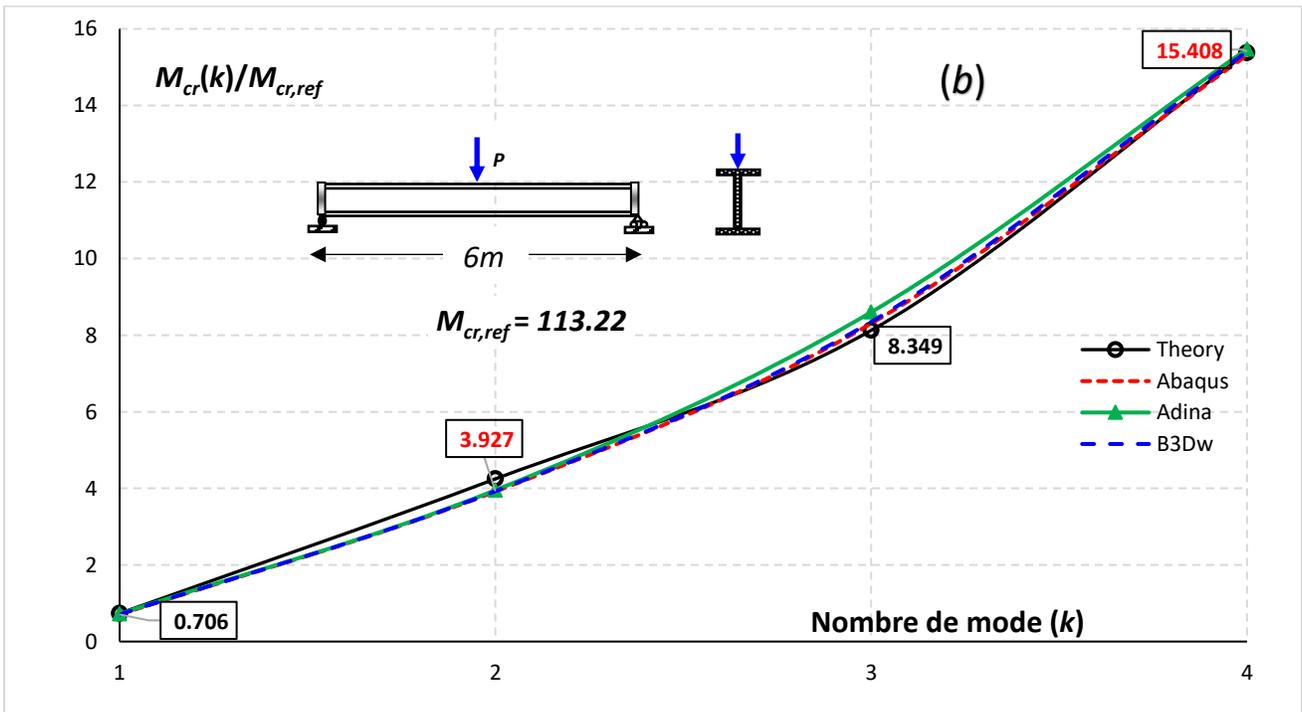
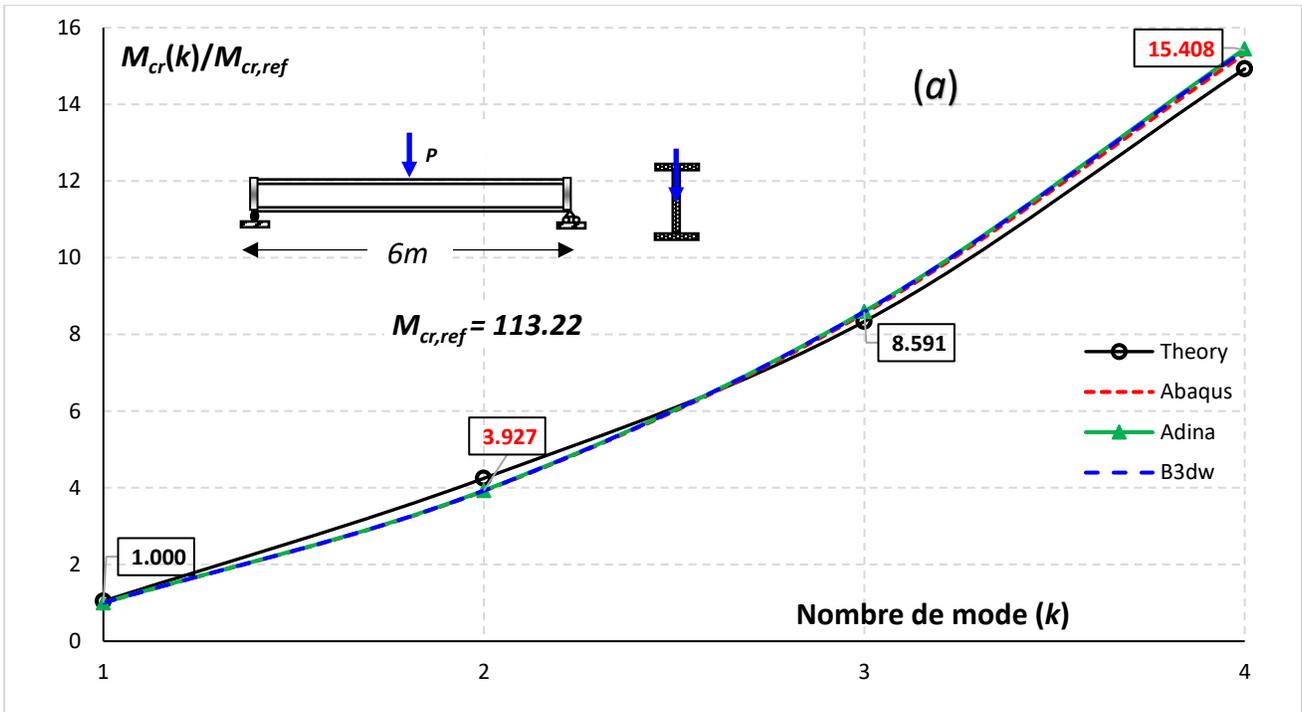


Figure 5.7 : Poutre bi-symétrique sollicitée par une charge uniformément répartie : Variation des moments critiques analytiques et numériques en fonction du mode de flambage k . (a): Centre de torsion (SC), (b): Semelle supérieure (TF) et (c): Semelle inférieure (BF).



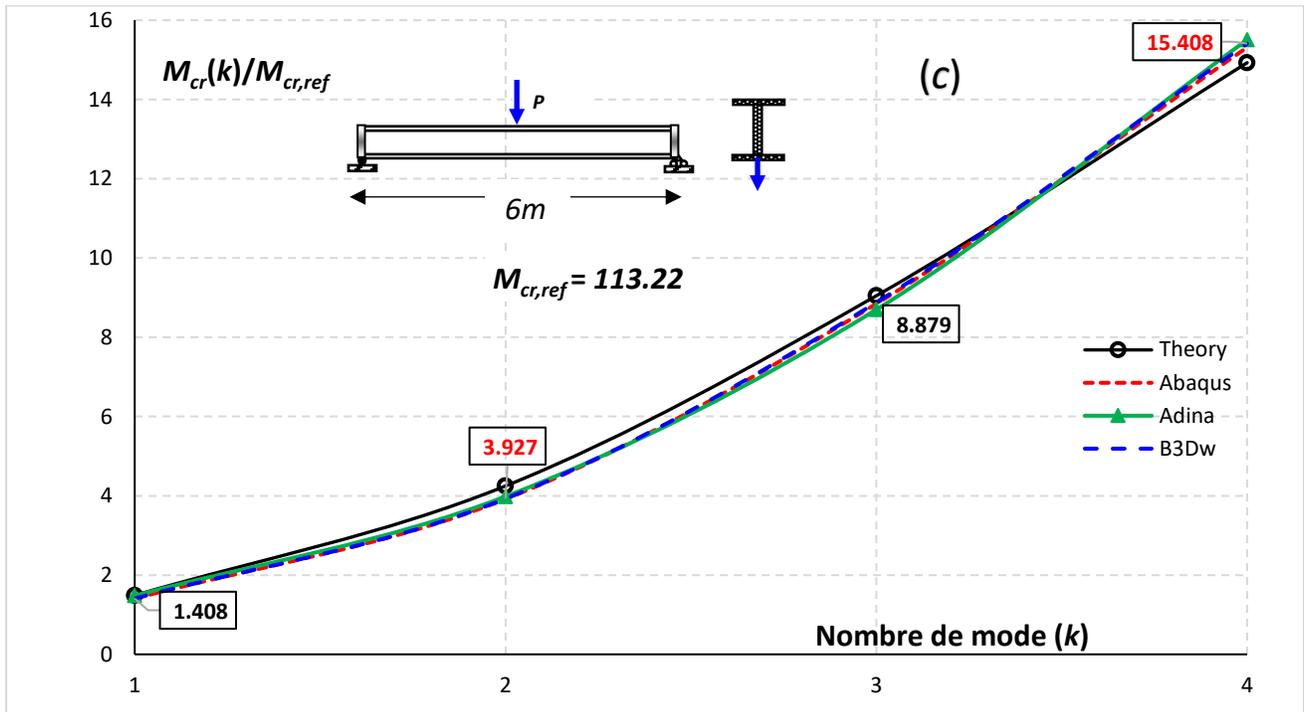


Figure 5.8: Poutre bi-symétrique sollicitée par une charge concentrée : Variation des moments critiques analytiques et numériques en fonction du mode de flambage k .
 (a): Centre de torsion (SC), (b): Semelle supérieure (TF) et (c): Semelle inférieure (BF).

La même étude a été rapportée pour la même poutre sollicitée cette fois-ci en ses extrémités par deux moments égaux (figure 5.9). Les solutions analytiques sont obtenues à partir de l'équation (3.48).



Figure 5.9: Poutre à section transversale bi-symétrique sollicitée par deux moments égaux.

La figure 5.10 donne la variation du moment critique en fonction de la longueur L . La figure 5.11 expose la variation du moment de déversement en fonction du mode k . On peut vérifier à nouveau que:

- Le moment critique de déversement diminue lorsque L augmente
- Les résultats obtenus par les présents modèles, Abaqus et Adina sont en totale concordance.
- L'augmentation du rapport $M_{cr}(k)/M_{cr,ref}$ dans le mode 4 par rapport au 1^{er} mode est de 10,16.

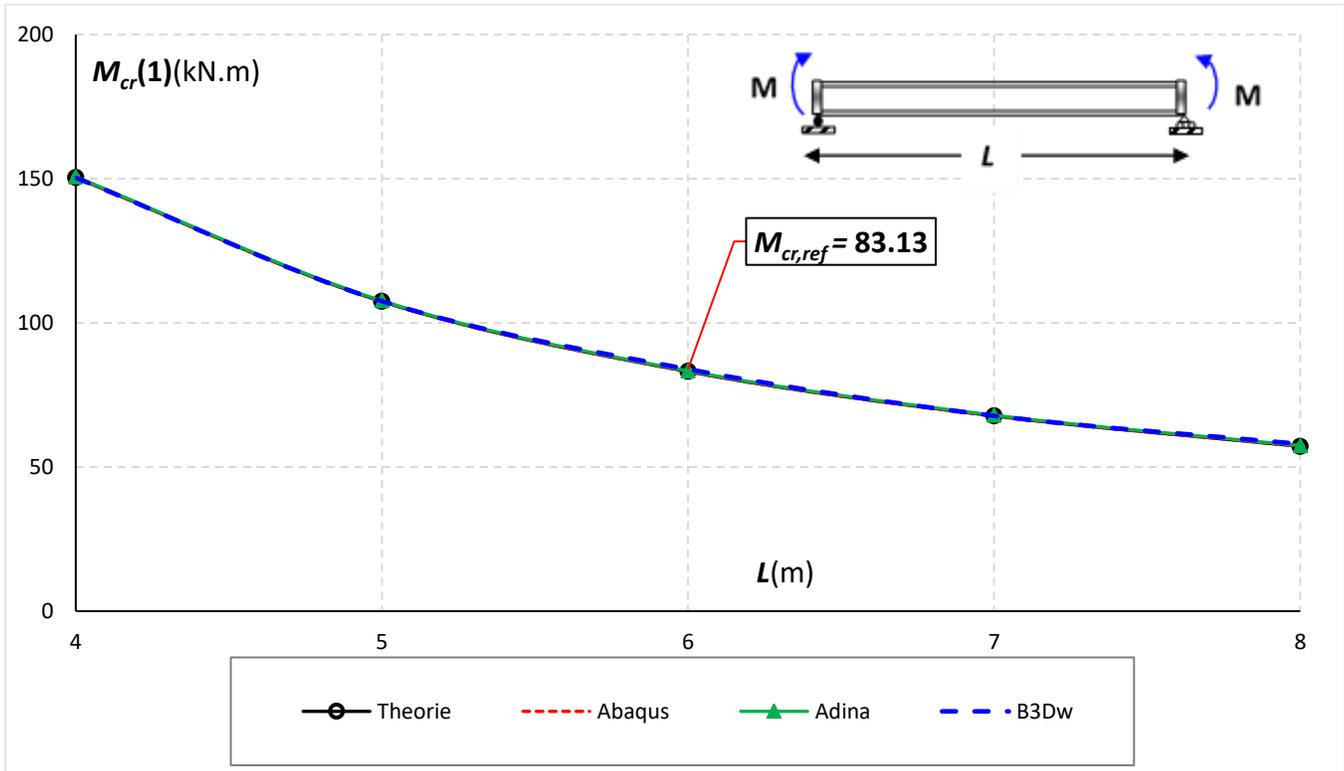


Figure 5.10: Variation du moment critique de déversement en fonction de la longueur L .

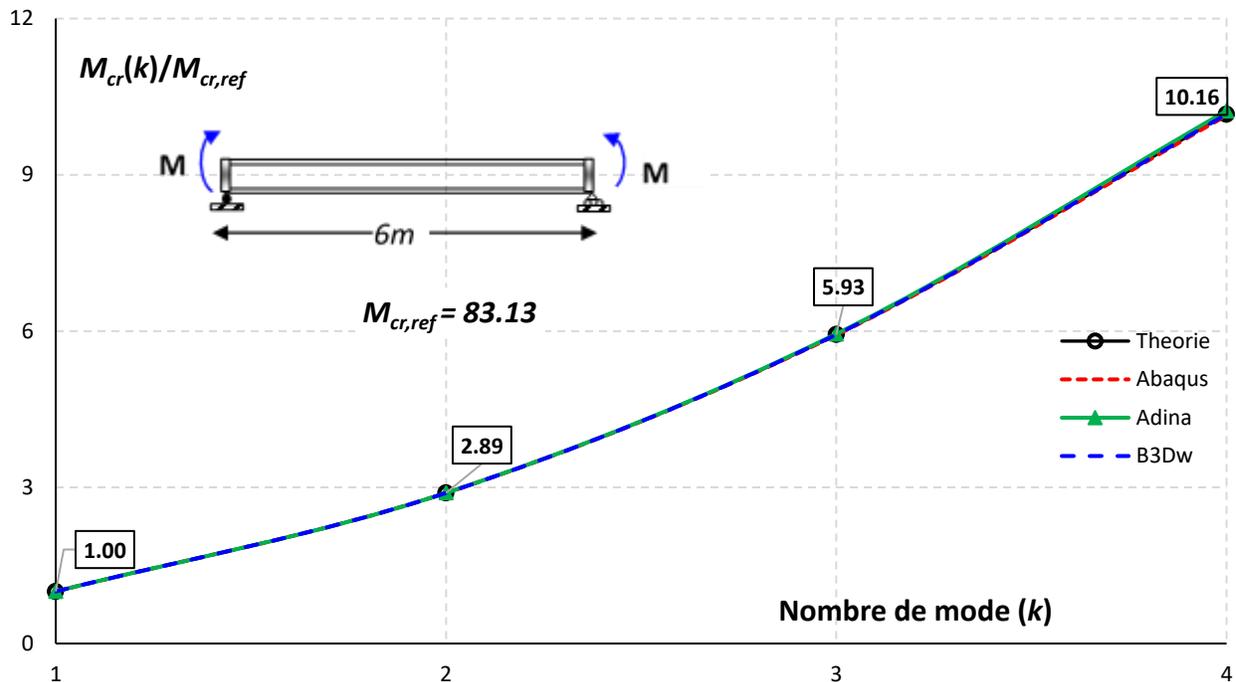


Figure 5.11 : Poutre bi-symétrique sollicitée par deux moments égaux : Variation des Moments critiques analytiques et numériques en fonction du mode de flambage k .

Dans tous les exemples étudiés, notre estimation des modes supérieurs de flambement et de déversement est en général en bon accord avec les résultats numériques. Ces modes supérieurs peuvent conduire à une amélioration plus efficace des phénomènes d'instabilité des poutres. Ce point de vue sera traité dans la section ci-dessous.

5.3 Effets des maintiens latéraux et contrôle des instabilités

Afin d'évaluer l'influence des maintiens latéraux sur la résistance au flambement et au déversement des poutres à paroi mince, justifiant, par la même occasion, l'importance des modes supérieurs de flambement et de déversement, des exemples sont présentés dans cette partie. La détermination des charges critiques de flambement et déversement est effectuée en se basant sur les modèles proposés dans cette approche qui sont ensuite incluses dans l'évaluation de coefficient de réduction afin de déterminer la résistance de la poutre. Dans l'analyse de déversement, l'effet de la position de la charge est pris en compte. Dans cette étude, seules les sections compactes sont prises en compte les sections de classe 4 ne sont pas abordées du fait que le voilement local devient le critère déterminant pour ces classes de section.

5.3.1 Incidence sur la résistance au flambement

5.3.1.1 Exemple 1: la résistance au flambement des poutres simplement appuyées retenues et non retenues latéralement.

On considère une poutre de longueur totale $L = 9\text{m}$ et de section double symétrique, avec les dimensions suivantes ($h = 34,80$, $b = 39$, $t_f = 1,40$, $t_w = 1,40$), la nuance d'acier étant S235 ($f_y = 235\text{ MPa}$). La poutre est sollicitée par une charge de compression axiale. La résistance de la poutre au flambement est étudiée dans des conditions non maintenue (Figure 5.12, cas 1) et maintenue en présence des maintiens latéraux ou autrement dit des appuis intermédiaires. (Figure 5.12, cas 2 à 4). Les maintiens sont situés à mi-hauteur de la poutre. Pour isoler l'effet des maintiens sur la poutre, une rigidité nulle en flexion et en torsion est imposée aux assemblages de poutre-maintien (c'est-à-dire que les maintiens sont très rigides). Les conditions aux limites adoptées aux positions des maintiens sont illustrées à la figure 5.12. Des analyses de flambement linéaire sont effectuées à l'aide de B3dw afin d'examiner les effets de maintiens sur les charges critiques des poutres. Ces charges de flambement résultantes sont utilisées dans l'évaluation de la capacité portante de la barre en utilisant la méthode adaptée dans L'EUROCODE 3.

Les résultats obtenus pour différentes configurations sont présentés au tableau 5.14. Dans ce tableau les charges de flambement analytiques et numériques P_y , P_z et P_θ sont examinées pour chaque configuration. Les charges de flambement obtenues sont utilisées dans le calcul des coefficients de réduction χ calculés selon l'équation 2.24. Ensuite, La résistance de la barre $N_{b,rd}$ est obtenue pour chaque cas.

La première observation concerne la barre sans retenue qui se flambe selon le premier mode. Le mode de flambement critique est en flexion autour de l'axe faible suivi par un mode en torsion. Pour cette barre, la valeur du coefficient de réduction est proche de 0,53. La perte due au flambement est proche de **47%**.

La deuxième observation porte sur l'effet des appuis latéraux sur la résistance au flambement qui se vérifie très bien dans le cas (2-4) puisque d'une part, les élancements réduits observés diminuent avec l'augmentation de nombre des maintiens ; et d'autre part, le coefficient de réduction et la résistance au flambement augmentent avec l'ajout des maintiens. De façons chiffrées, le passage d'une poutre sans retenue à une poutre avec une seule retenue puis deux retenues, augmente la résistance respectivement de 49% et 53%. Ici, il est intéressant d'observer que le mode de flambement est passé à $k=2$, $k=3$.

Dans le dernier cas, des maintiens dans toutes les directions ont été ajoutés et la capacité de la barre est améliorée (la perte n'est que de 11%). Cette valeur est acceptable et on peut conclure que l'effet de l'instabilité due au flambement est réduit au minimum.

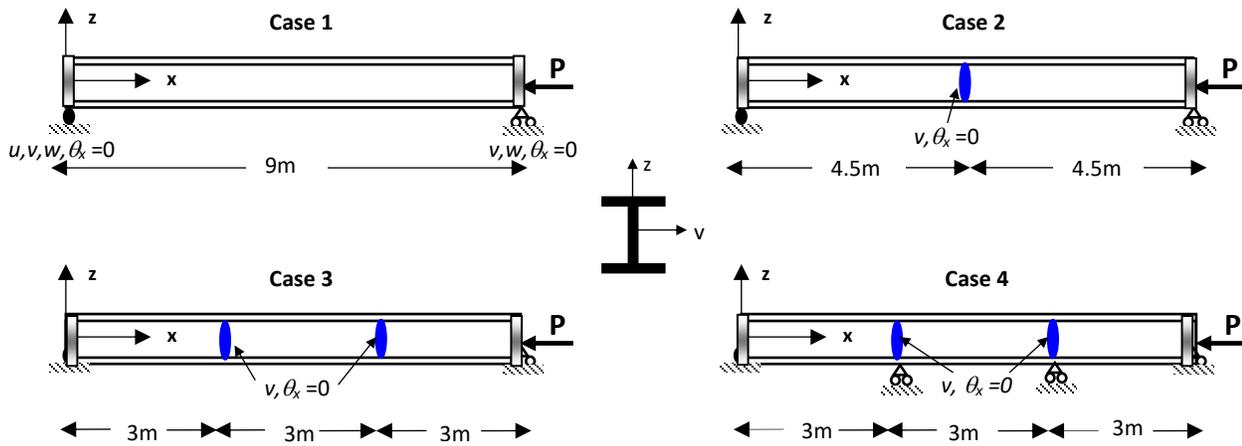


Figure 5.12: Poutre avec et sans maintiens latéraux, Conditions aux limites.

cas	L_y	L_z	L_θ	Af_y	Analytique			B3Dw		
					P_y	P_z	P_θ	P_y	P_z	P_θ
1	9	9	9	3664.36	8896.81	3544.08	6133.80	8896.81	3544.08	6133.79
2	9	4.5	4.5		8896.81	14176.33	15643.57	8896.81	14176.33	15643.57
3	9	3	3		8896.81	31896.75	31493.18	8896.81	31896.75	31493.18
4	3	3	3		80071	31896.75	31493.18	80071.32	31896.75	31493.18

Tab (cont)	$\bar{\lambda}_y$	$\bar{\lambda}_z$	$\bar{\lambda}_\theta$	χ_y	χ_z	χ_θ	χ	présent $N_{b,rd}$	$\alpha_{cr}=P_{cr}/Af_y$	Perte de résistance
	0.642	1.017	0.773	0.816	<u>0.530</u>	0.596	0.530	1942.11	0.97	47%
	0.642	0.508	0.484	0.816	0.838	<u>0.791</u>	0.791	2898.51	4.27	21%
	0.642	0.339	0.341	<u>0.816</u>	0.929	0.893	0.816	2990.12	2.43	18%
	0.214	0.339	0.341	0,99	0.929	<u>0.893</u>	0.893	3272.00	8.59	11%

Tableau 5.14 : Capacité portante d'une barre simplement appuyée sans et avec maintiens latéraux en flexion-torsion.

5.3.1.2 Exemple 2: la résistance au flambement des poutres consoles retenues et non retenues latéralement.

Dans cet exemple, l'effets des maintiens latéraux sur la résistance au flambement d'une barre console est étudié. La barre à une portée $L = 12\text{m}$ et une section **HEA 500** ($h = 490$, $b = 300$, $t_f = 23$, $t_w = 12\text{mm}$). À l'extrémité bloquée de la barre, tous les degrés de liberté (7 DDL) de déplacement, de rotation et de gauchissement sont bloqués. La barre est étudiée dans deux conditions sans et avec des maintiens latéraux. La barre sans maintiens est illustrée dans le cas 1 à la figure 5.13. Cependant, les cas 2-6 illustre les cinq configurations pour des barres auxquelles sont attachés des maintiens.

Pour chaque configuration, les charges de flambement sont calculées et la résistance de la barre est examinée. Dans ce cas, aucune solution analytique précise pour les charges de flambement n'est disponible. C'est la raison pour laquelle seules les charges de flambement numériques sont reportées dans le tableau 5.15. Elles sont obtenues à partir de l'élément fini de notre modèle (B3Dw). Ensuite, Les

charges de flambement sont utilisées dans le calcul des coefficients de réduction afin d'évaluer la capacité portante $N_{b,rd}$ des barres pour chaque cas.

Dans le cas d'une poutre sans retenues (cas 1), la charge critique de flambement est autour de l'axe faible z-z. Cette valeur est très basse ($P_z = 373 \text{ kN}$). Ceci conduit à un très faible facteur de réduction $\chi = \chi_z = 0.073$. La perte due au flambement est très importante (93%). Lorsque les maintiens sont fournis dans les cas 2 et 3, la résistance au flambement des barres a été améliorée et la perte due au flambement a été réduite à 54% et 48% respectivement. De plus, on remarque que dans le cas 3, la charge critique de flambement est autour de l'axe fort y-y ($\chi_{\min} = \chi_y = 0,52$). Cela signifie que des maintiens sont nécessaires dans les 3 directions telles qu'adoptées dans les derniers cas (cas 4-6). La résistance au flambement de la barre peut être bien améliorée comme dans le cas 6 où les maintiens latéraux sont placés à 3, 6, 9 et 12 m. Dans ce dernier cas, l'effet de flambement sur la capacité portante est réduit au minimum (seulement 13% de perte en résistance parfaite).

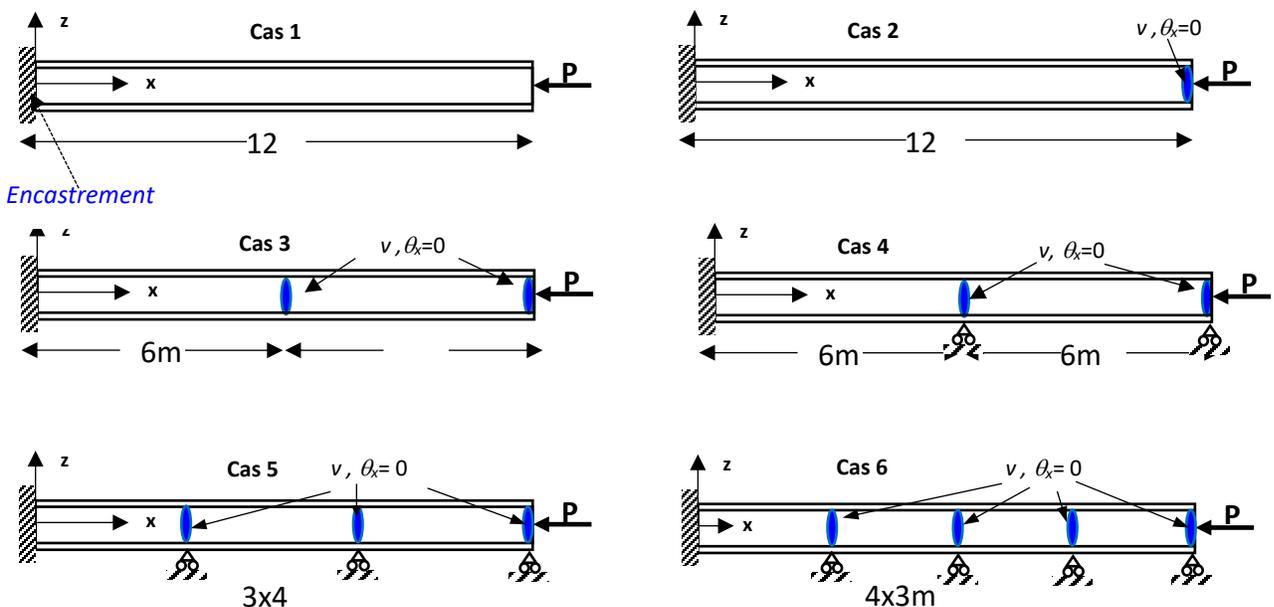


Figure 5.13: Poutre avec et sans maintiens latéraux, position et conditions aux limites.

cas	Af_y	$B3Dw$			$\bar{\lambda}_y$	$\bar{\lambda}_z$	$\bar{\lambda}_\theta$
		P_y	P_z	P_θ			
1	4641	3129.44	373.14	5480.75	1.218	3.527	0.920
2		3129.44	3053.43	8440.04	1.349	1.436	0.981
3		3129.44	7730.64	13604.13	1.218	0.775	0.584
4		25608.15	7730.64	13604.13	0.426	0.775	0.584
5		1277792	15237.47	21892.69	0.060	0.552	0.460
6		215635.60	25701.48	33446.18	0.15	0.42	0.37

Tab (cont)	χ_y	χ_z	χ_θ	χ	Présent $N_{b,rd}$	$\alpha_{cr}=P_{cr}/Af_y$	Perte de résistance
1	0.519	0.073	0.509	0.073	339.80	0.08	93%
2	0.519	0.461	0.616	0.461	2137.90	0.66	54%
3	0.519	0.740	0.721	0.519	2408.26	0.67	48%
4	0.916	0.678	0.714	0.678	3146.58	1.66	28%
5	1	0.813	0.801	0.801	3719.39	4.71	20%
6	1	0.884	0.866	0.866	4019.32	7.20	13%

Tableau 5.15: Capacité portante d'une barre encastree sans et avec maintiens.

5.3.2 Incidence sur la résistance au déversement

Une évaluation de l'effet des maintiens latéraux sur la résistance au déversement d'une poutre simplement appuyée revêt une importance pratique. Pour ce faire, une poutre de section bi-symétrique à parois minces (**IPE 500**) et de longueur $L = 12$ m, est investiguée dans cet exemple. La poutre est soumise à une charge uniformément répartie appliquée au niveau : du centre de torsion, de semelle inférieure et semelle supérieure. De plus, la poutre est retenue latéralement, les conditions aux limites et la position des maintiens pour les 4 configurations sont illustrées à la figure 5.14. Les moments résistants au déversement $M_{b,rd}$ sont rapportés pour chaque cas et normalisés au moment de flexion maximale ($M_{rd} = 515,59$ kNm). Les résultats obtenus pour les différentes configurations sont présentés à la figure 5.15.

On remarque que dans le cas d'une poutre sans retenue (cas 1), La perte due au déversement est très importante et dépend de la position de la charge. Il atteint respectivement 75, 70 et 65% pour les positions de charge semelle supérieure, centre de torsion et semelle inférieure. En présence des retenues, la résistance au déversement augmente de façon non linéaire en fonction du nombre de retenues. En présence de 3 retenues, on constate que la perte n'est que de 12%, pour toutes les positions de charge. La même étude a été rapportée pour la même poutre sous une charge concentrée et dans les mêmes conditions aux limites que celles de la figure 5.14. La même tendance a été observée, mais l'amélioration de la résistance au déversement est la meilleure. En présence de 3 maintiens (cas 4), la perte n'est que de 9% (Figure 5.16).

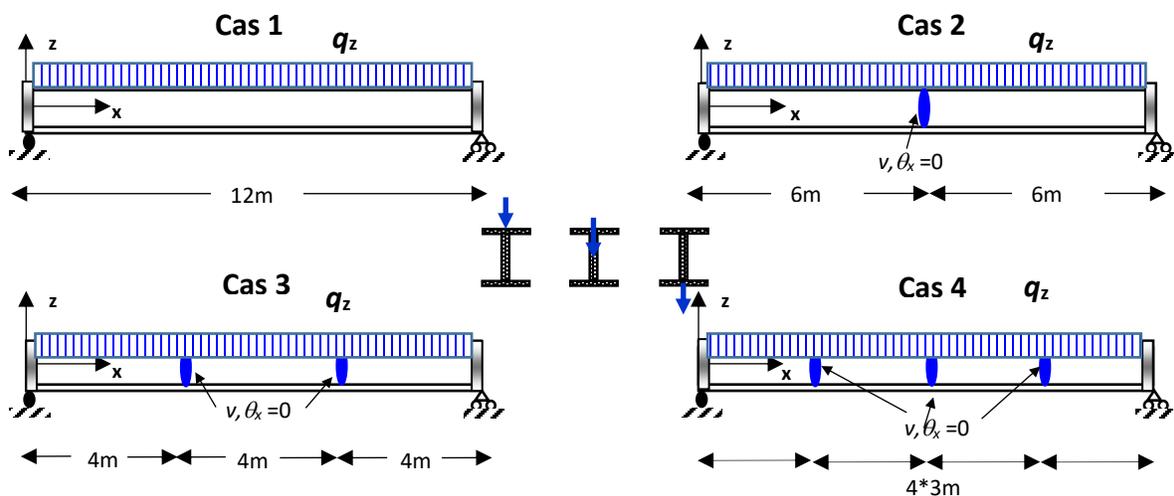


Figure 5.14: Poutre sans et avec maintiens avec conditions aux limites et positions des appuis intermediaires.

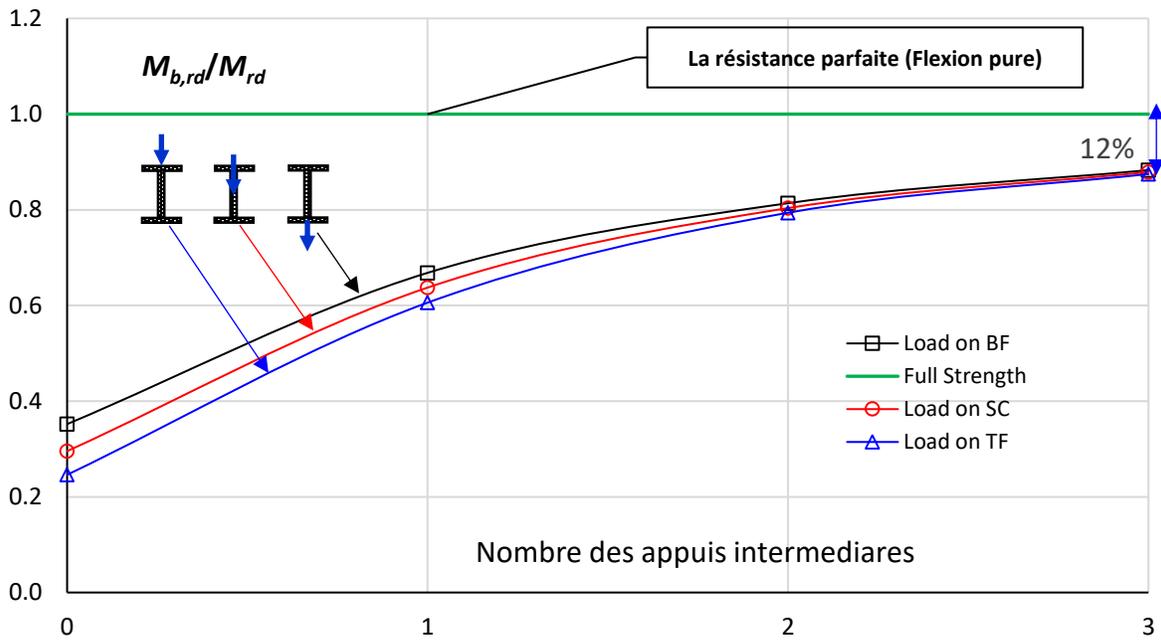


Figure 5.15: Poutre sous une charge uniforme: l'effet des appuis intermédiaires et la position de la charge sur la résistance au déversement.
 (SC): Centre de torsion, (TF): Semelle supérieure et (BF): Semelle inférieure.

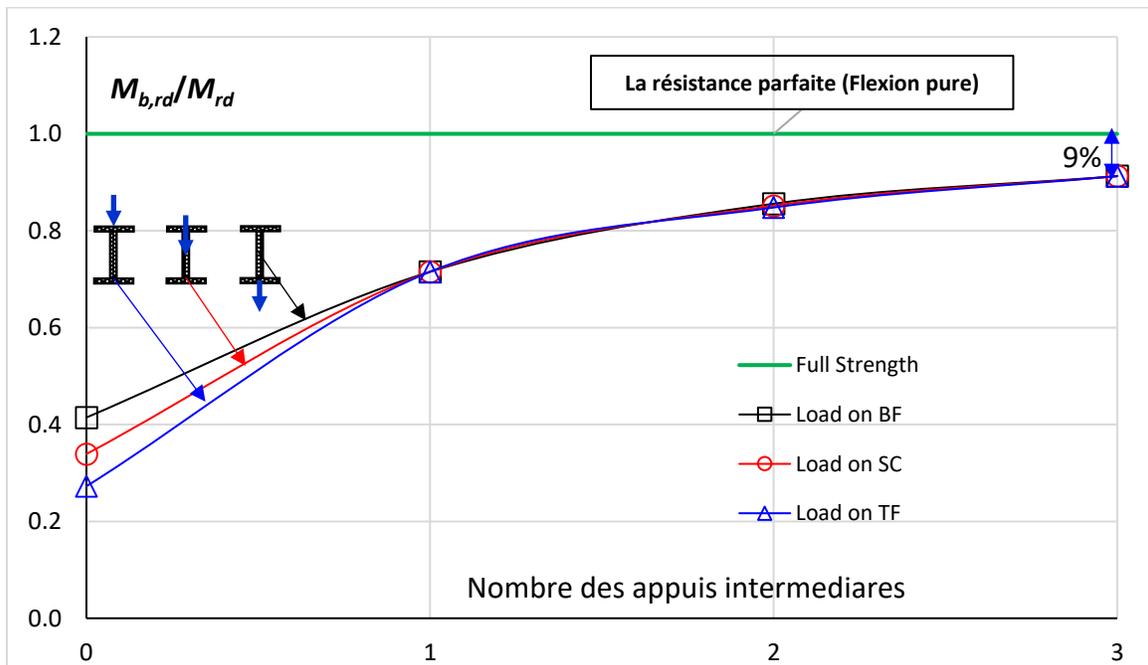


Figure 5.16: Poutre sous une charge concentrée : l'effet des appuis intermédiaires et la position de la charge sur la résistance au déversement.
 (SC): Centre de torsion, (TF): Semelle supérieure et (BF): Semelle inférieure.

Les maintiens latéraux jouent un rôle majeur sur la résistance au flambement et au déversement. Ce rôle peut être appréciable et devrait être pris en compte. L'influence des maintiens sur la résistance au déversement et flambement et l'amélioration de la capacité portante de la poutre est alors plus évident et établi dans ce travail. On rappelle que l'effet des maintiens dans la conception est toujours basé sur des hypothèses empiriques.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a comparé les résultats des modèles théorique et numérique proposés et qui ont été formulés aux chapitres 2, 3, 4, avec les modèles numériques en éléments finis élaboré par les codes Abaqus et Adina et également avec quelques résultats des travaux donnés dans la littérature afin de valider et d'évaluer la performance des formules analytiques et numérique proposées dont le but est de déterminer les modes supérieurs du flambement et du déversement des poutres à parois minces et à section ouverte. L'efficacité du modèle analytique est testée sur plusieurs exemples dans les limites de la théorie des poutres. Par ailleurs, l'étude de la résistance au flambement et au déversement des poutres sans et avec maintiens est examinée. La détermination de la charge critique de flambement et de déversement est effectuée en se basant sur les modèles proposés dans ce travail qui sont ensuite inclus dans l'évaluation de coefficient de réduction afin de déterminer la résistance de la poutre. Dans l'analyse de déversement, l'effet de la position de la charge est pris en compte. Les résultats indiquent que :

- dans le cas d'une section en I- bi-symétrique, les modes de flambement sont découplés et ils sont en flexion pure (flambement d'Euler) ou en torsion pure.
- dans le cas d'une section mono-symétrique en C, les modes de flambement en flexion ou en flexion-torsion peuvent être présents.
- Dans le cas d'une section mono-symétrique en T, les modes de flambement sont en flexion ou en flexion-torsion.
- dans le cas d'une section arbitraire, tous les modes de flambement sont couplés et ils sont en flexion-torsion.

- les solutions proposées dans l'Eurocode 3 sont limitées aux modes de flambement classiques. En présence des modes de torsion, ils ne sont plus valables. Certaines améliorations sont proposées dans la présente étude.
- il existe un excellent accord entre les solutions analytiques proposées et celles obtenues par les simulations numériques, confirmant l'exactitude et l'efficacité de l'approche suivie.
- le modèle numérique (B3Dw) proposé a montré une grande capacité à résoudre les problèmes d'instabilité des poutres à parois minces et à sections ouvertes.
- la résistance au flambement et au déversement augmente avec l'ajout des maintiens latéraux.

Finalement, on peut conclure que les modes supérieurs de flambement et de déversement sont très nécessaires dans le calcul des conceptions puisque : d'une part, ils peuvent aider à la compréhension du comportement des poutres non retenues en présence des phénomènes d'instabilité, et d'autre part, ils permettent d'évaluer les effets des maintiens avec précision. Le nombre de ces derniers, leurs directions et leurs positions peuvent être optimisés afin de contrôler et limiter les phénomènes d'instabilité et de couvrir la résistance parfaite des poutres.

Conclusion générale

Conclusion générale

Les problèmes associés aux constructions avec des éléments à parois minces découlent essentiellement du phénomène d'instabilité. C'est la raison pour laquelle nous parlons de contrôle. Dans ce but, nous avons présenté dans le premier chapitre les différentes théories de torsion, en insistant plus particulièrement sur la torsion non uniforme qui affecte les poutres à parois minces et à sections ouvertes. En présence des structures poutres à parois minces, le gauchissement joue un rôle très important. La torsion non uniforme fait intervenir des nouvelles paramètres quantités (statique, mécanique et géométrique) qui s'ajoutent à ceux, déjà, utilisés dans la méthode des sections planes. En se basant sur les hypothèses des petites déformations et de l'indéformabilité de la section transversale dans son plan, le modèle de Vlasov a été établi. Une étude comparative entre la théorie de Vlasov et les simulations du code commercial Abaqus en utilisant l'élément B31OS a été présentée, afin de valider ce modèle. Les résultats montrent un très bon accord entre la théorie de Vlasov et l'élément de poutre B31OS. A partir du modèle de Vlasov, l'énergie de déformation qui permet d'étudier les instabilités 3D (le Flambement, et le déversement) des éléments à parois minces et à sections ouvertes a été établie.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté une analyse analytique du flambement des barres à parois minces et à section ouvertes, soumises à une charge axiale de compression. Des sections de différentes formes ont été examinées : section bi-symétrique, mono-symétrique et asymétrique. En appliquant la méthode de Ritz, des solutions analytiques sont proposées pour le calcul des modes supérieurs de flambage. Nous concluons que dans le cas d'une section doublement symétrique les modes de flambement sont découplés. La barre peut se flamber en flexion pure ou en torsion pure. Lorsque la barre présente une section mono-symétrique, les modes de flambement sont en flexion pure ou en flexion-torsion. Dans le cas d'une section arbitraire, tous les modes de flambement sont couplés et ils sont en flexion-torsion. La vérification de la résistance au flambement d'une barre comprimée selon EC3 a été examinée. Dans ce code les formules ont été établies et calibrées pour le flambement par flexion. Avec la restriction que dans ce code les modes d'instabilité par torsion ou flexion-torsion ne sont pas prises en compte. Pour pallier cette limitation nous avons proposé de retenir la courbe de flambement d .

Dans le troisième chapitre, le déversement des poutres à parois minces et à section bi-symétriques sous différents cas de charge a été étudié. Le point d'application de la charge au niveau de la section

transversale est pris en compte. La méthode de Ritz est utilisée pour déduire les équations d'équilibre. Des solutions analytiques plus générales de moment de déversement au mode k ont été développées pour les cas de charges : charge uniformément répartie, charge concentrée et deux moments égaux. Le calcul du moment résistant au déversement selon l'Eurocode 3 a été présenté.

Au chapitre 4, un modèle numérique des poutres à parois minces et à sections ouvertes est développé. Le présent modèle est capable d'analyser des poutres en compression ou en flexion. Le modèle numérique utilise des poutres 3D à 7 ddl par nœud. Ce modèle tient en compte de l'effet de l'excentricité de la charge par rapport au centre de torsion et du couplage flexion –torsion. Dans ce modèle, des sections à formes quelconques peuvent être considérées.

Dans le dernier chapitre, nous présentons d'abord, une comparaison des résultats des modèles théorique et numérique proposés avec les modèles numériques en éléments finis élaboré par les codes Abaqus et Adina et également avec quelques résultats des travaux donnés dans la littérature afin de mettre en évidence l'efficacité des modèles proposés. Les résultats obtenus par les présents modèles sont généralement en bon accord avec les résultats des simulations numériques. Une différence est constatée avec le code Adina lorsque la charge transversale est appliquée au niveau de la semelle supérieure ou inférieure, cette différence est liée à l'utilisation des liens rigides pour excentrer la charge transversale. Nous avons montré aussi que dans le cas d'une charge uniformément répartie, les modes supérieurs de de déversement sont très sensibles à la position de la charge. Dans le cas d'une charge concentrée, l'effet de la position de la charge est présent en mode impair, tandis que pour le mode pair, le moment de déversement est indépendant de la position de charge.

Par ailleurs, une évaluation de l'effet des maintiens latéraux sur la résistance au déversement a été étudiée. Des exemples numériques basés sur les modèles proposés ont permis de mettre en évidence l'influence des maintiens sur la résistance au flambement et au déversement. De cette évaluation nous présentons les conclusions suivantes :

- La considération des modes supérieurs, peut aider à la compréhension du comportement des poutres retenues et non retenues en présence des phénomènes d'instabilité.
- Les maintiens améliorent la résistance au flambement et au déversement de façon à modifier le mode.
- En présence des colonnes et des poutres retenues, le flambement et le déversement sont prédominants par les modes supérieurs.

- Le flambement et le déversement peuvent être contrôlés et limités par l'ajout des maintiens latéraux ce qui augmente le coefficient de réduction.
- Les solutions proposées dans l'Eurocode 3 sont limitées aux modes de flambement classiques. En présence des modes de torsion, ils ne sont plus valables. Certaines améliorations sont proposées dans la présente étude.

En conclusion, Les maintiens latéraux jouent un rôle majeur sur la résistance au flambement et au déversement. Le nombre des maintiens, leurs directions et leurs positions sont alors plus évidents et prouvés dans ce travail. Leur rôle peut être appréciable et devrait être pris en compte.

Références bibliographiques

- [1] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, Theory of Elastic Stability, 2nd Ed McGraw Hill Inc, New York, (1961).
- [2] R.M. Jones, Buckling Of Bars, Plates and Shells, Bull Ridge Publishing, (2006).
- [3] V.Z. Vlasov, Thin-Walled Elastic Beams, Moscow (French Translation: Pieces Longues En Voiles Minces), Eyrolles, Paris, (1962).
- [4] F. Bleich, Buckling Strength of Metal Structures, Mcgraw-Hill, New York, (1952).
- [5] T.V. Galambos, Guide To Stability Design Criteria For Metal Structures, 1st Ed John Wiley & Sons Inc, New York, (1998).
- [6] N.W. Murray, Introduction To The Theory Of Thin-Walled Structures, Clarendon Press, (1984).
- [7] W.F. Chen, T. Atsuta, Theory of Beam Columns, Vol 2, J Ross Publishing, (2008).
- [8] L. Librescu, O. Song, Thin-Walled Composite Beams: Theory and Application, Springer, (2006).
- [9] S. Cescotto, C. Massonet, Mécanique Des Matériaux, De Boeck, 3e Ed, (1994).
- [10] B. Akesson, Plate Buckling In Bridges and Other Structures, Taylor & Francis Group, (2007).
- [11] R. Degenhardt, R. Rolfes, R. Zimmermann, K. Rohwer, and COCOMAT: Improved Material Exploitation at Safe Design of Composite Airframe Structures By Accurate Simulation Of Collapse, Composite Structure, 73 (2006) 175–217.
- [12] R. Zimmermann, H. Klein, A. Kling, Buckling and Post-Buckling Analysis of Stringer Stiffened Fibre Composite Curved Panels, Composite Structure, 73 (2006) 150–161.
- [13] Eurocode 3: European Committee For Standardization, EN 1993-1-1, Eurocode 3: Design Of Steel Structures, Part 1-1: General Rules and Rules For Buildings, Brussels, May (2005).
- [14] Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures – Part 1–1: General Rules and Rules for Buildings.
- [15] Eurocode 5: Design Of Timber Structure - Part 1–1: General - Common Rules and Rules for Buildings.
- [16] H. Wagner, Torsion And Buckling Of Open Sections, National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Memorandum, (1934).
- [17] J. Goodier, Torsional and Flexural Buckling Of Bars of Thin-Walled Open Section under Compressive And Bending Loads. Journal Applied Mechanics (1942), 103 - 107.
- [18] F. Frey, Analyse Des Structures Et Milieux Continus, Traité De Génie Civil Volume 2, Ecole Polytechnique Fédérale De Lausanne.
- [19] A. Manfred, Hirt, B. Rolf, Construction Métallique, Traité De Génie Civil Volume 10, Ecole Polytechnique Fédérale De Lausanne.

- [20] A. Brouki, Déversement Des Poutres A Parois Minces Et A Sections Ouvertes : Aspect Numériques Et Réglementaire, Thèse De Doctorat En Génie Mécanique Option Génie Civil, Université De Metz, (1998).
- [21] F. Mohri , L. Azrar And M. Potier-Ferry , Flexural-Torsional Post-Buckling Analysis Of Thin-Walled Elements With Open Sections. *Thin-Walled Structures* 39, (2001), 907-938.
- [22] F. Mohri, N. Damil, M. Potier-Ferry, Large Torsion Finite Element Model For Thin-Walled Beams, *Computers and Structure*, 86, (2008), 671–683.
- [23] F. Mohri, A. Brouki, J.C. Roth, Theoretical And Numerical Stability Analyses Of Unrestrained, Mono-Symmetric Thin-Walled Beams, *Journal Of Constructional Steel Research*, 59 (2003), 63–90.
- [24] N.S Trahair, *Flexural-Torsional Buckling Of Structures*. London: Chapman and Hall, 1993.
- [25] R.S Barsoum, R.H Gallagher, Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, 2 (1970), 335–52.
- [26] Z.P Bazant, M. El Nimeiri, Large-Deflection Spatial Buckling Of Thin Walled Beams And Frames. *Journal of Engineering Mechanics Division (EM6)* 99 (1973), 1259–81.
- [27] Abaqus/CAE Analysis, Simulia, Version 6.11, Dassault System, 2011.
- [28] Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2014 - Guide D'utilisation.
- [29] F. Bleich, H. Bleich, Bending Torsion And Buckling Of Bars Composed Of Thin Walls, Prelim. Pub. 2nd Cong. International Association for Bridge and Structural Engineering, English Ed, Berlin (1936). P871
- [30] H. Wagner, W. Pretschner, Torsion And Buckling Of Open Sections, NACA Tech. Mem. No. 784 (1936).
- [31] A. Ostenfeld, Politeknisk Laereanstalts Laboratorium for Bygningsstatik, Copenhagen: Meddelelse No. 5. (1931).
- [32] R. Kappus, Drillknicken Zentrisch Gedrueckter Sta"Be Emit Offenem Profile Im Elastischen Bereich. *Lufthahrt-Forschung*, Vol. 14(No. 9), 444–457, English Translation, Twisting Failure Of Centrally Loaded Open-Sections Columns In The Elastic Range, NACA Tech. Mem. No. 851. (1938)
- [33] E.F Lundquist, C.M Fligg, A Theory For Primary Failure Of Straight Centrally Loaded Columns, NACA Tech: Report No. 582. (1937).
- [34] N.J Hoff, A Strain Energy Derivation Of The Torsional-Flexural Buckling Loads Of Straight Columns Of Thin-Walled Open Sections, *Quarterly Of Applied Mathematics*, Vol. 1 (No. 4), (1944), 341–345.
- [35] Matlab^r, The Mathworks Inc, (2014).

- [36] M. G. Salvadori, Lateral Buckling Of I-Beams, Transactions Of The American Society Of Civil Engineers 120(1) (1955), 1165-1177.
- [37] S. Poley, Lateral Buckling Of Cantilevered I-Beams Under Uniform Load, Transactions Of The American Society Of Civil Engineers 121(1) (1956), 786–790.
- [38] W.J. Austin, S. Yegian And T. P. Tung , Lateral Buckling Of Elastically End-Restrained I-Beams, Transactions Of The American Society Of Civil Engineers 122(1) (1957), 374–388.
- [39] H. Djalaly , Calcul De La Résistance Ultime Au Déversement ,Construction Métallique N°1, 1974.
- [40] F. Mohri , A. Brouki, JC Roth. Déversement Des Poutres En I Sous Chargements Asymétriques, Revue Construction Métallique, CTICM, Paris (2000),41–52.
- [41] S. Kitipornchai , CM. Wang ,N.S. Trahair, Buckling Of Monosymmetric I-Beams Under Moment Gradient, Journal Of Structural Engineering, 112, (1986), 781–99.
- [42] C. Wang, And S. Kitipornchai , Buckling Capacities Of Monosymmetric I-Beams, Journal Of Structural Engineering 112, (1986), 2373-2391.
- [43] M.M Attard, General Non-Dimensional Equation for Lateral Buckling, Thin-Walled Structures 9, (1990), 417-435.
- [44] A. Andrade, D. Camotim and P. Providência Costa, On The Evaluation Of Elastic Critical Moments In Doubly And Singly Symmetric I-Section Cantilevers, Journal Of Constructional Steel Research 63, (2007), 894-908.
- [45]T. Helwig ,K. Frankk And J. Yura, Lateral-Torsional Buckling Of Singly Symmetric I-Beams, Journal Of Structural Engineering, 123, (1997), 1172-1179.
- [46] L. Zhang , G. S. Tong, Elastic Flexural-Torsional Buckling Of Thin-Walled Cantilevers, Thin-Walled Structures 46, (2008), 27-37.
- [47] C. Roeder, M. Assadi, Lateral Stability of I-Beams With Partial Support, Journal Of The Structural Division 108, (1982), 1768-1780.
- [48] J. Yura, Fundamentals of Beam Bracing. Eng J AISC (2001), 11–26.
- [49] M.G Lay, T.V. Galambos, L.C. Schmidt, Lateral Bracing Force Of Steel I-Beams, Journal Of Engineering Mechanics Division, 89(EM3), (1963), 217-224.
- [50] F. Mccann, L. Gardner and M. A. Wadee, Design of Steel Beams With Discrete Lateral Restraints, Journal Of Constructional Steel Research 80(0), (2013), 82-90.
- [51] A. Taylor, M. Ojalvo, Torsional Restraint of Lateral Buckling, Journal of The Structural Division 92(2), (1966), 115-130.
- [52] B. Mutton, N. Trahair, Stiffness Requirements for Lateral Bracing, Journal Of The Structural Division ASCE, 99 (ST10), (1973), 2167–82.

- [53] D. Nethercot, Buckling Of Laterally Or Torsionally Restrained Beams, Journal Of The Engineering Mechanics Division ASCE, 99(No. EM4), (1973), 773-791.
- [54] I. Medland , Buckling Of Interbraced Beam System, Engineering Structure,2, (1980), 90–6.
- [55] GS Tong , SF Chen , Buckling Of Laterally And Torsionally Braced Beams, Journal Construction Steel Research,11, (1988) ,41–55.
- [56] J. Valentino, N. Trahair, Torsional Restraint against Elastic Lateral Buckling, Journal Of Structural Engineering 124(10), (1998), 1217-1225.
- [57] Nguyen, C. T., J. Moon, V. N. Le and H.-E. Lee (2010). "Lateral–Torsional Buckling Of I-Girders With Discrete Torsional Bracings." Journal Of Constructional Steel Research 66(2): 170-177.
- [58] E. Mohamadi , Sayed S, Mohammad S .R. "Lastic Lateral-Torsional Buckling Strength And Torsional Bracing Stiffness Requirement For Monosymmetric I-Beams." Thin-Walled Structures 104 (2016) 116–125.
- [59] LTbeam, Centre Technique Industriel De La Construction Métallique (CTICM), Saint-Aubin, France, 2015
- [60] Krajcinovic, D. (1969). "A Consistent Discrete Elements Technique for Thin Walled Assemblages." International Journal Of Solids And Structures 5(7): 639-662.
- [61] F. Laudiero, D. Zaccaria, A Consistent Approach To Linear Stability Of Thin-Walled Beams Of Open Section, International Journal Of Mechanical Science 30, (1988),503-315.
- [62] G. Powell, And R. Klingner "Elastic Lateral Buckling Of Steel Beams." Journal of The Structural Division 96, (1970), 1919-1932.
- [63] J.M Battini, C. Pacoste, Co-Rotational Beam Elements With Warping Effects In Instabilities Problems. Computer Methods In Applied Mechanics 191, (2002), 1755-89.
- [64] L. Wu,And M. Mohareb, Buckling Formulation For Shear Deformable Thin-Walled Members—II: Finite Element Formulation,Thin-Walled Structures 49, (2011), 208-222.
- [65] R.E. Erkmén, M. Mohareb and M. Bradford, Complementary Energy Based Formulation for Torsional Buckling Of Columns, Journal Of Engineering Mechanics 135, (2009), 1420-1426.
- [66] L. Ascione,L. Feo , On The Non-Linear Statical Behaviour Of Thin-Walled Elements Beams Of Open Cross- Sections. A Numerical Approach, International Journal Computational Engineering Science2, (2001), 513-536.
- [67] H.R. Ronagh,M.A. Bradford ,M.M Attard Nonlinear Analysis Of Thin-Walled Members Of Variable Cross-Section, Part I: Theory. Computers and Structures 77, (2000), 285-299.
- [68] F. Mohri F, L. Azrar L And M. Potier-Ferry, Lateral Post-Buckling Analysis Of Thin-Walled Open Section Beams, Thin-Walled Structures 40, (2002), 1013-1036.
- [69] F. Mohri, N. Damil And M. Potier-Ferry, Buckling And Lateral Buckling Interaction In Thin-Walled Beam-Column Elements With Mono-Symmetric Cross Sections, Applied Mathematical Modelling 37, (2013), 3526-3540.

- [70] W.Y. Lin, M.M. Hsiao, Co-Rotational Formulation For Geometric Nonlinear Analysis Of Doubly Symmetric Thin-Walled Beams, *Comput Methods Appl Mech Eng.* Vol 190, (2001), 6023–52.
- [71] J.L. Batoz, G. Dhatt, *Modélisation Des Structures Par Éléments Finis*, Vol 2, Paris : Hermes ; (1990).
- [72] F. Mohri, N. Damil, M. Potier-Ferry, Review and Comparison Of Finite Element Flexural–Torsional Models For Non-Linear Behaviour Of Thin-Walled Beams, *Adv.Eng. Software* 80 (2015) 174–187.
- [73] Adina, *Theory And Modelling Guide*, In: R. Adina (Ed.), *Adina Solids & Structures, Volume I*, D Inc, 71 Elton Avenue Watertown, MA 02472 USA, 2011 , (December 2012).
- [74] F. Papp, A. Rubert, J. Szalai, DIN EN 1993-1-1-Konforme Integrierte Stabilitätsanalysen Für 2D/3D-Stahlkonstruktionen (Teil 2), *Stahlbau* 83 (2014).
- [75] H.I. Hauksson, J.B. Vilhjálmsson, *Lateral-Torsional Buckling Of Steel Beams With Open Cross Section*, Thesis Chalmers University Sweden, (2014).

Annexes

Dans cette annexe, nous donnons les formes des modes de flambement calculées par notre approche B3Dw. Les figures A1-A4 donnent les quatre premières formes de mode des barres de 4 m avec une section en I bi-symétrique, une section mono-symétrique en C, une section en T et une section arbitraire. Le cas d'une barre à une section bi-symétrique est présenté à la figure A1, les modes de flambement 1 et 3 sont en flexion autour de l'axe faible z-z alors que pour les modes de flambement 2 et 4 ils sont en torsion. Dans le cas d'une barre avec une section en C (Figure A2), les modes en flexion pure sont présents dans les modes 1 et 4. Les modes 2 et 3 sont des modes en flexion-torsion (w et θ_x sont couplés). Dans le cas d'une barre avec une section en T (Figure A3), tous les modes sont des modes en flexion-torsion (v et θ_x sont couplés). Aucun mode en flexion pure n'est présent. Les formes de mode de la barre à section transversale arbitraire (Figure A4) sont toutes en flexion-torsion. Tous les déplacements sont présents en flexion torsion (v , w et θ_x sont couplés).

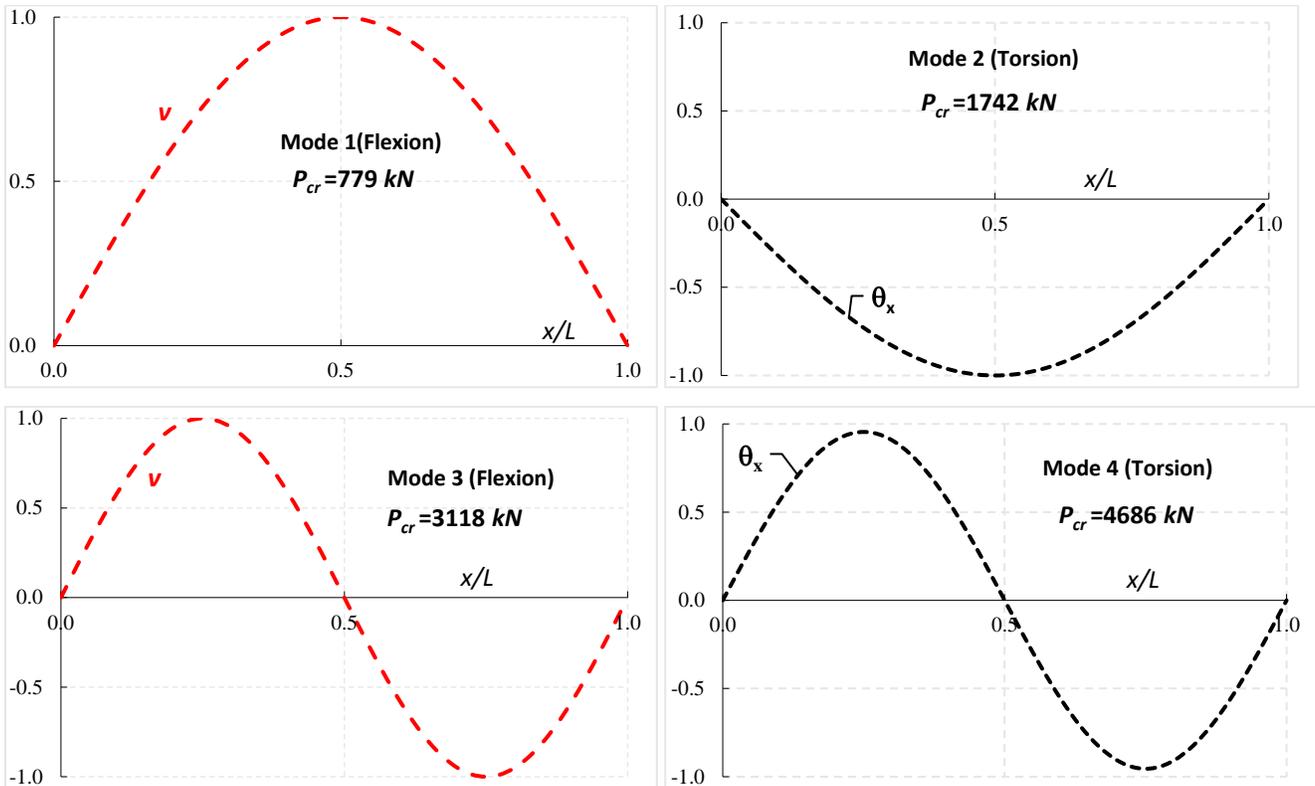
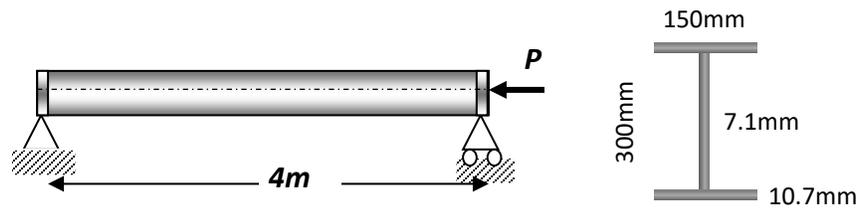


Figure A1: barre à une section I bi-symétrique, les quatre premiers modes de flambement (B3Dw).

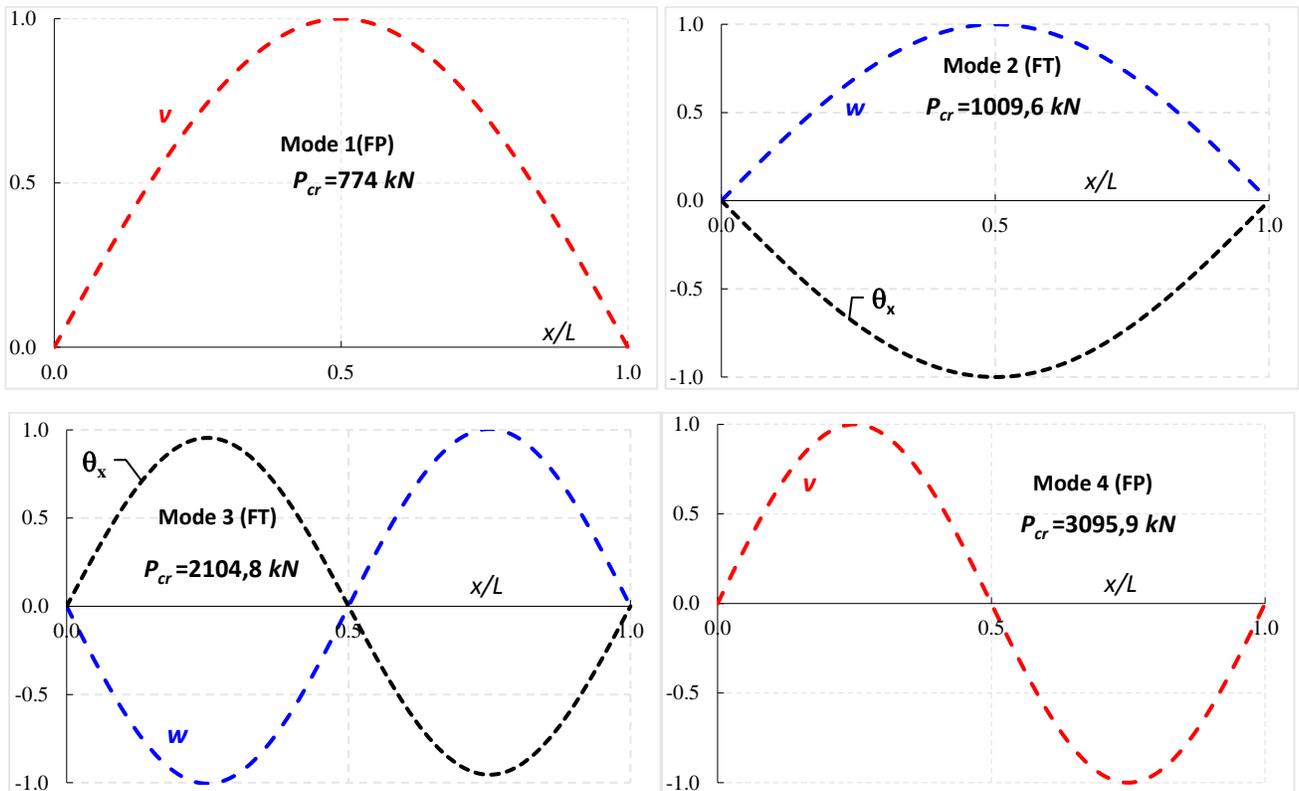
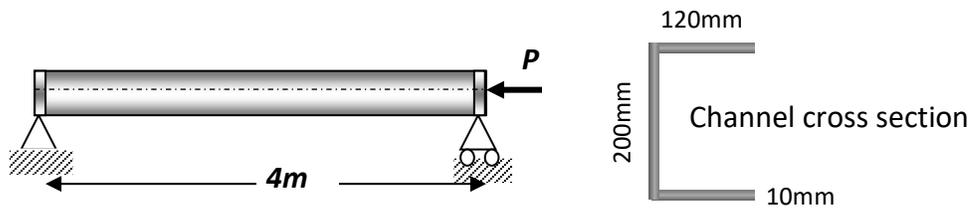


Figure A2: barre à une section en C, les quatre premiers modes de flambement (B3Dw).

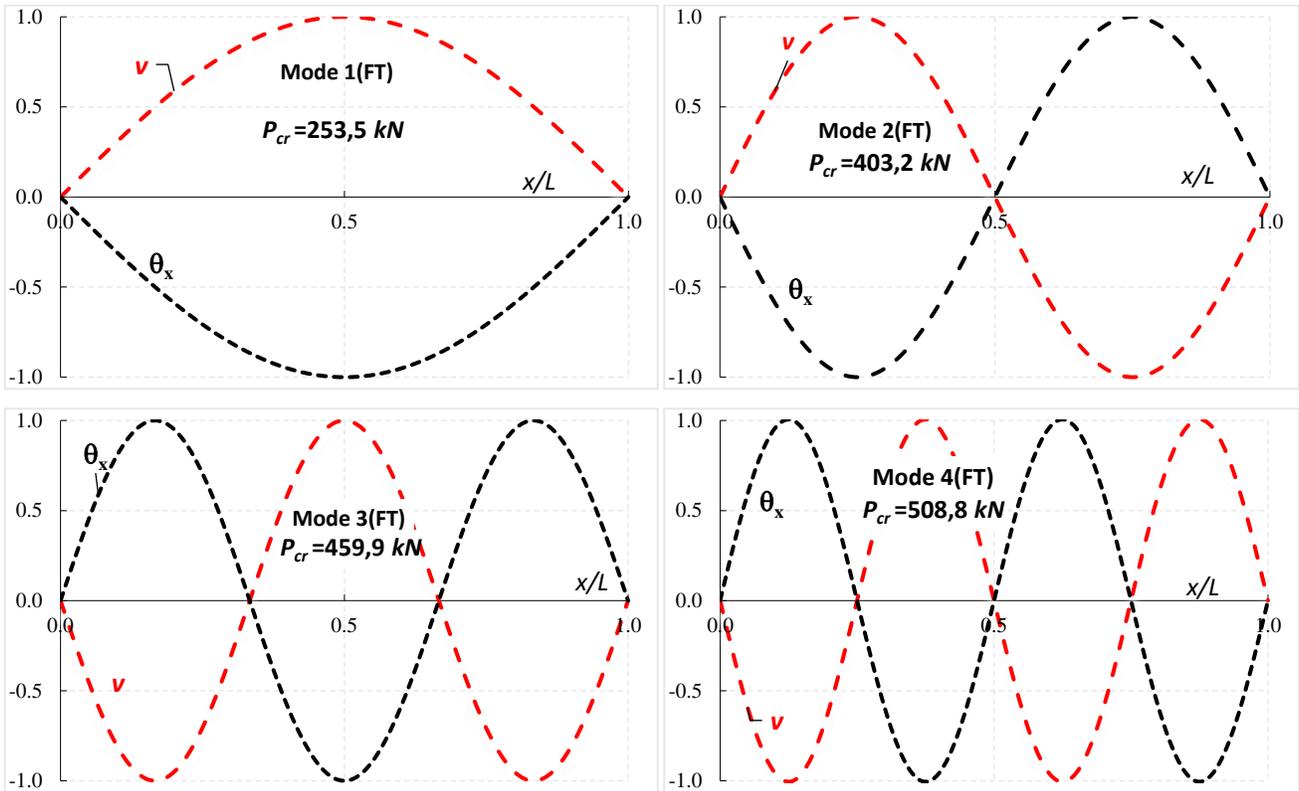
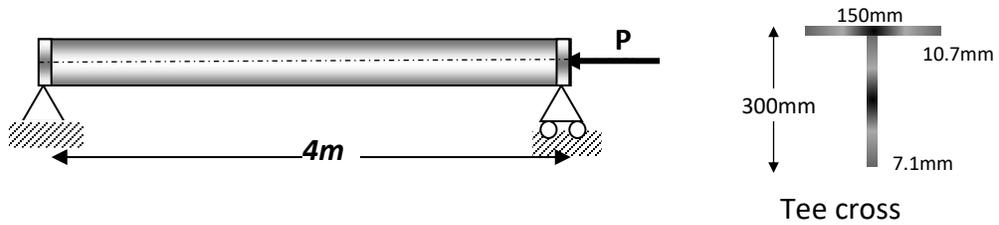


Figure A3: barre à une section en T, les quatre premiers modes de flambement (B3Dw).

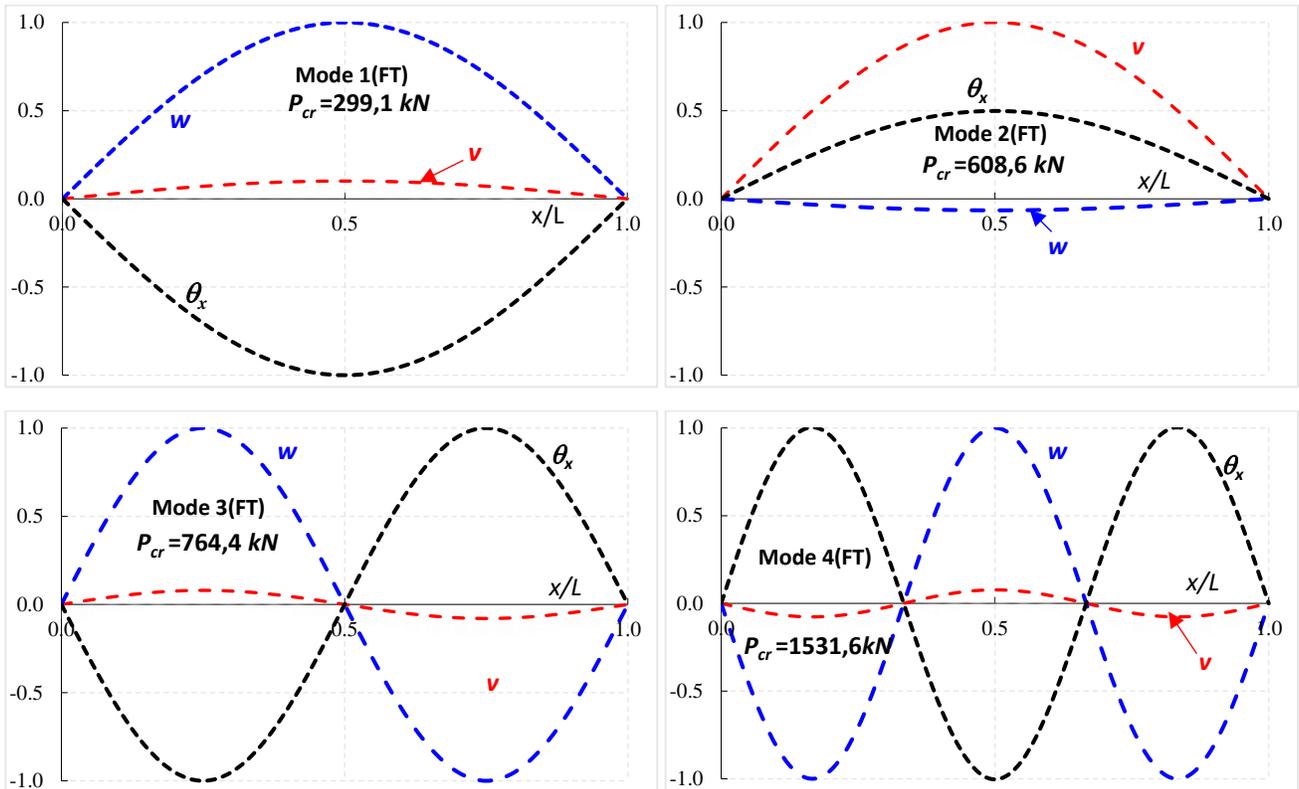
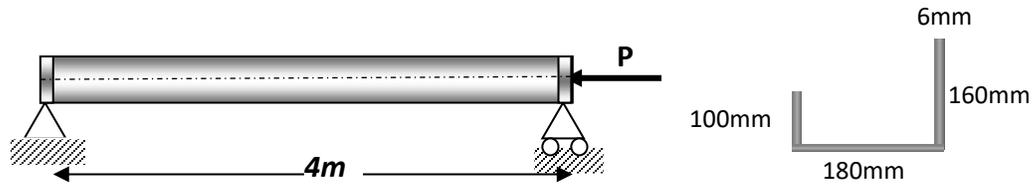


Figure A4: barre à une section arbitraire, les quatre premières formes des modes de flambement (B3Dw).

Les fonctions de forme utilisées sont

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1 - \xi^2)(1 - \xi)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi)$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(-1 + \xi^2)(1 + \xi)$$

Avec $\xi = \frac{x}{L}$

En utilisant ces fonction de forme pour v, w, θ_x dans le modèle de Vlassov, le vecteur équivalent de charge est :

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P(24EI + 13k_yL^3)}{16(3EI + 2k_yL^3)} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P(24EI + 13k_yL^3)}{16(3EI + 2k_yL^3)} \\ \frac{3PL^4k_y}{16(3EI + 2k_yL^3)} \end{pmatrix}$$

La matrice de rigidité $[K_G]$ est obtenue en remplaçant la contribution de la torsion libre par celle de la torsion non uniforme.

La matrice de rigidité $[K_G]$ s'exprime alors sous la forme suivante :

$$[K_g] = \begin{bmatrix} [K_u] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K_v] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_w] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [K_\omega] \end{bmatrix}$$

Avec :

$$[K_u] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_u] = EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_u] = EI_y \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_\omega] = \frac{EI_\omega}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{EI_t}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI_z}{L^3(1+\varphi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2(1+\varphi_y)} & 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3(1+\varphi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2(1+\varphi_y)} \\
 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3(1+\varphi_z)} & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2(1+\varphi_z)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3(1+\varphi_z)} & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2(1+\varphi_z)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2(1+\varphi_z)} & \frac{(4+\varphi_z)EI_y}{L(1+\varphi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\varphi_z)} & 0 & \frac{(2-\varphi_z)EI_y}{L(1+\varphi_z)} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2(1+\varphi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\varphi_y)EI_z}{L(1+\varphi_y)} & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\varphi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\varphi_y)EI_z}{L(1+\varphi_y)} & 0 \\
 -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI_z}{L^3(1+\varphi_y)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\varphi_y)} & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3(1+\varphi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\varphi_y)} \\
 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3(1+\varphi_z)} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\varphi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3(1+\varphi_z)} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\varphi_z)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2(1+\varphi_z)} & \frac{(2-\varphi_z)EI_y}{L(1+\varphi_z)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2(1+\varphi_z)} & 0 & \frac{(4+\varphi_z)EI_y}{L(1+\varphi_z)} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2(1+\varphi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\varphi_y)EI_z}{L(1+\varphi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\varphi_y)EI_z}{L(1+\varphi_y)} & 0
 \end{bmatrix}$$

On notera l'apparition de deux termes supplémentaires $\varphi_y = \frac{12EI_z}{GAL^2}$ et $\varphi_z = \frac{12EI_y}{GAL^2}$ correspondant à la prise en compte par l'élément de la déformation d'effort tranchant.