

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L 'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



N° d'ordre :.....

Série :.....

**Université Mohammed Seddik  
BENYAHIA - Jijel  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département : Automatique**

**Thèse Présentée**  
Pour l'obtention du Diplôme de Doctorat LMD  
Spécialité: **Automatique**

**Par: Nasri Mohamed**

**Thème :**

**Contribution à la commande de systèmes décrits par des  
modèles de Takagi-Sugeno en présence de saturation**

Soutenue le **21 Mars 2021**. Devant le Jury composé de :

|                                |            |                     |               |
|--------------------------------|------------|---------------------|---------------|
| Mr. BOUBAKIR Ahcene            | MCA        | U. M.S.B.Jijel      | Président     |
| Mme. SAIFIA Dounia             | MCA        | U. M.S.B.Jijel      | Rapporteur    |
| Mr. CHADLI Mohammed            | Professeur | U. P. Saclay-France | Co-rapporteur |
| Mr. DOUDOU Sofiane             | MCA        | U. M.S.B.Jijel      | Examineur     |
| Mr. GUECHI El-Hadi             | MCA        | U. Skikda           | Examineur     |
| Mr. AMARA Korba Mohamed Cherif | MCA        | U. Souk-Ahras       | Examineur     |
| Mr. LABIOD Salim               | Professeur | U. M .S.B. Jijel    | Invité        |



---

## Dédicaces

---

*À ma très chère mère,*

*À mon très cher père,*

*À ma très chère femme,*

*À mes très chères enfants **Yasser et Idris,***

*À mes très chères amis*

---

---

## Remerciements

---

Le travail présenté dans cette thèse a été effectué dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire d'Automatique de Jijel (LAJ), Université de Jijel, et le laboratoire de IBISC Lab, Université de Paris Saclay, France, sous la direction conjointe de Madame Dounia Saifia et de Monsieur Mohammed Chadli.

Tout d'abord, je ne serai débuté ces remerciements, sans m'adresser à mes Directeurs de thèse, en l'occurrence Madame Dounia Saifia, Maître de conférence à l'université de Jijel, et Mohammed Chadli, Professeur à l'Université de Paris saclay, qui ont bien voulu prendre en charge la direction scientifique de mon travail. Leurs conseils judicieux et leurs encouragements m'ont beaucoup aidé pour l'aboutissement de ces travaux. Qu'ils trouve ici, l'expression de ma profonde gratitude.

Mes sincères remerciements à Monsieur Salim Labiod, Professeur à l'Université de Jijel, pour toutes nos discussions et ses conseils.

Je tiens à remercier Monsieur Ahcene Boubakir, Maître de conférence à l'Université de Jijel, pour m'avoir fait l'honneur d'être président de ce jury.

Je remercie Monsieur Sofiane Doudou, Maître de conférence à l'Université de Jijel, pour ces encouragements et pour m'avoir fait l'honneur d'être examinateur de ce travail.

Je remercie Monsieur Elhadi Guechi, Maître de conférence à l'Université de Skikda, pour m'avoir fait l'honneur d'être examinateur de ce travail.

Je remercie Monsieur Amara Korba Mohamed Cherif, Maître de conférence à l'Université de Souk-Ahras, pour m'avoir fait l'honneur d'être examinateur de ce travail.

Enfin, mes remerciements vont à tous ceux qui m'ont soutenu ou qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à la réalisation de ce travail.

---

---

# Table des matières

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Table des figures</b>   | <b>6</b>  |
| <b>Liste des tableaux</b>  | <b>8</b>  |
| <b>Liste des abréviations et des symboles</b>  | <b>9</b>  |
| <b>Introduction générale</b>   | <b>12</b> |
| <b>1 État de l'art sur les modèles Takagi-Sugeno, saturation et retard</b>                       | <b>17</b> |
| 1.1 Introduction . . . . .   | 17        |
| 1.2 Présentation des modèles T-S . . . . .   | 17        |
| 1.3 Obtention des modèles T-S . . . . .  | 19        |
| 1.3.1 Méthode de secteur non linéaire . . . . .  | 19        |
| 1.4 Descripteurs T-S . . . . .   | 21        |
| 1.5 Stabilité des modèles T-S . . . . .  | 22        |
| 1.5.1 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .  | 22        |
| 1.5.2 Fonction de Lyapunov quadratique . . . . .   | 22        |
| 1.5.3 Moyens de la réduction de conservatisme . . . . .  | 23        |
| 1.5.4 Stabilité quadratique des modèles T-S . . . . .  | 24        |
| 1.5.5 Stabilité non quadratique des modèles T-S . . . . .  | 25        |
| 1.6 Stabilisation des modèles T-S . . . . .  | 27        |
| 1.6.1 Stabilisation quadratique . . . . .  | 27        |
| 1.6.2 Stabilisation non quadratique . . . . .  | 29        |
| 1.7 Stabilisation des modèles T-S incertains et perturbés . . . . .                              | 32        |
| 1.7.1 Stabilisation $H_\infty$ quadratique des modèles T-S incertains et perturbés . . . . .     | 33        |
| 1.7.2 Stabilisation $H_\infty$ non quadratique des modèles T-S incertains et perturbés . . . . . | 35        |
| 1.8 Modèles T-S et phénomène de saturation . . . . .   | 37        |
| 1.8.1 Phénomène de saturation . . . . .  | 37        |
| 1.8.2 Modélisation de la saturation . . . . .  | 39        |
| 1.8.3 Saturation Symétrique et non symétrique . . . . .  | 40        |

---

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 1.9      | Modèles T-S à retard . . . . .  | 42         |
| 1.9.1    | Stabilité des systèmes à retard . . . . .   | 42         |
| 1.9.2    | Représentation T-S des systèmes à retard . . . . .  | 43         |
| 1.9.3    | Stabilité indépendante et stabilité dépendant du retard des modèles T-S . . . . .                             | 44         |
| 1.10     | Conclusion . . . . .  | 47         |
| <b>2</b> | <b>Stabilisation quadratique des modèles T-S en présence de saturation d'actionneur</b>                       | <b>49</b>  |
| 2.1      | Introduction . . . . .  | 49         |
| 2.2      | Préliminaires . . . . .   | 50         |
| 2.2.1    | Position de problème . . . . .  | 50         |
| 2.2.2    | Outils géométrique . . . . .  | 51         |
| 2.3      | Stabilisation par la commande PDC des modèles T-S en présence de la saturation d'actionneur . . . . .         | 51         |
| 2.3.1    | Commande PDC contrainte . . . . .   | 52         |
| 2.3.2    | Commande PDC saturante . . . . .  | 52         |
| 2.4      | Stabilisation par la commande SOF des systèmes T-S en présence de la saturation d'actionneur . . . . .        | 54         |
| 2.4.1    | Commande SOF contrainte . . . . .   | 54         |
| 2.4.2    | Commande SOF saturante . . . . .  | 55         |
| 2.4.3    | Commande SOF approche descripteur . . . . .   | 55         |
| 2.5      | Stabilisation $H_\infty$ des modèles T-S en présence de la saturation d'actionneur . . . . .                  | 58         |
| 2.5.1    | Synthèse d'une commande PDC . . . . .   | 58         |
| 2.5.2    | Synthèse d'une commande SOF . . . . .   | 78         |
| 2.6      | Conclusion . . . . .  | 82         |
| <b>3</b> | <b>Stabilisation non quadratique des modèles T-S en présence de saturation d'actionneur</b>                   | <b>83</b>  |
| 3.1      | Introduction . . . . .  | 83         |
| 3.2      | Formulation du problème . . . . .   | 84         |
| 3.3      | Stabilisation non quadratique par la commande PDC . . . . .   | 85         |
| 3.3.1    | Perturbation externe nulle . . . . .  | 85         |
| 3.3.2    | Perturbation externe non nulle . . . . .  | 87         |
| 3.4      | Stabilisation non quadratique par la commande SOF . . . . .   | 90         |
| 3.4.1    | Perturbation externe nulle . . . . .  | 90         |
| 3.4.2    | Perturbation externe non nulle . . . . .  | 94         |
| 3.5      | Conclusion . . . . .  | 106        |
| <b>4</b> | <b>Stabilisation des systèmes à retard décrits par des modèles T-S en présence de saturation d'actionneur</b> | <b>108</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .  | 108        |
| 4.2      | Préliminaires . . . . .   | 109        |
| 4.2.1    | Types des modèles T-S à retard . . . . .  | 109        |

---

---

|  |  |            |
|--|--|------------|
| 4.2.2                                      | Objective et motivation . . . . .  | 110        |
| 4.2.3                                      | Outils théoriques . . . . .  | 110        |
| 4.3  | Stabilisation indépendante du retard . . . . .   | 110        |
| 4.3.1                                      | Stabilisation quadratique via l'approche indépendante du retard . . . . .  | 110        |
| 4.3.2                                      | Stabilisation non quadratique via l'approche indépendante du retard . . . . .  | 112        |
| 4.4  | Conditions de stabilisation dépendantes du retard . . . . .  | 127        |
| 4.4.1                                      | Conditions de stabilisation dépendantes du retard et indépendante des dérivées<br>des fonctions d'appartenance . . . . . | 127        |
| 4.4.2                                      | Conditions de stabilisation dépendantes du retard et dépendantes des dérivées<br>des fonctions d'appartenance . . . . .  | 128        |
| 4.5  | Conclusion . . . . .   | 133        |
| <b>Conclusion générale et perspectives</b> |  | <b>135</b> |
| <b>Appendices</b>                          |  | <b>137</b> |
| Annexe A :                                 |  |            |
|  | Analyse convexe et inégalité matricielle . . . . .   | 138        |
| Annexe B :                                 |  |            |
|  | Autre méthode de modélisation de l'effet de saturation . . . . .   | 141        |
| Annexe C :                                 |  |            |
|  | Démonstration des conditions de stabilité dépendantes du retard . . . . .  | 145        |
| <b>Bibliographie</b>                       |  | <b>149</b> |

---

---

## Table des figures

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 1.1  | Réponses du système non linéaire et son modèle T-S . . . . .  | 21  |
| 1.2  | Fonction de saturation . . . . .  | 38  |
| 2.1  | Système de direction assistée électrique . . . . .  | 62  |
| 2.2  | Modèle vélo de véhicule . . . . .   | 63  |
| 2.3  | réponses du système : (a). $T_{sen}$ par rapport $T_h$ à 0.5 Hz. (b). signal de commande à<br>0.5 Hz. (c) $T_{sen}$ par rapport $T_h$ à 1 Hz. (d). signal de commande à 1 Hz. . . . .                     | 68  |
| 2.4  | Système PV avec convertisseur DC-DC . . . . .   | 71  |
| 2.5  | Le circuit équivalent de cellules solaires DC-DC . . . . .  | 72  |
| 2.6  | Réponse du système PV dans le scénario 1 : (a). irradiation. (b). rapport cyclique.<br>(c) courant du système PV. (d). tension PV. (e). puissance PV. . . . .   | 76  |
| 2.7  | Réponse du système PV dans le scénario 2 : a). temperature. (b). courant PV. (c).<br>voltage PV. (d). puissance PV. . . . .   | 77  |
| 2.8  | Courbe P-V. . . . .   | 77  |
| 2.9  | Réponse du système PV avec $G=70mW/cm^2$ et $T=25C$ : (a). rapport cyclique. (b).<br>puissance P-V . . . . .  | 78  |
| 2.10 | système du suspension quad car système. . . . .   | 80  |
| 2.11 | Réponse du système suspension : (a). perturbation. (b). entrée de commande.(a).<br>déflexion de la suspension ( $x_1 - x_2$ ). (b). acceeration de la masse suspendue. . . . .                            | 82  |
| 3.1  | + Théorème 3.2., • Théorème 3.3, ◊ approche quadratique théorème 2.7. . . . .   | 89  |
| 3.2  | Réponse du système suspension : (a). déflexion de la suspension ( $x_1 - x_2$ ). (b). signal<br>de commande saturé. (c) perturbation. (d) dérivée de la 1 <sup>er</sup> fonction d'appartenance . . . . . | 89  |
| 3.3  | Stratégie de commande proposée . . . . .  | 98  |
| 3.4  | Réponse du système EPS à $0.5Hz$ : a). $T_{sen}$ par rapport à $T_h$ . (b). Signal de com-<br>mande saturé . . . . .  | 99  |
| 3.5  | Réponse du système EPS à $1Hz$ : a). $T_{sen}$ par rapport à $T_h$ . (b). Signal de commande<br>saturé. . . . .   | 101 |
| 3.6  | Réponse du système : a). vitesse du véhicule . (b). puissance du Moteur. . . . .  | 101 |

---



---

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 3.7  | $T_{sen}$ par rapport à $T_h$ . : a). Pour l'approche quadratique et non quadratique. (b).<br>Pour différent niveau de saturation . . . . .  | 102 |
| 3.8  | Comparaison avec [Saifia et al., 2015] : a). $T_{sen}$ par rapport à $T_h$ . (b). Integral d'erreur<br>absolue . . . . .   | 102 |
| 3.9  | Test de robustesse : a). $T_{sen}$ par rapport à $T_h$ . (b). Integral d'erreur absolue . . . . .  | 103 |
| 3.10 | Réponse du système : (a). l'état $x_1$ . (b). l'état $x_2$ . (c). Signal de commande. (d).<br>Dérivée de la 1ère fonction d'appartenance. . . . .  | 105 |
| 3.11 | Réponses du système pour différentes valeurs initiales. . . . .  | 106 |
| 4.1  | References de UUV. . . . .   | 115 |
| 4.2  | Réponses du système : (a). signal d'entrée saturé. (b). profondeur. (c) Le signal d'angle<br>de tangage. (d). la vitesse angulaire. . . . .  | 119 |
| 4.3  | Réponses du système : (a). trajectoire de l'état $x_1(t)$ . (b). trajectoire de l'état<br>$x_2(t)$ . (c) trajectoire d'entrée saturée . (d). trajectoire de la dérivée de la fonction<br>d'appartenance. (e) trajectoire des états pour un retard variable. (f) retard variable. . . . . | 126 |
| 4.4  | Comparaison des domaines de faisabilité des théorème 4.6 et 4.7. . . . .   | 132 |
| 4.5  | Réponses du système : (a). trajectoire de l'entrée saturée . (b). trajectoire de l'état<br>$x_1(t)$ . (c) trajectoire de l'état $x_2(t)$ . (d). trajectoire de l'état $x_3(t)$ . (e). dérivée de<br>$\zeta_1(t)$ . (f). variation du retard $\tau(t)$ . . . . .                          | 134 |

---

---

## Liste des tableaux

---

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Paramètres du système [Li et al., 2009b] . . . . .  | 64  |
| 2.2 | Paramètre $H_\infty$ pour différents niveaux de saturation . . . . .                                  | 66  |
| 2.3 | Paramètre de la commande PDC saturante . . . . .  | 66  |
| 2.4 | Paramètre de la commande PDC contrainte . . . . .   | 67  |
| 2.5 | Les paramètre local LTI . . . . .   | 73  |
| 2.6 | Paramètre de la commande PDC contrainte avec saturation non symétrique . . . . .                      | 75  |
| 2.7 | Les paramètres des régulateurs SOF . . . . .  | 81  |
| 3.1 | Paramètres du contrôleur PDC non quadratique . . . . .  | 90  |
| 3.2 | Paramètres du contrôleur SOF non quadratique . . . . .  | 100 |
| 3.3 | Resultats de comparaison entre l'approche non quadratique et l'approche quadratique . . . . .         | 100 |
| 3.4 | Résultats de comparaison entre l'approche proposée et l'approche dans [Saifia et al., 2015] . . . . . | 101 |
| 3.5 | Paramètres de la commande SOF descripteur non quadratique . . . . .                                   | 105 |
| 4.1 | Paramètres du contrôleur PDC non quadratique indépendante . . . . .                                   | 118 |
| 4.2 | Paramètres du contrôleur SOF non quadratique indépendante . . . . .                                   | 125 |
| 4.3 | Paramètres du contrôleur PDC non quadratique dépendante . . . . .                                     | 133 |

---

---

## Abréviations

|             |   |
|-------------|---|
| <i>BMI</i>  | Inégalité Matricielle Bilinéaire (Bilinear Matrix Inequality) |
| <i>LMI</i>  | Linear Matrix Inequality                                      |
| <i>QLF</i>  | Quadratic Lyapunov Function                                   |
| <i>PLF</i>  | Piecewise Lyapunov Function                                   |
| <i>NQLF</i> | Non Quadratic Lyapunov Function                               |
| <i>PDC</i>  | Parallel Distributed Compensation                             |
| <i>SOF</i>  | Static Output Feedback  |
| <i>LKF</i>  | Lyapunov-Krasovskii Function                                  |

## Symboles

|                           |  |
|---------------------------|--|
| $I_r$                     | Un ensemble $1 \dots r$                    |
| $\mathbf{R}$              | Un ensemble de nombres réels               |
| $\mathbf{R}^{n \times m}$ | Un ensemble de $n \times m$ matrice réelle |
| $\ \cdot\ _2^2$           | Norme $L_2$ au carré d'une grandeur        |
| $X + (*)$                 | $X + X^T$                                  |
| *                         | Le bloc de la matrice symétrique           |

---

# Références Personnelles

## Publications internationales

- [Nasri et al., 2019b] Nasri M., Saifia D., Chadli M., and Labiod S., “ $H_\infty$  static output feedback control for electrical power steering subject to actuator saturation via fuzzy Lyapunov functions,” Transactions of the Institute of Measurement and Control, vol. 41(12), pp. 3340-3351, 2019.
- [Nasri et al., 2019c] Nasri M., Saifia D., Chadli M., and Labiod S. “  $H_\infty$  switching fuzzy control of solar power generation systems with asymmetric input constraint,” Asian Journal of Control, vol. 21(4), pp.1869-1880, 2019.

## Communications internationales

- [Nasri et al., 2017] Nasri M., Saifia D., Chadli M., and Labiod S., “ $H_\infty$  Fuzzy Control for Electrical Power Steering Subject to Actuator Saturation,” Advanced Control Engineering Methods in Electrical Engineering Systems. ICEECA 2017. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol. 522, Springer, 2019.
- [Nasri et al., 2017] Nasri M., Saifia D., Chadli M., and Labiod S., « Fuzzy Static Output Feedback Control for Electrical Power Steering », in Proceedings of The International Conference on Automatic control, Telecommunication and Signals (ICATS'17), Annaba, Algérie, Dec. 11-12, 2017.
- [Nasri et al., 2019a] Nasri M., Saifia D., Chadli M., and Labiod S. “Fuzzy  $H_\infty$  Delay independent stabilization of depth control for underwater vehicle with input constraint”, ICEECA 2019. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol. 682. Springer, 2021.
- [Nasri et al., 2020] Nasri M., Saifia D., Chadli M., and Labiod S. “ $H_\infty$  Delay-independent stabilization for Takagi Sugeno fuzzy system based on Saturated Output Control”, 28th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'2020)– Saint-Raphaël, France, 16-19 June, pp. 653-658, 2020.

---

## Introduction générale

---

La synthèse d'une commande pour un système physique repose essentiellement sur la connaissance d'un modèle mathématique décrivant le comportement de tel système. Selon son comportement, ce modèle peut être linéaire, ou non linéaire. Les modèles linéaires représentent le comportement du système autour d'un point de fonctionnement donné. Ces modèles sont largement utilisés dans l'analyse de la stabilité et la stabilisation d'une large gamme des systèmes rencontrés en pratique. Contrairement aux systèmes linéaires où la synthèse d'une loi de commande se base sur une théorie bien maîtrisée sans garantir la stabilité du système sur tout l'espace d'état [De Laminat, 1993] [Kuo, 1995] [Egeland and Gravdahl, 2002], la commande des modèles non linéaires repose sur des outils plus complexes et qui nécessitent parfois de nouveaux développements théoriques [Chadli and Borne, 2012] [Bouarar, 2009]. La conception de lois de commande des systèmes non linéaires en se basant sur une description locale du système fournissent des performances dégradées dès qu'on s'éloigne du point de fonctionnement. De ce qui précède, on peut observer que la représentation linéaire malgré sa simplicité dans l'analyse et la conception de lois de commande, son utilité reste limitée. Tandis que, les modèles non linéaires conduisent à des lois de commande difficiles à déterminer (plus complexe). Le dilemme réside alors dans la détermination des modèles garantissant un bon compromis entre la simplicité des modèles linéaires et l'efficacité des modèles non linéaires. Dans ce sens, l'approche, dite multi-modèle, permet de produire une image efficace du système non linéaire sous forme d'interpolation entre des modèles linéaires invariants valides dans une zone de fonctionnement [Chadli and Borne, 2012]. Plusieurs catégories de multi-modèles existent dans la littérature, notamment les systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps (LPV) [Henrion and Garulli, 2005] [Zerar et al., 2009] ou les systèmes quasi LPV, encore appelés systèmes Takagi-Sugeno (T-S) [Takagi and Sugeno, 1985]. Ces derniers ont attiré beaucoup d'intérêt depuis plusieurs années [Takagi and Sugeno, 1985] [Boyd et al., 1994] [Wong et al., 1997] [Tanaka et al., 1998] [Chadli, 2002] [Cao and Frank, 2000] [Guerra and Vermeiren, 2004] [Feng, 2006] [Chadli, 2006]. En plus, ils possèdent une propriété d'approximation universelle des systèmes affines en la commande et présentent l'avantage de pouvoir décrire de façon exacte un modèle de connaissance non linéaire sur un compact de l'espace d'état [Tanaka and Wang, 2001]. Ainsi, l'intérêt principal de ce type est qu'il permet d'étendre de nombreux concepts théoriques de l'automatique linéaire au cas des systèmes non linéaires [Bouarar, 2009].

La méthode directe de Lyapunov est fréquemment utilisée pour réaliser l'étude de la stabilité, la synthèse de lois de commande et/ou d'observateurs pour les modèles T-S [Tanaka and Wang, 2001]. Dans ce contexte, le défi consiste à exprimer les conditions de stabilité sous forme d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs) [Boyd et al., 1994] qui peuvent être résolues efficacement par des algorithmes d'optimisation convexe [Cherifi et al., 2018] [Gahinet et al., 1995]. Dans la littérature, plusieurs travaux, concernant la stabilité des modèles T-S par les fonctions de Lyapunov quadratiques ont été publiés [Tanaka et al., 1998] [Saifia, 2013] [Feng, 2006] [Chadli, 2002]. L'avantage de l'approche quadratique vient du fait que les conditions de stabilisation et d'observation sont faciles à formuler en termes de LMIs. Cependant, l'obligation de satisfaire un ensemble de conditions LMIs vis-à-vis d'une seule fonction de Lyapunov rend les conditions obtenues par cette approche très conservatives. Pour surmonter ce problème, des auteurs ont utilisé l'approche non quadratique dans l'analyse de la stabilité et la stabilisation des modèles T-S [Chadli and Karimi, 2012] [Chadli and Guerra, 2012] [Guerra et al., 2008] [Mozelli et al., 2009a].

La saturation des actionneurs est un phénomène non linéaire très rencontré en pratique. L'effet non linéaire de saturation peut entraîner une dégradation des performances du système contrôlé, source de cycles limites, et peut même rendre le système instable [Cao et al., 2003] [Dang et al., 2017] [Jungers and Tarbouriech, 2016] [Seuret et al., 2016]. La conception de systèmes de contrôle avec saturation de l'actionneur a fait l'objet d'une attention croissante (voir, par exemple, [Dang et al., 2017] [Nguyen et al., 2017] [Shen et al., 2018] et les références qui y figurent). L'effet de saturation est un phénomène non linéaire par essence [Henrion, 1999] sa modélisation peut se faire de plusieurs manières différentes : par division de l'état par région de saturation [Da Silva et al., 1997], par modèle polytopique [Henrion, 1999], non-linéarité de secteur [da Silva Jr and Tarbouriech, 2006] [Tarbouriech and Biannic, 2009], ou bien par représentation multimodèle [Bezzaoucha, 2013]. La conception de lois de commande avec la saturation d'actionneur est souvent traitée soit par la synthèse d'une loi de commande contrainte où la détermination d'une limite des conditions initiales de l'état du système évite la saturation de la commande [Henrion, 1999]. D'autres travaux sont obtenus par la conception d'une loi de commande saturante où la commande peut saturer et le problème est traité par l'estimation du domaine d'attraction à l'intérieur duquel toute initialisation du système n'engendre pas d'instabilité en présence des saturation [Saifia, 2013] [da Silva Jr and Tarbouriech, 2006] [Tarbouriech and Biannic, 2009]. La conception de régulateurs dans le cas des systèmes linéaires saturés a été largement abordée et a conduit à des résultats très satisfaisants [Da Silva et al., 1997] [Henrion, 1999] [Henrion and Tarbouriech, 1999] [Tarbouriech et al., 2002] [Zaccarian and Teel, 2011] [Grimm et al., 2004] [Zheng and Wu, 2008]. Les méthodes d'analyse de la stabilité sont basées principalement sur les fonctions de Lyapunov et les approches LMIs [Da Silva et al., 1997] [Henrion, 1999] [Henrion and Tarbouriech, 1999] [Tarbouriech et al., 2002]. L'étude de performance est abordée généralement par l'approche  $H_\infty$  et le gain L2 [Hu et al., 2002]. Par contre, dans le cas des systèmes non linéaires, peu de travaux récents concernant la stabilisation des systèmes non linéaires avec saturation ont été publiés. Dans la plupart de ces travaux, les auteurs fondent leurs études sur un modèle de type T-S [Cao and Lin, 2003] [Zheng and Wu, 2008] [Saifia et al., 2012b] [Saifia et al., 2020] [Han and Morioka, 2007]. L'effet de saturation est modélisé par un modèle polytopique dans [Cao and Lin, 2003] [Saifia et al., 2012b]. La saturation

est convertie en zone morte dans [Aouaouda and Chadli, 2019] [Dang et al., 2017]. La synthèse de la stabilisation des systèmes non linéaires soumis à la saturation a été fait via différents types de fonctions de Lyapunov ; dans [Cao and Lin, 2003] [Han and Morioka, 2007] [Tarbouriech et al., 2011] la fonction de Lyapunov quadratique commune (CQLF : Common Quadratic Lyapunov Function) a été étendue. La fonction de Lyapunov quadratique floue (FWDLF : Fuzzy Weighting-Dependent Lyapunov Function) a été étendue dans [Kim et al., 2009]. Dans [Cherifi et al., 2019], la fonction de Lyapunov non quadratique PLF (Piecewise Lyapunov Function) est utilisée pour déterminer les conditions de stabilisation, la fonction polyquadratique est appliquée dans [Dang et al., 2017] [Bouarrar et al., 2013]. L'amélioration des performances et en particulier l'atténuation des perturbations a été établie via l'approche  $H_\infty$  [Du and Zhang, 2009] [Kim et al., 2009]. Les conditions de stabilité et stabilisation pour les systèmes non linéaires sont formulées et résolues comme un problème d'optimisation LMI [Cao and Lin, 2003] [Han and Morioka, 2007] [Kim et al., 2009] [Saifia et al., 2012a] [Saifia et al., 2015].

De plus, dans de nombreux systèmes physiques et biologiques, le taux de variation dans l'état du système dépend des états passés. Ce phénomène s'appelle 'un retard' et le système est appelé système à retard [Bourahala, 2018]. Par ailleurs, la présence du retard a une influence considérable sur le comportement d'un système bouclé. En effet, le phénomène de retard peut être une source d'instabilité et de dégradation des performances de la boucle fermée. L'analyse de la stabilité et la stabilisation des systèmes dynamiques à retard a fait l'objet d'efforts considérables de recherche, voir par exemples [Boyd et al., 1994] [Wang et al., 1996]. Dans ce contexte, l'étude de la stabilité et la stabilisation des systèmes à retard décrits par des modèles T-S est souvent basée sur l'utilisation des fonctions quadratiques, dites fonctions de Lyapunov-Krasovskii (LKF) pour déterminer les conditions stabilité/stabilisation sous forme des LMIs . Deux approches ont été proposées dans la littérature pour la détermination de ces conditions : approche du retard-indépendant [Wu et al., 2010] [Fridman, 2014] [Yoneyama, 2007], et celui du retard-dépendant [Zeng et al., 2014] [Kwon et al., 2016] [Bourahala et al., 2017] et [Cao and Frank, 2001] [Mahmoudabadi et al., 2017]. La première approche est capable de tester la stabilité globale, uniforme et asymptotique du système pour toute valeur positive arbitraire du retard . Cependant, l'approche du retard-dépendant permet d'assurer, uniquement, la stabilité pour toutes les valeurs du retard comprises dans l'intervalle. De son nom, l'approche basée sur retard-indépendant ne contient pas le terme du retard, ce qui s'avère conservatrice. Alors que, l'approche de stabilité "retard-dépendant" conduit vers des conditions de stabilisation plus relâchées que ceux "retard-indépendant" notamment quand la taille du retard est petite. De ce fait, de nombreuses études traitant le problème de stabilisation du retard-dépendant ont été proposées ces dernières années [Li et al., 2009a] [Gassara et al., 2012] [Gassara et al., 2014] [Zeng et al., 2014] [Bourahala et al., 2017] [Cao and Frank, 2001] [Mahmoudabadi et al., 2017]. Dans ce cadre, différentes techniques et méthodes de synthèse de contrôleurs pour les modèles T-S sont développées telles que, les matrices de pondérations libres [Souza et al., 2014], l'inégalité de Moon [Moon et al., 2001], l'inégalité intégrale de Jensen [Zhao et al., 2012] [Yang and Tong, 2015] et récemment, l'approche de décomposition du retard [Zhao et al., 2009] [Yang and Tong, 2015]. Ainsi, le défi est d'élargir l'intervalle du retard le plus possible. Pour les modèles T-S avec saturation d'actionneur, on distingue quelques travaux sur le critère indépendant du retard [Ting, 2008], et d'autre sur l'approche dépendante avec  $H_\infty$  [Gassara et al., 2012] [Selvaraj et al., 2017]. Cependant,

la source du conservatisme dans les conditions LMIs ne vient pas seulement de l'indépendance du retard mais aussi de la forme quadratique de la candidate de LKF. Cette problématique nous a motivé de proposer des conditions LMIs qui prennent en considération les fonctions d'appartenance via des fonctions LKF non quadratiques.

Les résultats issus de ce travail de recherche présente trois contributions principales :

- La conception d'une nouvelles commande quadratiques pour les systèmes non linéaires soumis à une saturation non symétrique d'actionneurs.
- La proposition des nouvelles conditions de stabilisation non quadratiques dépendante et indépendante des dérivée des fonctions d'appartenances, pour la synthèse de différentes lois de commande par retour d'état non linéaire et retour de sortie non linéaire via l'approche descripteur pour les modèles T-S continus.
- L'utilisation d'une nouvelle fonction de Lyapunov-Krasovskii non quadratique pour dériver les conditions de stabilisation LMI pour la synthèse des commandes PDC, non-PDC SOF pour les systèmes retardés.

La thèse est décomposée en quatre chapitres, organisées de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, les concepts élémentaires de la commande des systèmes T-S sont introduites, en particulier les moyens d'obtention des modèles T-S et l'analyse de stabilité et stabilisation. Ainsi, un tour d'horizon sur les principaux travaux de la littérature sur la synthèse de contrôleurs flous par retour d'état et de sortie, étendus aux systèmes descripteurs est d'abord présenté. Puis, nous avons donné un bref aperçu sur les différents types de la saturation, et la modélisation de l'effet de la saturation. Après, les principales études des modèles T-S à retard sont abordés. Ces différents concepts constituent la base des développements proposés dans ce manuscrit et permettent de positionner les contributions apportées.

Dans le contexte de la stabilisation quadratique des modèles T-S soumis à la saturation d'actionneur, le chapitre 2 est consacré à la détermination des conditions de stabilisation via une fonction de Lyapunov quadratique, pour les commandes PDC, SOF et SOF descripteur en présence de saturation d'actionneurs. Par la suite, ces conditions sont élargies aux systèmes avec perturbation externe par l'introduction du critère  $H_\infty$ . Deux méthodes sont exposées, à savoir, la commande contrainte et la commande saturante. Les conditions obtenues ont été exprimées sous forme LMIs. Deux applications sont données pour montrer l'efficacité des méthodes proposées ; la commande du système EPS (Electrical Power Steering) et la stabilisation du système de la suspension. Pour les deux systèmes, les effets des perturbations et de saturation sur la boucle fermée sont réduits. Ensuite, de nouvelles conditions de stabilisation pour les systèmes non linéaires soumis à des saturations non symétriques sont proposées. Une application sur la poursuite de point maximum de puissance pour un système photovoltaïque (PV) a démontré les bénéfices de la méthode proposée.

Le troisième chapitre est dédié à la stabilisation non quadratique des modèles T-S continus soumis à la saturation et aux perturbations externes. Dans ce contexte, une fonction de Lyapunov polyquadratique est utilisée afin de réduire le conservatisme de l'approche quadratique. Via cette



candidate, la synthèse de lois de commandes PDC, SOF et SOF basée sur la représentation descripteur est traitée. Deux types de fonctions polyquadratiques sont présentés, la première donne des conditions LMIs nécessitant l'approximation des dérivées des fonctions d'appartenance, par contre la deuxième surmonte ce problème. Les résultats obtenus sont étendus au cas de présence des perturbations externe via le critère  $H_\infty$ . Les approches proposées sont validées à travers la commande du système EPS.

Enfin, dans le quatrième chapitre, les résultats présentés dans les chapitre 2 et 3 sont étendus au cas de la présence du retard dans la boucle de commande. Les deux approches de stabilisation des modèles T-S à retard dépendantes et indépendantes sont utilisées. Les conditions de stabilisations LMIs résultantes sont établies via une fonction dite Lyapunov-Krasovskii. Premièrement, nous avons présenté les conditions quadratiques via une fonction de LKF quadratique. Puis, une synthèse de lois de commande non quadratiques est exposée. Les exemples d'application sont utilisés afin de démontrer l'avantage des méthodes proposées.

# État de l’art sur les modèles Takagi-Sugeno, saturation et retard

---

## 1.1 Introduction

Ce chapitre est réservé à la présentation des résultats fondamentaux portant sur la modélisation et l’analyse de la stabilité et la stabilisation des modèles flous du type Takagi-Sugeno (T-S), la saturation d’actionneurs, et le retard, utilisés le long de cette thèse. Au début, nous nous intéressons à la représentation T-S des systèmes non linéaires ainsi les méthodes d’obtention de tels modèles. Par la suite, une brève partie sera consacrée aux modèles descripteurs T-S. Ensuite, nous donnons un bref aperçu des principaux résultats concernant la stabilité, et la stabilisation des modèles T-S rencontrés dans la littérature. Dans ce contexte, la commande PDC et la commande SOF pour les deux formes de la fonction de Lyapunov, quadratique et non quadratique seront d’abord présentées. En utilisant ces lois de commande, la stabilisation des systèmes T-S perturbés sera étudiée à travers le critère  $H_\infty$ . Afin de bien comprendre le phénomène de saturation, quelques résultats préliminaires sur système soumis à la saturation seront exposés. Finalement, nous aborderons la problématique de la stabilité des modèles T-S en présence du retard.

## 1.2 Présentation des modèles T-S

Au cours des dernières décennies, la logique floue est devenue un axe de recherche très important [Verbruggen et al., 1999]. Particulièrement, elle trouve sa place dans le domaine du control pour une large gamme des systèmes [Zadeh et al., 1997] [Dash et al., 2003] [Liu et al., 2013]. Dans ce sens, les modèles flous de types T-S ont démontré leur utilité pour l’identification et/ou modélisation des non-linéarités des systèmes physiques [Vaidyanathan and Azar, 2016] [Ning et al., 2017] [Dahmani et al., 2013]. En effet, les modèles T-S permettent d’approximer avec exactitude n’importe qu’elle fonction non linéaire bornée [Morere, 2001]. Ainsi, les modèles T-S peuvent être décrite par des règles floues SI-ALORS qui représentent les relations linéaires locales d’entrée-sortie d’un système non linéaire. La principale caractéristique d’un modèle flou T-S est d’exprimer la dynamique locale de chaque

règle d'implication floue par un modèle de système linéaire [Takagi and Sugeno, 1985]. Ainsi, il est prouvé que les modèles flous de T-S sont des approximateurs universels [Chadli, 2002] [Tanaka and Wang, 2001].

Pour donner une idée sur la représentation en modèle T-S, on considère l'équation suivante qui donne la forme générale d'un système non linéaire dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = \psi(x(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

Où  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbf{R}^m$  est le vecteur de commande,  $y(t) \in \mathbf{R}^q$  est le vecteur de sortie,  $f(x(t))$ ,  $g(x(t))$ ,  $\psi(x(t))$  sont des fonctions non linéaires.

Le modèle flou obtenu est représenté par des règles flou SI-ALORS. Le  $i^{\text{ème}}$  règle du modèle flou T-S est donnée par la forme suivante :

Si  $\varsigma_1(t)$  est  $F_{i1}$  et ...  $\varsigma_q(t)$  est  $F_{qi}$  alors

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1 \dots r \quad (1.2)$$

Où  $\varsigma_1(t) \dots \varsigma_q(t)$  sont les variables de prémisses,  $F_{qi}$  l'ensemble flou,  $r$  le nombre des règles flou,  $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$  la matrice d'état,  $B_i \in \mathbf{R}^{n \times m}$  la matrice d'entrée,  $C_i \in \mathbf{R}^{q \times n}$  la matrice de sortie.

**Hypothèse 1.1.** Le système non linéaire (1.1) est continu et borné sur un espace compact  $\Sigma \in \mathbf{R}^n$  de son espace d'état, c'est à dire que ses entrées peuvent contenir des fonctions non linéaires continues, dépendantes de  $x$  et bornées dans  $\Sigma$

L'inférence du système flou est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(\varsigma(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(\varsigma(t))} \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(\varsigma(t))(C_i x(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(\varsigma(t))} \end{cases} \quad (1.3)$$

Finalement, le modèle (1.3) peut être décrit par des modèles linéaires locaux interpolés entre eux par des fonctions d'activation non linéaires vérifiant la propriété de somme convexe [Takagi and Sugeno, 1985] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\text{avec : } \zeta_i(\varsigma(t)) = \frac{\omega_i(\varsigma(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(\varsigma(t))}$$

et  $\omega_i(\varsigma(t)) = \prod_{j=1}^q F_{ij}(\varsigma_j(t))$  où  $F_{ij}(\varsigma_j(t))$  est le grade de la fonction d'appartenance  $\varsigma_j(t)$  dans  $F_{ij}$  et  $\forall t$ ,

$$\begin{cases} \omega_i(\varsigma(t)) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^r \omega_i(\varsigma(t)) > 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

avec :

$$\begin{cases} \zeta_i(\varsigma(t)) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) = 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

**Hypothèse 1.2.** Le long de ce manuscrit, le vecteur de prémisse est supposé dépendre uniquement de l'état mesurable.

### 1.3 Obtention des modèles T-S

Pour construire un modèle flou de types T-S, trois méthodes peuvent alors être considérées :

- **Par identification :** [Gasso et al., 1999] [Gasso, 2000]. Cette méthode est souvent utilisée dans le cas des systèmes dotés d'une dynamique difficile à décrire à l'aide d'un modèle analytique. Leur principe est basé sur le fait que l'identification des paramètres des modèles locaux autour des différents points de fonctionnement peuvent être obtenus à partir des mesures sur les entrées et les sorties du système. Dans ce cas, le problème d'identification du modèle non linéaire se simplifie à la recherche des modèles locaux (sous-modèles) LTI.
- **Par linéarisation :** [Ma et al., 1998] [Tanaka and Wang, 2001]. Dans cette méthode, les modèles locaux (LTI) sont obtenus à partir d'une linéarisation autour d'un ensemble de points de fonctionnement bien prédestinés. Par la suite, un choix judicieux des fonctions d'appartenance qui interconnectés ces modèles locaux LTI, nous a permet de décrire le modèles T-S de notre système non linéaire.
- **Par secteur non linéaire :** [Kawamoto et al., 1992] [Tanaka and Wang, 2001] et [Morere, 2001]. Cette méthode est la plus utilisée pour les systèmes qui ont un modèle mathématique bien définis avec des non linéarités bornés. Elle se base sur la transformation polytopique convexe des non linéarités d'un système dynamique. Cette technique fournit une approximation exacte du modèle non linéaire et de réduire le nombre de modèles locaux par rapport à la méthode de linéarisation. En raison de ces avantages, les résultats présentés dans ce manuscrit se sont basés sur l'approche par secteurs non linéaires.

#### 1.3.1 Méthode de secteur non linéaire

L'approche de secteur non linéaire est basée sur la connaissance analytique du modèle non linéaire du système. Les modèles T-S obtenus via l'utilisation de cette approche dépendent directement de nombre des non linéarités dans le modèle non linéaire. Cette méthode repose sur le lemme suivant :

**Lemme 1.1.** [Morere, 2001] soit  $f(x(t)) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction bornée, il existe toujours deux fonctions  $w_1(x(t))$  et  $w_2(x(t))$  ainsi que, deux scalaire  $\alpha$  et  $\beta$  tel que :

$$f(x(t)) = \alpha w_1(x(t)) + \beta w_2(x(t)) \quad (1.7)$$

avec :  $w_1(x(t)) + w_2(x(t)) = 1$  et  $w_1(x(t)) \geq 0, w_2(x(t)) \geq 0$

**Démonstration :** Sous l'hypothèse que la fonction  $f(x(t))$  est bornée telle que  $\alpha \leq f(x(t)) \leq \beta$ , il est possible d'écrire :

$$f(x(t)) = \alpha \zeta_1(x(t)) + \beta \zeta_2(x(t)) \quad (1.8)$$

avec :  $\alpha = \min(f(x(t)))$ ;  $\beta = \max(f(x(t)))$

$$\zeta_1 = \frac{f(x(t)) - \alpha}{\beta - \alpha}; \quad \zeta_2 = \frac{\beta - f(x(t))}{\beta - \alpha}$$

**Exemple 1 .1.** On considère le modèle non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1 + x_2 \sin(x_1) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1 - 3x_2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Si on transforme le système précédent en représentation d'état, on aura :

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(t)u(t) \quad (1.10)$$

$$\text{avec : } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \quad A(x(t)) = \begin{bmatrix} -1 & \sin(x_1(t)) \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour décrire ce système par un modèle flou de type T-S, en faisant appel au lemme 1.1, On a une seule non linéarité dans notre système :  $\varsigma(t) = \sin(x_1(t))$ , par conséquence,  $-1 \leq \varsigma(t) \leq 1$ .

Non considérons les fonctions non linéaires suivantes :

$$\zeta_1(t) = \frac{1 - \sin(x_1(t))}{2}; \quad \zeta_2(t) = \frac{\sin(x_1(t)) + 1}{2}$$

Alors, le terme non linéaire  $\varsigma(t)$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sin(x_1(t)) = \zeta_1(-1) + \zeta_2(1) \quad (1.11)$$

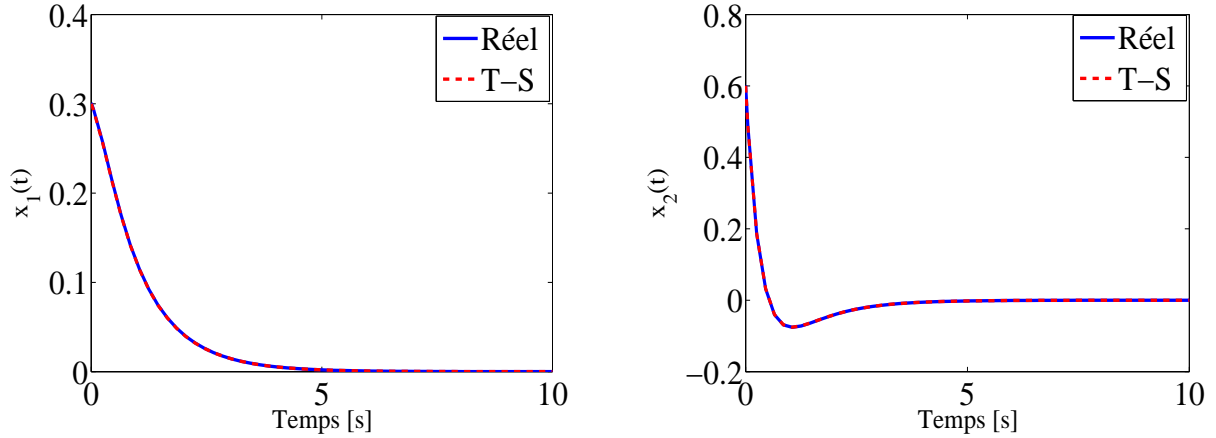
Ainsi, le modèle T-S est donné sous sa forme compacte par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \zeta_i(t) (A_i x(t) + B u(t)) \quad (1.12)$$

$$\text{où : } A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous considérons les conditions  $x(0) = [0.3 \quad 0.6]^T$  et  $u(t) = 0$  les réponses du système non linéaire (1.9) et son correspond en modèle T-S (1.12) sont montrées dans la figure 1.1. D'après ces résultats, on peut dire que le modèle T-S représente exactement le comportement du système non linéaire.

**Remarque 1.1.** La décomposition en secteurs non linéaires n'est pas unique. En effet, un seul système non linéaire peut être représenté par plusieurs modèles T-S selon les variables de prémisse sélectionnées et la décomposition choisie.



**Figure 1.1:** Réponses du système non linéaire et son modèle T-S

#### 1.4 Descripteurs T-S

Dans cette section, on va présenter quelques notions de base sur les descripteurs T-S qu'ils seront utilisés par la suite le long de cette thèse, ainsi que quelques résultats fondamentaux sur la stabilité, l'observabilité, et la stabilisation des descripteurs par retour de sortie (SOF). En effet, la représentation descripteur nous a permis de décrire beaucoup de modèles physiques écrits sous forme ordinaire et dont l'exploitation nécessite l'ajout de contraintes statiques [Liapounoff, 1907], et spécialement dans le cas des systèmes singuliers [Xu and Lam, 2006].

La première forme d'un modèle descripteur est donnée par [Liapounoff, 1907] :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $E \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ , et  $C \in \mathbf{R}^{q \times n}$  sont des matrices réelles,  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbf{R}^q$ ,  $u(t) \in \mathbf{R}^m$  représentent, respectivement, le vecteur d'état, le vecteur de sortie et le signal d'entrée (commande). La matrice  $E \in \mathbf{R}^{n \times n}$  peut être le cas échéant singulière c.-à-d.  $\text{rang}(E) = \delta < n$ .

L'obtention des modèles descripteurs T-S se fait de la même manière que les modèles T-S standard [Tanaka and Wang, 2001] [Morere, 2001]. Ainsi une forme descripteur T-S plus générale a été donnée par [Taniguchi et al., 2000] :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^l \theta_k(\varsigma(t)) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $E_k \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbf{R}^{n \times m}$ , et  $C_i \in \mathbf{R}^{q \times n}$  sont des matrices constantes,  $l$  et  $r$  représentent le nombre des règles floues dans les deux parties gauche et droite respectivement.  $\theta_k(\varsigma(t))$ ,  $\zeta_i(\varsigma(t))$  sont les fonctions d'appartenances, qu'ils vérifient la propriété de sommes convexes.

Dans la littérature, les modèles descripteurs des systèmes non linéaires font l'objet de plusieurs travaux dans ce qui concerne la stabilité, l'observabilité, et la stabilisation [Cobb, 1981] [Yoneyama and

[Ichikawa, 1999] [Taniguchi et al., 2000] [Bouarar et al., 2010]. Dans [Bouarar, 2009] [Bouarar et al., 2013], la stabilisation non quadratique des descripteurs T-S incertains a été étudiée, la synthèse d'observateur a été développé dans [Chadli and Guerra, 2012] [Guerra et al., 2015], les conditions de stabilisation ont été dérivées en présence de saturation dans [Dang et al., 2017] [Aouaouda and Chadli, 2019] et en présences de défaut dans [Osorio-Gordillo et al., 2018], etc.

## 1.5 Stabilité des modèles T-S

L'étude de la stabilité des systèmes T-S est généralement basée sur la méthode directe de Lyapunov [Liapounoff, 1907]. Le concept principal de cette méthode est fondé sur l'idée que si l'énergie d'un système est continûment dissipée, au final le système va atteindre un point d'équilibre. L'étude de la stabilité se fait lorsque le système n'est soumis à aucune excitation externe ( $u=0$ ). Les résultats proposés dans la littérature se diffèrent selon la forme de la fonction de Lyapunov choisit.

### 1.5.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Selon la théorie du Lyapunov, la stabilité d'un système repose sur leur comportement dynamique du point de vue de son énergie totale. Cette énergie est définie généralement par une fonction positive  $V(x(t))$  de l'état  $x$  du système. Le signe de sa dérivée temporelle dans un certain voisinage du point d'équilibre donne une information sur la stabilité du système. Le principal résultat de la théorie de stabilité de Lyapunov montre que pour un système autonome à temps continu  $\dot{x} = f(x)$ , l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable, s'il existe une fonction positive vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} i) V(x(t)) > 0, \forall x \neq 0 \\ ii) \dot{V}(x(t)) < 0, \forall x(t) \in R^n \text{ et } x \neq 0 \\ iii) V(0) = 0 \text{ et } \|x\| \rightarrow \infty, V(\infty) \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.15)$$

L'emploi de la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dont le pessimisme dépend de la forme particulière imposée à une fonction  $V(x(t))$ . Selon les objectives visées, cette forme dépend de la nature du système à étudier et on peut citer deux classes principales de fonctions de Lyapunov, quadratique et non quadratique.

### 1.5.2 Fonction de Lyapunov quadratique

La forme quadratique de la fonction de Lyapunov est la plus utilisée par les chercheurs pour étudier la stabilité et la stabilisation des modèles T-S. En effet, cette classe de fonction joue un rôle très important dans la commande des système représentés par des modèles T-S à partir des travaux de [Tanaka and Sugeno, 1992] [Wang et al., 1996] [Tanaka et al., 1996] [Chadli, 2002] [Akhenak, 2004] [Kruszewski, 2006] [Ichalal, 2009] [Saifia et al., 2012a] jusqu'à aux récents travaux : [Nguyen et al., 2017] [Dang et al., 2017]. La forme d'une telle fonction est donnée par :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \quad (1.16)$$

où  $P$  est une matrice symétrique définie positive.

D'autres formes de la fonction de Lyapunov ont été proposées afin de réduire le conservatisme dans

les conditions LMIs. Effectivement, au cas où aucune information sur les fonctions d'appartenances n'est prise en compte, les conditions LMI obtenues sont suffisants seulement, et par conséquence conservatives. La réduction du conservatisme dans les conditions LMIs joue sur la forme de la fonction de Lyapunov choisit, et/ou sur les théories de la relaxation des LMIs.

### 1.5.3 Moyens de la réduction de conservatisme

Pour permettre au lecteur d'appréhender les résultats proposés dans la suite de ce manuscrit, cette section va dévoiler les différents moyens de réduction de conservatisme.

#### 1.5.3.1 Choix de la fonction de Lyapunov

Les deux formes non quadratiques de la fonction de Lyapunov les plus utilisées, sont :

- **Fonctions de Lyapunov continue par morceaux** : il existe deux modèles dans cette forme de fonctions. Le premier est utilisé uniquement dans le cadre des modèles T-S avec des fonctions d'activation à support local borné. Ce type est proposé dans les travaux de [Johansson, 1999] [Johansson et al., 1999] [Feng and Harris, 2001] [Feng, 2004]. son principe consiste à partitionner l'espace d'état contenant l'origine ( $\{\Xi_s\}_{s \in I_0} \subseteq \mathbf{R}^n$ ), et la partition de l'espace d'état ne contenant pas l'origine ( $\{\Xi_s\}_{s \in I_1} \subseteq \mathbf{R}^n$ ). Par conséquence, la fonction de Lyapunov candidate est donnée par :

$$\begin{cases} V(x(t)) = \{x^T(t) P_s x(t), & x(t) \in \{\Xi_s\}_{s \in I_0} \\ \left[ \begin{array}{c|c} x(t) & 1 \end{array} \right] \bar{P}_s \left[ \begin{array}{c|c} x(t) & 1 \end{array} \right]^T, & x(t) \in \{\Xi_s\}_{s \in I_1} \end{cases} \quad (1.17)$$

avec  $I_0$  est l'index des régions de l'espace d'état contenant l'origine et  $I_1$  est l'index des régions de l'espace d'état ne contenant pas l'origine.

Le deuxième type est pour les fonctions d'activation à support global, où la partition dans ce cas est impossible à réaliser. Elle est donnée par [Chadli, 2002] [Chadli, 2006] :

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= \max(V_1(x(t)), V_2(x(t)), \dots, V_r(x(t))), \\ V_i(x(t)) &= x^T P_i x, \quad P_i \geq 0, i \in I_r \end{aligned} \quad (1.18)$$

- **Fonctions de Lyapunov polyquadratiques** : Ce type de candidate de fonction de Lyapunov est basée sur l'interpolation de plusieurs fonctions quadratiques. La forme la plus connue est [Mozelli et al., 2009a] [Bouarar et al., 2013] [Guerra et al., 2012] [Asemami and Majd, 2013] :

$$V(x(t)) = x^T(t) P(\zeta(\varsigma(t))) x(t) \quad (1.19)$$

avec  $P(\zeta(\varsigma(t))) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) P_i$

Notons que, si on remplace  $P_i$  par  $P$ , on revient au cas quadratique.

Dans le même sens des fonctions polyquadratiques, [Rhee and Won, 2006] [Mozelli et al.,



2009a] ont proposés une nouvelle forme basée sur l'intégration de la fonction polyquadratique :

$$V(x(t)) = 2 \int_{\Gamma(0,x)} f(\Phi) d\Phi \quad (1.20)$$

où :  $f(\Phi) = P(\zeta(\varsigma(t)))$ , et  $\Gamma(0, x)$  est une fonction de l'origine 0 à l'état actuel .

### 1.5.3.2 Lemmes de relaxation

Plusieurs solutions ont été proposées afin de réduire la source de conservatisme via de l'interaction engendrée par les modèles croisés dans les LMIs. Parmi les schémas les plus satisfaisantes, on cite :

**Lemme 1.2.** [Tanaka and Sano, 1994] Pour  $i \in I_r$ ,  $j \in I_r$ ,  $\forall \zeta_i > 0$ ,  $\forall \zeta_j > 0$ , la condition  $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \zeta_i \zeta_j \Psi_{ij} < 0$  est vérifiée si les conditions suivantes le sont :

$$\Psi_{ii} < 0 \quad \text{pour } i \in I_r \quad (1.21)$$

$$\Psi_{ij} + \Psi_{ji} < 0 \quad \text{pour } i, j \in I_r, \text{ et } i < j \quad (1.22)$$

**Lemme 1.3.** [Tuan et al., 2001] Pour  $i \in I_r$ ,  $j \in I_r$ ,  $\forall \zeta_i > 0$ ,  $\forall \zeta_j > 0$ , la condition  $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \zeta_i \zeta_j \Psi_{ij} < 0$  est vérifiée si les conditions suivantes le sont :

$$\Psi_{ii} < 0 \quad \text{pour } i \in I_r \quad (1.23)$$

$$\frac{2}{r-1} \Psi_{ii} + \Psi_{ij} + \Psi_{ji} < 0 \quad \text{pour } i, j \in I_r, \text{ et } 1 \leq i \neq j \leq r \quad (1.24)$$

**Lemme 1.4.** [Xiaodong and Qingling, 2003] Pour  $i \in I_r$ ,  $j \in I_r$ ,  $\forall \zeta_i > 0$ ,  $\forall \zeta_j > 0$ , la condition  $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \zeta_i \zeta_j \Psi_{ij} < 0$  est vérifiée si les conditions suivantes le sont :

$$\Psi_{ii} > \Theta_{ii} \quad \text{pour } i \in I_r \quad (1.25)$$

$$\Psi_{ij} + \Psi_{ji} > \Theta_{ij} + \Theta_{ji} \quad \text{pour } i, j \in I_r, \text{ et } i < j \quad (1.26)$$

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \cdots & \Theta_{1r} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \cdots & \Theta_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{r1} & \Theta_{r2} & \cdots & \Theta_{rr} \end{bmatrix} > 0 \quad (1.27)$$

### 1.5.4 Stabilité quadratique des modèles T-S

Les conditions de stabilité dans cette section reposent sur la forme quadratique de la fonction de Lyapunov (1.16). Pour un système T-S autonome, on peut écrire :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) A_i x(t) \quad (1.28)$$

Le modèle T-S (1.28) est globalement asymptotiquement stable  $\dot{V}(x) < 0$ , c'est-à-dire :

$$x^T(t) \left( \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i^T P + P A_i) \right) x(t) < 0 \quad (1.29)$$

Le théorème suivant résume les conditions de stabilisation LMIs proposées par [Tanaka and Sugeno, 1992] :

**Théorème 1.1.** Le modèle T-S (1.28) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice  $P = P^T > 0$  telles que :

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad \forall i \in I_r \quad (1.30)$$

**Remarque 1.2.** Les conditions LMIs définies dans (1.30) sont très conservatives car elles ne contiennent aucune information sur les fonctions d'appartenance, ce qui implique que ces conditions sont seulement suffisantes. Pour surmonter ce problème, d'autres formes de fonctions de Lyapunov peuvent être adoptées [Sala and Arino, 2007], par exemple la forme polyquadratique (1.19) ou la forme continue par morceau (1.17).

### 1.5.5 Stabilité non quadratique des modèles T-S

Les conditions de stabilité dans ce cas sont dérivées à partir des fonctions de Lyapunov non-quadratiques de forme polyquadratique ou continues par morceaux :

#### 1.5.5.1 Stabilité non quadratique basée sur des fonctions polyquadratique

L'utilisation des fonctions polyquadratiques (1.19) conduit à l'apparition des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance dans les conditions de stabilité qui entraîne la perte de la propriété de convexité (dans le cas continu). Pour résoudre ce problème, plusieurs approches ont été proposées. La solution consiste à supposer que les bornes des dérivées temporelles sont connues [Blanco, 2001] [Jadbabaie, 1999] [Tanaka and Wang, 2001] [Chadli, 2002] [Mozelli et al., 2009a]. Ainsi parmi les premières conditions de stabilisation non quadratiques proposées pour les modèles T-S sont ceux de [Tanaka et al., 2003].

**Théorème 1.2.** [Tanaka et al., 2003] Supposons que  $|\dot{\zeta}_k(t)| \leq \alpha_k$ , pour  $k \in I_{r-1}$ , le modèle T-S (1.28) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices  $P_i = P_i^T > 0$  telles que :

$$P_k \geq P_r, \quad k \in I_{r-1} \quad (1.31)$$

$$\frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) - \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_k (P_k - P_r) < 0, \quad i \leq j \quad (1.32)$$

**Démonstration :** voir [Tanaka et al., 2003]

D'autres conditions moins conservatives sont proposées par [Mozelli et al., 2009a] :

**Théorème 1.3.** [Mozelli et al., 2009a] Considérons les fonctions d'activation vérifiant  $|\dot{\zeta}_i(t)| \leq \alpha_i$ ,  $\alpha_i > 0$ , le modèle T-S 1.28 est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques

$N_3$  et  $P_i > 0$ ,  $\forall i \in I_r$ , et des matrices  $N_1$ ,  $N_2$ , telles que :

$$\begin{cases} P_i + N_3 > 0 \\ \Upsilon_i > 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

avec :

$$\Upsilon_i = \begin{bmatrix} P_\Delta - N_1 A_i - A_i^T N_1^T & (*) \\ P_i - N_2 A_i - N_1^T & N_2 + N_2^T \end{bmatrix}$$

$$P_\Delta = \sum_{i=1}^r \alpha_i (P_i + N_3)$$

**Démonstration :** voir [Mozelli et al., 2009a]

D'autres conditions moins conservatives ont été proposées aussi dans [Mozelli et al., 2009a] en introduisant une matrice de relaxation présentée dans le théorème suivant :

**Théorème 1.4.** Considérons les fonctions d'activation vérifiant  $|\dot{\zeta}_i(t)| \leq \alpha_i$ ,  $\alpha_i > 0$ , l'équilibre du modèle T-S (1.28) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices  $P_i = P_i^T > 0$  et  $X$  telles que :

$$P_i + X \geq 0 \quad (1.34)$$

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k (P_k + X) + \frac{1}{2} \left( A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i \right) < 0, \quad i \leq j \quad (1.35)$$

$$\forall i \in I_r, \forall j \in I_r$$

**Démonstration :** [Mozelli et al., 2009a]

Dans le même sens, et afin d'éviter l'apparition des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance dans les conditions de stabilisation, les auteurs de [Rhee and Won, 2006] [Guelton, 2014] [Cherifi et al., 2018] ont proposé des conditions de stabilité en se basant sur la fonction de Lyapunov définie à partir d'intégrale curviligne (1.20).

### 1.5.5.2 Stabilité non-quadratique basée sur des fonctions continues par morceaux

Comparant avec la forme quadratique (1.16), les conditions de stabilité obtenues à partir de fonctions continues par morceaux (1.17) sont moins restrictives. Le premier travail enregistré dans ce cadre, est ceux de [Johansson et al., 1999] où il a écrit les conditions de stabilité des modèles T-S affines  $\left( \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + a_i) \right)$  sous forme LMIs. Par la suite, une série des travaux ont été proposés pour les systèmes T-S incertains discrets et affines [Feng et al., 2005] [Feng, 2004] [Zhang and Feng, 2008]. l'utilisation de la fonction définie par :

$V(x(t)) = \max(V_1(x(t)), V_2(x(t)), \dots, V_r(x(t)))$ ,  $V_i(x(t)) = x^T P_i x$  permet à [Chadli, 2002] proposer les résultats suivants :

**Théorème 1.5.** [Chadli, 2002] le modèle T-S (1.28) est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices  $P_i = P_i^T > 0$ ,  $\forall i \in I_r$  et des scalaires  $\tau_{ijk} \geq 0$ , telles que :

$$A_i^T P_j + P_j A_i + \sum_{k=1}^r \eta_{ijk} (P_j - P_k) < 0, \quad \forall (i, j) \in I_r^2 \quad (1.36)$$

**Démonstration :** voir [Chadli, 2002]

Notant que si les fonctions d'activation sont à support global, l'approche se réduit à l'approche quadratique [Chadli, 2002] [Chadli, 2006] [Saifia, 2013].

## 1.6 Stabilisation des modèles T-S

La stabilité en boucle fermée d'un modèle T-S peut être assurée par la synthèse d'une commande conforme. Dans cette partie, nous présentons un tour d'horizon sur la synthèse de lois de commande pour les systèmes T-S via l'approche quadratique et non quadratique.

### 1.6.1 Stabilisation quadratique

Cette section présente un résumé sur les résultats essentiels obtenu sur la stabilisation des modèles T-S basant sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov quadratique (1.16).

#### 1.6.1.1 Stabilisation quadratique par la commande PDC

Au premier lieu, la stabilisation des modèles T-S a été prouvée en se basant sur l'application de commande PDC [Wang et al., 1996]. Le principe de cette loi de commande est de concevoir un régulateur par retour d'état linéaire relatif à chaque modèle local LTI. La loi de commande globale est une interpolation des lois de commande linéaires locales par les mêmes fonctions d'activations  $\zeta_i(\varsigma(t))$  que celles du modèle T-S. La conception du contrôleur dans cette loi de commande consiste à déterminer les matrices  $K_i \in \mathbf{R}^n$  qui représentent les gains du contrôleur :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) K_i x(t) \quad (1.37)$$

Ainsi, le modèle T-S en boucle fermée via la commande PDC s'écrit comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) \zeta_j(\varsigma(t)) (A_i + B_i K_j) x(t) \quad (1.38)$$

ou en autre forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i^2(\varsigma(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i \prec j} \zeta_i(\varsigma(t)) \zeta_j(\varsigma(t)) \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \quad (1.39)$$

Les conditions de stabilisations obtenues par [Tanaka et al., 1998] sont résumées dans le théorème suivant :

**Théorème 1.6.** Le modèle T-S (1.4) est stable par la loi de commande (1.37), s'il existe une matrice symétrique  $P = P^T > 0$  telle que :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} \prec 0, \quad \forall i \in I_r \quad (1.40)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad i \prec j \quad (1.41)$$

**Démonstration :** voir [Tanaka et al., 1998].

L'inconvénient principal de cette loi de commande est son conservatisme, car basée sur un retour d'état (non disponible dans la pratique). Pour résoudre ce problème, plusieurs approches ont été développées dans ce sens, par exemple la commande SOF (static output feedback) a été étudiée ces dernières années [Chadli, 2002] [Saifia et al., 2012a] [Nguyen et al., 2017]. Une autre solution consiste à utiliser des observateurs pour les états non mesurables [Guerra et al., 2015] [Asemani and Majd, 2013] [Aouaouda et al., 2014].

### 1.6.1.2 Stabilisation quadratique par la commande SOF (Static Output Feedback)

On s'intéresse dans cette partie à la commande par retour de sortie statique (SOF). Différemment aux autres lois de commande par retour de sortie dynamique, où le coût de calcul s'augmente considérablement, la commande SOF ne nécessite pas la résolution d'un système d'équations en ligne (le calcul des gains se fait en off-line). Par ailleurs, cette approche présente une solution adéquate pour le problème de l'indisponibilité des mesures de certains états du système. Dans le cadre des modèles T-S, la loi de commande SOF est donnée par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) K_i y(t) \quad (1.42)$$

en boucle fermée, le système T-S (1.4) devient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) \zeta_j(\varsigma(t)) \bar{G}_{ij} x(t) \quad (1.43)$$

avec :  $\bar{G}_{ij} = A_i + B_i K_j C$

La substitution de la matrice  $G_{ij}$  dans Théorème 1.6. par la matrice  $\bar{G}_{ij}$  (commande PDC), nous donne les conditions de stabilisation SOF. Les inégalités matricielles obtenues lors de ce changement sont des BMI (bilinear matrix inequality) car la méthode du changement de variable est inapplicable ici. Pour résoudre ces inégalités, [Chadli, 2002] a proposé une formulation LMI sous l'hypothèse que la matrice C est de plain rang ligne. Les conditions de stabilisation résultantes sont données par le théorème suivant :

**Théorème 1.7.** [Chadli, 2002] s'il existe une matrice symétrique  $Q > 0$ ,  $W_{ij}$  et des matrices  $F_i$  et  $V$  telles que :

$$A_i Q + B_i F_i C + (*) + W_{ii} < 0, \quad \forall i \in I_r \quad (1.44)$$

$$(A_i + A_j) Q + (B_i F_j + B_j F_i) C + (*) + 2W_{ij} \leq 0, \quad \forall (i, j) \in I_r^2 \quad i < j \quad (1.45)$$

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1r} \\ \cdot & W_{22} & \dots & W_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{1r} & \dots & \dots & W_{rr} \end{bmatrix} > 0 \quad (1.46)$$

$$VC = CQ \quad (1.47)$$

Alors, le système en boucle fermée (1.43) est globalement asymptotiquement stable.

**Démonstration :** voir [Chadli, 2002].

L'égalité (1.47) peut être approximé par des conditions LMIs avec la minimisation d'un variable supplémentaire  $\lambda$  telles que :

$$\begin{bmatrix} \lambda I & VC - CQ \\ * & \lambda I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.48)$$

**Remarque 1.3.** les conditions de stabilisation LMI proposées dans Théorème 1.7. ne sont pas strictes. En effet, l'égalité  $VC = CQ$  est approximé selon une variable supplémentaire. Cette problématique a été traitée par [Bouarar et al., 2010] à travers l'utilisation d'une augmentation du modèles T-S en forme descripteur.

## 1.6.2 Stabilisation non quadratique

Dans cette section, nous présentons d'autres résultats de stabilisation des modèles T-S en se basant sur des fonctions de Lyapunov non quadratiques.

### 1.6.2.1 Stabilisation non quadratique par la commande PDC

*a. Fonction de Lyapunov polyquadratique :* La formulation de conditions de la stabilisation via la candidate de Lyapunov polyquadratique (1.18) en terme LMIs exige l'existence a priori des bornes sur les dérivées de fonctions d'activation [Guerra and Vermeiren, 2004] [Mozelli et al., 2009b] [Tanaka et al., 2003] [Bouarar et al., 2013], etc. Parmi nombreux résultats développés dans ce sens, on cite le travail de [Mozelli et al., 2009b] qui est résumé dans le théorème suivant :

**Théorème 1.8.** [Mozelli et al., 2009a] Considérons que  $\zeta_i(\varsigma(t))$  vérifiant la condition  $|\dot{\zeta}_i(\varsigma(t))| \leq \phi_i$  avec  $\phi_i \geq 0$ . Le système T-S (1.4) est asymptotiquement stable par la loi de commande (1.37), s'il existe un scalaire  $\tau$ , des matrices symétriques  $\Upsilon$  et  $T_i$ , et des matrices  $X$ ,  $\Psi_j \forall i \in I_r, j \in I_r$ , telles que :

$$\begin{cases} T_i > 0, & \forall i \in I_r \\ T_i + \Upsilon > 0, & \forall i \in I_r \\ \Xi_{ij} < 0, \bar{\Xi}_{ij} < 0, & \forall i < j \in I_r \end{cases} \quad (1.49)$$

avec :

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} T_\varphi - A_i X^T - X A_i^T + B_i \Psi_j^T + \Psi_j B_i^T & * \\ T_i - \tau (A_i X^T - B_i \Psi_j^T) + X & \tau (X + X^T) \end{bmatrix}$$

$$T_\varphi = \sum_{i=1}^r \phi_i (T_i + \Upsilon), \quad \bar{\Xi}_{ij} = \Xi_{ij} + \Xi_{ji}$$

**Démonstration :** voir [Mozelli et al., 2009a]

L'apparition des dérivées temporelles de fonctions d'activation dans les conditions de stabilisation, représente un défi pour les chercheurs. Pour surmonter ce problème, d'autres travaux sont menés à bien de développer des LMIs indépendant des dérivée des fonctions d'appartenances, ces condition LMI sont obtenues via des fonctions de Lyapunov à intégrale curviligne [Cherifi et al., 2018] [Cherifi et al., 2019] [Guelton, 2014].

b. **Fonction d'intégrale curviligne** : Les conditions de stabilisation dérivées par la fonction de Lyapunov définie à partir d'intégrale curviligne (1.20) (indépendante du chemin parcouru) ont été proposées premièrement sous forme d'Inégalités Matricielles Bilinéaires (BMI) [Rhee and Won, 2006]. Cependant, ces BMI ne permettent pas de garantir une optimisation convexe globale, de nombreux travaux ont été réalisés afin d'obtenir des conditions LMIs [Guelton, 2014] [Liu et al., 2013] [Márquez et al., 2013] [Mozelli et al., 2009a] [Tognetti et al., 2011] [Cherifi et al., 2018] [Cherifi et al., 2019]. Parmi les premiers résultats proposés est celui de [Mozelli et al., 2009b] résumé dans le théorème suivant :

**Théorème 1.9.** [Mozelli et al., 2009a] :

Le modèle T-S (1.4) est asymptotiquement stable par la loi de commande (1.37), s'il existe un scalaire  $\tau$ , des matrices symétriques  $T_i > 0$ ,  $\forall i \in I_r$ ,  $\forall j \in I_r$ , et des matrices  $\Psi_j$ ,  $\bar{X}$ , telles que :

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{ij} < 0 & \forall i < j \in I_r \\ \Delta_{ii} < 0 & \forall i \in I_r \end{cases} \quad (1.50)$$

$$\text{avec : } \Delta_{ii} = \begin{bmatrix} -A_i \bar{X} - \bar{X} A_i^T + B_i \Psi_j^T + B_j^T \Psi_j & * \\ T_i - \tau (A_i \bar{X}^T - B_i \Psi_j^T) + \bar{X} & \tau (\bar{X} + \bar{X}^T) \end{bmatrix}$$

**Démonstration** : voir [Mozelli et al., 2009a]

**Remarque 1.4.** Récemment, l'application du concept de D-stabilité avec une candidate de Lyapunov non quadratique, a permis à [Cherifi et al., 2019] d'obtenir des conditions LMIs en tenant en compte les spécifications de la boucle fermée.

### 1.6.2.2 Stabilisation non quadratique par la commande SOF

Généralement, La plus part des résultats proposés sont basés sur des fonctions quadratiques. En revanche, peu d'études ont été consacrées à la synthèse d'une loi de commande SOF par des fonctions polyquadratiques. En particulier, dans [Bouarar, 2009], les auteurs ont développé des conditions de stabilisation non quadratiques pour les modèles par une loi de commande SOF sous la forme suivante :

$$u(t) = \left( \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) L_i \right) \left( \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) \Omega_1^i \right)^{-1} y(t) \quad (1.51)$$

dite commande non-PDC SOF.

**Théorème 1.10.** [Bouarar, 2009] :

Le système T-S (1.4) est asymptotiquement stable par la commande non quadratique-SOF (1.51), s'ils existe, pour tout  $i, j \in I_r$ , des matrices  $\Omega_1^j = \Omega_{1j}^T \succ 0$ ,  $\Omega_5^j$ ,  $\Omega_7^j$ ,  $\Omega_8^j$ ,  $L_i$ , telles que les conditions LMI suivantes sont satisfaites, pour  $i \in I_r$ ,  $1 \leq i \neq j \leq r$  et  $k \in I_{r-1}$  :

$$\begin{cases} \Upsilon_{ii} < 0 \\ \frac{1}{1-r} \Upsilon_{ij} + \frac{1}{2} (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}) < 0 \\ \Omega_1^k - \Omega_1^r \geq 0 \end{cases} \quad (1.52)$$

où :

$$\Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} A_i \Omega_1^j + B_i \Omega_7^j + (*) - \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (\Omega_1^k - \Omega_1^r) & (*) & (*) \\ \Omega_8^j B_i^T + C_i \Omega_1^j & -\Omega_5^j - \Omega_5^{jT} & (*) \\ \Omega_9^j B_i^T - \Omega_7^j & L_i - \Omega_8^j & -\Omega_9^j - \Omega_9^{jT} \end{bmatrix}$$

avec  $\phi_k$  est la borne inférieure de la dérivée de la fonction d'activation  $\zeta_k(\varsigma(t))$ .

**Démonstration :** Voir [Bouarar, 2009].

Plus récent, des nouvelles conditions de stabilisation SOF pour les modèles T-S discret via l'approche descripteur ont été proposées dans [Chadli and Guerra, 2012], en tenant en compte l'incertitude sur la sortie  $y(t)$  :

Considérant le modèle T-S discret suivant :

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (\hat{A}_i x(t) + \hat{B}_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) \hat{C}_i x(t) \end{cases} \quad (1.53)$$

avec :  $\hat{A}_i = A_i + \Delta A_i$ ,  $\hat{B}_i = B_i + \Delta B_i$ ,  $\hat{C}_i = C_i + \Delta C_i$ .

Les conditions de stabilisation sont données dans le théorème suivant :

**Théorème 1.11.** [Chadli and Guerra, 2012] Le modèle T-S (1.53) est Asymptotiquement stable via la commande SOF (1.42), s'il existe des matrices  $P_{i1} > 0$ ,  $P_{i2}$ ,  $P_{i3}$ ,  $G_{i1}^k$ ,  $G_{i2}^k$ ,  $H_{i1}^k$ ,  $H_{i2}^k$ ,  $N_i$ , une matrice non singulière  $G_3$ , telles que les LMIs suivantes sont satisfaites pour tous  $(i, j, k) \in I_r$ ,  $i \neq j$  :

$$\Sigma_{ii}^k < 0 \quad (1.54)$$

$$\frac{2}{r-1} \Sigma_{ii}^k + \Sigma_{ij}^k + \Sigma_{ji}^k \leq 0 \quad (1.55)$$

avec :

$$\Sigma_{ij}^k = \begin{bmatrix} \Gamma_{ij}^k + \varepsilon_k E_{ij1} & E_{ij2}^k \\ (*) & \varepsilon_k I \end{bmatrix}$$

$$E_{ij1}^k = \begin{bmatrix} F_{ai}^T F_{aj} + F_{ci}^T F_{cj} & 0 & 0 \\ (*) & F_{bi}^T F_{bj} & 0 \\ (*) & (*) & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{ij2}^k = \begin{bmatrix} G_{j1}^k D_{ai} & G_{j1}^k D_{bi} & J N_i D_{cj} \\ G_{j2}^k D_{ai} & G_{j2}^k D_{bi} & N_i D_{cj} \\ H_{j1}^k D_{ai} & H_{j1}^k D_{bi} & J N_i D_{cj} \\ H_{j2}^k D_{ai} & H_{j2}^k D_{bi} & N_i D_{cj} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{bmatrix} \Gamma_{ij1}^k & \Gamma_{ij2}^k & \Gamma_{ij3}^k & \left( H_{j2}^k A_i + N_i C_j \right)^T - J G_3 \\ (*) & \Gamma_{ij4}^k & \Gamma_{ij5}^k & \left( H_{j2}^k B_i - G_3 \right)^T - G_3 \\ (*) & (*) & \Gamma_{ij6}^k & P_{k2} - J G_3 - H_{j2}^T \\ (*) & (*) & (*) & P_{k2} - G_3 - G_3^T \end{bmatrix},$$



$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ij1}^k &= G_{j1}^k A_i + J N_i C_j + \left( G_{j1}^k A_i + J N_i C_j \right)^T \\
 \Gamma_{ij2}^k &= G_{j1}^k B_i + J G_3 + \left( G_{j2}^k A_i + N_i C_j \right)^T \\
 \Gamma_{ij3}^k &= G_{j2}^k B_i - G_3 + \left( G_{j2}^k B_i - G_3 \right)^T \\
 \Gamma_{ij4}^k &= \left( H_{j1}^k A_i + J N_i C_j \right)^T - G_{j1}^k \\
 \Gamma_{ij5}^k &= \left( H_{j1}^k B_i + J G_3 \right)^T - G_{j2}^k \\
 \Gamma_{ij5}^k &= P_{k1} - H_{j1}^k - H_{j1}^{kT} \\
 K_i &= G_3^{-1} N_i, \text{ et } J \in R^{n \times m} \text{ une matrice arbitraire.}
 \end{aligned}$$

**Démonstration :** Voir [Chadli and Guerra, 2012].

**Remarque 1.5.** Notons que, les théorèmes présentés dans cette thèse donnent principalement des conditions de stabilisation dans le cadre des systèmes non linéaires décrits par les modèles T-S continus à l'exception de quelques résultats sont exposés pour la classe des modèles T-S discrets (comme le précédent [Chadli and Guerra, 2012]) vu le manque des travaux dans ce contexte dédiées aux systèmes T-S continus.

## 1.7 Stabilisation des modèles T-S incertains et perturbés

La représentation des systèmes physiques par des modèle T-S n'est pas toujours idéale. En effet, l'inclusion des incertitudes et des perturbations sont indispensables. Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'incertitude structurée et d'une perturbation bornée en norme. On considère le modèle T-S continu incertain et perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) \left( \hat{A}_i x(t) + \hat{B}_{wi} w(t) + \hat{B}_i u(t) \right) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) \left( \hat{C}_{1i} x(t) + \hat{D}_{wi} w(t) + \hat{D}_i u(t) \right) \end{cases} \quad (1.56)$$

où :  $z(t) \in \mathbf{R}$  est le vecteur de la sortie à contrôler,  $w(t) \in \mathbf{J}_2$  est la perturbation externe, avec :

$$\mathbf{J}_2 = \{w \in \mathbf{R}^n \mid \|w\|_2 \leq \bar{w}, \bar{w} > 0\},$$

$$\hat{A}_i = A_i + \Delta A, \quad \hat{B}_{wi} = B_{wi} + \Delta B_w, \quad \hat{B}_i = B_i + \Delta B_i,$$

$$\hat{C}_{1i} = C_{1i} + \Delta C_1, \quad \hat{D}_{wi} = D_{wi} + \Delta D_w, \quad \hat{D}_i = D_i + \Delta D_i,$$

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B_w & \Delta B \end{bmatrix} = \Gamma \Theta \begin{bmatrix} N_A & N_{B_w} & N_B \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \Delta C_1 & \Delta D_w & \Delta D \end{bmatrix} = \Gamma_z \Theta \begin{bmatrix} N_{C_1} & N_{D_w} & N_D \end{bmatrix}$$

D'où  $\Gamma$ ,  $\Gamma_z$ ,  $N_A$ ,  $N_{B_w}$ ,  $N_B$ ,  $N_{C_1}$ ,  $N_{D_w}$ ,  $N_D$  sont des matrices constantes avec des dimensions appropriés et  $\Theta^T(t) \Theta(t) \leq I$ .

**Remarque 1.6.** Le système (1.56) représente le cas général qui englobe les modèles T-S soumis à des perturbations externe et aux incertitudes. Par la suite l'utilisation du critère  $H_\infty$  pour la stabilisation des modèles T-S perturbé seulement, représente un cas particulier des résultats donnés au-dessous.

Cependant, pour garantir l'atténuation de l'effet de perturbation externe, le critère  $H_\infty$  est utilisé, l'idée de base de ce critère est de minimiser la norme dite  $H_\infty$  définie comme suit :

**Définition 1.1.** [Boyd et al., 1994] On appelle norme  $H_\infty$  du transfert  $\Upsilon_{zw}$  entre  $z(t)$  et  $w(t)$  :

$$\|\Upsilon_{zw}\|_\infty = \sup_{w(\cdot) \neq 0} \frac{\|z(\cdot)\|_2}{\|w(\cdot)\|_2} \quad (1.57)$$

où  $\|\cdot\|_2$  représente la norme au carrée d'une grandeur variable.

**Définition 1.2.** [Boyd et al., 1994] On appelle taux d'atténuation ou taux de performance  $H_\infty$  du transfert  $\Upsilon_{zw}$  le scalaire positif  $\gamma$  minimisant l'inégalité :

$$\|z(\cdot)\|_2^2 < \gamma \|w(\cdot)\|_2^2 \quad (1.58)$$

$$\text{où : } \|z(t)\| = \int_0^T z(\tau)^T z(\tau) d\tau$$

### 1.7.1 Stabilisation $H_\infty$ quadratique des modèles T-S incertains et perturbés

Cette section est consacrée à la stabilisation  $H_\infty$  des systèmes non linéaires incertains et perturbés décrits par des modèles T-S via les lois de commande PDC SOF et la candidate de Lyapunov quadratique (1.16).

#### 1.7.1.1 Stabilisation $H_\infty$ quadratique par la commande PDC

On considère le modèle T-S incertain perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) \left( \hat{A}_i x(t) + \hat{B}_{wi} w(t) + \hat{B}_i u(t) \right) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) \left( C_{1i} x(t) + D_{wi} w(t) + D_i u(t) \right) \end{cases} \quad (1.59)$$

avec  $\hat{A}_i, \hat{B}_{wi}, \hat{B}_i$  sont définies à 1.56,

$\begin{bmatrix} \Delta A_i & \Delta B_{wi} & \Delta B_i \end{bmatrix} = H\Theta \begin{bmatrix} E_{1i} & E_{2i} & E_{3i} \end{bmatrix}$ ,  $H, E_{1i}, E_{2i}, E_{3i}$  sont des matrices données avec des dimensions compatibles et  $\Theta^T(t)\Theta(t) \leq I$ .

Les premiers résultats sur la stabilisation  $H_\infty$  des modèles T-S via une fonction de Lyapunov quadratique a été proposés par [Lee et al., 2001]. Ces résultats sont donnés par le suivant théorème :

**Théorème 1.12.** [Lee et al., 2001] :

Le système en boucle fermée composé par le modèle T-S (1.59) et la loi de commande (PDC) (1.37) est asymptotiquement stable avec un taux de décroissance  $\kappa$  de la fonction de Lyapunov et d'atténuation des perturbations  $\gamma$  pour les incertitudes admissibles, s'il existe une matrice  $Q = Q^T > 0$ ,  $\forall i \in I_n$ , des matrices  $F_j$  et un scalaire  $\varepsilon > 0$  telles que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \Psi_{ii} < 0 \\ \Psi_{ij} + \Psi_{ji} < 0 \end{cases}, \quad i < jj \in I_{r-1} \quad (1.60)$$

avec :

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} A_i Q + B_i F_j + (*) + (A_j Q + B_j F_i) + (*) + 4\kappa Q & * & * & * & * \\ 2\varepsilon^{-1} H^T & 2\varepsilon^{-1} I & * & * & * \\ B_{wi}^T + B_{wj}^T & 0 & -2\gamma^2 I & * & * \\ (E_{1i} Q + E_{1i} F_j) + (E_{1j} Q + E_{1j} F_i) & 0 & E_{2i} + E_{2j} & -2\varepsilon^{-1} I & * \\ (C_{1i} Q + D_i F_j) + (C_{1j} Q + D_j F_i) & 0 & D_{wi} + D_{wj} & 0 & -2I \end{bmatrix}$$

**Démonstration :** Voir [Lee et al., 2001].

Depuis ces conditions sont obtenues via une fonction quadratique de la forme (1.16), alors sont conservatives. Dans ce contexte, de nouveaux travaux ont été menés afin de donner des conditions moins conservative via un fonction de Lyapunov à intégrale curviligne [Pan et al., 2012], où les informations sur les fonctions d'appartenance sont pleinement utilisées, et les résultats donnés ne dépendent pas de la dérivée temporelle de ces fonctions. plus récent, [Márquez et al., 2016] ont proposés une nouvelle formulation de fonction polyquadratique de Lyapunov, les résultats donnés dans ce cas, ne dépendent pas de la dérivée temporelle des fonctions d'appartenance .

### 1.7.1.2 Stabilisation $H_\infty$ quadratique par retour de sortie des modèles T-S incertains et perturbés

La stabilisation SOF des modèles T-S incertains via la technique  $H_\infty$  a été présenté dans [Lo and Lin, 2003] pour le cas continu. Les résultats obtenus sont présentés au théorème suivant :

**Théorème 1.13.** [Lo and Lin, 2003] Le système en boucle fermée composé par le système T-S (1.59) et la commande SOF (1.42) est asymptotiquement stable avec un taux d'atténuation des perturbations  $\gamma$  pour les incertitudes admissibles, s'il existe une matrice  $Q = Q^T > 0$ ,  $\forall i \in I_n$ , des matrices  $F_j$  et des scalaires  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \Psi_{ii} < 0 \\ \Psi_{ij} + \Psi_{ji} \leq 0, & i < jj \in I_{r-1} \end{cases} \quad (1.61)$$

avec :

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} (A_i + B_i F_j C_2)^T P + (*) & * & * & * & * & * & * \\ B_{wi}^T & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ C_{1i} + D_i F_j C_2 & D_{wi}^T & -I & * & * & * & * \\ \varepsilon_1 M^T P & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & * & * & * \\ N_{A_i} + N_{B_{wi}} k_j C_2 & N_{B_{wi}} & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & * & * \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 M_z & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & * \\ N_{C_{1i}} + N_{D_i} k_j C_2 & N_{D_{wi}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix}$$

**Démonstration :** Voir [Lo and Lin, 2003].

**Remarque 1.7.** Les résultats issus du théorème (1.13) ne couvre pas le cas générale, où la sortie est multiple et incertain [Chadli and Guerra, 2012]. Dans ce sens, des nouvelles conditions moins conservative ont été données par [Kau et al., 2007] :

**Théorème 1.14.** [Kau et al., 2007] Le système en boucle fermée composé par le système T-S (1.59) et la commande SOF (1.42) est asymptotiquement stable avec un taux d'atténuation des perturbations  $\gamma$  pour les incertitudes admissibles, s'il existe des matrices,  $P > 0$ ,  $N_j$ ,  $Y_{iii}$ , ( $i = 1, \dots, r$ ),  $Y_{jii} =$

$Y_{jii}^T, Y_{iji}, (i = 1, \dots, r; j \neq i; j = 1, \dots, r), Y_{ij\ell} = Y_{\ell ji}^T, Y_{jli}^T, Y_{lij}^T,$   
 $(i = 1, \dots, r-1; j = i+1, \dots, r-1; \ell = j+1, \dots, r), \varepsilon_{ij\ell}^x, \varepsilon_{ij\ell}^z, ((i, j, \ell) = 1, \dots, r),$  et une ma-  
 trice non singulière  $M$ , telles que :

$$\Psi_{c_{iii}} < Y_{iii}, \quad i = 1, \dots, r \quad (1.62)$$

$$\Psi_{c_{iij}} + \Psi_{c_{iji}} + \Psi_{c_{jii}} \leq Y_{iij} + Y_{iji} + Y_{iij}^T, \quad (1.63)$$

$$i = 1, \dots, r; j \neq i; j = 1, \dots, r$$

$$\Psi_{c_{ij\ell}} + \Psi_{c_{i\ell j}} + \Psi_{c_{j\ell i}} + \Psi_{c_{j\ell i}} + \Psi_{c_{\ell ij}} + \Psi_{c_{\ell ij}} \leq Y_{ij\ell} + Y_{i\ell j} + Y_{j\ell i} + Y_{ij\ell}^T + Y_{i\ell j}^T + Y_{j\ell i}^T, \quad (1.64)$$

$$i = 1, \dots, r-2; j = i+1, \dots, r-1; \ell = j+1, \dots, r$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1i1} & Y_{1i2} & \dots & Y_{1ir} \\ Y_{2i1} & Y_{2i2} & \dots & Y_{2ir} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{ri1} & Y_{ri2} & \dots & Y_{rir} \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (1.65)$$

$$MC_j = C_j P, \quad j = 1, \dots, r \quad (1.66)$$

où :

$$\Psi_{c_{ij\ell}} = \begin{bmatrix} ((A_i P + B_i N_j C_\ell) + (*)) & * & * & * & * & * & * \\ B_{wi}^T & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ C_{1i} P + D_i N_j C_\ell & D_{wi} & -I & * & * & * & * \\ \varepsilon_{ij\ell}^x H_x^T & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij\ell}^x I & * & * & * \\ E_{x1i} P + E_{x3i} N_j C_\ell & E_{x2i} & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij\ell}^x I & * & * \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ij\ell}^z H_z^T & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij\ell}^z I & * \\ E_{z1i} P + E_{z3i} N_j C_\ell & E_{z2i} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij\ell}^z I \end{bmatrix}$$

$$K_j = N_j M^{-1}$$

**Démonstration :** Voir [Kau et al., 2007]

## 1.7.2 Stabilisation $H_\infty$ non quadratique des modèles T-S incertains et perturbés

### 1.7.2.1 Stabilisation $H_\infty$ non quadratique par la commande PDC

Dans cette partie, on va présenter la stabilisation des modèles T-S continus perturbés via la fonction polyquadratique.

Soit le modèle T-S de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_{wi} w(t) + B_i u(t)) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{1i} x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (1.67)$$

En se basant sur les expressions nulles suivantes :

$$2 [x^T(t) M + \dot{x}(t) M] \left[ \dot{x}(t) - \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) A_i x(t) - B_i \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) k_j x(t) - B_{wi} \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) w(t) \right] = 0 \quad (1.68)$$

[Pan et al., 2012] ont déterminé les conditions suffisantes de stabilisation  $H_\infty$  suivantes :

**Théorème 1.15.** [Pan et al., 2012] Soit le scalaire  $\tau > 0$ , le système en boucle fermée (1.67) est asymptotiquement stable avec un taux d'atténuation des perturbations  $\gamma$ , et un gain de commande  $k_j = \Psi_j^T X$ , s'il existe des scalaires  $\varepsilon_{ij}$  satisfaisant  $\zeta_i \zeta_j - \bar{\zeta}_i \bar{\zeta}_j - \varepsilon_{ij} \geq 0$  et des matrices  $\Gamma$ ,  $T_i > 0 \forall i \in I_r$ ,  $W_{ij} \forall (i, j) \in I_r^2$ ,  $X$ ,  $\Psi_j \forall j \in I_r$  telles que :

$$\begin{cases} T_i > 0 \quad \forall i \in I_r \\ \Pi_{ji} + \Pi_{ij} + W_{ij} + W_{ji} + 2\Gamma < 0 \quad \forall i < j \in I_r \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r ((\bar{\zeta}_i \bar{\zeta}_j + \varepsilon_{ij}) (\Pi_{ij} + W_{ij}) + 2\varepsilon_{ij} \Gamma) < 0 \end{cases} \quad (1.69)$$

avec :

$$\Pi_{ij} = \begin{bmatrix} -A_i X^T + B_i \Psi_i^T + (*) & * & * & * \\ -C_{1i} X^T + D_{wi} \Psi_j^T & -I & * & * \\ T - \tau A_i X^T + \tau B_i \Psi_j^T + X & 0 & \tau (X + X^T) & * \\ -B_{wi}^T & 0 & -\tau B_{wi}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

et  $\bar{\zeta}_i$  est une fonction d'activation utilisée pour approximer la fonction  $\zeta_i$  en une fonction continue.

**Démonstration :** voir [Pan et al., 2012].

### 1.7.2.2 Stabilisation $H_\infty$ non quadratique par la commande SOF

En se basant sur une fonction polyquadratique, les auteurs [Bouarar et al., 2010] [Bouarar et al., 2013] et [Pan et al., 2011] ont donné les conditions de stabilisation via la commande non PDC-SOF. Le théorème suivant résume les résultats obtenus par [Bouarar et al., 2013] :

**Théorème 1.16.** [Bouarar et al., 2013] Pour tout  $k \in I_r$ ,  $\phi_k$  est la borne inférieure de la dérivée de la fonction d'appartenance  $\dot{\zeta}_k(\varsigma)$ . Le système T-S (1.59) est asymptotiquement stable avec la commande non-quadratique SOF 1.51, avec un taux d'atténuation des perturbations  $\gamma$ , s'il y a pour toute combinaison  $i \in I_r$ ,  $1 \leq i \neq j \leq r$ , et  $k \in I_r$  des matrices  $\Omega_j^1 = (\Omega_j^1)^T > 0$ ,  $\Omega_j^5$ ,  $\Omega_j^7$ ,  $\Omega_j^8$ ,  $\Omega_j^9$ ,  $L_i$ ,  $R_{ij}$ , et des scalaires positifs,  $\mu_{ij}^{1a}$ ,  $\mu_{ij}^{1c}$ ,  $\mu_{ij}^{7d}$ ,  $\mu_{ij}^{8b}$ ,  $\mu_{ij}^{8d}$ ,  $\mu_{ij}^{9b}$  et  $\mu_{ij}^{9d}$ , telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} & \min \gamma > 0 \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} \theta_{ij} > 0 \\ \frac{1}{r-1} \theta_{ii} + \frac{1}{2} (\theta_{ij} + \theta_{ji}) < 0 \\ \Omega_k^1 + R_{ij} \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.70)$$

Où :

$$\theta_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{ij} + \tilde{H}_{ij} & (*) & 0 & (*) \\ \tilde{Z}_{ij} & -\tilde{P}_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_j^5 & 0 & 0 \\ F_i^T & G_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (*) \\ (*) \\ -I \\ -\gamma I \end{matrix}$$

$$\tilde{H}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & (\mu_{ij}^{8d} + \mu_{ij}^{9d}) H_i^d (H_i^d)^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{H}_{11} = \mu_{ij}^{1a} H_i^a (H_i^a)^T + (\mu_{ij}^{7b} + \mu_{ij}^{8b} + \mu_{ij}^{9b}) H_i^b (H_i^b)^T + \mu_{ij}^{1c} H_i^c (H_i^c)^T + \mu_{ij}^{7d} H_i^d (H_i^d)^T$$

$$\tilde{Z}_{ij} = \begin{bmatrix} N_i^a \Omega_j^1 & 0 & 0 \\ N_i^b \Omega_j^7 & 0 & 0 \\ 0 & N_i^c \Omega_j^1 & 0 \\ 0 & N_i^b \Omega_j^8 & 0 \\ 0 & N_i^d \Omega_j^7 & 0 \\ 0 & N_i^d \Omega_j^8 & 0 \\ 0 & 0 & N_i^b \Omega_j^9 \\ 0 & 0 & N_i^d \Omega_j^9 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}_{ij} = \text{diag} \left[ \mu_{ij}^{1a} I \quad \mu_{ij}^{7b} I \quad \mu_{ij}^{1c} I \quad \mu_{ij}^{8b} I \quad \mu_{ij}^{7d} I \quad \mu_{ij}^{8d} I \quad \mu_{ij}^{9b} I \quad \mu_{ij}^{9d} I \right]$$

et  $\tilde{Y}_{ij}$  est définie dans Théorème 1.10.

**Démonstration :** voir [Bouarar et al., 2013].

**Remarque 1.8.** Les conditions du théorème précédent dépendent des dérivées des fonctions d'appartenances, donc elles nécessitent la connaissance à priori des bornes de ces dérivées. La solution dans ce cas consiste soit à l'utilisation d'une fonction de Lyapunov à intergrale curviligne (1.20), où par l'emploi d'une nouvelle forme non quadratique de la candidate de Lyapunov (voire chapitre 3).

## 1.8 Modèles T-S et phénomène de saturation

Cette section a pour objective de rappeler les notions de base sur la conception de lois de commande pour les modèles T-S en présence de saturation.

### 1.8.1 Phénomène de saturation

Le phénomène de saturation est très connu dans le domaine technologique, il peut figurer en plusieurs types, tout dépend du champ d'application du système. Quel que soit sa nature, symétrique ou non, on peut séparer la non-linéarité en quatre types : saturation d'actionneur, saturation de capteur, saturation imbriquée, saturation en vitesse de signal de commande (taux du signal), etc.

#### 1.8.1.1 Saturation d'actionneurs

La saturation d'actionneurs est généralement constatée dans les applications où des mesures de sécurité ont été appliquées sur le signal d'entrée, ou l'effort fourni par l'actionneur est physiquement limité.

Nous définissons le maximum et le minimum du signal de commande  $u(t)$  par  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$ , respectivement. La fonction non linéaire de la saturation pour un signal de commande  $u(t)$  est définie comme

suit :

$$\text{sat}(u(t)) = \begin{cases} u(t) & \text{si } \underline{u} \leq u(t) \leq \bar{u} \\ \bar{u} & \text{si } u(t) > \bar{u} \\ \underline{u} & \text{si } u(t) < \underline{u} \end{cases} \quad (1.71)$$

et elle est décrit par la Figure 1.2 :

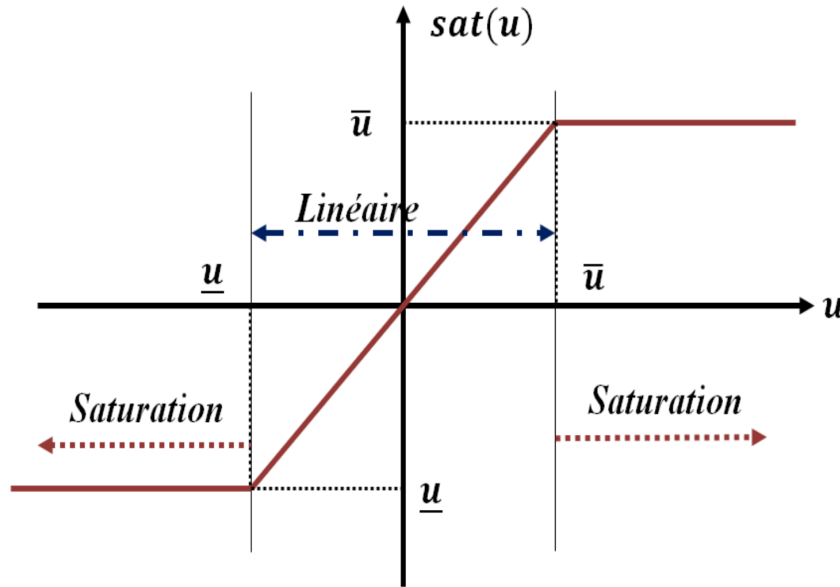


Figure 1.2: Fonction de saturation

### 1.8.1.2 Saturation de capteurs

La saturation de capteur peut être modélisée seulement dans le cas où le signal de sortie est connu. Dans ce cas, la fonction signe peut être modélisée par une fonction de saturation avec un gradient raide [Tarbouriech et al., 2011].

Comparativement au cas de d'actionneur, les systèmes soumis à la saturation de capteur ont été moins étudiés dans la littérature [Kaliora and Astolfi, 2004] [Cao and Lin, 2003]. La différence principale entre les deux problèmes c'est que, dans le cas de capteurs on aura seulement la sortie saturée, par contre les deux formes saturée et non de l'entrée sont disponibles dans le cas de la saturation d'actionneur.

### 1.8.1.3 Saturation en vitesse (rate saturation)

La saturation en vitesse du signal de commande a une importance particulière dans les systèmes mécanique où l'inertie dans divers composants de l'actionneur l'empêche de se déplacer très rapidement limitant ainsi la vitesse du signal de commande fourni [Lin, 1997] [Nguyen and Jabbari, 2000] [Stoorvogel and Saberi, 1999].

### 1.8.1.4 Saturations imbriquées

De son nom cette saturation envisage l'implication de deux types ou plus des saturations discutées précédemment.

**Remarque 1.9.** Dans ce qui suit, on s'intéresse aux saturations d'actionneurs. Pour plus de détaille sur les autres types, le lecteur peut se référer au livre de Tarbourieche [Tarbouriech et al., 2011] et ses références.

## 1.8.2 Modélisation de la saturation

L'effet de la saturation sur un système peut se modéliser de plusieurs manières : par non-linéarité de secteur (zone morte) [da Silva, 1997], par diviser l'état par région de saturation, ou bien par une représentation polytopique. On s'intéresse dans notre manuscrit à la modélisation polytopique. Pour les autres modèles, les intéressés peuvent se référer aux travaux de [Tarbouriech et al., 2011].

### 1.8.2.1 Modélisation polytopique

Premièrement une forme a été proposée pour la commande par retour d'état linéaire [da Silva, 1997] :

Soit la commande définie par :

$$u(t) = Kx(t) \quad (1.72)$$

Par conséquence :

$$\text{sat}(u_i) = \text{sat}(k_i x) = g_i(x) k_i x \quad (1.73)$$

avec

$$g_i(x) = \begin{cases} \bar{u}_i/k_i x & \text{si } k_i x > \bar{u}_i \\ 1 & \text{si } -\bar{u}_i \leq k_i x \leq \bar{u}_i \\ -\bar{u}_i/k_i x & \text{si } k_i x < -\bar{u}_i \end{cases} \quad (1.74)$$

et donc par définition :

$$\begin{aligned} 0 < g_i(x) < 1 \\ \forall i \in I_m, u = \text{sat}(Kx) = G(x) Kx \end{aligned} \quad (1.75)$$

avec  $G(x)$  est une matrice diagonale, et  $g_i(x)$  sont leurs composant.

On suppose que l'état  $x$  du système reste dans un ensemble compact  $\varepsilon$  incluant l'origine. Donc, il existe une borne inférieure pour chaque composante  $g_i(x)$ ,  $g_i = \min\{g_i(x), \forall x \in \varepsilon\}$ . Pour tout  $i \in I_m$ , on peut définir alors  $2^m$  matrices diagonales  $G_s$  pour  $s \in I_{2^m}$ . En utilisant l'inclusion différentielle [Boyd et al., 1994], on peut écrire (1.74) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{sat}(u) = \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_s G_s Kx \\ \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_s = 1, \quad 0 \leq \alpha_s \leq 1 \end{cases} \quad (1.76)$$

Par la suite, l'utilisation de la représentation en zone morte, le lemme suivant de [Hu et al., 2002] et



l'inclusion de [Boyd et al., 1994] a permis au [Kim et al., 2009] [Cao and Lin, 2003] de développer une autre forme polytopique. Cette forme est la plus utilisée dans la littérature.

**Lemme 1.5.** [Hu et al., 2002] Soit  $\psi(\cdot)$  un opérateur non linéaire constitué de  $m$  fonctions normalisées de type zone morte. Soit  $|v_j| < \bar{u} \in R^m$  avec  $i \in I_m$  pour tout vecteur, il existe une matrice avec  $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  et  $\lambda_i \in \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $i \in I_m$  telle que :

$$\psi(u) = (I_m - \Delta)(u - v) \quad (1.77)$$

Si l'on pose  $v = Yx(\cdot)$  avec  $Y \in R^{mm}$ . Comme la matrice appartient à un polytope constitué de  $2^m$  sommets définis par :

$$E = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \lambda_i \in \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, i \in I_m \quad (1.78)$$

Basant sur le lemme précédent la nouvelle forme polytopique est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 1.6.** [Kim et al., 2009] Soit  $E$  est un ensemble de  $m \times m$  matrices diagonal dont les éléments diagonaux sont 1 ou 0, supposons que  $|v_i| < \bar{u}_i, i \in I_m$  où  $v_i$  et  $u_i$  désignant respectivement l'iem élément de  $v \in R^m$  et de  $u \in R^m$ , si  $x \in \bigcap_{j=1}^r \Upsilon(Y_j)$ ,  $x \in R^n$  alors :

$$\begin{cases} \text{sat}(u, \bar{u}) = \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_s (E_s u + \bar{E}_s v) \\ \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_s = 1 & 0 \leq \alpha_s \leq 1 \\ v = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma) H_j x \end{cases} \quad (1.79)$$

avec :

$$\Upsilon(H_j) = \left\{ x \in R^n / \left| h_i^j x \right| \leq \bar{u}_i \right\} \quad (1.80)$$

et  $E_s$  indique un élément de  $E$ ,  $\bar{E}_s = I - E_s$ ,  $Y_j$  est une matrice de dimension  $m \times n$  et  $h_i^j$  est l'ième colonne de la matrice  $H_j$ .

### 1.8.3 Saturation Symétrique et non symétrique

Bien que de nombreux résultats dans la littérature considèrent la saturation symétrique des actionneurs [Saifia et al., 2012a] [Saifia et al., 2012b] [Saifia et al., 2011] [Kim et al., 2009] [Cao and Lin, 2003], très peu de résultats de recherche ont été consacrés à la saturation asymétrique [Li and Lin, 2018] [Li and Lin, 2016]. Dans le cas de la saturation asymétrique, il existe deux méthodes de représentation, soit par une transformation de la saturation asymétrique en saturation symétrique [Benzaouia et al., 2014]. ou par la division de la région de saturation en plusieurs sous-région où la saturation est symétrique [Li and Lin, 2018] [Li and Lin, 2016] [Nasri et al., 2019c] [Houda et al., 2020].

#### 1.8.3.1 Méthode de transformation

Soit un signal de commande saturé entre deux bornes asymétriques :

$$\underline{u} \leq u(t) \leq \bar{u} \quad (1.81)$$

Pour rendre cette inégalité symétrique, il suffit de soustraire le terme  $\frac{u+\bar{u}}{2}$  comme suit :

$$\underline{u} - \frac{u + \bar{u}}{2} \leq u(t) - \frac{u + \bar{u}}{2} \leq \bar{u} - \frac{u + \bar{u}}{2} \quad (1.82)$$

Le nouveau signal de commande  $\sigma(t) = u(t) - \frac{u+\bar{u}}{2}$  peut s'écrire sous forme symétrique comme suit :

$$-\bar{\sigma} \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma} \quad (1.83)$$

tel que :  $\bar{\sigma} = \bar{u}(t) - \frac{u+\bar{u}}{2}$

### 1.8.3.2 Méthode de la division en sous régions

Le principe de base de cette méthode est de diviser l'espace d'entrée en sous régions, de manière que la saturation asymétrique est considérée comme symétrique dans chaque région.

Considérant maintenant

$sat_{\bar{u},\underline{u}}(u(t)) = \left[ sat_{\bar{u}_1,\underline{u}_1}(u_1(t)) \quad sat_{\bar{u}_2,\underline{u}_2}(u_2(t)) \quad \dots \quad sat_{\bar{u}_m,\underline{u}_m}(u_m(t)) \right]^T$ , la fonction de saturation asymétrique définie pour chaque  $j \in I_m$  est donnée par :

$$sat_{\bar{u}_j,\underline{u}_j}(u_j(t)) = \begin{cases} \bar{u}_j & \text{for } u_j(t) \succ \bar{u}_j \\ u_j(t) & \text{for } -\underline{u}_j \leq u_j(t) \leq \bar{u}_j \\ -\underline{u}_j & \text{for } u_j(t) \prec -\underline{u}_j \end{cases} \quad (1.84)$$

où :  $-\underline{u}_j \prec 0$  et  $\bar{u}_j \succ 0$  représentent les magnitudes des niveaux de saturation négatif et positif, respectivement.

Soit  $sat(\bar{u}_j(t))$  une saturation symétrique définie comme :  $sat_{\bar{u}_j}(u_j(t)) = sign(u_j) \min\{\bar{u}_j, |u_j|\}$ .

Ensuite, l'expression de la fonction de saturation asymétrique définie par (1.83) peut être représentée en utilisant deux fonctions de saturation symétriques, comme suit :

$$sat_{\bar{u}_j,\underline{u}_j}(u_j(t)) = \begin{cases} sat_{\bar{u}_j}(u_j(t)) & \text{pour } u_j(t) \succ 0 \\ sat_{\underline{u}_j}(u_j(t)) & \text{pour } u_j(t) \leq 0 \end{cases} \quad (1.85)$$

en fonction des signes des entrées, l'espace d'entrée peut être séparé en  $2^m$  régions désignées par  $\chi_p$  pour  $p \in I_{2^m}$ . Dans chaque région  $\chi_p$ , on peut définir une fonction indicateur comme suit [Li and Lin, 2018] :

$$\lambda_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } u_j(t) \succ 0 \\ 1 & \text{pour } u_j(t) \leq 0 \end{cases} \quad (1.86)$$

soit  $p = \lambda_1 2^{m-1} + \lambda_2 2^{m-2} + \dots + \lambda_m + 1$ ,  $\Delta_p = diag \left( \left[ 1 - \lambda_1, 1 - \lambda_2 \quad \dots \quad 1 - \lambda_m \right] \right)$ , il est clair qu'il y a  $2^m$  matrices  $\Delta_p$ . Ensuite, la fonction de saturation asymétrique  $sat_{\bar{u},\underline{u}}(u(t))$  peut être rétablie en utilisant  $2^m$  fonctions de saturation symétriques  $sat_{\bar{\sigma}_p}(u(t))$  dont les niveaux de saturation satisfont :  $\bar{\sigma}_p = \Delta_p \bar{U} + \bar{\Delta}_p \underline{U}$ , avec :

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_p = I_m - \Delta_p \\ \bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \dots & \bar{u}_m \end{bmatrix}^T \\ \underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \dots & \underline{u}_m \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (1.87)$$

**Remarque 1.10.** Une autre approche de modélisation d'effet de saturation a été proposée par [Bezzaoucha, 2013], Cette représentation consiste à la décomposition par secteurs non linéaires de la non-linéarité de saturation qui conduit à décrire la non-linéarité de saturation par modèle T-S.

## 1.9 Modèles T-S à retard

On appelle une durée temporelle entre l'instant d'application d'une action sur le système et l'instant de réaction retard, système à retard ou système à mémoire. Ce type des système peuvent modélisés par des équations différentielles dans un espace fonctionnel de dimension infinie, avec une évolution qui dépend de la valeur de l'état  $x(t)$  à l'instant  $t$ , et au valeur de près état  $x(t - \tau)$  [Bourahala, 2018].

Pratiquement, la présence du retard est très connue dans les systèmes physique, tel que les systèmes de communication, les robots sous-marin, etc. En effet, on peut négliger le retard dans certain cas, mais au cas où leur taille devient influente sur les performances et/ou la stabilité de notre boucle de commande, il doit nécessairement prés en considération.

Dans cette partie, nous allons rappeler quelques définitions et concepts mathématiques de base nécessaires aux modèles T-S à retard afin d'aider à la compréhension des résultats qui seront présentés ultérieurement (chapitre 4).

### 1.9.1 Stabilité des systèmes à retard

Considérons un système ordinaire à retard décrit par le modèle général de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_dx(t - \tau) \\ \Phi = x(t), t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \quad (1.88)$$

#### 1.9.1.1 Méthode de stabilité via la fonction de Lyapunov-Krasovskii (LKF)

Identiquement à l'étude des systèmes sans retard, le moyen efficace pour déterminer la stabilité d'un système à retard est la méthode de Lyapunov. Pour un système sans retard, cela nécessite le choix d'une fonction de Lyapunov  $V(t, x(t))$ . Cette fonction est connue sous le nom de Lyapunov-Krasovskii [Gu et al., 2003].

Considérant maintenant  $V(t, \Phi)$  une fonction différentiable continue, soit  $x_t(t_0, \Phi)$  la solution du système (1.88) à l'instant  $t$  de condition initiale  $x(t_0) = \Phi$ . La dérivée temporelle par rapport au temps  $t$  puis l'évaluer à  $t = t_0$  au point  $(t_0, \Phi)$  de la fonction LKF est donnée par :

$$V(t_0, \Phi) = \left. \frac{dV(t, x_t)}{dt} \right|_{t=t_0, x_t=\Phi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \left( \frac{1}{\Delta t} V(t_0 + \Delta t, x_{t+\Delta t}(t_0, \Phi)) - V(t_0, \Phi) \right) \quad (1.89)$$

L'observation précédente peut être réécrit sous forme du théorème suivante :

**Théorème 1.17.** [Gu et al., 2003] Soient les fonctions continues, non décroissantes  $u, v, w : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ , et  $u(s), v(s)$  sont strictement positives pour  $s > 0$  et  $u(0) = v(0)$ . S'il existe une fonction continue et différentiable  $V(t, \Phi) : \mathbf{R} \times C \rightarrow \mathbf{R}$  tel que :

$$u(\|\Phi(0)\|) \leq V(t, \Phi) \leq v(\|\Phi\|_c) \quad (1.90)$$

et

$$\dot{V}(t, \Phi) \leq -w(\|\Phi(0)\|), \quad t \in \mathbf{Re} \quad (1.91)$$

Alors la solution triviale de (1.88) est uniformément stable. Si  $w(s) > 0$ , pour  $s > 0$ , alors la solution triviale de (1.88) est uniformément asymptotiquement stable. En plus, si  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = +\infty$ , alors la solution triviale de (1.88) est globalement uniformément asymptotiquement stable.

**Démonstration :** voir [Gu et al., 2003]

### 1.9.1.2 Méthode de stabilité via la fonction de Lyapunov- Razumikhin (LRF)

Pour le théorème de Lyapunov-Krasovskii du système  $x(t)$  doit être appartient à l'intervalle  $[t - \tau, t]$ . Il nécessite alors la manipulation de la fonction, ce qui le rend difficile à être appliqué. Cette difficulté peut parfois être contournée en utilisant le théorème de Razumikhin.

**Théorème 1.18.** [Gu et al., 2003] Soient les fonctions continues, non décroissantes  $u, v, w : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ , avec en plus,  $u(s), v(s)$  sont strictement positives pour  $s > 0$  et  $u(0) = v(0) = 0$  où  $v$  est strictement croissante. S'il existe une fonction continue et différentiable  $V(t, x(t)) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  telle que :

$$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \nu(\|x\|), \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (1.92)$$

et la dérivée de  $V(t, x(t))$  le long des trajectoires de 1.88, satisfait la condition suivante :

$$\dot{V}(t, x) \leq -w(\|x(t)\|), \quad \text{si } V(t + \alpha, x(t + \alpha)) \leq V(t, x(t)), \quad \forall \alpha \in [-\tau, 0] \quad (1.93)$$

Alors le système (1.88) est uniformément stable.

- - Si de plus  $w(s) > 0$  pour  $s > 0$ , et s'il existe une fonction continue, non-décroissante,  $p(s) > s$  pour  $s > 0$  telle que : la condition (1.92) est vérifiée et en plus :

$$\dot{V}(t, x) \leq -w(\|x(t)\|), \quad \text{si } V(t + \alpha, x(t + \alpha)) \leq p(V(t), x(t)), \quad \forall \alpha \in [-\tau, 0] \quad (1.94)$$

- si de plus,  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(s) = +\infty$ , alors la solution triviale de (1.88) est globalement uniformément asymptotiquement stable.

**Démonstration :** voir [Gu et al., 2003]

## 1.9.2 Représentation T-S des systèmes à retard

La forme générale d'un système à retard décrit par des modèles T-S est donnée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + A_{\tau i} x(t - \tau) + B_i u(t) + B_{\tau i} u(t - \tau)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_i x(t) + C_{\tau i} x(t - \tau) + D u(t - \tau)) \end{cases} \quad (1.95)$$

où  $x(t)$ ,  $x(t - \tau)$ ,  $u(t)$ ,  $u(t - \tau)$ , représente le vecteur d'état, le vecteur d'état avec retard, le vecteur de commande et le vecteur de commande avec retard, respectivement.  $\tau$  est le retard,  $A_i$ ,  $A_{\tau i}$ ,  $B_i$ ,  $B_{\tau i}$ ,  $C_i$ ,  $C_{\tau i}$ ,  $D$ , sont des matrices de dimensions appropriées.

**Remarque 1.11.** la représentation T-S (1.95) peut s'obtenir lorsque le modèle mathématique contient le retard. dans certain cas ou le retard n'est pas présent dans le modèle mathématique, l'utilisation d'une pondération appelée NCS (Networked Control System) résoudre le problème.

### 1.9.3 Stabilité indépendante et stabilité dépendant du retard des modèles T-S

Premièrement les résultats de stabilité des modèles T-S à retard sont basés sur le critère retard-indépendant [Wu et al., 2010] [Fridman, 2014] [Delice and Sipahi, 2011]. A cause du conservatisme de ces résultats, beaucoup de chercheurs ont été intéressés par le développement des conditions de stabilité moins conservatives (dépend du retard et de sa dérivée) basant sur le critère du retard-dépendant [Zeng et al., 2014] [Lian et al., 2017] [Bourahala et al., 2017] et [Mahmoudabadi et al., 2017].

Cette section est consacré aux résultats préliminaires de la stabilité des modèles T-S à retard, que ce soit indépendant ou dépendant du retard.

#### 1.9.3.1 Stabilité indépendante du retard

Les conditions de stabilité dans ce cas sont indépendantes du retard. Pour mieux appréhender ce type de stabilité, on considère le modèles T-S à retard suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + A_{\tau i} x(t - \tau)) \quad (1.96)$$

La fonction LKF adéquate pour étudier la stabilité de tels modèles est choisie généralement comme suit :

$$V(x) = x^T(t) P x(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s) \Pi x(s) ds \quad (1.97)$$

avec  $P = P^T > 0$ ,  $\Pi > 0$ , sont des matrices garantissant que  $V(x)$  est définie positive.

La stabilité asymptotique est assurée quel que soit les valeurs du retard. Donc indépendante de la taille du retard.

Les premiers résultats dans ce sens ont été proposés dans [Cao and Frank, 2001], et sont résumé dans le théorème suivant :

**Théorème 1.19.** [Cao and Frank, 2001] Le modèle continu de T-S à retard (1.96) est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices  $P = P^T > 0$ ,  $\Pi > 0$  telles que :

$$\begin{bmatrix} PA_i + A_i^T P + Q & PA_{\tau i}^T \\ * & -Q \end{bmatrix} < 0, \quad i \in I_r \quad (1.98)$$

**Démonstration :** [Cao and Frank, 2001]

### 1.9.3.2 Stabilité dépendante du retard

Contrairement au critère précédent, où les conditions de stabilisation sont indépendantes du retard, les résultats présentés ici sont ceux qui contiennent des informations sur le retard. Ainsi, ils sont moins conservatives surtout lorsque le retard est très petit. Dans ce sens, différentes méthodes utilisant le critère de stabilité dépendante du retard ont été proposées [Gu et al., 2003] afin de réduire le conservatisme dans les conditions de stabilisation LMIs dérivées à partir des modèles T-S avec retard. Les premiers résultats assurent la stabilité asymptotique pour tout retard variable borné dans un intervalle fermé  $[0, \bar{\tau}]$ . Ainsi, pour étudier la stabilité par le critère du retard-dépendant, la fonction LKF est choisie comme suit :

$$V(x) = x^T(t) P x(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s) Q x(s) ds + \int_{-\bar{\tau}}^0 \int_{t+\theta}^t (x^T(s) Z x(s)) d\theta ds \quad (1.99)$$

avec  $P = P^T > 0$ ,  $Q > 0$ ,  $Z > 0$  des matrices de dimensions appropriées.

L'utilisation de LKF (1.99), nous conduit aux conditions de stabilité dépendantes de retard présenté dans le théorème suivant :

**Théorème 1.20.** [Wu et al., 2010] Le modèle continu de T-S à retard (1.96) est asymptotiquement stable pour tous scalaires  $\tau > 0$  et  $\beta > 0$  tels que  $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$ ,  $\tau(t) \leq \beta$ , s'il existe des matrices  $P = P^T > 0$ ,  $Q > 0$ ,  $Z > 0$ , et  $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ * & X_{22} \end{bmatrix} \geq 0$ , et des matrices à dimension appropriée,  $N_1$ ,  $N_2$ , telles que les LMIs suivants sont satisfaites :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \bar{\tau} A_i^T Z \\ * & \Phi_{22} & \bar{\tau} A_{\tau i}^T Z \\ * & * & -\bar{\tau} Z \end{bmatrix} < 0 \quad (1.100)$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & N_1 \\ * & X_{22} & N_2 \\ * & * & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.101)$$

avec :

$$\Phi_{11} = P A_i + A_i^T P + N_1 + N_1^T + Q + \bar{\tau} X_{11}$$

$$\Phi_{12} = P A_{\tau i} - N_1 + N_2^T + \bar{\tau} X_{12}$$

$$\Phi_{22} = -N_2 - N_2^T - (1 - \beta) Q + \bar{\tau} X_{22}$$

**Démonstration :** voir Annexe C.

Plus récemment, des chercheurs ont proposés des nouvelles conditions de stabilisation non quadratiques via une nouvelle fonction du Lyapunov :

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) \quad (1.102)$$

avec :

$$V_1(t) = \tilde{x}^T P_\zeta \tilde{x}$$

$$V_2(t) = \int_{t-\tau_2}^t \int_0^t \dot{x}^T R_\zeta \dot{x} ds d\theta$$

$$V_3(t) = \int_{t-\tau}^t x^T Q_\zeta x ds$$

$$V_4(t) = \int_{t-\tau_2}^t x^T S_\zeta x ds$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^T & \int_{t-\tau}^t x^T ds & \int_{t-\tau_2}^t x^T ds \end{bmatrix}^T, \quad P_\zeta = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) P_i = \begin{bmatrix} P_{1\zeta} & P_{2\zeta} & P_{3\zeta} \\ P_{2\zeta}^T & P_{4\zeta} & P_{5\zeta} \\ P_{3\zeta}^T & P_{5\zeta}^T & P_{6\zeta} \end{bmatrix}$$

Cette dernière fonction conduit aux conditions de stabilité dépendantes suivantes :

**Théorème 1.21.** [Wang and Lam, 2018] Pour certains donnés  $d_q, \tau_v, (q, v) \in I_2$ ,  $(\tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2, d_1 \leq \dot{\tau}(t) \leq d_2)$ , le système (1.96) est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices  $P_i > 0, R_i > 0, Q_i > 0, S_i > 0, X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}, X_{4i}$ , telles que les inégalités suivantes sont satisfaites pour tous  $(i, j, k) \in I_r$  :

$$\dot{P}_\zeta \leq 0, R_\zeta \leq 0, \dot{\theta}_\zeta \leq 0, \dot{S}_\zeta \leq 0 \quad (1.103)$$

$$\Phi_{ikkvq} < 0 \quad (1.104)$$

$$\Phi_{ijkvq} + \Phi_{jikvq} \leq 0 \quad (1.105)$$

$$\begin{bmatrix} R_i & 0 & X_{1i} & X_{2i} \\ (*) & 3R_i & X_{3i} & X_{4i} \\ (*) & (*) & R_i & 0 \\ (*) & (*) & (*) & 3R_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.106)$$

avec :

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{1i} & P_{2i} & P_{3i} \\ (*) & P_{4i} & P_{5i} \\ (*) & (*) & P_{6i} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{ijkq} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} & \bar{\Phi}_{13} & \bar{\Phi}_{14} & \bar{\Phi}_{15} \\ (*) & \bar{\Phi}_{22} & \bar{\Phi}_{23} & \bar{\Phi}_{24} & \bar{\Phi}_{25} \\ (*) & (*) & \bar{\Phi}_{33} & \bar{\Phi}_{34} & \bar{\Phi}_{35} \\ (*) & (*) & (*) & -\frac{12R_i}{\tau_2} & -\frac{4X_{4i}}{\tau_2} \\ (*) & (*) & (*) & (*) & -\frac{12R_i}{\tau_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_{11} &= ((P_{1i}A_j + P_{2j}) + (*)) + S_i + Q_i + \tau_2 A_i^T R_k A_j - \frac{4}{\tau_2} R_i \\
 \bar{\Phi}_{12} &= -(1 - d_q) P_{2i} + (1 - d_q) P_{3i} + \tau_v A_i^T R_k A_{\tau j} + P_{1i} A_{\tau j} - \frac{1}{\tau_2} (2R_i + X_{1i} + X_{2i} + X_{3i} + X_{4i}) \\
 \bar{\Phi}_{13} &= -P_{3i} - \frac{1}{\tau_2} (X_{2i} + X_{4i} - X_{1i} - X_{3i}) \\
 \bar{\Phi}_{14} &= \tau_v A_{\tau j}^T P_{2i} + \tau_v P_{4i} + \frac{1}{\tau_2} 6R_i \\
 \bar{\Phi}_{15} &= (\tau_2 - \tau_v) A_{\tau j}^T P_{3i} + (\tau_2 - \tau_v) P_{5i} + \frac{2}{\tau_2} (X_{2i} + X_{2i}) \\
 \bar{\Phi}_{22} &= -(1 - d_q) Q_i + \tau_2 A_{\tau i}^T R_k A_{\tau j} - \frac{1}{\tau_2} (8R_i + ((X_{3i} + X_{4i} - X_{1i} - X_{2i}) + (*))) \\
 \bar{\Phi}_{23} &= \frac{1}{\tau_2} (2R_i + X_{1i} - X_{2i} - X_{3i} + X_{4i}) \\
 \bar{\Phi}_{24} &= \tau_v A_{\tau j}^T P_{2i} - \tau_v (1 - d_q) P_{4i} + \tau_v (1 - d_q) P_{5i}^T + \frac{2}{\tau_2} (3R_i + X_{3i}^T + X_{4i}^T) \\
 \bar{\Phi}_{25} &= (\tau_2 - \tau_v) A_{\tau j}^T P_{3i} - (\tau_2 - \tau_v) (1 - d_q) (P_{5i} - P_{6i}) + \frac{2}{\tau_2} (-X_{2i} + X_{4i} + 3R_i) \\
 \bar{\Phi}_{33} &= -S_i - \frac{4}{\tau_2} R_i \\
 \bar{\Phi}_{34} &= -\tau_v P_{5i}^T + \frac{2}{\tau_2} (-X_{3i}^T + X_{4i}^T) \\
 \bar{\Phi}_{35} &= (\tau_2 - \tau_v) P_{6i} + \frac{6}{\tau_2} R_i
 \end{aligned}$$

**Démonstration :** voir Annexe C.

**Remarque 1.12.** La stabilisation des modèles T-S à retard se fait de la même manière que la stabilité via le critère dépendent et indépendante (plus de détaille veuillez voir le Chapitre 4).

**Remarque 1.13.** Les conditions citées dans le théorème 1.19 garantissent la stabilité des modèles T-S (1.95) quel que soit la taille du retard. Malgré ça, elles restant conservatives, ce qu'est motivé les chercheurs de proposer d'autre solutions via le critère dépendante du retard. Par conséquence, la tendance aujourd'hui est vers l'utilisation de ce dernier critère pour élargir l'intervalle du retard le plus possible [Zeng et al., 2014] [Lian et al., 2017] [Bourahala et al., 2017] [Mahmoudabadi et al., 2017]. Dans ce contexte, la source du conservatisme ne vient pas seulement de l'indépendamment de retard, mais aussi de la forme de la partie quadratique de la fonction LKF, ce qui nous motive de proposer des nouveaux conditions de stabilisation dépendent des dérivée des fonctions d'appartenance. Le travail réalisé dans ce contexte sera la contribution du chapitre 4.

## 1.10 Conclusion

Dans ce chapitre, des résultats fondamentaux obtenus dans l'étude des systèmes T-S ainsi que des conditions suffisantes de stabilité et de stabilisation ont été exposées. Premièrement, nous avons rappelé les différentes méthodes utilisées pour l'obtention et l'analyse de stabilité et la stabilisation des modèles T-S via des fonctions de Lyapunov quadratiques et non quadratiques. Nous avons également présentés la synthèse de lois de commande PDC et SOF par la candidate de Lyapunov quadratique et non quadratique ainsi que leurs formulations LMI. Afin de prendre en compte les effets de perturbations externes, nous avons abordé la stabilisation des modèles T-S perturbé et incertains via le critère  $H_\infty$ . Les concepts généraux sur les modèles T-S avec saturation font l'objet du point suivant, où nous avons présenté les différents types de saturation ainsi, la méthode de modélisation adéquate pour les modèles T-S. la dernière partie de ce chapitre est réservée aux résultats préliminaires d'analyse de la stabilité des modèles T-S à retard.

Les résultats exposés dans ce chapitre montrent l'efficacité des modèles T-S à décrire le comportement non linéaire des systèmes physiques sous forme d'interpolation des systèmes LTI. Cette représentation a permis aux chercheurs l'extension de nombreux résultats obtenus dans le cadre linéaire aux systèmes non linéaires. Cependant, malgré l'importance de la prise en considération des



différentes contraintes liées aux applications réelles, tels que le retard et la saturation d'actionneurs, peu des travaux ont été réalisés dans ce cadre. Donc, il est intéressant d'exploiter cette classe de modèles afin de concevoir de lois de commande pour les systèmes non linéaires sous contraintes. Dans ce sens, notre première contribution portant sur le développement de nouvelles conditions de stabilisation pour les systèmes non linéaires perturbés soumis à la saturation non symétrique ; appliquées au système photovoltaïque est exposée dans le chapitre suivant.

## Stabilisation quadratique des modèles T-S en présence de saturation d'actionneur

---

### 2.1 Introduction

La stabilisation quadratique des systèmes décrits par des modèles T-S en présence de la saturation a fait l'objet de plusieurs travaux durant ces dernières années [Saifia et al., 2012a] [Saifia et al., 2020] [Cao and Lin, 2003] [Benzaouia, 2012]. En effet, l'influence remarquable de l'effet de saturation sur la performance et la stabilité des systèmes attire les chercheurs dans tous les domaines à étudier ce phénomène et proposer les solutions adéquates [Du and Zhang, 2009] [Nguyen et al., 2016] [Tarbouriech et al., 2011]. La saturation des actionneurs se traduit du fait que le signal de commande est limité entre deux bornes, symétrique ou non symétrique. Effectivement, quoi que ce soit la raison, physiques, technologiques, ou de sécurité, tout système physique est soumis à des limitations de fonctionnement qui se modélisent par des contraintes sur l'amplitude la vitesse des actionneurs et/ou les capteurs [Bezzaoucha, 2013]. La limitation dans le rapport cyclique des convertisseurs, la limitation en ouverture des vannes, la limitation en vitesse des moteurs, etc. peuvent présenter des exemples sur la saturation engendrée dans différents systèmes physiques [Saifia et al., 2011] [Nasri et al., 2019b].

A cause de leur influence néfaste sur la stabilité des systèmes commandés, la saturation a été prise en compte dans la synthèse des différentes techniques de commande récentes. Durant l'étude du phénomène de saturation, les chercheurs ont proposé trois méthodes différentes pour modéliser la non linéarité du phénomène de la saturation, modèle polytopique [Henrion, 1999] [Cao and Lin, 2003] [Jungers and Castelan, 2011] [Saifia, 2013] [Saifia et al., 2012a] [Nasri et al., 2017] [Nasri et al., 2019b] [Nasri et al., 2019c], non-linéarité de secteur [da Silva Jr and Tarbouriech, 2006] [Aouaouda and Chadli, 2019] [Dang et al., 2017] ou bien de diviser l'état par région de saturation [Da Silva et al., 1997].

De façon résumée, deux approches principales permettent d'aborder la conception d'une loi de commande pour les systèmes soumis à la saturation, la première consiste à ajouter un bloc fonctionnel dédié à contrer son effet lors de son apparition. L'exemple le plus illustratif est l'anti-

windup [Syaichu-Rohman and Middleton, 2004] [Zaccarian and Teel, 2011] [Kiener et al., 2014] [Liu and Yang, 2017]. La deuxième repose sur la prise en compte de la saturation lors de la conception de la loi de commande. Cette dernière, se divise en deux approches, dans la première approche, la commande n'atteint pas leurs limites, et le problème est traité par la détermination d'une limite de conditions initiales de l'état du système qui évite la saturation de la commande [Henrion, 1999] [Cao and Lin, 2003] [Saifia et al., 2011] [Saifia et al., 2012a] [Nasri et al., 2017]. Par contre, la commande peut saturer et le problème est traité par l'estimation d'un domaine d'attraction à l'intérieur duquel toute initialisation du système n'engendre pas d'instabilité en présence de saturation dans la deuxième approche [Henrion, 1999] [Cao and Lin, 2003] [Nasri et al., 2019b] [Nasri et al., 2017] [Saifia et al., 2012a]. La représentation T-S des systèmes non linéaires a permis l'utilisation de certains résultats obtenus dans le cas linéaire [da Silva, 1997] [Henrion, 1999] [Henrion and Tarbouriech, 1999] [Tarbouriech et al., 2002] aux formes non linéaires. Dans ce sens, beaucoup de chercheurs ont utilisé la représentation polytopique de la saturation pour développer des approches pour les systèmes saturés [Cao and Lin, 2003] [Saifia et al., 2012a] [Benzaouia, 2012] [Saifia et al., 2011] [Luo and Zhao, 2015] [Nasri et al., 2019b] [Selvaraj et al., 2017]. D'autre part, la saturation est convertie en zone morte dans [Nguyen et al., 2017] [Aouaouda and Chadli, 2019], et en représentation T-S dans [Bezzaoucha, 2013].

Pour l'amélioration des résultats obtenus dans le cas quadratique, ce chapitre a pour objectif de présenter les techniques de stabilisation des modèles T-S en présence de la saturation d'actionneur, puis la proposition de nouvelles conditions de stabilisation LMIs pour le cas d'une poursuite de trajectoire d'un modèle de référence avec une saturation d'actionneur non symétrique. Donc, ce chapitre traite la stabilisation quadratique des modèles T-S soumis à la saturation d'actionneur. Dans ce contexte, les techniques de commandes citées dans le chapitre 1 pour le cas quadratique seront rappelées dans le cas où le système soumis à la saturation d'actionneur.

## 2.2 Préliminaires

### 2.2.1 Position de problème

Soit le modèle T-S avec saturation d'actionneur suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i \sigma(t) + B_{w_i} w(t)) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{1i} x(t) + D_i \sigma(t) + D_{w_i} w(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{2i} x(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

où,  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  est le vecteur d'état,  $\sigma(u(t)) \in \mathbf{R}^m$  est l'entrée de contrôle saturée,  $w(t)$  est les perturbations externe, et  $\zeta_i(\varsigma(t))$  sont les fonctions d'appartenance,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $B_{w_i}$ ,  $C_{1i}$ ,  $C_{2i}$ ,  $D_i$ , et  $D_{w_i}$  sont des matrices connues. Avec  $\sigma(u(t)) = \text{sat}(u(t))$  est donnée dans (1.79).

Ici, l'objectif est d'assurer la stabilité du système (2.1) en boucle fermée en présence de la saturation, et de perturbation externe, en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique (FLQ) et via les deux techniques de commande PDC et SOF.

### 2.2.2 Outils géométrique

Un moyen pratique de déterminer les régions de stabilité provient de la théorie de Lyapunov. En effet, dans le cas où la fonction de Lyapunov est quadratique (1.16), on définit la surface de Lyapunov par l'ensemble  $\Omega(x)$ , sachant que :

$$\Omega(x) = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) \leq \rho\}, \quad \rho > 0 \quad (2.2)$$

soit  $\varepsilon(P, \rho)$  un ellipsoïde défini par :

$$\varepsilon(P, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n / x^T P x \leq \rho\} \quad (2.3)$$

Maintenant, on définit un polyèdre comme suit :

$$\Theta = \{x \mid m_i^T x \leq \eta_i\}, \quad i \in I_m \quad (2.4)$$

Le lemme suivant sera utilisé le long du reste de cette thèse.

**Lemme 2.1.** [Henrion, 1999] L'ellipsoïde  $\varepsilon(P, \rho)$  donné par (2.3) est inclus dans le polyèdre  $\Theta$  défini par (2.4), si et seulement si :

$$m_i^T \left( \frac{P}{\rho} \right)^{-1} m_i \leq \eta_i^2 \quad (2.5)$$

La principale contribution de ce chapitre est de formaliser le problème de synthèse des conditions de stabilisation pour les modèles T-S soumis à la saturation d'actionneur et aux perturbations externes se basant sur une FLQ. Puis, les étendre au cas de la poursuite d'un modèle de référence. Par la suite les conditions obtenues sont appliquées à une commande d'un module PV en présence d'une saturation non symétrique [Nasri et al., 2019c].

## 2.3 Stabilisation par la commande PDC des modèles T-S en présence de la saturation d'actionneur

Nous nous intéressons dans cette partie à la stabilisation par une commande PDC d'un système non linéaire représenté par un modèle T-S et soumis à la saturation d'actionneur. Pour cette raison, on considère le modèle T-S suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.6)$$

Dans le cas où l'entrée  $u(t)$  est soumise à la saturation, on met  $\sigma(t) = \text{sat}(u(t))$ . D'où le système (2.6) devient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i \sigma(t)) \quad (2.7)$$

La stabilisation des systèmes soumis à la saturation d'actionneur se fait généralement de deux manières différentes. Soit par une commande dite contrainte, dans ce cas, le signal de commande ne sature jamais et le problème est traité par la détermination d'une limite de conditions initiales de

l'état du système qui évite la saturation de la commande [Saifa, 2013]. Ou bien par une commande saturante, où la commande peut saturer et le problème est transformé à l'estimation du domaine d'attraction à l'intérieur duquel toute initialisation du système n'engendre pas d'instabilité en présence de saturation.

### 2.3.1 Commande PDC contrainte

Comme nous avons dit précédemment, dans ce cas la commande ne sature jamais, et le modèle T-S du système reste le même que (1.4). La loi de commande PDC s'écrit sans saturation comme suit :

$$\sigma(t) = \text{sat}(u(t)) = u(t) = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) K_j x(t) \quad (2.8)$$

avec :  $-\bar{u} \leq u(t) \leq \bar{u}$

Si on définit un ensemble :  $\bigcap_{j=1}^r \aleph(K_j) \triangleq \left\{ x \in R^n \mid \left| k_i^j \right| \leq \bar{u}_i \right\}$ ,  $(i, j) \in I_m \times I_r$

avec :  $x(t) \in \bigcap_{j=1}^r \aleph(K_j)$  et  $k_i^j$  est l'ième élément du vecteur  $K_j$ , et  $\bar{u}_i$  est le niveau de saturation.

Suivant le lemme 2.1, l'ellipsoïde  $\varepsilon(P, \rho)$  est inclus dans  $\bigcap_{j=1}^r \aleph(K_j)$ , si et seulement si :

$$\left( k_i^j \right)^T (P)^{-1} k_i^j \leq \bar{u}_i^2, \quad i \in I_m, j \in I_r \quad (2.9)$$

Les conditions LMI résultantes pour calculer les gains du contrôleur PDC sont présentées dans le théorème suivant :

**Théorème 2.1.** : [Cao and Lin, 2003]

Le système en boucle fermée (2.7) est asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.8), s'il existe une matrice  $Q \in R^{n \times n}$ ,  $Q = Q^T > 0$ , et des matrices  $F_i \in R^{m \times n}$ ,  $(i \in I_r)$  solution du problème LMI suivant :

$$\begin{aligned} & I) A_i Q + B_i F_i + (*) < 0 \\ & II) A_i Q + B_i F_j + A_j Q + B_j F_i + (*) \leq 0, \quad i < j \leq r, \zeta_i \zeta_j \neq 0 \\ & III) \begin{bmatrix} \bar{u}_i^2 & * \\ \left( f_i^j \right)^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in I_m, j \in I_r \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec :  $Q = (P)^{-1}$ ,  $F_j = K_j Q$ ,  $f_i^j$  est l'ième élément du vecteur  $F_j$ .

**Démonstration :** L'inégalité LMI (I-II-2.10) peut s'écouler directement de l'application du Théorème (1.6) (voir chapitre 1, section 6) sur le système (2.6). Par le changement de variable  $Q = (P)^{-1}$ ,  $F_j = K_j Q$ , et par l'utilisation du complément de Schur, l'inégalité (2.9) peut s'écrire sous forme (III-2.10).

### 2.3.2 Commande PDC saturante

Dans cette approche, le signal de commande se sature, et l'entrée de commande devienne une fonction non linéaire :

$$\sigma(t) = \text{sat}(u(t)) \quad (2.11)$$

En utilisant le modèle polytopique (1.79), la commande PDC saturée s'écrit :

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^r \zeta_j \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_s (E_s K_j + \bar{E}_s H_j) x(t) \quad (2.12)$$

D'où, le système en boucle fermée devient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{2^m} \zeta_i \zeta_j \alpha_s (A_i + B_i (E_s k_j + \bar{E}_s H_j)) x(t) \quad (2.13)$$

avec :  $x(t) \in \bigcap_{j=1}^r \mathfrak{N}(H_j)$

Appliquant le lemme 2.1 l'ellipsoïde  $\varepsilon(P, \rho)$  est inclus dans  $\bigcap_{j=1}^r \mathfrak{N}(H_j)$  si et seulement si :

$$\left(h_i^j\right)^T \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1} h_i^j \leq \bar{u}_i^2 \quad (2.14)$$

avec  $\rho = 1$ .

Les LMI résultantes pour calculer les gains du contrôleur PDC sont présentées dans le théorème suivant :

**Théorème 2.2.** [Cao and Lin, 2003] Le système en boucle fermée (2.7) est asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.12), s'il existe une matrice  $Q \in R^{n \times n}$ ,  $Q = Q^T > 0$ , et des matrices  $F_i \in R^{m \times n}$ ,  $Z_i \in R^{m \times n}$ , solution du problème LMI suivant :

$$\begin{aligned} & I) (A_i Q + B_i (E_s K_i + \bar{E}_s H_i)) + (*) < 0, \quad s \in I_{2^m}, i \in I_r \\ & II) [(A_i Q + B_i (E_s K_j + \bar{E}_s H_j)) + (A_j Q + B_j (E_s K_i + \bar{E}_s H_i))] + (*) \leq 0, \\ & \quad \quad \quad 1 \leq i < j \leq r, s \in I_{2^m} \\ & III) \begin{bmatrix} \bar{u}_i^2 & * \\ \left(z_i^j\right)^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in I_m, j \in I_r \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec :  $Q = (P)^{-1}$ ,  $F_j = K_j Q$ ,  $Z_j = H_j Q$

**Démonstration :** La dérivée de la fonction de Lyapunov quadratique (1.16) le long des trajectoires du système est donnée par :

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) < 0 \quad (2.16)$$

En utilisant la relation (1.79) et le changement de variable  $Q = (P)^{-1}$ ,  $F_j = K_j Q$ ,  $Z_j = H_j Q$ , on trouve les LMIs (I-2.15) et (II-2.15). La démonstration de LMI (III-2.15) est la même que la démonstration de (III-2.10) dans le théorème (2.1).

## 2.4 Stabilisation par la commande SOF des systèmes T-S en présence de la saturation d'actionneur

La loi de commande PDC est conçue en se basant sur la disponibilité complète des variables d'état du système, ce qui n'est pas toujours possible pour la plupart des applications industrielles. Une solution alternative consiste à utiliser un observateur pour reconstruire les états non mesurables [Tanaka and Wang, 2001] [Wu and Li, 2008] [Chadli and Karimi, 2012] [Chadli et al., 2008] [Asemanni and Majd, 2013]. Une autre solution consiste à utiliser la surnommée SOF, ou commande par retour de sortie statique non linéaire [Chadli, 2002] [Nguyen et al., 2017] [Saifia et al., 2012a]. Cette section est réservée à la commande SOF des systèmes non linéaires décrits par des modèles T-S soumis à la saturation d'actionneur. Considérons le système T-S donné par (2.6), la loi de commande SOF s'écrit :

$$u(t) = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) K_j y(t) \quad (2.17)$$

De la même manière que dans la commande PDC, en présence de saturation, on aura deux types de commande, SOF contrainte et SOF saturante.

### 2.4.1 Commande SOF contrainte

Dans ce cas la commande contrainte est de la forme :

$$\sigma(t) = \text{sat}(u(t)) = u(t) = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) K_j y(t) \quad (2.18)$$

avec :  $-\bar{u} \leq u(t) \leq \bar{u}$ ,  $y(t) = C_{2_i} x(t)$  et  $x(t) \in \bigcap_{j=1}^r \mathfrak{N}(K_j C_{2_i})$ .

D'après le lemme 2.1, l'ellipsoïde  $\varepsilon(P, \rho)$  est inclus dans  $\bigcap_{j=1}^r \mathfrak{N}(K_j C_{2_i})$  si et seulement si :

$$\left(k_i^j C_{2_\ell}\right)^T \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1} k_i^j C_{2_\ell} \leq \bar{u}_i^2 \quad (2.19)$$

Les LMIs résultantes pour calculer les gains du contrôleur SOF sont présentées au théorème suivant :

**Théorème 2.3.** [Saifia, 2013] Le système (2.6) est asymptotiquement stable via la loi de commande SOF (2.18), s'il existe une matrice  $Q \in R^{n \times n}$ ,  $Q = Q^T > 0$ , et des matrices,  $M \in R^{p \times p}$ ,  $F_i \in R^{m \times p}$  solution du problème LMI suivant :

$$\begin{aligned} & I) A_i Q + B_i F_i C_{2_\ell} + (*) < 0 \\ & II) A_i Q + B_i F_i C_{2_\ell} + A_j Q + B_j F_j C_{2_\ell} + (*) \leq 0, \quad i < j \leq r, \zeta_i \zeta_j \neq 0 \\ & III) \begin{bmatrix} \bar{u}_i^2 & * \\ \left(f_i^j C_{2_\ell}\right)^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in I_m, j \in I_r, \ell \in I_r \\ & IIII) M C_{2_i} = C_{2_i} Q, \quad i \in I_r \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec :  $Q = (P)^{-1}$ ,  $F_j = K_j M$





(III-2.20).

Soit le système T-S avec saturation d'actionneur suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i \sigma(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) C_{2i} x(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

Par l'utilisation de la représentation polytopique (2.22), on a :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{2^m} \zeta_i \zeta_j \alpha_s (A_i + B_i (E_s K_j C_{2i} + \bar{E}_s H_j)) x(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) C_{2i} x(t) \end{cases} \quad (2.26)$$

Pour appliquer l'approche descripteur, nous avons besoin d'une dynamique virtuelle comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i \sigma(t)) \\ 0\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) C_{2i} x(t) - y(t) \\ 0\dot{\sigma}(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{2^m} (E_s K_j) y(t) + \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{2^m} \bar{E}_s H_j x(t) - \sigma(t) \end{cases} \quad (2.27)$$

Le système augmenté sera :

$$E\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{2^m} \tilde{A}_{ijs} \bar{x}(t) \quad (2.28)$$

avec :

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{ijs} = \begin{bmatrix} A_i & 0 & B_i \\ C_{2i} & -I & D_i \\ \bar{E}_s H_j & E_s K_j P_5^{-1} & -I \end{bmatrix}$$

Les LMIs obtenues peuvent être énoncées au théorème suivant :

**Théorème 2.5.** Le système (2.25) est asymptotiquement stable via la commande SOF (2.22), s'il existe une matrice symétrique  $P_1 > 0$  et des matrices  $P_2, P_3, F_j, Z_j$ , solution du problème LMI suivant :

$$\begin{cases} I) \begin{bmatrix} (A_i P_1 + B_i P_7) + (*) & * & * \\ P_8^T B_i^T + C_{2i} P_1 + D_i P_7 & -P_5 - P_5^T - D_i P_8 & * \\ \bar{E}_s Z_j + P_9^T B_i^T - P_7 & P_9^T D_i^T + E_s K_j - P_8 & -P_3 - P_3^T \end{bmatrix} < 0 \quad i \in I_r, j \in I_r \\ II) \begin{bmatrix} \bar{u}_i^2 & * \\ (z_i^j)^T & P_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in I_m, j \in I_r \end{cases} \quad (2.29)$$

avec :  $Z_j = F_j P_1^{-1}$

**Démonstration :** On définit une fonction de Lyapunov comme suit :

$$V(t) = \tilde{x}^T(t) \tilde{\Xi}(P_\zeta)^{-1} \tilde{x}(t) \quad (2.30)$$

Le système en boucle fermée (2.25) est asymptotiquement stable si  $\dot{V}(t) < 0$ , c.à.d.

$$\dot{\tilde{x}}^T(t) \tilde{\Xi}(P_\zeta)^{-1} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{\Xi}(P_\zeta)^{-1} \dot{\tilde{x}}(t) < 0 \quad (2.31)$$

On a pour un système descripteur [Bouarar et al., 2013] :

$$\tilde{\Xi}(P_\zeta)^{-1} = (P_\zeta)^{-T} \tilde{\Xi} > 0 \quad (2.32)$$

Pour cela, on choisit :  $P_\zeta = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_5 & 0 \\ P_7 & P_8 & P_9 \end{bmatrix}$

Multipliant à gauche par  $P_\zeta^T$ , et à droite par  $P_\zeta$ , l'équation (2.32) peut s'écrire :

$$\tilde{\Xi} P_\zeta^T = \tilde{\Xi} P_\zeta > 0 \quad (2.33)$$

On a aussi :

$$\tilde{A}_{\zeta\zeta\zeta}^T (P_1)^{-1} + (P_1)^{-T} \tilde{A}_{\zeta\zeta\zeta} < 0 \quad (2.34)$$

En multipliant à gauche par  $P_\zeta^T$ , et à droite par  $P_\zeta$ , prenant en considération l'équation (2.34), l'inégalité précédente sera :

$$P_\zeta^T \tilde{A}_{\zeta\zeta\zeta}^T + \tilde{A}_{\zeta\zeta\zeta} P_\zeta < 0 \quad (2.35)$$

donc,  $\dot{V}(t) < 0$ , si :

$$\begin{bmatrix} (A_i P_1 + B_i P_7) + (*) & * & * \\ P_8^T B_i^T + C_{2i} P_1 + D_i P_7 & -P_5 - P_5^T - D_i P_8 & * \\ \bar{E}_s Z_j + P_9^T B_i^T - P_7 & P_9^T D_i^T + E_s K_j - P_8 & -P_9 - P_9^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.36)$$

Pour l'inégalité (II-2.29), l'ellipsoïde  $\varepsilon(P_\zeta, 1)$  est inclus dans  $\bigcap_{j=1}^r \mathfrak{N}(H_j)$  si et seulement si :

$$\left(\tilde{h}_i^j\right)^T \left(\tilde{E}(P_\zeta)^{-1}\right)^{-1} \left(\tilde{h}_i^j\right) \leq \bar{u}_i^2 \quad (2.37)$$

avec  $\tilde{h}_i^j = \begin{bmatrix} h_i^j & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

L'inégalité précédente peut s'écrire :

$$\bar{u}_i^2 - \left(h_i^j\right)^T P_1 \left(h_i^j\right) \geq 0 \quad (2.38)$$

et finalement, l'application le complément de Schur sur l'inégalité (2.38), nous donne :

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_i^2 & h_i^j \\ * & (P_1)^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.39)$$

Compte tenu le changement de variable suivant :  $Z_j = H_j P_1$ , et en multipliant à gauche et à

droite par  $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix}$ , l'inégalité précédente peut être exprimée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_i^2 & z_i^j \\ * & P_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.40)$$

avec :  $z_i^j$  est l'ième élément de  $Z_j$ .

## 2.5 Stabilisation $H_\infty$ des modèles T-S en présence de la saturation d'actionneur

Comme nous avons lancé précédemment, le critère  $H_\infty$  est une moyenne fiable pour éliminer les effets des perturbations sur le système commandé. Dans ce contexte, cette section est dédiée à l'extension de la stabilisation  $H_\infty$  aux modèles T-S soumis à la saturation d'actionneur et avec la présence des effets de perturbations, pour les deux approches PDC et SOF. Les résultats obtenus sont basés sur l'utilisation de la forme quadratique de la candidate de Lyapunov. Pour ce faire, on rappelle le modèle T-S avec perturbation externe et saturation d'actionneur (2.1) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i \sigma(t) + B_{w_i} w(t)) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{1i} x(t) + D_i \sigma(t) + D_{w_i} w(t)) \end{cases} \quad (2.41)$$

Notre objectif dans ce cas est de stabiliser le système (2.41) en présence des perturbations, ce but ne peut pas être atteint sans passer le critère  $H_\infty$  :

$$\int_0^\infty z^T(t) z(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t) w(t) dt \quad (2.42)$$

une forme plus adéquate est proposée par la suite [Lo and Lin, 2003] :

$$\begin{cases} \min \gamma \\ \dot{V}(t) + z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) < 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

### 2.5.1 Synthèse d'une commande PDC

#### 2.5.1.1 Commande PDC contrainte

Dans cette partie, comme nous avons mentionné précédemment, la loi de commande ne sature jamais et la fonction de saturation s'écrit comme dans (2.8). Le système T-S devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + B_{w_i} w(t)) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{1i} x(t) + D_i u(t) + D_{w_i} w(t)) \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\forall x(t) \in \bigcap_{j=1}^r \mathfrak{N}(K_j)$$

Le théorème suivant résume les conditions de stabilisations obtenues :

**Théorème 2.6.** [Saifia, 2013] Pour un scalaire donné  $\rho$ , le système (2.44) est asymptotiquement stable via la commande PDC (2.8), avec un niveau d'atténuation des perturbations  $\gamma$ , s'il existe une matrice  $Q \in R^{n \times n}$ ,  $Q = Q^T > 0$ , et des matrices  $F_j \in R^{m \times n}$  solution du problème LMI suivant :

$$\begin{cases} I) \begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & f_i^j \\ * & Q \end{bmatrix} \geq 0, \forall i \in I_r, \forall j \in I_r \\ II) \begin{bmatrix} A_i Q + B_i F_j + (*) & * & * \\ B_{w_i}^T & -\gamma^2 I & * \\ C_{1_i} Q + D_i F_j & D_{w_i} & -I \end{bmatrix} < 0, \forall i \in I_r, \forall j \in I_r \end{cases} \quad (2.45)$$

avec  $K_j = F_j Q^{-1}$ ,  $f_i^j$  est l'ième élément du vecteur  $F_j$ .

**Démonstration :**

En utilisant lemme 2.1,  $\varepsilon(P, \rho) \subset \bigcap_j^r \mathfrak{N}(K_j)$  si et seulement si :

$$\left(k_i^j\right)^T \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1} k_i^j \leq \bar{u}_i^2 \quad (2.46)$$

par le changement de variable suivant :  $Q = (P)^{-1}$ ,  $H_j = K_j Q$   
l'inégalité (2.46) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\bar{u}_i^2}{\rho} Q - \left(f_i^j\right)^T f_i^j \geq 0 \quad (2.47)$$

$f_i^j$  est l'ième colonne de la matrice  $F_j$ . Nous utilisons le compliment de Schur , on arrive à l'inégalité (I-2.45).

Pour l' LMI (II-2.45), on suppose qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ , satisfaite l'inégalité suivante :

$$\dot{V}(t) + z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) < 0 \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A_\zeta + B_\zeta K_\zeta)^T P + (*) & * \\ B_{w_\zeta}^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (C_{1_\zeta} + D_{1_\zeta} K_\zeta)^T \\ D_{w_\zeta}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_{1_\zeta} + D_{1_\zeta} K_\zeta)^T \\ D_{w_\zeta}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.49)$$

avec  $A_\zeta = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i)$ ,  $B_\zeta = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (B_i)$ ,  $K_\zeta = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (K_i)$ , etc.

le compliment de Schur, nous a permet de l'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{V}(t) + z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \Delta_\zeta \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Pre-et post-multipliant  $\Delta_\zeta$  par  $\text{diag}(Q, I, I)$ , on aura :

$$\Pi_\zeta = \begin{bmatrix} A_\zeta Q + B_\zeta F_\zeta + (*) & * & * \\ B_{w_\zeta}^T & -\gamma^2 I & * \\ C_1 \zeta Q + D_{2_\zeta} K_\zeta & D_{w_\zeta} & -I \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Pour avoir la condition (II-2.45), il suffit d'avoir :

$$\Pi_\zeta < 0 \quad (2.52)$$

### 2.5.1.2 Commande PDC saturante

Le système (2.7) via la commande PDC saturante (2.12) décrite par le modèle polytopique (1.79) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i (E_s K_j + \bar{E}_s H_j) x(t) + B_{w_i} w(t)) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{1i} x(t) + D_i (E_s K_j + \bar{E}_s H_j) x(t) + D_{w_i} w(t)) \\ \forall x(t) \in \bigcap_{j=1}^r \mathfrak{N}(H_j) \end{cases} \quad (2.53)$$

Le théorème suivant résume les conditions de stabilisations obtenues :

**Théorème 2.7.** [Saifia, 2013] Pour un scalaire donné  $\rho$ , le système (2.53) est asymptotiquement stable via la commande PDC (2.12), avec un niveau d'atténuation des perturbations  $\gamma$ , s'il existe une matrice  $Q \in R^{n \times n}$ ,  $Q = Q^T > 0$ , et des matrices  $F_j \in R^{m \times n}$ ,  $Z_j \in R^{m \times n}$ ,  $j \in I_r$  solution du problème LMI suivant :

$$\begin{cases} I) \begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & z_i^j \\ * & Q \end{bmatrix} \geq 0, \forall i \in I_r, \forall j \in I_r \\ II) \begin{bmatrix} A_i Q + B_i E_s F_j + B_i \bar{E}_s Z_j + (*) & * & * \\ B_{w_i}^T & -\gamma^2 I & * \\ C_{1i} Q + D_i E_s F_j + D_i \bar{E}_s Z_j & D_{w_i} & -I \end{bmatrix} < 0, \forall i \in I_r, \forall j \in I_r \end{cases} \quad (2.54)$$

avec :  $K_j = F_j Q^{-1}$ .

#### Démonstration :

En utilisant lemme 2.1,  $\varepsilon(P, \rho) \subset \bigcap_j \mathfrak{N}(H_j)$  si et seulement si :

$$\left(h_i^j\right)^T \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1} h_i^j \leq u_i^2 \quad (2.55)$$

introduisons les changements de variables suivants :  $Q = (P)^{-1}$ ,  $Z_j = H_j Q$

L'inégalité (2.55) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\bar{u}_i^2}{\rho} Q - \left(z_i^j\right)^T z_i^j \geq 0 \quad (2.56)$$

$z_i^j$  est le  $i$ -ème colonne de la matrice  $Z_j$ . En appliquant le complément de Schur, on arrive à l'inégalité (I-2.54).

Pour l'LMI (II-2.54), supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$  satisfaisant l'inégalité :

$$\dot{V}(t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0 \quad (2.57)$$

$$= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A_\zeta + B_\zeta(E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta))^T P + (*) & * \\ B_{w_\zeta}^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (C_{1\zeta} + D_{1\zeta} K_\zeta)^T \\ D_{w_\zeta}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_{1\zeta} + D_{1\zeta} K_\zeta)^T \\ D_{w_\zeta}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

en utilisant le complément Schur, nous obtenons :

$$\dot{V}(t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \Delta_\zeta \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Pré et post-multiplication  $\Delta_\zeta$  par  $diag(Q, I, I)$ , on aura

$$\Pi_\zeta = \begin{bmatrix} A_\zeta Q + B_\zeta E_\zeta F_\zeta + B_\zeta \bar{E}_\zeta Z_\zeta & * & * \\ B_{w_\zeta}^T & -\gamma^2 I & * \\ C_{1\zeta} Q + D_\zeta E_\zeta F_\zeta + D_\zeta \bar{E}_\zeta Z_\zeta & D_{w_\zeta} & -I \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Pour garantir (II-2.54), il suffit de vérifier la condition suivante :

$$\Pi_\zeta < 0 \quad (2.61)$$

ceci complète la démonstration.

### Exemple 2.1. Stabilisation d'une direction assistée électrique

Le système EPS est représenté sur la figure 2 .1. Où,  $T_h$ ,  $T_{sen}$ , et  $T_a$  désignent respectivement le couple du conducteur, le couple mesuré et le couple moteur.  $\theta_c$ ,  $\theta_m$ , et  $x_r$ , représentent, respectivement, l'angle de braquage, l'angle du moteur et le déplacement de la crémaillère.  $r_p$  et  $k_t$  indiquent le rayon du pignon et le taux de ressort du pneu.  $V$  est la vitesse du véhicule et  $I$  est le courant d'entrée du moteur.

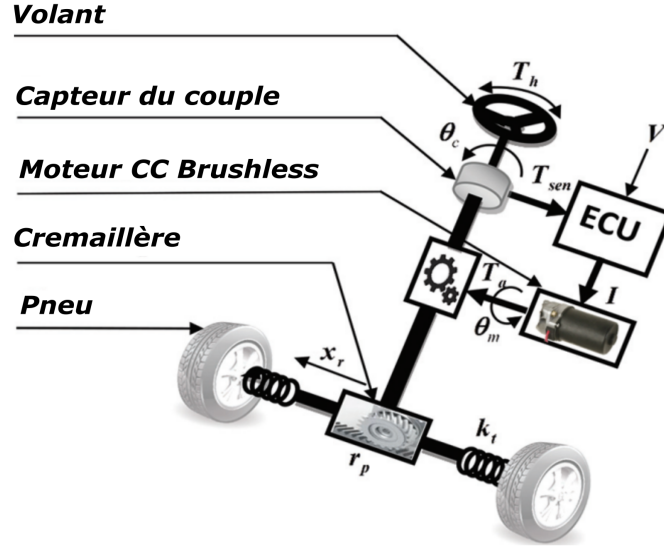
En utilisant les lois de Newton, le comportement dynamique de l'EPS montré dans la figure 2.1 peut être écrit comme suit [Li et al., 2009b] [Saifia et al., 2015] :

La dynamique de la colonne de direction

$$J_c \ddot{\theta}_c + B_c \dot{\theta}_c + F_c \text{sign}(\dot{\theta}_c) = T_h - T_{sen} \quad (2.62)$$

La dynamique du moteur à courant continu est exprimée comme suit :

$$J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m + F_m \text{sign}(\dot{\theta}_m) = T_a - T_m \quad (2.63)$$



**Figure 2.1:** Système de direction assistée électrique

et la dynamique de la crémaillère de direction est de la forme suivante :

$$M_r \ddot{x}_r = \frac{T_{sen} + GT_m}{r_p} - B_r \dot{x}_r - k_r x_r - f_r(t) - F_r \text{sign}(\dot{x}_r) \quad (2.64)$$

où  $J_c$  est le moment d'inertie de la colonne de direction,  $B_c$  est l'amortissement visqueux de la direction,  $F_c$  est le frottement de la colonne de direction,  $J_m$  est le moment d'inertie moteur,  $B_m$  est l'amortissement du moteur,  $F_m$  est le frottement moteur,  $M_r$  est la masse d'assemblage de la roue et de la crémaillère,  $G$  est le rapport d'engrenage du moteur,  $r_p$  est le rayon du pignon,  $B_r$  est l'amortissement du rack,  $k_r$  est le taux d'amortissement de ressort des pneus.  $T_{sen}$  est donné par :

$$T_{sen} = k_s \left( \theta_c - \frac{x_r}{r_p} \right) \quad (2.65)$$

et le couple moteur est spécifié par :

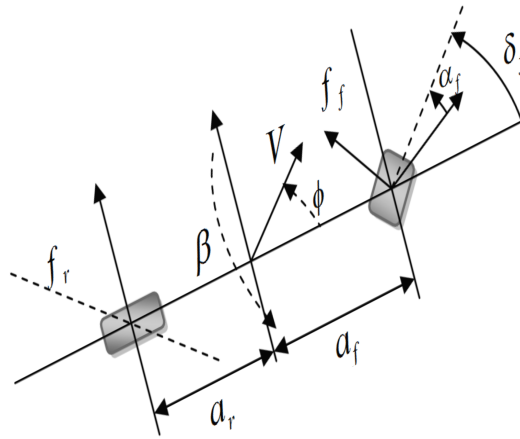
$$T_a = k_a I \quad (2.66)$$

La force d'asservissement est définie par :

$$T_m = k_m (\theta_m - G\theta_c) \quad (2.67)$$

où :  $k_s$ ,  $k_a$  et  $k_m$  sont, respectivement, la rigidité de la colonne de direction, la constante de couple pour le moteur et la rigidité en torsion du moteur.

La force dans la crémaillère  $f_r(t)$  peut être déterminée à partir du modèle mathématique de véhicule en utilisant le modèle de vélo (voir figure 2.2).



**Figure 2.2:** Modèle vélo de véhicule

La dynamique latérale est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = \frac{1}{MV(t)} \left[ -(C_f + C_r) \phi(t) - \left( MV(t) - \frac{1}{V(t)} (a_f C_f - a_r C_r) \right) \beta(t) + C_f \delta_f \right] \\ \dot{\beta}(t) = \frac{1}{I_z} \left[ -(a_f C_f - a_r C_r) \phi(t) - \frac{1}{V(t)} (a_f^2 C_f + a_r^2 C_r) \beta(t) + a_f C_f \delta_f \right] \end{cases} \quad (2.68)$$

où  $\phi$  est l'angle de dérapage,  $\beta$  est le l'angle de lacet,  $C_f$  est la rigidité dans les cornières avant,  $C_r$  est la rigidité dans les cornières arrière,  $a_f$  est la longueur du châssis avant,  $a_r$  est la longueur du châssis arrière,  $M$  est la masse du véhicule,  $I_z$  est le moment d'inertie du véhicule.

La force à la crémaillère est donnée par :

$$f_r(t) = \frac{T_p C_f [\delta_f - (\phi(t) + (a_f/V(t)) \beta(t))]}{r_p} \quad (2.69)$$

où  $T_p$  est le déport de chasse, et  $\delta_f$  est l'angle de braquage avant, qui est donné par :

$$\delta_f = \frac{\theta_c}{G_{sc}} \quad (2.70)$$

où  $G_{sc}$  est le rapport du système de direction.

Choisir le vecteur d'état comme :  $\mathbf{x}(t) = [\theta_c \quad c \quad \theta_m \quad m \quad x_r \quad v_r \quad \phi \quad \beta]^T$ , ensuite, le modèle non linéaire complet d'EPS peut être s'écrit comme suit :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + B_{T_h} T_h(t) + B_w w(t) \quad (2.71)$$

avec :



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{61} & 0 & a_{63} & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ a_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77} & a_{78} \\ a_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\text{sign}(\omega_c)/J_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sign}(\omega_m)/J_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sign}(v_r)/M_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_c & c & \theta_m & m & x_r & v_r & \varphi & \gamma \end{bmatrix}^T, \quad u(t) = I(t)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_a/J_m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad B_{T_h} = \begin{bmatrix} 0 & 1/J_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} F_c & F_m & F_r \end{bmatrix}^T$$

$$a_{21} = \frac{-k_c}{J_c}, \quad a_{22} = \frac{-B_c}{J_c}, \quad a_{25} = \frac{k_c}{J_c r_p}, \quad a_{43} = \frac{-k_m}{J_m}, \quad a_{44} = \frac{-B_m}{J_m}, \quad a_{45} = \frac{J G k_m}{J_m r_p}, \quad a_{61} = \frac{k_c}{M_r r_p} - \frac{T_p C_f}{G_{sc} M_r r_p},$$

$$a_{63} = \frac{G k_m}{M_r r_p}, \quad a_{65} = -\frac{k_c + k_t + G^2 k_m}{M_r r_p^2}, \quad a_{66} = \frac{-B_r}{M_r}, \quad a_{67} = \frac{T_p C_f}{M_r r_p}, \quad a_{71} = \frac{C_f}{G_{sc}}, \quad a_{77} = -\frac{C_f + C_r}{V M},$$

$$a_{78} = \frac{C_f a_f - C_r a_r - V^2 M}{V^2 M}, \quad a_{81} = \frac{C_f a_f}{I_z G_{sc}}, \quad a_{87} = \frac{-C_f a_f - C_r a_r}{I_z}, \quad a_{88} = -\frac{C_f a_f^2 + C_r a_r^2}{I_z V}.$$

**Tableau 2.1:** Paramètres du système [Li et al., 2009b]

|                                 |                                 |                             |
|---------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| $G = 16.5$                      | $J_m = 510^{-4} \text{kgm}^2$   | $C_f = 126000 \text{N/rad}$ |
| $G_{sc} = 20$                   | $B_m = 0.032 \text{Nm/(rad/s)}$ | $C_r = 126000 \text{N/rad}$ |
| $M_r = 32 \text{kg}$            | $K_m = 125 \text{Nm}$           | $I_z = 4240 \text{kgm}^2$   |
| $r_p = 0.007 \text{m}$          | $F_m = 0.056 \text{Nm}$         | $T_p = 0.033 \text{m}$      |
| $J_c = 0.04 \text{kgm}^2$       | $B_r = 3820$                    | $a_f = 1 \text{m}$          |
| $B_c = 0.072 \text{Nm/(rad/s)}$ | $F_r = 0.002 \text{Nm}$         | $a_r = 1.8 \text{m}$        |
| $K_c = 114.6 \text{Nm/rad}$     | $K_t = 32900 \text{Nm}$         | $M = 1814 \text{kg}$        |
| $F_c = 0.027 \text{Nm}$         | $K_a = 0.05 \text{Nm/A}$        |                             |

En utilisant l'approche de secteur non linéaire, le modèle T-S d'un système EPS peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \zeta_i(\varsigma(t)) (Ax(t) + B_{w_i} w(t) + B\sigma(t) + B_{T_h} T_h) \\ z(t) = T_{sen} = C_1 x(t) \end{cases} \quad (2.72)$$

Nous avons :  $\forall (\omega_c, \omega_m, v_r) \in R / \{ \text{sign}(\omega_c), \text{sign}(\omega_m), \text{sign}(v_r) \} \in [-1, 1]$

alors :  $N_{c1} = \frac{1 - \text{sign}(\omega_c)}{2}$ ,  $N_{m1} = \frac{1 - \text{sign}(\omega_m)}{2}$ ,  $N_{v1} = \frac{1 - \text{sign}(v_r)}{2}$

$N_{c2} = \frac{\text{sign}(\omega_c) + 1}{2}$ ,  $N_{m2} = \frac{\text{sign}(\omega_m) + 1}{2}$ ,  $N_{v2} = \frac{\text{sign}(v_r) + 1}{2}$ ,

et :

$$\zeta_1 = N_{c1}N_{m1}N_{v1}, \zeta_2 = N_{c2}N_{m1}N_{v1}, \zeta_3 = N_{c2}N_{m2}N_{v1}, \zeta_4 = N_{c2}N_{m1}N_{v2},$$

$$\zeta_5 = N_{c2}N_{m2}N_{v2}, \zeta_6 = N_{c1}N_{m2}N_{v1}, \zeta_7 = N_{c1}N_{m2}N_{v2}, \zeta_8 = N_{c1}N_{m1}N_{v2}$$

$$B_{w1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/J_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/J_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/M_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{w2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/J_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/J_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/M_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{w3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/J_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/M_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{w4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/J_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/J_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/M_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{w5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/J_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/M_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{w6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/J_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/M_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{w7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/J_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/M_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{w8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/J_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/J_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/M_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maintenant, on suppose que le niveau de saturation est  $\bar{I} = 25 A$ , puis par la résolution du problème LMI dans théorème 2.5 et 2.6 on obtient les résultats suivants (table 2.2, 2.3 et 2.4) :

Dans cette partie, pour illustrer l'efficacité de la méthode proposée, les résultats obtenus précédemment sont appliqués au système de direction EPS. Les paramètres de l'EPS sont donnés dans le tableau 2.1. Pour un niveau de saturation  $\bar{I} = 25 A$ , nous obtenons les résultats suivants :

**Tableau 2.2:** Paramètre  $H_\infty$  pour différents niveaux de saturation

| Niveau de saturation | Type | Commande saturante | Commande contrainte |
|----------------------|------|--------------------|---------------------|
| 15A                  |      | $\gamma = 0.5314$  | $\gamma = 0.2260$   |
| 25A                  |      | $\gamma = 0.3732$  | $\gamma = 0.1523$   |
| 35A                  |      | $\gamma = 0.3331$  | $\gamma = 0.1315$   |
| 50A                  |      | $\gamma = 0.2439$  | $\gamma = 0.1220$   |

**Tableau 2.3:** Paramètre de la commande PDC saturante

| $Q =$                                 |          |         |                      |         |         |         |         |
|---------------------------------------|----------|---------|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| 3.9165                                | -17.0967 | 64.1982 | -257.1924            | 0.0272  | -0.0806 | 0.1218  | 0.7149  |
| -17.1                                 | 146.6    | -282.6  | $10^3 \times 2.2667$ | -0.1    | 0.7     | -0.3    | -5.9    |
| 64.2                                  | -282.6   | 1053    | -4277.0              | 0.4     | -1.40   | 2.0     | 11.8    |
| -25.7                                 | 226.7    | -427.7  | $10^2 \times 46.496$ | -0.2    | -27.6   | -0.4    | -9.5    |
| 0.0272                                | -0.1196  | 0.4462  | -1.8095              | 0.0002  | -0.0006 | 0.0008  | 0.0050  |
| -0.0806                               | 0.7491   | -1.3854 | -276.2867            | -0.0006 | 10.8775 | -0.0005 | -0.0363 |
| 0.1218                                | -0.2599  | 1.9934  | -3.5873              | 0.0008  | -0.0005 | 0.0050  | 0.0093  |
| 0.7149                                | -5.8860  | 11.7517 | -94.5842             | 0.0050  | -0.0363 | 0.0093  | 0.2896  |
| $K_1 = 10^3$                          | 0.7224   | 0.0036  | -0.0404              | -0.0004 | -2.7010 | -0.0102 | -0.9300 |
| $K_2 = 10^3$                          | 0.8489   | 0.0038  | -0.0480              | -0.0005 | -2.5838 | -0.0123 | -0.9870 |
| $K_3 = 10^3$                          | 0.8574   | 0.0039  | -0.0485              | -0.0005 | -2.5746 | -0.0125 | -0.9961 |
| $K_4 = K_6 = K_7 = K_8 =$             |          |         |                      |         |         |         |         |
| $10^3$                                | 0.8900   | 0.0045  | -0.0514              | -0.0006 | -2.5513 | -0.0163 | -0.6865 |
| $K_5 = 10^3$                          | 0.8651   | 0.0040  | -0.0491              | -0.0005 | -2.5668 | -0.0132 | -0.9567 |
| $H_1 = H_3 = H_4 = H_6 = H_7 = H_8 =$ |          |         |                      |         |         |         |         |
| $10^3$                                | 0.6224   | 0.0034  | -0.0352              | -0.0004 | -1.6049 | -0.0103 | -0.7599 |
| $H_2 = H_5 = 10^3$                    | 0.6413   | 0.0041  | -0.0366              | -0.0004 | -1.6194 | -0.0113 | -0.6772 |
| $\gamma = 0.3732$                     |          |         |                      |         |         |         |         |

En choisissant le couple appliqué par le conducteur sous forme sinusoïdale qui peut être similaire à la forme pratique, avec deux fréquences différentes (respectivement 0,5 Hz et 1 Hz), et une vitesse du véhicule à 20 m / s. Les réponses de simulation sont présentées dans les figures 2.3 (a-d). D'après ces figures, on constate que dans les manœuvres basse fréquence, le contrôle de saturation avec  $H_\infty$  donne de bonnes performances, ce qui permet en présence de saturation et de perturbations internes, de donner une conduite stable. Avec des fréquences élevées (voir figure 2.3 c et d), le contrôleur PDC améliore la tenue de route du véhicule et conserve la facilité des manœuvres et élimine les grandes ondulations de couple.

### 2.5.1.3 Commande en poursuite d'un modèle de référence en présence de saturation asymétrique

Dans cette section, nous nous intéressons au problème de la poursuite d'une consigne générée par un modèle de référence pour un système non linéaire décrit par un modèle de T-S soumis à une saturation d'actionneur asymétrique. Malgré une littérature riche sur l'étude de la stabilité de

**Tableau 2.4:** Paramètre de la commande PDC contrainte

| $Q =$                     |                     |                      |                      |         |         |         |         |          |
|---------------------------|---------------------|----------------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|----------|
| 5.1493                    | -24.4558            | 84.5253              | -313.3568            | 0.0358  | -0.1025 | 0.1631  | 0.7393  |          |
| -24.5                     | 193.0               | -405                 | $10^3 \times 2.7357$ | -0.2    | 1       | -0.5    | -6.1    |          |
| 84.5                      | -405                | $10^2 \times 13.902$ | -5412.6              | 0.6     | -1.9    | 2.7     | 12.3    |          |
| -313                      | $10^2 \times 27.36$ | -5413                | 71442                | -2      | -243    | -6      | -111    |          |
| 0.0358                    | -0.1715             | 0.5890               | -2.2917              | 0.0003  | -0.0009 | 0.0011  | 0.0052  |          |
| -0.1025                   | 0.9967              | -1.9446              | -243.4731            | -0.0009 | 10.4966 | -0.0016 | -0.0508 |          |
| 0.1631                    | -0.5041             | 2.6781               | -5.7933              | 0.0011  | -0.0016 | 0.0064  | 0.0101  |          |
| 0.7393                    | -6.1368             | 12.2867              | -111.4527            | 0.0052  | -0.0508 | 0.0101  | 0.3035  |          |
| $K_1 = 10^3$              | [0.6304             | 0.0035               | -0.0363              | -0.0004 | -1.6264 | -0.0113 | -0.5265 | -0.1030] |
| $K_2 = 10^3$              | [0.6307             | 0.0035               | -0.0364              | -0.0004 | -1.6233 | -0.0114 | -0.5166 | -0.1027] |
| $K_3 = 10^3$              | [0.6308             | 0.0035               | -0.0364              | -0.0004 | -1.6231 | -0.0115 | -0.5109 | -0.1025] |
| $K_4 = K_6 = K_7 = K_8 =$ |                     |                      |                      |         |         |         |         |          |
| $10^3$                    | [0.6312             | 0.0035               | -0.0365              | -0.0004 | -1.6237 | -0.0115 | -0.4862 | -0.1016] |
| $K_5 = 10^3$              | [0.6309             | 0.0035               | -0.0364              | -0.0004 | -1.6230 | -0.0115 | -0.5042 | -0.1022] |
| $\gamma = 0.1523$         |                     |                      |                      |         |         |         |         |          |

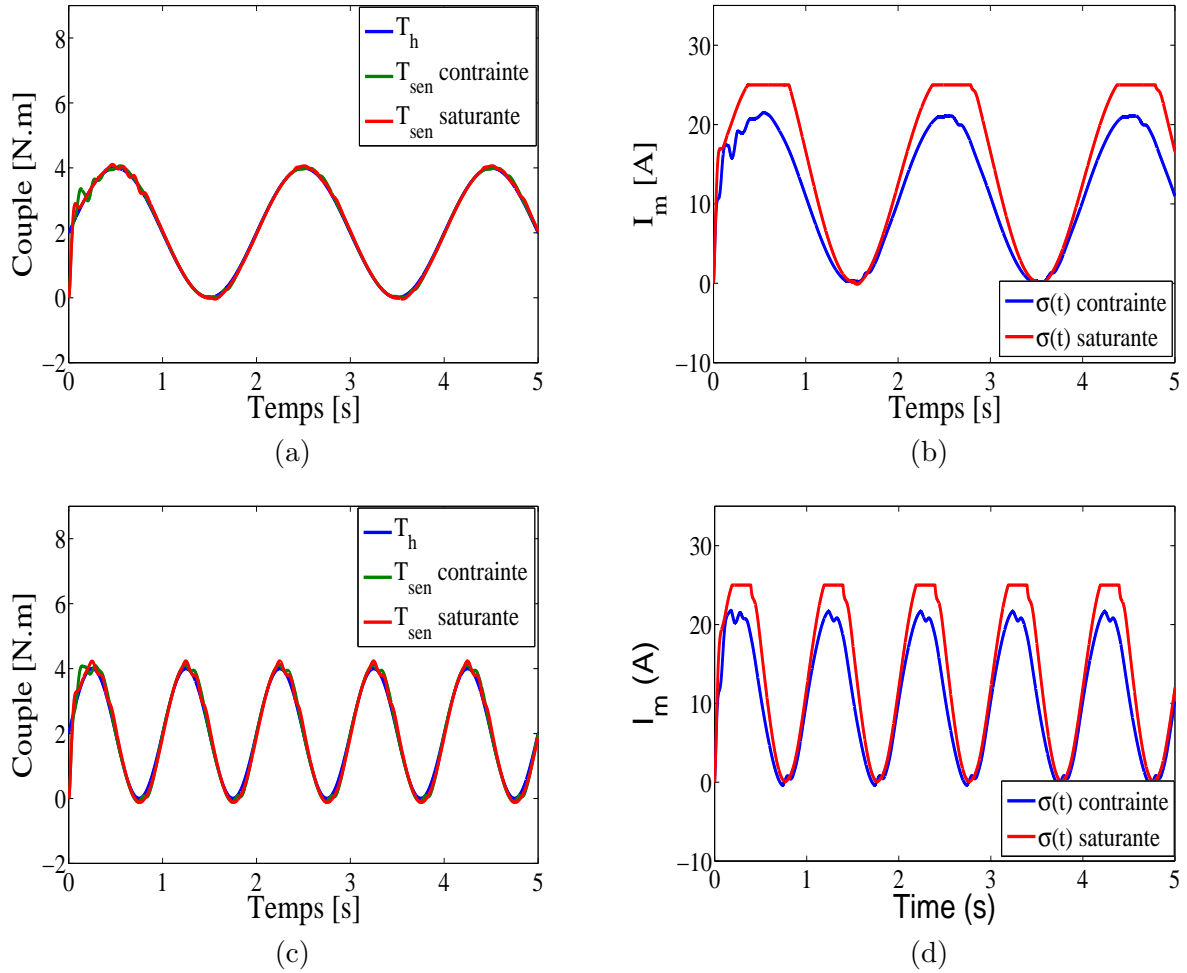
ces modèles, peu de travaux se sont intéressés au problème de poursuite de modèle de référence. On peut citer par exemple quelques travaux sur le retour d'état ou de sortie avec la commande  $H_\infty$  [Taniguchi et al., 1999] [Tseng and Chen, 2001] [Mansouri et al., 2009]. Dans ce cas, la solution du problème de poursuite non linéaire est exprimée en termes d'inégalités matricielles linéaires et de structure de commande de type PDC [Tseng and Chen, 2001] [Mansouri et al., 2009] [Asemani and Majd, 2013]. Cependant, les effets de la saturation asymétrique n'ont été jamais pris en considération dans le cadre de la commande des systèmes non linéaires décrits par les modèles T-S. Cette dernière remarque nous motive à proposer la présente contribution. En effet, dans cette section, nous avons proposé de développer de nouvelles conditions de stabilisation pour les systèmes non linéaires soumis à des saturations non symétriques. L'idée de base de ce développement est de diviser l'espace d'entrée en un  $2^m$  ( $m$  représente le nombre d'actionneurs) régions et les saturations non symétriques ont été réécrites en  $2^m$  combinaison de saturations symétriques.

Dans ce sens, l'approche contrainte de la saturation asymétrique est considérée et les conditions de stabilisation sont dérivées via le critère  $H_\infty$ . Dans ce développement et afin d'assurer l'élimination des erreurs de poursuite une action intégrale est ajoutée. Par la suite l'approche a été validée par une application sur le système photovoltaïque [Nasri et al., 2019c].

### Position du problème

Comme nous avons discuté dans le chapitre 1, la saturation non symétrique peut être modélisée de deux manières différentes, soit par la transformation de la saturation non symétrique en forme symétrique, ou par la division de l'espace d'entrée en régions et les saturations non symétriques ont été réécrites en combinaison de saturations symétriques. Dans ce travail, l'idée de base est d'utiliser cette dernière méthode de modélisation de la saturation dans le cas d'une poursuite d'un modèle de référence.

En prenant la classe de modèle T-S avec perturbation externe et saturation d'actionneur suivant :



**Figure 2.3:** réponses du système : (a).  $T_{sen}$  par rapport  $T_h$  à 0.5 Hz. (b). signal de commande à 0.5 Hz. (c)  $T_{sen}$  par rapport  $T_h$  à 1 Hz. (d). signal de commande à 1 Hz.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B \text{sat}(u(t)) + w(t)) \quad (2.73)$$

et nous considérons le modèle de référence suivant :

$$\dot{x}_r(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_{ri} x_r(t) + r(t)) \quad (2.74)$$

où  $x_r(t)$  est l'état de référence,  $A_{ri}$  est une matrice Hurwitz et  $r(t)$  est l'entrée de consigne.

Le signal de commande est soumis à une saturation asymétrique, dans ce cas la loi de commande PDC s'écrit de même que dans (1.12) :

$$u(t) = \sum_{\ell=1}^r \zeta_{\ell}(\varsigma(t)) K_{\ell}^p e(t) \quad (2.75)$$

avec :

$$e(t) = x(t) - x_r(t) \quad (2.76)$$

est l'erreur de poursuite.

Le but ici est de synthétiser un contrôleur de tel façon que le système en boucle fermée converge asymptotiquement vers leur modèle de référence en présence de la saturation d'entrée, et des perturbations externe.

Prenant maintenant la dérivée temporelle de l'erreur de poursuite  $e(t)$ .

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\ell} \zeta_i(\varsigma(t)) \zeta_l(\varsigma(t)) \zeta_{rk}(\varsigma(t)) [A_i x + B_i u(t) + (A_i - A_{rk}) x_r + w(t) - r(t)] \quad (2.77)$$

Pour minimiser l'erreur statique et avoir une bonne poursuite du modèle de référence, une action intégrale est introduite à la loi de commande (2.75) :

$$u(t) = \sum_{l=1}^r \zeta_l(\varsigma(t)) \left( K_l^p e(t) + L_l^p \int e(t) \right) = \sum_{l=1}^r \zeta_l(\varsigma(t)) \tilde{K}_l^p \tilde{x} \quad (2.78)$$

avec :  $\tilde{K}_l^p = \begin{bmatrix} k_l^p \\ L_l^p \end{bmatrix}^T$ ,  $\tilde{x} = \begin{bmatrix} e(t) \\ \int e(t) \end{bmatrix}$

Le système augmenté composé par le modèle de référence (2.74) le système (2.73) et la commande (2.78) est défini comme suit :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^{16} \sum_{l=1}^{16} \sum_{k=1}^4 \zeta_i(\varsigma(t)) \zeta_l(\varsigma(t)) \zeta_{dk}(\varsigma(t)) [\tilde{A}_{ilk} \tilde{x}(t) + \tilde{D} \tilde{w}(t)] \quad (2.79)$$

où :  $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{w} = \begin{bmatrix} w \\ r(t) \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{A}_{ilk} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i + \tilde{B}_i \tilde{K}_l^p & \tilde{A}_{dk} \\ 0 & A_{dk} \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_w & \tilde{I}_e \\ 0 & I \end{bmatrix}$ ,  
 $\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} \tilde{B}_i \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{D}_w = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{I}_e = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{A}_{dk} = \begin{bmatrix} A_i - A_{dk} \\ 0 \end{bmatrix}$

Afin de minimiser l'effet des perturbations par le critère  $H_\infty$ , on définit la fonction objective comme suit :

$$J = \dot{V}(t) + e^T(t) S e(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) \quad (2.80)$$

avec  $V(t)$  est une fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(t) = \tilde{x}^T(t) P \tilde{x}(t) \quad (2.81)$$

où :  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , et  $S$ , sont des matrices symétriques définies positives. Maintenant, nous définissons un ellipsoïde comme suit :

$$\varepsilon(P, \rho) = \{ \tilde{x} \in \mathbf{R}^{3 \times n} \mid \tilde{x}^T(t) P \tilde{x}(t) \leq \rho, \rho \succ 1 \} \quad (2.82)$$

Pour tout  $e(0) \in \varepsilon(P, 1) \subset \varepsilon(P, \rho)$ , si  $J < 0$ , alors,

$$\forall t_f \succ 0 : \int_0^T J dt = \int_0^T \left( \dot{V}(t) + e^T(t) S e(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) \right) \prec 0, S \succ 0, \text{ tel que : } \|\tilde{w}(t)\|_2^2 \prec \varpi^2.$$

où :  $\|\bar{w}(t)\|_2 = \sqrt{\int_{t=0}^{t=\infty} \bar{w}^T(t) \bar{w}(t) dt} < \infty$  dénote la norme  $L_2$  et  $\bar{w}(t)$ .

Ainsi,

1. Si  $\bar{w}(t) = 0$ , alors  $\dot{V}(t) < -e^T(t) S e(t) \leq 0$ .
2. Si  $\bar{w}(t) \neq 0$ , tel que  $\|\bar{w}(t)\|_2^2 < \varpi^2$ , alors :  

$$V(T) \leq V(0) + \gamma^2 \int_0^T \bar{w}^T(t) \bar{w}(t) dt \leq 1 + \gamma^2 \varpi^2, \forall T > 0$$
, avec  $\rho = 1 + \gamma^2 \varpi^2$  et  $\varepsilon(P, \rho)$  est le domaine d'attraction. En effet,  $\int_0^\infty e^T(t) S e(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty (\bar{w}^T(t) \bar{w}(t)) dt + V(0)$ , pour  $T \rightarrow \infty$  et sous des conditions initiales à zéro, nous obtenons  $\int_0^\infty e^T(t) S e(t) dt < \gamma^2 \|\bar{w}(t)\|_2^2$ . Puis, le niveau atténuation de perturbation  $H_\infty \gamma$  est garanti.

les conditions LMI trouvés sont présentés dans le suivant théorème :

**Théorème 2.8.** [Nasri et al., 2019c] Pour un scalaire donné  $\rho$ , le système en boucle fermée (2.73) est asymptotiquement stable via la commande (2.78), s'il existe des matrices symétriques définies positives  $X_1 \in R^{nn}$ ,  $X_2 \in R^{n \times n}$ , et des matrices  $\Pi \in R^{n \times n}$ ,  $\tilde{F}_\ell^p \in R^{m \times n}$ , solution du problème LMI suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} I) \left[ \begin{array}{cccc} \left( (\tilde{A}_i X_1 + \tilde{B}_i \tilde{F}_\ell^p) + (*) \right) + \Pi & A_{rk} X_1 & \tilde{D}_w & \tilde{I}_E \\ * & A_{rk} X_2 + (*) & 0 & I \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{array} \right] < 0 \\ II) \left[ \begin{array}{cc} \frac{\tilde{\delta}_{pj}^2}{\rho} & \tilde{f}_{ij}^p \\ * & X_1 \end{array} \right] \geq 0, \text{ pour } \ell \in I_r, i \in I_r, p \in I_{2^m} \\ \ell \in I_r, i \in I_r, k \in I_k, p \in I_{2^m} \end{array} \right. \quad (2.83)$$

$$\text{avec : } \rho = 1 + \gamma^2 \varpi^2, \quad \tilde{K}_\ell^p = \tilde{F}_\ell^p X_1^{-1}$$

**Démonstration :**

Soit la candidate de Lyapunov suivante :

$$V(t) = \bar{x}^T(t) P \bar{x}(t) \quad (2.84)$$

avec :  $P = P^T > 0$  Sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\bar{x}}^T(t) P \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) P \dot{\bar{x}}(t) = \bar{x}^T(t) \left( \bar{A}_{\zeta\zeta}^T P + P \bar{A}_{\zeta\zeta} \right) \bar{x}(t) \\ &\quad + \bar{w}^T(t) \bar{D}_{w\zeta}^T P \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) P \bar{D}_{w\zeta} \bar{w}(t) \end{aligned} \quad (2.85)$$

L'utilisation du critère  $H_\infty$  (2.80), nous permet d'écrire :

$$J = \bar{x}^T(t) \left( \bar{A}_{\zeta\zeta}^T P + P \bar{A}_{\zeta\zeta} + \bar{S} \right) \bar{x}(t) + \bar{w}^T(t) \bar{D}_{w\zeta}^T P \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) P \bar{D}_{w\zeta} \bar{w}(t) - \gamma^2 \bar{w}^T(t) \bar{w}(t) < 0 \quad (2.86)$$

$$\text{avec : } \bar{S} = \begin{bmatrix} \tilde{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{S} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'inégalité (2.85) peut s'écrire sous forme d'inégalités matricielles :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{w}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P\bar{A}_{\zeta\zeta} + (*) + \bar{S} & * \\ \bar{D}_{w\zeta}^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{w}(t) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.87)$$

Donc, si l'inégalité matricielle suivante est vérifiée, alors l'inégalité précédente est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} P\bar{A}_{\zeta\zeta} + (*) + \bar{S} & * \\ \bar{D}_{w\zeta}^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.88)$$

En multipliant à gauche et à droite par  $Y = \text{diag}(X, I)$ , avec  $X = P^{-1}$ , et  $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$ , on aura :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{\zeta\zeta} X + (*) + X\bar{S}X & * \\ \bar{D}_{w\zeta}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.89)$$

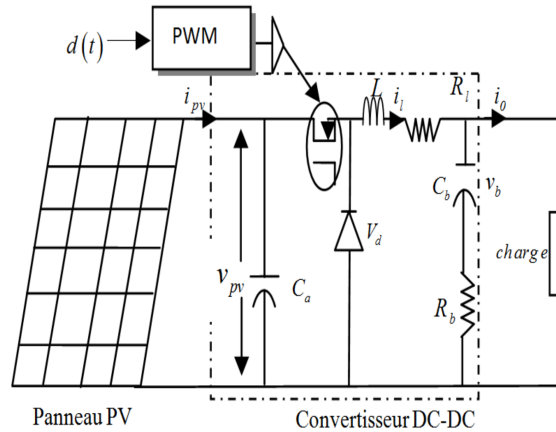
à partir de (2.80), on peut écrire l' LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} \left( (\tilde{A}_i X_1 + \tilde{B}_i \tilde{K}_l^P X_1) + (*) \right) + X_1 \tilde{S} X_1 & \tilde{A}_{dk} X_1 & \tilde{D}_w & -\tilde{I}_E \\ * & A_{dk} X_2 + (*) & 0 & I \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.90)$$

Par le changement de variable :  $\tilde{F}_l^P = \tilde{K}_l^P X_1$  et  $\Pi = X_1 \tilde{S} X_1$ , l'inégalité (I-2.83) est satisfaite. LMI (II-2.83) dans théorème 2.8 peut être obtenue de la même façon que dans Théorème 2.6 en exploitant l' expression de la commande (2.78).

**Exemple 2.2.** Commande en poursuite du point maximum de la puissance pour un système photovoltaïque en présence de la saturation asymétrique

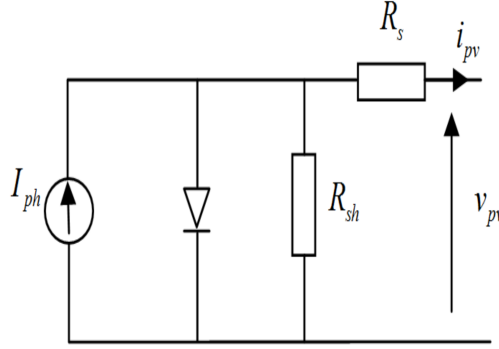
Soit le système PV avec un convertisseur DC-DC buck représenté dans la figure 2.4



**Figure 2.4:** Système PV avec convertisseur DC-DC

Le circuit équivalent de cellules solaires est illustré à la figure 2.5, où  $R_s$  et  $R_{sh}$  représentent les résistances en série et en parallèle la de cellules.





**Figure 2.5:** Le circuit équivalent de cellules solaires DC-DC

Appliquant la loi de Kirchhoff on aura :

$$i_{pv} = I_{ph} - I_{diode} - I_{sh} \quad (2.91)$$

Le modèle de cellules solaires de PV système avec panneaux parallèles et cellules en série est décrit comme suit :

$$\begin{aligned} i_{pv} &= n_p \left( I_{ph} - I_{rs} \left( e^{\frac{k_{pv}(v_{pv} + R_s i_{pv})}{n_s} - 1} \right) \right) - \frac{(v_{pv} + R_s i_{pv})}{R_{sh}} \\ I_{rs} &= I_{rr} \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^3 e^{\frac{qE}{pK} \left( \frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T} \right)} \\ I_{ph} &= (I_{SC} + K_I (T - T_{ref})) \frac{\lambda}{100} \end{aligned} \quad (2.92)$$

avec,  $k_{pv} = q/pKT$ , tel que :  $i_{pv}$  est le courant de sortie du panneau PV,  $I_{rs}$  est le courant de saturation inverse,  $I_{ph}$  est le photo-courant,  $I_{SC}$  est le courant de court-circuit de la cellule à la température de référence  $T_{ref}$  et insolation,  $I_{rr}$  est le courant de saturation inverse à la température de référence,  $p$  est un facteur idéal (varies entre 1.2 et 5),  $K = 1.3805 \times 10^{-23} J/K$  est la constante de Boltzmann,  $q = 1.6 \times 10^{-19} C$  est la charge électronique,  $T$  est la température,  $E = 1.1 eV$  est l'énergie de bande interdite du semi-conducteur constituant la cellule,  $K_I$  est le coefficient de température du court-circuit, et  $\lambda$  est l'insolation.

La résistance en série  $R_s$ , est beaucoup plus petite que la résistance de shunt  $R_{sh}$ , par conséquence on peut écrire  $i_{pv}$  comme suit :

$$i_{pv} = n_p \left( I_{ph} - I_{rs} \left( e^{\frac{k_{pv} v_{pv}}{n_s} - 1} \right) \right) \quad (2.93)$$

Les équations décrivant le comportement du convertisseur buck sont données comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{i}_L(t) &= \frac{1}{L} (R_b i_0 - (R_b + R_L) i_L - v_b + (v_d + v_{pv}) d - v_d) \\ \dot{v}_{pv}(t) &= \frac{1}{C_a} (i_{pv} - i_L d) \\ \dot{v}_b(t) &= \frac{1}{C_b} (i_L - i_0) \end{aligned} \quad (2.94)$$

où  $i_L$  et  $i_0$  sont le courant d'inductance  $L$  et le courant de charge mesurable,  $v_{pv}$  et  $v_b$  sont la tension du générateur photovoltaïque dans la capacité  $C_a$  et et la tension sur la capacité  $C_b$ , respectivement,  $d$  le rapport cyclique du signal de modulation de largeur d'impulsions (PWM) pour

contrôler la commutation de MOSFET,  $v_d$  est la tension directe de la diode, et  $R_b$  et  $R_L$  sont les résistances internes dans la capacité  $C_b$  et l'inductance  $L$ , respectivement.

La représentation en espace d'état non linéaire de modèle du panneau photovoltaïque avec convertisseur buck DC-DC est donnée par [Chiu, 2010] :

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)d(t) + B_0D \quad (2.95)$$

où :

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L \\ v_{pv} \\ v_b \end{bmatrix}, A(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(R_L + R_b I_b) & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C_a} G_a & 0 \\ \frac{1}{C_b} I_b & 0 & 0 \end{bmatrix}, B(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(v_d + v_{pv}) \\ -\frac{1}{C_a} i_L \\ 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \frac{-v_d}{L}$$

avec :  $I_b = 1 - i_o/i_L, G_a = i_{pv}/v_{pv}$

en se basant sur les termes non-linéaires dans le modèle non linéaire précédent (2.94), les variables de prémisses sont choisies comme suit :  $\varsigma(t) = [\varsigma_1 \ \varsigma_2 \ \varsigma_3 \ \varsigma_4]^T = [i_b \ i_l \ G_a \ v_{pv}]^T$

Nous supposons que, pour tout  $i \in I_4$  :

$$\varsigma_{i \max} = \max(\varsigma_i(t)), \varsigma_{i \min} = \min(\varsigma_i(t)), w_{1i}(t) = \frac{\varsigma_i(t) - \varsigma_{i \min}}{\varsigma_{i \max} - \varsigma_{i \min}}, w_{2i}(t) = \frac{\varsigma_{i \max} - \varsigma_i(t)}{\varsigma_{i \max} - \varsigma_{i \min}}$$

soit  $n_l$  soit le nombre de variables de locaux et par utilisation de l'approche de secteur non linéaire, le modèle flou T-S du système PV (2.93) peut être obtenu par interpolation entre  $r = 2^{n_l} = 16$  modèles locaux invariants dans le temps (LTI) comme suit [Chiu, 2010] :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i d(t) + B_0 D) \quad (2.96)$$

et chaque modèle local LTI est défini par :  $\zeta_i(\varsigma(t)) = \frac{M_i(\varsigma(t))}{\sum_{i=1}^r M_i(\varsigma(t))}, M_i(\varsigma(t)) = \prod_{j=1}^q w_{ji}(\varsigma_j(t))$

$$A_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(R_L + R_b \alpha_{i1}) & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C_a} \alpha_{i3} & 0 \\ \frac{1}{C_b} \alpha_{i1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(V_d + \alpha_{i4}) \\ -\frac{1}{C_a} \alpha_{i2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les paramètres  $w_{ji}$  et  $\alpha_{ij}$  sont donnés dans le Tableau 2.5.

**Tableau 2.5:** Les paramètres locaux LTI

| Règles<br>$i$ | Ensembles flous<br>$F_{i1}, F_{i2}, F_{i3}, F_{i4}$ | parties alors<br>$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \alpha_{i4}$ | Règles<br>$i$ | Ensembles flous<br>$F_{i1}, F_{i2}, F_{i3}, F_{i4}$ | parties alors<br>$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \alpha_{i4}$ |
|---------------|---|---|---------------|---|---|
| 1             | $w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14}$                    | $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$                  | 9             | $w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{24}$                    | $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{24}$                  |
| 2             | $w_{21}, w_{12}, w_{13}, w_{14}$                    | $\alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$                  | 10            | $w_{21}, w_{12}, w_{13}, w_{24}$                    | $\alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{24}$                  |
| 3             | $w_{11}, w_{22}, w_{13}, w_{14}$                    | $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$                  | 11            | $w_{11}, w_{22}, w_{13}, w_{24}$                    | $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{13}, \alpha_{24}$                  |
| 4             | $w_{21}, w_{22}, w_{13}, w_{14}$                    | $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$                  | 13            | $w_{21}, w_{22}, w_{13}, w_{24}$                    | $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{13}, \alpha_{24}$                  |
| 5             | $w_{11}, w_{12}, w_{23}, w_{14}$                    | $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{14}$                  | 13            | $w_{11}, w_{12}, w_{23}, w_{24}$                    | $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{24}$                  |
| 6             | $w_{21}, w_{12}, w_{23}, w_{14}$                    | $\alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{14}$                  | 14            | $w_{21}, w_{12}, w_{13}, w_{24}$                    | $\alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{24}$                  |
| 7             | $w_{11}, w_{22}, w_{23}, w_{14}$                    | $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{14}$                  | 15            | $w_{11}, w_{22}, w_{23}, w_{24}$                    | $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}$                  |
| 8             | $w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{14}$                    | $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{14}$                  | 16            | $w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{24}$                    | $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}$                  |

Pour déterminer la trajectoire désiré du système PV, un modèle de référence est élaboré à l'aide de la caractéristique optimale de courant et de tension ( $I_{pvopt}$  et  $V_{pvopt}$ ) P-V. Par conséquence, la représentation d'état du modèle de référence, peut s'écrire comme suit :

$$\dot{x}_r(t) = A_r(z(t)) x_r(t) + r(t) \quad (2.97)$$

avec :

$$A_r = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(R_L + R_b I_b) & \frac{1}{L} d_{opt} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_a} d_{opt} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_a} I_b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(d_{opt} - 1) v_d \\ \frac{1}{C_a} I_{pvopt} \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'entrée de commande optimale  $d_{opt}$  pour le convertisseur abaisseur peut être obtenue à partir de la relation entre les tensions d'entrée et de sortie :

$$d_{opt} = \sqrt{\frac{R_0 I_{pvopt}}{V_{pvopt}}} \quad (2.98)$$

À partir de (2.96), on peut voir que le modèle de référence est non linéaire avec les variables de prémisses  $\varsigma_{r1} = i_b$  et  $\varsigma_{r2} = d_{opt}$ , en utilisant l'approche de secteur non-linéarité on obtient :

$$w_{r11} = \frac{\varsigma_{r1} - \varsigma_{r1\min}}{\varsigma_{r1\max} - \varsigma_{r1\min}}; \quad w_{r12} = 1 - w_{r11}; \quad w_{r21} = \frac{\varsigma_{r2} - \varsigma_{r2\min}}{\varsigma_{r2\max} - \varsigma_{r2\min}}; \quad w_{r22} = 1 - w_{r21}$$

et les fonctions d'appartenance sont écrites comme suit :

$$\zeta_{r1} = w_{r11} w_{r21}, \quad \zeta_{r2} = w_{r11} w_{r22}$$

$$\zeta_{r3} = w_{r12} w_{r21}, \quad \zeta_{r4} = w_{r12} w_{r22}$$

avec les matrices d'état :

$$A_{r1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(R_L + R_b \varsigma_{r1\max}) & \frac{1}{L} \varsigma_{r2\max} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_a} \varsigma_{r2\max} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_a} \varsigma_{r1\max} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{r2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(R_L + R_b \varsigma_{r1\max}) & \frac{1}{L} \varsigma_{r2\min} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_a} \varsigma_{r2\min} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_a} \varsigma_{r1\max} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{r3} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(R_L + R_b \varsigma_{r1\min}) & \frac{1}{L} \varsigma_{r2\max} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_a} \varsigma_{r2\max} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_a} \varsigma_{r1\min} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{r4} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(R_L + R_b \varsigma_{r1\min}) & \frac{1}{L} \varsigma_{r2\min} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_a} \varsigma_{r2\min} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_a} \varsigma_{r1\min} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

le modèle de référence flou global T – S est donné par :

$$\dot{x}_r(t) = \sum_{i=1}^4 \zeta_{ri}(\varsigma) (A_{ri} x_r(t) + r(t)) \quad (2.99)$$

Le point MPP est atteint lorsque  $dP/dt = 0$  qui correspond à un courant PV optimal est donné par [Allouche et al., 2018] :

$$I_{pvopt} = 0.909 I_{ph} \quad (2.100)$$

et la tension optimale est :

$$V_{pvopt} = n_s V_t \log((-I_{pvopt} + I_{ph} + I_{rs}) / I_{rs}) \quad (2.101)$$

avec  $I_{rs}$  et  $I_{ph}$  sont définis dans (2.91).

en raison de la saturation asymétrique du signal de commande ( $d(t) = sat_{\bar{u}, \underline{u}}(u(t))$ ,  $\bar{u} = 1$ ,  $\underline{u} = 0$ )

Les paramètres du modèle T-S sont donnés par :  $1 \leq i_L \leq 5$ ,  $8 \leq v_{pv} \leq 22$ ,  $2 \leq v_b \leq 22$ ,  $0.8i_L \leq i_o \leq 0.9i_L$

et  $\alpha_{11} = 0.2$ ,  $\alpha_{21} = 0.1$ ,  $\alpha_{12} = 5$ ,  $\alpha_{22} = 1$ ,  $\alpha_{13} = 0.25$ ,  $\alpha_{23} = 0.1$ ,  $\alpha_{14} = 22$ ,  $\alpha_{24} = 8$

Les paramètres du panneau solaire sont donnés dans [Chiu, 2010]. La résolution des LMI données par le Théorème 2.8 sont donnés par la tableau ci-dessus.

**Tableau 2.6:** Paramètre de la commande PDC contrainte avec saturation non symétrique

---


$$\begin{aligned}
 K_1^1 &= [0.0046 \ 4.9186 \ 0.0039], K_9^1 = [0.0045 \ 4.9196 \ 0.0038], K_{12}^1 = [0.0029 \ 4.9164 \ 0.0023], \\
 K_2^1 &= K_3^1 = K_4^1 = K_5^1 = K_6^1 = K_7^1 = K_8^1 = K_{11}^1 = K_{13}^1 = K_{14}^1 = K_{15}^1 = [0.0049 \ 5.1352 \ 0.0043], \\
 K_{16}^1 &= [0.0043 \ 4.9177 \ 0.0037], K_1^2 = K_2^2 = K_3^2 = K_4^2 = [-0.0002 \ 0.3292 \ -0.0001], \\
 K_5^2 &= [-0.0009 \ 3.6230 \ -0.0015], K_6^2 = [-0.0006 \ 1.3166 \ -0.0009], \\
 K_7^2 &= [-0.0002 \ 0.3488 \ -0.0002], K_8^2 = [-0.0003 \ 0.6277 \ -0.0004], \\
 K_9^2 &= [0.0015 \ 3.6338 \ 0.0010], K_{10}^2 = [0.0003 \ 1.4487 \ -0.0001], \\
 K_{11}^2 &= [-0.0003 \ 0.3497 \ -0.0003], K_{12}^2 = [-0.0006 \ 3.6332 \ -0.0011], \\
 K_{13}^2 &= [-0.0006 \ 1.3170 \ -0.0010], \\
 K_{14}^2 &= [0.0014 \ 3.6407 \ 0.0008], K_{15}^2 = [0.0015 \ 3.6381 \ 0.0009], K_{16}^2 = [-0.0004 \ 3.6118 \ -0.0009], \\
 L_1^1 &= \begin{bmatrix} 0.0500 & 10 & 0.0701 \end{bmatrix}, L_2^1 = \begin{bmatrix} 0.4500 & 9.7821 & 0.6810 \end{bmatrix}, \\
 L_5^1 &= \begin{bmatrix} 0.0500 & 10 & 0.0701 \end{bmatrix}, L_{16}^1 = \begin{bmatrix} 0.4153 & 9.8721 & 0.6610 \end{bmatrix}, \\
 L_1^2 &= \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.1 & 0.0001 \end{bmatrix}, L_2^2 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.1 & 0.0001 \end{bmatrix}, \\
 L_5^2 &= \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.1 & 0.0001 \end{bmatrix}, L_{16}^2 = \begin{bmatrix} 0.0003 & 0.1 & 0.0001 \end{bmatrix}, \\
 \gamma &= 0.814 \times 10^{-3}.
 \end{aligned}$$


---

Deux scénarios de simulation sont examinés dans cette section :

**Scenario 1 :** Dans le premier scénario, la température est considérée comme constante (323,18 K) et l'irradiation solaire est variable comme sur la figure 2.6 (a). La commande  $H_\infty$  contrainte, le courant du générateur photovoltaïque, la tension du générateur photovoltaïque et la puissance photovoltaïque sont représentés sur les figures 2.6 (b) à (e), respectivement.

Dans le cas d'une irradiation variable, les réponses du système PV montrent que la trajectoire souhaitée est atteinte rapidement avec une faible erreur de poursuite. Cela confirme que le contrôle proposé nous a permis d'extraire la quasi-totalité de l'énergie disponible du générateur de système PV et on peut dire que le système PV fonctionne sur son MPP.

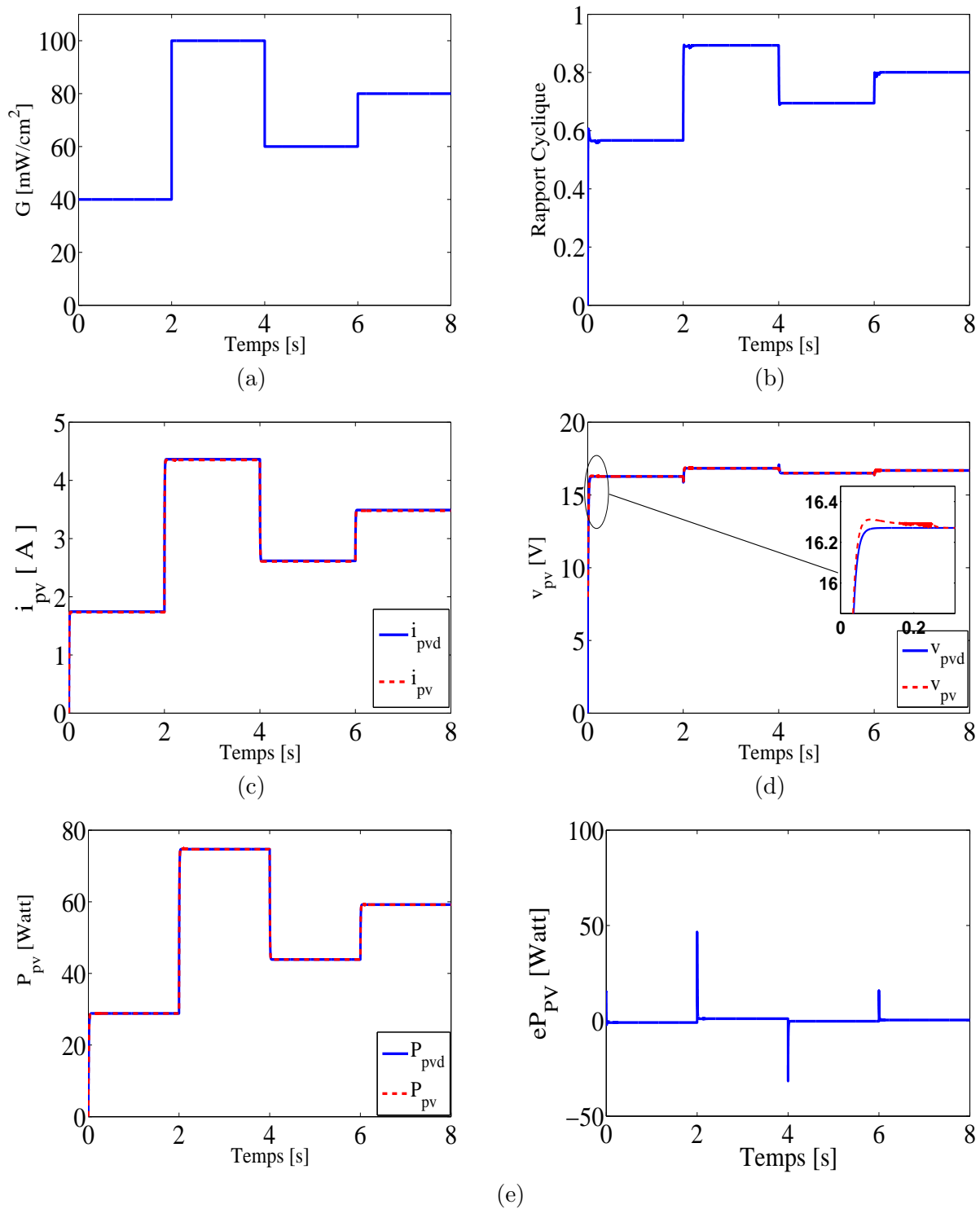
**Scenario 2 :**

Dans le deuxième scénario, la température est considérée comme variable, comme sur la figure 2.7 (a), et l'irradiation solaire est constante ( $70mW/cm^2$ ). Le courant du générateur photovoltaïque, la tension du générateur photovoltaïque et le PV sont décrits dans les figures 2.7 (b) à (d).

La figure 2.7 représente les réponses PV avec une température variable. Les résultats obtenus dans ce scénario montrent que la stratégie de contrôle appliquée dans ce travail assure les objectifs à la fois pour les cas d'irradiation et de température variables.

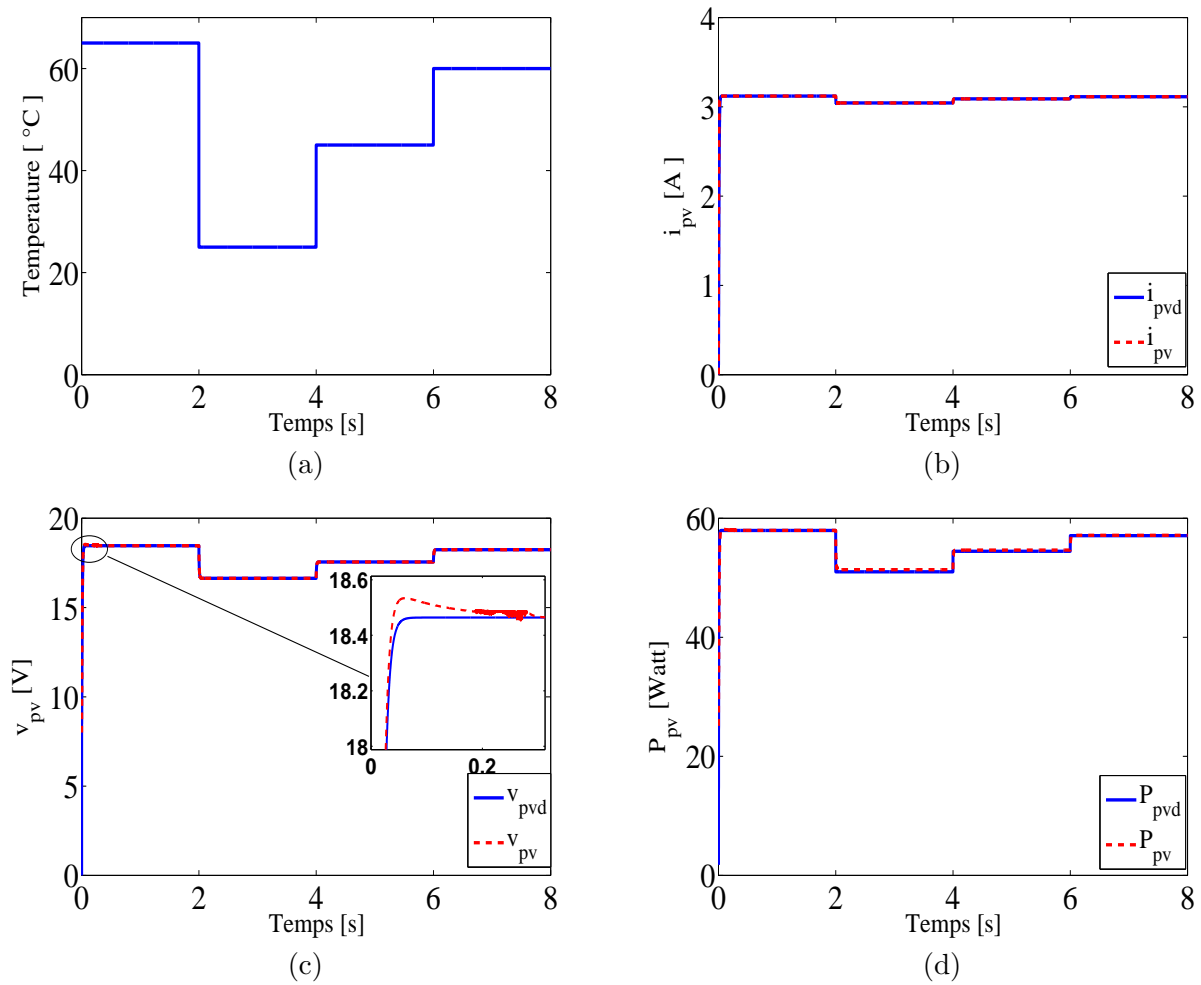
La courbe P-V représentée sur la figure 2.8 est obtenue en utilisant une irradiation variable et une température constante (25 °C). Le contrôleur proposé à commutation T – S oblige le système PV à fonctionner presque à sa trajectoire de puissance maximale.

La figure 2.9 illustre les résultats de la comparaison entre l'approche proposée, le contrôleur PI conventionnel [Koutroulis et al., 2001], le contrôleur PID flou [Dounis et al., 2015] et l'approche

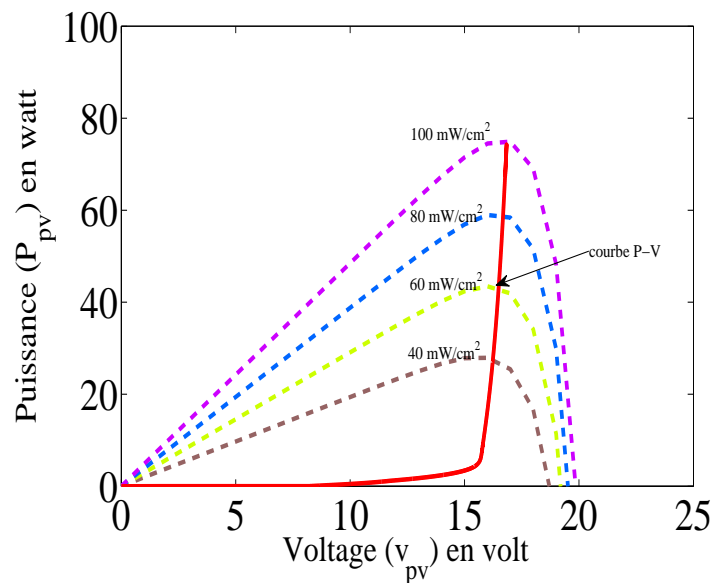


**Figure 2.6:** Réponse du système PV dans le scénario 1 : (a). irradiation. (b). rapport cyclique. (c) courant du système PV. (d). tension PV. (e). puissance PV.

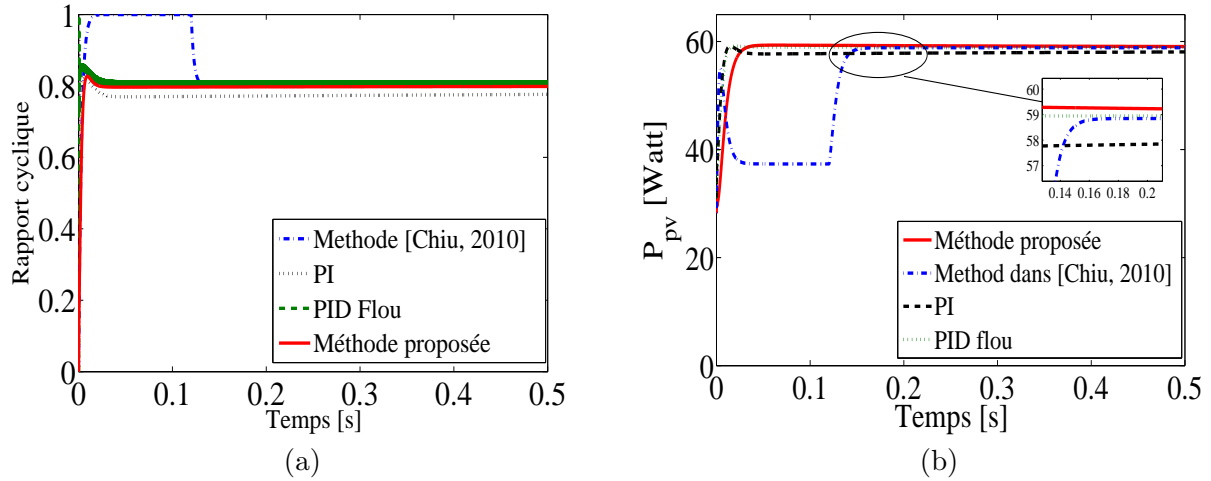
Fuzzy T-S [Chiu, 2010]. Cette figure montre que le contrôleur développé dans le présent document offre une meilleure puissance de sortie et une meilleure poursuite de trajectoire de puissance maximale par rapport aux autres méthodes. Notez qu'avec l'approche floue dans [Chiu, 2010], une perte de la puissance de sortie du système PV est observée dans le cas où l'entrée de contrôle est saturée, cela montre les performances supérieures du contrôleur proposé par rapport aux autres contrôleurs.



**Figure 2.7:** Réponse du système PV dans le scénario 2 : a). température. (b). courant PV. (c). voltage PV. (d). puissance PV.



**Figure 2.8:** Courbe P-V.



**Figure 2.9:** Réponse du système PV avec  $G=70\text{mW}/\text{cm}^2$  et  $T=25\text{C}$  : (a). rapport cyclique. (b). puissance P-V .

### 2.5.2 Synthèse d'une commande SOF

Dans ce cas le système en boucle fermée en présence des perturbations s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i \sigma(t) + B_{w_i} w(t)) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{1i} x(t) + D_i \sigma(t) + D_{w_i} w(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{2i} x(t)) \end{cases} \quad (2.102)$$

avec la matrice  $C_{2i}$  est de rang plein.

#### 2.5.2.1 Commande SOF contrainte

Dans cette section, la synthèse de la commande proposée repose sur l'utilisation du critère  $H_\infty$  avec une commande SOF contrainte. L'objectif ici est de chercher une commande qui n'atteinte pas ses limites. On écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + B_{w_i} w(t)) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{1i} x(t) + D_i u(t) + D_{w_i} w(t)) \end{cases} \quad (2.103)$$

avec :  $\forall x(t) \in \bigcap_{j=1}^r \mathfrak{N}(K_j C_{2i})$  Le théorème suivant résume les conditions de stabilisations obtenues :

**Théorème 2.9.** [Saifia, 2013] Pour un scalaire donné  $\rho$ , le système (2.103) est asymptotiquement stable via la commande SOF (2.18) avec un niveau d'atténuation des perturbations  $\gamma$ , s'il existe une matrice  $Q \in R^{n \times n}$ ,  $Q = Q^T > 0$ , une matrice  $M \in R^{p \times n}$ , et des matrices  $F_j \in R^{m \times p}$ ,  $j \in I_r$  solution du problème LMI suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} I) \begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & f_i^j C_{2l} \\ * & Q \end{bmatrix} \geq 0, \forall i \in I_m, \forall j \in I_r, l \in I_r \\ II) \begin{bmatrix} A_i Q + B_i F_j C_{2l} + (*) & * & * \\ B_{w_i}^T & -\gamma^2 I & * \\ C_{1_i} Q + D_i F_j C_{2l} & D_{w_i} & -I \end{bmatrix} < 0, \forall i \in I_r, \forall j \in I_r, l \in I_r \\ III) MC_{2i} = C_{2i} Q \end{array} \right. \quad (2.104)$$

avec :  $K_j = F_j M^{-1}$ ,  $\rho = 1 + \gamma^2 \varpi^2$

**Démonstration :** Nous considérons la commande par une commande SOF contrainte (2.18) et en suivant la même démonstration du théorème 2.5.

### 2.5.2.2 Commande SOF saturante

On prend en considération le lemme 2.1 et les équations (2.104-1.79), les gains de correcteur peuvent être obtenus par la résolution des LMI du théorème suivantes :

**Théorème 2.10.** [Saifia, 2013] Pour un scalaire donné  $\rho$ , le système (2.102) est asymptotiquement stable via la commande SOF (2.22) avec un niveau d'atténuation des perturbation  $\gamma$ , s'il existe une matrice  $Q \in R^{n \times n}$ ,  $Q = Q^T > 0$ , une matrice  $M \in R^{p \times n}$  et des matrices  $F_j \in R^{m \times p}$ ,  $Z_j \in R^{m \times p}$ ,  $j \in I_r$ , solution du problème LMI suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} I) \begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & z_i^j \\ * & Q \end{bmatrix} \geq 0, \forall i \in I_m, \forall j \in I_r \\ II) \begin{bmatrix} A_i Q + B_i E_s F_j C_{2l} + B_i \bar{E}_s Z_j + (*) & * & * \\ B_{w_i}^T & -\gamma^2 I & * \\ C_{1_i} Q + D_i E_s F_j C_{2l} + D_i \bar{E}_s Z_j & D_{w_i} & -I \end{bmatrix} < 0, \\ \quad \forall i \in I_r, \forall j \in I_r, l \in I_r, s \in I_{2^m} \\ III) MC_{2i} = C_{2i} Q \end{array} \right. \quad (2.105)$$

avec :  $K_j = F_j M^{-1}$ .

**Démonstration :** Pour la preuve de LMI (2.105), voir la preuve de LMI données par le théorème 2.6, avec changement de la commande par une commande SOF saturante.

**Remarque 2.2.** On rappelle que pour rendre l'équation (III-2.105) en inégalité, on fait la même chose que dans (2.21) :

### 2.5.2.3 Commande SOF Approche descripteur

Le théorème 2.9 nécessite l'utilisation de l'approximation (2.21) pour rendre les conditions de stabilisation résolubles via les outils du calcul disponible, cependant, cette condition (2.21) n'est pas en stricte LMI. Pour surmonter cette obstacle, ce défi peut être résolu via l'approche descripteur. L'utilisation de la représentation en descripteur T-S se fait de la même façon que celle dans (2.26) avec l'ajout du critère  $H_\infty$ . Les résultats obtenus sont résumés dans le théorème suivant :



**Théorème 2.11.** Pour un scalaire donné  $\rho$ , le système (2.102) est asymptotiquement stable via la commande SOF (2.22), avec un taux de réduction des perturbations  $\gamma$ , s'il existe une matrice symétrique  $P_1 > 0$ , des matrices,  $P_2, P_3, F_j, Z_j$ , solution du problème LMI suivant :

$$I) \begin{bmatrix} (A_i P_1 + B_i P_7) + (*) & * & * & * & * \\ P_8^T B_i^T + C_{2i} P_1 + D_i P_7 & -P_5 - P_5^T - D_i P_8 & * & * & * \\ \bar{E}_s Z_j + P_9^T B_i^T - P_7 & P_9^T D_i^T + E_s K_j - P_8 & -P_9 - P_9^T & * & * \\ 0 & P_5 & 0 & -I & * \\ B_{wi} & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.106)$$

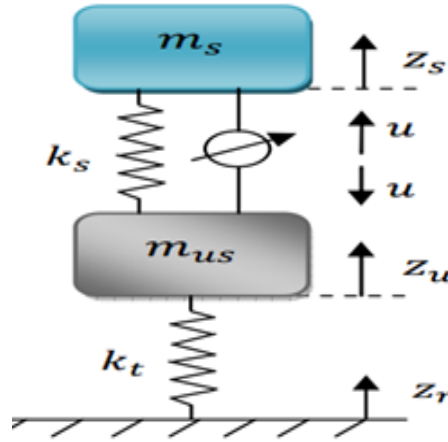
$i \in I_r, j \in I_r, s \in I_{2m}$

$$II) \begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & * \\ \left( z_i^j \right)^T & P_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in I_m, j \in I_r$$

avec :  $H_j = Z_j P_1^{-1}$ ,  $z_i^j$  est le  $i$ ème élément du vecteur  $Z_j$ .

**Démonstration :** de même que dans théorème 2.5, avec l'ajout du critère  $H_\infty$ .

**Exemple 2.3. Application sur la suspension** Prenant maintenant l'exemple de la suspension du quart-véhicule système représenté sur la figure 2.10 : le modèle mathématique de tel système



**Figure 2.10:** système du suspension quad car système.

est donné par [Chadli et al., 2008] :

$$\begin{aligned} \ddot{z}_s &= -\frac{k_s}{m_s} \left[ (z_s - z_u) + p_s (z_s - z_u)^3 \right] - \frac{b_c}{m_s} (\dot{z}_s - \dot{z}_u) + \frac{1}{m_s} u \\ \ddot{z}_u &= \frac{k_s}{m_u} \left[ (z_s - z_u) + p_s (z_s - z_u)^3 \right] + \frac{b_c}{m_u} (\dot{z}_s - \dot{z}_u) - \frac{k_t}{m_u} (z_u - z_r) - \frac{1}{m_u} u \end{aligned} \quad (2.107)$$

et en considérant que  $z_r$  comme une entrée perturbatrice ( $w(t) = z_r$ ) et  $u$  comme une entrée de commande, le résultat est un système d'ordre quatre de la forme :

$$\dot{x} = A(x) x(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \quad (2.108)$$

avec :

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s S}{m_s} & \frac{k_s S}{m_s} & -\frac{b_c}{m_s} & \frac{b_c}{m_s} \\ \frac{k_s S}{m_u} & -\frac{(k_s S + k_t)}{m_u} & \frac{b_c}{m_u} & -\frac{b_c}{m_u} \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_u} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \frac{z_1^2}{a^2}, M_2 = \frac{a^2 - z_1^2}{a^2}.$$

La représentation générale des modèles locaux s'écrit comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \zeta_i (A_i x(t) + B u(t) + B_w w(t)) \quad (2.109)$$

avec :

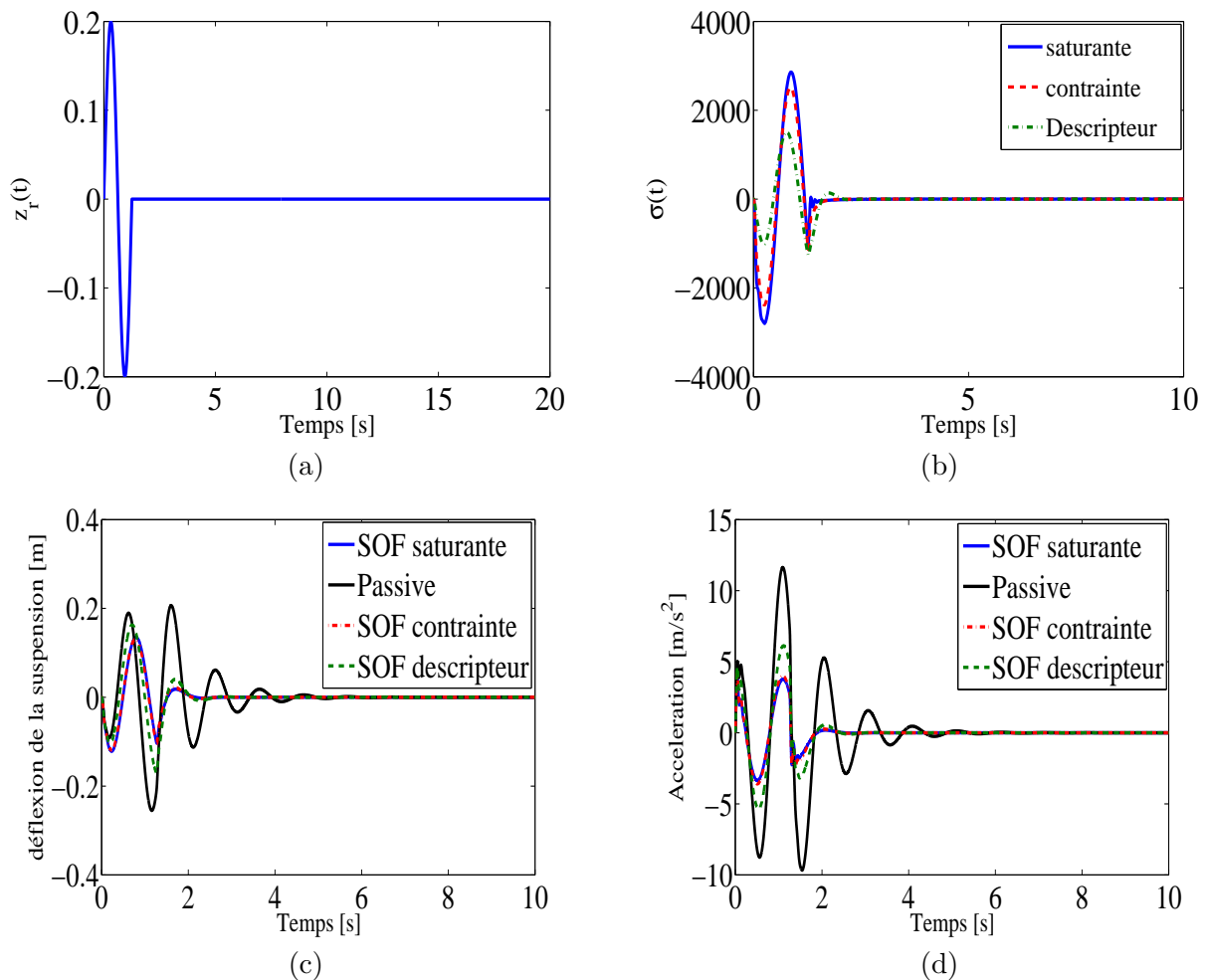
$$\zeta_1(t) = M_1(x(t)), \zeta_2(t) = M_2(x(t))$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s(1+P_s a^2)}{m_s} & \frac{k_s(1+P_s a^2)}{m_s} & -\frac{b_c}{m_s} & \frac{b_c}{m_s} \\ \frac{k_s(1+P_s a^2)}{m_u} & -\frac{(k_s(1+P_s a^2)+k_t)}{m_u} & \frac{b_c}{m_u} & -\frac{b_c}{m_u} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_c}{m_s} & \frac{b_c}{m_s} \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{(k_s+k_t)}{m_u} & \frac{b_c}{m_u} & -\frac{b_c}{m_u} \end{bmatrix}$$

La résolution des LMIs décrites dans le théorème 2.9, 2.10, et 2.11, nous donne les résultats illustrés dans tableau 2.7 :

**Tableau 2.7:** Les paramètres des régulateurs SOF

|                          |   |
|--------------------------|---|
| Commande contrainte      | $M = \begin{bmatrix} 0.0817 & 0.0006 & -0.1330 \\ 0.0006 & 0.0031 & 0.0003 \\ -0.1330 & 0.0003 & 0.5301 \end{bmatrix},$ $\gamma = 1.9127, \gamma = 4.1284 \times 10^{-7}$ $K1 = 10^4 \times [0.1679 \quad -1.1829 \quad -0.5650],$ $K2 = 10^4 \times [0.1679 \quad -1.1829 \quad -0.5650]$  |
| Commande saturante       | $M = \begin{bmatrix} 0.1879 & 0.0041 & -0.5120 \\ 0.0041 & 0.0114 & 0.0038 \\ -0.5120 & 0.0038 & 3.6289 \end{bmatrix},$ $\gamma = 1.9153, \lambda = 2.0052 \times 10^{-5}$ $K1 = 10^3 \times [0.3817 \quad -8.4476 \quad -3.1148],$ $K2 = 10^3 \times [0.3817 \quad -8.4476 \quad -3.1148]$   |
| Commande SOF descripteur | $P_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0061 \\ 0.0000 & 0.0014 & 0.0061 & -0.0235 \\ -0.0000 & 0.0061 & 0.0318 & -0.1712 \\ -0.0061 & -0.0235 & -0.1712 & 8.0337 \end{bmatrix},$ $P_5 = \begin{bmatrix} 1.0053 & -0.0089 & 0.0017 \\ -0.0081 & 1.0118 & -0.0021 \\ 0.0016 & -0.0024 & 1.0004 \end{bmatrix},$ $P_9 = 5.8433 \times 10^7,$ $K_1 = 10^3 \times [-0.1227 \quad -0.1595 \quad -1.3768],$ $K_2 = 10^3 \times [-0.1227 \quad -0.1595 \quad -1.3768],$ $\gamma = 9.92$ |



**Figure 2.11:** Réponse du système suspension : (a). perturbation. (b). entrée de commande. (c). déflexion de la suspension ( $x_1 - x_2$ ). (d). accéeration de la masse suspendue.

La figure 2.11 (a) présente la perturbation appliquée, les figures 2.11 (b) à (d) illustrent, respectivement, le signal de commande, déflexion de la suspension et l'accélération de la masse suspendue. Les résultats de simulation montrent l'efficacité des approches de commandes obtenues dans la stabilisation du système en boucle fermée.

## 2.6 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre porte sur la stabilisation quadratique des systèmes non linéaires représentés par des modèles T-S et soumis à la saturation d'actionneur. Commencant par une généralisation des méthodes de stabilisation quadratique présentées dans le chapitre 1 sur les modèles T-S soumis à la saturation d'actionneur. Dans ce contexte, la commande PDC, la commande SOF, et l'approche descripteur sont conçues par les deux méthodes, contrainte et saturante et via critère  $H_\infty$ . Dans la partie de la commande PDC, des nouvelles conditions de stabilisation  $H_\infty$  de la poursuite d'un modèle de référence en présence d'une saturation d'actionneur non symétrique sont dérivées.

Pour chaque cas, des applications sont présentées sur des systèmes physiques connus pour montrer l'efficacité des approches proposées.

## Stabilisation non quadratique des modèles T-S en présence de saturation d'actionneur

---

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, le problème de stabilisation quadratique des modèles T-S soumis à la saturation et aux perturbations a été traité. La méthode quadratique s'appuie sur la recherche d'une matrice commune à un ensemble de contraintes LMIs. L'avantage de cet approche vient du fait que le problème de stabilisation peut être écrit comme un problème d'optimisation LMI résolu efficacement. Cependant, les conditions de stabilité fournies sont conservatives d'un point de vue synthèse de contrôleur. Dans ce cadre, plusieurs travaux ont été proposés pour l'étude de stabilité et de stabilisation des modèles T-S afin d'offrir des conditions moins conservatives [Tanaka et al., 2003] [Bouarar et al., 2013] [Guerra et al., 2012]. De ce fait, des approches basées sur la fonction de Lyapunov continue par morceaux (piecewise Lyapunov functions) PLF ont été fournies par plusieurs auteurs [Johansson et al., 1999] [Feng and Harris, 2001] [Ohtake et al., 2003] [Feng, 2004] [Zhang et al., 2011] [Qiu et al., 2012]. Cependant, ces approches ne sont pas très efficaces lorsque la méthode du secteur non linéaire est utilisée pour obtenir le représentant T-S. En effet, ce modèle de fonction de Lyapunov ne prend pas en compte toutes les informations contenues dans les fonctions d'activation. Une autre approche accommodée au cas des systèmes non linéaires, consiste en l'utilisation d'une fonction candidate non quadratique de Lyapunov [Blanco, 2001] [Guerra and Vermeiren, 2004] [Rhee and Won, 2006]. Parmi celles-ci, nous précisons l'approche en considérant l'utilisation d'une fonction candidate dite polyquadratique de Lyapunov dans la mesure où les variables de décision de ces fonctions sont appuyées sur la même structure d'interconnexion que le système T-S étudié. [Jadbabaie, 1999] [Tanaka and Wang, 2001] [Tanaka et al., 2003] [Feng, 2004] [Feng, 2006]. Par conséquent, la loi de commande est basée sur cette même structure, donc la recherche d'une commande pour notre système réside dans la recherche d'une solution aux problèmes LMI et conduit à une réduction du conservatisme.

L'objectif de ce chapitre est donc la proposition des conditions de stabilisation LMIs non quadratique pour les modèles T-S saturés et perturbés (présentées au chapitre 2). Tout d'abord, nous

rappellerons la classe des modèles T-S étudiés. Puis l'extension de la loi de commande PDC, SOF et descripteur SOF dans le cadre non quadratique. Ensuite, ces résultats seront étendus au cas des modèles T-S soumis à la saturation d'actionneur et aux perturbations externes par le biais d'un critère  $H_\infty$ . Par ailleurs, l'applicabilité des approches proposées seront présentées sous forme des applications sur des systèmes physiques.

### 3.2 Formulation du problème

On rappelle la classe des modèles T-S soumis à la saturation d'actionneur et à la perturbation externe présentée dans le chapitre précédent (2.1) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i \sigma(t) + B_{w_i} w(t)) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{1i} x(t) + D_i \sigma(t) + D_{w_i} w(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans le chapitre précédent, les approches présentées se sont basés sur une fonction de Lyapunov quadratique, ce type de fonctions de Lyapunov nécessite la recherche d'une matrice commune à une composition de contraintes LMI, et ne prend pas en considération la structure de fonctions d'activation. Par conséquent, les conditions de stabilisation résultantes sont conservatives. L'utilisation d'une fonction de Lyapunov dite non quadratique assure l'interconnexion non linéaire entre les sous modèles et serve à réduire le conservatisme. Pour les modèles T-S continus, plusieurs formes des fonctions de Lyapunov non quadratiques ont été proposées : continue par morceaux [Johansson et al., 1999] [Feng and Harris, 2001] [Feng et al., 2005], à intégrale curviligne [Rhee and Won, 2006] [Guelton, 2014] [Cherifi et al., 2018], et polyquadratique [Jadbabaie, 1999] [Tanaka and Wang, 2001] [Tanaka et al., 2003] [Guerra et al., 2012]. Dans le cadre des fonctions polyquadratique, deux forme ont été proposées, la première consiste à utiliser une forme poly-quadratique dépendent des fonctions d'appartenance et ça nous conduit à des conditions de stabilisation dépendent des dérivées des fonctions d'appartenance [Jadbabaie, 1999] [Tanaka and Wang, 2001] [Tanaka et al., 2003] :

$$V(t) = x^T(t) P_\zeta^{-1} x(t) \quad (3.2)$$

$$\text{avec : } P_\zeta^{-1} = \left( \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) P_i \right)^{-1}, P_i = P_i^T > 0.$$

la solution proposée pour le problème d'apparition des dérivées des fonctions d'appartenance dans les conditions de stabilisation [Tanaka et al., 2003] [Bouarar et al., 2013], nécessite la pré-connaissance des bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance, qu'ils ont pas accessible dans tous les cas. A cause de cet obstacle, une deuxième forme modifiée de (3.2) a été proposée par [Márquez et al., 2016], cette forme ne dépendent pas des fonctions d'appartenance, mais de leurs intégrale. elle est inspirée des travaux de [González et al., 2016] :

$$V(t) = x^T(t) P_v^{-1} x(t) \quad (3.3)$$

$$\text{avec : } P_v^{-1} = \left( \sum_{i=1}^r v_i(\varsigma(t)) P_i \right)^{-1}, P_i = P_i^T > 0, \text{ et } v_i(\varsigma(t)) = \frac{1}{\alpha} \int_{t-\alpha}^t \zeta_i(\varsigma(\tau)) d\tau \geq 0, \alpha > 0.$$

**Remarque 3.1.** Il est important d'indiquer que les fonctions d'appartenances  $\zeta_i(\varsigma(\tau))$  sont intégrables

le long de la trajectoire car, elles sont lisses et délimitées. Et par héritassions les fonctions  $v_i(\varsigma(t))$  ont la propriété de somme convexe :

$$\sum_{i=1}^r v_i(\varsigma(t)) = \frac{1}{\alpha} \int_{t-\alpha}^t \left( \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(\tau)) \right) d\tau = 1 \quad (3.4)$$

L'enjeu dans les deux formes repose sur la représentation de la dérivée . Dans la première, cette dérivée est approximer par la relation suivante [Bouarar et al., 2010] [Tanaka and Wang, 2001] :

$$\dot{P}_\zeta \geq \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (P_k - P_r) \quad (3.5)$$

avec  $P_k - P_r \geq 0$ , et  $\phi_k$  sont les limites inférieures de  $\dot{\zeta}_k(\varsigma(t))$ .

Par contre la représentation (3.3) est pour objectif de dépasser l'approximation (3.2). Effectivement, la dérivée de  $v_i(\varsigma(t))$  peut s'écrire [Márquez et al., 2016] [González et al., 2016] :

$$\dot{v}_i(\varsigma(t)) = \frac{1}{\alpha} (\zeta_i(\varsigma(t)) - \zeta_i(\varsigma(t-\alpha))) \quad (3.6)$$

Par conséquence :

$$\dot{P}_v = \frac{1}{\alpha} (P_\zeta - P_{\zeta^-}), \quad \zeta_i^- = \zeta(\varsigma(t-\alpha)) \quad (3.7)$$

**Remarque 3.2.** Les approches présentées le long de ce chapitre sont pour la commande saturante, avec utilisation bien sûr de la représentation polytopique (1.79). Pour le cas de la commande contrainte, il se fait de suivre les étapes décrits dans le chapitre précédent.

### 3.3 Stabilisation non quadratique par la commande PDC

La loi de commande PDC dans ce cas s'écrit de la même façon que dans (2.12) :

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^r \zeta_j \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_s (E_s K_j + \bar{E}_s H_j) x(t) \quad (3.8)$$

#### 3.3.1 Perturbation externe nulle

En prenant le modèle T-S (3.1), supposant que la perturbation externe est nulle . Les conditions de stabilisation non quadratiques via la commande PDC sont présentées dans le théorème suivant :

**Théorème 3.1.** Pour tout  $k = 1 \dots r-1$ ,  $\Phi_k$  limites inférieures  $\dot{\zeta}_k(\varsigma(t))$  ( $\Phi_k \leq \dot{\zeta}_k(\varsigma(t))$ ), alors pour un scalaire donné  $\rho > 0$ , le système flou T-S (3.1) sans perturbation externe est asymptotiquement stable via la commande PDC (3.8), s'il existe des matrices  $P_i = P_i^T > 0$ , des matrices  $F_j, Z_j$ , solution du problème LMI suivant :

$$(A_i P_\ell + B_i E_s F_j + B_i \bar{E}_s Z_j) + (*) - \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (P_k - P_r) < 0, \quad i \in I_r, j \in I_r, \ell \in I_r, s \in I_{2^m} \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & z_i^j \\ * & P_\ell \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in I_m, j \in I_r, \ell \in I_r \quad (3.10)$$

$$(P_{\mathbf{k}} - P_{\mathbf{r}}) \geq 0 \quad (3.11)$$

**Démonstration :**

Considérons la condidate de Lyapunov non quadratique (3.2), dans le cas où  $w(t) = 0$ , le système flou T-S (3.1) est asymptotiquement stable si :  $\dot{V}(t) < 0$

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^T(t) P_\zeta^{-1} x(t) + x^T(t) P_\zeta^{-1} \dot{x}(t) + x^T(t) \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet x(t) < 0 \quad (3.12)$$

Par substitution de (3.8) dans (3.12), nous trouvons :

$$\begin{aligned} & (A_\zeta x(t) + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta + E_\zeta H_\zeta) x(t))^T P_\zeta^{-1} x(t) + \\ & x^T(t) P_\zeta^{-1} (A_\zeta x(t) + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta + E_\zeta H_\zeta) x(t)) + x^T(t) \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet x(t) < 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

l'inégalité (3.13) est satisfaite si :

$$\left( P_\zeta^{-1} A_\zeta + P_\zeta^{-1} B_\zeta (E_\zeta K_\zeta + E_\zeta H_\zeta) \right) + (*) + \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet < 0 \quad (3.14)$$

en multipliant gauche et droit par  $P_\zeta$ , on aura :

$$(A_\zeta P_\zeta + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta + E_\zeta H_\zeta) P_\zeta) + (*) + P_\zeta \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet P_\zeta < 0 \quad (3.15)$$

le terme  $P_\zeta \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet P_\zeta$  peut être réécrit comme suit :

$$P_\zeta \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet P_\zeta = \frac{d}{dt} \left( P_\zeta P_\zeta^{-1} \right) P_\zeta - \dot{P}_\zeta = -\dot{P}_\zeta \quad (3.16)$$

et l'inégalité (3.15) devienne :

$$(A_\zeta P_\zeta + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta + E_\zeta H_\zeta) P_\zeta) + (*) - \dot{P}_\zeta < 0 \quad (3.17)$$

En substituant (3.5) dans (3.17), on arrive à la condition (3.9). La condition (3.11) peut être obtenue à partir du Lemme 2.1 :  $\varepsilon \left( P_\zeta^{-1}, \rho \right) \subset \bigcap_{j=1}^r \aleph(H_j)$ , si et seulement si :

$$\begin{aligned} \left( h_i^j \right) \left( \frac{P_\zeta^{-1}}{\rho} \right)^{-1} \left( h_i^j \right)^T &\leq \bar{u}_i^2 \\ i \in I_m, j \in I_r \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nous suivons les mêmes étapes du théorème 2.7, on arrive à la condition (3.10). Ceci complète la démonstration.

### 3.3.2 Perturbation externe non nulle

Maintenant, on considère le cas où la perturbation externe  $w(t) \neq 0$ , pour déterminer les conditions de stabilisation LMI pour le système (3.1), on fait appel le critère  $H_\infty$  définie dans (2.43). Les conditions obtenues sont présentées au théorème suivant :

**Théorème 3.2.** Pour tout  $k = 1 \dots r-1$ ,  $\Phi_k$  limites inférieures  $\dot{\zeta}_k(\zeta(t))$  ( $\Phi_k \leq \dot{\zeta}_k(\zeta(t))$ ), alors pour un scalaire donné  $\rho > 0$ , le système flou T-S (3.1) est asymptotiquement stable via la commande PDC (3.8), avec un niveau d'atténuation des perturbations  $\gamma$ , s'il existe des matrices  $P_i = P_i^T > 0$ , des matrices  $F_j$ ,  $Z_j$ , solution du problème LMI suivant :

$$\begin{bmatrix} (A_i P_\ell + B_i E_s F_j + B_i \bar{E}_s Z_j) + (*) - \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (P_k - P_r) & * & * \\ B_{w_i}^T & -\gamma^2 I & * \\ C_{1_i} P_\ell + D_i E_s F_j + D_i \bar{E}_s Z_j & D_{w_i} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.19)$$

$\forall i \in I_r, j \in I_r, \ell \in I_r, s \in I_{2^m}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{a}_i^2}{\rho} & z_i^j \\ * & P_\ell \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in I_m, j \in I_r, \ell \in I_r \quad (3.20)$$

$$(P_k - P_r) \geq 0 \quad (3.21)$$

**Démonstration :** Nous prenons en considération la fonction de Lyapunov non quadratique (3.2), la commande PDC (3.8) ainsi le modèle T-S perturbé (3.1), la condition  $H_\infty$  (3.43), peut être écrite comme suit :

$$\dot{V}(t) + z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) < 0 \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (P_\zeta^{-1} A_\zeta + P_\zeta^{-1} B_\zeta (E_\zeta K_\zeta + E_\zeta H_\zeta)) + (*) + \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet & * \\ B_{w_\zeta}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (C_{1_\zeta} + D_{1_\zeta} K_\zeta)^T \\ D_{w_\zeta}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_{1_\zeta} + D_{1_\zeta} K_\zeta)^T \\ D_{w_\zeta}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

En utilisant le complément Schur, nous obtenons :

$$\dot{V}(t) + z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \Delta_\zeta \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.24)$$

Pré et post-multiplication  $\Delta_\zeta$  par  $\text{diag}(P_\zeta, I, I)$  on aura :

$$\Pi_\zeta = \begin{bmatrix} (A_\zeta P_\zeta + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta + E_\zeta H_\zeta) P_\zeta) + (*) + P_\zeta \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet P_\zeta & * & * \\ B_{w_\zeta}^T & -\gamma^2 I & * \\ C_{1_\zeta} Q + D_\zeta E_\zeta F_\zeta + D_\zeta \bar{E}_\zeta Z_\zeta & D_{w_\zeta} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.25)$$



En substituant (3.16) dans (3.25), et par remplacement de (3.5) dans (3.25), on arrive à la condition (3.19).

La condition (3.20) peut être obtenue en suivant les mêmes étapes dans (3.10).

Ceci complète la démonstration.

**Remarque 3.3.** Afin de surmonter le problème de la connaissance des limites inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance, on se basant sur la représentation (3.3), le théorème 3.2 peut être réécrit comme suit :

**Théorème 3.3.** Pour des scalaires donnés  $\rho > 0$  et  $\alpha > 0$ , le système flou T-S (3.1) est asymptotiquement stable via la commande PDC (3.8), avec un niveau d'atténuation des perturbations  $\gamma$ , s'il existe des matrices  $P_i = P_i^T > 0$ , des matrices  $F_j$ ,  $Z_j$ , solution du problème LMI suivant :

$$\begin{bmatrix} (A_i P_\ell + B_i E_s F_j + B_i \bar{E}_s Z_j) + (*) - \frac{1}{\alpha} (P_j - P_k) & * & * \\ B_{w_i}^T & -\gamma^2 I & * \\ C_{1_i} P_\ell + D_i E_s F_j + D_i \bar{E}_s Z_j & D_{w_i} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.26)$$

$\forall i \in I_r, j \in I_r, k \in I_r, s \in I_{2^m}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & z_i^j \\ \rho & P_\ell \\ * & P_\ell \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in I_m, j \in I_r, \ell \in I_r \quad (3.27)$$

**Exemple 3.1 :**

Pour pouvoir juger l'efficacité des approches proposées dans théorème 3.2 et 3.3, on considère le système (3.1) avec les données suivantes :

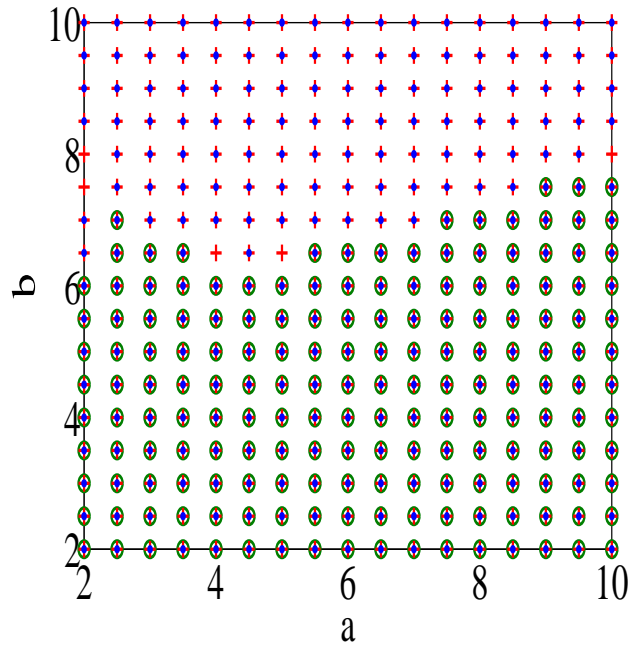
$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} a & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 2 \end{bmatrix}; B_{w_1} = B_{w_2} = \begin{bmatrix} -0.15 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.4 \end{bmatrix}; C_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}; D_1 = D_2 = 0.1.$$

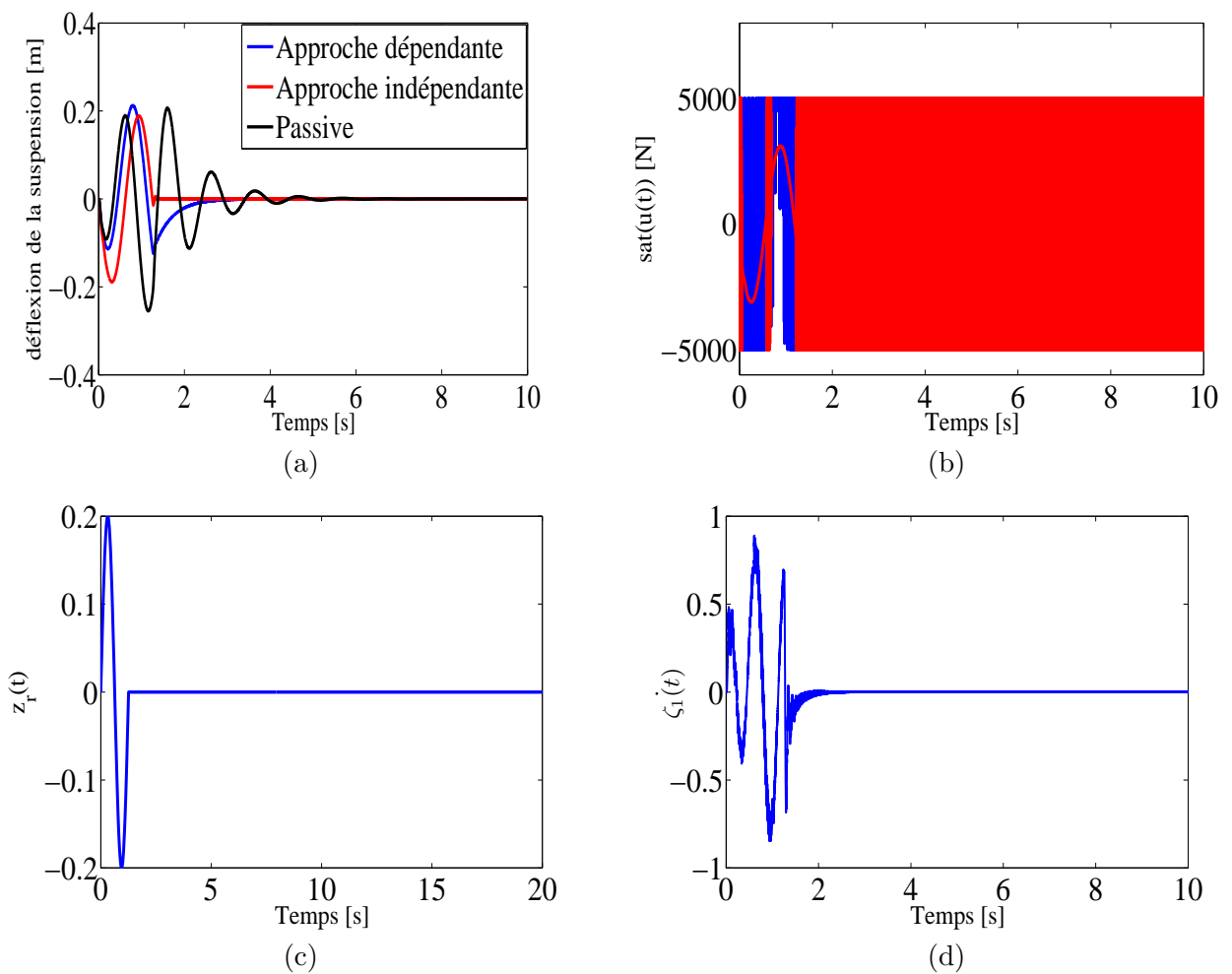
La figure 3.1 montre que les domaines de faisabilité des théorèmes 3.2 et 3.3 recouvrent celui obtenu à partir de l'approche quadratique donné dans le chapitre précédent.

**Exemple 3.2 :**

Pour illustrer tout l'intérêt des conditions LMIs non quadratiques, compte tenu l'exemple de la commande du système de la suspension : Rappelons le modèle de l'exemple 2.3, la résolution des conditions LMI du théorème 3.2, nous donne :



**Figure 3.1:** + Théorème 3.2., • Théorème 3.3, ○ approche quadratique théorème 2.7.



**Figure 3.2:** Réponse du système suspension : (a). déflexion de la suspension ( $x_1 - x_2$ ). (b). signal de commande saturé. (c) perturbation. (d) dérivée de la 1<sup>er</sup> fonction d'appartenance

**Tableau 3.1:** Paramètres du contrôleur PDC non quadratique

$$\begin{array}{l}
 Q_1 = 10^7 \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0029 \\ -0.0000 & 0.0012 & 0.0047 & -0.0193 \\ -0.0001 & 0.0047 & 0.0189 & -0.1189 \\ -0.0029 & -0.0193 & -0.1189 & 5.2260 \end{bmatrix}, \\
 Q_1 = 10^7 \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0024 \\ -0.0000 & 0.0010 & 0.0037 & -0.0161 \\ -0.0001 & 0.0037 & 0.0151 & -0.0988 \\ -0.0024 & -0.0161 & -0.0988 & 4.7178 \end{bmatrix}, \\
 F_1 = 10^7 \begin{bmatrix} 0.0167 & 1.6631 & -5.9121 & 0.1619 \end{bmatrix}, \\
 F_2 = 10^7 \begin{bmatrix} 0.0167 & 1.6631 & -5.9121 & 0.1619 \end{bmatrix}, \\
 \gamma = 1.9155
 \end{array}$$

D'après les résultats de simulation, on remarque que l'approche non quadratique donne des bons résultats comparant par rapport à l'approche quadratique du théorème 2.7. En effet, les résultats obtenus dans le tableau précédent sont pour un niveau d'atténuation des perturbations  $\gamma = 1.9155$ , par contre l'utilisation de la forme quadratique, nous donne  $\gamma = 2.2284$ . La figure 3.2 montre les résultats obtenus via l'approche non quadratique dépendante et indépendante.

### 3.4 Stabilisation non quadratique par la commande SOF

#### 3.4.1 Perturbation externe nulle

##### 3.4.1.1 Commande SOF classique

En prenant le modèle T-S (2.102) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i \sigma(t) + B_{w_i} w(t)) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{1i} x(t) + D_i \sigma(t) + D_{w_i} w(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{2i} x(t)) \end{cases} \quad (3.28)$$

Le but ici est de stabiliser le système précédent dans le cas où  $w(t) = 0$ , via la commande SOF suivante :

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^r \zeta_j \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_s (E_s K_j C_{2i} + \bar{E}_s H_j) x(t) \quad (3.29)$$

avec  $x(t) \in \bigcap_{j=1}^r \mathfrak{N}(H_j C_{2i})$

Les conditions de stabilisations obtenues via l'approche non quadratique (3.2) sont présentées dans le théorème suivant :

**Théorème 3.4.** Pour tout  $k = 1 \dots r - 1$ ,  $\Phi_k$  limites inférieures de  $\dot{\zeta}_k(\varsigma(t))$  ( $\Phi_k \leq \dot{\zeta}_k(\varsigma(t))$ ), alors pour un scalaire donné  $\rho > 0$ , le système flou T-S (3.28) sans perturbation externe est

asymptotiquement stable via la commande SOF (3.29), s'il existe des matrices  $P_\ell = P_\ell^T > 0$ , des matrices  $F_j$ ,  $N_j$  et  $\Xi_j$  solution du problème LMIs suivant :

$$(A_i P_\ell + B_i E_s F_j C_{2n} + B_i \bar{E}_s Z_j C_{2n}) + (*) - \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (P_{\mathbf{k}} - P_{\mathbf{r}}) < 0, \quad \forall (i, j, \ell, n) \in I_r, \quad s \in I_{2m} \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & z_i^j C_{2n} \\ \rho & P_\ell \\ * & * \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in I_m, j \in I_r, \ell \in I_r, n \in I_r \quad (3.31)$$

$$(P_k - P_r) \geq 0 \quad (3.32)$$

$$\Xi_i C_{2j} = C_{2j} P_i \quad (3.33)$$

avec :  $K_j = F_j \Xi_j^{-1}$ ,  $H_j = Z_j \Xi_j^{-1}$

### Démonstration :

Soit la fonction de Lyapunov non quadratique (3.2), le système flou T-S (3.28) est asymptotiquement stable si  $\dot{V}(t) < 0$  :

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^T(t) P_\zeta^{-1} x(t) + x^T(t) P_\zeta^{-1} \dot{x}(t) + x^T(t) \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet x(t) < 0 \quad (3.34)$$

Par substitution de (3.28) dans (3.34), nous donne :

$$\begin{aligned} & (A_\zeta x(t) + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta C_{2\zeta} + E_\zeta H_\zeta C_{2\zeta}) x(t))^T P_\zeta^{-1} x(t) \\ & + x^T(t) P_\zeta^{-1} (A_\zeta x(t) + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta C_{2\zeta} + E_\zeta H_\zeta C_{2\zeta}) x(t)) + x^T(t) \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet x(t) < 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

l'inégalité (3.35) est satisfaite si :

$$\left( P_\zeta^{-1} A_\zeta + P_\zeta^{-1} B_\zeta (E_\zeta K_\zeta C_{2\zeta} + E_\zeta H_\zeta C_{2\zeta}) \right) + (*) + \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet < 0 \quad (3.36)$$

multiplions à gauche et à droite par  $P_\zeta$ , on aura :

$$(A_\zeta P_\zeta + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta C_{2\zeta} + E_\zeta H_\zeta C_{2\zeta}) P_\zeta) + (*) + P_\zeta \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet P_\zeta < 0 \quad (3.37)$$

Le terme  $P_\zeta \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet P_\zeta$  peut être réécrit comme dans (3.16) :

$$P_\zeta \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet P_\zeta = \frac{d}{dt} \left( P_\zeta P_\zeta^{-1} \right) P_\zeta - \dot{P}_\zeta = -\dot{P}_\zeta \quad (3.38)$$

et l'inégalité (3.37) devienne :

$$(A_\zeta P_\zeta + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta C_{2\zeta} + E_\zeta H_\zeta C_{2\zeta}) P_\zeta) + (*) - \dot{P}_\zeta < 0 \quad (3.39)$$

En substituant (3.5) dans (3.39), on arrive à la condition (3.30).

La condition (3.31) peut s'obtenir à partir du lemme 2.1 :  $\varepsilon \left( P_\zeta^{-1}, \rho \right) \subset \bigcap_{j=1}^r \aleph (H_j C_{2i})$ , si et seulement si :

$$\left( h_i^j C_{2i} \right) \left( \frac{P_\zeta^{-1}}{\rho} \right)^{-1} \left( h_i^j C_{2i} \right)^T \leq \bar{u}_i^2, \quad i \in I_m, \quad j \in I_r \quad (3.40)$$

En suivant les mêmes étapes du Théorème 2.10, on arrive à la condition (3.31). Ceci complète la démonstration.

### 3.4.1.2 Commande SOF descripteur approche

Nous rappelons la forme descripteur obtenu dans (2.28) :

$$E \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{2^m} \bar{A}_{ijs} \bar{x}(t) \quad (3.41)$$

$$\text{avec : } \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{ijs} = \begin{bmatrix} A_i & 0 & B_i \\ C_{2i} & -I & D_i \\ \bar{E}_s H_j & E_s K_j \left( P_5^\zeta \right)^{-1} & -I \end{bmatrix}$$

$$\text{et : } \left( P_5^\zeta \right)^{-1} = \left( \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) P_5^j \right)^{-1}$$

La fonction de Lyapunov non quadratique sera écrite comme suit :

$$V(t) = \tilde{x}^T(t) \tilde{\Xi} \left( P_\zeta^\zeta \right)^{-1} \tilde{x}(t) \quad (3.42)$$

$$\text{avec : } P_\zeta^\zeta = \begin{bmatrix} P_1^\zeta & 0 & 0 \\ 0 & P_5^\zeta & 0 \\ P_7^\zeta & P_8^\zeta & P_9^\zeta \end{bmatrix}$$

$$P_1^\zeta = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) P_1^j, \quad P_5^\zeta = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) P_5^j, \quad P_7^\zeta = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) P_7^j,$$

$$P_8^\zeta = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) P_8^j, \quad P_9^\zeta = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) P_9^j$$

Les conditions de stabilisations obtenues pour la commande SOF (3.29), via la fonction de Lyapunov non quadratique (3.2) sont présentées dans le théorème suivant :

**Théorème 3.5.** Pour tout  $k = 1 \dots r - 1$ ,  $\Phi_k$ , limites inférieures de  $\dot{\zeta}_k(\varsigma(t))$  ( $\Phi_k \leq \dot{\zeta}_k(\varsigma(t))$ ), alors pour un scalaire positif donné  $\rho > 0$ , le système flou T-S (3.28) sans perturbations externes, est asymptotiquement stable via la loi de commande SOF non quadratique (3.29), s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_1^\ell$ , des matrices définies positives  $P_5^\ell$ , des matrices  $P_7^\ell$ ,  $P_8^\ell$ ,  $P_9^\ell$ ,  $K_j$ , et  $Z_j$ , de sorte que les conditions LMI suivantes soient satisfaites :

$$\Upsilon_{ijls} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{ijls}(1,1) & * & * \\ \Upsilon_{ijls}(2,1) & -P_5^{\ell T} - P_5^v + D_i P_8^\ell & * \\ \Upsilon_{ijls}(3,1) & P_9^{\ell T} D_i^T + E_s K_j - P_8^\ell & -P_9^{\ell T} - P_9^\ell \end{bmatrix} < 0, \quad i \in I_r, j \in I_r, \ell \in I_r, s \in I_{2m} \quad (3.43)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & z_1^j \\ * & P_1^\ell \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in I_m, j \in I_r, \ell \in I_r \quad (3.44)$$

$$P_1^k - P_1^r \geq 0 \quad (3.45)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{ijls}(1,1) &= P_1^{\ell T} A_i^T + A_i P_1^\ell + B_i P_7^\ell + P_7^{\ell T} B_i^T - \sum_{k=1}^{r-1} \Phi_k (P_1^k - P_1^r) \\ \Upsilon_{ijls}(2,1) &= P_8^{\ell T} B_i^T + C_i P_1^\ell + D_i P_7^\ell \\ \Upsilon_{ijls}(3,1) &= \bar{E}_s Z_j + P_9^{\ell T} B_i^T - P_7^\ell \\ Z_j &= H_j P_1^\ell \end{aligned}$$

### Démonstration :

Compte tenu de la fonction de Lyapunov non quadratique (3.42), le système en boucle fermée (3.41) est asymptotiquement stable si  $\dot{V}(t) < 0$ , comme suit :

$$\dot{\tilde{x}}^T(t) \tilde{\Xi} (P_\zeta^\zeta)^{-1} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{\Xi} (P_\zeta^\zeta)^{-1} \dot{\tilde{x}}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{\Xi} \overbrace{(P_\zeta^\zeta)^{-1}}^{\bullet} \tilde{x}(t) < 0 \quad (3.46)$$

Pour un système descripteur, on a [Bouarar et al., 2013] :

$$\tilde{\Xi} (P_\zeta^\zeta)^{-1} = (P_\zeta^\zeta)^{-T} \tilde{\Xi} > 0 \quad (3.47)$$

pour cela, on choisit :  $P_\zeta^\zeta = \begin{bmatrix} P_1^\zeta & 0 & 0 \\ 0 & P_5^\zeta & 0 \\ P_7^\zeta & P_8^\zeta & P_9^\zeta \end{bmatrix}$

En multipliant gauche par  $(P_\zeta^\zeta)^T$  et droit par  $P_\zeta^\zeta$ , l'équation (3.47) peut s'écrire :

$$\tilde{\Xi} (P_\zeta^\zeta)^T = \tilde{\Xi} P_\zeta^\zeta > 0 \quad (3.48)$$

on a aussi :

$$\bar{A}_{\zeta\zeta\zeta}^T (P_1^\zeta)^{-1} + (P_1^\zeta)^{-T} \bar{A}_{\zeta\zeta\zeta} + \overbrace{(P_1^\zeta)^{-1}}^{\bullet} < 0 \quad (3.49)$$

Multiplions gauche par  $(P_\zeta^\zeta)^T$ , et droit par  $P_\zeta^\zeta$  et nous prenons en considération l'équation (3.5), l'inégalité précédente sera :

$$(P_\zeta^\zeta)^T \bar{A}_{\zeta\zeta\zeta}^T + \bar{A}_{\zeta\zeta\zeta} P_\zeta^\zeta - \dot{P}_\zeta^\zeta < 0 \quad (3.50)$$

donc,  $\dot{V}(t) < 0$  si :

$$\begin{bmatrix} (A_i P_1^\ell + B_i P_7^\ell) + (*) - \sum_{k=1}^{r-1} \Phi_k (P_1^k - P_1^r) & * & * \\ P_8^{\ell T} B_i^T + C_{2_i} P_1^\ell + D_i P_7^\ell & -P_5^\ell - P_5^{\ell T} - D_i P_8^\ell & * \\ \bar{E}_s Z_j + P_9^{\ell T} B_i^T - P_7^\ell & P_9^{\ell T} D_i^T + E_s K_j - P_8^\ell & -P_9^\ell - P_9^{\ell T} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.51)$$

Pour l'inégalité (3.44), l'ellipsoïde  $\varepsilon(P_\zeta^\zeta, \rho)$  est inclus dans  $\bigcap_{j=1}^n \aleph(H_j)$  si et seulement si :

$$\left(h_i^j\right)^T \left(\frac{\tilde{E}(P_\zeta^\zeta)^{-1}}{\rho}\right)^{-1} \left(h_i^j\right) \leq \bar{u}_i^2 \quad (3.52)$$

L'inégalité précédente peut s'écrire :

$$\frac{\bar{u}_i^2}{\rho} - \left(h_i^j\right)^T P_1^\ell \left(h_i^j\right) \geq 0 \quad (3.53)$$

En utilisant le complement de Schur, on aura :

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & \mathbf{h}_i^j \\ * & (P_1^\ell)^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.54)$$

Nous multiplions à gauche et à droit par  $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_1^\ell \end{bmatrix}$ , on aura :

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & z_i^j \\ * & P_1^\ell \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.55)$$

avec  $z_i^j$  est le ième élément de  $Z_j$ .

Ceci complète la démonstration.

### 3.4.2 Perturbation externe non nulle

#### 3.4.2.1 Commande SOF classique

L'objectif ici est d'étendre les résultats présentés dans théorème 3.4 au cas où les perturbations externes sont présents ( $w(t) \neq 0$ ). Dans ce contexte, l'idée de l'application de la commande SOF pour la stabilisation des systèmes décrits par des modèles de T-S continus soumis à la saturation d'actionneur, et aux perturbations externes a été introduit par [Saifia et al., 2012a]. Cependant, les résultats obtenus ont basés sur un forme quadratique de la fonction de Lyapunov, nécessite la recherche d'une matrice commune pour tous les sous modèles. de ce fait, les conditions de stabilisation obtenues sont conservatives vis-à-vis les solutions possibles. Ce problème nous encourage à proposer la présente contribution. On se basant sur une fonction de Lyapunov polyquadratique, la liaison entre les sous modèle est assurée, et l'intervalle des solutions possible est élargi. Le théorème suivant représente les conditions de stabilisation pour le système (3.28) via la commande SOF (3.29) :

**Théorème 3.6.** [Nasri et al., 2019b] Pour tout  $k = 1 \dots r - 1$ ,  $\Phi_k$  limites inférieures de

$\dot{\zeta}_k(\varsigma(t)) \left( \Phi_k \leq \dot{\zeta}_k(\varsigma(t)) \right)$ , alors pour un scalaire donné  $\rho > 0$ , le système flou T-S (3.28) est asymptotiquement stable via la commande SOF (3.29), avec un taux d'atténuation des perturbations  $\gamma$ , s'il existe des matrices  $P_i = P_i^T > 0$ , des matrices  $F_j$ ,  $N_j$ , et  $\Xi_j$ , solution du problème LMI suivant :

$$\begin{bmatrix} (A_i P_\ell + B_i E_s F_j C_{2n} + B_i \bar{E}_s N_j C_{2n}) + (*) - \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (P_{\mathbf{k}} - P_r) & * & * \\ B_{wi}^T & -\gamma^2 I & * \\ C_{1_i} P_\ell + D_i E_s F_j C_{2i} + D_i \bar{E}_s Z_j C_{2i} & D_{wi} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.56)$$

$\forall (i, j, \ell, n) \in I_r, s \in I_{2m}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}^2}{\rho} & N_i^j C_{2n} \\ \rho & P_\ell \\ * & P_\ell \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in I_m, j \in I_r, \ell \in I_r, n \in I_r \quad (3.57)$$

$$(P_{\mathbf{k}} - P_{\mathbf{r}}) \geq 0 \quad (3.58)$$

$$\Xi_i C_{2n} = C_{2n} P_i \quad \forall i \in I_r, n \in I_r \quad (3.59)$$

avec :  $K_j = F_j \Xi_\zeta^{-1}$ ,  $H_j = N_j \Xi_\zeta^{-1}$

### Démonstration :

En considérant la fonction de Lyapunov non quadratique (3.2) et en utilisant le critère  $H_\infty$ , le système en boucle fermée (3.28) est asymptotiquement stable via la commande SOF (3.29) si :

$$\dot{V}(t) + z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) < 0 \quad (3.60)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov (3.2) est calculée comme suit :

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^T(t) P_\zeta^{-1} x(t) + x^T(t) P_\zeta^{-1} \dot{x}(t) + x^T(t) \overbrace{P_\zeta^{-1}}^{\bullet} x(t) \quad (3.61)$$

où  $P_\zeta$  est définie dans (3.2).

La substitution du modèle (3.28) avec la commande SOF (3.29) dans (3.61) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (A_\zeta x(t) + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta C_{2\zeta} x(t) + \bar{E}_\zeta H_\zeta C_{2\zeta} x(t)) + B_{w\zeta} w(t))^T P_\zeta^{-1} x(t) + \\ & x^T(t) P_\zeta^{-1} (A_\zeta x(t) + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta C_{2\zeta} x(t) + \bar{E}_\zeta H_\zeta C_{2\zeta} x(t)) + B_{w\zeta} w(t)) \\ & + x^T(t) \overbrace{P_\zeta^{-1}}^{\bullet} x(t) \\ & = x^T(t) \left[ (P_\zeta^{-1} A_\zeta + P_\zeta^{-1} B_\zeta (E_\zeta K_\zeta C_{2\zeta} + \bar{E}_\zeta H_\zeta C_{2\zeta})) + (*) + \overbrace{P_\zeta^{-1}}^{\bullet} \right] x(t) \\ & + (x^T(t) P_\zeta^{-1} B_{w\zeta} w(t) + (*)) \end{aligned} \quad (3.62)$$



alors, l'inégalité (3.60) est satisfaite si :

$$x^T(t) \left[ (P_\zeta^{-1}A_\zeta + P_\zeta^{-1}B_\zeta (E_\zeta K_\zeta C_{2\zeta} + \bar{E}_\zeta H_\zeta C_{2\zeta})) + (*) + \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet \right] x(t) + (x^T(t) P_\zeta^{-1} B_{w\zeta} w(t) + (*)) + z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) < 0 \quad (3.63)$$

$$= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A_\zeta + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta C_{2\zeta} + \bar{E}_\zeta H_\zeta C_{2\zeta}))^T P_\zeta^{-1} + (*) + \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet & * \\ B_{w\zeta}^T P_\zeta^{-1} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (C_{1\zeta})^T \\ D_{w\zeta}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_{1\zeta})^T \\ D_{w\zeta}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.64)$$

En utilisant le compliment de Schur, on aura :

$$\dot{V}(t) + z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \Pi_\zeta \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.65)$$

$$\text{avec : } \Pi_\zeta = \begin{bmatrix} (A_\zeta + B_\zeta (E_\zeta K_\zeta C_{2\zeta} + \bar{E}_\zeta H_\zeta C_{2\zeta}))^T P_\zeta^{-1} + (*) + \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet & * & * \\ B_{w\zeta}^T P_\zeta^{-1} & -\gamma^2 I & * \\ C_{1\zeta} + D_\zeta E_\zeta F_\zeta C_{2\zeta} + D_\zeta \bar{E}_\zeta Z_\zeta C_{2\zeta} & D_{w\zeta} & -I \end{bmatrix}$$

Pre-et post-multipliant  $\Pi_\zeta$  par  $\Upsilon = \text{diag}(P_\zeta, I, I)$  avec le changement de variable  $\mathbf{N}_j = H_j \Xi_\zeta$ ,  $F_j = K_j \Xi_\zeta$ .

on obtient :

$$\Gamma_\zeta = \Pi_\zeta \Upsilon \Pi_\zeta = \begin{bmatrix} A_\zeta P_\zeta + B_\zeta E_\zeta F_\zeta C_{2\zeta} + B_\zeta \bar{E}_\zeta N_\zeta C_{2\zeta} + (*) + P_\zeta \overbrace{P_\zeta^{-1}}^\bullet P_\zeta & * & * \\ B_{w\zeta}^T & -\gamma^2 I & * \\ C_{1\zeta} P_\zeta + D_\zeta E_\zeta F_\zeta C_{2\zeta} + D_\zeta \bar{E}_\zeta N_\zeta C_{2\zeta} & D_{w\zeta} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.66)$$

Par l'utilisation de l'approximation (3.5), on arrive à la condition LMI (3.56). La condition (3.57) peut être obtenue de la même façon que dans (3.31).

Ceci complète la démonstration.

### Exemple 3.3 : stabilisation d'un système de direction assistée électrique

Nous considérons le système EPS (2.71), et prenons en considération la variation de la vitesse du véhicule, le modèle non-linéaire complet de l'EPS peut être écrit comme suit :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t) x(t) + B u(t) + B_{T_h} T_h(t) + B_w w(t) \quad (3.67)$$

avec : le vecteur d'état :  $x(t) = [\theta_c \quad c \quad \theta_m \quad m \quad x_r \quad v_r \quad \phi \quad \beta]^T$ , ainsi,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{61} & 0 & a_{63} & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ a_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77} & a_{78} \\ a_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} \frac{-F_c \text{sign}(\omega_c)}{J_c} \\ \frac{-F_m \text{sign}(\omega_m)}{J_m} \\ \frac{-F_r \text{sign}(v_r)}{M_r} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_a/J_m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$B_{T_h} = \begin{bmatrix} 0 & 1/J_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

et les éléments de la matrice  $A(t)$  sont définis dans l'exemple 2.1.

La représentation d'état (3.67) dépend de la vitesse du véhicule, où il est variable dans le temps et considérée bornée. Pour construire un modèle T-S pour notre système, on utilise l'approche du secteur non linéaire. Le modèle T-S résultant est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i \sigma(t) + B_{w_i} w(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) C_{2i} x(t) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) C_{1i} x(t) \end{cases} \quad (3.68)$$

les variables de prémisse dans notre modèle sont :  $V_1(t) = \frac{1}{V(t)}$ , et  $V_2(t) = \frac{1}{V^2(t)}$ , où ils peuvent s'écrire de la forme suivante :

$$\begin{aligned} V_1 &= \mu_{11} V_{1 \max} + \mu_{12} V_{1 \min} \\ V_2 &= \mu_{21} V_{2 \max} + \mu_{22} V_{2 \min} \end{aligned} \quad (3.69)$$

où :  $V_{2 \min} \leq V_2 \leq V_{2 \max}$ ,  $V_{1 \min} \leq V_1 \leq V_{1 \max}$ .

avec :

$$\begin{aligned} \mu_{11}(t) &= \frac{V_1(t) - V_{1 \min}}{V_{1 \max} - V_{1 \min}}, & \mu_{12}(t) &= 1 - \mu_{11}(t) \\ \mu_{21}(t) &= \frac{V_2(t) - V_{2 \min}}{V_{2 \max} - V_{2 \min}}, & \mu_{22}(t) &= 1 - \mu_{21}(t) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Donc, les fonctions d'activation sont données par :

$$\begin{aligned} \zeta_1(t) &= \mu_{11}(V_1(t)) \mu_{21}(V_2(t)) & \zeta_3(t) &= \mu_{12}(V_1(t)) \mu_{21}(V_2(t)) \\ \zeta_2(t) &= \mu_{11}(V_1(t)) \mu_{22}(V_2(t)) & \zeta_4(t) &= \mu_{12}(V_1(t)) \mu_{22}(V_2(t)) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Et la matrice  $A$  du modèle T-S (3.68) s'écrit comme suit :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{61} & 0 & a_{63} & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68i} \\ a_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77i} & a_{78i} \\ a_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88i} \end{bmatrix}$$

$$a_{681} = a_{682} = V_1 \min \frac{T_p C_f a_f}{M_r r_p}, \quad a_{683} = a_{684} = V_1 \max \frac{T_p C_f a_f}{M_r r_p},$$

$$a_{711} = a_{712} = V_1 \min \frac{C_f}{M G_{sc}}, \quad a_{713} = a_{714} = V_1 \max \frac{C_f}{M G_{sc}}$$

$$a_{771} = a_{772} = -V_1 \min \frac{C_f + C_r}{M}, \quad a_{773} = a_{774} = -V_1 \max \frac{C_f + C_r}{M}$$

$$a_{781} = a_{783} = V_2 \min \frac{C_f a_f - C_r a_r}{M} - 1, \quad a_{782} = a_{784} = V_2 \max \frac{C_f a_f - C_r a_r}{M} - 1$$

$$a_{881} = a_{882} = -V_1 \min \frac{C_f a_f^2 + C_r a_r^2}{I_z}, \quad a_{883} = a_{884} = -V_1 \max \frac{C_f a_f^2 + C_r a_r^2}{I_z}$$
 et,  $C_1 = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 & 0 & -k_s/r_p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

L'objectif ici est la stabilisation du système en boucle fermée (3.68) via la commande SOF non quadratique (3.29), dans la présence de la saturation d'actionneur, et de la perturbation.

A cause de la difficulté de mesurer de la variable d'état  $\phi$ , on prend en compte ici que la sortie mesurable définie par :  $y(t) = \begin{bmatrix} \theta_c & \omega_c & \theta_m & \omega_m & x_r & v_r & \beta \end{bmatrix}^T$ .

Donc, la matrice  $C_2$  devienne :  $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

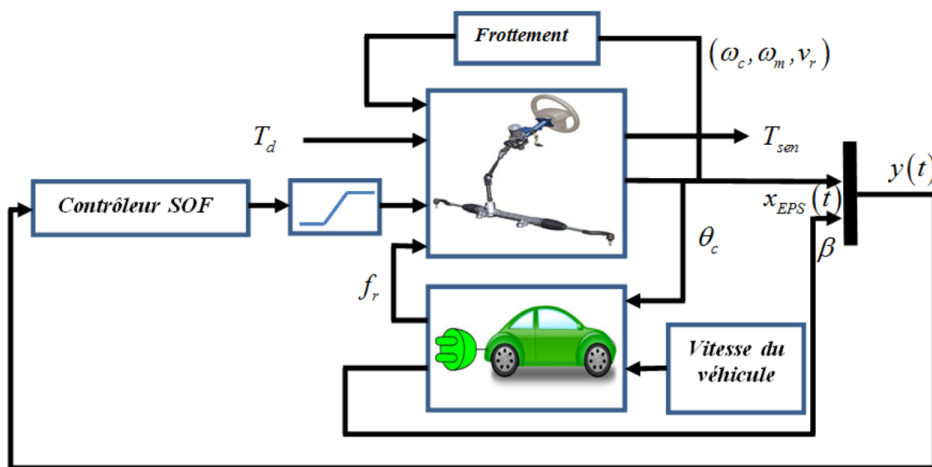
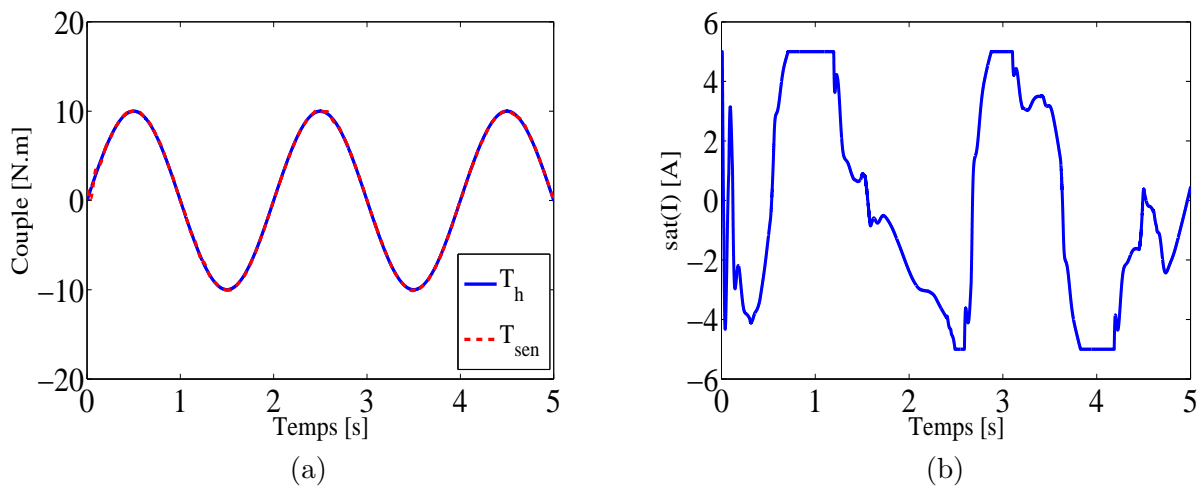


Figure 3.3: Stratégie de commande proposée

Pour un niveau de la saturation à  $5A$  et en utilisant les paramètres du véhicule de l'EPS donnés dans le tableau 2. 1, la résolution du théorème 3.6 par MATLAB LMI Toolbox, nous donne les paramètres du régulateur SOF non quadratique présentés dans le tableau 3.2.

Le couple du conducteur est choisi sous forme sinusoïdale, ce qui est similaire au modèle de direction en pratique [Li et al., 2009b], avec une amplitude égale à  $10$  (Nm). La réponse du système EPS au couple du conducteur est illustrée dans la figure 3.4 pour  $0,5$  Hz et dans la figure 3.5 pour  $1$  Hz. La vitesse du véhicule et la puissance du moteur sont illustrées dans la figure 3.6. L'approche quadratique SOF est adoptée pour la comparaison par la figure 3.7 (a). La figure 3.7 (b) présente la réponse du système EPS au couple du conducteur pour différents niveaux de saturation. Les figures 3.8 et 3.9 montrent les résultats de la comparaison avec la méthode de contrôle PDC dans [Saifia et al., 2015].

D'après tableau 3.3, nous pouvons dire que, pour différents niveaux de saturation, l'approche proposée dans le théorème 3.6 donne la faisabilité pour différents valeurs de  $\gamma$ . Cela implique que l'approche proposée donne une solution pour le théorème 3.6 avec de faibles niveaux d'atténuation des perturbations par rapport à l'approche de [Saifia et al., 2012a]. Par ailleurs, pour montrer la supériorité de l'approche proposée, le tableau 3.4 représentant les résultats de la comparaison par rapport à l'approche quadratique de [Saifia et al., 2015]. Cette comparaison est effectuée à l'aide de différentes métriques de performances telles que : l'intégrale de l'erreur absolue (IAE), l'intégrale du carré d'erreur (ISE), l'intégrale du temps multipliée par l'erreur absolue et l'intégrale du temps multipliée par le carré d'erreur. Les résultats obtenus montrent la supériorité de l'approche proposée sur les autres approches.



**Figure 3.4:** Réponse du système EPS à  $0.5Hz$  : a).  $T_{sen}$  par rapport à  $T_h$ . (b). Signal de commande saturé .

**Tableau 3.2:** Paramètres du contrôleur SOF non quadratique

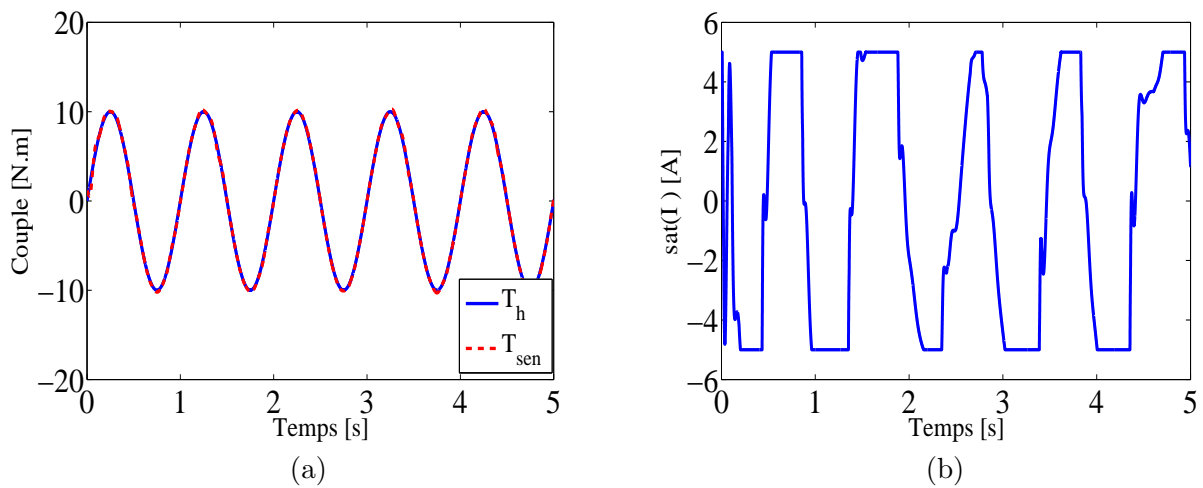
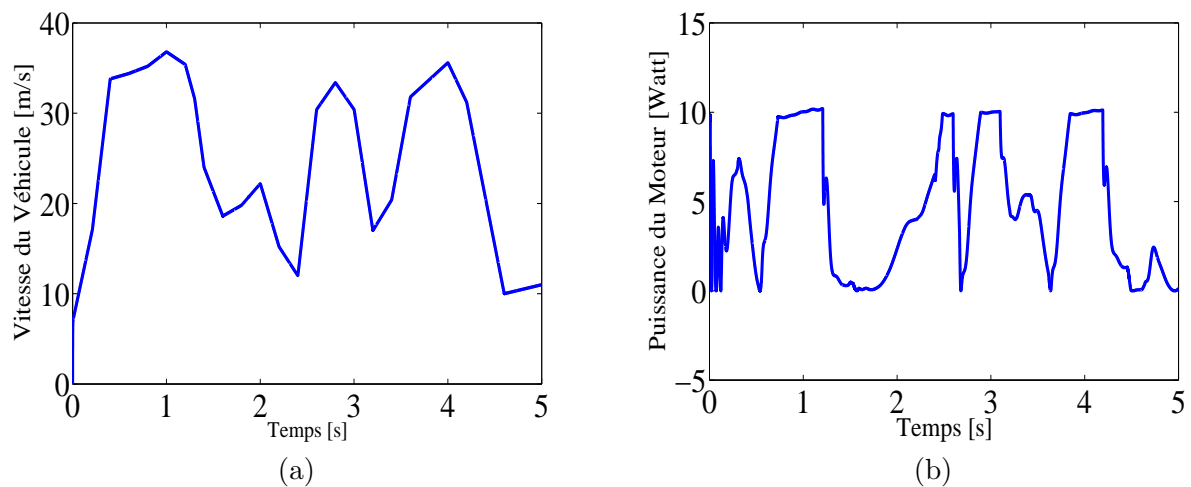
|           |   |
|-----------|---|
| $\Xi_1 =$ | $\begin{bmatrix} 0.0003 & -0.0034 & 0.0028 & -0.0146 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0034 & 0.3273 & -0.0633 & 0.6458 & 0 & -0.0004 & 0 \\ 0.0028 & -0.0633 & 0.0494 & -0.5647 & 0 & -0.0002 & -0.0001 \\ -0.0146 & 0.6458 & -0.5647 & 55.6909 & -0.0002 & -0.9788 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0002 & 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & -0.0004 & -0.0002 & -0.9788 & 0 & 0.0367 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0001 & 0.0002 & 0 & 0 & 2 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$            |
| $\Xi_2 =$ | $\begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0023 & 0.0014 & -0.0046 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0023 & 0.3566 & -0.0442 & 0.5187 & 0 & -0.0004 & -0.0002 \\ 0.0014 & -0.0442 & 0.0255 & -0.3578 & 0 & -0.0001 & 0 \\ -0.0046 & 0.5187 & -0.3578 & 47.2480 & -0.0001 & -0.8199 & -0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & 5 \times 10^{-9} & 0 & 0 \\ 0 & -0.0004 & -0.0001 & -0.8199 & 0 & 0.0308 & 0 \\ 0 & -0.0002 & 0 & -0.0002 & 0 & 0 & 3 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$ |
| $\Xi_3 =$ | $\begin{bmatrix} 0.0001 & -0.0019 & 0.0007 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0019 & 0.2267 & -0.0440 & -0.0356 & 0 & -0.0007 & 0 \\ 0.0007 & -0.0440 & 0.0204 & -0.3597 & 0 & -0.0002 & 0 \\ 0.0002 & -0.0356 & -0.3597 & 50.2429 & -0.0001 & -0.9555 & 0.0003 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & 5 \times 10^{-9} & 0 & 0 \\ 0 & -0.0007 & -0.0002 & -0.9555 & 0 & 0.0358 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0003 & 0 & 0 & 4 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$               |
| $\Xi_4 =$ | $\begin{bmatrix} 0.0001 & -0.0015 & 0.0004 & 0.0012 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0015 & 0.1835 & -0.0354 & -0.1064 & 0 & -0.0005 & 0 \\ 0.0004 & -0.0354 & 0.0143 & -0.2812 & 0 & -0.0001 & 0 \\ 0.0012 & -0.1064 & -0.2812 & 39.7220 & -0.0001 & -0.6953 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & 3 \times 10^{-9} & 0 & 0 \\ 0 & -0.0005 & -0.0001 & -0.6953 & 0 & 0.0260 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0 & 0 & 9 \times 10^{-8} \end{bmatrix}$               |
|           | $\gamma = 0.8815, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1.250210^{-6}$  |
|           | $F_1 = [0.0123 \quad 0.0790 \quad -0.1026 \quad 0.0471 \quad -0.0000 \quad -0.0093 \quad -0.0004]$  |
|           | $F_2 = [0.0124 \quad 0.0731 \quad -0.1006 \quad 0.0342 \quad -0.0000 \quad -0.0117 \quad -0.0004]$  |
|           | $F_3 = [0.0132 \quad 0.0300 \quad -0.0851 \quad -0.0024 \quad -0.0000 \quad -0.0238 \quad -0.0004]$   |
|           | $F_4 = [0.0123 \quad 0.0794 \quad -0.1028 \quad 0.0482 \quad -0.0000 \quad -0.0091 \quad -0.0004]$  |
|           | $N_1 = [0.0123 \quad 0.0796 \quad -0.1028 \quad 0.0484 \quad -0.0000 \quad -0.0085 \quad -0.0004]$  |
|           | $N_2 = [0.0122 \quad 0.0815 \quad -0.1034 \quad 0.0495 \quad -0.0000 \quad -0.0043 \quad -0.0004]$  |
|           | $N_3 = [0.0122 \quad 0.0817 \quad -0.1035 \quad 0.0493 \quad -0.0000 \quad -0.0054 \quad -0.0004]$  |
|           | $N_4 = [0.0115 \quad 0.1168 \quad -0.1113 \quad -0.0844 \quad -0.0001 \quad 0.0347 \quad -0.0004]$  |

**Tableau 3.3:** Résultats de comparaison entre l'approche non quadratique et l'approche quadratique

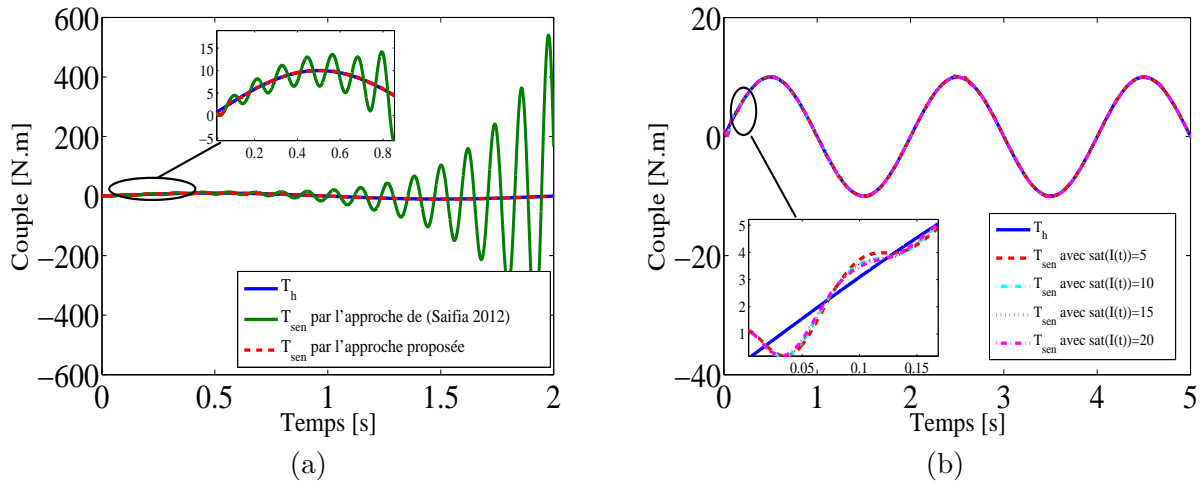
| $\bar{u}$ | $\gamma$ dans l'approche non quadratique | $\gamma$ dans l'approche quadratique |
|-----------|--|--------------------------------------|
| 5A        | 0.8815                                   | 1.0443                               |
| 10A       | 0.5269                                   | 0.6092                               |
| 15A       | 0.3491                                   | 0.4836                               |
| 20A       | 0.2947                                   | 0.4343                               |

**Tableau 3.4:** Résultats de comparaison entre l'approche proposée et l'approche dans [Saifia et al., 2015]

|                                      | Approche proposée | Approche dans [Saifia et al., 2015] |
|--------------------------------------|-------------------|-------------------------------------|
| $IAE = \int_0^{\infty}  e(t)  dt$    | 0.3102            | 0.4123                              |
| $ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$    | 0.07106           | 0.08928                             |
| $ITAE = \int_0^{\infty} t  e(t)  dt$ | 0.1765            | 0.1948                              |
| $MSE = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt$  | 0.05059           | 0.1147                              |

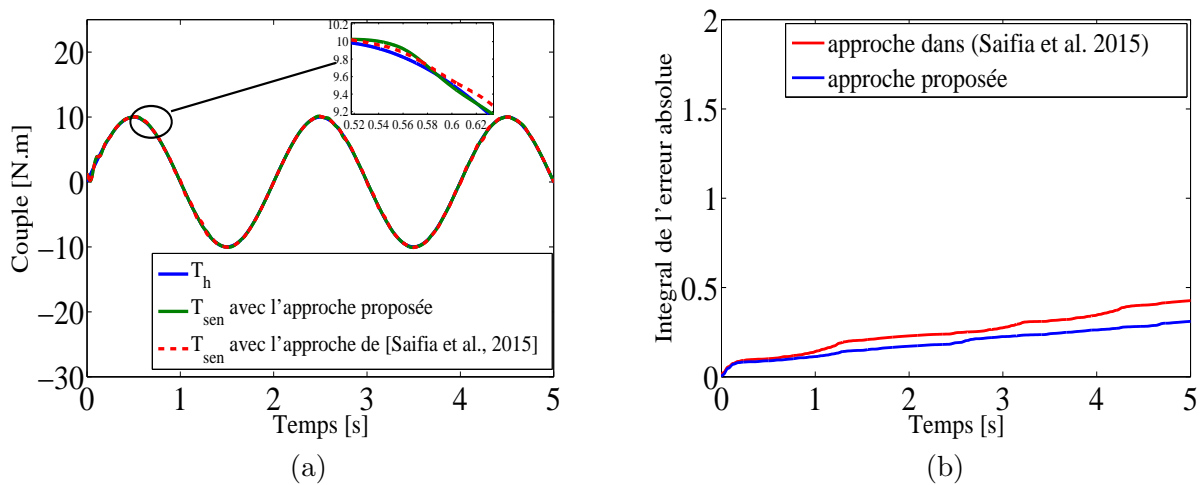

**Figure 3.5:** Réponse du système EPS à 1Hz : a).  $T_{sen}$  par rapport à  $T_h$ . (b). Signal de commande saturé.

**Figure 3.6:** Réponse du système : a). vitesse du véhicule . (b). puissance du Moteur.

Selon les figures 3.4-3.6, la méthode de contrôle appliquée au système EPS donne de très bonnes



**Figure 3.7:**  $T_{sen}$  par rapport à  $T_h$ . : a). Pour l'approche quadratique et non quadratique. (b). Pour différent niveau de saturation .

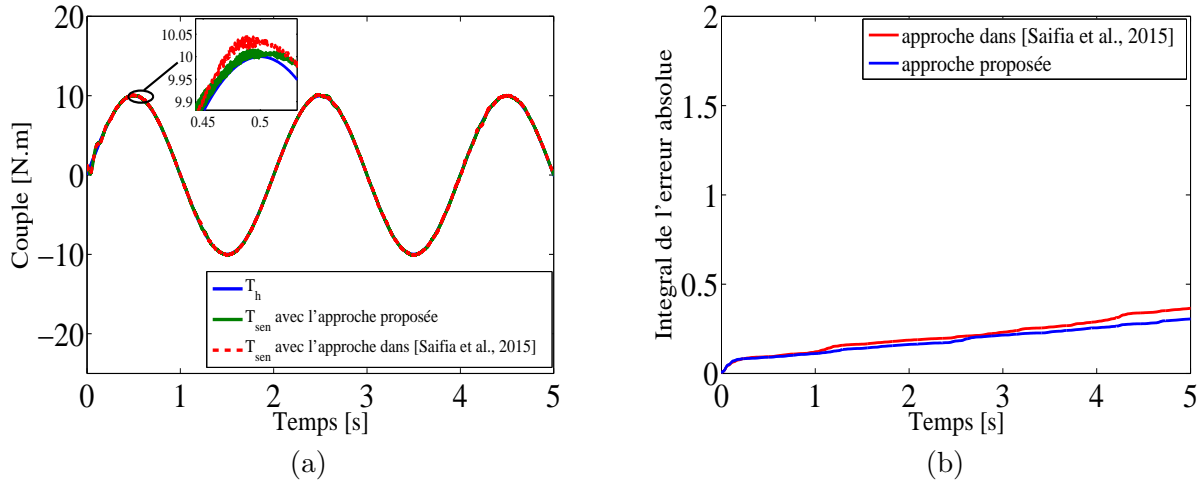
performances et une consommation d'énergie moindre. En effet, l'introduction de la saturation sur le courant d'entrée nous a permis de réduire la quantité de courant consommée par le moteur via l'élimination des pics résultants des fortes manœuvres du conducteur, avec la garantie bien sûr de la stabilité en boucle fermée. La comparaison entre les approches quadratiques et non quadratiques montre que la dernière donne une faisabilité pour les LMIs dans le théorème 3.6 avec un niveau d'atténuation des perturbations meilleur que le premier (voir tableau 3.3). Cela implique que la méthode de contrôle proposée présente une bonne robustesse contre les effets de perturbations dynamiques. De plus, à partir de la figure 3.7, on peut remarquer que l'approche non quadratique appliquée dans ce travail assure la stabilité du système pour une amplitude de 10 N.m, d'autre part, l'approche quadratique SOF [Saifia et al., 2012a] donne une réponse instable. De plus, la figure 3.6 montre que la consommation électrique du moteur à courant continu, où l'on peut noter que la puissance maximale consommée par le moteur est de 10 W.



**Figure 3.8:** Comparaison avec [Saifia et al., 2015] : a).  $T_{sen}$  par rapport à  $T_h$ . (b). Integral d'erreur absolue .

**Test de robustesse :** Le test de robustesse se fait avec un signal de perturbation aléatoire,

d'amplitude égale à 5 et de fréquence égale à 1Hz.



**Figure 3.9:** Test de robustesse : a).  $T_{sen}$  par rapport à  $T_h$ . (b). Integral d'erreur absolue .

Les résultats obtenus sont illustrés dans la figure 3.9 (a) pour le signal de couple et dans la figure 3.9 (b) pour l'intégrale de l'erreur absolue. D'après ces résultats, nous pouvons dire que notre loi de commande assure une bonne atténuation des perturbations et meilleur suivi de trajectoire de référence. En conséquence, le contrôleur SOF saturé utilisé dans ce travail, est robuste en ce qui concerne les perturbations variables, et la présence de saturation du signal de contrôle (5 A), malgré le fait que cette technique de contrôle n'utilise pas toutes les variables d'état du système telles que la commande PDC proposée par [Saifia et al., 2015].

### 3.4.2.2 Commande SOF par l'approche descripteur

Dans cette section, nous proposons de concevoir une loi de commande robuste pour le système non linéaire décrit par le descripteur T S soumis à des perturbations externes et à la saturation d'actionneur. Dans ce cas, une approche peut être fournie dans le cadre non quadratique par la minimisation d'un critère  $H_\infty$  permettant d'assurer l'atténuation des perturbations externes selon un taux  $\gamma > 0$ .

On rappelle le critère  $H_\infty$  présenté au chapitre précédent :

$$\Sigma = \dot{V}(t) + y^T(t)y(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0 \quad (3.72)$$

où  $\dot{V}(t)$  est la dérivée de la fonction de Lyapunov définie en (3.2).

Pour tout  $\tilde{x}(0) \in \varepsilon_0, \forall T > 0 : \int_0^T \Sigma dt = \int_0^T \dot{V}(t) + y^T(t)y(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) dt < 0$ , alors :

1. si  $w(t) = 0$ , alors  $\dot{V}(t) < -y^T(t)y(t) \leq 0$
2. si  $w(t) \neq 0$ , tel que  $\|w(t)\|_2^2 < \kappa^2$ , alors :  $V(T) \leq V(0) + \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t) dt \leq 1 + \gamma^2 \kappa^2$ , ensuite : pour  $\rho = 1 + \gamma^2 \kappa^2$ ,  $\varepsilon(\tilde{E}(P_\zeta)^{-1}, \rho)$  est le domaine d'attraction. et, si :  $T \rightarrow \infty, \int_0^\infty y^T(t)y(t)dt < \gamma^2 \int_0^\infty (w^T(t)w(t))dt + V(0)$ , dans les conditions initiales nulles,



$\|y(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2$ , alors, en présence de perturbations, le système présente un niveau d'atténuation de perturbation  $\gamma$ .

Les conditions de stabilisations obtenues sont présentées dans le théorème suivant :

**Théorème 3.7.** Pour tout  $k = 1 \dots r - 1$ ,  $\Phi_k$  limites inférieures de  $\dot{\zeta}_k(\varsigma(t))$  ( $\Phi_k \leq \dot{\zeta}_k(\varsigma(t))$ ), alors pour un scalaire positif donné  $\rho > 0$ , le système flou T-S (3.28), est asymptotiquement stable via la loi de commande SOF non quadratique (3.29), avec un taux d'atténuation des perturbation  $\gamma$ , s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_1^j$ , des matrices définies positive  $P_5^j$ , des matrices,  $P_7^j, P_8^j, P_9^j, K_j$ , et  $Z_j$ , de sorte que les conditions LMIs suivantes soient satisfaites :

$$\begin{bmatrix} & & & * & * \\ & \Upsilon_{ij\ell s} & & * & * \\ & & & * & * \\ 0 & P_5^j & 0 & -I & * \\ B_{wi} & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad i \in I_r, j \in I_r, \ell \in I_r, s \in I_{2m} \quad (3.73)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & * \\ \left(z_i^j\right)^T & P_1^j \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in I_m, j \in I_r \quad (3.74)$$

$$P_1^k - P_1^r \geq 0 \quad (3.75)$$

avec  $\Upsilon_{ij\ell s}$  est définie dans théorème 3.5.

### Démonstration :

Soit la condition du critère  $H_\infty$  (3.72), en substituant la dérivée de la fonction de Lyapunov non quadratique (3.42) dans (3.72), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^T \tilde{\Xi} (P_\zeta^\zeta)^{-1} \tilde{x} + \tilde{x}^T \tilde{\Xi} (P_\zeta^\zeta)^{-1} \dot{\tilde{x}} + \tilde{x}^T \tilde{\Xi} \overbrace{\left(P_\zeta^\zeta\right)^{-1}}^{\bullet} \tilde{x} + \tilde{x} (P_\zeta^\zeta)^{-1} B_{wi} w(t) + w^T(t) B^T (P_\zeta^\zeta)^{-1} \tilde{x} \\ + y^T(t) y(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) < 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

En prenant la démonstration de la condition (3.43) et en suivant les mêmes étapes que dans la démonstration du théorème 2.11, on arrive à définir la condition de stabilisation (3.74). La contrainte LMI (3.74), peut être dérivée de la même façon que pour LMI (3.44).

Ceci complète la preuve.

### Exemple 3.4.

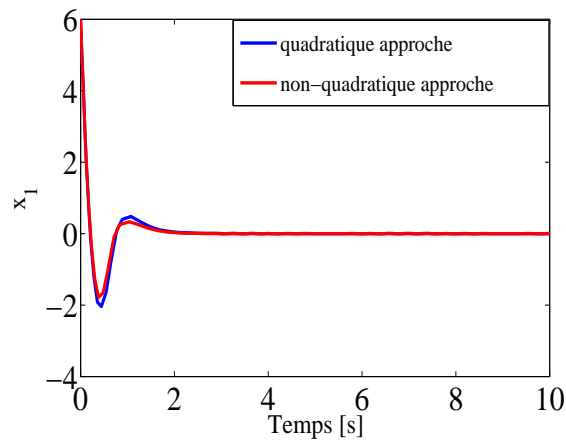
Considérant le système (3.28) avec les paramètres suivants [Bouarar et al., 2009]

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -3 & 20 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.25 \end{bmatrix}. \\ \zeta_1(t) &= \cos^2(x), \zeta_2(t) = 1 - \zeta_1(t) \end{aligned}$$

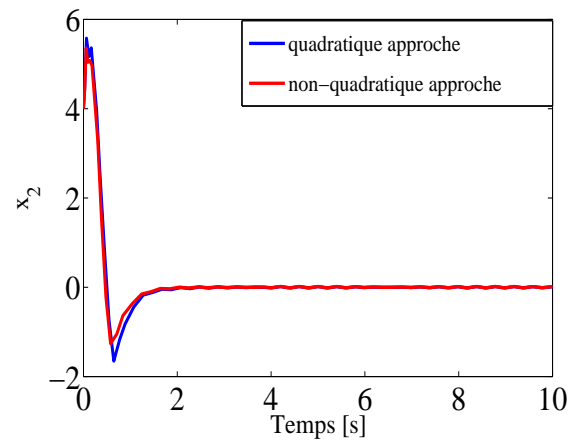
la résolution des LMI du théorème 3.7, nous donne les paramètres du régulateur SOF-descripteur non quadratique suivant (tableau 3.5) :

**Tableau 3.5:** Paramètres de la commande SOF descripteur non quadratique

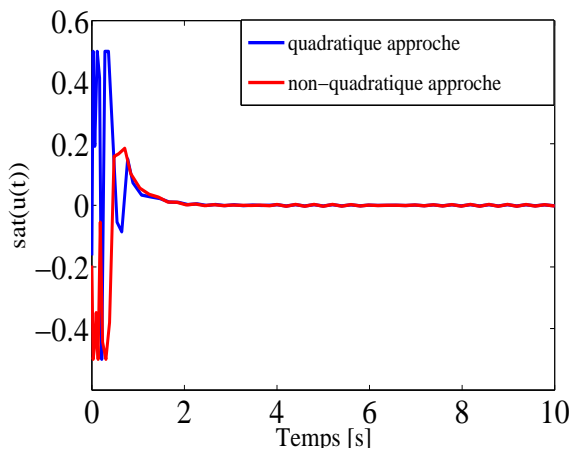
| Approche non-quadratique  | Approche quadratique  |
|---|---|
| $P_1^1 = \begin{bmatrix} 0.0082 & -0.0024 \\ -0.0024 & 0.0150 \end{bmatrix},$ | $P_1 = \begin{bmatrix} 0.0054 & -0.0019 \\ -0.0019 & 0.0108 \end{bmatrix},$ $P_5 = \begin{bmatrix} 1.0008 & 0.0021 \\ 0.0021 & 1.0066 \end{bmatrix}$ $K_1 = [0.0124 \ 0.0049], \ K_2 = [-0.0124 \ 0.0049]$ $\gamma = 2.983$ |
| $P_1^2 = \begin{bmatrix} 0.0082 & -0.0024 \\ -0.0024 & 0.0150 \end{bmatrix},$ |   |
| $P_5^1 = \begin{bmatrix} 1.0089 & -0.0008 \\ -0.0003 & 1.0378 \end{bmatrix},$ |   |
| $P_5^2 = \begin{bmatrix} 1.0002 & 0.0004 \\ 0.0003 & 1.0003 \end{bmatrix}$    |   |
| $K_1 = [0.0186 \ 0.0064], \ K_2 = [-0.0157 \ 0.0141]$ $\gamma = 2.1677$       |   |



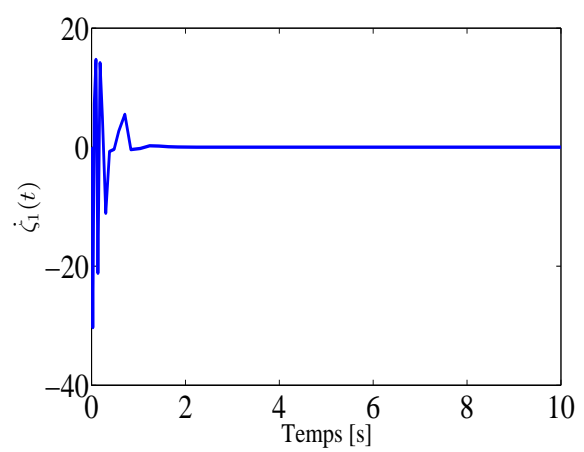
(a)



(b)

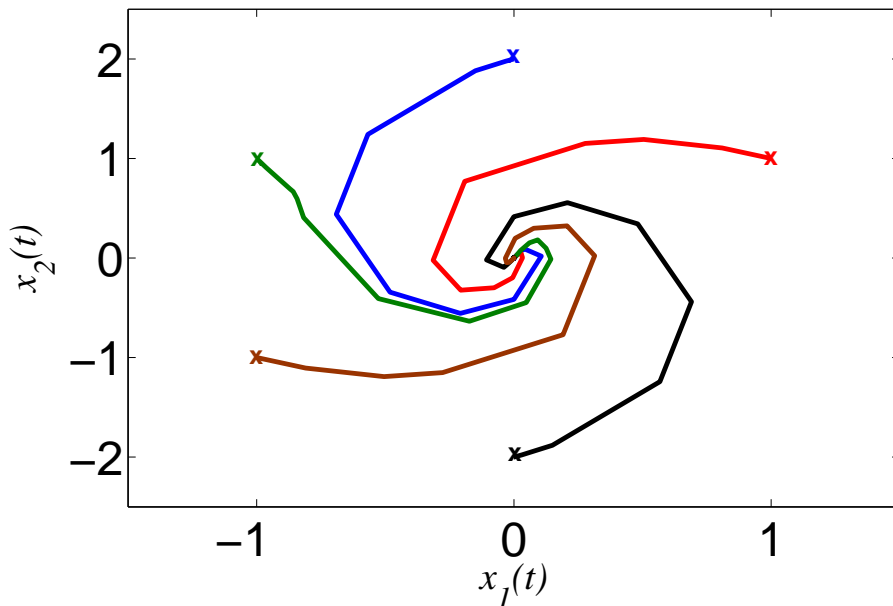


(c)



(d)

**Figure 3.10:** Réponse du système : (a). l'état  $x_1$ . (b). l'état  $x_2$ . (c). Signal de commande. (d). Dérivée de la 1ère fonction d'appartenance.



**Figure 3.11:** Réponses du système pour différentes valeurs initiales.

Selon les figures 3.10 (a)-(d), on peut remarquer une amélioration de la réponse du système dans le cas non quadratique par rapport au cas quadratique, aussi la figure 3.11 montre le diagramme de phase pour différentes valeurs initiales.

**Remarque 3.4.** la difficulté de trouver les bornes inférieures des fonctions d'appartenance présente un grand défi pour les chercheurs ces dernière années. Les solutions proposées sont basées sur fonctions de Lyapunov non quadratique conduit à des conditions de stabilisation ne dépend pas de ces dérivées. Deux forme ont été utilisées, a intégrale curviligne [Cherifi et al., 2019], et la forme (3.3). le long de ce chapitre nous avons utilisé que la représentation (3.2) de la dérivée des fonctions d'appartenance (sauf dans théorème 3.3). car s'il existe un moyen de déterminer les bornes inférieures des dérivée de ces fonctions, on trouve que les résultats obtenus sont mieux que de chercher (par tâtonnement) une constante comme dans (3.3). Cependant, la forme (3.3) reste applicable pour tous les résultats présentés dans ce chapitre.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, des conditions de stabilisation non quadratiques ont été proposées pour les modèles T-S continus soumis à la saturation d'actionneur et aux perturbations externes. Permettant la synthèse de lois de commande non-PDC, SOF non quadratique, et SOF descripteur. A travers des nombreux exemples d'application, la supériorité des approches non quadratiques a été démontrées vis-à-vis des conditions LMI exprimées au chapitre 2. Cependant, les limites de cette approche non quadratique résident dans la nécessité de la détermination des bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance qu'il n'est pas toujours facile de déterminer en pratique. Ce défi a été discuté et résolu via la proposition d'une nouvelle fonction de Lyapunov non quadratique contient un intégrale sur les fonctions d'appartenances, mais cette solution reste limitée car elle nécessite la recherche par tâtonnement d'une constante supplémentaire.

Notons qu'une autre source de dégradation des performances de la boucle fermée, et parfois de déstabilisation du système commandé réside dans l'existence du retard dans la boucle de commande. Afin de contourner ce problème, des approches basées sur l'utilisation d'une fonction dite Lyapunov-Krasovskii seront proposées dans le chapitre suivant.

## Stabilisation des systèmes à retard décrits par des modèles T-S en présence de saturation d'actionneur

---

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, la stabilisation quadratique et non quadratique des modèles T-S à retard et avec saturation d'actionneurs via des fonctions de Lyapunov-Krasovskii (LKF) sont considérées. Comme cela a été évoquée dans le chapitre 1, la stabilisation des modèles T-S à retard se fait à travers deux approches différentes, la stabilisation indépendante du retard, et la stabilisation dépendante du retard. L'utilisation de l'approche indépendante permet d'établir des conditions de stabilisation ne dépend pas du retard [Ting, 2008] [Wu et al., 2010] [Fridman, 2014] [Yoneyama, 2007], et par conséquent, elles sont conservatives, Ce qu'est motivé les chercheurs à proposer d'autre solution basant sur le critère dépendante du retard [Zeng et al., 2014] [Kwon et al., 2016] [Bourahala et al., 2017] [Mahmoudabadi et al., 2017] [Yang and Tong, 2015] [Lian et al., 2017]. Ainsi la tendance aujourd'hui est vers l'élargissement d'intervalle du retard le plus possible [Selvaraj et al., 2017]. Néanmoins, il apparaît que la source du conservatisme ne vient pas seulement de l'indépendamment de retard, mais aussi de la forme de la partie quadratique de la fonction LKF. Dans ce sens, un nouveau travail a proposé des conditions de stabilité des modèles T-S à retard dépend du retard et aussi des dérivées temporelles des fonctionnes d'appartenance [Wang and Lam, 2018]. Inspiré des travaux de [Wang and Lam, 2017] [Wang and Lam, 2018], nous avons proposé des nouvelles conditions de stabilisation LMIs pour les modèles T-S à retard se basant sur les fonctions de Lyapunov polyquadratiques via l'approche indépendante et l'approche dépendent du retard. Ce chapitre est organisé comme suit : Dans un premier temps, nous allons présenter quelques définitions et notions mathématiques se servant à bien comprendre la suite de ce chapitre. En suite, la stabilisation indépendante et dépendante du retard seront traitées pour les techniques de commande PDC et SOF. Néanmoins, celles-ci ne prend pas en considération la source de conservatisme lié à la partie quadratique de la fonction LKF. De ce fait, une méthode inspirée des travaux de [Wang and Lam, 2018] sera mise en œuvre pour l'amélioration des résultats existants.

## 4.2 Préliminaires

Pour l'amélioration des résultats précédente sur la stabilisation des modèles T-S à retard soumis à la saturation d'actionneur [Ting, 2008] [Gassara et al., 2012], nous nous sommes également intéressés dans ce chapitre à la détermination des nouvelles conditions LMI pour la stabilisation des modèles T-S à retard et avec saturation d'actionneurs en se basant sur les deux approches dépendante et indépendante du retard.

### 4.2.1 Types des modèles T-S à retard

Selon le signal soumis au retard, les modèles T-S retardés se divisent en trois types :

#### 4.2.1.1 Modèles T-S à retard en état

La dynamique globale dans ce cas s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + A_{\tau_i} x(t - \tau(t)) + B_i \text{sat}(u(t))) \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\bar{\tau}, 0] \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $x(t - \tau(t))$  représente l'état retardée,  $\phi(t)$  est le vecteur des conditions initiales,  $\tau(t)$  représente le retard variable qui peut être inconnu.

#### 4.2.1.2 Modèle T-S à retard en entrée

Dans ce cas, la dynamique globale devienne :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + B_i \text{sat}(u(t)) + B_{\tau_i} \text{sat}(u(t - \tau(t)))) \quad (4.2)$$

avec,  $u(t - \tau(t))$  représente l'entrée retardée.

#### 4.2.1.3 Modèles T-S à retard en entrée et en état

Le modèle globale dans ce cas devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + A_{\tau_i} x(t - \tau(t)) + B_i \text{sat}(u(t)) + B_{\tau_i} \text{sat}(u(t - \tau(t)))) \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\bar{\tau}, 0] \end{cases} \quad (4.3)$$

**Remarque 4.1.** Nous allons considérer ici que les modèles T-S à retard en état. Pour le cas général, le lecteur intéressé peut se référer aux travaux de [Chen et al., 2009] [Saravanakumar et al., 2017] [Gu et al., 2003].

**Supposition 4.1.** Le retard ici est considéré variable dans le temps et vérifié la condition suivante :

$$0 \leq \tau \leq \bar{\tau}, \quad \dot{\tau}(t) \leq \eta, \quad \eta \geq 0$$

### 4.2.2 Objective et motivation

Motivé par le fait que moins des travaux sont intéressés par la stabilisation des modèles T-S soumis au retard et saturation d'actionneur en même temps [Ting, 2008] [Gassara et al., 2012] [Zhao and Gao, 2011], etc. Dans ce qui suit, une approche basée sur des LKF avec des termes non-quadratiques a été proposée pour améliorer les résultats obtenus précédemment dans ce contexte. Dans notre travail, on considère un système à retard décrit par des modèles T-S soumis à la saturation d'actionneur et aux perturbations externe sous forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + A_{\tau_i} x(t - \tau(t)) + B_i \sigma(u(t)) + B_{w_i} w(t)) \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_{1_i} x(t) + D_i \sigma(u(t)) + D_{w_i} w(t)) \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\bar{\tau}, 0], i \in I_r \end{cases} \quad (4.4)$$

où,  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  est le vecteur d'état,  $\sigma(u(t)) \in \mathbf{R}^m$  est l'entrée de contrôle saturée,  $w(t)$  est les perturbations externe, et  $\zeta_i(\varsigma(t))$  sont les fonctions d'appartenance,  $\phi(t)$  sont les valeurs initiales,  $A_i$ ,  $A_{\tau_i}$ ,  $B_i$ ,  $B_{w_i}$ ,  $C_{1_i}$ ,  $D_i$ , et  $D_{w_i}$  sont des matrices connues. Avec  $\sigma(u(t)) = \text{sat}(u(t))$  est donnée dans (1.79).

### 4.2.3 Outils théoriques

Dans cette section, nous allons présenter quelques notions utiles pour la détermination des conditions de stabilisation le long de ce chapitre.

**Formule de Newton-Leibniz :** Selon Newton-Leibniz, une fonction avec retard peut être écrite sous la forme suivante :

$$x(t - \tau) = x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) ds \quad (4.5)$$

**Lemme 4.1.** [Guerra et al., 2006] Pour toute matrice  $R < 0$ , et une matrice donnée  $X$ , tel que  $X^T R X < 0$ , alors  $\exists \lambda \in \mathbf{R}^+$  tel que :

$$X^T R X \leq -2\lambda X - \lambda^2 X^{-1} \quad (4.6)$$

## 4.3 Stabilisation indépendante du retard

### 4.3.1 Stabilisation quadratique via l'approche indépendante du retard

Dans un premier temps, on va rappeler la stabilisation via la commande PDC par l'approche indépendante du retard. En considérant le modèle T-S à retard en état sans perturbation externe suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{2^m} \zeta_i(\varsigma(t)) \zeta_j(\varsigma(t)) \alpha_s (A_i x(t) + A_{\tau_i} x(t - \tau(t)) + B_i (E_s K_j + \bar{E}_s H_j) x(t)) \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\bar{\tau}, 0] \end{cases} \quad (4.7)$$

avec  $E_s$  est défini dans (1.79). La loi de commande dans ce cas s'écrite de même forme que précédemment :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) K_i x(t) \quad (4.8)$$

Donc, l'objectif ici est de déterminer les gains garantissant la stabilité du système en boucle fermée (4.7). Dans ce contexte, le système (4.7) est asymptotiquement stable si la dérivée de LFK suivante est inférieure à 0 :

$$V(t) = x^T(t) P x(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s) \Pi x(s) ds \quad (4.9)$$

**Théorème 4.1.** le système T-S en boucle fermée (4.7) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice symétrique définie positive  $Q$ , une matrice positive  $S$ , des matrices  $F_j \in R^{m \times n}$ ,  $Z_j \in R^{m \times n}$  tel que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} (A_i Q + B_i E_s F_j + B_i E_s Z_j) + (*) + S & A_{\tau_i} Q \\ * & -(1 - \eta) S \end{bmatrix} < 0, \quad i \in I_r, \quad j \in I_r, \quad s \in I_{2m} \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_i^2 & z_i^j \\ * & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in I_m, \quad j \in I_r \quad (4.11)$$

avec  $K_j = F_j Q^{-1}$

### Démonstration

Considérons la fonction LKF (4.9), le système (4.7) est asymptotiquement stable si  $\dot{V}(t) < 0$ , alors :

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) + x^T(t) \Pi x(t) - (1 - \dot{\tau}) x^T(t - \tau) \Pi x(t - \tau) < 0 \quad (4.12)$$

Remplaçant  $\dot{x}(t)$  dans (4.12), on aura

$$\dot{V}(t) = x^T(t) \left( A_\zeta^T P + (E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta)^T B_\zeta^T P + (*) + \Pi \right) x(t) + x^T(t - \tau) P A_{\tau_\zeta}^T x(t) + x^T(t) P A_{\tau_\zeta} x(t - \tau) - (1 - \dot{\tau}) x^T(t - \tau) \Pi x(t - \tau) \quad (4.13)$$

et on peut écrit

$$\dot{V}(t) = \bar{x}^T(t) \bar{A}_{\zeta\zeta} \bar{x}(t) \quad (4.14)$$

avec :

$$\bar{A}_{\zeta\zeta} = \begin{bmatrix} A_\zeta^T P + (E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta)^T B_\zeta^T P + (*) + \Pi & * \\ A_{\tau_\zeta}^T P & -(1 - \dot{\tau}) \Pi \end{bmatrix}$$

multipliant à gauche et à droite par  $\text{diag}(Q, Q)$  où  $Q = P^{-1}$ ,  $\bar{A}$  devienne

$$\begin{bmatrix} (A_i Q + B_i E_s F_j + B_i E_s Z_j) + (*) + S & A_{\tau_i} Q \\ * & -(1 - \dot{\tau}) S \end{bmatrix} < 0 \quad (4.15)$$

avec  $S = Q \Pi Q$  La condition (4.11) est obtenu de la même façon que (2.45).

**Remarque 4.2.** La synthèse de la commande SOF dans ce cas se fait de la même façon que la



commande PDC avec remplacement de la commande par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(z) K_i C x(t) \quad (4.16)$$

La détermination des conditions LMI dans ce cas repose soit sur la minimisation d'un variable supplémentaire (voir les chapitres précédents), ou par l'approche descripteur.

**Remarque 4.3.** Les travaux présentés dans ce chapitre se basant sur une loi de commande saturante et une représentation polytopique de la non linéarité de saturation. Dans le cadre de la synthèse d'une commande contrainte, les LMIs peuvent être obtenues en tenant compte la définition d'une loi de commande contrainte (2.8) et en suivant les mêmes étapes indiqués dans ce chapitre.

**Remarque 4.4.** La commande PDC quadratique synthétisée est pour les modèles T-S à retard sans présence des perturbations externe  $w(t) = 0$ . Le cas où  $w(t) \neq 0$ , sera traité au prochaines sections.

### 4.3.2 Stabilisation non quadratique via l'approche indépendante du retard

Dans ce partie, on va présenter des nouvelles conditions de stabilisation des modèles T-S a retard basant sur le critère indépendante. La contribution envisagé dans cette section consiste à élaborer des conditions LMI indépendant du retard mais sont dépendent de dérivée des fonctions d'activation pour réduire le conservatisme. Pour atteindre cet objectif, on définit une nouvelle fonction LKF comme suit :

$$V(t) = x^T(t) P_{\zeta} x(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s) \Pi x(s) ds \quad (4.17)$$

avec :  $P_{\zeta} = \left( \sum_{i=1}^r \zeta_i(t) P_i \right)^{-1}$  est une candidate de Lyapunov non quadratique.

#### 4.3.2.1 3.2.1. Stabilisation par la commande PDC

En tenant compte le système en boucle fermée (4.4) sans perturbations externes. La détermination des gains de la commande (4.8) repose sur l'utilisation de la fonction LKF (4.17). Les conditions de stabilisation obtenues sont résumées dans le théorème suivant :

**Théorème 4.2.** [Nasri et al., 2019a] Pour tout  $k = 1, \dots, r-1$ ;  $\dot{\zeta}_k(t) \geq \Phi_k$ , le système en boucle fermée (4.7) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices  $Q_{\ell} = Q_{\ell}^T > 0$ ,  $S > 0$ , des matrices  $F_j \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $Z_j \in \mathbf{R}^{m \times n}$  telles que les LMI suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} (A_i Q_{\ell} + B_i E_s F_j + B_i E_s Z_j) + (*) + S - \sum_{k=1}^{r-1} \Phi_k (Q_k - Q_r) & A_{\tau_i} Q_{\ell} \\ * & -(1-\eta) S \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

$$i \in I_r, j \in I_r, \ell \in I_r, s \in I_{2m}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_i^2 & z_i^j \\ \rho & Q_{\ell} \\ * & \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in I_m, j \in I_r, \ell \in I_r \quad (4.19)$$

$$Q_k - Q_r \geq 0 \quad (4.20)$$

avec  $K_j = F_j Q_\zeta^{-1}$ ,  $Q_\zeta^{-1} = \left( \sum_{i=1}^r \zeta_i(t) Q_i \right)^{-1}$

### Démonstration

Nous considérons la fonction de LKF (4.17), le système (4.7) est asymptotiquement stable si  $\dot{V}(t) < 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = \dot{x}^T(t) P_\zeta x(t) + x^T(t) P_\zeta \dot{x}(t) + x^T(t) \dot{P}_\zeta x(t) + x^T(t) \Pi x(t) \\ + (1 - \dot{\tau}) x^T(t - \tau) \Pi x(t - \tau) < 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

En remplaçant  $\dot{x}(t)$  dans (4.21), on aura :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = x^T(t) \left( A_\zeta^T P_\zeta + (E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta)^T B_\zeta^T P_\zeta + (*) + \Pi + \dot{P}_\zeta \right) x(t) \\ + x^T(t - \tau) P_\zeta A_{\tau_\zeta}^T x(t) + x^T(t) P_\zeta A_{\tau_\zeta} x(t - \tau) - (1 - \dot{\tau}) x^T(t - \tau) \Pi x(t - \tau) \end{aligned} \quad (4.22)$$

et on peut écrire

$$\dot{V}(t) = \bar{x}^T(t) \bar{A}_{\zeta\zeta\zeta} \bar{x}(t) \quad (4.23)$$

$$\text{avec : } \bar{A}_{\zeta\zeta\zeta} = \begin{bmatrix} A_\zeta^T P_\zeta + (E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta)^T B_\zeta^T P_\zeta + (*) + \Pi + \dot{P}_\zeta & * \\ A_{\tau_\zeta}^T P_\zeta & - (1 - \dot{\tau}) \Pi \end{bmatrix}$$

En multipliant à gauche et à droite par  $\text{diag}(Q_\zeta, Q_\zeta)$ ,  $\bar{A}$  devienne :

$$\Delta_{\zeta\zeta\zeta\zeta} = \begin{bmatrix} (A_\zeta Q_\zeta + B_\zeta E_\zeta F_\zeta + B_\zeta E_\zeta Z_\zeta) + (*) + S - \dot{Q}_\zeta & A_{\tau_\zeta} Q_\zeta \\ * & - (1 - \dot{\tau}) S \end{bmatrix} < 0 \quad (4.24)$$

avec :  $S = Q_\zeta \Pi Q_\zeta$  Selon [Bouarar et al., 2010],  $\dot{Q}_\zeta$  peut être approchée par :

$$\dot{Q}_\zeta \geq \sum_{k=1}^{r-1} \Phi_k (Q_k - Q_r) \quad (4.25)$$

donc,  $\Delta_{\zeta\zeta\zeta\zeta}$  est satisfaite si  $\Delta_{ijls} < 0$ .

La condition (4.19) est obtenue de la même façon que (3.10).

### 4.3.2.2 Stabilisation $H_\infty$ non quadratique par la commande PDC indépendante du retard

Dans cette section, on considère la classe de systèmes T-S retardé avec perturbation externe et saturation d'actionneur définie dans (4.4). En prenant le critère  $H_\infty$  défini dans (1.58), les conditions de stabilisation du système (4.4), sont résumées dans le théorème suivant :

**Théorème 4.3.** Pour tout  $k = 1, \dots, r - 1$ ,  $\dot{\zeta}_k(\zeta(t)) \geq \Phi_k$ , le système en boucle fermée (4.4), est asymptotiquement stable avec un taux d'atténuation des perturbations  $\gamma$ . S'il existe des matrices  $Q_\ell = Q_\ell^T > 0$ ,  $S = S^T > 0$ , et des matrices  $F_j \in R^{m \times n}$ ,  $Z_j \in R^{m \times n}$ , telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \Delta_{ijls} < 0 \\ i \in I_r, j \in I_r, \ell \in I_r, s \in I_{2m} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & z_i^j \\ * & Q_\ell \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in I_m, \quad j \in I_r, \quad \ell \in I_r \quad (4.27)$$

$$Q_k - Q_r \geq 0 \quad (4.28)$$

avec :

$$\Delta_{ij\ell s} = \begin{bmatrix} \Delta(1,1) & * & * & * \\ Q_\ell A_{\tau_i}^T & -(1-\eta)S & * & * \\ B_{w_i}^T & 0 & -\gamma^2 I & * \\ C_{1_i} Q_\ell + D_i (E_s F_j + \bar{E}_s Z_j) & 0 & D_{w_i} & -I \end{bmatrix}$$

$$\Delta(1,1) = (A_i Q_\ell + B_i E_s F_j + B_i \bar{E}_s Z_j) + (*) + S - \sum_{k=1}^{r-1} \Phi_k (Q_k - Q_r)$$

$$K_j = F_j Q_\zeta^{-1}, \quad Q_\zeta = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) Q_i$$

### Démonstration

Par l'utilisation du critère  $H_\infty$  et la fonction LKF définie dans (4.17), le système en boucle fermée (4.4) est asymptotiquement stable si :

$$\dot{V}(t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0 \quad (4.29)$$

La dérive de la fonction LKF (4.17) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \dot{x}^T(t) P_\zeta x(t) + x^T(t) P_\zeta \dot{x}(t) + x^T(t) \dot{P}_\zeta x(t) + x^T(t) \Pi x(t) \\ & - (1-\dot{\tau}) x^T(t-\tau) \Pi x(t-\tau) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Utilisant (4.8) et (4.4), on peut écrire

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & x^T(t) \left( \left( A_\zeta^T P_\zeta + (E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta) B_\zeta^T P_\zeta \right) + (*) + \dot{P}_\zeta + \Pi \right) x(t) \\ & + x^T(t-\tau) P_\zeta A_{\tau_\zeta}^T x(t) + x^T(t) P_\zeta A_{\tau_\zeta} x(t-\tau) - (1-\dot{\tau}) x^T(t-\tau) \Pi x(t-\tau) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sous forme compacte

$$\dot{V}(t) = \bar{x}^T(t) \bar{A}_{\zeta\zeta\zeta} \bar{x}(t) \quad (4.32)$$

avec :

$$\bar{A}_{\zeta\zeta\zeta} = \begin{bmatrix} \left( A_\zeta^T P_\zeta + (E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta) B_\zeta^T P_\zeta \right) + (*) + \Pi + \dot{P}_\zeta & * \\ A_{\tau_\zeta}^T P_\zeta & -(1-\eta) \Pi \end{bmatrix},$$

nous appliquons le critère  $H_\infty$ , on obtient :

$$\dot{V}(t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \Gamma_\zeta \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.33)$$

$$\text{où : } \Gamma_\zeta = \begin{bmatrix} \left( A_\zeta^T P_\zeta + (E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta) B_\zeta^T P_\zeta \right) + (*) + \Pi + \dot{P}_\zeta & * & * & * \\ A_{\tau_\zeta}^T P_\zeta & -(1-\eta) \Pi & * & * \\ B_{w_\zeta}^T P_\zeta & 0 & -\gamma I & * \\ C_{1_\zeta} + D_\zeta (E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta) & 0 & D_{w_\zeta} & -I \end{bmatrix}$$

Multipliant à gauche et à droit par  $\Delta = \text{diag}(Q_\zeta, Q_\zeta, I, I)$  avec le changement de variable :  $Q_\zeta = P_\zeta^{-1}$ ,  $F_j = K_j Q_\zeta$ ,  $Z_j = H_j Q_\zeta$ ,  $S = Q_\zeta \Pi Q_\zeta$  on arrive à :

$$\Delta \Gamma_\zeta \Delta = \begin{bmatrix} (A_\zeta Q_\zeta + B_\zeta E_\zeta F_\zeta + B_\zeta \bar{E}_\zeta Z_\zeta) + (*) + S + Q_\zeta \overbrace{Q_\zeta^{-1}}^\bullet Q_\zeta & * & * & * \\ Q_\zeta A_{\tau_\zeta}^T & -(1-\eta)S & * & * \\ B_{w_\zeta}^T & 0 & -\gamma^2 I & * \\ C_1 \zeta Q_\zeta + D_\zeta (E_\zeta F_\zeta + \bar{E}_\zeta Z_\zeta) & 0 & D_{w_\zeta} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.34)$$

Comme nous avons dit précédemment,  $Q_\zeta \overbrace{Q_\zeta^{-1}}^\bullet Q_\zeta = -\dot{Q}_\zeta$ , ça nous conduit à

$$\dot{Q}_\zeta \geq \sum_{k=1}^{r-1} \Phi_k (Q_k - Q_r) \quad (4.35)$$

En utilisant cette approximation avec l'inégalité (4.34), la condition (4.26) est obtenue. La condition (4.27) est obtenue de la même façon que (4.19).

#### Exemple 4.1. Stabilisation en profondeur d'un robot sous-marin

Nombreuses études ont été développées diverses stratégies de contrôle de la profondeur des véhicules sous-marin telles que : contrôleur de mode coulissant [Guzmán et al., 2018], contrôleur flou [Ma et al., 2018], contrôleur adaptatif [Tabataba'i-Nasab and Moosavian, 2019], etc. Parmi les stratégies de contrôle de profondeur, les approches basées sur les modèles de Takagi-Sugeno ont été largement utilisées [Zhang et al., 2016] [Silvestre and Pascoal, 2007], que ce soit, (PDC) ou (SOF). Le but de cette section est de valider les lois de commande proposées dans cette partie en tenant compte des différentes contraintes relatives au domaine des engins sous-marin : le retard, la saturation d'actionneur, et les perturbations externes.

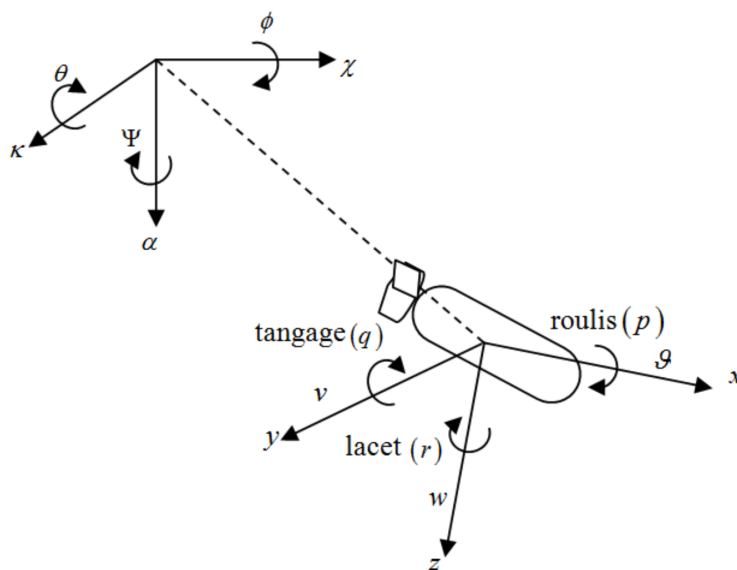


Figure 4.1: References de UUV.

Le système de coordonnées fixe du corps et le système de coordonnées de la terre sont illustrés à la figure 4.1, où,  $x, y, z$ , sont la position cartésienne de l'UUV, et  $\phi, \theta, \psi$  sont l'altitude du véhicule par rapport au système de coordonnées terrestre fixe.  $\vartheta, v, w$  sont les vitesses de la poussée, le balancement, et le soulèvement.  $p, q, r$  sont les vitesses angulaires (roulis, tangage, lacet).

Sur la base des travaux de [Zhang et al., 2016], le modèle mathématique du système de contrôle de profondeur peut être simplifié comme suit :

$$m [\dot{w} - \vartheta q - x_G \dot{q} - z_G q^2] = Z_{\dot{q}} \dot{q} + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_{\vartheta q} \vartheta q + Z_{\vartheta w} \vartheta w + (\bar{W} - B_0) \cos(\theta) + Z_{\vartheta \vartheta} \vartheta^2 \delta_s \quad (4.36)$$

$$I_{yy} + m [x_G (\vartheta q - \dot{w}) + z_G w q] = M_{\dot{q}} \dot{q} + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_{\vartheta q} \vartheta q + M_{\vartheta w} \vartheta w - (x_G \bar{W} - x_B B_0) \cos(\theta) - (z_G \bar{W} - z_B B_0) \sin(\theta) + M_{\vartheta \vartheta} \vartheta^2 \delta_s \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= w \cos(\theta) - \vartheta \sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= q \end{aligned} \quad (4.38)$$

où  $(x_G, y_G, z_G)$  et  $(x_B, y_B, z_B)$  sont les centres de gravité et la flottabilité.  $I_{yy}, Z_{\{\cdot\}}, M_{\{\cdot\}}$  sont les paramètres constants de l'UUV,  $B_0$  est la flottabilité de l'UUV,  $\bar{W}$  est le poids de l'UUV,  $\vartheta$  est la vitesse de l'UUV,  $\delta_s$  est l'angle d'hydroplane.

Maintenant, on définit l'erreur entre la profondeur et sa valeur désirée comme suit :

$$z_e = z_d - z \quad (4.39)$$

Avec  $z_d$  est la valeur de profondeur souhaitée. Supposant maintenant que :

- $(x_G, y_G, z_G) = (x_B, y_B, z_B) = 0$
- L'effet de  $w$  sur la profondeur est négligeable
- $\sin(\theta) = \theta, \cos(\theta) = 1$

Ainsi, nous pouvons donner le modèle mathématique du système de contrôle de profondeur comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_e(t) = \vartheta(t) \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) = \theta(t) \\ \dot{q}(t) = a(t) q(t) + b(t) \delta_s(t) \end{cases} \quad (4.40)$$

avec :  $a(t) = \frac{M_{\vartheta q} \vartheta(t)}{I_{yy} - M_{\dot{q}}}, b(t) = \frac{M_{\vartheta \vartheta} \vartheta^2(t)}{I_{yy} - M_{\dot{q}}}$

posant  $x = \begin{bmatrix} z_e & \theta & q \end{bmatrix}^T$  alors

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) \delta_s(t) \quad (4.41)$$

$$\text{où } A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Pour introduire le retard, en prenant le modèle retardé de NCS (Network Control Systems) dans [Lihua et al., 2008], le modèle mathématique de contrôle de profondeur avec retard peut être exprimé

comme suit [Zhang et al., 2016] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{A}_\tau x(t - \tau) + B\delta_s(t) + B_w w(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (4.42)$$

où  $\tilde{A} = \beta A(t)$  et  $\tilde{A}_\tau = (1 - \beta) A(t)$ , et  $\beta$  est le coefficient constant du système de contrôle de profondeur,  $W(t)$  est les perturbation externes, et  $\phi(t)$  est le vecteur des valeurs initiales.

Le système (4.42) peut être décrire par un modèle T-S comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \zeta_i(\varsigma(t)) \left( \tilde{A}_i x(t) + \tilde{A}_{\tau_i} x(t - \tau) + B \text{sat}(\delta_s(t)) + B_w w(t) \right) \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = C_1 x(t) \end{cases} \quad (4.43)$$

où  $\zeta_i(\varsigma(t))$  sont les fonctions d'appartenance définies comme suit :

nous avons,

$$\begin{aligned} V_{1 \min} \leq \vartheta(t) = V_1 \leq V_{1 \max} \\ V_{2 \min} \leq \vartheta^2(t) = V_2 \leq V_{2 \max} \end{aligned} \quad (4.44)$$

En utilisant l'approche du secteur non linéaire, on obtient :

$$F_{11} = \frac{V_1 - V_{1 \min}}{V_{1 \max} - V_{1 \min}}, \quad F_{12} = 1 - F_{11}, \quad F_{21} = \frac{V_2 - V_{2 \min}}{V_{2 \max} - V_{2 \min}}, \quad F_{22} = 1 - F_{21} \quad (4.45)$$

Par conséquent, les fonctions d'appartenances seront

$$\zeta_1 = F_{11}F_{21}, \quad \zeta_2 = F_{11}F_{22}, \quad \zeta_3 = F_{12}F_{21}, \quad \zeta_4 = F_{12}F_{22} \quad (4.46)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & \beta V_{1 \max} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta \frac{M_{\vartheta q}}{I_{yy} - M_{\dot{q}}} V_{1 \max} \end{bmatrix}; & \tilde{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \beta V_{1 \max} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta \frac{M_{\vartheta q}}{I_{yy} - M_{\dot{q}}} V_{1 \max} \end{bmatrix}; \\ \tilde{A}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & \beta V_{1 \min} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta \frac{M_{\vartheta q}}{I_{yy} - M_{\dot{q}}} V_{1 \min} \end{bmatrix}; & \tilde{A}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & \beta V_{1 \min} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta \frac{M_{\vartheta q}}{I_{yy} - M_{\dot{q}}} V_{1 \min} \end{bmatrix}; \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_{\vartheta \vartheta}}{I_{yy} - M_{\dot{q}}} V_{2 \max} \end{bmatrix}; & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_{\vartheta \vartheta}}{I_{yy} - M_{\dot{q}}} V_{2 \min} \end{bmatrix}; \\ B_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_{\vartheta \vartheta}}{I_{yy} - M_{\dot{q}}} V_{2 \max} \end{bmatrix}; & B_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_{\vartheta \vartheta}}{I_{yy} - M_{\dot{q}}} V_{2 \min} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{\tau_1} &= \begin{bmatrix} 0 & (1-\beta)V_{1\max} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (1-\beta)\frac{M_{\theta q}}{I_{yy}-M_{\dot{q}}}V_{1\max} \end{bmatrix}; \\ \tilde{A}_{\tau_2} &= \begin{bmatrix} 0 & (1-\beta)V_{1\max} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (1-\beta)\frac{M_{\theta q}}{I_{yy}-M_{\dot{q}}}V_{1\max} \end{bmatrix}; \\ \tilde{A}_{\tau_3} &= \begin{bmatrix} 0 & (1-\beta)V_{1\min} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (1-\beta)\frac{M_{\theta q}}{I_{yy}-M_{\dot{q}}}V_{1\min} \end{bmatrix}; \\ \tilde{A}_{\tau_4} &= \begin{bmatrix} 0 & (1-\beta)V_{1\min} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (1-\beta)\frac{M_{\theta q}}{I_{yy}-M_{\dot{q}}}V_{1\min} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Appliquant les résultats du théorème 4.3, avec les données suivantes : La profondeur souhaitée a été choisie à  $-5$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$ , le signal d'entrée (l'angle d'hydroplane) est supposée limitée entre  $(-0.6 \text{ rad})$  et  $(0.6 \text{ rad})$ , les paramètres sont donnés dans [Zhang et al., 2016]. La résolution des conditions de stabilisation dans théorème 4.3 par MATLAB LMI Toolbox, nous donne :

**Tableau 4.1:** Paramètres du contrôleur PDC non quadratique indépendante

$$\begin{aligned}Q_1 &= \begin{bmatrix} 1.6633 & -1.0037 & 1.4282 \\ -1.0037 & 0.8293 & -1.7818 \\ 1.4282 & -1.7818 & 5.1649 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 1.2313 & -0.5539 & 0.6288 \\ -0.5539 & 0.3264 & -0.5269 \\ 0.6288 & -0.5269 & 1.1283 \end{bmatrix}, \\ Q_3 &= \begin{bmatrix} 1.1796 & -1.0190 & 0.9322 \\ -1.0190 & 1.2685 & -1.9412 \\ 0.9322 & -1.9412 & 4.1856 \end{bmatrix}, Q_4 = \begin{bmatrix} 0.8378 & -0.3129 & 0.0522 \\ -0.3129 & 0.2405 & -0.1472 \\ 0.0522 & -0.1472 & 0.3496 \end{bmatrix}, \\ F_1 = F_2 = F_3 = F_4 &= [-0.0607 \quad 0.0850 \quad 24.3951], \\ \gamma &= 1.1348.\end{aligned}$$


---

Les perturbations externes sont choisies de la forme  $\varphi(t) = 0.5 \sin(\frac{10}{\pi}t) + 0.3 \sin(\frac{6}{\pi}t)$

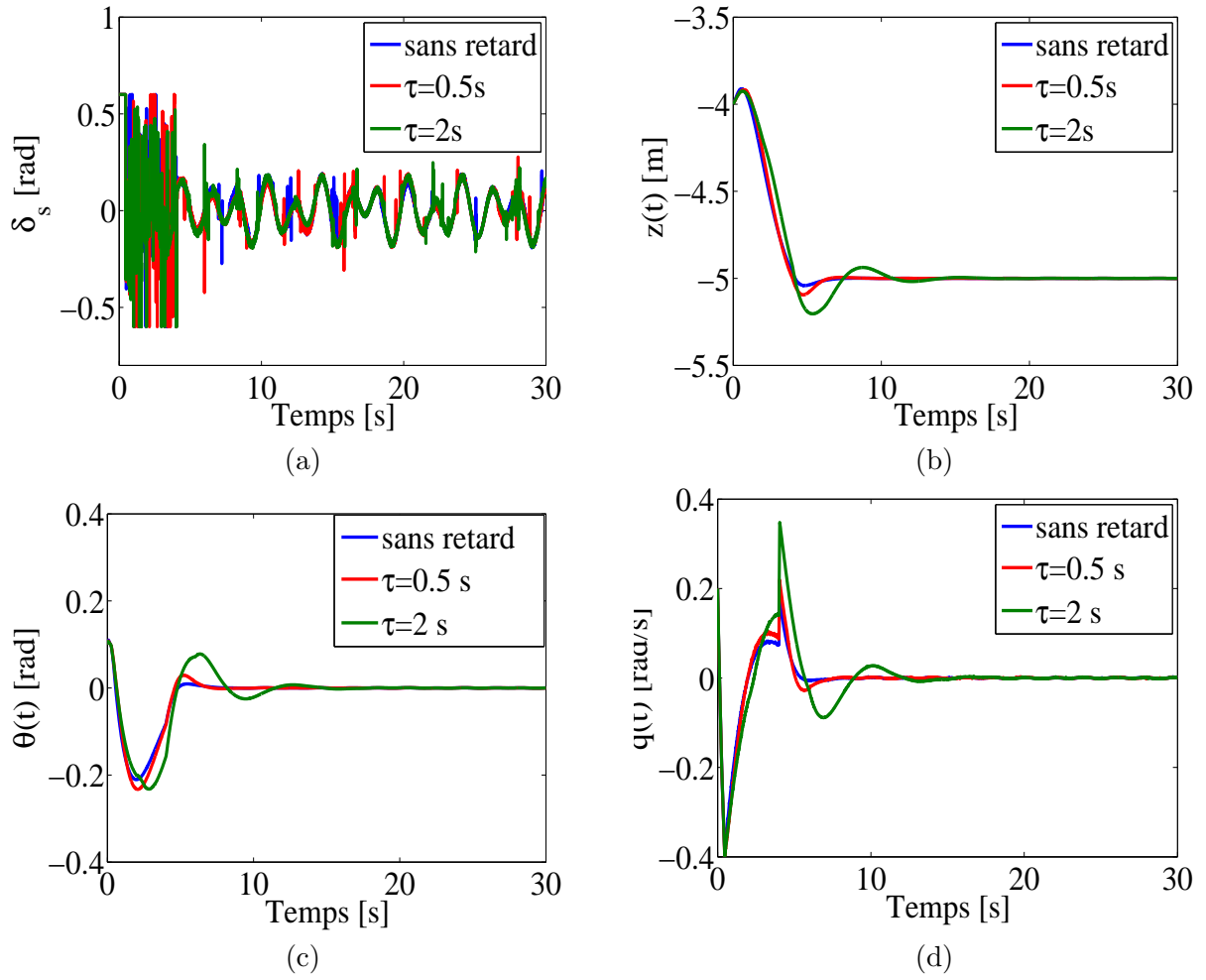
Les résultats obtenus sont illustrés à la figure 4.2 (a) Pour l'entrée de commande, à figure 4.2 (b) pour la profondeur  $z(t)$ , à la figure 4.2 (c) pour l'angle de tangage et à la figure 4.2 (d) pour la vitesse angulaire.

Les 4.2 (a) à (d) montrent que l'approche proposée garantit la stabilisation en profondeur du UUV malgré la présence de la saturation d'actionneur, le retard et les perturbations externes.

#### 4.3.2.3 Stabilisation par la commande SOF

Considérons la classe des systèmes flous avec saturation d'actionneur, retard variable dans le temps et perturbations externes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) [A_i x(t) + A_{\tau_i} x(t-\tau) + B_i \sigma(t) + B_{wi} w(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) [C_i x(t) + D_i \sigma(t) + G_{wi} w(t)] \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (4.47)$$



**Figure 4.2:** Réponses du système : (a). signal d'entrée saturé. (b). profondeur. (c) Le signal d'angle de tangage. (d). la vitesse angulaire.

où  $w(t)$  est les perturbation externe,  $A_i$ ,  $A_{\tau_i}$ ,  $B_i$ ,  $B_{wi}$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ , et  $G_{wi}$  sont des matrices connues.

Pour éviter l'apparition de chevauchements de termes entre les matrices d'espace à états et celles du contrôleur, ce qui conduit à des conditions LMI non strictes. Une approche par descripteur a été utilisée pour réécrire le système en boucle fermée (4.47), avec l'utilisation de la représentation polytopique de la saturation (1.79).

Pour réécrire le système (4.47) sous forme de descripteur, la représentation suivante est exploitée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (A_i x(t) + A_{\tau_i} x(t-\tau) + B_i \sigma(t) + B_{wi} w(t)) \\ 0\dot{y}(t) = -y(t) + \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) (C_i x(t) + D_i \sigma(t) + G_{wi} w(t)) \\ 0\dot{\sigma}(t) = -\sigma(t) + sat(u(t)) \end{cases} \quad (4.48)$$

La loi de commande dans ce cas est de forme non-PDC SOF :

$$u(t) = \left( \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) K_i \right) \left( \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) \Psi_5^i \right)^{-1} y(t) \quad (4.49)$$



De (4.48) et (4.49), le système augmenté est défini comme suit :

$$\ddot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_{\zeta\zeta\zeta}\tilde{x}(t) + \tilde{A}_{\tau\zeta}\tilde{x}(t-\tau) + \tilde{B}_{w\zeta}\tilde{w}(t) \quad (4.50)$$

$$\text{où : } \tilde{\Xi} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{\zeta\zeta\zeta} = \begin{bmatrix} A_{\zeta\zeta\zeta} & 0 & B_{\zeta} \\ C_{\zeta} & -I & D_{\zeta} \\ E_{\zeta}H_{\zeta} & (E_{\zeta}K_{\zeta})(\Psi_5^{\zeta})^{-1} & -I \end{bmatrix}, \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{\tau\zeta} = \begin{bmatrix} A_{\tau\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B}_w = \begin{bmatrix} B_{w\zeta} \\ G_{w\zeta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) K_j = K_{\zeta}, \quad \sum_{i=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) A_i = A_{\zeta}, \quad \sum_{i=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) A_{\tau_i} = A_{\tau\zeta}, \quad \sum_{i=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) B_i = B_{\zeta},$$

$$\sum_{i=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) C_i = C_{\zeta}, \quad \sum_{i=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) D_i = D_{\zeta}, \quad \sum_{s=1}^{2^m} \eta_s(\zeta(t)) E_s = E_{\zeta}, \quad \sum_{i=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) \Psi_5^i = \Psi_5^{\zeta}.$$

Dans le cas où les perturbations externes sont nulles, les conditions de stabilisation sont résumées dans le théorème suivant :

**Théorème 4.4.** Considérant pour tout  $k = 1 \dots r-1$ ,  $\Phi_k$  limites inférieures de  $\dot{\zeta}_k(\varsigma(t))$  ( $\Phi_k \leq \dot{\zeta}_k(\varsigma(t))$ ), alors pour un scalaire positif donné  $\rho$ , le système flou T-S retardé (4.47) avec  $W(t) = 0$  est, asymptotiquement stable via la loi de commande SOF non quadratique (4.49), s'il existe des matrices symétrique définie positive  $\Psi_1^{\ell}$ , des matrices définies positives  $\Psi_5^{\ell}$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , , des matrices  $\Psi_7^{\ell}$ ,  $\Psi_8^{\ell}$ ,  $\Psi_9^{\ell}$ ,  $K_j$ , et  $Z_j$ , de sorte que les conditions LMIs suivantes soient satisfis :

$$\Delta_{ijls} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{ijls} & * \\ \Lambda_{i\ell} & -(1-\eta)\tilde{S} \end{bmatrix} < 0 \quad i \in I_r, j \in I_r, \ell \in I_r, s \in I_{2^m} \quad (4.51)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & z_i^j \\ * & \Psi_1^{\ell} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.52)$$

$$i \in I_m, j \in I_r, \ell \in I_r$$

$$\Psi_1^k - \Psi_1^r \geq 0 \quad (4.53)$$

où :

$$\Upsilon_{ijls} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{ijls}(1,1) & * & * \\ \Upsilon_{ijls}(2,1) & -\Psi_5^{\ell T} - \Psi_5^{\ell} + D\Psi_8^{\ell} & * \\ \Upsilon_{ijls}(3,1) & \Psi_9^{\ell T} D_i^T + E_s K_j - \Psi_8^{\ell} & -\Psi_9^{\ell T} - \Psi_9^{\ell} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_{ijls}(1,1) = \Psi_1^{\ell T} A_i^T + A_i \Psi_1^{\ell} + B_i \Psi_7^{\ell} + \Psi_7^{\ell T} B_i^T + S_1 - \sum_{k=1}^{r-1} \Phi_k (\Psi_1^k - \Psi_1^r)$$

$$\Upsilon_{ijls}(2,1) = \Psi_8^{\ell T} B_i^T + C_i \Psi_1^{\ell} + D_i \Psi_7^{\ell}$$

$$\Upsilon_{ijls}(3,1) = E_s Z_j + \Psi_9^{\ell T} B_i^T - \Psi_7^{\ell}$$

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \Psi_1^{\zeta T} \Pi_1 \Psi_1^{\zeta}, \quad S_2 = \Psi_5^{\zeta T} \Pi_2 \Psi_5^{\zeta}, \quad S_3 = \Psi_9^{\zeta T} \Pi_3 \Psi_9^{\zeta}$$

$$\Lambda_{i\ell} = \Omega(2,2) \tilde{A}_{\tau_i}$$

$$Z_j = H_j \Psi_1^{\ell}$$

$$\rho = 1 + \gamma^2 \kappa^2$$

### Démonstration

Définissons la fonction de Lyapunov-Krasovskii comme :

$$v(t) = \tilde{x}^T(t) \tilde{\Xi} \left( \tilde{\Psi}_\zeta \right)^{-1} \tilde{x}(t) + \int_{t-\tau}^t \tilde{x}(s) \tilde{\Pi} \tilde{x}(s) ds \quad (4.54)$$

avec :  $\tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

le système (4.47) est stable si  $\dot{V}(t) < 0$ , autrement dit :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^T(t) \tilde{\Xi} \left( \tilde{\Psi}_\zeta \right)^{-1} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{\Xi} \left( \tilde{\Psi}_\zeta \right)^{-1} \dot{\tilde{x}}(t) + \tilde{x}^T(t) \overbrace{\tilde{\Xi} \left( \tilde{\Psi}_\zeta \right)^{-1}}^{\bullet} \tilde{x}(t) \\ + \tilde{x}^T(t) \tilde{\Pi} \tilde{x}(t) - (1 - \dot{\tau}) \tilde{x}^T(t - \tau) \tilde{\Pi} \tilde{x}(t - \tau) < 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

On considère maintenant le terme  $\sum = \tilde{x}^T(t - \tau) R \tilde{x}(t - \tau) \geq 0$ , avec :  $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_3 \end{bmatrix}$ ,

si ((4.55) +  $\sum$ ) < 0, alors l'inégalité (4.55) est vérifiée. Donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^T(t) \tilde{\Xi} \left( \tilde{\Psi}_\zeta \right)^{-1} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{\Xi} \left( \tilde{\Psi}_\zeta \right)^{-1} \dot{\tilde{x}}(t) + \tilde{x}^T(t) \overbrace{\tilde{\Xi} \left( \tilde{\Psi}_\zeta \right)^{-1}}^{\bullet} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{\Pi} \tilde{x}(t) \\ - (1 - \dot{\tau}) \tilde{x}^T(t - \tau) \left( \tilde{\Pi} + R \right) \tilde{x}(t - \tau) < 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Elle est connue pour les systèmes de descripteurs que :

$$\tilde{\Xi} \left( \tilde{\Psi}_\zeta \right)^{-1} = \left( \tilde{\Psi}_\zeta \right)^{-T} \tilde{\Xi} > 0 \quad (4.57)$$

en multipliant à gauche et à droite par  $\tilde{\Psi}_\zeta^T$  et  $\tilde{\Psi}_\zeta$  on aura :

$$\tilde{\Psi}_\zeta^T \tilde{\Xi} = \tilde{\Xi} \tilde{\Psi}_\zeta > 0 \quad (4.58)$$

Nous choisissons  $\tilde{\Psi}_\zeta$  comme :  $\tilde{\Psi}_\zeta = \begin{bmatrix} \Psi_1^\zeta & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_5^\zeta & 0 \\ \Psi_7^\zeta & \Psi_8^\zeta & \Psi_9^\zeta \end{bmatrix}$

avec :

$$\Psi^{\zeta_1} = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) \Psi_1^i > 0, \quad \Psi^{\zeta_5} = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) \Psi_5^i > 0,$$

$$\Psi^{\zeta_7} = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) \Psi_7^i, \quad \Psi^{\zeta_8} = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) \Psi_8^i,$$

$$\Psi^{\zeta_9} = \sum_{j=1}^r \zeta_j(\varsigma(t)) \Psi_9^i$$

Cela donne :

$$\dot{v}(t) = \bar{x}^T \bar{A} \bar{x} \quad (4.59)$$

$$\text{avec : } \bar{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\zeta\zeta\zeta}^T (\tilde{\Psi}_\zeta)^{-1} + (\tilde{\Psi}_\zeta)^{-1} \tilde{A}_{\zeta\zeta\zeta} + \tilde{\Xi} \overbrace{(\tilde{\Psi}_\zeta)^{-1}}^{\bullet} + \tilde{\Pi} & * \\ \tilde{A}_{\tau\zeta}^T (\tilde{\Psi}_\zeta)^{-1} & -(1-\eta)\tilde{R} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}(t-\tau) \end{bmatrix}$$

où :  $\tilde{R} = \tilde{\Pi} + R$ ,  $\alpha \leq 1 - \dot{\tau}$

Par conséquence, le système en boucle fermée est stable si  $\bar{A} < 0$ .

Multiplions par  $\Omega^T = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_\zeta^T & 0 \\ 0 & \text{diag}(\tilde{\Psi}_\zeta^T(1,1), \tilde{\Psi}_\zeta^T(2,2), \tilde{\Psi}_\zeta^T(3,3)) \end{bmatrix}$  à gauche et

$\Omega = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_\zeta & 0 \\ 0 & \text{diag}(\tilde{\Psi}_\zeta(1,1), \tilde{\Psi}_\zeta(2,2), \tilde{\Psi}_\zeta(3,3)) \end{bmatrix}$  à droite, puisque  $\tilde{\Psi}_\zeta^T \tilde{\Xi} = \tilde{\Xi} \tilde{\Psi}_\zeta > 0$ , on aura :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_\zeta^T \tilde{A}_{\zeta\zeta\zeta}^T + \tilde{A}_{\zeta\zeta\zeta} \tilde{\Psi}_\zeta + \tilde{\Xi} \tilde{\Psi}_\zeta \overbrace{(\tilde{\Psi}_\zeta)^{-1}}^{\bullet} \tilde{\Psi}_\zeta + \tilde{\Psi}_\zeta^T \tilde{\Pi} \tilde{\Psi}_\zeta & * \\ \Omega(2,2) \tilde{A}_{\tau\zeta}^T & -(1-\eta)\tilde{S} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.60)$$

C'est bien connu que :

$$\tilde{\Psi}_\zeta \overbrace{(\tilde{\Psi}_\zeta)^{-1}}^{\bullet} \tilde{\Psi}_\zeta = -\dot{\Psi}_\zeta$$

Ainsi, l'équation précédente peut être décrite comme suit :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{\zeta\zeta\zeta\zeta} & * \\ \Omega(2,2) \tilde{A}_\tau^T & -(1-\eta)\tilde{S} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.61)$$

$$\Upsilon_{\zeta\zeta\zeta\zeta} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{\zeta\zeta\zeta\zeta}(1,1) & * & * \\ \Upsilon_{\zeta\zeta\zeta\zeta}(2,1) & -\Psi_5^{\zeta T} - \Psi_5^\zeta + D_\zeta \Psi_8^\zeta & * \\ \Upsilon_{\zeta\zeta\zeta\zeta}(3,1) & \Psi_9^{\zeta T} D_\zeta^T + E_\zeta K_\zeta - \Psi_8^\zeta & -\Psi_9^{\zeta T} - \Psi_9^\zeta \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_{\zeta\zeta\zeta\zeta}(1,1) = \Psi_1^{\zeta T} A_\zeta^T + A_\zeta \Psi_1^\zeta + B_\zeta \Psi_7^\zeta + \Psi_7^{\zeta T} B_\zeta^T + \Psi_1^\zeta \Pi_1 \Psi_1^\zeta - \dot{\Psi}_1^\zeta$$

$$\Upsilon_{\zeta\zeta\zeta\zeta}(2,1) = \Psi_8^{\zeta T} B_\zeta^T + C_\zeta \Psi_1^\zeta + D_\zeta \Psi_7^\zeta$$

$$\Upsilon_{\zeta\zeta\zeta\zeta}(3,1) = E_\zeta H_\zeta \Psi_1^\zeta + \Psi_9^{\zeta T} B_\zeta^T - \Psi_7^\zeta$$

La dérivée de  $\Psi_1^\zeta$  peut-être limitée comme :

$$\dot{\Psi}_1^\zeta \geq \sum_{k=1}^{r-1} \Phi_k (\Psi_1^k - \Psi_1^r) \quad (4.62)$$

avec  $\Phi_k$  est la limite inférieure de  $\dot{\zeta}(\zeta(t))$ , et  $(\Psi_1^k - \Psi_1^r) \geq 0$ , alors, l'inégalité (4.55) est satisfaite si :

$$\bar{A}_{ijls} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{ijls} & * \\ \Omega(2,2) \tilde{A}_{\tau i}^T & -(1-\eta)\tilde{S} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.63)$$

LMI (4.52) peut être obtenue comme suit :

Définissons les surfaces comme suit :

$$\varepsilon_0(x) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \left| v(0) + \int_{-\tau}^0 x(s) \tilde{\Pi} x(s) ds \leq 1 \right. \right\} \quad (4.64)$$

$$\varepsilon\left(\tilde{E}(\Psi_\zeta)^{-1}, \rho\right) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \left| \mathbf{x}^T(t) \left(\tilde{E}(\Psi_\zeta)^{-1}\right)^{-1} \mathbf{x}(t) \leq \rho, \rho \succ 1 \right. \right\} \quad (4.65)$$

si LMI (4.51) est vérifié, donc :  $\forall T > 0, v(T) \leq v(0) \leq 1$ , En outre :  $\tilde{x}^T(t) \tilde{\Xi}(\tilde{\Psi}_\zeta)^{-1} \tilde{x}(t) \leq 1 - \int_{t-\tau}^t \tilde{x}(s) \tilde{\Pi} \tilde{x}(s) ds \leq \rho$ , alors  $\varepsilon\left(\tilde{E}(\Psi_\zeta)^{-1}, \rho\right)$  est un ensemble d'attraction invariant.

En utilisant le Lemme 2.1, l'ellipsoïde  $\varepsilon\left(\tilde{E}\Psi_\zeta^{-1}, \rho\right) \subset \aleph(H_j)$  si :

$$\left(\tilde{h}_i^j\right)^T \left(\frac{\tilde{E}(\Psi_\zeta)^{-1}}{\rho}\right)^{-1} \left(\tilde{h}_i^j\right) \leq \bar{u}_i^2 \quad (4.66)$$

par conséquence :

$$\frac{\bar{u}_i^2}{\rho} - \left(h_i^j\right)^T \Psi_1^\zeta \left(h_i^j\right) \geq 0 \quad (4.67)$$

En utilisant le complément de Schur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & \mathbf{h}_i^j \\ * & (\Psi_1^\ell)^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.68)$$

Par la multiplication gauche et droite par  $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Psi_1^j \end{bmatrix}$ , on aura :

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & z_i^j \\ * & \Psi_1^\ell \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.69)$$

avec  $z_i^j$  est l'ième élément de  $Z_j$ .

Ceci complète la démonstration.

#### 4.3.2.4 Stabilisation $H_\infty$ par la commande NON-PDC SOF

Dans le cas où la perturbation externe  $W(t) \neq 0$ , l'utilisation du critère  $H_\infty$  est indispensable. En effet, cette partie se concentre sur l'extension des résultats du théorème 4.4 au système (4.47) avec perturbations externes. L'objectif principal est d'établir des conditions d'optimisation LMI qui conduit à déterminer les gains de contrôle garantissant la stabilité asymptotique du système en boucle fermée avec minimisation de l'effet de perturbation externe sur le signal de sortie.

Considérons le critère  $H_\infty$  :

$$\Sigma = \dot{v}(t) + y^T(t) y(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) < 0 \quad (4.70)$$

où  $\dot{v}(t)$  est la dérivée de la fonction de Lyapunov définie en (4.54).

Pour tout  $\tilde{x}(0) \in \varepsilon_0, \forall T > 0 : \int_0^T \Sigma dt = \int_0^T \dot{v}(t) + y^T(t)y(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) dt < 0$ , alors :

1. si  $w(t) = 0$ , alors  $\dot{v}(t) < -y^T(t)y(t) \leq 0$
2. si  $w(t) \neq 0$ , tel que  $\|w(t)\|_2^2 < \kappa^2$ , alors :  $v(T) \leq v(0) + \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t) dt \leq 1 + \gamma^2 \kappa^2$ ,  
ensuite : pour  $\rho = 1 + \gamma^2 \kappa^2, \varepsilon \left( \tilde{E}(\Psi_\zeta)^{-1}, \rho \right)$  est le domaine d'attraction.

Et si  $T \rightarrow \infty, \int_0^\infty y^T(t)y(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty (w^T(t)w(t)) dt + v(0)$  dans les conditions initiales nulles,  $\|y(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2$ , alors, en présence de perturbations, le système présente un niveau d'atténuation de perturbation  $\gamma$ .

**Théorème 4.5.** [Nasri et al., 2020] Pour tout  $k = 1..r - 1, \Phi_k$  limites inférieures de  $\dot{\zeta}_k(\varsigma(t)) \left( \Phi_k \leq \dot{\zeta}_k(\varsigma(t)) \right)$  et un scalaire positif donné  $\rho$ , alors le système flou T-S retardé (4.47) est asymptotiquement stable via la loi de commande SOF non quadratique (4.49), avec un taux d'atténuation des perturbation  $\gamma$ , s'il existe des matrices symétrique définie positive  $\Psi_1^\ell$ , des matrices définies positives  $\Psi_5^\ell, S_1, S_2, S_3, \dots$ , des matrices  $\Psi_7^\ell, \Psi_8^\ell, \Psi_9^\ell, K_j$ , et  $Z_j$ , de sorte que les conditions LMIs suivantes soient satisfis :

$$\Delta_{ijls} < 0, i \in I_r, j \in I_r, \ell \in I_r, s \in I_{2m} \quad (4.71)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}_i^2}{\rho} & z_i^j \\ * & \Psi_1^\ell \end{bmatrix} \geq 0, i \in I_m, j \in I_r, \ell \in I_r, \quad (4.72)$$

$$\Psi_1^k - \Psi_1^r \geq 0 \quad (4.73)$$

avec :

$$\Delta_{ijls} = \begin{bmatrix} [\bar{A}_{ijls}] & \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \Psi_5^\ell & 0 \\ B_{wi}^T & G_{wi}^T & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad \rho = 1 + \gamma^2 \kappa^2$$

Et  $\bar{A}_{ijls}$  est définie dans théorème 4.4.

**Démonstration :** En utilisant le critère  $H_\infty$ , le système en boucle fermée (4.47) est stable si

$$\dot{v}(t) + y^T(t)y(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0 \quad (4.74)$$

Dans le cas où  $w(t) \neq 0$ , l'équation (4.47) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{x}^T \bar{A} \bar{x} + \tilde{x}(\Psi_\zeta)^{-1} B_{w\zeta} w(t) + w^T(t) B_w \zeta^T (\Psi_\zeta)^{-1} \tilde{x} \\ + y^T(t)y(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

En utilisant la représentation augmentée, le terme  $y^T(t)y(t)$  peut être exprimé comme :

$$y^T(t)y(t) = \bar{x}^T \bar{Q} \bar{x} \quad (4.76)$$

$$\text{avec : } \bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & I & 0 & 0_{33} \\ 0 & 0 & 0 & \\ & 0_{33} & & 0_{33} \end{bmatrix}$$

Ensuite, l'inégalité (4.75) est satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{\zeta\zeta\zeta\zeta} + \bar{Q} & * \\ \bar{B}_w \zeta^T \Omega^{-1} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.77)$$

avec  $\bar{A}_{\zeta\zeta\zeta\zeta}$ ,  $\Omega$  sont définies dans la démonstration du Théorème 4.4, et  $\bar{B}_{w\zeta}^T = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{w\zeta}^T & 0 \end{bmatrix}$

multiplions par  $\begin{bmatrix} \Omega^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  à gauche et  $\begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  à droite on aura :

$$\begin{bmatrix} \Delta_{\zeta\zeta\zeta\zeta} + \Omega^T \bar{Q} \Omega & * \\ \bar{B}_{w\zeta}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.78)$$

Par le complément de Schur, l'inégalité (4.71) est produite. LMI (4.72) s'obtient en suivant la même procédure que pour la démonstration du Théorème 4.4.

Ceci complète la preuve.

**Exemple 4.2.** Nous considérons ici un exemple numérique pour illustrer l'efficacité du schéma de contrôle SOF non PDC saturé proposé en présence d'un retard d'état. Considérons le système flou T-S (4.47) avec les paramètres associés donnés par [Selvaraj et al., 2017] :  $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 =$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}, A_{\tau_1} = 0.1A_1, A_{\tau_2} = 0.1A_2,$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{w1} = B_{w2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{W1} = G_{W2} = 1, C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

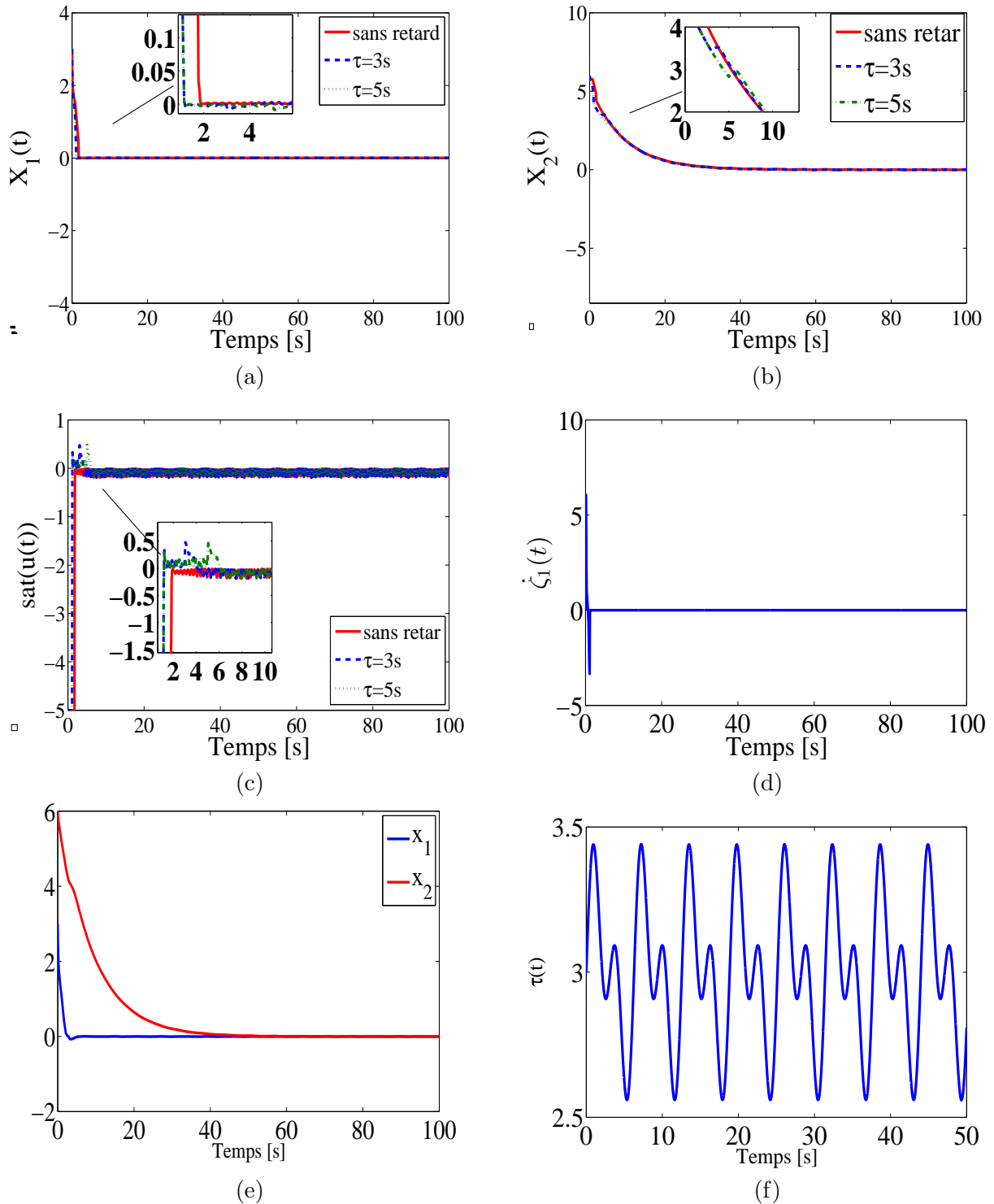
où les fonctions d'appartenance sont définies comme suit :  $\mu_1(x(t)) = \sin^2(x_1(t))$ ,  $\mu_2(x(t)) = \cos^2(x_1(t))$  De plus, la perturbation externe est choisie comme  $W(t) = 0.1 \sin(t)$ . Contrairement à [Selvaraj et al., 2017], le niveau limite de saturation est  $\bar{u} = 5$ . De plus, en résolvant les LMI dans le théorème 2 à l'aide de la boîte à outils MATLAB LMI pour l'atténuation des perturbations  $\gamma = 1.0005$ , on peut obtenir les gains de contrôle comme suit :

**Tableau 4.2:** Paramètres du contrôleur SOF non quadratique indépendante

$$\begin{array}{c} \hline \hline \Psi_1^1 = \begin{bmatrix} 136.5543 & 134.6010 \\ 134.6010 & 4.8097 \times 10^7 \end{bmatrix}, \Psi_1^2 = \begin{bmatrix} 71.4013 & 71.0669 \\ 71.0669 & 4.7975 \times 10^7 \end{bmatrix} \\ \Psi_5^1 = 1.0134, \Psi_5^2 = 1.0001, K_1 = -108.4706, K_2 = -55.6263 \\ \hline \hline \end{array}$$

En utilisant les gains de contrôle ci-dessus, les trajectoires d'état de notre système avec des valeurs initiales à  $x(0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$  sont représentés sur les figures 4.3 (a) et (b), l'entrée de contrôle sur la figure 4.3 (c), et la dérivée de la première fonction d'appartenance sur la figure 4.3 (d), cette dernière nous permet de vérifier la limite inférieure de  $\dot{\zeta}_k(\zeta(t))$  où il est supposé -5.

À partir des figures 4.3, nous pouvons observer que les réponses des états convergent vers zéro. Cela signifie que l'approche de contrôle proposée tolère effectivement l'existence d'un retard, d'une saturation de l'actionneur et d'une perturbation externe.



**Figure 4.3:** Réponses du système : (a). trajectoire de l'état  $x_1(t)$ . (b). trajectoire de l'état  $x_2(t)$ . (c) trajectoire d'entrée saturée. (d). trajectoire de la dérivée de la fonction d'appartenance. (e) trajectoire des états pour un retard variable. (f) retard variable.

#### 4.4 Conditions de stabilisation dépendantes du retard

Le critère “retard-dépendant” conduit vers des conditions de stabilisation plus relâchés que ceux “retard-indépendant” particulièrement quand la taille du retard est petite. De ce fait, beaucoup d’articles traitant les conditions de stabilisation du retard-dépendant ont été présentées ces dernières années [Li et al., 2009a] [Gassara et al., 2014] [Gassara et al., 2012] [Zeng et al., 2014] [Bourahala et al., 2017] [Mahmoudabadi et al., 2017] via des différentes techniques et méthodes de synthèse de contrôleurs pour les modèles T-S telles que les matrices de pondérations libre [Souza et al., 2014], l’inégalité de Moon [Moon et al., 2001], l’inégalité intégrale de Jensen [Kim, 2016] [Trinh and Hien, 2015], et l’approche de décomposition du retard [An and Wen, 2011] [Yang and Tong, 2015]. Donc le défi est d’élargir l’intervalle du retard le plus possible. Pour les Modèles T-S avec saturation d’actionneur, on distingue quelque travaux sur le critère indépendante [Ting, 2008] [Nasri et al., 2019a] [Nasri et al., 2020], et d’autre sur l’approche dépendante avec  $H_\infty$  [Gassara et al., 2012] [Selvaraj et al., 2017]. Cependant, la source du conservatisme dans les conditions LMIs ne vient pas seulement de l’indépendance du retard mais aussi de la forme quadratique de la fonction de LKF. Cette problématique nous a motivé de proposer des conditions LMI dépend aussi des dérivée des fonctions d’appartenance via des fonctions LKF non quadratique.

##### 4.4.1 Conditions de stabilisation dépendantes du retard et indépendante des dérivées des fonctions d’appartenance

Prenant l’exemple de [Gassara et al., 2012], où les auteurs ont proposé des nouveaux conditions de stabilisation quadratiques pour les modèles T-S soumis à la saturation d’actionneur. Ces résultats sont basés sur la suivante FLK :

$$V(t) = V_1 + V_2 + V_3 = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(\alpha)Sx(\alpha)d\alpha + \int_{t-\bar{\tau}}^0 \int_{\delta}^t \dot{x}^T(s)\Theta\dot{x}(s)dsd\delta \quad (4.79)$$

Le théorème suivant résume les conditions proposés par [Gassara et al., 2012] :

**Théorème 4.6.** Pour des scalaires positifs donnés  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $\bar{\tau} > 0$ ,  $\eta \geq 0$ , tel que :  $\tau(t) \in [0 \ \bar{\tau}]$  avec  $\dot{\tau}(t) \leq \eta$ , le système flou T-S retardé (4.4) est asymptotiquement stable via la loi de PDC (4.8), s’il existe une matrice symétrique positive  $Q > 0$ , des matrices  $\tilde{S} > 0$ ,  $\tilde{\Theta} > 0$ ,  $\tilde{Y}_i$ ,  $\tilde{T}_i$ ,  $F_j$ ,  $Z_j$ , et  $\tilde{X}_{ij}$  avec  $\tilde{X}_{ii}$  symétrique, tel que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\tilde{\Gamma}_{ijs} + \tilde{\Gamma}_{jis} \leq \tilde{X}_{ijs} + \tilde{X}_{ijs}^T, \quad i \in I_r, \quad j \in I_r, \quad s \in I_{2^m} \quad (4.80)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{11s} & \cdots & \tilde{X}_{1rs} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{X}_{1rs}^T & \cdots & \tilde{X}_{rrs} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.81)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & z_i^j \\ * & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad i \in I_m, \quad j \in I_r \quad (4.82)$$

Où :



$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ijs} &= \begin{bmatrix} \tilde{\Upsilon}_{ijs} & \tilde{\theta}_{ijs}^T & \tilde{W}_i^T & \tilde{U}_{ijs}^T \\ * & -\frac{1}{\tau} \left( -2\lambda Q + \lambda^2 \tilde{\Theta} \right) & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{1}{\tau} \tilde{\Theta} & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} \\ \tilde{\Upsilon}_{ijs} &= \begin{bmatrix} \tilde{\Upsilon}_{ijs}(1,1) & A_{\tau_i} Q - \tilde{Y}_i + \tilde{T}_i^T & B_{w_i} \\ * & -(1-\eta) \tilde{S} - \tilde{T}_i - \tilde{T}_i^T & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \\ \tilde{\Upsilon}_{ijs}(1,1) &= \left( (A_i Q + B_i E_s F_j + B_i \bar{E}_s Z_j) + (*) \right) + \tilde{S} + \tilde{Y}_i + \tilde{Y}_i^T \\ \tilde{\theta}_{ijs} &= \begin{bmatrix} A_i Q + B_i E_s F_j + B_i \bar{E}_s Z_j & A_{\tau_i} Q & B_{w_i} \end{bmatrix} \\ \tilde{W}_i &= \begin{bmatrix} \tilde{Y}_i^T & \tilde{T}_i^T & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{U}_i &= \begin{bmatrix} C_i Q + D_i E_s F_j + D_i \bar{E}_s Z_j & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dans ce cas :

$$K_j = F_j Q^{-1}$$

$$H_j = Z_j Q^{-1}$$

**Démonstration :** voir [Gassara et al., 2012].

#### 4.4.2 Conditions de stabilisation dépendantes du retard et dépendantes des dérivées des fonctions d'appartenance

Dans ce travail, nous considérons le problème de la synthèse du contrôleur PDC pour les modèles T-S à retard variable en présence de la saturation d'actionneur et des perturbations externe. Dans ce contexte, le contrôleur considéré est une amélioration des résultats obtenus précédemment [Gassara et al., 2012], via une fonction LKF non-quadratique. Par conséquence, l'amélioration des conditions de stabilisation LMI en termes de conservatisme.

Dans notre travail, nous adoptons le modèle T-S à retard variable en état donné par (4.4).

Dans ce cas, on considère que  $w(t) \neq 0$ . On choisit une LKF non quadratique comme suit :

$$V_2 + V_3 = x^T(t) P_\zeta x(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(\alpha) S x(\alpha) d\alpha + \int_{t-\bar{\tau}}^0 \int_{\delta}^t \dot{x}^T(s) \Theta \dot{x}(s) ds d\delta \quad (4.83)$$

$$\text{où : } P_\zeta = \left( \sum_{i=1}^r \zeta_i(t) P_i \right)^{-1}$$

Le théorème suivant résume les conditions de stabilisation obtenus :

**Théorème 4.7.** Considérons pour tout  $k = 1 \dots r - 1$ ,  $\Phi_k$  limites inférieures de  $\dot{\zeta}_k(\varsigma(t)) \left( \phi_k \leq \dot{\zeta}_k(\varsigma(t)) \right)$ , alors pour des scalaires positif donnés  $\lambda, \rho, \bar{\tau} > 0, \eta \geq 0$ , tel que  $\tau(t) \in \left[ 0 \quad \bar{\tau} \right]$  avec  $\dot{\tau}(t) \leq \eta$ , le système flou T-S retardé (4.4) avec perturbations externe est asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (4.8), avec un taux d'atténuation des perturbation  $\gamma$ , s'il existe des matrices symétriques positives  $Q_\ell > 0$ , des matrices  $\tilde{S} > 0, \tilde{\Theta} > 0, \tilde{Y}_i, \tilde{T}_i, F_j, Z_j$ , et  $\tilde{X}_{ijls}$  avec  $\tilde{X}_{iii}$  symétrique, telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\tilde{\Gamma}_{ijls} + \tilde{\Gamma}_{jils} \leq \tilde{X}_{ijls} + \tilde{X}_{ijls}^T, \quad i \in I_r, j \in I_r, \ell \in I_r, s \in I_{2m} \quad (4.84)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{111s} & \cdots & \tilde{X}_{1rrs} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{X}_{1rrs}^T & \cdots & \tilde{X}_{rrrs} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.85)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{u}^2}{\rho} & z_i^j \\ * & Q_\ell \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.86)$$

$$Q_k - Q_r \geq 0 \quad (4.87)$$

Où :

$$\tilde{\Gamma}_{ijls} = \begin{bmatrix} \tilde{\Upsilon}_{ijls} & \tilde{\theta}_{ijls}^T & \tilde{W}_i^T & \tilde{U}_{ijls}^T \\ * & -\frac{1}{\bar{\tau}} \left( -2\lambda Q_\ell + \lambda^2 \tilde{\Theta} \right) & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{1}{\bar{\tau}} \tilde{\Theta} & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} \partial$$

$$\tilde{\Upsilon}_{ijls} = \begin{bmatrix} \tilde{\Upsilon}_{ijls}(1,1) & A_{\tau_i} Q_\ell - \tilde{Y}_i + \tilde{T}_i^T & B_{w_i} \\ * & -(1-\eta) \tilde{S} - \tilde{T}_i - \tilde{T}_i^T & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Upsilon}_{ijls}(1,1) = ((A_i Q_\ell + B_i E_s F_j + B_i \bar{E}_s Z_j) + (*)) + \tilde{S} + \tilde{Y}_i + \tilde{Y}_i^T - \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (Q_k - Q_r)$$

$$\tilde{\theta}_{ijls} = \begin{bmatrix} A_i Q_\ell + B_i E_s F_j + B_i \bar{E}_s Z_j & A_{\tau_i} Q_\ell & B_{w_i} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W}_i = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_i^T & \tilde{T}_i^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{U}_i = \begin{bmatrix} C_i Q_\ell + D_i E_s F_j + D_i \bar{E}_s Z_j & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas :

$$K_j = F_j Q_\zeta^{-1}$$

$$H_j = Z_j Q_\zeta^{-1}$$

**Démonstration :** Le système en boucle fermée (4.4) est stable si :  $\dot{V}(t) < 0$

On considère la fonction de Lyapunov-Krasovskii (4.84), sa dérivée par rapport au temps sera :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \dot{x}^T(t) P_\zeta x(t) + x^T(t) P_\zeta \dot{x}(t) + \dot{x}^T(t) \dot{P}_\zeta x(t) \\ &= x^T(t) \left( A_\zeta^T P_\zeta + (E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta)^T B_\zeta^T P_\zeta + (*) + \dot{P}_\zeta \right) x(t) + x^T(t-\tau) A_{\tau_\zeta}^T P_\zeta x(t) \\ &\quad + x(t) P_\zeta A_{\tau_\zeta} x(t-\tau) \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\dot{V}_2(t) = x^T(t) S x(t) - (1-\dot{\tau}) x^T(t-\tau) S x(t-\tau) \quad (4.89)$$

$$\dot{V}_3(t) = \bar{\tau} \dot{x}^T(t) \Theta \dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) \Theta \dot{x}(s) ds \quad (4.90)$$

Prenant en compte la formule de Newton-Leibniz (4.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \dot{V}(x(t)) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \leq 2x^T(t)P_\zeta(A_\zeta + B_\zeta(E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta))x(t) \\
& + 2x^T(t)P_\zeta A_{\tau\zeta}x(t - \tau(t)) + 2x^T(t)P_\zeta B_{w\zeta}w(t) + x^T(t)Sx(t) \\
& - (1 - \beta)x(t - \tau(t))^T Sx(t - \tau(t)) + \bar{\tau}\dot{x}^T(t)\Theta\dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)\Theta\dot{x}(s)ds \\
& + 2\left[x^T(t)Y(t) + x^T(t - \tau(t))T(t)\right] \left[x(t) - x(t - \tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s)ds\right] \\
& + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)
\end{aligned} \tag{4.91}$$

avec :

$$Y(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i Y_i, \quad T(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i T_i$$

Considérant maintenant :  $\omega(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau(t)) & w^T(t) \end{bmatrix}^T$ , par conséquence :

$$\begin{aligned}
& \dot{V}(x(t)) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \leq \omega^T(t) \left[ \tilde{\Upsilon}(t) + U^T(t)U(t) + \bar{\tau}w^T(t)\Theta^{-1}w(t) \right] \omega(t) - \\
& \int_{t-\tau(t)}^t [\omega^T(t)w^T(t) + \dot{x}^T(s)\Theta] \Theta^{-1} [\omega^T(t)w^T(t) + \dot{x}^T(s)\Theta]^T ds
\end{aligned} \tag{4.92}$$

où :

$$W(t) = \begin{bmatrix} Y^T(t) & T^T(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} C_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Upsilon}_\zeta = \begin{bmatrix} \tilde{\Upsilon}_\zeta(1,1) & \tilde{\Upsilon}_\zeta(1,2) & \tilde{\Upsilon}_\zeta(1,3) \\ * & -(1 - \dot{\tau})S - T_\zeta - T_\zeta^T + \bar{\tau}A_{\tau\zeta}^T \Theta A_{\tau\zeta} & \bar{\tau}A_{\tau\zeta}^T \Theta B_{w\zeta} \\ * & * & -\gamma^2 I + \bar{\tau}B_{w\zeta}^T \Theta B_{w\zeta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Upsilon}_t(1,1) &= P_\zeta(A_\zeta + B_\zeta(E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta)) + (A_\zeta + B_\zeta(E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta))^T P_\zeta + \\
& S + Y_\zeta + Y_\zeta^T + \bar{\tau}(A_\zeta + B_\zeta(E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta))^T \Theta (A_\zeta + B_\zeta(E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta))
\end{aligned}$$

$$\tilde{\Upsilon}_\zeta(1,2) = P_\zeta A_{\tau\zeta} - Y_\zeta + T_\zeta^T + \bar{\tau}(A_\zeta + B_\zeta(E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta))^T \Theta A_{\tau\zeta}$$

$$\tilde{\Upsilon}_\zeta(1,3) = P_\zeta B_{w\zeta} + \bar{\tau}(A_\zeta + B_\zeta(E_\zeta K_\zeta + \bar{E}_\zeta H_\zeta))^T \Theta B_{w\zeta}$$

$$\text{Prenant : } \Gamma_\zeta = \begin{bmatrix} \Upsilon & \theta_\zeta^T \Theta & W_\zeta^T & U_\zeta^T \\ * & -\frac{1}{\bar{\tau}} \Theta & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{1}{\bar{\tau}} \Theta & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

$$\theta_{ijs} = \begin{bmatrix} A_i + B_i(E_s K_j + \bar{E}_s H_j) & A_{\tau_i} & B_{w_i} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_{ijs} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{ijs}(1,1) & P_t A_{\tau_i} - Y_i + T_i^T & P B_{w_i} \\ * & -(1 - \dot{\tau})S - T_i - T_i^T & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_{ijs}(1,1) = P_\zeta(A_i + B_i(E_s K_j + \bar{E}_s H_j)) + (A_i + B_i(E_s K_j + \bar{E}_s H_j))^T P_\zeta + \dot{P}_\zeta + S + Y_i + Y_i^T$$

appliquant le compliment de Schur  $\tilde{\Upsilon} + U_\zeta^T U_\zeta + \bar{\tau}W_\zeta^T \Theta^{-1} W_\zeta < 0$  est équivalent à :

$$\begin{aligned}
\Gamma_\zeta &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{2^m} \mu_i \mu_j \alpha_s \Gamma_{ijs} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{2^m} \mu_i \mu_j \alpha_s (\Gamma_{ijs} + \Gamma_{jis}) \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \left( X_{ij} + X_{ij}^T \right) \\
&= [\mu_1 I, \dots, \mu_r I] \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1r}^T & \cdots & X_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 I \\ \vdots \\ \mu_r I \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Ceci implique que :

$$\dot{V}(x(t)) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0 \tag{4.94}$$

Pour transformer nos résultats en LMI on considère que  $Q_\zeta = (P_\zeta)^{-1}$ . Multipliant  $\Gamma_{ijs}$  à gauche et à droite par  $\text{diag} \left[ Q_\zeta \quad Q_\zeta \quad I \quad Q_\zeta \zeta \quad Q_\zeta \quad I \right]$ , et par le changement du variable :  $F_j = K_j Q_\zeta$ ,  $Z_j = H_j Q_\zeta$ ,  $\tilde{S} = Q_\zeta S Q_\zeta$ ,  $\tilde{\Theta} = Q_\zeta \Theta Q_\zeta$ ,  $\tilde{T}_i = Q_\zeta T_i Q_\zeta$ ,  $\tilde{Y}_i = Q_\zeta Y_i Q_\zeta$ , on obtient :

$$\tilde{\Gamma}_{ijls} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{ijls} & \tilde{\theta}_{ijls}^T Q_\zeta^{-1} \tilde{\Theta} & \tilde{W}_{ijls}^T & \tilde{U}_{ijls}^T \\ * & -\frac{1}{\tau} \tilde{\Theta} & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{1}{\tau} \tilde{\Theta} & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} \tag{4.95}$$

Notons que  $Q_\zeta \dot{P}_\zeta Q_\zeta = -\dot{Q}_\zeta$ , ainsi on peut écrit :  $\dot{Q}_\zeta \geq \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (Q_k - Q_r)$

Pré et post multipliant  $\tilde{\Gamma}_{ijls}$  par  $\text{diag} \left[ I \quad I \quad I \quad Q_\zeta \tilde{\Theta}^{-1} \quad I \quad I \right]$  et leur transposée, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_{ijls} & \tilde{\theta}_{ijls}^T & \tilde{W}_i^T & \tilde{U}_{ijls}^T \\ * & -\frac{1}{\tau} Q_\zeta \tilde{\Theta}^{-1} Q_\zeta & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{1}{\tau} \tilde{\Theta} & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} \tag{4.96}$$

Utilisant le Lemme 4.1, il existe un scalaire  $\lambda > 0$ , tel que :

$$-Q_\zeta \tilde{\Theta}^{-1} Q_\zeta \leq -2\lambda Q_\zeta + \lambda^2 \tilde{\Theta} \tag{4.97}$$

Prenant maintenant :  $\tilde{P}_\zeta = \text{diag} \left[ I \quad I \quad I \quad Q_\zeta \tilde{\Theta}^{-1} \quad I \quad I \right] \text{diag} \left[ Q_\zeta \quad Q_\zeta \quad I \quad Q_\zeta \quad Q_\zeta \quad I \right]$  et  $\tilde{X}_{ij} = \tilde{P} X_{ij} \tilde{P}^T$  on obtient (4.84).

L'inégalité (4.86) s'obtient de la même façon que (4.19).

Ceci complète la démonstration.

### Exemple 4.3.

Pour montrer l'efficacité de l'approche non quadratique proposée dans cette section par rapport

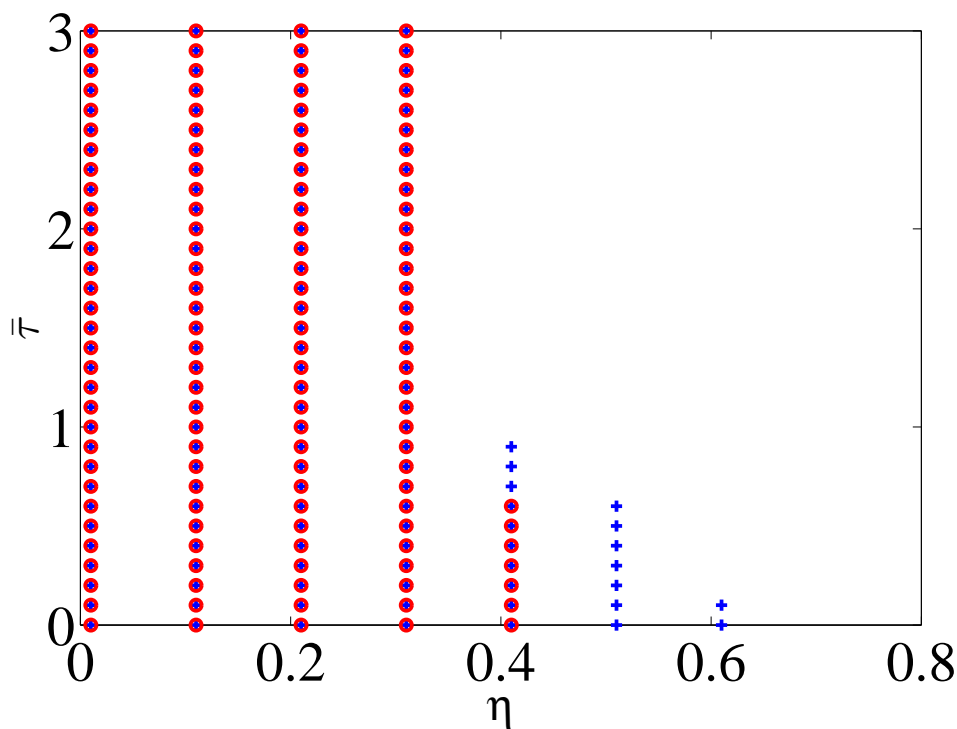
à l'approche quadratique, on considère la stabilisation du modèle T-S à retard suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i [A_i x(t) + A_{\tau_i} x(t - \tau(t)) + B_i \text{sat}(u(t)) + B_{w_i} w(t)] \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \zeta_i [C_i x(t)] \end{cases} \quad (4.98)$$

Avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{\tau_1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_{\tau_2} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 1 & 1.6 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{w_1} &= B_{w_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_1 = 0.008, D_2 = 0.006. \end{aligned}$$

la Figure 4.4 montre les champs de faisabilité obtenus par le Théorème 4.6 (quadratique), et le Théorème 4.7 (non quadratique) pour  $\eta \in [0 \ 3]$  et  $\bar{\tau} \in [0 \ 2.5]$ .



**Figure 4.4:** Comparaison des domaines de faisabilité des théorème 4.6 et 4.7.

**Exemple 4.4.** Soit l'exemple d'un système chaotique [Souza et al., 2009] (Système Rossler) défini comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) - x_3(t) + \alpha x_1(t - d(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + \beta_1 x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \beta_2 + (x_1(t) - \eta) x_3(t) + u(t) \end{aligned} \quad (4.99)$$

avec :

$$\alpha = 0.5, \beta_1 = \beta_2 = 0.2, \eta = 5.7$$

$$\tau(t) = 3 + 0.25 \sin(2t) + \sin(t)$$

Ce système peut être approximé par deux règles floues avec les matrices d'espace d'état suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa \end{bmatrix}, A_{\tau_i} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{wi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

où :  $\kappa = 6.3$

Les fonctions d'appartenances sont données par :

$$\begin{aligned} \zeta_1(t) &= 0.5(1 + (\eta - x_1(t)/\kappa)) \\ \zeta_2(t) &= 1 - \zeta_1(t) \end{aligned} \tag{4.100}$$

Supposant que le signal de commande est saturé entre -10 et 10, utilisant Matlab LMI toolbox, la résolution des conditions LMI du théorème nous donne :

**Tableau 4.3:** Paramètres du contrôleur PDC non quadratique dépendante

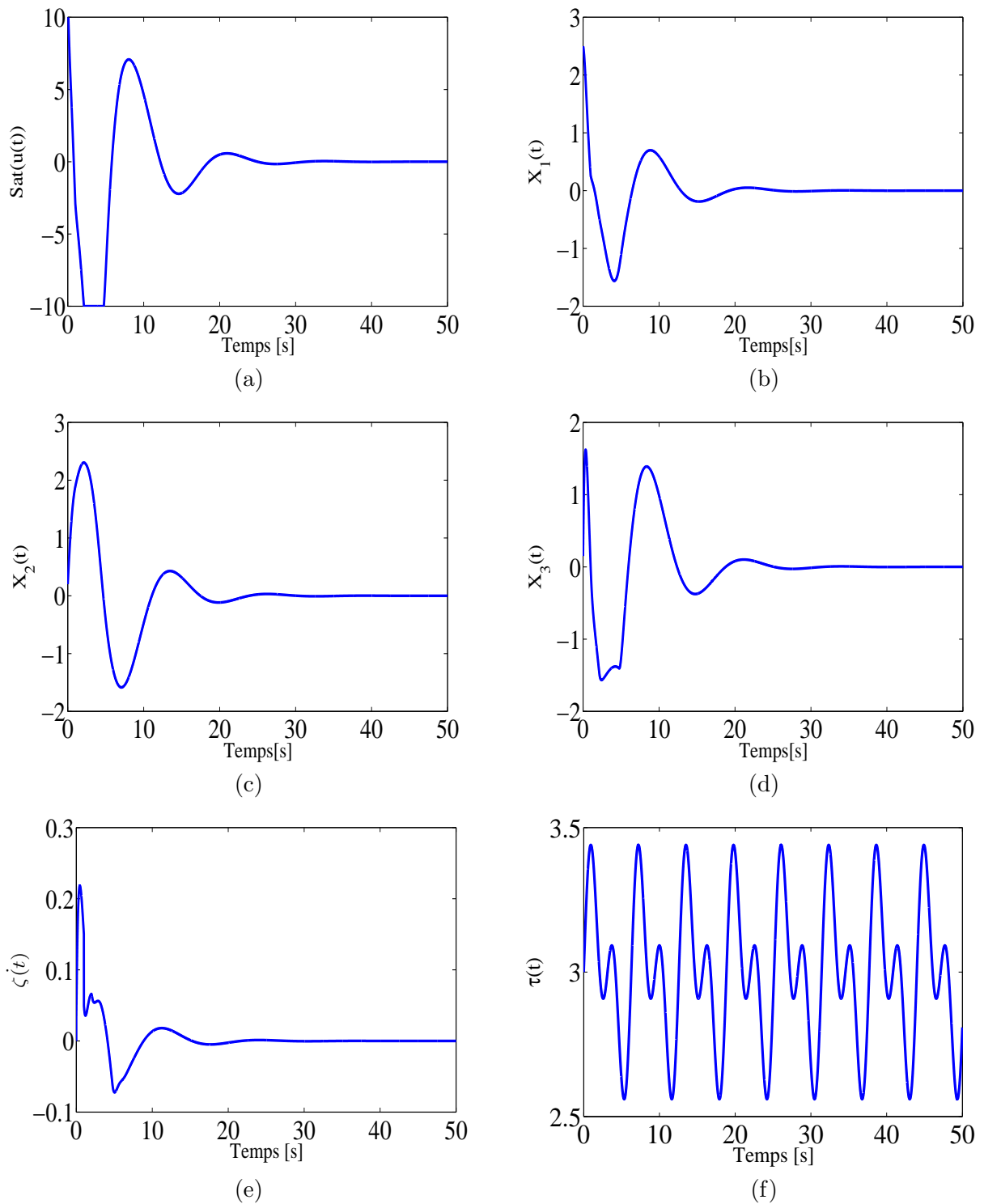
|   |
|---|
| $Q_1 = \begin{bmatrix} 0.1034 & -0.0469 & 0.1994 \\ -0.0469 & 0.1141 & -0.1001 \\ 0.1994 & -0.1001 & 0.5815 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 0.1030 & -0.0470 & 0.1991 \\ -0.0470 & 0.1134 & -0.0999 \\ 0.1991 & -0.0999 & 0.5806 \end{bmatrix},$ $F_1 = [0.9897 \quad -0.6715 \quad 2.3062], F_2 = [-1.5211 \quad 0.5885 \quad -5.0151]$ $\gamma = 2.1555$ |
|---|

En prenant un retard variable dans le temps  $\tau(t) = 3 + 0.25(\sin(2t) + \sin(t))$ , et des conditions initiales à  $x_1(0) = 2.5$ ,  $x_2(0) = 0.2$ ,  $x_3(0) = 0.15$ , à la base des valeurs précédentes, Les résultats obtenus sont présenter dans les figures 4.5 suivantes, où figure 4.5 (a), représente le signal de commande. Les figures 4.5 (b), (c), (d) sont réservé aux états du système  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  respectivement. La figure 4.5 (e), illustre la variation de la dérivée de la première fonction d'appartenance ou on peut obtenir la borne inférieure de cette dérivée. La figure 4.5 (f) donne la variation du retard.

Selon les figures précédentes, on observe que les conditions de stabilisation présentés dans théorème 4.7, donne des réponses qui convergent asymptotiquement vers zéro malgré la présence du retard variable et de la saturation d'actionneur.

## 4.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous nous sommes intéressés par la stabilisation des modèles T-S à retard soumis à la saturation d'actionneur et perturbations externe. Sur la base des fonctions LKF avec termes non quadratiques, de nouvelles conditions LMIs moins conservatives ont été fournies. Dans une première partie, la stabilisation par l'approche indépendante du retard a été évoquée, pour le cas quadratique, et pour le cas non quadratiques. Cette dernière à pour objective de réduire le conservatisme dans les conditions de stabilisation LMI obtenues dans le cas quadratique. En effet, la stabilisation indépendante non quadratique a été faite pour la commande PDC et la commande NON-PDC SOF. La deuxième partie de chapitre traite la stabilisation de tels modèles via l'approche dépendante du retard. Dans ce contexte, les conditions de stabilisation  $H_\infty$  par la commande PDC quadratique et non quadratique via une nouvelle LKF en présence de saturation d'actionneur sont proposées. Enfin, des exemples d'application sont faits pour montrer l'efficacité des approches



**Figure 4.5:** Réponses du système : (a). trajectoire de l'entrée saturée . (b). trajectoire de l'état  $x_1(t)$ . (c) trajectoire de l'état  $x_2(t)$  . (d). trajectoire de l'état  $x_3(t)$ . (e). dérivée de  $\zeta_1(t)$ . (f). variation du retard  $\tau(t)$ .

développées.

---

## Conclusion générale et perspectives

---

Dans cette thèse, nous sommes intéressés à la stabilisation en boucle fermée des systèmes non-linéaires décrits par des modèles T-S en présence de la saturation d'actionneurs et perturbation externes. Puis, le problème d'existence du retard est pris en considération et de nouvelles conditions de stabilisation sont proposées sous forme des LMIs. Durant ces dernières années, la plus part des résultats de la littérature traitant la stabilisation des systèmes représentés par des modèles T-S soumis à la saturation d'actionneur ont été obtenus via une fonction de Lyapunov quadratique. Cependant, peu des travaux portent sur la conception de lois de commande pour les modèles T-S continus en présence de saturation via les fonctions non quadratiques. Ces observations nous ont conduit à proposer des travaux basés sur l'approche non quadratique pour les modèles T-S en présence de la saturation afin de réduire le conservatisme des conditions LMIs. Nos résultats sont principalement appuyés sur la fonction de Lyapunov polyquadratique partageant la même structure de fonctions d'activation que le modèle T-S utilisé, les approche LMIs et le critère  $H_\infty$ . Parallèlement au développement des commandes avec contraintes sur l'entrée, dans ce travail, la présence de retard est prise en compte par les approches indépendante et dépendante du retard.

Nos contributions s'articulent principalement autour de trois axes suivants :

- La synthèse d'une commande robuste pour les systèmes non linéaires soumis à une saturation non symétrique d'actionneurs.
- La proposition des nouvelles conditions de stabilisation non quadratiques sous forme LMIs pour la synthèse de différentes lois de commande par retour d'état non linéaire et retour de sortie non linéaire via l'approche descripteur pour les modèles T-S continus.
- L'utilisation de la candidate de Lyapunov non quadratique pour dériver les conditions de stabilisation LMI pour la synthèse des commandes PDC, non-PDC SOF pour les systèmes retardés.

Dans le cadre de cette thèse, au premier lieu, des conditions de stabilisation en poursuite de trajectoire des modèles T-S soumis à une saturation non symétrique d'actionneur et des perturbations externes via critère  $H_\infty$  sont proposées. Ces résultats sont validés à travers une application sur la commande en poursuite du point maximum de puissance pour un système PV. En deuxième lieu, et afin de réduire le conservatisme des résultats issus de la forme quadratique, nous avons abordé la stabilisation des modèles T-S soumis à la saturation d'actionneur via la fonction de Lyapunov non



quadratique et la commande NON-PDCSOF. Ce développement nous donne des conditions de stabilisation dépendante des dérivées des fonctions d'appartenances. En troisième lieu, des nouvelles conditions de stabilisation non quadratiques en termes LMIs basées sur la forme T-S descripteur sont proposées. Enfin, quelques résultats précédents sont étendus à la stabilisation des modèles T-S à retard soumis à la saturation d'actionneur. Dans ce sens, de nouveaux résultats ont été établis à travers des LKF non quadratiques. Des exemples de simulation ont démontré l'avantage et l'applicabilité des approches proposés.

Dans la poursuite des travaux proposés dans cette thèse, plusieurs problèmes qui méritent d'être pris en considération et ouvre la voie à de nombreuses perspectives :

- La prise en considération de variables de décision non mesurables. Dans ce manuscrit, les variables de décision sont considérées mesurables. Une hypothèse pas toujours confirmée. S'affranchir de ce défi peut être une bonne extension de ce travail.
- La prise en considération d'autre type de saturation tel que la saturation des capteurs, la saturation imbriquée, etc. dans la conception des lois de commande. Ainsi que la prise en compte des retards en entrée et/ou en état.
- Développer l'extension des approches proposées pour prendre en compte des défauts d'actionneurs et/ou de capteur.
- L'utilisation d'autres types de modélisation de l'effet de saturation comme la modélisation par zone morte et par secteur non linéaire.
- l'implimentation des approches développées dans cette thèse sur des systèmes réels.

---

# Appendices

---

## Annexe A :

# Analyse convexe et inégalité matricielle

---

### A.1 Analyse convexe

#### A.1.1 Introduction

La convexité d'un problème d'optimisation présente deux avantages principaux : le temps de calcul est raisonnable, et le résultat obtenu correspond au seul minimum global de la fonction de coût à optimiser, il n'y a pas de minimum local. La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle, comme illustré ci-dessous :

##### A.1.1.1 Ensemble convexe

considérons un ensemble  $E \subset R^n$ ,  $E$  est un ensemble convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset R, \forall (x_1, x_2) \in E^2, \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in E \quad (\text{A.1})$$

##### A.1.1.2 Fonction convexe

Considérons une fonction  $f : E \subset R^n \rightarrow R$ , avec  $E$  un ensemble convexe, alors  $f$  est convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset R, \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \quad (\text{A.2})$$

Par conséquent, le problème d'optimisation convexe est décrit comme suit :  $\min_{x \in E} f(x)$  où  $E$  est un ensemble convexe et  $f$  une fonction convexe.

## A.2 Inégalités Matricielles Linéaires(LMI)

### A.2.1 Définition d'une LMI

Une Inégalité Matricielle Linéaire est une contrainte du type :

$$F(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i < 0 \quad (\text{A.3})$$

où  $(x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$  est un vecteur de  $n$  scalaires inconnus (variables de décision) et  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , sont des matrices symétriques données appartenant à  $R^{nm}$  ( $< 0$ ) indique que la matrice  $F(x)$  est définie négative.

Il existe aussi des LMI non strictes de la forme  $F(x) \leq 0$ , où signifie que la matrice  $F(x)$  est semi définie négative.

Les contraintes  $A(x) > 0$  et  $A(x) < B(x)$  sont des cas particuliers de (A.3) puisqu'elles peuvent être écrites comme :  $-A(x) < 0$  et  $A(x) - B(x) < 0$ .

Plusieurs LMI sous la forme :  $A_1(x), \dots, A_n(x) < 0$  peuvent se regrouper en une seule LMI :  $F(x) = \text{diag}(A_1(x), \dots, A_n(x)) < 0$ .

L'ensemble  $C$  défini par  $C = R^n / A(x) < 0$  est un ensemble convexe. Par conséquent une contrainte LMI est une contrainte convexe.

### A.2.2 Problèmes génériques LMI

Il existe trois principaux types de problèmes d'optimisation qui peuvent être exprimés à l'aide de LMI :

#### A.2.2.1 Problème de faisabilité

Ici c'est à propos de la recherche de vecteurs  $x \in C \subset R^n$  tel que  $F(x) > 0$ . Le problème est faisable si  $C \neq \emptyset$ , il existe un ensemble non vide des  $x$  vérifiant l'inégalité  $F(x) > 0$ .

#### A.2.2.2 Problème de minimisation d'un objectif linéaire

Ici, On cherche à minimiser un objectif linéaire sous contraintes LMI :

$$\begin{aligned} \min C^T x \\ x \in R^n / F(x) > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où  $C^T$  est donnée.

### A.2.2.3 Problème de valeur propre (EVP : Eigen-Value Problem)

Il s'agit de minimiser la valeur propre maximale d'une matrice symétrique sous des contraintes de type LMI :

$$\begin{aligned} & \min \lambda \\ & \begin{cases} \lambda I - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

où les matrices  $A(x)$ ,  $B(x)$  sont symétriques et linéaires par rapport à la variable  $x$ .

### A.2.2.4 Problème de valeurs propres généralisées (General EVP)

Dans ce cas, l'objectif est de minimiser la plus grande valeur propre généralisée d'une paire de matrices, dépendant linéairement de la variable  $x$  sous conditions LMIs. Ce défi est exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} & \min \lambda \\ & \begin{cases} \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0, A(x) > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

### A.2.3 Complément de Schur

Le complément de Schur est un outil très couramment utilisé dans la linéarisation des inégalités matricielles, en effet, il permet dans certain cas de transformer des contraintes non linéaires sous forme LMI . Soit  $Q(x) = Q(x)^T \in R^{mn}$ ,  $R(x) = R(x)^T \in R^{nm}$ , et  $S(x) \in R^{np}$  des matrices affines en  $x$ , les inégalités suivantes sont équivalentes [[Morere, 2001](#)] :

$$\begin{cases} Q(x) > 0 \\ R(x) - S(x)Q(x)^{-1}S(x)^T > 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.9})$$

---

## Annexe B :

### Autre méthode de modélisation de l'effet de saturation

---

#### B.1 Modélisation à travers des régions de saturation

Soit un vecteur  $\zeta \in \mathbf{R}^n$  ou chaque composante  $\zeta_i$  pour  $i = 1, \dots, m$  peut prendre les valeurs -1, 0 ou 1 selon que l'état de la composante de la commande est saturée (aux limites supérieure où inférieure) ou non saturée. au dessous, nous vous rappelons brièvement ce type de modélisation, les lecteurs intéressés peuvent se référer à [Jomas da Silva 1997]. Soit :

$$\zeta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i > \bar{u}_i \\ 0 & \text{si } -\underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i \\ -1 & \text{si } u_i \leq -\underline{u}_i \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Chaque vecteur  $\zeta$  représente la combinaison possible entre les entrées saturées et non saturées.  $3^m$  vecteurs  $\zeta$  peuvent être construit pour chacun de ces vecteurs, que l'on note  $\zeta_j$ ,  $j = 1, \dots, 3^m$  le vecteur d'état  $x$  appartient à une zone bien définie dans  $\mathbf{R}^n$  qui sera nommée région de saturation.

**Exemple B.1 :** Soit un système à deux entrées ( $u_1(t) = K_1x(t)$ ,  $u_2(t) = K_2x(t)$ ) tel que, la première entrée atteinte la saturation  $\bar{u}_1$  à l'instant  $t$ , et la deuxième n'est pas saturée. Cela correspond à un vecteur  $\zeta = [1 \ 0]^T$  et on a :

$$x(t) \in S(R, d) \triangleq \left\{ x \in R^n; \begin{bmatrix} -K_1 \\ K_2 \\ -K_2 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} -\bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{B.2})$$

$S(R, d)$  est la région de saturation liée au vecteur  $\zeta = [1 \ 0]^T$ .

**Cas générale :**

Soient  $\zeta_j$ ,  $j = 1, \dots, 3^m$ , le vecteur associé à une région polyédrale du type :

$$S(R_j, d_j) = \{x \in R^n; R_j x \leq d_j\} \quad (\text{B.3})$$

$d_j \in R^{l_j}$  est un vecteur formé à partir des composantes de  $\bar{u}_i, -\bar{u}_i, \underline{u}_i$ , ou  $-\underline{u}_i$  et  $R_j \in R^{l_j n}$  est une matrice composée à partir des lignes de  $K$  et  $-K$ .

## B.2 Modélisation de la saturation dans chaque région

**Exemple B.2 :** Prenons l'exemple précédent ou on avait  $\zeta = [1 \ 0]^T$

$$sat(u) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ K_2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Kx + \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

l'équation (B.4) est équivalente à :

$$sat(u) = diag \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) Kx + \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

**Cas générale :**

$$sat(u) = diag (I_m - |\zeta_j|) Kx + u (\xi) \quad (\text{B.6})$$

où

$$u_i (\zeta_j) = \begin{cases} \bar{u}_i & si \zeta_j^i = 1 \\ 0 & si \zeta_j^i = 0 \\ -\underline{u}_i & si \zeta_j^i = -1 \end{cases}, \quad j = 1, \dots, 3^m, \text{ et } i = 1, \dots, m \quad (\text{B.7})$$

## B.3 Modélisation par non-linéarité de secteur

Cette méthode consiste à traiter la saturation comme une fonction linéaire par morceaux définie par (1.70). Cependant, en théorie, il est plus intéressant d'utiliser la fonction de zone morte. L'expression de la fonction de zone morte est :

$$\psi(u_i) = \begin{cases} u_i - \bar{u}_i & si \ u_i > \bar{u}_i \\ 0 & si \ \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i \\ u_i + \underline{u}_i & si \ u_i \leq -\underline{u}_i \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad (\text{B.8})$$

**Remarque B.1 :** Dans le domaine de fonctionnement linéaire la zone morte est nulle, ce qui permet de déterminer facilement la dynamique du système nominal. La saturation donnée par (1.70) est convertie en zone morte comme suit :

$$sat(u_i) = u_i - \psi(u_i) \quad (\text{B.9})$$

**Condition du secteur :**

Soit l'ensemble

$$\varphi = \{(\alpha, \beta) / -\underline{u}_i \leq \alpha - \beta \leq \bar{u}_i\}, \forall i \in I_m \quad (\text{B.10})$$

La condition du secteur est donnée à travers le lemme suivant :

**Lemme B.1 :** [da Silva Jr and Tarbouriech, 2006] Soit  $\psi(\cdot)$  un opérateur non linéaire constitué de fonctions normalisées de type zone morte.

$$Si(\alpha, \beta) \in \varphi \quad \text{alors} \quad \psi(\alpha)^T \cdot W \cdot [\psi(\alpha) - \beta] \leq 0 \quad (\text{B.11})$$

où  $W$  est une matrice diagonale définie positive.

#### B.4 Modélisation par les modèles Takagi-Sugeno :

Cette méthode se trouve dans [Bezzaoucha, 2013].

Soit le signal de commande saturé suivant :

$$sat(u(t)) = \begin{cases} u(t) & \text{si } \leq u(t) \leq \bar{u} \\ \bar{u} & \text{si } u(t) > \bar{u} \\ \underline{u} & \text{si } u(t) < \underline{u} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Considérons maintenant le vecteur d'entrée  $u(t) \in R^{n_u}$ , tel que :

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & \cdots & u_n(t) \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.13})$$

avec saturation :

$$u_{sat}(t) = \begin{bmatrix} u_{sat1}(t) & \cdots & u_{satn}(t) \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.14})$$

Compte tenu de (B.12), chaque composant du vecteur  $u_{sat}(t)$  peut se ré-écrire comme suit :

$$u_{sat,j}(t) = \sum_{i=1}^3 \zeta_i^j(u_j(t)) \left( \lambda_i^j u_j(t) + \gamma_i^j \right), \quad j = 1, \dots, n_u \quad (\text{B.15})$$

avec :

$$\begin{cases} \lambda_1^j = 0 \\ \lambda_2^j = 1 \\ \lambda_3^j = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \gamma_1^j = \underline{u}_j \\ \gamma_2^j = 0 \\ \gamma_3^j = \bar{u}_j \end{cases}$$

et les fonctions d'activation suivantes :

$$\begin{cases} \zeta_1^j(u_j(t)) = \frac{1 - \text{sign}(u_j(t) - \underline{u}_j)}{2} \\ \zeta_2^j(u_j(t)) = \frac{\text{sign}(u_j(t) - \underline{u}_j) - \text{sign}(u_j(t) - \bar{u}_j)}{2} \\ \zeta_3^j(u_j(t)) = \frac{1 + \text{sign}(u_j(t) - \bar{u}_j)}{2} \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

A partir de (B.13) et (B.14) on ré-écrit alors le vecteur d'entrée  $u(t) \in R^{n_u}$  soumis à la saturation sous la forme :



$$u_{sat}(t) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \zeta_i^1(u_1(t)) (\lambda_i^1 u_1(t) + \gamma_i^1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^3 \zeta_i^\ell(u_\ell(t)) (\lambda_i^\ell u_\ell(t) + \gamma_i^\ell) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^3 \zeta_i^{n_u}(u_{n_u}(t)) (\lambda_i^{n_u} u_{n_u}(t) + \gamma_i^{n_u}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Basons sur la propriété de somme convexe, on peut ré-écrire (B.17) afin de faire apparaître des fonctions d'activation communes à toutes les composantes du vecteur d'entrées :

$$u_{sat}(t) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \zeta_i^1(t) (\lambda_i^1 u_1(t) + \gamma_i^1) \left( \prod_{k=2}^{n_u} \sum_{j=1}^3 \zeta_j^k(t) \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^3 \zeta_i^\ell(t) (\lambda_i^\ell u_\ell(t) + \gamma_i^\ell) \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n_u} \sum_{j=1}^3 \zeta_j^k(t) \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^3 \zeta_i^{n_u}(t) (\lambda_i^{n_u} u_{n_u}(t) + \gamma_i^{n_u}) \left( \prod_{k=2}^{n_u-1} \sum_{j=1}^3 \zeta_j^k(t) \right) \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

Par conséquence on arrive à  $3^{n_u}$  sous-modèles, pour  $n_u$  entrées de commande. Finalement, l'équation (B.18) peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \zeta_i^{sat}(t) (\Lambda_i u(t) + \Upsilon_i) \quad (\text{B.19})$$

ou les fonctions d'activation globales  $\zeta_i^{sat}(t)$ , ainsi que les matrices  $\Lambda_i \in R^{n_u n_u}$ , et les vecteurs  $\Upsilon_i \in R^{n_u}$ , sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \zeta_i^{sat}(t) = \prod_{j=1}^{n_u} \zeta_{\sigma_i^j}^j(u_j(t)) \\ \Lambda_i = \text{diag} \left( \lambda_{\sigma_i^1}^1, \dots, \lambda_{\sigma_i^{n_u}}^{n_u} \right) \\ \Upsilon_i = \begin{bmatrix} \gamma_{\sigma_i^1}^1 & \cdots & \gamma_{\sigma_i^{n_u}}^{n_u} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Les indices  $\sigma_i^j$  ( $i = 1 \dots 3^{n_u}$ ,  $j = 1 \dots n_u$ ) égaux à 1, 2 ou 3, indiquant quelle partition de la  $j^i$ ème entrée ( $\zeta_1^j$ ,  $\zeta_2^j$ , ou  $\zeta_3^j$ ) est considérée dans le  $i^i$ ème sous-modèle.

La relation entre le  $i^i$ ème sous-modèle et les indices  $\sigma_i^j$  est donnée par l'expression suivante :

$$i = 3^{n_u-1} \sigma_i^1 + 3^{n_u-2} \sigma_i^2 + \dots + 3^0 \sigma_i^{n_u} - (3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n_u-1}) \quad (\text{B.21})$$

Inversement, on peut trouver les indices  $\sigma_i^j$  en fonction du numéro  $i$  du sous-modèle, les quantités  $((\sigma_i^1 - 1), \dots, (\sigma_i^{n_u} - 1))$  correspondent à  $(i - 1)$  exprimé en base 3.

---

## Annexe C :

### Démonstration des conditions de stabilité dépendentes du retard

---

#### C.1 Démonstration du théorème 1.19

Prenons la fonction LKF (1.99), pour tout  $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ * & X_{22} \end{bmatrix} \geq 0$ , on peut écrit :

$$\bar{\tau} \eta_1^T(t) X \eta_1(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \eta_1^T(s) X \eta_1(s) ds \geq 0 \quad (\text{C.1})$$

où :  $\eta_1(t) = [x^T(t), x^T(t - \tau(t))]^T$

Selon Newton-Leibnitz on peut écrit :

$$x(t - \tau(t)) = x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \quad (\text{C.2})$$

Pour toutes matrices de dimension appropriées  $N_1, N_2$  on peut écrit :

$$2 [x^T(t) N_1 + x^T(t - \tau(t)) N_2] \left[ x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds - x(t - \tau(t)) \right] = 0 \quad (\text{C.3})$$

Calculons la dérivée de la fonction LKF (1.99), et par ajout de (C.2) et (C.3), on aura :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= x^T(t) [PA_i + A_i^T P] x(t) + 2x^T(t) PA_{\tau i} x(t - \tau(t)) + x^T(t) Qx(t) \\
&\quad - (1 - \dot{\tau}(t)) x^T(t - \tau(t)) Qx(t - \tau(t)) + \bar{\tau} \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds \leq \\
&\quad x^T(t) [PA_i + A_i^T P] x(t) + 2x^T(t) PA_{\tau i} x(t - \tau(t)) + x^T(t) Qx(t) \\
&\quad - (1 - \beta) x^T(t - \tau(t)) Qx(t - \tau(t)) + \bar{\tau} \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds \\
&\quad + 2 [x^T(t) N_1 + x^T(t - \tau(t)) N_2] \left[ x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds - x(t - \tau(t)) \right] + \bar{\tau} \eta_1^T(t) X \eta_1(t) \\
&\quad - \int_{t-\tau(t)}^t \eta_1^T(s) X \eta_1(s) ds = \eta_1^T(t) E \eta_1(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \eta_2^T(t, s) \varphi \eta_2(t, s) ds
\end{aligned} \tag{C.4}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\eta_2(t, s) &= [x^T(t), x^T(t - \tau(t)), \dot{x}^T(s)]^T, \\
E &= \begin{bmatrix} \Phi_{11} + \bar{\tau} A_i^T Z A_i & \Phi_{12} + \bar{\tau} A_i^T Z A_{\tau i} \\ * & \Phi_{22} + \bar{\tau} A_{\tau i}^T Z A_{\tau i} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

où :  $\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{12}$ ,  $\Phi_{22}$ , sont définies dans (1.100). Si  $E < 0$  et  $\varphi \geq 0$ , alors  $\dot{V}(x) \leq -\varepsilon \|x(t)\|^2$  pour tout assez petit  $\varepsilon > 0$ , lequel assure la stabilité asymptotique du système (1.96). L'équation (1.100) est obtenue via  $E < 0$  et le compliment de Schur. Ceci complète la démonstration.

## C.2 Démonstration du théorème 1.20

Rappelons la FLK (1.102) :

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) \tag{C.5}$$

avec :

$$V_1(t) = \tilde{x}^T P_{\zeta} \tilde{x}$$

$$V_2(t) = \int_{t-\tau_2}^t \int_0^t \dot{x}^T R_{\zeta} \dot{x} ds d\theta$$

$$V_3(t) = \int_{t-\tau}^t x^T Q_{\zeta} x ds$$

$$V_4(t) = \int_{t-\tau_2}^t x^T S_{\zeta} x ds$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^T & \int_{t-\tau}^t x^T ds & \int_{t-\tau_2}^t x^T ds \end{bmatrix}^T, \quad P_{\zeta} = \sum_{i=1}^r \zeta_i(\varsigma(t)) P_i = \begin{bmatrix} P_{1\zeta} & P_{2\zeta} & P_{3\zeta} \\ P_{2\zeta}^T & P_{4\zeta} & P_{5\zeta} \\ P_{3\zeta}^T & P_{5\zeta}^T & P_{6\zeta}^T \end{bmatrix}$$

Le calcul de sa dérivée se fait comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(x) &= \dot{x}^T(t) P_\zeta \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \dot{P}_\zeta \tilde{x}(t) \\
\dot{V}_2(x) &= \tau_2 \dot{x}^T(t) R_\zeta \dot{x}(t) - \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) R_\zeta \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_2}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s) \dot{R}_\zeta \dot{x}(s) ds d\theta \\
\dot{V}_3(x) &= x^T(t) Q_\zeta x(t) - (1 - \dot{\tau}) x^T(t - \tau(t)) Q_\zeta x(t - \tau(t)) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s) Q_\zeta x(s) ds \\
\dot{V}_3(x) &= x^T(t) S_\zeta x(t) - x^T(t - \tau_2) S_\zeta x(t - \tau_2) + \int_{t-\tau_2}^t x^T(s) \dot{S}_\zeta x(s) ds
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Par la suite on peut écrit  $\dot{V}(x)$  sous la forme suivante :

$$\dot{V}(x) = \xi^T \Phi \xi - \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) R_\zeta \dot{x}(s) ds + \Psi \tag{C.7}$$

ou :

$$\xi = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau(t)) \\ x(t - \tau_2) \\ \frac{1}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t x(s) ds \\ \frac{1}{\tau_2 - \tau(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \end{bmatrix}^T, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & -P_{3\zeta} & \Phi_{14} & \Phi_{15} \\ * & \Phi_{22} & 0 & \Phi_{11} & \Phi_{11} \\ * & * & -S_\zeta & -\tau P_{5\zeta}^T & \Phi_{11} \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &= ((P_{1\zeta} A_\zeta + P_{2\zeta}) + (*)) + S_\zeta + Q_\zeta + \tau_2 A_\zeta^T R_\zeta A_\zeta \\
\Phi_{12} &= P_{1\zeta} A_{\tau\zeta} - (1 - \dot{\tau}(t)) P_{2\zeta} + (1 - \dot{\tau}(t)) P_{3\zeta} + \tau_2 A_\zeta^T R_\zeta A_{\tau\zeta} \\
\Phi_{14} &= \tau A_\zeta^T P_{2\zeta} + \tau P_{4\zeta} \\
\Phi_{15} &= (\tau_2 - \tau) A_\zeta^T P_{3\zeta} + (\tau_2 - \tau) P_{5\zeta} \\
\Phi_{22} &= -(1 - \dot{\tau}(t)) Q_\zeta + \tau_2 A_{\tau\zeta}^T R_\zeta A_{\tau\zeta} \\
\Phi_{24} &= \tau A_{\tau\zeta}^T P_{2\zeta} - \tau (1 - \dot{\tau}(t)) P_{4\zeta} + \tau (1 - \dot{\tau}(t)) P_{5\zeta}^T \\
\Phi_{25} &= (\tau_2 - \tau) A_\zeta^T P_{3\zeta} - (\tau_2 - \tau) (1 - \dot{\tau}(t)) (P_{5\zeta} - P_{6\zeta}) \\
\Phi_{35} &= -(\tau_2 - \tau) P_{6\zeta} \\
\Psi &= \tilde{x}^T \dot{P}_\zeta \tilde{x} + \int_{t-\tau}^t x^T(s) \dot{Q}_\zeta x(s) ds + \int_{t-\tau}^t x^T(s) \dot{S}_\zeta x(s) ds + \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s) \dot{R}_\zeta \dot{x}(s) ds d\theta
\end{aligned}$$

A cause de la contrainte (1.103), on aura :

$$\dot{V}(x) \leq \xi^T \Phi \xi - \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) R_\zeta \dot{x}(s) ds \tag{C.8}$$

Le terme  $\left( - \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) R_\zeta \dot{x}(s) ds \right)$  peut être remplacé comme dans [Seuret and Gouaisbaut, 2013].

Pour plus de détaille sur l'algorithme utilisé pour déterminer le retard maximum veuillez revenir au [Wang and Lam, 2018].

Ceci complète la démonstration.

---

## Bibliographie

---

- [Akhenak, 2004] Akhenak, A. (2004). *Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle : application au diagnostic*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- [Allouche et al., 2018] Allouche, M., Dahech, K., and Chaabane, M. (2018). Multiobjective maximum power tracking control of photovoltaic systems : T-S fuzzy model-based approach. *Soft Computing*, 22(7) :2121–2132.
- [An and Wen, 2011] An, J. and Wen, G. (2011). Improved stability criteria for time-varying delayed T-S fuzzy systems via delay partitioning approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 185(1) :83–94.
- [Aouaouda and Chadli, 2019] Aouaouda, S. and Chadli, M. (2019). Robust fault tolerant controller design for takagi-sugeno systems under input saturation. *International Journal of Systems Science*, 50(6) :1163–1178.
- [Aouaouda et al., 2014] Aouaouda, S., Chadli, M., and Karimi, H.-R. (2014). Robust static output-feedback controller design against sensor failure for vehicle dynamics. *IET Control Theory & Applications*, 8(9) :728–737.
- [Asemani and Majd, 2013] Asemani, M. H. and Majd, V. J. (2013). A robust  $H_\infty$  observer-based controller design for uncertain T-S fuzzy systems with unknown premise variables via lmi. *Fuzzy Sets and Systems*, 212 :21–40.
- [Benzaouia, 2012] Benzaouia, A. (2012). *Saturated switching systems*, volume 426. Springer Science & Business Media.
- [Benzaouia et al., 2014] Benzaouia, A., Mesquine, F., Benhayoun, M., Schulte, H., and Georg, S. (2014). Stabilization of positive constrained T-S fuzzy systems : Application to a buck converter. *Journal of the Franklin Institute*, 351(8) :4111–4123.
- [Bezzaoucha, 2013] Bezzaoucha, S. (2013). *Commande tolérante aux défauts de systèmes non linéaires représentés par des modèles de Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Université de Lorraine.
- [Blanco, 2001] Blanco, Y. (2001). *Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno et leur usage pour la commande des systèmes non linéaires*. PhD thesis, Lille 1.
- [Bouarar, 2009] Bouarar, T. (2009). *Contribution à la synthèse de lois de commande pour les descripteurs de type Takagi-Sugeno incertains et perturbés*. PhD thesis, Reims.

- [Bouarar et al., 2009] Bouarar, T., Guelton, K., and Manamanni, N. (2009). Static output feedback controller design for takagi-sugeno systems—a fuzzy lyapunov lmi approach. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, pages 4150–4155. Shanghai, China.
- [Bouarar et al., 2010] Bouarar, T., Guelton, K., and Manamanni, N. (2010). Robust fuzzy lyapunov stabilization for uncertain and disturbed takagi–sugeno descriptors. *ISA transactions*, 49(4) :447–461.
- [Bouarar et al., 2013] Bouarar, T., Guelton, K., and Manamanni, N. (2013). Robust non-quadratic static output feedback controller design for takagi–sugeno systems using descriptor redundancy. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 26(2) :739–756.
- [Bourahala, 2018] Bourahala, F. (2018). *Contribution à la commande et à la stabilisation des systèmes non-linéaires avec retard*. PhD thesis, université Setif 1.
- [Bourahala et al., 2017] Bourahala, F., Guelton, K., Manamanni, N., and Khaber, F. (2017). Relaxed controller design conditions for Takagi-Sugeno systems with state time-varying delays. *International Journal of Fuzzy Systems*, 19(5) :1406–1416.
- [Boyd et al., 1994] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM.
- [Cao and Frank, 2000] Cao, Y.-Y. and Frank, P. M. (2000). Robust  $H_\infty$  disturbance attenuation for a class of uncertain discrete-time fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(4) :406–415.
- [Cao and Frank, 2001] Cao, Y.-Y. and Frank, P. M. (2001). Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi–Sugeno fuzzy models. *Fuzzy sets and systems*, 124(2) :213–229.
- [Cao and Lin, 2003] Cao, Y.-Y. and Lin, Z. (2003). Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(1) :57–67.
- [Cao et al., 2003] Cao, Y.-Y., Lin, Z., and Chen, B. M. (2003). An output feedback  $H_\infty$  controller design for linear systems subject to sensor nonlinearities. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 50(7) :914–921.
- [Chadli, 2002] Chadli, M. (2002). *Stabilité et commande de systèmes décrits par des multimodèles*. PhD thesis, Vandoeuvre-les-Nancy, INPL.
- [Chadli, 2006] Chadli, M. (2006). On the stability analysis of uncertain fuzzy models. *International Journal of Fuzzy Systems*, 8(4) :224–231.
- [Chadli and Borne, 2012] Chadli, M. and Borne, P. (2012). *Multimodèles en automatique : outils avancés d’analyse et de synthèse*. Hermès science publications-Lavoisier.
- [Chadli and Guerra, 2012] Chadli, M. and Guerra, T.-M. (2012). Lmi solution for robust static output feedback control of discrete takagi–sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(6) :1160–1165.
- [Chadli and Karimi, 2012] Chadli, M. and Karimi, H. R. (2012). Robust observer design for unknown inputs Takagi–Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(1) :158–164.

- [Chadli et al., 2008] Chadli, M., Rabhi, A., and El Hajjaji, A. (2008). Observer-based  $H_\infty$  fuzzy control for vehicle active suspension. In *2008 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1393–1398.
- [Chen et al., 2009] Chen, B., Liu, X., Lin, C., and Liu, K. (2009). Robust  $H_\infty$  control of Takagi–Sugeno fuzzy systems with state and input time delays. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(4) :403–422.
- [Cherifi et al., 2018] Cherifi, A., Guelton, K., and Arcese, L. (2018). Uncertain TS model-based robust controller design with d-stability constraints—a simulation study of quadrotor attitude stabilization. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 67 :419–429.
- [Cherifi et al., 2019] Cherifi, A., Guelton, K., Arcese, L., and Leite, V. J. (2019). Global non-quadratic d-stabilization of Takagi–Sugeno systems with piecewise continuous membership functions. *Applied Mathematics and Computation*, 351 :23–36.
- [Chiu, 2010] Chiu, C.-S. (2010). T S fuzzy maximum power point tracking control of solar power generation systems. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 25(4) :1123–1132.
- [Cobb, 1981] Cobb, D. (1981). Feedback and pole placement in descriptor variable systems. *International Journal of Control*, 33(6) :1135–1146.
- [Da Silva et al., 1997] Da Silva, J. G., Fischman, A., Tarbouriech, S., Dion, J., and Dugard, L. (1997). Synthesis of state feedback for linear systems subject to control saturation by an LMI-based approach. *IFAC Proceedings Volumes*, 30(16) :207–212.
- [da Silva, 1997] da Silva, J. M. G. (1997). *Sur la stabilité locale de systèmes linéaires avec saturation des commandes*. PhD thesis, Université Paul Sabatier-Toulouse III.
- [da Silva Jr and Tarbouriech, 2006] da Silva Jr, J. G. and Tarbouriech, S. (2006). Anti-windup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 55(3) :184–192.
- [Dahmani et al., 2013] Dahmani, H., Chadli, M., Rabhi, A., and El Hajjaji, A. (2013). Road curvature estimation for vehicle lane departure detection using a robust Takagi–Sugeno fuzzy observer. *Vehicle System Dynamics*, 51(5) :581–599.
- [Dang et al., 2017] Dang, Q. V., Vermeiren, L., Dequidt, A., and Dambrine, M. (2017). Robust stabilizing controller design for Takagi–Sugeno fuzzy descriptor systems under state constraints and actuator saturation. *Fuzzy Sets and Systems*, 329 :77–90.
- [Dash et al., 2003] Dash, S., Rengaswamy, R., and Venkatasubramanian, V. (2003). Fuzzy-logic based trend classification for fault diagnosis of chemical processes. *Computers & Chemical Engineering*, 27(3) :347–362.
- [De Larminat, 1993] De Larminat, P. (1993). *Automatique : commande des systèmes linéaires*. Hermes Paris.
- [Delice and Sipahi, 2011] Delice, I. I. and Sipahi, R. (2011). Delay-independent stability test for systems with multiple time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4) :963–972.
- [Dounis et al., 2015] Dounis, A. I., Stavriniadis, S., Kofinas, P., and Tseles, D. (2015). Fuzzy-PID controller for MPPT of PV system optimized by big bang-big crunch algorithm. In *2015 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–8.



- [Du and Zhang, 2009] Du, H. and Zhang, N. (2009). Static output feedback control for electrohydraulic active suspensions via T-S fuzzy model approach. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 131(5).
- [Egeland and Gravdahl, 2002] Egeland, O. and Gravdahl, J. T. (2002). *Modeling and simulation for automatic control*, volume 76. Marine Cybernetics Trondheim, Norway.
- [Feng, 2004] Feng, G. (2004).  $H$  controller design of fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 34(1) :283–292.
- [Feng, 2006] Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 14(5) :676–697.
- [Feng et al., 2005] Feng, G., Chen, C.-L., Sun, D., and Zhu, Y. (2005).  $H$  controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions and bilinear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(1) :94–103.
- [Feng and Harris, 2001] Feng, M. and Harris, C. J. (2001). Piecewise lyapunov stability conditions of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 31(2) :259–262.
- [Fridman, 2014] Fridman, E. (2014). *Introduction to time-delay systems : Analysis and control*. Springer.
- [Gahinet et al., 1995] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A., and Chilali, M. (1995). Matlab lmi control toolbox. *The MathWorks Inc*.
- [Gassara et al., 2012] Gassara, H., El Hajjaji, A., Benzaouia, A., and Chaabane, M. (2012).  $H_\infty$  control for time-delay takagi-sugeno fuzzy systems with actuator saturation. In *2012 20th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED)*, pages 830–835. IEEE.
- [Gassara et al., 2014] Gassara, H., Kchaou, M., El Hajjaji, A., and Chaabane, M. (2014). Control of time delay fuzzy descriptor systems with actuator saturation. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 33(12) :3739–3756.
- [Gasso, 2000] Gasso, K. (2000). *Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multi-modèle*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- [Gasso et al., 1999] Gasso, K., Mourot, G., Boukhriss, A., and Ragot, J. (1999). Optimisation de la structure d’un modèle de takagi-sugeno. *Actes des rencontres francophones LFA’99, Valenciennes*, pages 233–240.
- [González et al., 2016] González, T., Márquez, R., Bernal, M., and Guerra, T. M. (2016). Non-quadratic controller and observer design for continuous ts models : A discrete-inspired solution. *International Journal of Fuzzy Systems*, 18(1) :1–14.
- [Grimm et al., 2004] Grimm, G., Teel, A. R., and Zaccarian, L. (2004). Linear lmi-based external anti-windup augmentation for stable linear systems. *Automatica*, 40(11) :1987–1996.
- [Gu et al., 2003] Gu, K., Chen, J., and Kharitonov, V. L. (2003). *Stability of time-delay systems*. Springer Science & Business Media.
- [Guelton, 2014] Guelton, K. (2014). Some refinements on stability analysis and stabilization of second order TS models using line-integral lyapunov functions. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3) :7988–7993.

- [Guerra et al., 2012] Guerra, T. M., Bernal, M., Guelton, K., and Labiod, S. (2012). Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi-Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, 201 :40–54.
- [Guerra et al., 2015] Guerra, T. M., Estrada-Manzo, V., and Lendek, Z. (2015). Observer design for Takagi-Sugeno descriptor models : An LMI approach. *Automatica*, 52 :154–159.
- [Guerra et al., 2008] Guerra, T. M., Kruszewski, A., and Bernal, M. (2008). Control law proposition for the stabilization of discrete Takagi–Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(3) :724–731.
- [Guerra et al., 2006] Guerra, T.-M., Kruszewski, A., Vermeiren, L., and Tirmant, H. (2006). Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi–Sugeno’s form. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(9) :1248–1259.
- [Guerra and Vermeiren, 2004] Guerra, T. M. and Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno’s form. *Automatica*, 40(5) :823–829.
- [Guzmán et al., 2018] Guzmán, M. J. V., Lara, J. L. R., Hernández, J. A. R., and Alazki, H. (2018). Robust control for the dynamics of an unmanned surface vehicle under the perturbations (marine waves and currents). In *2018 15<sup>th</sup> International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pages 1–6, Mexico City, Mexico.
- [Han and Morioka, 2007] Han, H. and Morioka, Y. (2007). Fuzzy control design in consideration of input constraint and reducing LMIs conservatism. In *2007 IEEE International Fuzzy Systems Conference*, pages 1–6, London, UK.
- [Henrion, 1999] Henrion, D. (1999). *Stabilité des systèmes linéaires incertains à commande contrainte*. PhD thesis, Institut national des sciences appliquées de Toulouse.
- [Henrion and Garulli, 2005] Henrion, D. and Garulli, A. (2005). *Positive polynomials in control*, volume 312. Springer Science & Business Media.
- [Henrion and Tarbouriech, 1999] Henrion, D. and Tarbouriech, S. (1999). Lmi relaxations for robust stability of linear systems with saturating controls. *Automatica*, 35(9) :1599–1604.
- [Houda et al., 2020] Houda, K., Saifia, D., Chadli, M., and Labiod, S. (2020).  $H_\infty$  fuzzy proportional integral state feedback controller of photovoltaic systems under asymmetric actuator constraints. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, page <https://doi.org/10.1177/0142331220921579>.
- [Hu et al., 2002] Hu, T., Lin, Z., and Chen, B. M. (2002). An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, 38(2) :351–359.
- [Ichalal, 2009] Ichalal, D. (2009). *Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Université de Lorraine.
- [Jadbabaie, 1999] Jadbabaie, A. (1999). A reduction in conservatism in stability and 52 gain analysis of takagi-sugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities. *IFAC Proceedings Volumes*, 32(2) :5451–5455.
- [Johansson, 1999] Johansson, M. (1999). *Piecewise linear control systems*. PhD thesis, Lund Institute of Technology, Sweden.

- [Johansson et al., 1999] Johansson, M., Rantzer, A., and Arzen, K.-E. (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(6) :713–722.
- [Jungers and Castelan, 2011] Jungers, M. and Castelan, E. B. (2011). Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators. *Systems & Control Letters*, 60(3) :169–173.
- [Jungers and Tarbouriech, 2016] Jungers, M. and Tarbouriech, S. (2016). Anti-windup strategies for discrete-time switched systems subject to input saturation. *International Journal of Control*, 89(5) :919–937.
- [Kaliora and Astolfi, 2004] Kaliora, G. and Astolfi, A. (2004). Nonlinear control of feedforward systems with bounded signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(11) :1975–1990.
- [Kau et al., 2007] Kau, S.-W., Lee, H.-J., Yang, C.-M., Lee, C.-H., Hong, L., and Fang, C.-H. (2007). Robust fuzzy static output feedback control of ts fuzzy systems with parametric uncertainties. *Fuzzy sets and systems*, 158(2) :135–146.
- [Kawamoto et al., 1992] Kawamoto, S., Tada, K., Ishigame, A., and Taniguchi, T. (1992). An approach to stability analysis of second order fuzzy systems. In *[1992 Proceedings] IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 1427–1434.
- [Kiener et al., 2014] Kiener, G. A., Lehmann, D., and Johansson, K. H. (2014). Actuator saturation and anti-windup compensation in event-triggered control. *Discrete event dynamic systems*, 24(2) :173–197.
- [Kim, 2016] Kim, J.-H. (2016). Further improvement of jensen inequality and application to stability of time-delayed systems. *Automatica*, 64 :121–125.
- [Kim et al., 2009] Kim, S. H., Lee, C. H., and Park, P. (2009).  $H_\infty$  state-feedback control for fuzzy systems with input saturation via fuzzy weighting-dependent lyapunov functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 57(6) :981–990.
- [Koutroulis et al., 2001] Koutroulis, E., Kalaitzakis, K., and Voulgaris, N. C. (2001). Development of a microcontroller-based, photovoltaic maximum power point tracking control system. *IEEE Transactions on power electronics*, 16(1) :46–54.
- [Kruszewski, 2006] Kruszewski, A. (2006). *Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du HainautCambresis.
- [Kuo, 1995] Kuo, B. (1995). Automatic control of dynamic systems.
- [Kwon et al., 2016] Kwon, O., Park, M.-J., Park, J. H., and Lee, S.-M. (2016). Stability and stabilization of ts fuzzy systems with time-varying delays via augmented Lyapunov-Krasovskii functionals. *Information Sciences*, 372 :1–15.
- [Lee et al., 2001] Lee, K. R., Jeung, E. T., and Park, H. B. (2001). Robust fuzzy  $H_\infty$  control for uncertain nonlinear systems via state feedback : an lmi approach. *Fuzzy sets and systems*, 120(1) :123–134.
- [Li et al., 2009a] Li, Q.-K., Zhao, J., Dimirovski, G. M., and Liu, X.-J. (2009a). Tracking control for switched linear systems with time-delay : a state-dependent switching method. *Asian Journal of Control*, 11(5) :517–526.

- [Li et al., 2009b] Li, X., Zhao, X.-P., and Chen, J. (2009b). Controller design for electric power steering system using ts fuzzy model approach. *International Journal of Automation and Computing*, 6(2) :198–203.
- [Li and Lin, 2016] Li, Y. and Lin, Z. (2016). On the estimation of the domain of attraction for linear systems with asymmetric actuator saturation via asymmetric lyapunov functions. In *2016 American Control Conference (ACC)*, pages 1136–1141, Boston, MA, USA.
- [Li and Lin, 2018] Li, Y. and Lin, Z. (2018). An asymmetric lyapunov function for linear systems with asymmetric actuator saturation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(5) :1624–1640.
- [Lian et al., 2017] Lian, Z., He, Y., Zhang, C.-K., and Wu, M. (2017). Further robust stability analysis for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying delay via relaxed integral inequality. *Information Sciences*, 409 :139–150.
- [Liapounoff, 1907] Liapounoff, A. (1907). Problème général de la stabilité du mouvement. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, volume 9, pages 203–474.
- [Lihua et al., 2008] Lihua, Z., Yuqiang, W., Lei, G., and Haojie, C. (2008). A novel research approach on network control systems. In *2008 International Conference on Internet Computing in Science and Engineering*, pages 262–265, Harbin, China.
- [Lin, 1997] Lin, Z. (1997). Semi-global stabilization of linear systems with position and rate-limited actuators. *Systems & Control Letters*, 30(1) :1–11.
- [Liu and Yang, 2017] Liu, D. and Yang, G.-H. (2017). Event-triggered control for linear systems with actuator saturation and disturbances. *IET Control Theory & Applications*, 11(9) :1351–1359.
- [Liu et al., 2013] Liu, G., Liu, X., and Zeng, Y. (2013). A new fuzzy lyapunov function approach to stability analysis and control synthesis for takagi-sugeno fuzzy systems. In *2013 25th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, pages 3068–3073, Guiyang, China.
- [Lo and Lin, 2003] Lo, J.-C. and Lin, M.-L. (2003). Robust  $H_\infty$  nonlinear control via fuzzy static output feedback. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 50(11) :1494–1502.
- [Luo and Zhao, 2015] Luo, J. and Zhao, J. (2015). Robust control for a class of uncertain switched fuzzy systems with saturating actuators. *Asian Journal of Control*, 17(4) :1462–1469.
- [Ma et al., 2018] Ma, C., Qiao, H., and Kang, E. (2018). Mixed  $H_\infty$  and passive depth control for autonomous underwater vehicles with fuzzy memorized sampled-data controller. *International Journal of Fuzzy Systems*, 20(2) :621–629.
- [Ma et al., 1998] Ma, X.-J., Sun, Z.-Q., and He, Y.-Y. (1998). Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 6(1) :41–51.
- [Mahmoudabadi et al., 2017] Mahmoudabadi, P., Shasadeghi, M., and Zarei, J. (2017). New stability and stabilization conditions for nonlinear systems with time-varying delay based on delay-partitioning approach. *ISA transactions*, 70 :46–52.
- [Mansouri et al., 2009] Mansouri, B., Manamanni, N., Guelton, K., Kruszewski, A., and Guerra, T.-M. (2009). Output feedback lmi tracking control conditions with  $H_\infty$  criterion for uncertain and disturbed t-s models. *Information Sciences*, 179(4) :446–457.

- [Márquez et al., 2016] Márquez, R., Guerra, T. M., Bernal, M., and Kruszewski, A. (2016). A non-quadratic lyapunov functional for  $H_\infty$  control of nonlinear systems via Takagi-Sugeno models. *Journal of the Franklin Institute*, 353(4) :781–796.
- [Márquez et al., 2013] Márquez, R., Guerra, T. M., Kruszewski, A., and Bernal, M. (2013). Improvements on non-quadratic stabilization of Takagi-Sugeno models via line-integral Lyapunov functions. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(20) :473–478.
- [Moon et al., 2001] Moon, Y. S., Park, P., Kwon, W. H., and Lee, Y. S. (2001). Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. *International Journal of control*, 74(14) :1447–1455.
- [Morere, 2001] Morere, Y. (2001). *Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. PhD thesis, université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis.
- [Mozelli et al., 2009a] Mozelli, L. A., Palhares, R. M., and Avellar, G. S. (2009a). A systematic approach to improve multiple lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. *Information Sciences*, 179(8) :1149–1162.
- [Mozelli et al., 2009b] Mozelli, L. A., Palhares, R. M., Souza, F., and Mendes, E. M. (2009b). Reducing conservativeness in recent stability conditions of ts fuzzy systems. *Automatica*, 45(6) :1580–1583.
- [Nasri et al., 2017] Nasri, M., Saifia, D., Chadli, M., and Labiod, S. (2017).  $H_\infty$  fuzzy control for electrical power steering subject to actuator saturation. In *Chadli M., Bououden S., Ziani S., Zelinka I. (eds) Advanced Control Engineering Methods in Electrical Engineering Systems. ICEECA 2017. Lecture Notes in Electrical Engineering*, volume 522, pages 30–44.
- [Nasri et al., 2019a] Nasri, M., Saifia, D., Chadli, M., and Labiod, S. (2019a). Fuzzy  $H_\infty$  delay-independent stabilization of depth control for underwater vehicle with input constraint. In *Bououden S., Chadli M., Ziani S., Zelinka I. (eds) Proceedings of the 4th International Conference on Electrical Engineering and Control Applications. ICEECA 2019. Lecture Notes in Electrical Engineering*, volume 682, pages 305–318.
- [Nasri et al., 2019b] Nasri, M., Saifia, D., Chadli, M., and Labiod, S. (2019b).  $H_\infty$  static output feedback control for electrical power steering subject to actuator saturation via fuzzy lyapunov functions. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 41(12) :3340–3351.
- [Nasri et al., 2019c] Nasri, M., Saifia, D., Chadli, M., and Labiod, S. (2019c).  $H_\infty$  switching fuzzy control of solar power generation systems with asymmetric input constraint. *Asian Journal of Control*, 21(4) :1869–1880.
- [Nasri et al., 2020] Nasri, M., Saifia, D., Chadli, M., and Labiod, S. (2020).  $H_\infty$  Delay-independent stabilization for Takagi Sugeno fuzzy system based on saturated output control. In *2020 28<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, pages 653–658, Saint-Raphael, France.
- [Nguyen et al., 2016] Nguyen, A.-T., Dambrine, M., and Lauber, J. (2016). Simultaneous design of parallel distributed output feedback and anti-windup compensators for constrained Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Asian Journal of Control*, 18(5) :1641–1654.

- [Nguyen et al., 2017] Nguyen, A.-T., Tanaka, K., Dequidt, A., and Dambrine, M. (2017). Static output feedback design for a class of constrained Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Journal of the Franklin Institute*, 354(7) :2856–2870.
- [Nguyen and Jabbari, 2000] Nguyen, T. and Jabbari, F. (2000). Output feedback controllers for disturbance attenuation with actuator amplitude and rate saturation. *Automatica*, 36(9) :1339–1346.
- [Ning et al., 2017] Ning, D., Sun, S., Zhang, F., Du, H., Li, W., and Zhang, B. (2017). Disturbance observer based Takagi-Sugeno fuzzy control for an active seat suspension. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 93 :515–530.
- [Ohtake et al., 2003] Ohtake, H., Tanaka, K., and Wang, H. O. (2003). Piecewise nonlinear control. In *42<sup>nd</sup> IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No. 03CH37475)*, volume 5, pages 4735–4740, Maui, HI, USA.
- [Osorio-Gordillo et al., 2018] Osorio-Gordillo, G., Astorga-Zaragoza, C., Pérez Estrada, A., Vargas-Méndez, R., Darouach, M., and Boutat-Baddas, L. (2018). Fault estimation for descriptor linear systems based on the generalised dynamic observer. *International Journal of Systems Science*, 49(11) :2398–2409.
- [Pan et al., 2011] Pan, J., Fei, S., Guerra, T. M., and Xue, M. (2011). On non-quadratic local static output feedback controller for continuous-time Takagi-Sugeno models. In *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*, pages 2964–2969.
- [Pan et al., 2012] Pan, J., Fei, S., Ni, Y., and Xue, M. (2012). New approaches to relaxed stabilization conditions and h-infinity control designs for T-S fuzzy systems. *Journal of Control Theory and Applications*, 10(1) :82–91.
- [Qiu et al., 2012] Qiu, J., Feng, G., and Gao, H. (2012). Static-output-feedback  $H_\infty$  control of continuous-time t-s fuzzy affine systems via piecewise lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(2) :245–261.
- [Rhee and Won, 2006] Rhee, B.-J. and Won, S. (2006). A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy sets and systems*, 157(9) :1211–1228.
- [Saifia, 2013] Saifia, D. (2013). *Commande des systèmes non linéaires avec contraintes sur l’entrée*. PhD thesis, université de Jijel.
- [Saifia et al., 2015] Saifia, D., Chadli, M., Karimi, H. R., and Labiod, S. (2015). Fuzzy control for electric power steering system with assist motor current input constraints. *Journal of the Franklin Institute*, 352(2) :562–576.
- [Saifia et al., 2011] Saifia, D., Chadli, M., and Labiod, S. (2011).  $H_\infty$  control of multiple model subject to actuator saturation : application to quarter-car suspension system. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 69(1) :81–90.
- [Saifia et al., 2012a] Saifia, D., Chadli, M., Labiod, S., and Guerra, T. M. (2012a). Robust  $H_\infty$  static output feedback stabilization of T-S fuzzy systems subject to actuator saturation. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 10(3) :613–622.
- [Saifia et al., 2020] Saifia, D., Chadli, M., Labiod, S., and Guerra, T. M. (2020). Robust  $H_\infty$  static output-feedback control for discrete-time fuzzy systems with actuator saturation via fuzzy lyapunov functions. *Asian Journal of Control*, 22(2) :611–623.

- [Saifia et al., 2012b] Saifia, D., Chadli, M., Labiod, S., and Karimi, H. R. (2012b). Fuzzy control of dc-dc converters with input constraint. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.
- [Sala and Arino, 2007] Sala, A. and Arino, C. (2007). Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control : Applications of polya's theorem. *Fuzzy sets and systems*, 158(24) :2671–2686.
- [Saravanakumar et al., 2017] Saravanakumar, R., Ali, M. S., and Karimi, H. R. (2017). Robust  $H_\infty$  control of uncertain stochastic markovian jump systems with mixed time-varying delays. *International Journal of Systems Science*, 48(4) :862–872.
- [Selvaraj et al., 2017] Selvaraj, P., Kaviarasan, B., Sakthivel, R., and Karimi, H. R. (2017). Fault-tolerant smc for takagi–sugeno fuzzy systems with time-varying delay and actuator saturation. *IET Control Theory & Applications*, 11(8) :1112–1123.
- [Seuret and Gouaisbaut, 2013] Seuret, A. and Gouaisbaut, F. (2013). Wirtinger-based integral inequality : Application to time-delay systems. *Automatica*, 49(9) :2860–2866.
- [Seuret et al., 2016] Seuret, A., Prieur, C., Tarbouriech, S., and Zaccarian, L. (2016). LQ-based event-triggered controller co-design for saturated linear systems. *Automatica*, 74 :47–54.
- [Shen et al., 2018] Shen, Q., Yue, C., Goh, C. H., and Wang, D. (2018). Active fault-tolerant control system design for spacecraft attitude maneuvers with actuator saturation and faults. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 66(5) :3763–3772.
- [Silvestre and Pascoal, 2007] Silvestre, C. and Pascoal, A. (2007). Depth control of the INFANTE AUV using gain-scheduled reduced order output feedback. *Control Engineering Practice*, 15(7) :883–895.
- [Souza et al., 2014] Souza, F. O., Campos, V. C., and Palhares, R. M. (2014). On delay-dependent stability conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Journal of the Franklin Institute*, 351(7) :3707–3718.
- [Souza et al., 2009] Souza, F. O., Mozelli, L. A., and Palhares, R. M. (2009). On stability and stabilization of T-S fuzzy time-delayed systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(6) :1450–1455.
- [Stoorvogel and Saberi, 1999] Stoorvogel, A. A. and Saberi, A. (1999). Output regulation of linear plants with actuators subject to amplitude and rate constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control : IFAC-Affiliated Journal*, 9(10) :631–657.
- [Syaichu-Rohman and Middleton, 2004] Syaichu-Rohman, A. and Middleton, R. H. (2004). Anti-windup schemes for discrete time systems : An LMI-based design. In *2004 5th Asian Control Conference (IEEE Cat. No. 04EX904)*, volume 1, pages 554–561, Melbourne, VIC, Australia.
- [Tabataba'i-Nasab and Moosavian, 2019] Tabataba'i-Nasab, F. S., K. K. A. and Moosavian, S. A. A. (2019). Adaptive nonlinear control of an autonomous underwater vehicle. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, (11) :3121–3131.
- [Takagi and Sugeno, 1985] Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, (1) :116–132.

- [Tanaka et al., 2003] Tanaka, K., Hori, T., and Wang, H. O. (2003). A multiple lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 11(4) :582–589.
- [Tanaka et al., 1996] Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H. O. (1996). Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : quadratic stabilizability,  $H_\infty$  control theory, and linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 4(1) :1–13.
- [Tanaka et al., 1998] Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and lmi-based designs. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 6(2) :250–265.
- [Tanaka and Sano, 1994] Tanaka, K. and Sano, M. (1994). A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 2(2) :119–134.
- [Tanaka and Sugeno, 1992] Tanaka, K. and Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy sets and systems*, 45(2) :135–156.
- [Tanaka and Wang, 2001] Tanaka, K. and Wang, H. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*, volume ISBN 0-471-32324-190000. John Wiley Son Eds, New York, Wiley-Inter science.
- [Taniguchi et al., 2000] Taniguchi, T., Tanaka, K., and Wang, H. O. (2000). Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(4) :442–452.
- [Taniguchi et al., 1999] Taniguchi, T., Tanaka, K., Yamafuji, K., and Wang, H. O. (1999). A new PDC for fuzzy reference models. In *FUZZ-IEEE'99. 1999 IEEE International Fuzzy Systems Conference Proceedings (Cat. No. 99CH36315)*, volume 2, pages 898–903.
- [Tarbouriech and Biannic, 2009] Tarbouriech, S. and Biannic, J. (2009). Optimisation and implementation of dynamic anti-windup compensator with multiple saturation in flight control system. *Control Engineering Practice*, 17(6) :703–713.
- [Tarbouriech et al., 2002] Tarbouriech, S., Garcia, G., and da Silva Jr, J. G. (2002). Robust stability of uncertain polytopic linear time-delay systems with saturating inputs : an LMI approach. *Computers & Electrical Engineering*, 28(3) :157–169.
- [Tarbouriech et al., 2011] Tarbouriech, S., Garcia, G., da Silva Jr, J. M. G., and Queinnec, I. (2011). *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media.
- [Ting, 2008] Ting, C.-S. (2008). A robust fuzzy control approach to stabilization of nonlinear time-delay systems with saturating inputs. *International Journal of Fuzzy Systems*, 10(1).
- [Tognetti et al., 2011] Tognetti, E. S., Oliveira, R. C., and Peres, P. L. (2011). Improved stabilization conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems via fuzzy integral lyapunov functions. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 4970–4975, San Francisco, CA, USA.
- [Trinh and Hien, 2015] Trinh, H. and Hien, L. V. (2015). Refined jensen-based inequality approach to stability analysis of time-delay systems. *IET Control Theory & Applications*, 9(14) :2188–2194.



- [Tseng and Chen, 2001] Tseng, C.-S. and Chen, B.-S. (2001).  $H_\infty$  decentralized fuzzy model reference tracking control design for nonlinear interconnected systems. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 9(6) :795–809.
- [Tuan et al., 2001] Tuan, H. D., Apkarian, P., Narikiyo, T., and Yamamoto, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 9(2) :324–332.
- [Vaidyanathan and Azar, 2016] Vaidyanathan, S. and Azar, A. T. (2016). Takagi-sugeno fuzzy logic controller for liu-chen four-scroll chaotic system. *International Journal of Intelligent Engineering Informatics*, 4(2) :135–150.
- [Verbruggen et al., 1999] Verbruggen, H. B. et al. (1999). *Fuzzy logic control : advances in applications*, volume 23. World Scientific.
- [Wang et al., 1996] Wang, H. O., Tanaka, K., and Griffin, M. F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems : Stability and design issues. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 4(1) :14–23.
- [Wang and Lam, 2017] Wang, L. and Lam, H.-K. (2017). A new approach to stability and stabilization analysis for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with time delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(4) :2460–2465.
- [Wang and Lam, 2018] Wang, L. and Lam, H.-K. (2018). New stability criterion for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying delay. *IEEE Transactions on cybernetics*, 49(4) :1551–1556.
- [Wong et al., 1997] Wong, L., Leung, F. H., and Tam, P. K. (1997). Stability design of ts model based fuzzy systems. In *Proceedings of 6th International Fuzzy Systems Conference*, volume 1, pages 83–86.
- [Wu and Li, 2008] Wu, H.-N. and Li, H.-X. (2008).  $H_\infty$  fuzzy observer-based control for a class of nonlinear distributed parameter systems with control constraints. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(2) :502–516.
- [Wu et al., 2010] Wu, M., He, Y., and She, J.-H. (2010). *Stability analysis and robust control of time-delay systems*, volume 22. Springer.
- [Xiaodong and Qingling, 2003] Xiaodong, L. and Qingling, Z. (2003). New approaches to  $H_\infty$  controller designs based on fuzzy observers for ts fuzzy systems via lmi. *Automatica*, 39(9) :1571–1582.
- [Xu and Lam, 2006] Xu, S. and Lam, J. (2006). *Robust control and filtering of singular systems*, volume 332. Springer.
- [Yang and Tong, 2015] Yang, W. and Tong, S. (2015). Output feedback robust stabilization of switched fuzzy systems with time-delay and actuator saturation. *Neurocomputing*, 164 :173–181.
- [Yoneyama, 2007] Yoneyama, J. (2007). Robust stability and stabilization for uncertain takagi-sugeno fuzzy time-delay systems. *Fuzzy sets and systems*, 158(2) :115–134.
- [Yoneyama and Ichikawa, 1999] Yoneyama, J. and Ichikawa, A. (1999).  $H_\infty$  for Takagi-Sugeno fuzzy descriptor systems. In *IEEE SMC'99 Conference Proceedings. 1999 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (Cat. No. 99CH37028)*, volume 3, pages 28–33, Tokyo, Japan.

- [Zaccarian and Teel, 2011] Zaccarian, L. and Teel, A. R. (2011). *Modern anti-windup synthesis : control augmentation for actuator saturation*, volume 36. Princeton University Press.
- [Zadeh et al., 1997] Zadeh, A. G., Fahim, A., and El-Gindy, M. (1997). Neural network and fuzzy logic applications to vehicle systems : literature survey. *International Journal of Vehicle Design*, 18(2) :132–193.
- [Zeng et al., 2014] Zeng, H.-B., Park, J. H., Xia, J.-W., and Xiao, S.-P. (2014). Improved delay-dependent stability criteria for T-S fuzzy systems with time-varying delay. *Applied Mathematics and Computation*, 235 :492–501.
- [Zerar et al., 2009] Zerar, M., Cazaurang, F., and Zolghadri, A. (2009). Coupled linear parameter varying and flatness-based approach for space re-entry vehicles guidance. *IET control theory & applications*, 3(8) :1081–1092.
- [Zhang and Feng, 2008] Zhang, H. and Feng, G. (2008). Stability analysis and  $H_\infty$  controller design of discrete-time fuzzy large-scale systems based on piecewise lyapunov functions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 38(5) :1390–1401.
- [Zhang et al., 2011] Zhang, K., Jiang, B., and Shi, P. (2011). Fault estimation observer design for discrete-time takagi–sugeno fuzzy systems based on piecewise lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 20(1) :192–200.
- [Zhang et al., 2016] Zhang, X., Xiao, Y., Zhang, G., Sun, X., and Zhao, X. (2016). Delay-independent stabilization of depth control for unmanned underwater vehicle. In *2016 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, pages 2494–2499, Harbin, China.
- [Zhao et al., 2012] Zhao, L., Gao, H., and Karimi, H. R. (2012). Robust stability and stabilization of uncertain t–s fuzzy systems with time-varying delay : an input–output approach. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 21(5) :883–897.
- [Zhao and Gao, 2011] Zhao, Y. and Gao, H. (2011). Fuzzy-model-based control of an overhead crane with input delay and actuator saturation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1) :181–186.
- [Zhao et al., 2009] Zhao, Y., Wu, J., and Shi, P. (2009).  $H_\infty$  control of non-linear dynamic systems : a new fuzzy delay partitioning approach. *IET control theory & applications*, 3(7) :917–928.
- [Zheng and Wu, 2008] Zheng, Q. and Wu, F. (2008). Output feedback control of saturated discrete-time linear systems using parameter-dependent lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 57(11) :896–903.

**ملخص:** يركز البحث المقدم في هذه الرسالة على استقرار الأنظمة الموصوفة بنماذج تاكاجي-سوجينو في وجود تشبع المحرك والاضطرابات الخارجية. بداية، تم تطوير المناهج التي تستند إلى دالة تربيعية لليابونوف. تسمح هذه بتوليف قوانين تحكم غير الخطي برجوع الحالة وتحكم غير خطي برجوع المخرج، وتحكم غير خطي برجوع المخرج عبر واصفات تاكاجي-سوجينو، من خلال حل مجموعة من القيود علي شكل المتراجحات ذات المصفوفات الخطية. ومع ذلك، تظل نتائج هذا النهج متشائمة إزاء جميع الحلول المتاحة لمشكلة قوانين التحكم. للحد من هذه النزعة المحافظة، تم اقتراح مناهج جديدة تستند إلى وظيفة دالة ليابونوف غير تربيعية. من جهة أخرى، يعتبر التأخير الزمني مصدر آخر لعدم الاستقرار والأداء المتدهور. سمح لنا استخدام وظيفة تسمى ليابونوف-كرازوفسكي بتوليف قوانين التحكم غير الخطي برجوع الحالة وتحكم غير خطي برجوع المخرج وتحسينها من حيث المحافظة من خلال دالة ليابونوف-كرازوفسكي غير تربيعية جديدة.

**كلمات مفتاحية:** الأنظمة غير الخطية، نماذج تاكاجي-سوجينو، أداة  $H_\infty$ ، متراجحات ذات المصفوفات الخطية، تشبع المحرك، أنظمة ذات تأخير، دالة ليابونوف غير تربيعية،

**Abstract :** The research presented in this thesis focuses on the stabilization of systems described by Takagi-Sugeno models in the presence of actuator saturation and external disturbances. Approaches based on a quadratic Lyapunov function are first developed. These allow the synthesis of PDC (Distributed Parallel Compensation), SOF (Static Output Feedback), and SOF descriptor control laws by resolution of a set of LMIs (Linear Linear Inequalities) constraints. The results of these first approaches , remain pessimistic with respect to all of the solutions available to the problem of synthesizing control laws. In order to reduce this conservatism, new approaches based on a non-quadratic Lyapunov function are proposed. On the other hand, time delay is another source of instability and performance degradation. The use of a so-called Lyapunov-Krasovskii function (LKF) allowed us the synthesis of a PDC and SOF control laws and improve them in terms of conservatism via a new non-quadratic LKF.

**Key words :** Nonlinear systems, Takagi-Sugeno models, LMI,  $H_\infty$  Criterion, Actuator saturation, Time Delay systems, Non quadratic Lyapunov functions.

**Résumé :** Les travaux de recherche présentés dans cette thèse portent sur la stabilisation des systèmes décrit par des modèles de Takagi-Sugeno en présence de la saturation d'actionneur et aux perturbations externes. Des approches basées sur une fonction quadratique de Lyapunov ont tout d'abord été développées. Celles-ci permettent la synthèse des lois de commande PDC (Compensation Parallèle Distribuée), SOF (Retour de Sortie Statique), et SOF descripteur par la résolution d'un ensemble de contraintes LMIs (Inégalités Linéaires Matricielles). Les résultats de ces premières approches restent toutefois pessimistes vis-à-vis de l'ensemble des solutions accessibles au problème de synthèse de lois de commande. Afin de réduire ce conservatisme, de nouvelles approches basées sur une fonction candidate polyquadratique de Lyapunov sont proposées. D'autre part, le retard représente une autre source d'instabilité et de dégradation des performances. L'utilisation d'une fonction dite Lyapunov-Krasovskii (LKF), nous a permis la synthèse des lois de commandes PDC et SOF et les améliorer en terme de conservatisme via une nouvelle LKF non quadratique.

**Mots clés :** Systèmes non linéaires, Modèles Takagi-Sugeno, LMI, Critère  $H_\infty$ , Saturation d'actionneur, Systèmes à retard, Fonctions de Lyapunov non quadratiques.