

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



N° d'ordre :

Série :

Université M^{ed} Seddik BEN YAHIA - Jijel

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département d'Automatique

THÈSE

Pour Obtenir le Grade de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Automatique

Présentée par

Mohammed HADDAD

Magister en Automatique et Traitement du Signal de l'Université de Jijel

Thème

**CONTRIBUTION A LA COMMANDE DES SYSTEMES
NON LINEAIRES INCERTAINS AVEC CONTRAINTES**

Soutenue publiquement le 28/10/2021, devant le jury composé de :

LABIOD Salim	Prof. - Université MSBY de Jijel	Président
BOULKROUNE Abdesselem	Prof. - Université MSBY de Jijel	Rapporteur
KHEBBACHE Hicham	MCA - Université MSBY de Jijel	Examineur
LADACI Samir	Prof. - ENPC de Constantine	Examineur
BOUKHEZZAR Boubekour	Prof. - Université de Constantine 1	Examineur
LACHOURI Abderazak	Prof. - Université de Skikda	Examineur
BOUTAGHANE Amar	MRA - CRTI de Chéraga	Invité

DEDICACES

À ma Mère et mon Père,

À tous les membres de ma famille,

À ma Femme, pour la patience et le soutien dont elle a fait preuve pendant toute la durée de cette thèse,

À mes enfants **Wiam** et **Wassim**,

Je dédie ce modeste travail.

AVANT-PROPOS

L'ensemble des travaux présentés dans cette thèse a été effectué au Laboratoire d'Automatique de Jijel (LAJ) de l'Université de Mohammed Seddik Ben Yahia de Jijel.

En tout premier lieu, je remercie **ALLAH** le tout puissant pour la volonté et la patience qu'il m'a donné pour dépasser toutes les difficultés et d'accomplir ce modeste travail.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur **Abdesselem BOULKROUNE**, Professeur à l'Université de Jijel pour la proposition du sujet de cette thèse et pour son soutien tout au long de ce travail. Merci Monsieur pour vos conseils et la confiance que vous m'avez accordée au cours de ces années d'encadrement.

J'ai été profondément honoré que Monsieur **Salim LABIOD**, Professeur à l'Université de Jijel, ait accepté d'examiner ce travail et de présider ce jury.

Je remercie également Monsieur **Hicham KHEBBACHE**, Maître de Conférences (MCA) à l'Université de Jijel, ainsi que Monsieur **Samir LADACI**, Professeur à l'ENPC de Constantine, Monsieur **Boubekeur BOUKHEZZAR**, Professeur à l'Université de Constantine 1, et Monsieur **Abderazak LACHOURI**, Professeur à l'Université de Skikda, qui ont accepté d'examiner mon manuscrit de thèse.

Je suis aussi reconnaissant à Monsieur **Amar BOUTAGHANE**, Maître de Recherche (MRA) et Directeur de Division de Recherche : DSTC au sein du CRTI de Chéraga, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de siéger dans ce jury.

Que tous mes amis et collègues trouvent ici le témoignage de mon amitié et de ma reconnaissance.

Enfin, je ne saurais terminer cet avant-propos sans remercier toute ma famille pour son soutien pendant toutes mes études.

 Mr. **Mohammed HADDAD**

Résumé :

L'objectif de cette thèse est principalement porté sur deux thèmes majeurs. Dans le premier thème, deux schémas de commande adaptative floue par backstepping, pour une classe de systèmes non linéaires monovariabiles incertains avec des contraintes sur les états (ou sur la sortie) et l'entrée et avec des perturbations externes, sont développés. Dans l'autre thème, un schéma de commande adaptative floue par backstepping, pour une classe de systèmes non linéaires multivariabiles incertains avec des non-linéarités de l'actionneur et des matrices des gains de commande étant asymétriques, est conçu. Dans tous les schémas de commande, les systèmes flous sont utilisés pour approximer les fonctions non linéaires inconnues du système. De plus, l'analyse de la stabilité est effectuée par une approche de Lyapunov. Les résultats théoriques sont validés par des exemples de simulation numériques.

Mots-clés :

Systèmes non linéaires incertains, commande adaptative floue, conception par backstepping, observateur de perturbations, contraintes sur l'état, contraintes sur la sortie, non-linéarités d'actionneur, stabilité en temps fini, stabilité de Lyapunov.

Abstract :

The objective of this thesis is mainly focused on two major themes. In the first theme, two adaptive fuzzy backstepping control schemes, for a class of uncertain SISO nonlinear systems with state (or output) and input constraints and external disturbances, are developed. In the other theme, an adaptive fuzzy backstepping control scheme, for a class of uncertain MIMO nonlinear systems with actuator nonlinearities and a non-symmetric control gain matrices, is designed. In all control schemes, the fuzzy systems are used to approximate the unknown nonlinear functions of the system. In addition, the stability analysis is performed by a Lyapunov approach. The theoretical results are validated by numerical simulation examples.

Key words :

Uncertain nonlinear systems, adaptive fuzzy control, backstepping design, disturbance observer, state constraints, output constraints, actuator nonlinearities, finite-time stability, Lyapunov stability.

ملخص :

الهدف من هذه المذكرة يتعلق بشكل أساسي بموضوعين رئيسيين. في الموضوع الأول، تم تطوير مخططي تحكم تلاؤمي غامض عن طريق الرجوع المرحلي، لفئة من الأنظمة اللاخطية وحيدة المدخل والمخرج الغير مؤكدة مع القيود المفروضة على الحالات (أو على المخرج) والمدخل ومع الاضطرابات الخارجية. في الموضوع الآخر، تم تصميم مخطط تحكم تلاؤمي غامض عن طريق الرجوع المرحلي، لفئة من الأنظمة اللاخطية متعددة المداخل والمخارج الغير مؤكدة مع الخصائص اللاخطية للمحرك ومصفوفة التحكم الغير متناظرة. في جميع مخططات التحكم المقترحة، تستخدم الأنظمة الغامضة لتقريب الخصائص اللاخطية للنظام التي تكون مجهولة. بالإضافة إلى ذلك، استعملنا طريقة ليابونوف لدراسة استقرار طرق التحكم التلاؤمي الغامض المقترحة. النتائج النظرية تم اختبارها عن طريق المحاكاة العددية.

كلمات مفتاحية :

الأنظمة اللاخطية الغير مؤكدة، التحكم التلاؤمي الغامض، التصميم عن طريق الرجوع المرحلي، مراقب الاضطرابات، قيود الحالة، قيود الإخراج، اللاخطية المحرك، الاستقرار في زمن محدود، استقرار ليابونوف.

TABLE DES MATIERES

Table des matières

Résumé	i
Table des matières	ii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vii
Notations et abréviations	viii

Introduction générale.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre 1

Outils de conception et préliminaires

1.1 Introduction	7
1.2 Systèmes non linéaires.....	8
1.2.1 Généralités.....	8
1.2.2 Représentation des systèmes non linéaire	8
1.3 Stabilité des systèmes non linéaires	9
1.3.1 Stabilité au sens de Lyapunov	9
1.3.1.1 Préliminaires et définitions.....	9
1.3.1.2 Systèmes autonomes.....	10
1.3.1.3 Systèmes non autonomes.....	11
1.3.2 Stabilité en temps fini.....	13
1.3.2.1 Cas des systèmes autonomes.....	13
1.3.2.2 Cas des systèmes non autonomes.....	15
1.3.3 Fonctions barrière de Lyapunov	17
1.4 Techniques de commandes non linéaires	19
1.4.1 Commande par backstepping	19
1.4.2 Commande adaptative	21
1.4.3 Commande par surface dynamique (DSC).....	23
1.5 Systèmes flous	24
1.5.1 Description des systèmes flous.....	24
1.5.2 Approximation par les systèmes flous.....	25

1.6 Non-linéarité d'actionneur.....	26
1.6.1 Saturation.....	26
1.6.2 Zone-morte	27
1.7 Outils mathématiques employés	28
1.7.1 Théorème de la valeur moyenne (MVT).....	28
1.7.2 Décomposition matricielle.....	28
1.8 Conclusion.....	30

Chapitre 2

Commande adaptative en temps fini des systèmes NL avec des contraintes sur la sortie et l'entrée

2.1 Introduction	31
2.2 Formulation du problème et préliminaires	35
2.2.1 Description du système	35
2.2.2 Non-linéarité de saturation	35
2.2.3 Enoncé du problème.....	36
2.3 Conception de la commande adaptative floue.....	42
2.3.1 Conception d'observateur de perturbation	42
2.3.2 Conception de la commande adaptative floue en temps-fini.....	44
2.3.3 Analyse de la stabilité.....	49
2.4 Résultats de simulation.....	53
2.4.1 Exemple 1.....	53
2.4.2 Exemple 2.....	56
2.5 Conclusion.....	60

Chapitre 3

Commande adaptative floue des systèmes NL incertains avec des contraintes sur les états et l'entrée

3.1 Introduction	61
3.2 Formulation du problème et préliminaires	63
3.2.1 Description du système	63
3.2.2 Non-linéarité de zone morte et de saturation asymétrique.....	64
3.2.3 Enoncé du problème.....	65
3.3 Conception de la commande adaptative floue.....	66
3.3.1 Analyse de la stabilité.....	74

3.4 Résultats de simulation.....	77
3.4.1 Exemple 1.....	77
3.4.2 Exemple 2.....	80
3.5 Conclusion.....	83

Chapitre 4

Commande floue à structure variable des systèmes MIMO avec des non-linéarités d'actionneur

4.1 Introduction	84
4.2 Formulation du problème et préliminaires	87
4.2.1 Formulation du problème	87
4.2.2 Modèle de la saturation et zone-morte	89
4.2.3 Décomposition matricielle SDU.....	90
4.3 Conception de la commande adaptative floue.....	91
4.3.1 Analyse de la stabilité.....	100
4.4 Résultats de simulation.....	105
4.4.1 Exemple 1.....	105
4.4.2 Exemple 2.....	109
4.5 Conclusion.....	113
Conclusion générale	114
Bibliographie.....	118

LISTE DES FIGURES

Liste des figures

Chapitre 1

Figure 1.1 : Illustration d'une fonction barrière	17
Figure 1.2 : Configuration de base d'un système flou	26
Figure 1.3 : Fonction de la saturation	27
Figure 1.4 : Fonction de la zone morte	27

Chapitre 2

Figure 2.1 : Saturation : ligne continue: $sat(v(t))$; ligne pointillée: $u_M \times \tanh(v(t)/u_M)$...	36
Figure 2.2 : Schéma fonctionnel de la commande adaptative floue en temps fini	52
Figure 2.3 : Trajectoires de référence y_d (ligne continue), sortie y (ligne discontinue) et contraintes (ligne mixte)	54
Figure 2.4 : Trajectoire d'état x_2	54
Figure 2.5 : Trajectoire d'erreur z_1 avec ses contraintes	55
Figure 2.6 : Trajectoire d'erreur z_2	55
Figure 2.7 : Signal de commande v (ligne continue) et la sortie de l'actionneur u (ligne discontinue)	55
Figure 2.8 : Représentation schématique du système électromécanique	57
Figure 2.9 : Trajectoires de référence y_d (ligne continue), sortie y (ligne discontinue) et contraintes (ligne mixte)	58
Figure 2.10 : Trajectoire d'état x_2	58
Figure 2.11 : Trajectoire d'état x_3	58
Figure 2.12 : Trajectoire d'erreur z_1 avec ses contraintes	59
Figure 2.13 : Trajectoire d'erreur z_2	59
Figure 2.14 : Trajectoire d'erreur z_3	59
Figure 2.15 : Signal de commande v (ligne continue) et la sortie de l'actionneur u (ligne discontinue)	60

Chapitre 3

Figure 3.1 : Fonction $u(v)$ et son estimée $h(v)$	65
Figure 3.2 : Schéma complet de la commande adaptative floue par backstepping et à base d'observateur de perturbations	76
Figure 3.3 : Trajectoires de référence y_d (ligne continue), sortie y (ligne discontinue) et contraintes (ligne mixte).....	78
Figure 3.4 : Trajectoire d'état x_2 avec ses contraintes	78
Figure 3.5 : Trajectoire d'erreur z_1 avec ses contraintes.....	79
Figure 3.6 : Trajectoire d'erreur z_2 avec ses contraintes.....	79
Figure 3.7 : Signal de commande v (ligne continue) et la sortie de l'actionneur u (ligne discontinue)	79
Figure 3.8 : Trajectoires de référence y_d (ligne continue), sortie y (ligne discontinue) et contraintes (ligne mixte).....	81
Figure 3.9 : Trajectoire d'état x_2 avec ses contraintes	81
Figure 3.10 : Trajectoire d'état x_3 avec ses contraintes	81
Figure 3.11 : Trajectoire d'erreur z_1 avec ses contraintes.....	82
Figure 3.12 : Trajectoire d'erreur z_2 avec ses contraintes.....	82
Figure 3.13 : Trajectoire d'erreur z_3 avec ses contraintes.....	82
Figure 3.14 : Signal de commande v (ligne continue) et la sortie de l'actionneur u (ligne discontinue)	83

Chapitre 4

Figure 4.1 : Modèle combiné de la saturation et zone-morte.....	90
Figure 4.2 : Schéma de la commande floue adaptative à structure variable	103
Figure 4.3 : Robot manipulateur à deux degrés de liberté.....	105
Figure 4.4 : Poursuite de la sortie de la liaison 1	107
Figure 4.5 : Poursuite de la sortie de la liaison 2	108
Figure 4.6 : Erreurs de poursuite de la liaison 1	108
Figure 4.7 : Erreurs de poursuite de la liaison 2.....	108
Figure 4.8 : Signaux de commande	109
Figure 4.9 : Hélicoptère de laboratoire (CE150).....	109
Figure 4.10 : Trajectoire de l'élévation	111
Figure 4.11 : Trajectoire de l'azimut.....	111
Figure 4.12 : Trajectoire des erreurs de poursuite de l'élévation.....	112
Figure 4.13 : Trajectoire des erreurs de poursuite de l'azimut.....	112
Figure 4.14 : Signaux de commande	112

LISTE DES TABLEAUX

Liste des tableaux

Chapitre 2

Tableau 2.1 : Paramètres et variables du système électromécanique..... 57

Chapitre 4

Tableau 4.1 : Comparaison entre notre contrôleur et celui proposé dans [CHE10a]..... 104

NOTATIONS ET ABBREVIATIONS

Notations et abréviations

Notations

\mathbf{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbf{R}^+	Ensemble des nombres réels positifs
\mathbf{R}^n	Ensemble des vecteurs réels de dimension n
$\mathbf{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$
\mathbf{N}	Ensemble des entiers naturels
\mathbf{N}^*	Ensemble des entiers naturels non nuls
\mathbf{C}	Ensemble des complexes
\mathbf{C}^1	Classe des fonctions continûment différentiables
t	Variable temporelle
x	Variable d'état
x_e	Point d'équilibre
x_{1d}, y_d	Trajectoire désirée
x_{id}, α_i	Commande virtuelle ou fonction stabilisante
u, u_i	Vecteur d'entrée, Entrée
y	Vecteur de sortie
z_i	Variable d'erreur dans le backstepping
a_{ij}	$ij^{\text{ème}}$ élément de la matrice A
A^T	Transposée de la matrice A
A^{-1}	Inverse de la matrice A
$\text{trace}(A)$	Trace de A
$\lambda(A)$	Ensemble des valeurs propres de A
$\lambda_{\max}(A)$	Valeur propre maximale de la matrice A
$\lambda_{\min}(A)$	Valeur propre minimale de la matrice A
$ a $	Valeur absolue du scalaire a
$\ \cdot\ $	Norme vectorielle (ou matricielle) Euclidienne
I_n	Matrice identité de dimension $n \times n$

$f(\cdot), g(\cdot)$	Fonctions non linéaires
$d(\cdot)$	Perturbation externe
$V(\cdot)$	Fonction de Lyapunov
θ	Vecteur de paramètres constants et inconnus
$\tilde{\theta}$	Erreur d'estimation
$a \in A$	a est un élément de l'ensemble A
$A \subset B$	L'ensemble A est contenu dans l'ensemble B
(a, b)	Sous-ensemble ouvert de la ligne réelle
$[a, b]$	Sous-ensemble fermé de la ligne réelle
$[a, b)$	Sous-ensemble de la ligne réelle fermée en a et ouverte en b
$\text{sgn}(\cdot)$	La fonction signe (Signum)
$\ln(\cdot)$	Logarithme népérien
$\text{Tanh}(\cdot)$	Tangent hyperbolique
$\text{Actan}(\cdot)$	Arc tangent
$\text{Cosh}(\cdot)$	Cosinus hyperbolique
\exists	Il existe
\forall	Pour tout
<i>i. e.</i>	C'est à dire
<i>e. g.</i>	Par exemple

Abréviations

MIMO	Multi-variable (Multiple-Input Multiple-Output)
SISO	Mono-variable (Single-Input Single-Output)
SF	Systèmes flou
RN	Réseaux de neurones
BF	Bouclé fermée
CI	Conditions initiales
SDU	Symmetric, Diagonal, Upper-triangular
LDU	Lower-triangular, Diagonal, Upper-triangular
SDT	Symétrique, Diagonale, Triangulaire
UUB	Uniformément ultiment bornées (Uniformly Ultimately Bounded)
SGUUB	Semi-globalement uniformément ultiment bornées

FBF	Fonctions de base floues
BF	Fonction barrière (Barrier function)
DP	Définie positive
DN	Définie négative
DPS	Définie positive et symétrique
NL	Non linéaire
STF	Stable en temps fini
DSC	Commande par surface dynamique (Dynamic Surface Control)
BLF	Fonction barrière de Lyapunov (Barrier Lyapunov Function)
MVT	Théorème de la valeur moyenne (Mean Value Theorem)

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

1 Contexte et motivations

La commande non linéaire a connu une expansion ainsi qu'une diversification importante depuis les années 50, dues entre autres à la multiplication des procédés et des applications robotiques. L'une des méthodes de commande non linéaire les plus connues, est la commande par backstepping. *La commande par backstepping* est une méthode systématique basée sur la théorie de stabilité de Lyapunov pour la conception de la commande non linéaire, elle s'applique aux systèmes non linéaires sous la forme triangulaire inférieure. Le problème principal avec l'approche backstepping [BAN10, YIM01] est *l'explosion de complexité* causée par la dérivation des commandes virtuelles. Autrement dit, la complexité de ce type de commande augmente rapidement avec l'augmentation de l'ordre du système. Pour pallier à ce problème, dans [SON11, WAN05, LI12], les auteurs ont proposé une technique dite *la commande à surface dynamique* (DSC), basée sur l'introduction d'un filtre du premier ordre pour filtrer les commandes virtuelles. Cependant, les techniques de commande non adaptative par backstepping sont seulement applicables pour des systèmes linéaires et/ou non linéaires avec un modèle dynamique parfaitement connu. En présence de perturbations, d'incertitudes du modèle ou des paramètres inconnus et/ou variant dans le temps, les structures de commande auto-ajustables représentent souvent un meilleur choix. Ces structures, communément connues sous le nom de *commande adaptative* [SLO91, KRS95, IOA96, TAO03, AST08], connaissent un grand succès depuis plusieurs années.

La commande adaptative est une technique de commande permettant l'estimation en ligne et en temps réel des paramètres du contrôleur (version directe) ou ceux du modèle (version indirecte), via l'intermédiaire d'un mécanisme d'ajustement bien déterminé. Cependant, les méthodes de conception de la commande adaptative standard [SLO91, IOA96, TAO03, LIN06] sont limitées aux systèmes non linéaires qui peuvent être linéairement paramétrisés (i.e. les non-linéarités du système ou la commande peuvent être exprimées sous forme de produit d'une fonction non linéaire connue par un vecteur de

paramètres inconnus). Malencontreusement, il est généralement très difficile, voire même impossible d'obtenir cette forme de paramétrisation linéaire spécialement pour un système physique complexe incertain.

Les systèmes flous offrent une solution potentielle au problème de la commande adaptative standard. Ils sont des approximateurs universels de fonctions [WAN92, WAN94] et fournissent une manière commode pour paramétriser les non-linéarités d'un système. En fait, ils peuvent uniformément approcher n'importe quelle fonction inconnue non linéaire continue et définie sur un ensemble compact, à un degré de précision arbitraire [BOU20, BOU18, SUI20]. Pendant ces trois dernières décennies, plusieurs schémas de commande backstepping adaptative basés sur les systèmes flous ont été proposés pour une classe de systèmes triangulaires non linéaires inconnus, e.g. [ZHA00, LIN06, LEE11, WAN15, TON16, LIU17a]. Des systèmes flous adaptatifs ont été utilisés dans ces schémas pour estimer les incertitudes fonctionnelles. L'approche directe de Lyapunov a été exploitée pour la conception des lois d'adaptation associées aux systèmes flous et l'étude de la stabilité du système en boucle fermée (BF). Notons que la plupart des schémas de commande floue adaptative existants, ne sont qu'asymptotiques, i.e. que l'erreur poursuite tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cependant, dans plusieurs situations, il est souhaitable de disposer d'une convergence rapide et en temps fini. En effet, *la commande en temps fini* permet de réaliser de hautes performances tant en précision qu'en temps fini de convergence [WAN20, LI19, WU20, YU18, YU16, SUN18b, SUI18]. Néanmoins, la plus part des systèmes de commande backstepping en temps fini souffrent du fameux problème de singularité lié à la dérivée temporelle (soit directe ou indirecte) des commandes virtuelles associées.

Les contraintes, dans un système de commande, caractérisent en général les limitations physiques sur l'entrée, les états ou la sortie. *Les contraintes d'entrée* (les non-linéarités omniprésentes des actionneurs) tels que *la saturation*, *la zone morte*, *le jeu* et *l'hystérésis* sont inévitables dans les systèmes de commande industriels pratiques, tels que les machines à commande numérique par ordinateur, les robots manipulateurs,... [HAD16, HAD19, BOU12, BOU11, HAM16, BOU10a, CHE11]. Lorsque telles non-linéarités existent dans les systèmes de commande, elles peuvent causer une erreur relativement importante de poursuite en régime permanent ou même des oscillations, dégrader les performances globales du système, et voire provoquer son instabilité.

Dans la littérature ouverte, en général, le problème de *la saturation* d'entrée est traité en utilisant l'une des méthodes suivantes :

- 1) Atténuation de son effet via l'estimation du domaine d'attraction [LI14a, LI18] ;
- 2) Compensation de son effet via la conception d'un système auxiliaire [CHE11, YAN20] ;
- 3) Conception de la loi de commande dans un cadre à structure variable [CHE10a] ;
- 4) Emploi d'un système anti-windup [WU00, YE20] ;
- 5) Conception d'une fonction de saturations imbriquées [DIN15, MI20].

Cependant, le problème de *la zone morte* d'entrée est généralement résolu via les méthodes suivantes :

- 1) Compensation de ses effets via la construction de son modèle inverse [TAO94, TON13, LIU15]. Notons que cette approche est universelle et peut être utilisée également pour compenser les autres non-linéarités d'entrée (comme e.g. la saturation, l'hystérésis et le backlash).
- 2) Considération de son effet comme une perturbation et sa compensation par un terme de commande robuste [BOU10a, LI14b, CHE16].
- 3) Conception de la commande dans un cadre à structure variable [HU08, CHE10a, BOU11, BOU14, BOU17].

D'autres part, pour certains systèmes, *des contraintes sur les états ou sur les sorties* doivent être respectées pour des raisons économiques, de sécurité ou de spécifications de performances [TEE09, TEE12]. La violation de telles contraintes pendant le fonctionnement peut entraîner une dégradation de performances, des risques ou des endommagements au système. Pour les systèmes non linéaires à contraintes sur l'état ou la sortie, des *fonctions barrières de Lyapunov* (BLF) ont été proposées pour faire face à ces contraintes [TEE09, TEE12]. Ces fonctions barrières croissent rapidement à l'infini, une fois les variables (d'erreur ou d'état) se rapprochent de leurs contraintes. Plusieurs schémas de commande adaptative floue ont été conçues via l'utilisation des fonctions barrières de Lyapunov pour des systèmes non linéaires ayant des contraintes sur les sorties [TEE09, LI15, TEE11, REN10, SUN20], ou sur les états [TEE12, TAN16, LIU17b, SUN18a, MIS21]. De telles fonctions peuvent garantir que les contraintes sur les états ou la sortie ne seront pas violées. Cependant, tous les schémas de commande adaptative basés sur les fonctions barrières pour les systèmes soumis à des contraintes sur les états souffrent d'un problème majeur qui est *la non-faisabilité des commandes virtuelles*. Pour résoudre ce

problème, certains auteurs proposent de commencer par une phase d'exécution hors ligne du système en boucle fermée afin d'avoir une idée sur les bornes des commandes virtuelles [SUN18a, MIS21].

Ainsi, les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans cette logique. Ils portent essentiellement sur la conception des commandes backstepping floues adaptatives pour les systèmes (monovariabiles ou multivariabiles) non linéaires incertains perturbés avec des contraintes sur l'entrée, et sur les états ou la sortie.

2 Contributions de cette thèse

Pour les systèmes monovariabiles non linéaires incertains, nos principales contributions se résument comme suit :

- ❖ La proposition d'un nouveau schéma de commande backstepping adaptative floue en temps fini des systèmes monovariabiles non linéaires incertains ayant une forme nonstrict-feedback et étant soumis à des perturbations externes et à des contraintes de sortie et d'entrée.
- ❖ Un nouveau lemme technique pour démontrer la stabilité pratique rapide en temps fini est proposé.
- ❖ Le schéma de commande en temps fini proposé est libre du fameux problème de singularité lié à la dérivée temporelle (soit directe ou indirecte) des commandes virtuelles associées.
- ❖ Le développement d'un nouveau schéma de commande backstepping adaptative floue des systèmes monovariabiles non linéaires incertains de type pure-feedback soumis à des perturbations externes et à des contraintes sur les états et l'entrée.
- ❖ Le problème ouvert du non faisabilité des lois de commande virtuelle, dû intrinsèquement à l'utilisation de la fonction barrière de Lyapunov pour traiter le problème des contraintes des états, est résolu.
- ❖ Deux nouveaux observateurs non linéaires de perturbations sont conçus pour estimer des termes incertains regroupant des perturbations et des incertitudes.
- ❖ Prise en compte des non-linéarités inhérentes des actionneurs (saturation et/ou zone-morte) dans la conception des commandes.

Pour les systèmes multivariables non linéaires incertains, nos contributions se résument essentiellement comme suit :

- ❖ La proposition d'un schéma de commande backstepping adaptative floue pour une classe des systèmes multivariables non linéaires incertains ayant une forme strict-feedback et étant soumis à des non-linéarités de l'actionneur.
- ❖ La classe des systèmes sous considération est assez large, comme la matrice des gains de commande de chaque sous-système est permise d'être asymétrique et avec un signe non définie.

3 Organisation de la thèse

Le reste de cette thèse est organisé comme suit :

Après cette introduction, *Le premier chapitre* expose au début un rappel sur les systèmes non linéaires, les différents concepts et définitions de stabilité des systèmes autonomes et non autonomes, et les fonctions barrières de Lyapunov. Par la suite, il présente la commande adaptative et la commande par backstepping, les systèmes flous, la modélisation des non-linéarités inhérentes des actionneurs, et quelques outils mathématiques indispensables pour la conception des commandes proposées (comme le théorème de la valeur moyenne et le lemme de la décomposition matricielle SDU).

Le deuxième chapitre présente un nouveau schéma de commande backstepping adaptative floue en temps fini à base de la technique DSC pour une classe de systèmes non linéaires SISO incertains ayant une forme nonstrict-feedback et étant soumis des contraintes d'entrée (de type saturation) et de sortie et des perturbations externes non appariées. La technique DSC est employée pour éviter le problème d'explosion de complexité, dû intrinsèquement à l'utilisation du concept backstepping. Les termes de perturbations groupées (perturbations externes + erreurs d'approximation floue) sont estimés via des observateurs non linéaires de perturbations.

Le troisième chapitre propose un schéma de commande backstepping adaptative floue pour des systèmes non linéaires SISO incertains ayant une forme pure-feedback et soumis à des contraintes d'état et d'entrée (de type saturation et zone morte) et des perturbations externes. Le problème ouvert concernant la non faisabilité des lois de

commande virtuelles, dû intrinsèquement à l'emploi des fonctions barrières de Lyapunov pour les systèmes avec des contraintes d'état, est résolu en utilisant une fonction arc-tangente. En utilisant des observateurs non linéaires de perturbation dans le concept du backstepping, les termes incertains regroupant les perturbations ; les erreurs d'approximation flous ; les erreurs d'approximation des commandes virtuelles ; et la dérivée des commandes virtuelles sont efficacement compensées et l'explosion de la complexité est évitée.

Le dernier chapitre est dédié à la conception d'un schéma de commande adaptative floue par backstepping pour une classe de systèmes non linéaires MIMO incertains étant caractérisée par une forme strict-feedback et soumis à des non-linéarités de l'actionneur (saturation + zone morte). Une commande à structure variable est conçue pour compenser l'effet des non linéarités des actionneurs. Une propriété importante de décomposition matricielle (des matrices des gains de commande) est exploitée pour créer une matrice symétrique et pour traiter le problème de son signe indéfini.

Dans tous les schémas proposés dans cette thèse, l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée et de la robustesse des structures de commande avec les lois d'adaptation correspondantes sont effectuées par l'approche directe de Lyapunov combinée avec la technique backstepping. De plus, pour chaque schéma, des exemples de simulation sont donnés pour montrer et mettre en évidence ses performances.

CHAPITRE 1

OUTILS DE CONCEPTION ET

PRELIMINAIRES

Chapitre 1

Outils de conception et préliminaires

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'exposer quelques rappels indispensables à la bonne compréhension de cette thèse.

Dans la section 1.2, nous allons essayer de donner des généralités sur les systèmes non linéaires.

Dans la section 1.3, nous allons rappeler un ensemble de définitions relatives à la stabilité des systèmes dynamiques à temps continu à savoir : la stabilité par la méthode de Lyapunov, stabilité asymptotique et en temps fini des systèmes autonomes et non autonomes, la stabilité basée sur la fonction barrière de Lyapunov.

Dans la section 1.4, nous allons exposer un bref rappel sur la commande adaptative et la commande par backstepping. Des exemples de motivation sont également donnés. Tous les systèmes de commande développés dans cette thèse sont principalement basés ces deux méthodologies de commande.

La section 1.5 va présenter brièvement les systèmes flous qui seront utilisés par la suite pour estimer en ligne les fonctions non linéaires continues inconnues. Leur propriété d'approximation universelle sera aussi discutée.

La section 1.6 va exposer les non-linéarités inhérentes aux actionneurs. Nous allons nous concentrer sur les non-linéarités non dérivables et sans mémoires (i.e. statiques), à savoir la saturation et la zone-morte. L'effet de ces non-linéarités devrait prendre en compte pendant la phase de conception de la commande.

A la fin de ce chapitre théorique, dans la section 1.7, nous allons évoquer le théorème de la valeur moyenne et un lemme relatif à la décomposition matricielle dite SDU. Ces outils mathématiques sont indispensables pour le processus de conception des commandes proposées.

1.2 Systèmes non linéaires

1.2.1 Généralités

On appelle *système non linéaire* tout système dont le comportement n'est pas linéaire, i.e. soit la sortie n'est pas proportionnelle à l'entrée, soit plus généralement elle n'obéit pas au principe de superposition. La non-linéarité d'un système peut donc être mise en évidence soit par modélisation mathématique, soit par des expériences montrant que le principe de superposition n'est pas respecté.

Pour être tout à fait franc, les systèmes physiques vraiment linéaires n'existent pas. Les équations différentielles linéaires, ainsi les fonctions de transfert, ne sont que des modèles qui correspondent plus ou moins bien à la réalité. Partant du principe que tout système qui n'est pas linéaire doit être considéré comme non linéaire, cela revient à dire que tous les systèmes physiques, en général, sont non linéaires.

Cependant, nous pouvons malgré tout annoncer qu'une grande majorité des systèmes pratiques peuvent être appréhendés comme des systèmes linéaires, tout du moins sous certaines conditions de fonctionnement. En général, ces conditions, s'expriment sous l'aspect d'une limitation des amplitudes des signaux ou de la restriction à un certain intervalle de fréquences. L'ensemble de ces conditions permet de déterminer ce qu'on appelle le domaine de linéarité d'un système.

1.2.2 Représentation des systèmes non linéaire

La forme la plus générale de représentation des systèmes non linéaires est la représentation d'état composée de deux équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = h(t, x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

où t désigne le temps, $x(t) \in R^n$ le vecteur des variables d'état, $y(t) \in R^p$ le vecteur des variables de sortie, et $u(t) \in R^m$ le vecteur des variables d'entrée. $f : R^+ \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$ et $h : R^+ \times R^n \times R^m \rightarrow R^p$ sont des fonctions non linéaires.

1.3 Stabilité des systèmes non linéaires

On désigne par Ω un ouvert non vide de R^n ($n \in N^*$) et par I un intervalle non vide de R^+ , non borné à droite [KHA02, ZOG14].

Soit $f : \Omega \rightarrow R^n$ une fonction continue, on lui associe **le système autonome** :

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.2)$$

Soit $f : I \times \Omega \rightarrow R^n$ une fonction continue, on lui associe **le système non-autonome** :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.3)$$

$x(t, t_0, x_0)$ désigne une solution $x(t)$ du système (1.2) ou du système (1.3) telle que $x(t_0) = x_0$.

1.3.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Par définition, la stabilité signifie que si un système est en équilibre, il restera dans cet état quand le temps varie. L'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov consiste en l'étude des trajectoires du système quand l'état initial est proche d'un état d'équilibre. L'objectif de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires. Afin d'étudier les résultats classiques sur la notion de stabilité au sens de Lyapunov, nous devons rappeler les définitions suivantes.

1.3.1.1 Préliminaires et définitions

Définition 1.1 : Un point $x_e \in \Omega$ est un **point d'équilibre**, ou **point singulier** du système (1.2) (respectivement de (1.3)) si $f(x_e) = 0$ (respectivement $\forall t \in I, f(x_e, t) = 0$).

Les définitions et les théorèmes donnés dans ce chapitre considèrent toujours le point d'équilibre à l'origine. Pour le cas général, il suffit de faire une translation.

Définition 1.2 : On considère le système (1.2), et $V : \Omega \rightarrow R^n$ ayant des dérivées partielles sur Ω . On définit la dérivée totale \dot{V} pour le système (1.2) par : $\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x)$.

Définition 1.3 : On considère le système (1.3), et $V : I \times \Omega \rightarrow R^n$ ayant des dérivées partielles sur $I \times \Omega$. On définit la dérivée totale \dot{V} pour le système (1.3) par : $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x, t) f_i(x, t)$.

Définition 1.4 : Une fonction $V : \Omega \rightarrow R$ est dite *semi-définie positive* (respectivement *semi-définie négative*) s'il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 tel que :

1. $V(0) = 0$,
2. $\forall x \in \mathcal{V}, V(x) \geq 0$ (respectivement $V(x) \leq 0$).

Elle est dite *définie positive* (respectivement *définie négative*) s'il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 tel que :

1. $V(0) = 0$,
2. $\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}, V(x) > 0$ (respectivement $V(x) < 0$).

Définition 1.5 : Une fonction $V : I \times \Omega \rightarrow R$ est dite *semi-définie positive* (respectivement *semi-définie négative*) s'il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 tel que :

1. $\forall t \in I, V(0, t) = 0$,
2. $\forall t \in I, \forall x \in \mathcal{V}, V(x, t) \geq 0$ (respectivement $V(x, t) \leq 0$).

Elle est dite *définie positive* (respectivement *définie négative*) s'il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 tel que :

1. $\forall t \in I, V(0, t) = 0$,
2. $\exists V_0 : \mathcal{V} \rightarrow R$, *définie positive* (respectivement *définie négative*) telle que : $\forall t \in I, \forall x \in \mathcal{V}, V(x, t) \geq V_0(x)$ (respectivement $V(x, t) \leq V_0(x)$).

Définition 1.6 : Une fonction $V : R^n \rightarrow R$ est *radialement non bornée* si : $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$

Une fonction $V : I \times R^n \rightarrow R$ est *radialement non bornée* si : $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x, t) = +\infty$ uniformément en t , i.e.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x \in R^n, (\|x\| > \delta) \Rightarrow (\forall t \in I, V(x, t) > \epsilon).$$

Définition 1.7 : Une fonction $V : I \times \Omega \rightarrow R$ est *décroissante* si : $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} V(x, t) = 0$ uniformément en t , i.e.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x \in \Omega, (\|x\| < \delta) \Rightarrow (\forall t \in I, V(x, t) < \epsilon).$$

1.3.1.2 Systèmes autonomes

Nous considérons le cas des systèmes autonomes donnés par l'équation (1.2).

Définition 1.8 [KHA02] : L'origine du système (1.2) est dite :

1. **stable** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $\|x(0)\| < \delta$ alors chaque solution $x(t)$ satisfait $\|x(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.
2. **asymptotiquement stable** s'il est stable et si $\exists \delta_0 > 0$ tel que $\|x(0)\| < \delta_0$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$.
3. **exponentiellement stable** s'il existe deux constantes positives α et β telle que $\|x(t)\| < \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}$.

Par la suite, on introduit **le théorème de Lyapunov** associé aux systèmes autonomes.

Théorème 1.1 [KHA02] : Supposons que l'origine est un point d'équilibre du système (1.2). S'il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ de 0 et une fonction $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, ayant des dérivées partielles continues telles que :

1. V soit définie positive,
2. la dérivée totale \dot{V} pour (1.2) soit semi-définie négative, alors 0 est stable, V s'appelle une **fonction de Lyapunov**. De plus si la dérivée totale \dot{V} pour (1.2) est définie négative alors 0 est asymptotiquement stable, V s'appelle une **fonction stricte de Lyapunov**.

1.3.1.3 Systèmes non autonomes

Nous considérons le cas des systèmes non autonomes donnés par l'équation (1.3).

Définition 1.9 [KHA02] : L'origine du système (1.3) est dite :

1. **stable** si pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $t_0 \geq 0$, il existe $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que si $\|x(0)\| < \delta(\varepsilon, t_0)$ alors chaque solution $x(t)$ satisfait $\|x(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.
2. **asymptotiquement stable** s'il est stable et pour tout $t_0 \geq 0$, il existe une constante positive $c(t_0)$ telle que si $\|x(t_0)\| < c(t_0)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$.
3. **exponentiellement stable** s'il existe α, β positifs telle que pour $x(t_0)$ proche de l'origine on a $\|x(t)\| < \alpha \|x(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)}$, pour tout $t \geq t_0$.

Définition 1.10 : Les solutions de (1.3) sont dites **uniformément ultiment bornées** (Uniformly Ultimately Bounded **UUB**) s'il existe des constantes b et c telles que, pour tout $\alpha \in [0, c]$, il existe un temps positif $T = T(\alpha)$ (indépendant de t_0) tel que, pour tout $x_0 \in B_\alpha$ (où B_α est une boule au voisinage de l'origine) et pour tout $t_0 \geq 0$, on a : $\|x_0\| \leq \alpha \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \forall t \geq t_0 + T$.

Lorsque ceci est vrai pour toute constante positive α , les solutions sont dites **globalement uniformément ultiment bornées**.

Définition 1.11 [KHA02] : L'origine du système (1.3) est **uniformément asymptotiquement stable** si :

1. l'origine est **uniformément stable**, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$ alors $\|x(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.
2. il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x(t_0)\| < \delta$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$.

Définition 1.12 : L'origine du système (1.3) est **localement exponentiellement stable** s'il existe des constantes $\alpha, \beta, \gamma > 0, p \geq 0$ et une fonction $V(x, t) : v_0 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1 telles que, $\forall x \in v_0$:

1. $\alpha \|x\|^p \leq V(x, t) \leq \beta \|x\|^p$,
2. $\dot{V}(x, t) \leq -\gamma V(x, t)$.

Si $v_0 = \mathbb{R}^n$, alors l'origine de (1.3) est **globalement exponentiellement stable**.

Par la suite, nous introduisons **le théorème de Lyapunov** associé aux systèmes non autonomes.

Théorème 1.2 [KHA02] : Soit l'origine un point d'équilibre du système (1.3), s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_{t_0} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ de 0 et une fonction $V : \mathcal{V}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, ayant des dérivées partielles continues telle que :

1. V soit définie positive,
2. la dérivée totale \dot{V} pour (1.3) est semi-définie négative (respectivement définie négative) alors 0 est uniformément stable. De plus si l'on a :
3. V est décroissante (Définition 1.7). Alors 0 est uniformément stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable). Si de plus :
4. $\Omega = \mathbb{R}^n$ et si V est radialement non bornée, alors 0 est **globalement uniformément stable** (respectivement **globalement uniformément asymptotiquement stable**).

Rappelons le théorème de Hahn.

Théorème 1.3 [HAH63] : Si l'équilibre 0 d'un système différentiel autonome (1.2) ou non autonome (1.3) périodique en t est **asymptotiquement stable**, alors il est **uniformément asymptotiquement stable**.

Il est important de noter qu'on peut avoir le même résultat (pour ce théorème de Hahn) si l'origine est stable en temps fini.

Dans un second temps, nous rappelons la notion de *stabilité en temps fini*. Cette stabilité, qui n'est qu'une extension de stabilité asymptotique, est cependant très importante du point de vue pratique et industriel, comme elle permet d'approximer au bout de combien de temps le système atteint la stabilité.

1.3.2 Stabilité en temps fini

La notion de stabilité en temps fini est assez intuitive : l'idée consiste à certifier que le système, au bout d'un temps bien déterminé, atteint le point d'équilibre et en y restant par la suite. La connaissance de l'instant où la trajectoire réelle rejoindra celle désirée est notamment un aspect important dans les applications pratiques qui cherchent à garantir une bonne performance [HAI86, BHA00, MOU03].

A présent, introduisons un exemple élémentaire d'un système stable en temps fini dont on connaît explicitement les solutions. Soit la dynamique suivante [ZOG14] :

$$\dot{x} = -x^\alpha = -\text{sign}(x) |x|^\alpha \quad (1.4)$$

avec $x \in R$ et $\alpha \in]0,1[$,

dont les solutions du système sont données par :

$$x(t, t_0, x_0) = \begin{cases} \text{sign}(x_0) [|x_0|^{1-\alpha} - t(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces solutions décroissent et finissent par être nulles à partir d'un certain temps. L'origine du système (1.4) est dit stable en temps fini. Notons que l'équation (1.4) n'est pas lipschitzienne à l'origine. Dans ce cas, la stabilité en temps fini ne peut être obtenue du fait de l'unicité des solutions. Et pour cela la condition de non-lipschitzienne à l'origine est une condition nécessaire pour la stabilité en temps fini.

1.3.2.1 Cas des systèmes autonomes

Définition 1.13 [BHA00] : L'origine du système (1.2) est dit *stable en temps fini* s'il existe un voisinage \mathcal{V} de l'origine et une fonction $T : \mathcal{V} \setminus \{0\} \rightarrow [0, +\infty[$ appelée *fonction temps d'établissement*, telles que

1. l'origine est stable au sens de Lyapunov,
2. les solutions convergent en temps fini : $\lim_{t \rightarrow T(x)} x(t, t_0, x_0) = 0$.

Si de plus, $\mathcal{V} = R^n$ alors l'origine est *globalement stable en temps fini*.

Rappelons un résultat élémentaire donné par [HAI86] sur la stabilité en temps fini des systèmes autonomes scalaires de la forme :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R \quad (1.5)$$

où $f : R \rightarrow R$. Dans ce cas particulier, il existe une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité en temps fini.

Théorème 1.4 [ZOG14] : Supposons que l'origine soit un point d'équilibre du système (1.5) où f est continue. Alors, l'origine est *stable en temps fini* pour le système (1.5) si et seulement s'il existe un voisinage Ω de l'origine tel que pour tout $x \in \Omega \setminus \{0\}$,

1. $xf(x) < 0$ et
2. $\int_x^0 \frac{dz}{f(z)} < +\infty$

Exemple 1.1 [ZOG14] : On reprend l'exemple élémentaire (1.4), soit $\alpha \in]0,1[$, considérons le système :

$$\dot{x} = -\varphi_\alpha(x)$$

Rappelons que $\varphi_\alpha(x) = \text{sgn}(x) |x|^\alpha$.

On a $-x\varphi_\alpha(x) < 0$ pour $x \neq 0$ et si $x \in R$ alors

$$\int_x^0 \frac{dz}{-\text{sgn}(z)|z|^\alpha} = \frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha} < +\infty$$

Les hypothèses du Théorème 1.4 sont satisfaites. Donc, l'origine est stable en temps fini et les solutions $\phi^x(\tau)$ tendent vers l'origine avec un temps d'établissement $T(x) = \frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Théorème 1.5 [BHA00] : S'il existe une fonction de Lyapunov $V(x) : \Omega \subset R^n \rightarrow R$ telle que :

1. V est définie positive,
2. il existe un voisinage de l'origine $\mathcal{V} \subset \Omega$ tel que $\dot{V} + c(V(x))^\beta \leq 0$, $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ avec $c > 0$ et $\beta \in]0,1[$.

Alors l'origine du système (1.2) est *stable en temps fini* et la fonction temps d'établissement $T(x)$ est continue et satisfait l'inégalité suivante :

$$T(x) \leq \frac{V(x(0))^{1-\beta}}{c(1-\beta)} \quad (1.6)$$

De plus, si $\Omega = R^n$ et \dot{V} est définie négative sur $R^n \setminus \{0\}$, alors l'origine du système (1.2) est *globalement stable en temps fini*.

Exemple 1.2 [ZOG14] : Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\varphi_\alpha(x_1) - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\varphi_\alpha(x_2) - x_2^3 - x_1 \end{cases}$$

où $\alpha \in]0,1[$. (On rappelle $\varphi_\alpha(x) = \text{sign}(x) |x|^\alpha$).

En prenant $V(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$, on obtient $\dot{V}(x_1, x_2) = -\sum_{i=1}^2(x_i^4 + |x_i|^{\alpha+1}) \leq 0$. V est une fonction de Lyapunov pour le système vérifiant :

$$\dot{V} \leq -2^{\frac{\alpha+1}{2}} V^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

Donc l'origine est stable en temps fini avec un temps d'établissement continu vérifiant $T(x) \leq \frac{\|x\|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Le Théorème 1.5 implique que pour un système stable en temps fini et une fonction temps d'établissement discontinue, il n'existe pas une fonction de Lyapunov satisfaisant les hypothèses du Théorème 1.5. Dans le cas où la fonction temps d'établissement est continue, le théorème suivant fournit un inverse au théorème précédent.

Théorème 1.6 [BHA00] : Supposons que l'origine du système (1.2) est stable en temps fini et la fonction temps d'établissement T est continue en 0. Soit \mathcal{V} un voisinage de 0 et $\beta \in]0,1[$. Alors il existe une fonction $V(x) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et vérifie :

1. V est définie positive.
2. \dot{V} est continue sur \mathcal{V} et il existe $c > 0$ telle que $\dot{V} + c(V(x))^\beta \leq 0, x \in \mathcal{V}$.

1.3.2.2 Cas des systèmes non autonomes

Définition 1.14 [MOU05] : L'origine du système (1.3) est dite *stable en temps fini* s'il existe un voisinage \mathcal{V} de l'origine et une fonction $T : [0, +\infty[\times \mathcal{V} \setminus \{0\} \rightarrow [0, +\infty[$, appelée *fonction temps d'établissement* tels que :

1. l'origine est stable (Définition 1.9) pour le système (1.3),
2. pour tout $t_0 \geq 0$ et $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $x(t, t_0, x_0)$ est définie sur $[t_0, T(t_0, x_0)[$, pour tout $t \in [t_0, T(t_0, x_0)[$ on a $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ et $\lim_{t \rightarrow T(t_0, x_0)} x(t, t_0, x_0) = 0$
 $T(t_0, x_0) = \inf \{T(t_0, x_0) \geq 0 : x(t, t_0, x_0) = 0, \forall t \geq T(t_0, x_0)\}$ s'appelle *le temps d'établissement de la solution* $x(t, t_0, x_0)$.

Si de plus $\mathcal{V} = \Omega = \mathbb{R}^n$ alors l'origine du système (1.3) est *globalement stable en temps fini*.

Pour les systèmes plus généraux décrits par (1.3), les auteurs de [MOU03] ont montré que les fonctions de Lyapunov permettent d'obtenir des conditions suffisantes sur la stabilité en temps fini.

L'idée est basée sur l'existence d'une fonction de Lyapunov V et d'une fonction continue définie positive $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ vérifiant l'inégalité différentielle suivante :

$$\dot{V}(x, t) \leq -r(V(x, t)) \quad (1.7)$$

pour tout $(x, t) \in I \times \Omega$.

Une condition suffisante pour *la stabilité en temps fini* est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.7 : S'il existe une fonction de Lyapunov continûment différentiable $V(x, t)$

vérifiant la condition (1.7) telle qu'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel : $\int_0^\varepsilon \frac{dz}{r(z)} < +\infty$,

alors l'origine du système (1.3) est *stable en temps fini*. La fonction temps d'établissement

pour ce système satisfait l'inégalité suivante : $T_0(x, t) \leq \int_0^{V(x, t)} \frac{dz}{r(z)}$.

Exemple 1.3 : Considérons le système scalaire non autonome suivant :

$$\dot{x} = -(1 + t^2)\varphi_\alpha(x)$$

où $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, avec $\alpha \in]0, 1[$, soit la fonction de Lyapunov $V(x) = x^2$

$$\dot{V}(x, t) = -2(1 + t^2)x\varphi_\alpha(x) \leq -r(V(x))$$

avec $r(V) = 2\varphi_\beta(x)$ et $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$, puisque $\int_0^\varepsilon \frac{dz}{r(z)} < +\infty$, le Théorème 1.7 assure que l'origine est stable en temps fini avec la fonction temps d'établissement du système

$$T_0(x, t) = \frac{4|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Dans le cas où la fonction temps d'établissement est continue, on a le théorème inverse suivant.

Théorème 1.8 [HAD08] : Soit $\lambda \in (0, 1)$ et \mathcal{V} un voisinage ouvert de l'origine. On

suppose qu'il existe une fonction $v : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe \mathcal{K} , avec $r > 0$, telle que pour

$t \geq 0$ et $x \in B_r(0) \subseteq \mathcal{V}$, on a :

$$\|f(x, t)\| \leq v(\|x\|) \quad (1.8)$$

Si l'origine est stable en temps fini et le temps d'établissement $T(\cdot)$ est continu en $(0, t)$

pour $t \geq 0$, alors il existe une fonction $\alpha(\cdot)$ de classe \mathcal{K} , une constante $k > 0$, une fonction

continue $V : [0, \infty) \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ et un voisinage de l'origine \mathcal{M} tels que $\dot{V}(x, t)$ est définie et

pour $(x, t) \in [0, \infty) \times \mathcal{M}$, on a :

1. $V(0, t) = 0 ; t \in [0, \infty)$.
2. $V(x, t) \geq \alpha(\|x\|)$, $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathcal{M}$.
3. $\dot{V}(x, t) \leq -k(V(x, t))^\lambda$, $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathcal{M}$ et $\lambda \in]0, 1[$.

1.3.3 Fonctions barrière de Lyapunov

L'utilisation des fonctions barrières (FB) dans la synthèse de Lyapunov ouvre la voie au développement des méthodes de conception de commande systématique pour les systèmes non linéaires avec des contraintes sur les états et les sorties. Elles sont caractérisées par la propriété de croître à l'infini lorsque les arguments de la fonction s'approchent de certaines valeurs limites. Le principe clé est qu'en assurant la bornitude des fonctions barrières de Lyapunov (BLF) en boucle fermée, on s'assure également que les contraintes ne sont pas transgressées.

A cette fin, nous introduisons la définition formelle des BLF.

Définition 1.15 [TEE09] : Une fonction barrière de Lyapunov est une fonction scalaire $V(x)$, définie par rapport au système $\dot{x} = f(x)$ sur une région ouverte \mathcal{D} contenant l'origine, i.e. continue, définie positive, a des dérivées partielles continues du premier ordre à chaque point de \mathcal{D} , a la propriété $V(x) \rightarrow \infty$ lorsque x s'approche de la borne de \mathcal{D} , et satisfait $V(x(t)) \leq b, \forall t \geq 0$ le long de la solution de $\dot{x} = f(x)$ pour $x(0) \in \mathcal{D}$, où b est une constante positive.

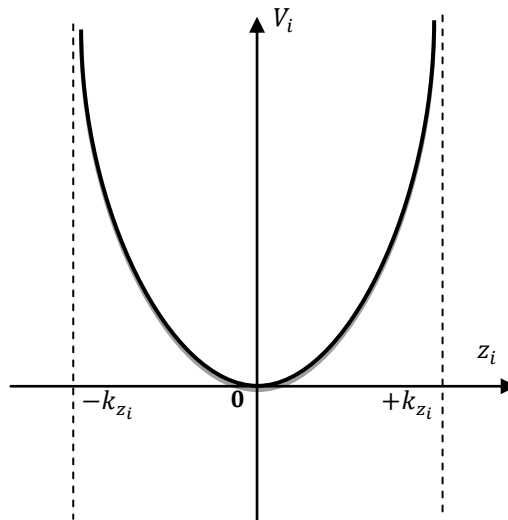


Figure 1.1 : Illustration d'une fonction barrière.

Pour plus de clarté, la candidate BLF suivante, considérée dans [NGO05, TEE09, REN10], sera utilisée par la suite dans cette Thèse :

$$V_i = \frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{z_i}^2}{k_{z_i}^2 - z_i^2} \right) \quad (1.9)$$

où $\log(\cdot)$ désigne le logarithme naturel de (\cdot) , et $k_{z_i}, i = 1, \dots, n$, est une contrainte sur z_i , i.e. $|z_i| < k_{z_i}$. Cette fonction est très utile dans le processus d'analyse de stabilité des systèmes non linéaires soumis à des contraintes sur les états ou la sortie.

Un exemple d'une BLF est donné dans la Figure 1.1. Le lemme suivant formalise le résultat pour les formes générales de fonctions barrières dans la synthèse de Lyapunov satisfaisant $V_i(z_i) \rightarrow \infty$ quand $|z_i| \rightarrow k_{z_i}$, et il est utilisé pour s'assurer que les contraintes ne sont pas violées.

Lemme 1.1 [TEE09] : Pour toute constante positive $k_{z_i}, i = 1, 2, \dots, n$, soit $\mathcal{Z} := \{z \in \mathbb{R}^n : |z_i| < k_{z_i}, i = 1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{N} := \mathbb{R}^l \times \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{n+l}$ sont des ensembles ouverts. Considérons le système :

$$\dot{\eta} = h(\eta, t) \quad (1.10)$$

où $\eta := [w, z]^T \in \mathcal{N}$ est l'état, et la fonction $h : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$ satisfait les conditions d'existence et d'unicité de la solution ([SON98], p.476, Théorème 54). Soit $\mathcal{Z}_i := \{z_i \in \mathbb{R} : |z_i| < k_{z_i}\} \subset \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe des fonctions *continues dérivables* et *définies positives* $U : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $V_i : \mathcal{Z}_i \rightarrow \mathbb{R}_+, i = 1, \dots, n$, telles que :

$$V_i(z_i) \rightarrow \infty \text{ quand } |z_i| \rightarrow k_{z_i} \quad (1.11)$$

$$\gamma_1(\|w\|) \leq U(w) \leq \gamma_2(\|w\|) \quad (1.12)$$

où γ_1 et γ_2 sont des fonctions de classe K_∞ . Soit $V(\eta) := \sum_{i=1}^n V_i(z_i) + U(w)$, et $z(0) \in \mathcal{Z}$. Si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \eta} h \leq -\mu V + \lambda, \quad (1.13)$$

dans l'ensemble $z \in \mathcal{Z}$, et μ et λ sont des constantes positives, donc w reste borné et $z(t) \in \mathcal{Z}_i, \forall t \in [0, \infty)$.

On peut facilement démontrer que ce Lemme reste valable aussi, si les contraintes sont variant dans le temps.

1.4 Techniques de commandes non linéaires

1.4.1 Commande par backstepping

La technique de commande par backstepping a été développée par Kanellakopoulos et al [KAN91] en 1991, elle est inspirée des travaux initiaux de Feurer et Morse [FEU78] d'une part, et Tsinias [TSI89] et Kokotovic et Sussmann [KOK89] d'autre part. Cette technique est une méthode systématique et récursive de synthèse d'une loi de commande non linéaire. Elle utilise également le principe de *stabilité de Lyapunov* et peut s'appliquer à une classe relativement large des systèmes non linéaires ayant une forme dite *triangulaire*.

Le principe de la commande par backstepping est illustré via l'Exemple 1.4. Tout d'abord, nous déterminons la première commande virtuelle à partir de la dynamique l'erreur de poursuite z_1 . Cette dernière va être utilisée au second étage comme un signal de référence pour l'état suivant (i.e. z_2). Nous répèterons l'opération jusqu'à arriver au $n^{\text{ième}}$ étage qui nous permet de déterminer la commande réelle qui sera appliquée par la suite au système.

Exemple 1.4 [HAD14] : Afin de présenter la méthode, considérons un système sous forme strict-feedback constitué de 2 sous-systèmes et d'une sortie comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.14)$$

où $x_i, i = 1, 2$ sont les états du système, u et y sont respectivement l'entrée et la sortie du système, $f_i(\cdot)$ et $g_i(\cdot)$ sont des fonctions non linéaires connues tel que $f_i(0) = 0$ (l'origine est un point d'équilibre) et $g_i(x) \neq 0, \forall x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ (condition de commandabilité).

Nous désirons forcer la sortie y à suivre un signal de référence y_d , où y_d, \dot{y}_d et $y_d^{(2)}$ sont supposées connues et uniformément bornées. Par la suite, la commande par backstepping est développée comme suit :

Etape 1 : Considérons tout d'abord le premier sous-système :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (1.15)$$

La variable d'état x_2 est traitée comme une entrée et l'on définit le signal de référence comme :

$$\alpha_0 = x_{1d} = y_d \quad (1.16)$$

La première variable d'erreur se définit comme :

$$z_1 = x_1 - \alpha_0 \quad (1.17)$$

Sa dynamique est :

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{\alpha}_0 = f_1 + g_1 x_2 - \dot{\alpha}_0 \quad (1.18)$$

Pour ce système, construisons d'abord une fonction candidate de Lyapunov V_1 comme suit :

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (1.19)$$

Sa dérivée temporelle au long des solutions de (1.18) est :

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = z_1 (f_1 + g_1 x_2 - \dot{\alpha}_0) \quad (1.20)$$

Un choix judicieux de x_2 rendre \dot{V}_1 négative et assure la stabilité de l'origine du sous-système décrit par (1.15), ce choix se donne comme suit :

$$\alpha_1 = x_{2d} = \frac{1}{g_1} [-k_1 z_1 - f_1 + \dot{\alpha}_0] \quad (1.21)$$

où $k_1 > 0$ est un paramètre de conception.

En définissant la deuxième variable d'erreur comme $z_2 = x_2 - \alpha_1$, et en remplaçant (1.21) dans (1.20), on obtient :

$$\dot{V}_1 = -k_1 z_1^2 + g_1 z_1 z_2 \quad (1.22)$$

Etape 2 : D'après le système (1.14), on a :

$$\dot{z}_2 = f_2 + g_2 u - \dot{\alpha}_1 \quad (1.23)$$

La dynamique des erreurs (z_1, z_2) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -k_1 z_1 + g_1 z_2 \\ \dot{z}_2 = f_2 + g_2 u - \dot{\alpha}_1 \end{cases} \quad (1.24)$$

Pour laquelle on choisit comme fonction candidate de Lyapunov :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 \quad (1.25)$$

Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2\dot{z}_2 \\ &= -k_1z_1^2 + z_2(f_2 + g_1z_1 + g_2u - \dot{\alpha}_1) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Un choix approprié de la commande réelle u peut être :

$$u = \frac{1}{g_2}[-k_2z_2 - f_2 - g_1z_1 + \dot{\alpha}_1] \quad (1.27)$$

où $k_2 > 0$, avec $\dot{\alpha}_1$ étant déterminée analytiquement comme suit :

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d} \dot{y}_d + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_d} \ddot{y}_d \quad (1.28)$$

En remplaçant la commande (1.27) dans (1.26), nous obtenons :

$$\dot{V}_2 = -k_1z_1^2 - k_2z_2^2 = -\sum_{j=1}^2 k_j z_j^2 \leq 0 \quad (1.29)$$

d'où la stabilité en boucle fermée du système original (1.14), et la convergence asymptotique (voire exponentielle) de l'erreur de poursuite de sortie z_1 vers zéro.

1.4.2 Commande adaptative

La commande adaptative est une approche utilisée pour les systèmes ayant des paramètres incertains, provenant des incertitudes dans les paramètres du système (incertitudes structurées) ou des simplifications dans la dynamique du système (incertitudes non structurées). Elle est basée sur le concept de l'estimation en ligne des paramètres inconnus du modèle ou du système via des lois d'adaptation [IOA96, TAO03, AST08].

La conception d'une commande adaptative en utilisant la fonction de Lyapunov, consiste à calculer une loi de commande et une loi de mise à jour des paramètres afin de garantir que la dérivée de la fonction de Lyapunov soit (semi)-définie négative. L'approche consiste donc à trouver un triplet (fonction de Lyapunov, loi de commande, loi d'adaptation) qui répond aux spécifications.

Exemple 1.5 : Considérons le système scalaire non linéaire suivant :

$$\dot{x} = \varphi^T(x)\theta + u \quad (1.30)$$

où $\theta \in R$ est un vecteur contenant les paramètres inconnus du système, $\varphi(x)$ est le vecteur de fonctions non linéaires lisses, avec $\varphi(0) = 0$.

On définit l'erreur de poursuite comme :

$$z = x - x_d \quad (1.31)$$

où x_d est le signal de référence.

La fonction candidate de Lyapunov associée à cette erreur z est définie comme suit :

$$V(z) = \frac{1}{2}z^2 \quad (1.32)$$

Sa dérivée temporelle de $V(z)$ est :

$$\dot{V} = z\dot{z} = z[-\dot{x}_d + \varphi^T(x)\theta + u] \quad (1.33)$$

Pour assurer la négativité de \dot{V} , on peut choisir u comme suit :

$$u = -kz - \varphi^T(x)\theta + \dot{x}_d, \quad k > 0 \quad (1.34)$$

Selon l'expression de la loi de commande (1.34), il en résulte que dans le cas où θ est inconnu ou mal connu, il sera impossible d'implémenter cette loi de commande. Donc, la solution est d'estimer ce vecteur θ via une loi d'adaptation.

Pour concevoir la loi d'adaptation, on va donc augmenter la fonction de Lyapunov (1.32) par un terme définissant l'erreur entre le vecteur des paramètres estimés et sa valeur réelle :

$$V = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta} \quad (1.35)$$

où $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ est l'écart entre la valeur réelle inconnue θ et la valeur estimée $\hat{\theta}$ et Γ est un gain d'adaptation positif. Donc, on a $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$.

L'équation (1.30) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{z} = -\dot{x}_d + \varphi^T(x)\theta + u = -\dot{x}_d + \varphi^T(x)\tilde{\theta} + \varphi^T(x)\hat{\theta} + u \quad (1.36)$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= z\dot{z} - \frac{1}{\Gamma}\tilde{\theta}^T\dot{\hat{\theta}} = z[-\dot{x}_d + \varphi^T(x)\tilde{\theta} + \varphi^T(x)\hat{\theta} + u] - \frac{1}{\Gamma}\tilde{\theta}^T\dot{\hat{\theta}} \\ &= z[\varphi^T(x)\hat{\theta} + u - \dot{x}_d] + \left(z\varphi^T(x) - \frac{1}{\Gamma}\dot{\hat{\theta}}^T\right)\tilde{\theta}\end{aligned}\quad (1.37)$$

Pour garantir la négativité de \dot{V} , le choix de la commande et de sa loi d'adaptation est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}} = \Gamma z \varphi(x) \\ u = -kz - \varphi^T(x)\hat{\theta} + \dot{x}_d \end{cases}\quad (1.38)$$

où k est un gain positif.

Donc, (1.37) devient :

$$\dot{V} = -kz^2 \leq 0 \quad (1.39)$$

Donc, le système (1.30) avec sa loi de commande et de mise à jour (1.38) est stable. Cependant, en utilisant le lemme de Barbalat, on peut conclure sur la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite vers l'origine. Quant à $\tilde{\theta}$, elle est seulement bornée (i.e. stable), en absence d'une excitation persistante. Cependant, en présence de cette dernière, on peut espérer la convergence de $\hat{\theta}$ vers θ .

1.4.3 Commande par surface dynamique (DSC)

L'utilisation de la commande par backstepping est problématique en raison d'une «*explosion de complexité*» dans la loi de commande [YIM01, BAN10]. Afin d'éviter ce problème, une technique de commande non linéaire appelée DSC (Dynamic Surface Control) a été développée par [SWA00, HED00, SON11]. La méthode de commande DSC est basée fondamentalement sur l'utilisation des filtres passe-bas du premier ordre pour filtrer les commandes virtuelles.

L'existence des gains de DSC et des constantes de temps des filtres pour la stabilité semi-globale a été théoriquement prouvée dans [SWA00], et elle a été prolongée à la commande adaptative pour une classe spécifique des incertitudes paramétriques [YIP98]. Pour un choix systématique des gains des surfaces et des constantes de temps des filtres, une approche est présentée dans [SWA97] pour le cas non adaptatif.

1.5 Systèmes flous

Les systèmes flous sont des systèmes à base de connaissances construits à partir des opérateurs de la logique floue. Cette logique est basée sur l'imitation des aspects approximatifs et qualitatifs du raisonnement humain. Celui-ci est une représentation des caractéristiques d'un système à l'aide de règles floues qui décrivent son comportement.

1.5.1 Description des systèmes flous

La configuration de base d'un système de la logique floue est constituée d'un fuzzificateur, d'une base de règles floues, d'un moteur d'inférence floue et d'un défuzzificateur, comme illustré par la Figure 1.2. Le moteur d'inférence floue utilise des règles floues *Si-Alors* pour effectuer une application à partir d'un vecteur d'entrée $Z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T \in R^n$ à une sortie $y \in R$.

La $j^{\text{ème}}$ règle floue est décrite par :

$$R^j: \text{Si } z_1 \text{ est } A_1^j \text{ et } \dots \text{ et } z_n \text{ est } A_n^j, \text{ Alors } y \text{ est } B^j, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, m \quad (1.40)$$

où $A_1^j, A_2^j, \dots, A_n^j$ sont des ensembles flous et B^j est un singleton flou de la conclusion de la règle j . En utilisant une fuzzification de type singleton, une inférence de type produit, et une défuzzification de type centre- moyenne, la sortie du système flou peut être exprimée comme suit [WAN94] :

$$y(Z) = \frac{\sum_{j=1}^m B^j \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(z_i)}{\sum_{j=1}^m \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(z_i) \right]} \quad (1.41)$$

Alors le système flou (1.41) peut être réécrit sous la forme compacte suivante :

$$y(Z) = \theta^T \psi(Z) \quad (1.42)$$

où $\theta^T = [\theta_1, \dots, \theta_m] = [B^1, \dots, B^m]$ est un vecteur des conclusions et $\psi(Z) = [\psi_1(Z), \dots, \psi_m(Z)]^T$ est un vecteur de fonctions de base floue (FBF), avec $\psi_j(Z) = \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(z_i) \right) / \left(\sum_{j=1}^m \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(z_i) \right] \right)$.

Tout au long de cette thèse, il est supposé que les FBF sont sélectionnées de manière qu'il y ait toujours au moins une règle active [WAN94], i.e. on a toujours $\sum_{j=1}^m \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(z_i) \right] > 0$. Notons que le système flou (1.42), étant un approximateur universel [WAN94], est largement appliqué dans la modélisation, l'identification et la commande des systèmes non linéaires [WAN94, LAB05, BOU08a].

1.5.2 Approximation par les systèmes flous

Les systèmes flous de la forme (1.42) peuvent approximer des fonctions non linéaires continues inconnues à n'importe quel degré de précision désiré. En fait, dans [WAN92, BUC93], il a été démontré qu'un système flou est capable d'approximer n'importe quelle fonction non linéaire continue définie sur un ensemble compact (i.e. que les systèmes flous sont des approximateurs universels).

Les schémas de commande floue proposés dans cette thèse sont basés sur le théorème suivant, dit *théorème d'approximation universelle*.

Théorème 1.9 (Théorème d'approximation universelle) : *Soit $H(Z)$ une fonction non linéaire continue définie sur un ensemble compact Ω , et pour toute constante positive ε , il existe un système flou $y(Z)$ de la forme (1.42) tel que :*

$$\sup_{Z \in \Omega} |H(Z) - \theta^T \psi(Z)| < \varepsilon \quad (1.43)$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans [WAN94].

Étant donné un ensemble compact Ω , d'après [WAN92], la fonction continue $H(Z)$ peut être exprimée sous la forme :

$$H(Z) = \theta^{*T} \psi(Z) + \varepsilon(Z) \quad (1.44)$$

où θ^* est un vecteur des paramètres optimaux, $\varepsilon(Z)$ est l'erreur d'approximation qui satisfait $|\varepsilon(Z)| \leq \varepsilon^*$, avec ε^* étant la borne supérieure de $\varepsilon(Z)$.

Remarque 1.1 :

1. Tout au long de cette thèse, comme la majorité des travaux relatifs à la commande adaptative floue, c'est le système flou de Takagi-Sugeno d'ordre zéro (TS0) qui sera utilisé pour estimer les fonctions non linéaires inconnues.
2. Dans cette thèse, nous supposons que la structure du système flou et les fonctions floues de base sont convenablement spécifiées à priori par l'utilisateur. Cela signifie que la décision de l'utilisateur est nécessaire pour déterminer la structure du système flou à savoir : les entrées pertinentes, le nombre de fonctions d'appartenance pour chaque entrée, les paramètres des fonctions d'appartenance et le nombre de règles. Quant aux paramètres des conclusions, i.e. θ , ils seront déterminés en ligne via un algorithme adéquat d'adaptation.

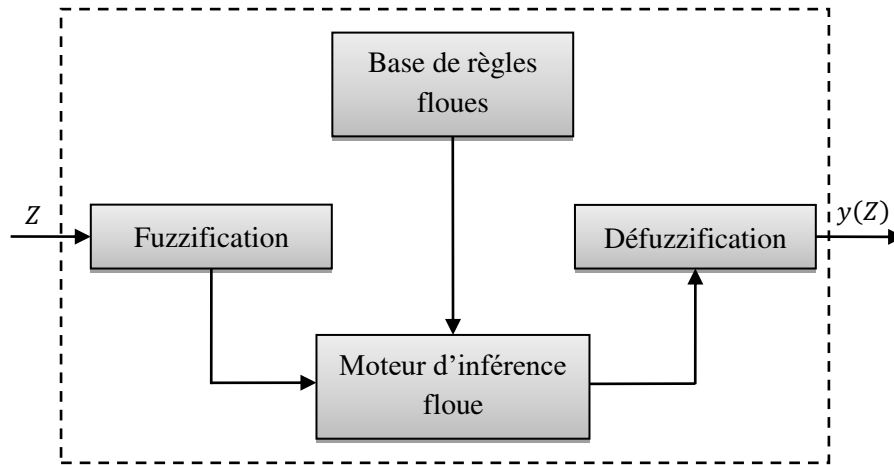


Figure 1.2 : Configuration de base d'un système flou.

1.6 Non-linéarité d'actionneur

Il est bien connu qu'en pratique tous les systèmes dynamiques sont soumis à des limitations sur leurs entrées dues à des contraintes physiques inhérentes au système ou bien à des limitations sur les actionneurs telles que: la saturation et la zone morte [ZHO08, BOU08a, CHE10a, HAD14]. L'étude de ces non-linéarités statiques (sans mémoires) et non dérivables présente un grand intérêt pratique.

1.6.1 Saturation

Le problème de la saturation dans un système de commande est omniprésent, du fait que tous les actionneurs seaturent à un certain niveau. Lorsqu'un actionneur atteint ces limites, on dit qu'il est saturé et aucune tentative visant à accroître le signal de commande ne donne un résultat.

Mathématiquement, la saturation peut être décrite par :

$$u(v) = \text{sat}(v(t)) = \begin{cases} v_{max} & \text{si } v(t) > v_{max} \\ v & \text{si } v_{min} \leq v(t) \leq v_{max} \\ v_{min} & \text{si } v(t) < v_{min} \end{cases} \quad (1.45)$$

avec v_{max} et v_{min} étant les paramètres de la saturation et v étant l'entrée. La fonction de saturation est notée $\text{sat}(v(t))$ et peut être représentée par la Figure 1.3.

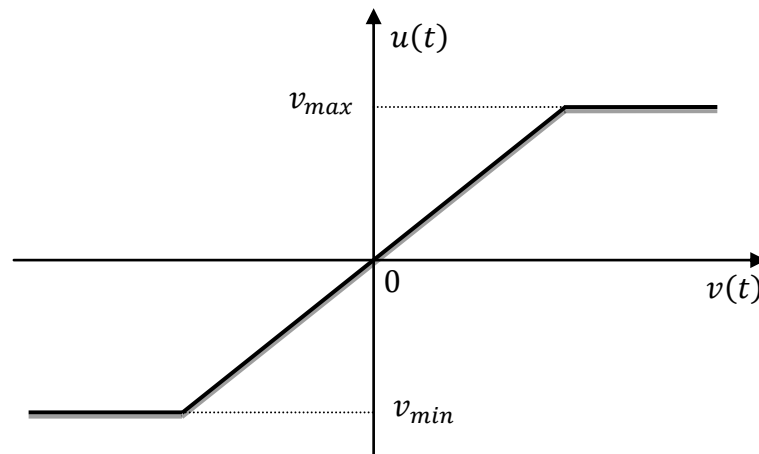


Figure 1.3 : Fonction de la saturation.

1.6.2 Zone-morte

La non-linéarité de type zone-morte est une fonction non différentiable qui décrit l'insensibilité du composant à de petits signaux et constitue l'une des plus importantes non-linéarités dans de nombreux systèmes physiques. Par exemple, certains composants mécaniques et électriques, tels que les vannes et les servomoteurs à courant continu, sont caractérisés par des zone-mortes à l'entrée.

Mathématiquement, la zone-morte peut être décrite par (voir la Figure 1.4) :

$$u(v) = DZ(v) = \begin{cases} m_r(v(t) - b_r) & \text{si } v(t) > b_r \\ 0 & \text{si } b_l \leq v(t) \leq b_l \\ m_l(v(t) - b_l) & \text{si } v(t) < b_l \end{cases} \quad (1.46)$$

où $b_r > 0$, $b_l < 0$, $m_r > 0$ et $m_l > 0$, sont respectivement les paramètres et les pentes de la zone morte.

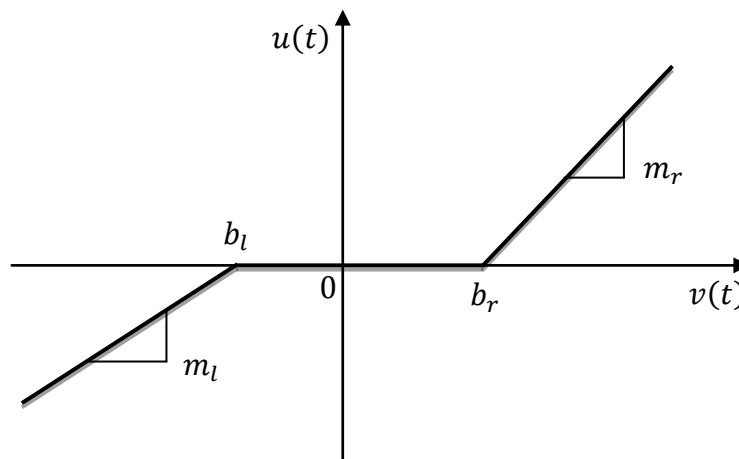


Figure 1.4 : Fonction de la zone morte.

1.7 Outils mathématiques employés

1.7.1 Théorème de la valeur moyenne (MVT)

Si x et y deux points distingués dans R^n , donc le segment $L(x, y)$ joignant x à y est :

$$L(x, y) = \{z | z = x\lambda + (1 - \lambda)y, 0 < \lambda < 1\} \quad (1.47)$$

Théorème 1.10 (MVT) : Supposons que $f : R^n \rightarrow R$ soit une fonction continuellement différentiable à chaque point x de l'ensemble ouvert $S \subset R^n$. Soient x et y sont deux points de S tels que le segment $L(x, y) \subset S$. Alors, il existe un point z du segment $L(x, y)$ tel que :

$$f(y) - f(x) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{z=x\lambda+(1-\lambda)y} (y - x) \quad (1.48)$$

Notons que la démonstration de ce théorème peut être trouvée dans n'importe quel livre portant sur l'analyse mathématique, e.g. [APO57].

1.7.2 Décomposition matricielle

Nous utiliserons plus loin le lemme important suivant, dans la conception de la commande pour les systèmes MIMO [MOR93, COS03, HSU07, ZHO08, BOU08a, HAD19].

Lemme 1.2 : N'importe quelle matrice réelle $K_p \in R^{p \times p}$ ayant des mineurs principaux différents de zéro peut être décomposée comme suit [MOR93, COS03] :

$$K_p = SDT \quad (1.49)$$

où $S \in R^{p \times p}$ une matrice symétrique définie positive, $D \in R^{p \times p}$ est une matrice diagonale, et $T \in R^{p \times p}$ est une matrice triangulaire supérieure avec des uns sur la diagonale.

Preuve du Lemme 1.2 : Puisque les mineurs principaux de K_p sont différents de zéro, il existe une factorisation unique :

$$K_p = L_1 D_p L_2^T \quad (1.50)$$

où L_1 et L_2 sont des matrices triangulaire inférieures avec des uns sur la diagonale, et

$$D_p = \text{diag} \left\{ \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} \right\} \quad (1.51)$$

où les Δ_i sont les mineurs principaux de K_p .

En décomposant la matrice D_p comme suit :

$$D_p = D_+ D \quad (1.52)$$

où D_+ est une matrice diagonale avec des entrées positives, nous pouvons réécrire (1.50) comme $K_p = L_1 D_+ L_1^T L_1^{-T} D L_2^T$, de sorte que (1.49) soit satisfaite par :

$$S = L_1 D_+ L_1^T, \quad T = D^{-1} L_1^{-T} D L_2^T \quad (1.53)$$

Ceci termine la preuve de ce lemme.

Exemple 1.6 : Afin d'illustrer les caractéristiques de chacun des facteurs S , D et T , nous considérons la matrice suivante :

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

La factorisation (1.50), dite LDU, donne :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_p = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2/\Delta_1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_2 & 1 \end{bmatrix}$$

où $l_1 = k_{21}/\Delta_1$ et $l_2 = k_{12}/\Delta_1$, et pour $D_+ = \begin{bmatrix} d_1^+ & 0 \\ 0 & d_2^+ \end{bmatrix}$.

Finalement, la décomposition SDT (1.49) donne :

$$D = D_+^{-1} D_p, \quad S = \begin{bmatrix} d_1^+ & d_1^+ l_1 \\ d_1^+ l_1 & d_2^+ + d_1^+ l_1^2 \end{bmatrix} \text{ et } T = \begin{bmatrix} 1 & l_2 - \frac{d_1^+ l_1 \Delta_2}{d_2^+ \Delta_1^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque 1.2 : Dans [MOR93], la matrice D est choisie diagonale avec des $+1$ ou -1 sur la diagonale. Cependant, la décomposition $K_p = SDT$ (1.49) n'est pas unique, puisque la matrice diagonale positive D_+ introduite dans (1.52) est un paramètre de choix libre.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques outils mathématiques relatifs à la stabilité asymptotique et à la stabilité en temps fin des systèmes autonomes et non autonomes. Nous avons présenté brièvement la théorie de Lyapunov, les principaux résultats concernant la stabilité à l'aide des fonctions de Lyapunov, ainsi que les fonctions barrières de Lyapunov utilisées pour analyser la stabilité des systèmes avec contraintes sur les états ou sur les sorties. Ensuite, nous avons attaché une importance à la commande backstepping et la commande adaptative. Nous avons également montré que les systèmes flous, en général, ont la propriété d'approximation universelle. En fait, ils peuvent estimer n'importe quelle fonction non linéaire continue définie sur un ensemble compact. Finalement, nous avons fait un petit rappel sur les non-linéarités omniprésentes dans les actionneurs, le théorème de la valeur moyenne et la décomposition matricielle de type SDU. Ces rappels sont très utiles et seront exploités dans la conception des commandes et l'analyse de la stabilité dans les chapitres qui suivent.

CHAPITRE 2

COMMANDE ADAPTATIVE EN

TEMPS FINI DES SYSTEMES NL

AVEC DES CONTRAINTES SUR LA

SORTIE ET L'ENTREE

Chapitre 2

Commande adaptative en temps fini des systèmes NL avec des contraintes sur la sortie et l'entrée

2.1 Introduction

Les incertitudes sont omniprésentes dans les systèmes pratiques en raison de l'imprécision de la modélisation, des variations paramétriques et des perturbations externes. Ces incertitudes devraient être prises en compte lors de la phase de conception des lois de commande. Les approximateurs universels de fonctions (tels que les systèmes flous (SF) et les réseaux de neurones (RN)) sont largement utilisés pour traiter le problème des incertitudes, car ils ont une forte capacité d'approximation des fonctions non linéaires continues inconnues [BOU18, BOU20, SUI20]. Pour certaines classes de systèmes non linéaires inconnus avec des incertitudes appariées, plusieurs schémas de commande backstepping adaptative basés sur les SF ou RN ont été proposées au cours des deux dernières décennies, e.g. [WAN08, LEE11, WAN15, TON16, LIU17a]. Dans ces travaux, l'analyse de stabilité a été rigoureusement effectuée en utilisant l'approche directe de Lyapunov. D'autre part, certains auteurs utilisent des observateurs de perturbations pour traiter les incertitudes du système plutôt que des approximateurs universels [CHE04, CHE10b, CHE15, LI17, WAN18a]. De tels observateurs permettent de fournir des estimations précises des perturbations (perturbations externes + fonctions incertaines). Ces estimées seront ensuite utilisées dans la loi de commande.

La plupart des schémas de commande adaptative (floue ou neuronale) existants dans la littérature ouverte, sont principalement conçus pour les systèmes non linéaires sans contraintes d'état (ou de sortie) et d'entrée. Dans les systèmes pratiques, les contraintes peuvent survenir sous diverses formes, par exemple : la spécification des performances, la sécurité, l'arrêt physique et la saturation. En général, les contraintes peuvent être classées en deux types : *les contraintes d'actionnement* (saturation, zone morte, hystérésis,...)

[HAD16, HAD19], et *les contraintes de sortie ou d'état* [TEE09, TEE12]. Si ces contraintes ne sont pas prises en compte lors de la phase de conception, des résultats désastreux peuvent apparaître tels que : des effets indésirables sur le système de commande en boucle fermée et des performances dégradées du système. **Primo, pour les systèmes non linéaires à contraintes d'état ou de sortie**, des fonctions barrières de Lyapunov ont été proposées pour faire face à ces contraintes [TEE09, TEE12]. Ces fonctions barrières croissent rapidement à l'infini une fois les variables (d'erreur ou d'état) se rapprochent de leurs contraintes. Des schémas de commande adaptative (floue ou neuronale) ont été conçus en utilisant des fonctions barrières pour les systèmes non linéaires avec des contraintes sur la sortie [TEE09, REN10, TEE11, LI15, SUN20], et sur les états [TEE12, TAN16, LIU17b, SUN18a, MIS21]. De telles fonctions peuvent garantir que les contraintes de sortie ou d'état ne seront pas violées. Cependant, dans les approches de commande basées sur les fonctions barrières de Lyapunov (BLF) pour les systèmes non linéaires à état contraint, certaines étapes nécessitent la transformation des contraintes d'état à des contraintes des variables d'erreur (dont leurs bornes sont inconnues). Donc, ces étapes exigent des conditions dites de *faisabilité* sur les commandes virtuelles dans le concept de backstepping, autrement dit que les commandes virtuelles doivent satisfaire une certaine région pré-contrainte. Les auteurs de [ZHA17] et [ZHA19] ont tenté de résoudre ce problème ouvert en introduisant une méthode de transformation non linéaire pour transformer les états du système contraints à des états sans contraintes (tout en évitant l'utilisation des BLF dans la conception de la commande et l'analyse de la stabilité). Par la suite, la preuve de la bornitude de nouvelles variables (étant sans contraintes) implique directement que les contraintes du système d'origine ne sont pas transgressées. **Secondo, les contraintes d'actionnement**, telle que la saturation d'entrée, doivent également être prises en compte pendant la conception de la loi de commande. A noter que la présence de ces contraintes d'actionnement peut limiter ou dégrader les performances du système de commande, voire dans certains cas peut le déstabiliser [HAD16, HAD19]. En général, la saturation d'entrée est traitée via l'utilisation des méthodes suivantes :

- 1) Atténuation de son effet via l'estimation du domaine d'attraction [LI14a, LI18] ;
- 2) Compensation de son effet via la conception d'un système auxiliaire [CHE11, YAN20] ;
- 3) Conception de la loi de commande dans un cadre à structure variable [CHE10a] ;
- 4) Emploi d'un système anti-windup [WU00, YE20] ;
- 5) Conception d'une fonction de saturation imbriquée [DIN15, MI20].

Ces différentes solutions, sous certaines hypothèses, peuvent plus ou moins compenser les effets indésirables de la saturation. Enfin, il est important de souligner que le problème lié à la *condition de faisabilité* reste encore sans solution dans les schémas de commande backstepping adaptative basés sur les fonctions barrières et les systèmes auxiliaires (utilisés pour compenser les effets de saturation).

D'autre part, la majorité des méthodes de commande adaptatives proposées dans la littérature ouverte n'assurent pas une convergence en temps fini. Mais, afin de réduire la consommation d'énergie dans les systèmes pratiques, il est nécessaire de rendre le système stable dans un temps fini. Plus précisément, les méthodes de commande adaptatives conçues en se basant sur la théorie de stabilité de Lyapunov, en général, ne peuvent assurer qu'une stabilité asymptotique, i.e. les erreurs de poursuite des états convergent à zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cependant, dans plusieurs applications pratiques, nous voulons obtenir l'effet de commande en un temps fini. En se basant sur la théorie de la stabilité en temps fini, proposée pour la première fois dans les années soixante [WEI67], de nombreux résultats de recherche et d'application ont été obtenus. Depuis ce temps là, l'étude de la commande en temps fini des systèmes non linéaires a attiré l'attention des chercheurs [YU16, YU18, SUN18b, SUI18, LI19, WAN20, WU20]. Cependant, à notre meilleur connaissance, le problème de la commande adaptative en temps fini des systèmes incertains ayant une forme nonstrict-feedback et soumis à des contraintes d'entrée et de sortie a été rarement abordé dans la littérature ouverte dédiée à la commande. Ceci est principalement dû à la complexité de cette classe de systèmes et aussi à l'éventuel problème de singularité. En réalité, la majorité des schémas de commande par backstepping en temps fini sont déjà discutables, à cause du problème de singularité intrinsèquement lié à la dérivée temporelle (directe (explicite) ou indirecte (implicite)) des commandes virtuelles [YU16, YU18, SUN18b, SUI18, LI19, WAN20, WU20].

Inspiré par les observations ci-dessus, en tenant compte des contraintes d'entrée (saturation) et de sortie variant dans le temps, nous proposons dans ce chapitre un nouveau schéma de commande adaptative floue à surface dynamique en temps fini, basé sur la fonction barrière de Lyapunov, pour une classe de systèmes non linéaires incertains perturbés et ayant une forme nonstrict-feedback. Les fonctions non linéaires incertaines impliquées dans le modèle du système sont approchées en ligne via l'utilisation de systèmes flous adaptatifs. Les termes des perturbations regroupées sont robustement estimés par des observateurs de perturbations non linéaires. Les contraintes d'entrée et de

sortie sont respectivement résolues en concevant un système auxiliaire et en incorporant une fonction barrière dans la fonction candidate de Lyapunov. Le problème de la boucle algébrique inhérent aux systèmes non linéaires ayant une forme nonstrict-feedback est surmonté en exploitant une propriété intéressante des fonctions de base floue. En bref, les principales contributions de ce chapitre sont :

- 1) Comparé aux travaux voisins [YU16, YU18, SUN18b, SUI18, LI19, WAN20, WU20], le schéma de commande adaptative floue proposé est exempt du fameux problème de singularité lié à la dérivée temporelle (directe ou indirecte) des commandes virtuelles. En effet, en proposant un filtre non linéaire avec une sortie bornée, la dérivation temporelle des commandes virtuelles n'est pas exigée dans la loi de commande ou dans l'analyse de stabilité.
- 2) Contrairement à [YU16, YU18, SUN18b, SUI18, LI19, WAN20, WU20], un observateur de perturbation non linéaire est conçu pour estimer un terme de perturbations groupées contenant l'erreur d'approximation floue et les perturbations externes. Notons que l'utilisation de cet observateur améliore davantage la robustesse du contrôleur, mais le rend également efficace en termes de calcul.
- 3) Ce chapitre résout rigoureusement le problème de la boucle algébrique inhérent aux systèmes non linéaires ayant une forme nonstrict-feedback par quelques manipulations mathématiques (i.e. en considérant les termes flous derrière cette boucle algébrique dans les erreurs d'approximation floue).
- 4) Le problème ouvert lié à *la condition de faisabilité* a été résolu dans ce chapitre en utilisant une fonction bornée (Tangent hyperbolique) dans la variable d'erreur de sortie.
- 5) Un nouveau *système auxiliaire non linéaire stable* est proposé pour compenser conjointement l'effet de saturation et l'erreur d'approximation de commande virtuelle (i.e. l'erreur entre les commandes virtuelles et les commandes virtuelles filtrées).
- 6) Un nouveau lemme technique sur la stabilité pratique rapide en temps fini est proposé. Contrairement aux travaux voisins, pour démontrer ce lemme, on va exploiter tous les termes (i.e. les termes qui convergent rapidement et les termes qui convergent moins rapidement) de la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov.

2.2 Formulation du problème et préliminaires

2.2.1 Description du système

Considérons le système SISO non linéaire incertain suivant sous une forme de nonstrict-feedback :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x) + g_i x_{i+1} + d_i(x, t), & 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n = f_n(x) + g_n u(v(t)) + d_n(x, t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$, $y \in R$ et $v(t) \in R$ sont le vecteur d'état, la sortie et l'entrée de commande du système, respectivement. $f_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, est une fonction lisse inconnue. $d_i(x, t) \in R$ et $g_i \in R$ désignent une perturbation inconnue bornée variant dans le temps et le gain constant connu de commande, respectivement. $u(v(t)) \in R$ représente la non-linéarité de l'actionneur (type saturation).

Dans ce travail, l'état x_1 (i.e. la sortie du système) est considéré comme un état contraint, i.e. $|x_1| < k_{x_1}(t)$, où $k_{x_1}(t)$ est une fonction positive non linéaire variante dans le temps.

2.2.2 Non-linéarité de saturation

Le modèle de saturation est donné par [CHE15] :

$$u(v(t)) = \text{sat}(v(t)) = \begin{cases} u_M \text{sign}(v(t)), & |v(t)| \geq u_M \\ v(t), & |v(t)| < u_M \end{cases} \quad (2.2)$$

où u_M est une borne de $u(t)$.

La Figure 2.1 montre la fonction $\text{sat}(v(t))$ et son estimé lisse $h(v)$.

Alors, $u(v)$ peut être exprimé sous la forme :

$$u(v) = h(v) + \rho(v) \quad (2.3)$$

où $\rho(v) = u(v) - h(v)$ est l'erreur d'approximation de saturation. Il est clair d'après la Figure 2.1 que $\rho(v)$ est une fonction bornée.

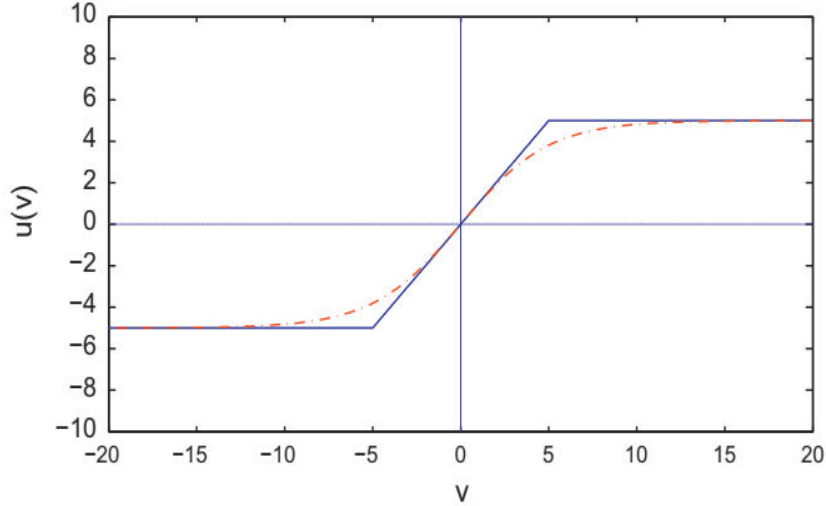


Figure 2.1 : Saturation: ligne continue: $\text{sat}(v(t))$; ligne pointillée: $u_M \times \tanh(v(t)/u_M)$.

En invoquant le théorème de la valeur moyenne (Théorème 1.10), $h(v)$ peut être exprimé comme suit :

$$h(v) = h(v_0) + h_{v_\kappa}(v - v_0) \quad (2.4)$$

avec $h_{v_\kappa} = \left. \frac{\partial h(v)}{\partial v} \right|_{v=v_\kappa}$ et $v_\kappa = \kappa v + (1 - \kappa)v_0$, où $0 < \kappa < 1$ est une constante.

En choisissant $v_0 = 0$, l'expression (2.4) devient :

$$h(v) = h(0) + h_{v_\kappa} v \quad (2.5)$$

En considérant $h(0) = 0$, on en déduit que :

$$h(v) = h_{v_\kappa} v \quad (2.6)$$

2.2.3 Énoncé du problème

Pour un signal de référence y_d , notre objectif est de construire un contrôleur de surface dynamique adaptatif flou en temps fini pour (2.1) tels que :

- 1) Toutes les variables du système en boucle fermée sont bornées ;
- 2) La sortie du système suit pratiquement y_d en un temps fini ;
- 3) L'état x_1 (i.e. la sortie y) ne viole pas sa contrainte, i.e. la contrainte $|x_1| < k_{x_1}(t)$ est toujours garantie.

Les hypothèses et les lemmes suivants sont utiles pour concevoir notre système de commande.

Hypothèse 2.1 : Supposons que :

$$|\rho(v)| \leq \bar{\rho} \quad (2.7)$$

avec $\bar{\rho}$ étant une constante positive inconnue.

Hypothèse 2.2 : Les gains de commande doivent satisfaire : $g_i \neq 0$, $\text{sign}(g_i) = \text{sign}\left(g_i + \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_{i+1}}\right)$, pour $1 \leq i \leq n - 1$ et $g_n \neq 0$.

Hypothèse 2.3 [LIU19a] : Le signal de référence $y_d(t)$ est une fonction suffisamment lisse telle que y_d , \dot{y}_d et \ddot{y}_d sont bornés et continus.

Hypothèse 2.4 [LIU19a] : Les perturbations externes $d_i(x, t)$ et leurs dérivées $\dot{d}_i(x, t)$ doivent satisfaire : $|d_i| \leq Y_{i,0}$ et $|\dot{d}_i| \leq Y_{i,1}$, où $Y_{i,0}$ et $Y_{i,1} \geq 0$ sont des constantes inconnues.

Hypothèse 2.5 [MIS21] : La dérivée temporelle du terme de perturbation augmentée D_i doit satisfaire $|\dot{D}_i| \leq \Delta_i$, $1 \leq i \leq n$, où Δ_i est une constante inconnue.

Lemme 2.1 [REN10] : Pour toute fonction k_{z_1} strictement positive et variante dans le temps, l'inégalité suivante est vérifiée, lorsque z_1 reste dans l'intervalle $\Omega_z := \{z \in R: |z_1| < k_{z_1}\}$:

$$\log\left(\frac{k_{z_1}^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2}\right) < \frac{z_1^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \quad (2.8)$$

Lemme 2.2 [WAN18b] : Pour toutes variables réelles χ et ς , on peut obtenir :

$$|\chi|^{r_1} |\varsigma|^{r_2} \leq \frac{r_1}{r_1+r_2} r_3 |\chi|^{r_1+r_2} + \frac{r_2}{r_1+r_2} r_3^{-\frac{r_1}{r_2}} |\varsigma|^{r_1+r_2} \quad (2.9)$$

où r_1 , r_2 et r_3 sont des constantes strictement positives.

Lemme 2.3 [WAN18b] : Pour $\varpi_i \in R$, $i = 1, \dots, n$, $p \in (0, 1]$,

$$\left(\sum_{i=1}^n |\varpi_i|\right)^p \leq \sum_{i=1}^n |\varpi_i|^p \leq n^{1-p} \left(\sum_{i=1}^n |\varpi_i|\right)^p \quad (2.10)$$

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{\xi} = f(\xi, t), \quad \text{avec } f(0,0) = 0 \quad (2.11)$$

où $\xi \in R^n$ est le vecteur d'état.

Définition 2.1 [ZHU18] : Le système (2.11) est pratiquement stable en temps fini (FPS), si pour tout $\xi(t_0) = \xi_0 \in \Omega_\xi$, il existe $\varepsilon > 0$ et un temps d'établissement (*settling time*) $T(\varepsilon, \xi_0) < \infty$ tel que $\|\xi(t)\| < \varepsilon, \forall t > t_0 + T$.

Lemme 2.4 [YU05] : Considérons le système non linéaire (2.11). Pour toutes constantes réelles $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, et $0 < \beta < 1$, suppose qu'il y a une fonction de classe C^2 , $V(\xi(t)) : R^n \rightarrow R_+$ satisfait :

$$\dot{V}(\xi) \leq -c_1 V^\beta(\xi) - c_2 V(\xi), \quad t \geq 0 \quad (2.12)$$

Alors, l'origine de ce système est stable en temps fini et le temps d'établissement est donné par :

$$T_s = \frac{1}{c_2(1-\beta)} \ln \left[\frac{c_1 + c_2 V^{1-\beta}(\xi(0))}{c_1} \right] \quad (2.13)$$

Lemme 2.5 : Considérons le système (2.11). Si la fonction lisse et définie positive $V(\xi)$ satisfait la relation suivante :

$$\dot{V}(\xi) \leq -a_1 V^\beta(\xi) + a_2, \quad t \geq 0 \quad (2.14)$$

où a_1 et a_2 sont des constantes strictement positives et $0 < \beta < 1$, alors le système non linéaire $\dot{\xi} = f(\xi, t)$ est FPS.

Preuve du Lemme 2.5 : Pour toute constante b (où $0 < b \leq 1$) et à partir de (2.14), on a :

$$\dot{V}(\xi) \leq -a_1 b V^\beta(\xi) - a_1(1-b)V^\beta(\xi) + a_2 \quad (2.15)$$

Définissons deux ensembles : $\Omega_\xi = \left\{ \xi \mid V(\xi) \leq \left(\frac{a_2}{a_1(1-b)} \right)^{1/\beta} \right\}$ et $\bar{\Omega}_\xi = \left\{ \xi \mid V(\xi) > \left(\frac{a_2}{a_1(1-b)} \right)^{1/\beta} \right\}$.

Maintenant, nous considérons deux situations.

Cas 1 : Si $\xi \in \bar{\Omega}_\xi$, (2.15) devient :

$$\dot{V}(\xi) \leq -a_1 b V^\beta(\xi) \quad (2.16)$$

Cela implique que :

$$\int_0^T \frac{\dot{V}(\xi)}{V^\beta(\xi)} dt = \int_0^T -a_1 b dt \quad (2.17)$$

A partir de (2.17), l'inégalité suivante peut être facilement obtenue :

$$\frac{1}{1-\beta} V^{1-\beta}(\xi(T)) - \frac{1}{1-\beta} V^{1-\beta}(\xi(0)) \leq -a_1 b T \quad (2.18)$$

Soit le temps d'établissement : $T_s = \frac{1}{(1-\beta)a_1 b} \left[V^{1-\beta}(\xi(0)) - \left(\frac{a_2}{a_1(1-b)} \right)^{(1-\beta)/\beta} \right]$. En vertu de (2.18), on a $\xi \in \Omega_\xi$ pour $t \geq T_s$.

Cas 2 : Supposons initialement que $\xi \in \Omega_\xi$, nous basant sur le Cas 1, la trajectoire de ξ reste dans l'ensemble Ω_ξ . Cela termine la démonstration de Lemme.

Maintenant, nous présentons notre nouveau lemme technique très utile pour étudier la stabilité pratique rapide en temps fini. Pour prouver ce lemme, contrairement aux travaux voisins, nous allons exploiter tous les termes (c'est-à-dire les termes qui convergent rapidement et les termes qui convergent moins rapidement) de la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov.

Lemme 2.6 (Critère pratique de stabilité en temps fini rapide) : Considérons le système (2.11). Pour toutes constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 > 0$, et $0 < \beta < 1$, et les fonctions- K_∞ α_1 et α_2 , supposons qu'il y a une fonction de classe C^2 , $V(\xi(t)): R^n \rightarrow R_+$ satisfait :

$$\begin{cases} \alpha_1(\|\xi(t)\|) \leq V(\xi(t)) \leq \alpha_2(\|\xi(t)\|) \\ \dot{V}(\xi) \leq -c_1 V^\beta(\xi) - c_2 V(\xi) + c_3, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} V &\leq \min \left\{ \frac{c_3}{bc_2}, \left(\frac{c_3}{bc_1} \right)^{1/\beta} \right\}, \quad \text{pour } t \geq T_s \\ \Rightarrow \|\xi(t)\| &\leq \min \left\{ \alpha_1^{-1} \left(\frac{c_3}{bc_2} \right), \alpha_1^{-1} \left(\left(\frac{c_3}{bc_1} \right)^{1/\beta} \right) \right\}, \quad \text{pour } t \geq T_s \end{aligned} \quad (2.20)$$

et le temps d'établissement est défini comme suit :

$$T_s = \max \left\{ \frac{1}{c_2(1-b)(1-\beta)} \ln \left[\frac{c_1 + c_2(1-b)V^{1-\beta}(\xi(0))}{c_1 + c_2(1-b) \left(\frac{c_3}{bc_2} \right)^{1-\beta}} \right], \frac{1}{c_2(1-\beta)} \ln \left[\frac{c_1(1-b) + c_2 V^{1-\beta}(\xi(0))}{c_1(1-b) + c_2 \left(\frac{c_3}{bc_1} \right)^{(1-\beta)/\beta}} \right] \right\} \quad (2.21)$$

Preuve du Lemme 2.6 : D'après (2.19), pour toute constante b (où $0 < b \leq 1$), on a :

$$\dot{V}(\xi) \leq -c_1 V^\beta(\xi) - c_2(1-b)V(\xi) - c_2 b V(\xi) + c_3 \quad (2.22)$$

ou

$$\dot{V}(\xi) \leq -c_1(1-b)V^\beta(\xi) - c_2 V(\xi) - c_1 b V^\beta(\xi) + c_3 \quad (2.23)$$

Définissons trois ensembles : $\Omega_{\xi_1} = \left\{ \xi \mid V(\xi) > \frac{c_3}{bc_2} \right\}$, $\Omega_{\xi_2} = \left\{ \xi \mid V(\xi) > \left(\frac{c_3}{bc_1} \right)^{1/\beta} \right\}$ et $\Omega_{\xi_3} = \left\{ \xi \mid V(\xi) \leq \min \left\{ \frac{c_3}{bc_2}, \left(\frac{c_3}{bc_1} \right)^{1/\beta} \right\} \right\}$.

Maintenant, nous analyserons trois cas.

Cas 1 : Si $\xi \in \Omega_{\xi_1}$, (2.22) devient :

$$\dot{V}(\xi) \leq -c_1 V^\beta(\xi) - c_2(1-b)V(\xi) \quad (2.24)$$

En multipliant les deux membres de (2.24) par $e^{c_2(1-b)t}$, on obtient :

$$\dot{V}(\xi)e^{c_2(1-b)t} + c_2(1-b)e^{c_2(1-b)t}V(\xi) \leq -c_1(V^\beta(\xi)e^{c_2(1-b)t})^\beta e^{c_2(1-b)(1-\beta)t} \quad (2.25)$$

Le traitement et l'intégration de (2.25) donne :

$$\int_0^T (V(\xi)e^{c_2(1-b)t})^{-\beta} d(V(\xi)e^{c_2(1-b)t}) \leq -c_1 \int_0^T e^{c_2(1-b)(1-\beta)t} dt \quad (2.26)$$

Cela implique que :

$$V^{1-\beta}(\xi) \leq e^{-c_2(1-b)(1-\beta)t} \left(V^{1-\beta}(\xi(0)) + \frac{c_1}{c_2(1-b)} \right) - \frac{c_1}{c_2(1-b)} \quad (2.27)$$

Soit $T_{S_1} = \frac{1}{c_2(1-b)(1-\beta)} \ln \left[\frac{c_1 + c_2(1-b)V^{1-\beta}(\xi(0))}{c_1 + c_2(1-b)\left(\frac{c_3}{bc_2}\right)^{1-\beta}} \right]$, donc pour $\forall t \geq T_{S_1}$, on obtient :

$$e^{-c_2(1-b)(1-\beta)t} \left(V^{1-\beta}(\xi(0)) + \frac{c_1}{c_2(1-b)} \right) \leq \left(\frac{c_3}{bc_2} \right)^{1-\beta} + \frac{c_1}{c_2(1-b)} \quad (2.28)$$

D'après (2.27), (2.28) et (2.19), on a :

$$V(\xi) \leq \frac{c_3}{bc_2} \text{ pour } t \geq T_{S_1} \implies \|\xi(t)\| \leq \alpha_1^{-1} \left(\frac{c_3}{bc_2} \right), \text{ pour } t \geq T_{S_1} \quad (2.29)$$

Cas 2 : Si $\xi \in \Omega_{\xi_2}$, (2.23) devient :

$$\dot{V}(\xi) \leq -c_1(1-b)V^\beta(\xi) - c_2V(\xi) \quad (2.30)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (2.30) par e^{c_2t} , il vient :

$$\dot{V}(\xi)e^{c_2t} + c_2e^{c_2t}V(\xi(t)) \leq -c_1(1-b)(V(\xi)e^{c_2t})^\beta e^{c_2(1-\beta)t} \quad (2.31)$$

Après le traitement et l'intégration de (2.31), il en résulte :

$$\int_0^T (V(\xi)e^{c_2t})^{-\beta} d(V(\xi)e^{c_2t}) \leq -c_1(1-b) \int_0^T e^{c_2(1-\beta)t} dt \quad (2.32)$$

Cela implique que :

$$V^{1-\beta}(\xi) \leq e^{-c_2(1-\beta)t} \left(V^{1-\beta}(\xi(0)) + \frac{c_1(1-b)}{c_2} \right) - \frac{c_1(1-b)}{c_2} \quad (2.33)$$

Soit $T_{s_2} = \frac{1}{c_2(1-\beta)} \ln \left[\frac{c_1(1-b) + c_2 V^{1-\beta}(\xi(0))}{c_1(1-b) + c_2 \left(\frac{c_3}{bc_1}\right)^{(1-\beta)/\beta}} \right]$, donc pour $\forall t \geq T_{s_2}$, il vient :

$$e^{-c_2(1-\beta)t} \left(V^{1-\beta}(\xi(0)) + \frac{c_1(1-b)}{c_2} \right) \leq \left(\frac{c_3}{bc_1}\right)^{(1-\beta)/\beta} + \frac{c_1(1-b)}{c_2} \quad (2.34)$$

D'après (2.33), (2.34) et (2.19), on a :

$$V(\xi) \leq \left(\frac{c_3}{bc_1}\right)^{1/\beta} \text{ pour } t \geq T_{s_2} \Rightarrow \|\xi(t)\| \leq \alpha_1^{-1} \left(\left(\frac{c_3}{bc_1}\right)^{1/\beta} \right), \text{ pour } t \geq T_{s_2} \quad (2.35)$$

Résumons maintenant les résultats donnés par les Cas 1 et 2 : donc d'après (2.29) et (2.35), il est clair que si $\xi(0) \in \Omega_{\xi_1} \cup \Omega_{\xi_2}$, et pour $\forall t \geq T_s = \max(T_{s_1}, T_{s_2})$, on a :

$$\begin{aligned} V &\leq \min \left\{ \frac{c_3}{bc_2}, \left(\frac{c_3}{bc_1}\right)^{1/\beta} \right\}, \quad \text{pour } t \geq T_s \\ \Rightarrow \|\xi(t)\| &\leq \min \left\{ \alpha_1^{-1} \left(\frac{c_3}{bc_2}\right), \alpha_1^{-1} \left(\left(\frac{c_3}{bc_1}\right)^{1/\beta} \right) \right\}, \text{ pour } t \geq T_s \end{aligned} \quad (2.36)$$

Cas 3 : Si $\xi(t) \in \Omega_{\xi_3}$, d'après l'analyse ci-dessus, $\xi(t)$ ne sort pas de l'ensemble Ω_{ξ_3} .

Résumons en une seule phrase, $\xi(t)$ peut atteindre l'ensemble Ω_{ξ_3} en un temps fini T_s .

De plus, on a $\|\xi(t)\| \leq \bar{\xi}$, pour $\forall t \geq T_s$, où $\bar{\xi} = \min \left\{ \alpha_1^{-1} \left(\frac{c_3}{bc_2}\right), \alpha_1^{-1} \left(\left(\frac{c_3}{bc_1}\right)^{1/\beta} \right) \right\}$.

Ainsi, on termine la preuve du Lemme 2.6.

Lemme 2.7 [POL01] : Pour tout $Y \in R$ et $\epsilon > 0$, l'inégalité suivante est toujours vérifiée : $0 \leq |Y| - Y \tanh(Y/\epsilon) \leq \bar{\epsilon}$, où $\bar{\epsilon} = 0.2785\epsilon$.

2.3 Conception de la commande adaptative floue

2.3.1 Conception d'observateur de perturbation

Dans cette partie, les observateurs de perturbations seront construits afin d'estimer robustement les perturbations inconnues regroupées. Pour faciliter le processus de conception des commandes (réelle et virtuelles) et simplifier l'analyse de stabilité, on peut écrire le système (2.1) comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \bar{f}_i(\bar{x}_i) + \gamma_{l_i} l_i + g_i l_{i+1} + g_i x_{i+1} + d_i(x, t), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= \bar{f}_n(\bar{x}_n) + \gamma_{l_n} l_n + g_n h(v) + g_n \rho(v) + d_n(x, t)\end{aligned}\quad (2.37)$$

où $\bar{x}_i = [x^T, l_i, l_{i+1}]^T$, $\bar{x}_n = [x^T, l_n]^T$, $\bar{f}_i(\bar{x}_i) = f_i(x) - \gamma_{l_i} l_i - g_i l_{i+1}$, pour $1 \leq i \leq n-1$, et $\bar{f}_n(\bar{x}_n) = f_n(x) - \gamma_{l_n} l_n$. γ_{l_i} , $1 \leq i \leq n-1$, sont des constantes de conception positives. l_i , $1 \leq i \leq n$, sont des signaux auxiliaires qui seront générés par le système auxiliaire (2.47).

En utilisant l'approximation optimale floue (1.44) dans (2.37), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \theta_i^{*T} \psi_i(\bar{x}_i) + \gamma_{l_i} l_i + g_i l_{i+1} + g_i x_{i+1} + \varepsilon_i(\bar{x}_i) + d_i(x, t), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= \theta_n^{*T} \psi_n(\bar{x}_n) + \gamma_{l_n} l_n + g_n h(v) + g_n \rho(v) + \varepsilon_n(\bar{x}_n) + d_n(x, t)\end{aligned}\quad (2.38)$$

Pour traiter le problème de la boucle algébrique existant dans $\psi_i(\bar{x}_i)$, on peut écrire (2.38) comme :

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \theta_i^{*T} \psi_i(Z_i) + \gamma_{l_i} l_i + g_i l_{i+1} + g_i x_{i+1} + \theta_i^{*T} (\psi_i(\bar{x}_i) - \psi_i(Z_i)) + \varepsilon_i(\bar{x}_i) \\ &\quad + d_i(x, t), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= \theta_n^{*T} \psi_n(Z_n) + \gamma_{l_n} l_n + g_n h(v) + g_n \rho(v) + \theta_n^{*T} (\psi_n(\bar{x}_n) - \psi_n(Z_n)) \\ &\quad + \varepsilon_n(\bar{x}_n) + d_n(x, t)\end{aligned}\quad (2.39)$$

où $Z_i = [x_1, x_2, \dots, x_i, l_i, l_{i+1}]^T \in R^{i+2}$, pour $1 \leq i \leq n-1$, et $Z_n = [x^T, l_n]^T \in R^{i+2}$.

Notons que le terme $\theta_i^{*T} (\psi_i(\bar{x}_i) - \psi_i(Z_i)) + \varepsilon_i(\bar{x}_i)$ peut être considéré comme une erreur d'approximation floue augmentée.

Considérons les termes suivants comme des perturbations groupées inconnues qui seront ensuite estimées par des observateurs de perturbations appropriés :

$$\begin{aligned} D_i &= \theta_i^{*T} (\psi_i(\bar{x}_i) - \psi_i(Z_i)) + \varepsilon_i(\bar{x}_i) + d_i(x, t), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ D_n &= \theta_n^{*T} (\psi_n(\bar{x}_n) - \psi_n(Z_n)) + \varepsilon_n(\bar{x}_n) + d_n(x, t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Par conséquent, (2.38) devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \theta_i^{*T} \psi_i(Z_i) + \gamma_{l_i} l_i + g_i l_{i+1} + g_i x_{i+1} + D_i, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= \theta_n^{*T} \psi_n(Z_n) + \gamma_{l_n} l_n + g_n h(v) + g_n \rho(v) + D_n \end{aligned} \quad (2.41)$$

Pour le système (2.41), construisons l'observateur de perturbation non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{D}}_i &= -\rho_i \hat{D}_i + \rho_i (\dot{x}_i - \hat{\theta}_i^T \psi_i(Z_i) - \gamma_{l_i} l_i - g_i l_{i+1} - g_i x_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{\hat{D}}_n &= -\rho_n \hat{D}_n + \rho_n (\dot{x}_n - \hat{\theta}_n^T \psi_n(Z_n) - \gamma_{l_n} l_n - g_n h(v)) \end{aligned} \quad (2.42)$$

où $\hat{\theta}_i$ est une estimation de θ_i^* , et $\rho_i > 0$ est le gain de l'observateur.

La dynamique de l'erreur d'estimation de perturbations peut être obtenue à partir de (2.41) et (2.42), comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{D}}_i &= -\rho_i \tilde{D}_i - \rho_i \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_i) - \dot{D}_i, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{\tilde{D}}_n &= -\rho_n \tilde{D}_n - \rho_n \tilde{\theta}_n^T \psi_n(Z_n) - \dot{D}_n + \rho_n g_n \rho(v) \end{aligned} \quad (2.43)$$

où $\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_i - \theta_i^*$, $\tilde{D}_i = \hat{D}_i - D_i$ sont les erreurs respectives d'estimation des paramètres et des perturbations.

Pour étudier plus tard la propriété de convergence des erreurs d'estimation des perturbations, l'hypothèse usuelle suivante est requise.

Remarque 2.1 : Pour faciliter la mise en œuvre pratique de l'observateur de perturbation proposé, (2.42) peut être reformulée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{S}}_i = -\rho_i \hat{S}_i + \rho_i (-\rho_i x_i - \hat{\theta}_i^T \psi_i(Z_i) - \gamma_{l_i} l_i - g_i l_{i+1} - g_i x_{i+1}), & 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{\hat{S}}_n = -\rho_n \hat{S}_n + \rho_n (-\rho_n x_n - \hat{\theta}_n^T \psi_n(Z_n) - \gamma_{l_n} l_n - g_n h(v)) \\ \dot{\hat{D}}_i = \hat{S}_i + \rho_i x_i, & 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (2.44)$$

2.3.2 Conception de la commande adaptative floue en temps-fini

Dans ce qui suit, notre système de commande adaptative floue sera systématiquement conçu étape par étape dans un cadre backstepping. Tout d'abord, nous introduisons la transformation de coordonnées suivante :

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - \vartheta_{0_d} + B_1 \tanh\left(\frac{l_1}{\delta_1}\right) \\ z_i &= x_i - \vartheta_{(i-1)_d} + l_i, \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.45)$$

où $\vartheta_{0_d} = y_d$ et $\vartheta_{(i-1)_d}$ est la sortie d'un filtre non linéaire du premier ordre suivant, inspiré du concept de la commande à surface dynamique :

$$\tau_{i-1} \dot{\vartheta}_{(i-1)_d} + \vartheta_{(i-1)_d} = A_{i-1} \tanh\left(\frac{\vartheta_{(i-1)}}{v_{i-1}}\right), \quad i = 2, \dots, n \quad (2.46)$$

avec $\vartheta_{(i-1)_d}(0) = \vartheta_{(i-1)}(0)$, où ϑ_{i-1} sont des lois de commande virtuelles à concevoir. τ_{i-1} et $v_{i-1} > 0$ sont de petites constantes, A_{i-1} est une constante de conception positive.

Les signaux l_i sont générés via le système auxiliaire stable suivant :

$$\begin{aligned} \dot{l}_1 &= \frac{\delta_1 \cosh^2(l_1/\delta_1)}{B_1} [-\gamma_{l_1} l_1 - \kappa_1 \text{sign}(l_1) + g_1(\vartheta_1 - \vartheta_{1_d})] \\ \dot{l}_i &= -\gamma_{l_i} l_i - \kappa_i \text{sign}(l_i) + g_i(\vartheta_i - \vartheta_{i_d}), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{l}_n &= -\gamma_{l_n} l_n - \kappa_n \text{sign}(l_n) + g_n(v - h(v)) \end{aligned} \quad (2.47)$$

où γ_{l_i} et κ_i sont des constantes de conception positives.

Remarque 2.2 : Il convient de noter que la conception du filtre non linéaire comme (2.46) est très utile. En fait, le problème de singularité dû à la dérivée temporelle des lois de commande virtuelles dans la conception de commande en temps fini est résolu, car les commandes virtuelles filtrées $\vartheta_{(i-1)_d}$ sont déjà bornées a priori. Par conséquent, on n'a pas besoin d'introduire les termes de la surface dynamique dans l'analyse de la stabilité (i.e. dans la fonction candidate de Lyapunov).

Il est important de noter que la borne $k_{z_1}(t)$ doit être choisie de telle sorte que l'implication suivante soit toujours vraie :

$$|z_1| < k_{z_1}(t) \implies |x_1| < k_{x_1}(t) \quad (2.48)$$

Par conséquent, à partir de (2.45), $k_{z_1}(t)$ doit être conçu comme :

$$k_{z_1}(t) = k_{x_1}(t) - A_0 - B_1 \quad (2.49)$$

où $A_0 \geq |y_d(t)|$.

En utilisant (2.45) et (2.41), il en résulte :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \theta_1^{*T} \psi_1(Z_1) + \gamma_{l_1} l_1 + g_1 l_2 + \frac{B_1}{\delta_1 \cosh^2(l_1/\delta_1)} \dot{l}_1 + g_1(x_2 - \vartheta_{1d} + l_2) \\ &\quad + g_1(\vartheta_{1d} - \vartheta_1 - l_2) + g_1 \vartheta_1 - \dot{\vartheta}_{0d} + D_1 \\ \dot{z}_i &= \theta_i^{*T} \psi_i(Z_i) + \gamma_{l_i} l_i + g_i l_{i+1} + \dot{l}_i + g_i(x_{i+1} - \vartheta_{id} + l_{i+1}) \\ &\quad + g_i(\vartheta_{id} - \vartheta_i - l_{i+1}) + g_i \vartheta_i - \dot{\vartheta}_{(i-1)d} + D_i, \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ \dot{z}_n &= \theta_n^{*T} \psi_n(Z_n) + \gamma_{l_n} l_n + \dot{l}_n + g_n h(v) + g_n \rho(v) - \dot{\vartheta}_{(n-1)d} + D_n \end{aligned} \quad (2.50)$$

En substituant (2.47) dans (2.50), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \theta_1^{*T} \psi_1(Z_1) + g_1 z_2 + g_1 \vartheta_1 - \dot{\vartheta}_{0d} - \kappa_1 \text{sign}(l_1) + D_1 \\ \dot{z}_i &= \theta_i^{*T} \psi_i(Z_i) + g_i z_{i+1} + g_i \vartheta_i - \dot{\vartheta}_{(i-1)d} - \kappa_i \text{sign}(l_i) + D_i, \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ \dot{z}_n &= \theta_n^{*T} \psi_n(Z_n) + g_n v + g_n \rho(v) - \dot{\vartheta}_{(n-1)d} - \kappa_n \text{sign}(l_n) + D_n \end{aligned} \quad (2.51)$$

Concevons les lois des commandes virtuelles et réelle ϑ_i , et leurs lois d'adaptation correspondantes comme suit :

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{1}{g_1} \left[-\frac{\gamma_1 z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - k_1 z_1 - \hat{\theta}_1^T \psi_1(Z_1) - \hat{D}_1 - \kappa_1 \tanh\left(\frac{\kappa_1 z_1}{\epsilon_1(k_{z_1}^2 - z_1^2)}\right) + \dot{\vartheta}_{0d} + \frac{\dot{k}_{z_1}}{k_{z_1}} z_1 \right] \\ \vartheta_2 &= \frac{1}{g_2} \left[-\gamma_2 z_2 - k_2 z_2 - s_2 z_2^{2\beta-1} - \hat{\theta}_2^T \psi_2(Z_2) - \hat{D}_2 - \kappa_2 \tanh\left(\frac{\kappa_2 z_2}{\epsilon_2}\right) - \frac{g_1 z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} + \dot{\vartheta}_{1d} \right] \\ \vartheta_i &= \frac{1}{g_i} \left[-\gamma_i z_i - k_i z_i - s_i z_i^{2\beta-1} - \hat{\theta}_i^T \psi_i(Z_i) - \hat{D}_i - \kappa_i \tanh\left(\frac{\kappa_i z_i}{\epsilon_i}\right) - g_{i-1} z_{i-1} + \dot{\vartheta}_{(i-1)d} \right], \\ &\quad 3 \leq i \leq n-1 \\ \vartheta_n &= v = \frac{1}{g_n} \left[-k_n z_n - s_n z_n^{2\beta-1} - \hat{\theta}_n^T \psi_n(Z_n) - \hat{D}_n - \bar{\kappa}_n \tanh\left(\frac{\bar{\kappa}_n z_n}{\epsilon_n}\right) - g_{n-1} z_{n-1} + \dot{\vartheta}_{(n-1)d} \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= \Lambda_1 \left[\frac{z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \psi_1(Z_1) - \sigma_1 \hat{\theta}_1 \right] \\ \hat{\theta}_i &= \Lambda_i [z_i \psi_i(Z_i) - \sigma_i \hat{\theta}_i], \quad 2 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (2.53)$$

où $\gamma_i, s_i, \Lambda_i, k_i, \epsilon_i$ et $\sigma_i > 0$ sont des paramètres à concevoir, et $\frac{1}{2} < \beta < 1$. $\bar{\kappa}_n$ est un paramètre de conception sélectionné $\bar{\kappa}_n \geq g_n \bar{\rho} + \kappa_n$.

Remplacement (2.52) dans (2.51) conduit à

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= -\frac{\gamma_1 z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - k_1 z_1 + \frac{k_{z_1}}{k_{z_1}} z_1 - \tilde{\theta}_1^T \psi_1(Z_1) + g_1 z_2 - \kappa_1 \text{sign}(l_1) - \kappa_1 \tanh\left(\frac{\kappa_1 z_1}{\epsilon_1 (k_{z_1}^2 - z_1^2)}\right) - \tilde{D}_1 \\
 \dot{z}_2 &= -(\gamma_2 + k_2) z_2 - s_2 z_2^{2\beta-1} - \frac{g_1 z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - \tilde{\theta}_2^T \psi_2(Z_2) + g_2 z_3 - \kappa_2 \text{sign}(l_2) - \kappa_2 \tanh\left(\frac{\kappa_2 z_2}{\epsilon_2}\right) - \tilde{D}_2 \\
 \dot{z}_i &= -(\gamma_i + k_i) z_i - s_i z_i^{2\beta-1} - g_{i-1} z_{i-1} - \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_i) + g_i z_{i+1} - \kappa_i \text{sign}(l_i) - \kappa_i \tanh\left(\frac{\kappa_i z_i}{\epsilon_i}\right) - \tilde{D}_i, \\
 &\quad 3 \leq i \leq n-1 \\
 \dot{z}_n &= -(\gamma_n + k_n) z_n - s_n z_n^{2\beta-1} - g_{n-1} z_{n-1} - \tilde{\theta}_n^T \psi_n(Z_n) + g_n \rho(v) - \kappa_n \text{sign}(l_n) - \bar{\kappa}_n \tanh\left(\frac{\bar{\kappa}_n z_n}{\epsilon_n}\right) - \tilde{D}_n
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Maintenant, nous montrons la méthode de conception détaillée du backstepping en utilisant les étapes suivantes :

Etape 1 : Considérons la fonction barrière candidate de Lyapunov suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{k_{z_1}^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2}\right) + \frac{1}{2\Lambda_1} \|\tilde{\theta}_1\|^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{D}_1^2 \tag{2.55}$$

où k_{z_1} est une contrainte variant dans le temps sur la variable z_1 . Dans le compact $\Omega_{z_1} = \{z_1 : |z_1| < k_{z_1}\}$, V_1 est définie positive et continûment dérivable.

Ensuite, on obtient \dot{V}_1 comme :

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V_1}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{\Lambda_1} \tilde{\theta}_1^T \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \dot{\hat{D}}_1 = \frac{z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \left(\dot{z}_1 - \frac{k_{z_1}}{k_{z_1}} z_1 \right) + \frac{1}{\Lambda_1} \tilde{\theta}_1^T \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \dot{\hat{D}}_1 \tag{2.56}$$

L'utilisation du Lemme 2.7 et des équations (2.43), (2.53) et (2.54) dans (2.56) donne :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &\leq -\frac{k_1 z_1^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - \frac{\gamma_1 z_1^2}{(k_{z_1}^2 - z_1^2)^2} + \frac{g_1 z_1 z_2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - \frac{\tilde{D}_1 z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} + \bar{\epsilon}_1 - \sigma_1 \tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 - \frac{\rho_1}{\gamma_1} \tilde{D}_1^2 \\
 &\quad - \frac{\rho_1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \tilde{\theta}_1^T \psi_1(Z_1) - \frac{1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \dot{D}_1
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

avec $\bar{\epsilon}_1 = 0.2785\epsilon_1$.

En évoquant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\tilde{D}_1 z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} &\leq \frac{\gamma_1 z_1^2}{(k_{z_1}^2 - z_1^2)^2} + \frac{1}{4\gamma_1} \tilde{D}_1^2 \\
 -\sigma_1 \tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 &\leq -\frac{1}{2} \sigma_1 \|\tilde{\theta}_1\|^2 + \frac{1}{2} \sigma_1 \|\theta_1^*\|^2 \\
 -\frac{1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \dot{D}_1 &\leq \frac{1}{4\gamma_1} \tilde{D}_1^2 + \frac{1}{\gamma_1} \Delta_1^2 \\
 -\frac{\rho_1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \tilde{\theta}_1^T \psi_1(Z_1) &\leq \frac{\rho_1}{4\gamma_1} \tilde{D}_1^2 + \frac{a_1 \rho_1}{\gamma_1} \|\tilde{\theta}_1\|^2
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

où $a_1 \geq \|\psi_1(Z_1)\|^2$.

Il est clair que l'utilisation de (2.58) dans (2.57) permet d'avoir :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{k_1 z_1^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - \frac{3}{4\gamma_1} \left(\rho_1 - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_1^2 - \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \frac{2a_1 \rho_1}{\gamma_1} \right) \|\tilde{\theta}_1\|^2 + \frac{g_1 z_1 z_2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_1 \|\theta_1^*\|^2 + \bar{\epsilon}_1 + \frac{1}{\gamma_1} \Delta_1^2 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Dans le membre droit de (2.59), les trois premiers termes sont stables, à condition que $k_1 > 0$, $\rho_1 > \frac{2}{3}$ et $\sigma_1 > \frac{2a_1 \rho_1}{\gamma_1}$, mais le terme de couplage $g_1 z_1 z_2 / (k_{z_1}^2 - z_1^2)$ sera annulé à l'étape suivante. Quant aux autres termes restants, i.e. $\frac{1}{2} \sigma_1 \|\theta_1^*\|^2 + \bar{\epsilon}_1 + \frac{1}{\gamma_1} \Delta_1^2$, ils seront par la suite intégrés dans l'analyse de la stabilité.

Etape 2 : Définissons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2\Lambda_2} \|\tilde{\theta}_2\|^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{D}_2^2 \quad (2.60)$$

En différenciant V_2 par rapport au temps et en utilisant ensuite les équations (2.43), (2.53) et (2.54), et le Lemme 2.7, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 + \frac{1}{\Lambda_2} \tilde{\theta}_2^T \dot{\tilde{\theta}}_2 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{D}_2 \dot{\tilde{D}}_2 \\ \leq & \dot{V}_1 - k_2 z_2^2 - \gamma_2 z_2^2 - s_2 z_2^{2\beta} + g_2 z_2 z_3 - \tilde{D}_2 z_2 + \bar{\epsilon}_2 - \sigma_2 \tilde{\theta}_2^T \hat{\theta}_2 \\ & - \frac{\rho_2}{\gamma_2} \tilde{D}_2^2 - \frac{\rho_2}{\gamma_2} \tilde{D}_2 \tilde{\theta}_2^T \psi_2(Z_2) - \frac{1}{\gamma_2} \tilde{D}_2 \dot{\tilde{D}}_2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

avec $\bar{\epsilon}_2 = 0.2785\epsilon_2$.

L'inégalité de Young nous permet d'avoir les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} -\tilde{D}_2 z_2 & \leq \gamma_2 z_2^2 + \frac{1}{4\gamma_2} \tilde{D}_2^2 \\ -\sigma_2 \tilde{\theta}_2^T \hat{\theta}_2 & \leq -\frac{1}{2} \sigma_2 \|\tilde{\theta}_2\|^2 + \frac{1}{2} \sigma_2 \|\theta_2^*\|^2 \\ -\frac{1}{\gamma_2} \tilde{D}_2 \dot{\tilde{D}}_2 & \leq \frac{1}{4\gamma_2} \tilde{D}_2^2 + \frac{1}{\gamma_2} \Delta_2^2 \\ -\frac{\rho_2}{\gamma_2} \tilde{D}_2 \tilde{\theta}_2^T \psi_2(Z_2) & \leq \frac{\rho_2}{4\gamma_2} \tilde{D}_2^2 + \frac{a_2 \rho_2}{\gamma_2} \|\tilde{\theta}_2\|^2 \end{aligned} \quad (2.62)$$

où $a_2 \geq \|\psi_2(Z_2)\|^2$.

Effectivement, par substitution de (2.62) et (2.57) dans (2.61), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{k_1 z_1^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - k_2 z_2^2 - s_2 z_2^{2\beta} + g_2 z_2 z_3 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} \right) \|\tilde{\theta}_j\|^2 \\ & - \sum_{j=1}^2 \frac{3}{4\gamma_j} \left(\rho_j - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_j^2 + \sum_{j=1}^2 \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \bar{\epsilon}_j + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Etape i ($3 \leq i \leq n - 1$) : Pour concevoir la commande virtuelle pour le $i^{\text{ème}}$ sous-système, considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}z_i^2 + \frac{1}{2\Lambda_i} \|\tilde{\theta}_i\|^2 + \frac{1}{2\gamma_i} \tilde{D}_i^2 \quad (2.64)$$

En dérivant V_i le long des solutions de (2.43), (2.53) et (2.54), et en utilisant le Lemme 2.7, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1} + z_i \dot{z}_i + \frac{1}{\Lambda_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i + \frac{1}{\gamma_i} \tilde{D}_i \dot{\tilde{D}}_i \\ &\leq \dot{V}_{i-1} - k_i z_i^2 - \gamma_i z_i^2 - s_i z_i^{2\beta} + g_i z_i z_{i+1} + \bar{\epsilon}_i - \tilde{D}_i z_i - \sigma_i \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i \\ &\quad - \frac{\rho_i}{\gamma_i} \tilde{D}_i^2 - \frac{\rho_i}{\gamma_i} \tilde{D}_i \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_i) - \frac{1}{\gamma_i} \tilde{D}_i \dot{\tilde{D}}_i \end{aligned} \quad (2.65)$$

L'emploi de nouveau de l'inégalité de Young donne :

$$\begin{aligned} -\tilde{D}_i z_i &\leq \gamma_i z_i^2 + \frac{1}{4\gamma_i} \tilde{D}_i^2 \\ -\sigma_i \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i &\leq -\frac{1}{2} \sigma_i \|\tilde{\theta}_i\|^2 + \frac{1}{2} \sigma_i \|\theta_i^*\|^2 \\ -\frac{1}{\gamma_i} \tilde{D}_i \dot{\tilde{D}}_i &\leq \frac{1}{4\gamma_i} \tilde{D}_i^2 + \frac{1}{\gamma_i} \Delta_i^2 \\ -\frac{\rho_i}{\gamma_i} \tilde{D}_i \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_i) &\leq \frac{\rho_i}{4\gamma_i} \tilde{D}_i^2 + \frac{a_i \rho_i}{\gamma_i} \|\tilde{\theta}_i\|^2 \end{aligned} \quad (2.66)$$

où $a_i \geq \|\psi_i(Z_i)\|^2$.

La substitution (2.66) dans (2.65) conduit à

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -\frac{k_1 z_1^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - \sum_{j=2}^i k_j z_j^2 - \sum_{j=2}^i s_j z_j^{2\beta} + g_i z_i z_{i+1} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} \right) \|\tilde{\theta}_j\|^2 \\ &\quad - \sum_{j=1}^i \frac{3}{4\gamma_j} \left(\rho_j - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_j^2 + \sum_{j=1}^i \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \bar{\epsilon}_j + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Etape n : Finalement, pour concevoir la loi de commande réelle v (i.e. ϑ_n), considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2 + \frac{1}{2\Lambda_n} \|\tilde{\theta}_n\|^2 + \frac{1}{2\gamma_n} \tilde{D}_n^2 \quad (2.68)$$

En différenciant V_n le long des solutions de (2.43), (2.53) et (2.54), et en utilisant le Lemme 2.7, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} + z_n \dot{z}_n + \frac{1}{\Lambda_n} \tilde{\theta}_n^T \dot{\hat{\theta}}_n + \frac{1}{\gamma_n} \tilde{D}_n \dot{D}_n \\
 &\leq \dot{V}_{n-1} - k_n z_n^2 - (\gamma_n + 1) z_n^2 - s_n z_n^{2\beta} - \tilde{D}_n z_n + \bar{\epsilon}_n - \sigma_n \tilde{\theta}_n^T \hat{\theta}_n - \frac{\rho_n}{\gamma_n} \tilde{D}_n^2 \\
 &\quad - \frac{\rho_n}{\gamma_n} \tilde{D}_n \tilde{\theta}_n^T \psi_n(Z_n) - \frac{1}{\gamma_n} \tilde{D}_n \dot{D}_n
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

En utilisant l'inégalité de Young, il vient :

$$\begin{aligned}
 -\tilde{D}_n z_n &\leq \gamma_n z_n^2 + \frac{1}{4\gamma_n} \tilde{D}_n^2 \\
 -\sigma_n \tilde{\theta}_n^T \hat{\theta}_n &\leq -\frac{1}{2} \sigma_n \|\tilde{\theta}_n\|^2 + \frac{1}{2} \sigma_n \|\theta_n^*\|^2 \\
 -\frac{1}{\gamma_n} \tilde{D}_n \dot{D}_n &\leq \frac{1}{4\gamma_n} \tilde{D}_n^2 + \frac{1}{\gamma_n} \Delta_n^2 \\
 -\frac{\rho_n}{\gamma_n} \tilde{D}_n \tilde{\theta}_n^T \psi_n(Z_n) &\leq \frac{\rho_n}{4\gamma_n} \tilde{D}_n^2 + \frac{a_n \rho_n}{\gamma_n} \|\tilde{\theta}_n\|^2 \\
 \frac{\rho_n}{\gamma_n} \tilde{D}_n g_n \rho(v) &\leq \frac{\rho_n}{4\gamma_n} \tilde{D}_n^2 + \frac{\rho_n}{\gamma_n} g_n^2 \bar{\rho}^2
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

où $a_n \geq \|\psi_n(Z_n)\|^2$.

En utilisant (2.70) et (2.67), l'expression (2.69) devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_n &\leq -\frac{k_1 z_1^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - \sum_{j=2}^n k_j z_j^2 - \sum_{j=2}^n s_j z_j^{2\beta} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} \right) \|\tilde{\theta}_j\|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{3}{4\gamma_j} \left(\rho_j - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_j^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2\gamma_n} (\rho_n - 1) \tilde{D}_n^2 + \frac{\rho_n}{\gamma_n} g_n^2 \bar{\rho}^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \bar{\epsilon}_j + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right)
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

2.3.3 Analyse de la stabilité

Le résultat suivant conclut sur la convergence des solutions et la stabilité du système en bouclé fermée.

Théorème 2.1 : *Considérons le système de commande en boucle fermée, constitué du système contraint (2.1); des lois d'adaptation (2.53); de l'observateur de perturbation (2.43); des lois de commandes virtuelles et réelle (2.52). Supposons que les Hypothèses 2.1-2.5 et la condition d'erreur initiale $|z_1(0)| < k_{z_1}(0)$ est vérifiée. Alors,*

- 1) toutes les variables du système en boucle fermée sont stables en temps fini ;
- 2) l'erreur de poursuite de sortie converge pratiquement et rapidement en temps fini vers un voisinage de l'origine ;
- 3) les contraintes de sortie variant dans le temps ne sont pas violées.

Preuve du Théorème 2.1 : Considérons une fonction de Lyapunov candidate V_n incorporant une fonction barrière de Lyapunov.

$$V_n = \frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{z_1}^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \right) + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} z_i^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\Lambda_j} \|\tilde{\theta}_j\|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\gamma_i} \tilde{D}_i^2 \quad (2.72)$$

où sa dérivée temporelle peut être exprimée par (2.71).

D'après le Lemme 2.1, l'équation (2.71) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -k_1 \log \left(\frac{k_{z_1}^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \right) - \sum_{i=2}^n k_i z_i^2 - \sum_{i=2}^n s_i z_i^{2\beta} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} \right) \|\tilde{\theta}_j\|^2 \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{3}{4\gamma_i} \left(\rho_i - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_i^2 - \frac{1}{2\gamma_n} (\rho_n - 1) \tilde{D}_n^2 + \frac{\rho_n}{\gamma_n} g_n^2 \bar{\rho}^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \bar{\epsilon}_j + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right) \\ & - \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{z_1}^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \right) \right)^\beta + \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{z_1}^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \right) \right)^\beta - \left(\sum_{j=1}^n \frac{3}{4\gamma_j} \tilde{D}_j^2 \right)^\beta + \left(\sum_{j=1}^n \frac{3}{4\gamma_j} \tilde{D}_j^2 \right)^\beta \\ & - \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\Lambda_j} \|\tilde{\theta}_j\|^2 \right)^\beta + \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\Lambda_j} \|\tilde{\theta}_j\|^2 \right)^\beta \end{aligned} \quad (2.73)$$

En utilisant le Lemme 2.2 et en sélectionnant $\varsigma = 1$, $r_1 = \beta$, $r_2 = 1 - \beta$ et $r_3 = \beta^{-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{z_1}^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \right) \right)^\beta + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\gamma_i} \tilde{D}_i^2 \right)^\beta + \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\Lambda_j} \|\tilde{\theta}_j\|^2 \right)^\beta \leq & \frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{z_1}^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\gamma_i} \tilde{D}_i^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\Lambda_j} \|\tilde{\theta}_j\|^2 + 3(1 - \beta) \beta^{\frac{\beta}{1-\beta}} \end{aligned} \quad (2.74)$$

En se basant sur le Lemme 2.3 et en substituant (2.74) dans (2.73), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & - \left(\frac{2k_1 - 1}{2} \right) \log \left(\frac{k_{z_1}^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \right) - \sum_{i=2}^n k_i z_i^2 - \sum_{i=2}^n s_i z_i^{2\beta} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} - \frac{1}{\Lambda_j} \right) \|\tilde{\theta}_j\|^2 \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{3}{4\gamma_i} \left(\rho_i - \frac{4}{3} \right) \tilde{D}_i^2 - \frac{1}{2\gamma_n} (\rho_n - 2) \tilde{D}_n^2 + \frac{\rho_n}{\gamma_n} g_n^2 \bar{\rho}^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \bar{\epsilon}_j + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right) \\ & - \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{z_1}^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \right) \right)^\beta - \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\gamma_j} \tilde{D}_j^2 \right)^\beta - \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\Lambda_j} \|\tilde{\theta}_j\|^2 \right)^\beta + 3(1 - \beta) \beta^{\frac{\beta}{1-\beta}} \\ \leq & -c_{n_1} V_l^\beta - c_{n_2} V_l + c_{n_3} \end{aligned} \quad (2.75)$$

avec

$$\begin{aligned} c_{n_1} &= \min \{ 1, 2^\beta s_2, \dots, 2^\beta s_n \} \\ c_{n_2} &= \min \left\{ 2k_1 - 1, 2k_2, \dots, 2k_n, \Lambda_j \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} - \frac{1}{\Lambda_j} \right), \frac{3}{2} \left(\rho_i - \frac{4}{3} \right), \rho_n - 2 \right\}, \\ & \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, j = 1, 2, \dots, n \\ c_{n_3} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \bar{\epsilon}_j + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right) + \frac{\rho_n}{\gamma_n} g_n^2 \bar{\rho}^2 + 3(1 - \beta) \beta^{\frac{\beta}{1-\beta}} \end{aligned}$$

où $k_1 > \frac{1}{2}$, $\rho_n > 2$, $\rho_i > \frac{4}{3}$ et $\sigma_j > \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} + \frac{1}{\Lambda_j}$, pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$ et $j = 1, 2, \dots, n$.

A partir du Lemme 2.6, on a :

$$V \leq \min \left\{ \frac{c_{n_3}}{bc_{n_2}}, \left(\frac{c_{n_3}}{bc_{n_1}} \right)^{1/\beta} \right\}, \text{ pour } t \geq T_s \quad (2.76)$$

Ainsi, les termes $\log \left(\frac{k_{z_1}^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \right)$, z_i , $\tilde{\theta}_i$ et \tilde{D}_i sont tous bornés en temps fini et l'erreur de poursuite de sortie converge en temps fini vers un petit voisinage de zéro :

$$|z_1| \leq \min \left\{ k_{z_1} \sqrt{1 - e^{-\frac{2c_{n_3}}{bc_{n_2}}}}, k_{z_1} \sqrt{1 - e^{-2 \left(\frac{c_{n_3}}{bc_{n_1}} \right)^{1/\beta}}} \right\} \text{ pour } t \geq T_s \quad (2.77)$$

Puisque $z_1 = x_1 - \vartheta_{0_d} + B_1 \tanh \left(\frac{l_1}{\delta_1} \right)$ et $|y_d(t)| \leq A_0$, et comme on a choisi $k_{z_1}(t) = k_{x_1}(t) - A_0 - B_1$, on peut préciser que $|x_1| = \left| z_1 + \vartheta_{0_d} - B_1 \tanh \left(\frac{l_1}{\delta_1} \right) \right| \leq |z_1| + |\vartheta_{0_d}| + B_1 < k_{x_1}(t)$. Par conséquent, les contraintes de sortie variant dans le temps ne sont pas violées.

Théorème 2.2 : *Considérons le système auxiliaire (2.47), les variables l_i peuvent rapidement converger vers l'origine en temps fini T_{l_s} .*

Preuve du Théorème 2.2 : Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante

$V_l = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} l_i^2$ et sa dérivée temporelle peut être donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_l &= \sum_{i=1}^n l_i \dot{l}_i \\ &= \frac{\delta_1 \cosh^2(l_1/\delta_1)}{B_1} [-\gamma_{l_1} l_1^2 - \kappa_1 |l_1| + g_1 l_1 (\vartheta_1 - \vartheta_{1_d})] - \gamma_{l_2} l_2^2 - \kappa_2 |l_2| + g_2 l_2 (\vartheta_2 - \vartheta_{2_d}) - \dots \\ &\quad - \gamma_{l_{(n-1)}} l_{n-1}^2 - \kappa_{n-1} |l_{n-1}| + g_{n-1} l_{n-1} (\vartheta_{n-1} - \vartheta_{(n-1)_d}) - \gamma_{l_n} l_n^2 - \kappa_n |l_n| + g_n l_n (v - h(v)) \\ &\leq \frac{\delta_1 \cosh^2(l_1/\delta_1)}{B_1} [-\gamma_{l_1} l_1^2 - (\kappa_1 - |g_1 (\vartheta_1 - \vartheta_{1_d})|) |l_1|] - \gamma_{l_2} l_2^2 - (\kappa_2 - |g_2 (\vartheta_2 - \vartheta_{2_d})|) |l_2| \\ &\quad - \dots - \gamma_{l_{(n-1)}} l_{n-1}^2 - (\kappa_{n-1} - |g_{n-1} (\vartheta_{n-1} - \vartheta_{(n-1)_d})|) |l_{n-1}| - \gamma_{l_n} l_n^2 - (\kappa_n \\ &\quad - |g_n (v - h(v))|) |l_n| \end{aligned} \quad (2.78)$$

D'après le Théorème 2.1, il est clair que $|g_i (\vartheta_i - \vartheta_{i_d})| \leq \varrho_i$, pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, et $|g_n (v - h(v))| \leq \varrho_n$ peuvent être réalisés en un temps fini. Par conséquent, ce qui suit est satisfait en choisissant $\kappa_i > \varrho_i$,

$$\begin{aligned} \dot{V}_l &\leq -\frac{\delta_1 \gamma_{l_1}}{B_1} l_1^2 - \sum_{i=2}^n \gamma_{l_i} l_i^2 - \sum_{i=1}^n (\kappa_i - \varrho_i) |l_i| \\ &\leq -\mu_{l_1} V_l - \mu_{l_2} V_l^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.79)$$

où $\mu_{l_1} = \min \left\{ \frac{2\delta_1 \gamma_{l_1}}{B_1}, 2\gamma_{l_2}, 2\gamma_{l_3}, \dots, 2\gamma_{l_n} \right\}$, $\mu_{l_2} = \min \{ \sqrt{2} (\kappa_i - \varrho_i) \}$.

Ensuite, en utilisant le Lemme 2.4, on obtient que les états l_i peuvent rapidement converger vers zéro en un temps fini :

$$T_s = \frac{1}{\mu_{l_1}} \ln \left[\frac{\mu_{l_1} V^{\frac{1}{2}}(0) + \mu_{l_2}}{\mu_{l_2}} \right] \quad (2.80)$$

Le schéma de la commande adaptative floue en temps fini est donné dans la Figure 2.2.

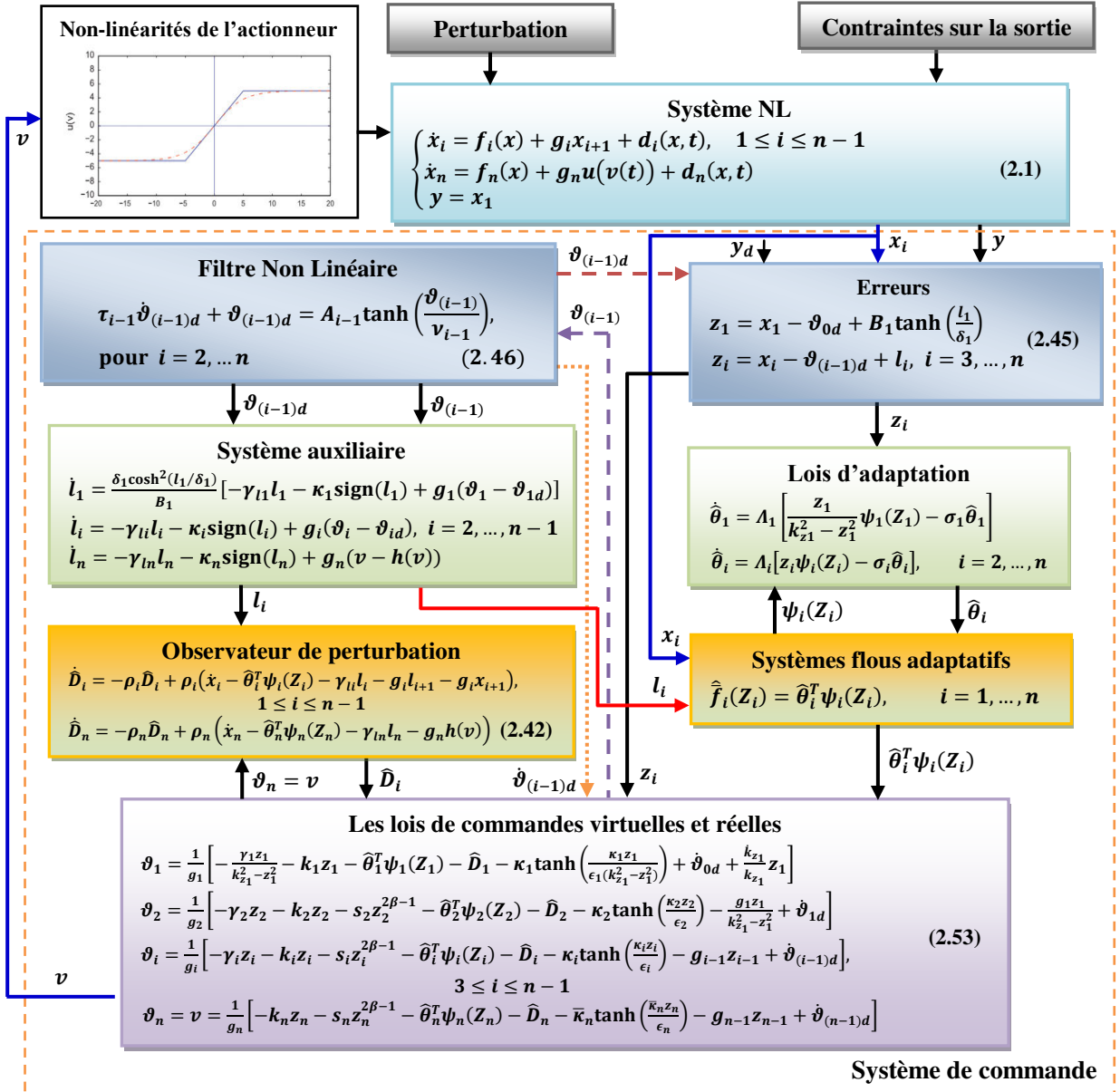


Figure 2.2 : Schéma fonctionnel de la commande adaptative floue en temps fini.

2.4 Résultats de simulation

Dans cette section, afin de vérifier la faisabilité et la robustesse de la méthodologie de commande étudiée, deux exemples sont présentés.

2.4.1 Exemple 1 : Système numérique

Considérons le système non linéaire nonstrict-feedback du second ordre [YAN21] décrit par les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) + g_1 x_2 + d_1(x, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + g_2 u(v(t)) + d_2(x, t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.81)$$

où $f_1(x) = -1.62x_1 - 0.4x_2^2 \sin(x_1)$, $g_1 = 1$, $d_1(x, t) = 0.1x_1x_2 \sin(0.5t)$, $f_2(x) = -1.7x_2x_1^2 + 0.4 \cos(x_2)$, $g_2 = 1$, et $d_2(x, t) = 0.1x_2 \cos(0.5t)$. La sortie x_1 est supposée contrainte par : $|x_1| < k_{x_1}(t) = 0.8e^{-0.2t} + 0.9$. Le paramètre de la saturation d'entrée est choisi comme $u_m = 10$.

Pour implémenter notre commande, nous avons besoin de deux systèmes flous adaptatifs, à savoir : $\hat{\theta}_1^T \psi_1(Z_1)$ et $\hat{\theta}_2^T \psi_2(Z_2)$, avec $Z_1 = [x_1, l_1, l_2]^T$ et $Z_2 = [x_1, x_2, l_2]^T$. Pour chaque variable d'entrée, nous choisissons trois fonctions d'appartenance (une triangulaire au centre et deux trapézoïdales sur les cotés) uniformément distribuées sur leurs plages respectives: $[-2, 2]$ pour les variables x_1 et x_2 , $[-1.5, 1.5]$ pour les variables l_1 et l_2 .

Les gains de l'observateur de perturbation sont $\rho_1 = \rho_2 = 2$. Les paramètres des filtres non linéaires sont fixés comme $\tau_1 = 0.01$, $\nu_1 = 0.1$ et $A_1 = 3$. Les paramètres de conception du système auxiliaire sont sélectionnés comme suit : $\gamma_{l1} = \gamma_{l2} = 2$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$, $\delta_1 = 0.1$ et $B_1 = 0.29$. Les paramètres de la loi de commande sont choisis comme: $\beta = 0.7$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 3$, $k_1 = 2.5$, $k_2 = 3$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 3$, $s_2 = 3$, $\bar{\kappa}_2 = 9$, $\epsilon_1 = 0.1$, et $\epsilon_2 = 0.2$. Les conditions initiales (CI) du système sont: $[x_1(0), x_2(0)]^T = [0.5, 0.5]^T$ et celles des paramètres flous adaptatifs $\theta_{1i}(0) = \theta_{2j}(0) = 0$. Le signal de référence est $y_d = 0.5 \sin(t)$.

Les résultats de simulation, obtenus en appliquant la commande adaptative floue proposée au système (2.81), sont présentés sur les Figures 2.3-2.7. La Figure 2.3 montre les trajectoires du signal de référence y_d et de la sortie y avec ses contraintes prescrites. La Figure 2.4 illustrent la trajectoire de x_2 . Les trajectoires des variables d'erreur (z_1 et z_2) sont données sur les Figures 2.5 et 2.6, respectivement. D'après ces résultats, il est clair que le schéma de commande proposé peut garantir que la sortie y et l'erreur z_1 ne violent pas leurs contraintes pré-spécifiées. Le signal de commande généré est donné sur la Figure 2.7.

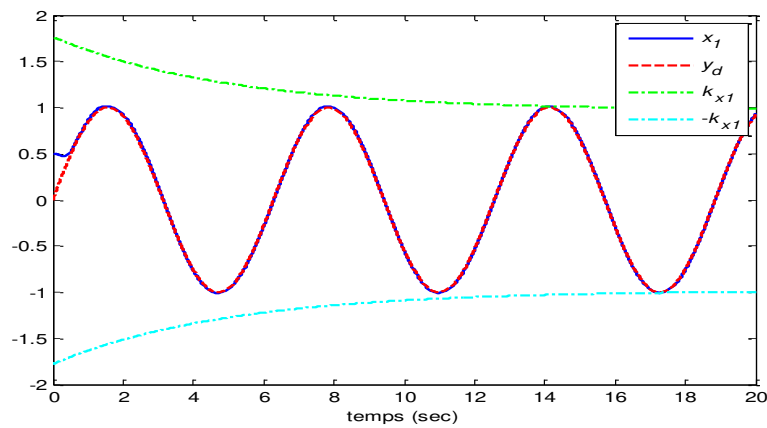


Figure 2.3 : Trajectoires de référence y_d (ligne continue), sortie y (ligne discontinue) et contraintes (ligne mixte).

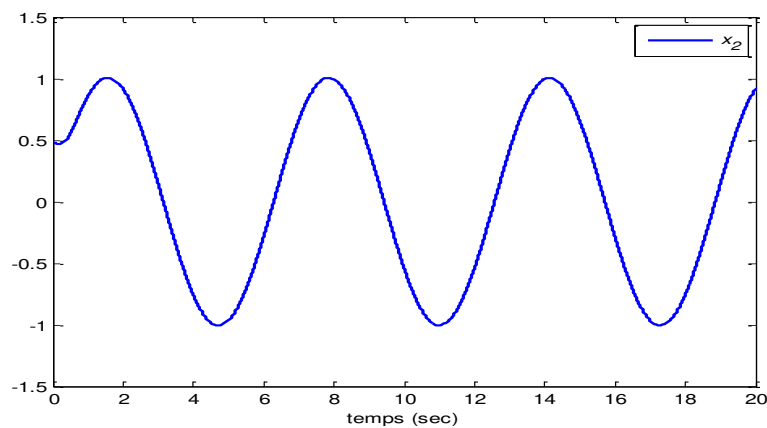


Figure 2.4 : Trajectoire d'état x_2 .

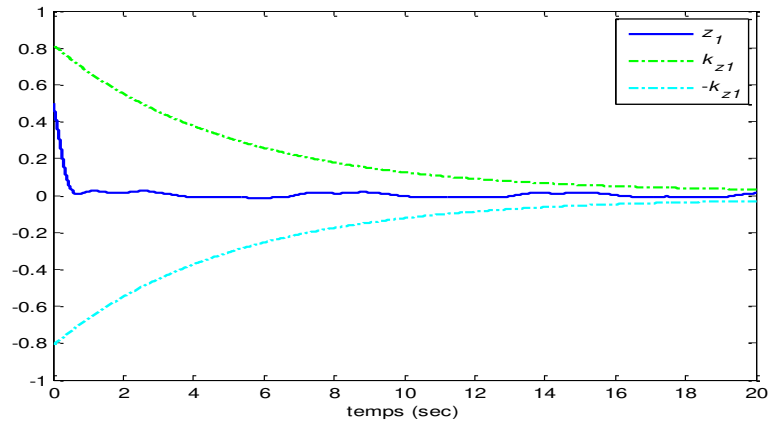


Figure 2.5 : Trajectoire d'erreur z_1 avec ses contraintes.

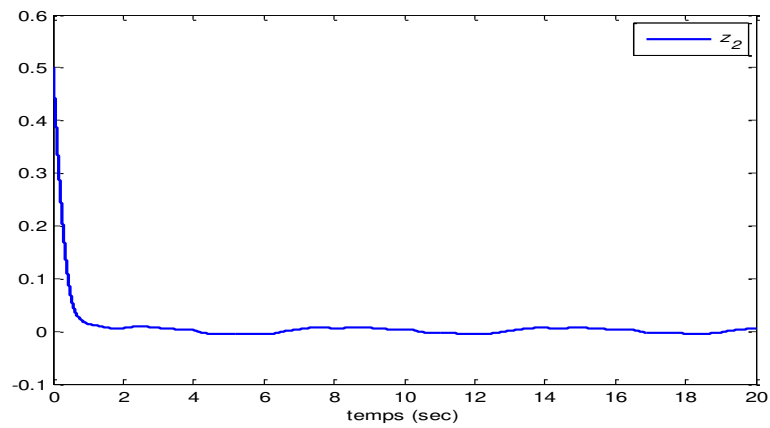


Figure 2.6 : Trajectoire d'erreur z_2 .

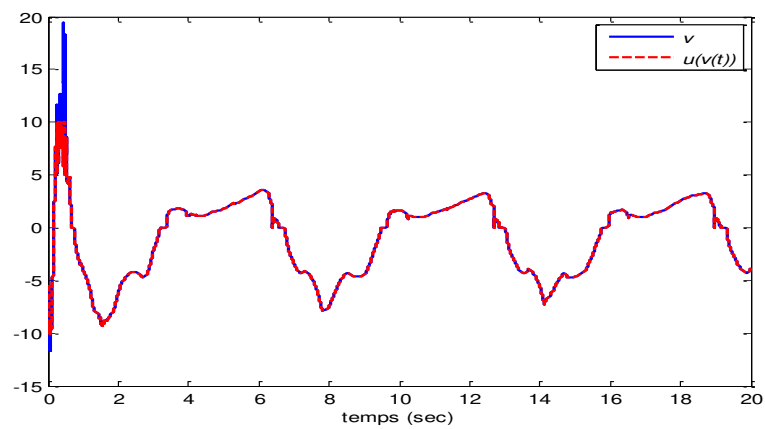


Figure 2.7 : Signal de commande v (ligne continue) et la sortie de l'actionneur u (ligne discontinue).

2.4.2 Exemple 2 : Système électromécanique

Dans cette partie, nous considérons un système électromécanique. Le schéma de principe de ce système est présenté sur la Figure 2.8 et son modèle dynamique peut être donné par [DAW94] :

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + B\dot{q} + N \sin(q) &= I \\ L\dot{I} + RI + K_B\dot{q} &= V \end{aligned} \quad (2.82)$$

où $M = \frac{J}{K_\tau} + \frac{(m+3M_0)L_0^2}{3K_\tau} + \frac{2M_0R_0^2}{5K_\tau}$, $N = \frac{mL_0g}{2K_\tau} + \frac{M_0L_0g}{K_\tau}$, $B = \frac{b}{K_\tau}$. Les paramètres et les variables du système sont donnés dans le Tableau 2.1.

Considérons dans modèle (2.82) la non-linéarité d'entrée et des perturbations éventuelles externes, on obtient la modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) + g_1x_2 + d_1(x, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + g_2x_3 + d_2(x, t) \\ \dot{x}_3 = f_3(x) + g_3u(v(t)) + d_3(x, t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.83)$$

où $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, $x_3 = I$, $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, et $u(v(t)) = V$. Donc, on a $f_1(x) = 0$, $g_1 = 1$, $d_1(x, t) = 0.2x_1^2 + 0.5\sin(t)$, $f_2(x) = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{N}{M}\sin(x_1)$, $g_2 = \frac{1}{M}$, $d_2(x, t) = 0.2x_2^2 + 0.2\sin(t)$, $f_3(x) = -\frac{R}{L}x_3 - \frac{K_B}{L}x_2$, $d_3(x, t) = 0.2x_3^2 + 0.1\sin(t)$, et $g_3 = \frac{1}{L}$. La sortie x_1 est supposée contrainte par : $|x_1| < k_{x_1}(t) = 0.8e^{-0.2t} + 0.9$. Le paramètre de la saturation d'entrée est choisi comme $u_m = 40$.

Pour implémenter notre commande, nous avons besoin de trois systèmes flous adaptatifs, à savoir : $\hat{\theta}_1^T\psi_1(Z_1)$, $\hat{\theta}_2^T\psi_2(Z_2)$ et $\hat{\theta}_3^T\psi_3(Z_3)$, avec $Z_1 = [x_1, l_1, l_2]^T$, $Z_2 = [x_1, x_2, l_2, l_3]^T$ et $Z_3 = [x_1, x_2, x_3, l_3]^T$. Pour chaque variable d'entrée, nous choisissons trois fonctions d'appartenance (une triangulaire au centre et deux trapézoïdales sur les cotés) uniformément distribuées sur leurs plages respectives : $[-2, 2]$ pour les variables x_1, x_2 et x_3 et $[-1.5, 1.5]$ pour les variables l_1, l_2 et l_3 .

Les gains de l'observateur de perturbation sont $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 3$. Les paramètres des filtres non linéaires sont fixés comme $\tau_1 = \tau_2 = 0.1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.1$, $A_1 = 5$ et $A_2 = 10$. Les paramètres de conception du système auxiliaire sont sélectionnés comme suit : $\gamma_{l1} = \gamma_{l2} = \gamma_{l3} = 5$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 3$, $\kappa_3 = 10$, $\delta_1 = 0.1$ et $B_1 = 0.29$.

Les paramètres de la loi de commande sont choisis comme : $\beta = 0.7$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.1$, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 5$, $k_1 = k_2 = 4$, $k_3 = 4.5$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 4$, $\gamma_3 = 6$, $s_2 = 5$, $s_3 = 5$, $\bar{\kappa}_3 = 13$, $\epsilon_1 = 0.1$, $\epsilon_2 = 0.2$ et $\epsilon_3 = 0.2$. Les conditions initiales (CI) du système sont: $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)]^T = [0.5, 0.5, 0]^T$ et celles des paramètres flous adaptatifs $\theta_{1i}(0) = \theta_{2j}(0) = \theta_{3k}(0) = 0$. Le signal de référence est $y_d = 0.5\sin(t)$.

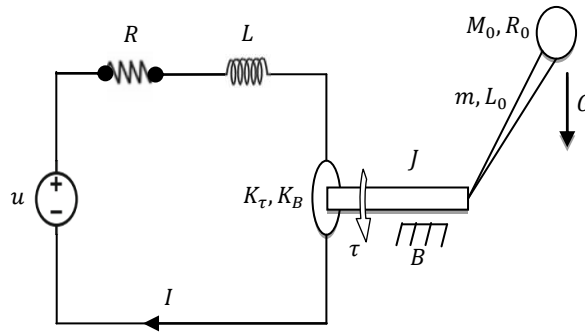


Figure 2.8 : Représentation schématique du système électromécanique.

Paramètre/ variable	Description	Valeur	Paramètre/ variable	Description	Valeur
J	Inertie du rotor	$1.625 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$	K_B	Coefficient de force contre électromotrice	0.9 N.m/A
m	Masse de liaison	0.056 kg	L	Inductance d'induit	$25 \times 10^{-3} \text{ H}$
M_0	masse de charge	0.434 kg	R	Résistance d'induit	5Ω
L_0	Longueur du bras	0.305 m	I	Courant d'induit du moteur	
R_0	Rayon de la charge	0.023 m	V	Tension d'entrée	
g	Coefficient de gravité	9.8 N/kg	q	Position angulaire	
B	Coefficient de frottement visqueux	$16.25 \times 10^{-3} \text{ N.m/rad}$	\dot{q}	Vitesse angulaire	
K_τ	Coefficient de conversion	0.9 N.m/A	\ddot{q}	Accélération angulaire	

Tableau 2.1 : Paramètres et variables du système électromécanique.

Les résultats de simulation sont présentés sur les Figure 2.9-2.15. La Figure 2.9 montre les trajectoires du signal de référence y_d et de la sortie y avec ses contraintes prescrites. Les Figures 2.10 et 2.11 illustrent les trajectoires de x_2 et x_3 , respectivement. Les trajectoires des variables d'erreur (z_1 , z_2 et z_3) sont données sur les Figures 2.12-2.14. D'après ces résultats, il est clair que le schéma de commande proposé peut garantir que la sortie y et l'erreur z_1 ne violent pas leurs contraintes pré-spécifiées. Le signal de commande généré est donné sur la Figure 2.15.

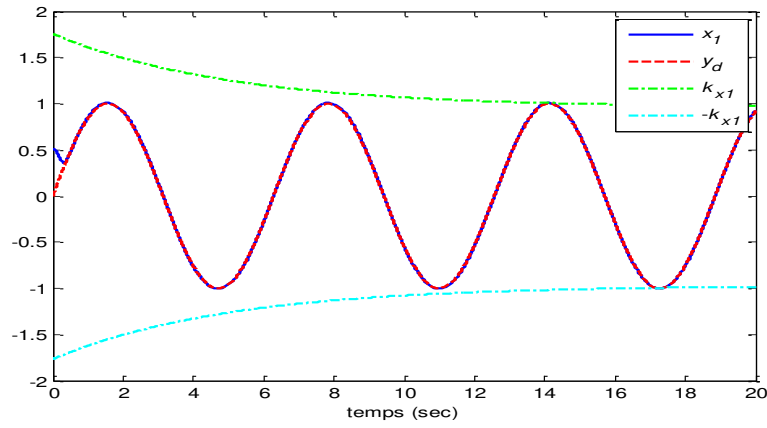


Figure 2.9 : Trajectoires de référence y_d (ligne continue), sortie y (ligne discontinue) et contraintes (ligne mixte).

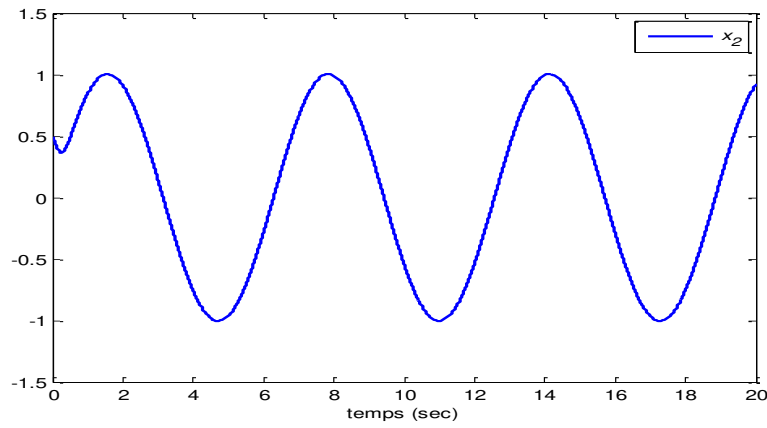


Figure 2.10 : Trajectoire d'état x_2 .

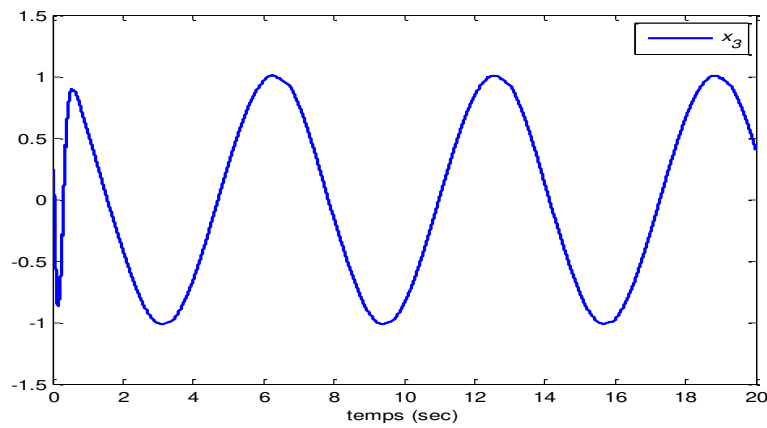


Figure 2.11 : Trajectoire d'état x_3 .

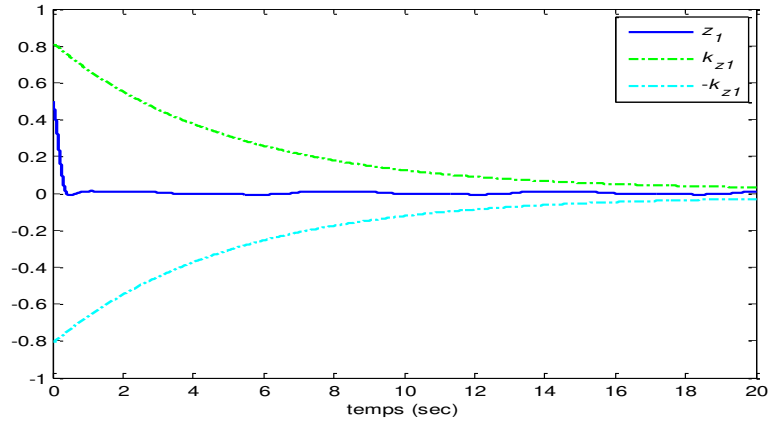


Figure 2.12 : Trajectoire d'erreur z_1 avec ses contraintes.

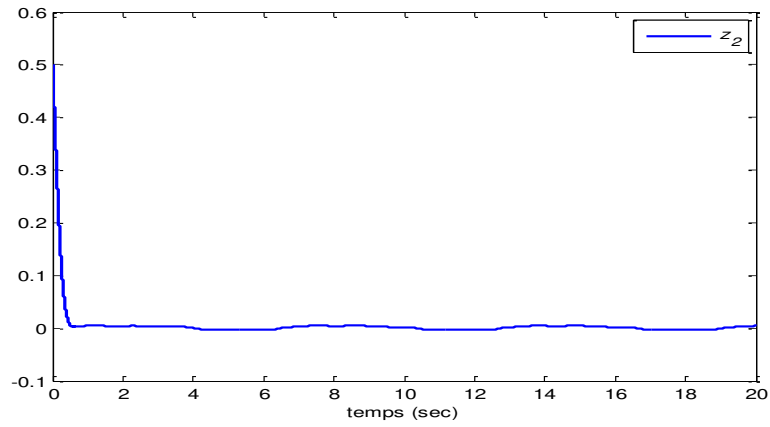


Figure 2.13 : Trajectoire d'erreur z_2 .

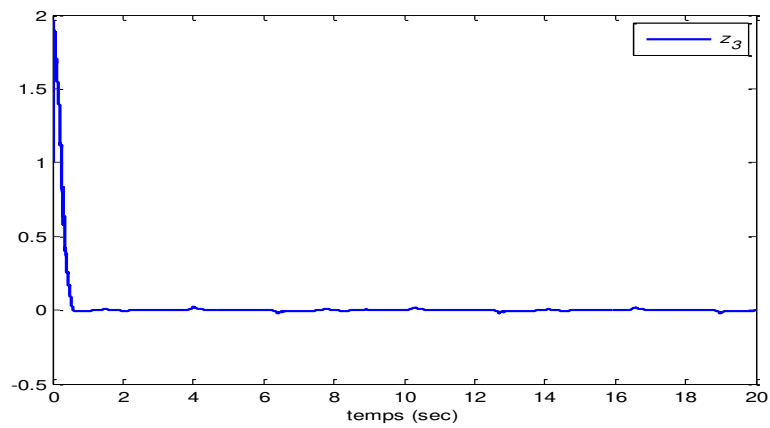


Figure 2.14 : Trajectoire d'erreur z_3 .

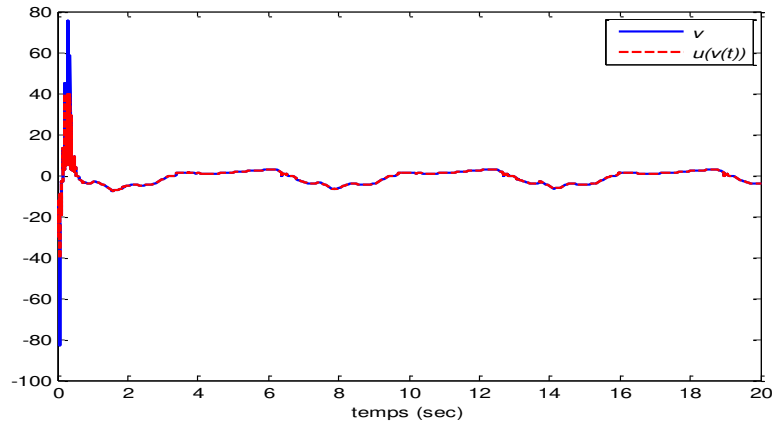


Figure 2.15 : Signal de commande v (ligne continue) et la sortie de l'actionneur u (ligne discontinue).

2.5 Conclusion

Un schéma de commande backstepping floue adaptative en temps fini a été proposé pour une classe de systèmes non linéaires incertains ayant une forme nonstrict-feedback et avec des contraintes de sortie (variant dans le temps) et d'actionnement, et des perturbations appariées. Les approximateurs flous adaptatifs ont été utilisés pour approximer en ligne des fonctions non linéaires inconnues. Pour augmenter la robustesse du contrôleur proposé, un observateur de perturbation non linéaire a été conçu. Pour surmonter le problème de l'explosion de complexité intrinsèquement lié à l'utilisation de la méthodologie du backstepping, la commande à surface dynamique a été utilisée. Il a été prouvé via la méthode directe de Lyapunov que tous les signaux du système en boucle fermée sont bornés, l'erreur de sortie converge rapidement en temps fini vers un petit voisinage autour de zéro et la sortie du système ne dépasse pas ses contraintes imposées. Enfin, deux exemples de simulation numérique illustratifs ont été donnés afin de démontrer l'efficacité de notre schéma de commande proposé.

CHAPITRE 3

COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE DES SYSTEMES NL INCERTAINS AVEC DES CONTRAINTES SUR LES ETATS ET L'ENTREE

Chapitre 3

Commande adaptative floue des systèmes NL incertains avec des contraintes sur les états et l'entrée

3.1 Introduction

Comme on a déjà vu dans le chapitre précédent, dans les systèmes pratiques, les contraintes sur l'état ou sur l'entrée peuvent apparaître sous diverses formes, par exemple : la spécification des performances, la sécurité, et les limitations physiques (telles que la saturation, la zone-morte, l'hystérésis) [TEE09, TEE12, HAD16, HAD19]. Si de telles contraintes ne sont pas prises en compte pendant la conception du contrôleur, des effets indésirables sur le système en boucle fermée et des performances dégradés de la commande peuvent avoir lieu.

Pour des systèmes non linéaires *avec contraintes sur l'état ou la sortie*, des BLF ont été utilisées pour traiter ce type de contraintes [TEE09, TEE12]. Les fonctions BLF, qui divergent rapidement à l'infini lorsque les variables (d'erreur ou d'état) se rapprochent de leurs contraintes, ont été employées avec succès sur une variété de systèmes physiques : e.g. circuits électriques [LIU19b], manipulateurs rigides-flexibles [CAO17], grues flexibles [HE14], et systèmes éoliennes [MEN16]. Plusieurs schémas de commande adaptative (floue ou neuronale) ont été conçus en utilisant des BLF pour les systèmes non linéaires avec des contraintes sur les états [TEE12, TAN16, LIU17b, SUN18a, MIS21]. Cependant, dans ces approches de commande, certaines étapes nécessitent la transformation des contraintes étant sur les états à des contraintes sur de nouvelles variables d'erreur. Dans ce cas, ces étapes exigent des conditions dites de *faisabilité* sur les commandes virtuelles

(dans le concept du backstepping), i.e. les commandes virtuelles doivent satisfaire une certaine région précontrainte [ZHA19]. Par conséquent, certains calculs hors ligne doivent être effectués afin de choisir adéquatement les paramètres de conception. Les auteurs de [ZHA17, ZHA19] ont essayé de contourner ce problème ouvert (tout en évitant l'emploi de la BLF) via l'utilisation d'un changement de coordonnées permettant de transformer un système avec contraintes d'état à un autre système équivalent sans contraintes. Mais, ce problème, qui concerne les conditions de faisabilité, reste encore ouvert et non résolu pour les approches de commande adaptative par backstepping basées sur les BLF.

D'autre part, les contraintes sans mémoires des entrées (comme la zone morte et la saturation) sont omniprésentes dans les systèmes de commande. Il est important de rappeler que ces contraintes d'entrée dans les systèmes pratiques peuvent limiter ou dégrader davantage les performances de commande du système, voire elles peuvent le déstabiliser [BOU10a, CHE11, HAM16, HAD16, HAD19]. C'est pourquoi la conception d'une commande robuste vis à vis de ces contraintes d'actionnement sans mémoires est d'une grande importance pratique. Cependant, malgré la quantité importante des travaux disponibles relatifs à ce créneau de recherche, il y a très peu d'approches dédiées aux systèmes incertains à pure-feedback avec à la fois des contraintes invariant dans le temps sur les états, et des non-linéarités de type saturation + zone morte.

Comparativement au chapitre précédent, ce présent chapitre va tenter de construire une commande backstepping floue adaptative pour des systèmes non linéaires incertains ayant une forme pure-feedback; et avec des contraintes sur les états, et des non-linéarités à l'entrée (saturation et zone morte) et des perturbations externes appariées. Des BLF sont utilisées pour éviter la violation des contraintes prescrites sur les états du système. Des systèmes flous adaptatifs sont employés aussi pour approximer des fonctions non linéaires inconnues. En comparant aux travaux voisins [TEE12, TAN16, LIU17b, SUN18a, MIS21], nos principales contributions se résument comme suit :

- 1) Un observateur non linéaire de perturbation est conçu pour estimer des termes incertains regroupant les perturbations; les erreurs d'approximation flous; les erreurs d'approximation des commandes virtuelles ; et la dérivée des commandes virtuelles. L'incorporation de cet observateur dans la BF non seulement peut renforcer la robustesse de la commande mais elle peut même surmonter le problème d'explosion de complexité.

- 2) Par rapport aux travaux voisins [TEE12, TAN16, LIU17b, SUN18a, MIS21], ce chapitre résoudra rigoureusement le problème de la faisabilité des lois de commande virtuelles, relatif à la commande par backstepping basée sur les BLF pour les systèmes avec des contraintes sur les états. Notons que ce problème a été mentionné dans de nombreux travaux comme un problème ouvert, e.g. [ZHA17, ZHA19, MIS21].
- 3) Par rapport aux travaux ci-dessus, ce chapitre considère une classe relativement large, à savoir une classe de systèmes non linéaires incertains ayant une forme pure-feedback ; et avec des contraintes invariant dans le temps sur les états, et des non-linéarités à l'entrée et des perturbations externes appariées.

3.2 Formulation du problème et préliminaires

3.2.1 Description du système

Considérons la classe suivante des systèmes monovariables non linéaires incertains ayant une forme pure-feedback et avec des contraintes d'état et d'entrée :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) + g_i x_{i+1} + d_i(\bar{x}_i, t), & 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, u) + g_n u(v(t)) + d_n(\bar{x}_n, t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x_i \in R$ pour $1 \leq i \leq n$, $y \in R$ et $v(t) \in R$ sont le $i^{\text{ème}}$ état, la sortie et l'entrée du système, respectivement. $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in R^i$, $1 \leq i \leq n$; $f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$, $1 \leq i \leq n-1$ et $f_n(\bar{x}_n, u)$ sont des fonctions lisses inconnues. $d_i(\bar{x}_i, t) \in R$ et $g_i \in R$ désignent la perturbation externe inconnue et le gain de commande connu, respectivement. $u(v(t)) \in R$ est la non-linéarité de l'actionneur (une zone morte + une saturation asymétrique).

Dans ce travail, tous les états du système sont supposés soumis à des contraintes variant dans le temps, i.e. $|x_i| < k_{x_i}(t)$, où $k_{x_i}(t)$ est une fonction non linéaire positive variant dans le temps.

3.2.2 Non-linéarité de zone morte et de saturation asymétrique

La modèle sous-considération de la non-linéarité d'entrée (zone morte et saturation asymétrique) est décrite par [LIU20] :

$$u(v) = \begin{cases} u_{max} & v > v_{r_1} \\ \ell_r(v) & v_{r_0} < v \leq v_{r_1} \\ 0 & v_{l_0} < v \leq v_{r_0} \\ \ell_l(v) & v_{l_1} < v \leq v_{l_0} \\ u_{min} & v > v_{l_1} \end{cases} \quad (3.2)$$

où $\ell_r(v)$ et $\ell_l(v)$ sont des fonctions non linéaires incertaines satisfaisant les conditions suivantes : $\ell_r(v_{r_0}) = \ell_l(v_{l_0}) = 0$, $\ell_r(v_{r_1}) = u_{max}$ et $\ell_l(v_{l_1}) = u_{min}$. Les paramètres de cette non-linéarité sont u_{max} , u_{min} , v_{r_0} , v_{r_1} , v_{l_1} , et v_{l_0} . Ils sont choisis tels que: $u_{max} > 0$, $u_{min} < 0$, $0 < v_{r_0} < v_{r_1}$ et $v_{l_1} < v_{l_0} < 0$.

Pour résoudre le problème de la non-dérivabilité de la fonction $u(v)$, on l'approche par la fonction non linéaire lisse suivante :

$$h(v) = -\frac{u_{min}}{2} \tanh \iota_1 \left(v - \frac{v_{l_0}}{\iota_1} + \tau_l \right) + \frac{u_{max}}{2} \tanh \iota_2 \left(v - \frac{v_{r_0}}{\iota_2} - \tau_r \right) - \frac{u_{min}}{2} \tanh(v_{l_0} - \iota_1 \tau_l) + \frac{u_{max}}{2} \tanh(v_{r_0} + \iota_2 \tau_r) \quad (3.3)$$

où ι_1 , ι_2 , τ_l et τ_r sont des paramètres positives, qui doivent être choisis de manière appropriée pour réduire l'erreur d'approximation.

La Figure 3.1 montre les deux fonctions $u(v)$ et $h(v)$.

Alors, $u(v)$ peut être exprimé comme suit :

$$u(v) = h(v) + \rho(v) \quad (3.4)$$

où $\rho(v)$ est l'erreur d'approximation.

Il clair de la Figure 3.1 que $\rho(v)$ est une fonction bornée.

En invoquant le théorème de la valeur moyenne, $h(v)$ peut être exprimée comme suit :

$$h(v) = h(v_0) + h_{v_\kappa}(v - v_0) \quad (3.5)$$

avec $h_{v_\kappa} = \left. \frac{\partial h(v)}{\partial v} \right|_{v=v_\kappa}$ et $v_\kappa = \kappa v + (1 - \kappa)v_0$, où $0 < \kappa < 1$.

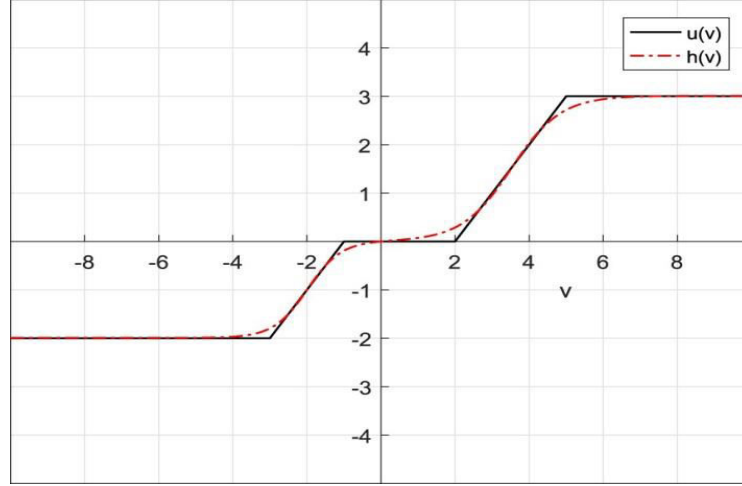


Figure 3.1 : Fonction $u(v)$ et son estimée $h(v)$.

En choisissant $v_0 = 0$, l'expression (3.5) devient :

$$h(v) = h(0) + h_{v_\kappa} v \quad (3.6)$$

Considérant $h(0) = 0$, on a :

$$h(v) = h_{v_\kappa} v \quad (3.7)$$

où h_{v_κ} est :

$$h_{v_\kappa} = \frac{-l_1 u_{min}}{2} \frac{1}{\cosh^2\left(l_1\left(v_\kappa - \frac{v_{l_0}}{l_1} + \tau_l\right)\right)} + \frac{l_2 u_{max}}{2} \frac{1}{\cosh^2\left(l_2\left(v_\kappa - \frac{v_{r_0}}{l_2} - \tau_r\right)\right)} \quad (3.8)$$

D'après (3.8) et comme v_{r_0} , v_{r_1} , v_{l_1} , v_{l_0} , u_{min} et u_{max} sont des constantes, $u_{max} > 0$, $u_{min} < 0$, $l_1 > 0$ et $l_2 > 0$, donc la fonction h_{v_κ} est positive et inférieurement bornée [LIU20].

3.2.3 Énoncé du problème

Notre objectif consiste à concevoir une commande backstepping adaptative floue en poursuite pour le système (3.1) telles que :

- 1) Toutes les variables du système en boucle fermée sont bornées ;
- 2) La sortie suit pratiquement son signal référence y_d , avec une erreur de poursuite faible ;
- 3) Toutes les variables d'état ne violent pas leurs contraintes imposées, i.e. la condition $|x_i| < k_{x_i}(t)$, pour $i = 1, 2, \dots, n$, est toujours satisfaite.

Les hypothèses suivantes sont considérées.

Hypothèse 3.1 : Supposons que :

$$|\rho(v)| \leq \bar{\rho} \quad (3.9)$$

avec $\bar{\rho}$ étant une constante positive inconnue.

Hypothèse 3.2 : Les gains d'entrée de commande doivent satisfaire :

$$\begin{aligned} g_i &\neq 0, \text{sign}(g_i) = \text{sign}\left(g_i + \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}}\right), 1 \leq i \leq n-1, \text{ et} \\ g_n &\neq 0, \text{sign}(g_n) = \text{sign}\left(g_n + \frac{\partial f_n(\bar{x}_n, u(v))}{\partial v}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Hypothèse 3.3 [LIU19a] : Le signal de référence y_d est une fonction suffisamment lisse telle que les fonctions y_d , \dot{y}_d et \ddot{y}_d sont bornées et continues.

Hypothèse 3.4 [LIU19a] : Les perturbations externes $d_i(\bar{x}_i, t)$ et leur dérivée $\dot{d}_i(\bar{x}_i, t)$ doivent satisfaire: $|d_i(\bar{x}_i, t)| \leq Y_{i,0}$ et $|\dot{d}_i(\bar{x}_i, t)| \leq Y_{i,1}$, où $Y_{i,0}$ et $Y_{i,1} \geq 0$ sont des constantes inconnues.

Hypothèse 3.5 [MIS21] : La dérivée temporelle du terme regroupé des perturbations D_i doit satisfaire $|\dot{D}_i| \leq \Delta_i$, $1 \leq i \leq n$, où Δ_i est une constante inconnue.

Lemme 3.1 [REN10] : Pour toute fonction k_{z_i} strictement positive et variant dans le temps, l'inégalité suivante est vérifiée, lorsque z_i reste dans le compact $\Omega_z := \{z \in R: |z_i| < k_{z_i}, i = 1, 2, \dots, n\}$:

$$\log\left(\frac{k_{z_i}^2}{k_{z_i}^2 - z_i^2}\right) < \frac{z_i^2}{k_{z_i}^2 - z_i^2} \quad (3.11)$$

3.3 Conception de la commande adaptative floue

Dans cette section, un système de commande adaptative floue par backstepping est conçu. Introduisons la transformation de coordonnées suivante :

$$z_i = x_i - \vartheta_{b_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

où $\vartheta_{b_0} = y_d$ et $\vartheta_{b_{i-1}}$ est la commande virtuel du $i^{\text{ème}}$ sous-système, pour $i = 2, \dots, n$.

Pour résoudre le problème (ouvert) concernant la non faisabilité des commande virtuelles, qui est généralement dû à l'emploi des fonctions barrières dans la conception, nous allons concevoir dans ce chapitre des commandes virtuelles étant bornées a priori avec des bornes connues.

Donc, concevons $\vartheta_{b_{i-1}}$, pour $i = 2, \dots, n$, comme suit :

$$\vartheta_{b_{i-1}} = \frac{2A_{i-1}}{\pi} \arctan\left(\frac{\vartheta_{i-1}}{\epsilon_{i-1}}\right) \quad (3.13)$$

où ϑ_{i-1} est une nouvelle entrée de commande virtuelle qui correspond à $\vartheta_{b_{i-1}}$, et A_{i-1} est une borne connue a priori sur $\vartheta_{b_{i-1}}$. ϵ_{i-1} est un paramètre de conception strictement positive.

Il est important de noter que la borne $k_{z_i}(t)$ doit être choisie de telle sorte que la condition suivante soit toujours vraie :

$$|z_i| < k_{z_i}(t) \Rightarrow |x_i| < k_{x_i}(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

Par conséquent, $k_{z_i}(t)$ devrait être conçu comme :

$$\begin{aligned} k_{z_1}(t) &= k_{x_1}(t) - A_0 \\ k_{z_i}(t) &= k_{x_i}(t) - A_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.15)$$

où $A_0 \geq |y_d|$.

En se basant sur (3.4), (3.8) et (3.12), le système (3.1) devient :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f_1(\bar{x}_1, x_2) + g_1\vartheta_1 + g_1z_2 + g_1\tilde{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_{b_0} + d_1(\bar{x}_1, t) \\ \dot{z}_i &= f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) + g_i\vartheta_i + g_iz_{i+1} + g_i\tilde{\vartheta}_i - \dot{\vartheta}_{b_{i-1}} + d_i(\bar{x}_i, t), \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ \dot{z}_n &= F_n(\bar{x}_n, v) + g_nv + g_n\rho(v) - \dot{\vartheta}_{b_{n-1}} + d_n(\bar{x}_n, t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

où $F_n(\bar{x}_n, v) = F_n(\bar{x}_n, u(v(t))) + g_n(h_{v_k} - 1)v$, $\tilde{\vartheta}_i = \vartheta_{b_i} - \vartheta_i$, pour $i = 1, 2, \dots, n-1$.

En utilisant l'approximation optimale floue (1.42) dans (3.16), on peut obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \theta_1^{*T} \psi_1(\bar{x}_1, x_2) + \varepsilon_1(\bar{x}_1, x_2) + g_1\vartheta_1 + g_1z_2 + g_1\tilde{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_{b_0} + d_1(\bar{x}_1, t), \\ \dot{z}_i &= \theta_i^{*T} \psi_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) + \varepsilon_i(\bar{x}_i, x_i) + g_i\vartheta_i + g_iz_{i+1} + g_i\tilde{\vartheta}_i - \dot{\vartheta}_{b_{i-1}} + d_i(\bar{x}_i, t), \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ \dot{z}_n &= \theta_n^{*T} \psi_n(\bar{x}_n, v) + \varepsilon_n(\bar{x}_n, v) + g_nv + g_n\rho(v) - \dot{\vartheta}_{b_{n-1}} + d_n(\bar{x}_n, t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pour éviter le problème de la boucle algébrique dans $\psi_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$, l'entrée x_{i+1} est remplacée par sa contrepartie filtrée $x_{f_{i+1}}$, avec $\dot{x}_{f_{i+1}} = -\varrho x_{f_{i+1}} + \varrho x_{i+1}$ où ϱ est une constante positive.

Ainsi, l'expression (3.17) devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= \theta_1^{*T} \psi_1(\bar{x}_1, x_{f_2}) + \theta_1^{*T} \left(\psi_1(\bar{x}_1, x_2) - \psi_1(\bar{x}_1, x_{f_2}) \right) + \varepsilon_1(\bar{x}_1, x_2) + g_1 \vartheta_1 + g_1 z_2 - \dot{\vartheta}_{b_0} \\
 &\quad + g_1 \tilde{\vartheta}_1 + d_1(\bar{x}_1, t) \\
 \dot{z}_i &= \theta_i^{*T} \psi_i(\bar{x}_i, x_{f_{i+1}}) + \theta_i^{*T} \left(\psi_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) - \psi_i(\bar{x}_i, x_{f_{i+1}}) \right) + \varepsilon_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) + g_i \vartheta_i - \dot{\vartheta}_{b_{i-1}} \\
 &\quad + g_i z_{i+1} + g_i \tilde{\vartheta}_i + d_i(\bar{x}_i, t), \quad 2 \leq i \leq n-1 \\
 \dot{z}_n &= \theta_n^{*T} \psi_n(\bar{x}_n, v_f) + \theta_n^{*T} \left(\theta_n^{*T} \psi_n(\bar{x}_n, v) - \psi_n(\bar{x}_n, v_f) \right) + \varepsilon_n(\bar{x}_n, v) - \dot{\vartheta}_{b_n} + g_n v \\
 &\quad + g_n \rho(v) + d_n(\bar{x}_n, t) \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Le terme $\theta_i^{*T} \left(\psi_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) - \psi_i(\bar{x}_i, x_{f_{i+1}}) \right) + \varepsilon_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$, pour $1 \leq i \leq n$ et avec $x_{f_{n+1}} = v_f$, peut être vu comme une erreur d'approximation floue augmentée.

Maintenant pour simplifier les notations, posons $Z_i = [\bar{x}_i^T, x_{i+1}]^T$, $Z_{f_i} = [\bar{x}_i^T, x_{f_{i+1}}]^T$, pour $1 \leq i \leq n$, avec $x_{n+1} = v$ et $x_{f_{n+1}} = v_f$.

Considérons les termes suivants comme des perturbations inconnues :

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \theta_1^{*T} \left(\psi_1(Z_1) - \psi_1(Z_{f_1}) \right) + \varepsilon_1(Z_{f_1}) - \dot{\vartheta}_{b_0} + g_1 \tilde{\vartheta}_1 + d_1(\bar{x}_1, t) \\
 D_i &= \theta_i^{*T} \left(\psi_i(Z_i) - \psi_i(Z_{f_i}) \right) + \varepsilon_i(Z_{f_i}) - \dot{\vartheta}_{b_{i-1}} + g_i \tilde{\vartheta}_i + d_i(\bar{x}_i, t), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
 D_n &= \theta_n^{*T} \left(\psi_n(Z_n) - \psi_n(Z_{f_n}) \right) + \varepsilon_n(Z_{f_n}) - \dot{\vartheta}_{b_{n-1}} + g_n \rho(v) + d_n(\bar{x}_n, t) \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Par conséquent, le système (3.18) devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= \theta_1^{*T} \psi_1(Z_{f_1}) + g_1 \vartheta_1 + g_1 z_2 + D_1, \\
 \dot{z}_i &= \theta_i^{*T} \psi_i(Z_{f_i}) + g_i \vartheta_i + g_i z_{i+1} + D_i, \quad 2 \leq i \leq n-1 \\
 \dot{z}_n &= \theta_n^{*T} \psi_n(Z_{f_n}) + g_n v + D_n \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Les termes de perturbation inconnus D_i sont estimés par l'observateur de perturbation suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{D}}_i &= -\rho_i \hat{D}_i + \rho_i (\dot{z}_i - \hat{\theta}_i^T \psi_i(Z_{f_i}) - g_i \vartheta_i - g_i z_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
 \dot{\hat{D}}_n &= -\rho_n \hat{D}_n + \rho_n (\dot{z}_n - \hat{\theta}_n^T \psi_n(Z_{f_n}) - g_n v) \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

où $\hat{\theta}_i$ est une estimation du θ_i^* , et $\rho_i > 0$ est le gain de l'observateur.

Il est important de noter que l'insertion de cette observateur dans la boucle de commande peut booster davantage la robustesse du contrôleur et rendre son calcul efficace (comme le calcul explicite de la dérivée de $\vartheta_{b_{i-1}}$ n'est pas nécessaire).

A partir de (3.20) et (3.21), on obtient la dynamique de l'erreur d'estimation d'observateur comme suit :

$$\dot{\tilde{D}}_i = -\rho_i \tilde{D}_i - \rho_i \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_{f_i}) - \dot{D}_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.22)$$

où $\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_i - \theta_i^*$, $\tilde{D}_i = D_i - \hat{D}_i$ sont les erreurs respectives d'estimation des paramètres et des perturbations.

Remarque 3.1 : Pour faciliter la mise en œuvre pratique de l'observateur proposé, (3.21) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{S}}_i = -\rho_i \hat{S}_i + \rho_i (-\rho_i z_i - \hat{\theta}_i^T \psi_i(Z_{f_i}) - g_i v_i - g_i z_{i+1}), & 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{\hat{S}}_n = -\rho_n \hat{S}_n + \rho_n (-\rho_n z_n - \hat{\theta}_n^T \psi_n(Z_{f_n}) - g_n v) \\ \dot{\hat{D}}_i = \hat{S}_i + \rho_i z_i, & 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (3.23)$$

Etape 1 : La fonction candidate de Lyapunov incorporant une fonction barrière est construite comme suit :

$$V_1 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{z_1}^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \right) + \frac{1}{2\Lambda_1} \|\tilde{\theta}_1\|^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{D}_1^2 \quad (3.24)$$

où $\Lambda_1 > 0$ et $\gamma_1 > 0$ sont des constantes de conception; $k_{z_1}(t)$ est une contrainte variant dans le temps sur la variable z_1 . Dans le compact $\Omega_{z_1} = \{z_1 : |z_1| < k_{z_1}\}$, V_1 est définie positive et continûment dérivable.

Alors, on obtient \dot{V}_1 comme :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{\Lambda_1} \tilde{\theta}_1^T \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \dot{\tilde{D}}_1 \\ &= \frac{z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \left(\dot{z}_1 - \frac{k_{z_1}}{k_{z_1}} z_1 \right) + \frac{1}{\Lambda_1} \tilde{\theta}_1^T \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \dot{\tilde{D}}_1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

L'utilisation de la première équation de (3.20) et de (3.22) dans (3.25) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \left(\theta_1^{*T} \psi_1(Z_{f_1}) + g_1 v_1 + g_1 z_2 + D_1 - \frac{k_{z_1}}{k_{z_1}} z_1 \right) + \frac{1}{\Lambda_1} \tilde{\theta}_1^T \dot{\hat{\theta}}_1 \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 (-\rho_1 \tilde{D}_1 - \rho_1 \tilde{\theta}_1^T \psi_1(Z_{f_1}) - \dot{D}_1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} \left(\hat{\theta}_1^T \psi_1(Z_{f_1}) + \hat{D}_1 - \frac{k_{z_1}}{k_{z_1}} z_1 + g_1 v_1 + g_1 z_2 - \tilde{D}_1 - \tilde{\theta}_1^T \psi_1(Z_{f_1}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\Lambda_1} \tilde{\theta}_1^T \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\rho_1}{\gamma_1} \tilde{D}_1^2 - \frac{\rho_1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \tilde{\theta}_1^T \psi_1(Z_{f_1}) - \frac{1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \dot{D}_1 \end{aligned} \quad (3.27)$$

A partir de (3.27), il est clair que l'on peut concevoir la loi de commande virtuelle ϑ_1 comme suit :

$$\vartheta_1 = \frac{1}{g_1} \left[-k_1 z_1 - \hat{\theta}_1^T \psi_1(Z_{f_1}) - \hat{D}_1 - \frac{\gamma_1 z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} + \frac{\dot{k}_{z_1}}{k_{z_1}} z_1 \right] \quad (3.28)$$

La loi d'adaptation de $\hat{\theta}_1$ est conçue comme suit :

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \Lambda_1 \left[\frac{z_1}{k_{\hat{\theta}_1}^2 - z_1^2} \psi_1(Z_{f_1}) - \sigma_1 \hat{\theta}_1 \right] \quad (3.29)$$

où $k_1 > 0$ et $\sigma_1 > 0$ sont des paramètres de conception.

L'insertion de (3.28) et (3.29) dans (3.27) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -\frac{k_1 z_1^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - \frac{\gamma_1 z_1^2}{(k_{z_1}^2 - z_1^2)^2} + \frac{g_1 z_1 z_2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - \frac{\tilde{D}_1 z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - \sigma_1 \tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 - \frac{\rho_1}{\gamma_1} \tilde{D}_1^2 \\ & - \frac{\rho_1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \tilde{\theta}_1^T \psi_1(Z_{f_1}) - \frac{1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \dot{D}_1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

En invoquant l'inégalité de Young, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{\tilde{D}_1 z_1}{k_{z_1}^2 - z_1^2} & \leq \frac{\gamma_1 z_1^2}{(k_{z_1}^2 - z_1^2)^2} + \frac{1}{4\gamma_1} \tilde{D}_1^2 \\ -\sigma_1 \tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 & \leq -\frac{1}{2} \sigma_1 \|\tilde{\theta}_1\|^2 + \frac{1}{2} \sigma_1 \|\theta_1^*\|^2 \\ -\frac{1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \dot{D}_1 & \leq \frac{1}{4\gamma_1} \tilde{D}_1^2 + \frac{1}{\gamma_1} \Delta_1^2 \\ -\frac{\rho_1}{\gamma_1} \tilde{D}_1 \tilde{\theta}_1^T \psi_1(Z_{f_1}) & \leq \frac{\rho_1}{4\gamma_1} \tilde{D}_1^2 + \frac{a_1 \rho_1}{\gamma_1} \|\tilde{\theta}_1\|^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

où $a_1 \geq \|\psi_1(Z_{f_1})\|^2$.

Evidemment, en substituant (3.31) dans (3.30), on trouve :

$$\dot{V}_1 \leq -\frac{k_1 z_1^2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} - \frac{3}{4\gamma_1} \left(\rho_1 - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_1^2 - \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \frac{2a_1 \rho_1}{\gamma_1} \right) \|\tilde{\theta}_1\|^2 + \frac{g_1 z_1 z_2}{k_{z_1}^2 - z_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_1 \|\theta_1^*\|^2 + \frac{1}{\gamma_1} \Delta_1^2 \quad (3.32)$$

Dans le membre droit de (3.32), les trois premiers termes sont stables, à condition que $k_1 > 0$, $\rho_1 > \frac{2}{3}$ et $\sigma_1 > \frac{2a_1 \rho_1}{\gamma_1}$, mais le terme de couplage $g_1 z_1 z_2 / (k_{z_1}^2 - z_1^2)$ sera annulé à l'étape suivante. Quant aux termes restants, i.e. $\frac{1}{2} \sigma_1 \|\theta_1^*\|^2 + \frac{1}{\gamma_1} \Delta_1^2$, ils seront intégrés dans l'analyse de stabilité.

Etape i ($2 \leq i \leq n - 1$) : Pour concevoir la commande virtuelle adaptative pour le $i^{\text{ème}}$ sous-système, considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante qui comporte une fonction barrière :

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{z_i}^2}{k_{z_i}^2 - z_i^2} \right) + \frac{1}{2\Lambda_i} \|\tilde{\theta}_i\|^2 + \frac{1}{2\gamma_i} \tilde{D}_i^2 \quad (3.33)$$

où $\Lambda_i > 0$ et $\gamma_i > 0$ sont des constantes de conception. $k_{z_i}(t)$ est une contrainte variant dans le temps sur la variable z_i . Dans le compact ouvert $\Omega_{z_i} = \{z_i : |z_i| < k_{z_i}\}$, V_i est définie positive et continûment dérivable.

De (3.33), il vient :

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + \frac{z_i}{k_{z_i}^2 - z_i^2} \left(\dot{z}_i - \frac{k_{z_i}}{k_{z_i}} z_i \right) + \frac{1}{\Lambda_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\hat{\theta}}_i + \frac{1}{\gamma_i} \tilde{D}_i \dot{\tilde{D}}_i \quad (3.34)$$

En considérant la $i^{\text{ème}}$ équation de (3.20) et de (3.22), (3.34) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + \frac{z_i}{k_{z_i}^2 - z_i^2} \left(\theta_i^{*T} \psi_i(Z_{f_i}) + g_i \vartheta_i + g_i z_{i+1} + D_i - \frac{k_{z_i}}{k_{z_i}} z_i \right) + \frac{1}{\Lambda_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\hat{\theta}}_i \\ + \frac{1}{\gamma_i} \tilde{D}_i (-\rho_i \tilde{D}_i - \rho_i \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_{f_i}) - \dot{D}_i) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Donc, (3.35) peut être transformé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq -\sum_{j=1}^{i-1} k_j \frac{z_j^2}{k_{z_j}^2 - z_j^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} \right) \|\tilde{\theta}_j\|^2 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{3}{4\gamma_j} \left(\rho_j - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_j^2 + \frac{g_{i-1} z_{i-1} z_i}{k_{z_{i-1}}^2 - z_{i-1}^2} \\ + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right) + \frac{z_i}{k_{z_i}^2 - z_i^2} \left(\hat{\theta}_i^T \psi_i(Z_{f_i}) + \hat{D}_i - \frac{k_{z_i}}{k_{z_i}} z_i + g_i \vartheta_i + g_i z_{i+1} \right. \\ \left. - \tilde{D}_i - \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_{f_i}) \right) + \frac{1}{\Lambda_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{\rho_i}{\gamma_i} \tilde{D}_i^2 - \frac{\rho_i}{\gamma_i} \tilde{D}_i \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_{f_i}) - \frac{1}{\gamma_i} \tilde{D}_i \dot{D}_i \end{aligned} \quad (3.36)$$

Choisissons la loi de commande virtuelle ϑ_i et sa loi d'adaptation comme :

$$\vartheta_i = \frac{1}{g_i} \left[-k_i z_i - \hat{\theta}_i^T \psi_i(Z_{f_i}) - \hat{D}_i - \frac{\gamma_i z_i}{k_{z_i}^2 - z_i^2} - \frac{g_{i-1} z_{i-1} (k_{z_i}^2 - z_i^2)}{k_{z_{i-1}}^2 - z_{i-1}^2} + \frac{k_{z_i}}{k_{z_i}} z_i \right] \quad (3.37)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \Lambda_i \left[\frac{z_i}{k_{z_i}^2 - z_i^2} \psi_i(Z_{f_i}) - \sigma_i \hat{\theta}_i \right] \quad (3.38)$$

où $k_i > 0$ et $\sigma_i > 0$ sont des paramètres de conception.

La substitution de (3.37) et (3.38) dans (3.36) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq -\sum_{j=1}^i k_j \frac{z_j^2}{k_{z_j}^2 - z_j^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} \right) \|\tilde{\theta}_j\|^2 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{3}{4\gamma_j} \left(\rho_j - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_j^2 \\ + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right) - \frac{\gamma_i z_i^2}{(k_{z_i}^2 - z_i^2)^2} + \frac{g_i z_i z_{i+1}}{k_{z_i}^2 - z_i^2} - \frac{\tilde{D}_i z_i}{k_{z_i}^2 - z_i^2} - \sigma_i \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i \\ - \frac{\rho_i}{\gamma_i} \tilde{D}_i^2 - \frac{\rho_i}{\gamma_i} \tilde{D}_i \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_{f_i}) - \frac{1}{\gamma_i} \tilde{D}_i \dot{D}_i \end{aligned} \quad (3.39)$$

En employant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\tilde{D}_i z_i}{k_{z_i}^2 - z_i^2} &\leq \frac{\gamma_i z_i^2}{(k_{z_i}^2 - z_i^2)^2} + \frac{1}{4\gamma_i} \tilde{D}_i^2 \\
 -\sigma_i \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i &\leq -\frac{1}{2} \sigma_i \|\tilde{\theta}_i\|^2 + \frac{1}{2} \sigma_i \|\theta_i^*\|^2 \\
 -\frac{1}{\gamma_i} \tilde{D}_i \dot{D}_i &\leq \frac{1}{4\gamma_i} \tilde{D}_i^2 + \frac{1}{\gamma_i} \Delta_i^2 \\
 -\frac{\rho_i}{\gamma_i} \tilde{D}_i \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_{f_i}) &\leq \frac{\rho_i}{4\gamma_i} \tilde{D}_i^2 + \frac{a_i \rho_i}{\gamma_i} \|\tilde{\theta}_i\|^2
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

où $a_i \geq \|\psi_i(Z_{f_i})\|^2$.

Évidemment, par substitution de (3.40) dans (3.39), on trouve :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_i &\leq -\sum_{j=1}^i k_j \frac{z_j^2}{k_{z_j}^2 - z_j^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} \right) \|\tilde{\theta}_j\|^2 - \sum_{j=1}^i \frac{3}{4\gamma_j} \left(\rho_j - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_j^2 \\
 &\quad + \frac{g_i z_i z_{i+1}}{k_{z_i}^2 - z_i^2} + \sum_{j=1}^i \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Étape n : Pour concevoir la loi de commande réelle v , considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{z_n}^2}{k_{z_n}^2 - z_n^2} \right) + \frac{1}{2\Lambda_n} \|\tilde{\theta}_n\|^2 + \frac{1}{2\gamma_n} \tilde{D}_n^2 \tag{3.42}$$

où $\Lambda_n > 0$ et $\gamma_n > 0$ sont des constantes de conception. $k_{z_n}(t)$ est une contrainte variant dans le temps pour la variable z_n . Dans le compact $\Omega_{z_n} = \{z_n : |z_n| < k_{z_n}\}$, V_n est définie positive et continûment dérivable.

Alors, on obtient \dot{V}_n comme :

$$\dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + \frac{z_n}{k_{z_n}^2 - z_n^2} \left(\dot{z}_n - \frac{k_{z_n}}{k_{z_n}} z_n \right) + \frac{1}{\Lambda_n} \tilde{\theta}_n^T \dot{\tilde{\theta}}_n + \frac{1}{\gamma_n} \tilde{D}_n \dot{\tilde{D}}_n \tag{3.43}$$

En utilisant la $n^{\text{ième}}$ équation de (3.20) et de (3.22), (3.43) devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} + \frac{z_n}{k_{z_n}^2 - z_n^2} \left(\theta_n^{*T} \psi_n(Z_{f_n}) + g_n v + D_n - \frac{k_{z_n}}{k_{z_n}} z_n \right) + \frac{1}{\Lambda_n} \tilde{\theta}_n^T \dot{\tilde{\theta}}_n \\
 &\quad + \frac{1}{\gamma_n} \tilde{D}_n \left(-\rho_n \tilde{D}_n - \rho_n \tilde{\theta}_n^T \psi_n(Z_{f_n}) - \dot{D}_n \right)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

De (3.41) et (3.44), il résulte :

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\sum_{j=1}^{n-1} k_j \frac{z_j^2}{k_{z_j}^2 - z_j^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} \right) \|\tilde{\theta}_j\|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{3}{4\gamma_j} \left(\rho_j - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_j^2 + \frac{g_{n-1} z_{n-1} z_n}{k_{z_{n-1}}^2 - z_{n-1}^2} \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right) + \frac{z_n}{k_{z_n}^2 - z_n^2} \left(\hat{\theta}_n^T \psi_n(Z_{f_n}) + \hat{D}_n - \frac{k_{z_n}}{k_{z_n}} z_n + g_n v - \tilde{D}_i \right) \\ & - \tilde{\theta}_n^T \psi_n(Z_{f_n}) + \frac{1}{\Lambda_n} \tilde{\theta}_n^T \hat{\theta}_n - \frac{\rho_n}{\gamma_n} \tilde{D}_n^2 - \frac{\rho_n}{\gamma_n} \tilde{D}_n \tilde{\theta}_n^T \psi_n(Z_{f_n}) - \frac{1}{\gamma_n} \tilde{D}_n \dot{D}_n \end{aligned} \quad (3.45)$$

La loi de commande réelle v et sa loi d'adaptation sont conçues comme suit :

$$v = \frac{1}{g_n} \left[-k_n z_n - \hat{\theta}_n^T \psi_n(Z_{f_n}) - \hat{D}_n - \frac{\gamma_n z_n}{k_{z_n}^2 - z_n^2} - \frac{g_{n-1} z_{n-1} (k_{z_n}^2 - z_n^2)}{k_{z_{n-1}}^2 - z_{n-1}^2} + \frac{k_{z_n}}{k_{z_n}} z_n \right] \quad (3.46)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \Lambda_n \left[\frac{z_n}{k_{z_n}^2 - z_n^2} \psi_n(Z_{f_n}) - \sigma_n \hat{\theta}_n \right] \quad (3.47)$$

où $k_n > 0$ et $\sigma_n > 0$ sont des paramètres de conception.

En remplaçant (3.46) et (3.47) dans (3.45), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\sum_{j=1}^n k_j \frac{z_j^2}{k_{z_j}^2 - z_j^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} \right) \|\tilde{\theta}_j\|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{3}{4\gamma_j} \left(\rho_j - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_j^2 \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right) - \frac{\gamma_n z_n^2}{(k_{z_n}^2 - z_n^2)^2} - \frac{\tilde{D}_n z_n}{k_{z_n}^2 - z_n^2} - \sigma_n \tilde{\theta}_n^T \hat{\theta}_n \\ & - \frac{\rho_n}{\gamma_n} \tilde{D}_n^2 - \frac{\rho_n}{\gamma_n} \tilde{D}_n \tilde{\theta}_n^T \psi_n(Z_{f_n}) - \frac{1}{\gamma_n} \tilde{D}_n \dot{D}_n \end{aligned} \quad (3.48)$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{\tilde{D}_n z_n}{k_{z_n}^2 - z_n^2} & \leq \frac{\gamma_n z_n^2}{(k_{z_n}^2 - z_n^2)^2} + \frac{1}{4\gamma_n} \tilde{D}_n^2 \\ -\sigma_n \tilde{\theta}_n^T \hat{\theta}_n & \leq -\frac{1}{2} \sigma_n \|\tilde{\theta}_n\|^2 + \frac{1}{2} \sigma_n \|\theta_n^*\|^2 \\ -\frac{1}{\gamma_n} \tilde{D}_n \dot{D}_n & \leq \frac{1}{4\gamma_n} \tilde{D}_n^2 + \frac{1}{\gamma_n} \Delta_n^2 \\ -\frac{\rho_n}{\gamma_n} \tilde{D}_n \tilde{\theta}_n^T \psi_n(Z_{f_n}) & \leq \frac{\rho_n}{4\gamma_n} \tilde{D}_n^2 + \frac{a_n \rho_n}{\gamma_n} \|\tilde{\theta}_n\|^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

où $a_n \geq \|\psi_n(Z_{f_n})\|^2$.

De (3.49) et (3.48), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -\sum_{j=1}^n k_j \frac{z_j^2}{k_{z_j}^2 - z_j^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} \right) \|\tilde{\theta}_j\|^2 - \sum_{j=1}^n \frac{3}{4\gamma_j} \left(\rho_j - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_j^2 \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

où $k_j > 0$, $\rho_i > \frac{2}{3}$ et $\sigma_j > \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j}$.

3.3.1 Analyse de la stabilité

Le résultat fondamental suivant conclut sur la stabilité du système en BF.

Théorème 3.1 : *Considérons le système de commande en BF, constitué du système non linéaire (3.1) ; des lois d'adaptation (3.29), (3.38) et (3.47) ; d'observateur de perturbation (3.22) ; des lois de commande virtuelle (3.28) et (3.37) ; et de la loi de commande réelle (3.46). Supposons que les Hypothèses 3.1-3.5 et la condition sur d'erreur initiale $|z_i(0)| < k_{z_n}(0)$ sont satisfaites. Alors,*

- 1) *tous les signaux en boucle fermée sont uniformément ultiment bornés (UUB) ;*
- 2) *les erreurs de poursuite et les erreurs d'estimation de perturbation convergent pratiquement vers un petit voisinage de l'origine ;*
- 3) *les contraintes sur le vecteur d'état ne sont pas violées.*

Preuve du Théorème 3.1 : Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \log \left(\frac{k_{z_j}^2}{k_{z_j}^2 - z_j^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Lambda_j} \|\tilde{\theta}_j\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_j} \tilde{D}_j^2 \quad (3.51)$$

où sa dérivée temporelle peut être bornée par (3.50).

En utilisant le Lemme 3.1, alors (3.50) peut être reformulée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & - \sum_{j=1}^n k_j \log \left(\frac{k_{z_j}^2}{k_{z_j}^2 - z_j^2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} \right) \|\tilde{\theta}_j\|^2 - \sum_{j=1}^n \frac{3}{4\gamma_j} \left(\rho_j - \frac{2}{3} \right) \tilde{D}_j^2 \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Alors, (3.52) devient encore :

$$\dot{V}_n \leq -c_1 V_n + c_2 \quad (3.53)$$

où

$$c_1 = \min \left\{ 2k_j, \Lambda_j \left(\sigma_j - \frac{2a_j \rho_j}{\gamma_j} \right), \frac{3}{2} \left(\rho_j - \frac{2}{3} \right) \right\},$$

$$c_2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \sigma_j \|\theta_j^*\|^2 + \frac{1}{\gamma_j} \Delta_j^2 \right).$$

En multipliant (3.53) par $e^{c_1 t}$, puis en intégrant de 0 à t , on obtient :

$$0 \leq V_n(t) \leq \left(V_n(0) - \frac{c_2}{c_1} \right) e^{-c_1 t} + \frac{c_2}{c_1} \quad (3.54)$$

A partir de (3.51) et (3.54), il vient :

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{k_{z_j}^2}{k_{z_j}^2 - z_j^2} \right) \leq V_n(0) e^{-c_1 t} + \frac{c_2}{c_1} \quad (3.55)$$

$$\frac{1}{2\Lambda_j} \|\tilde{\theta}_j\|^2 \leq V_n(0) e^{-c_1 t} + \frac{c_2}{c_1} \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{2\gamma_j} |\tilde{D}_j|^2 \leq V_n(0) e^{-c_1 t} + \frac{c_2}{c_1} \quad (3.57)$$

ceci implique que :

$$|z_j| \leq k_{z_j} \sqrt{1 - e^{-2(V_n(0) e^{-c_1 t} + \frac{c_2}{c_1})}} \quad (3.58)$$

$$\|\tilde{\theta}_j\| \leq \sqrt{2\Lambda_j \left(V_n(0) e^{-c_1 t} + \frac{c_2}{c_1} \right)} \quad (3.59)$$

$$|\tilde{D}_j| \leq \sqrt{2\gamma_j \left(V_n(0) e^{-c_1 t} + \frac{c_2}{c_1} \right)} \quad (3.60)$$

Il est clair de (3.58)-(3.60) que les signaux z_i , $\tilde{\theta}_i$ et \tilde{D}_i sont bornés. En suivant toutes les étapes de 1 à n du processus de conception de la commande et de l'analyse de stabilité, on peut démontrer sans aucune difficulté que tous les autres signaux en boucle fermée sont UUB.

A partir de (3.58) et (3.60), on peut voir que les erreurs de poursuite et les erreurs d'estimation de perturbations sont ajustables et peuvent être même rendues arbitrairement petites en choisissant de manière appropriée les paramètres clés de conception.

Maintenant, on va démontrer que les contraintes d'état ne sont pas violées. Comme $z_1 = x_1 - \vartheta_{b_0}$, il est clair que $|x_1| = |z_1 + \vartheta_{b_0}| \leq |z_1| + |\vartheta_{b_0}| < k_{z_1}(t) + A_0$. Puisque $k_{z_1}(t) = k_{x_1}(t) - A_0$, donc il en résulte $|x_1| < k_{z_1}(t) + A_0 = k_{x_1}(t)$. De (3.14), on a $|\vartheta_{b_1}| < A_1$. Comme $z_2 = x_2 - \vartheta_{b_1}$, on peut démontrer que $|x_2| = |z_2 + \vartheta_{b_1}| \leq |z_2| + |\vartheta_{b_1}| < k_{z_2}(t) + A_1$. Puisque la fonction $k_{z_2}(t)$ est conçue comme $k_{z_2}(t) = k_{x_2}(t) - A_1$, il vient alors $|x_2| < k_{z_2}(t) + A_1 = k_{x_2}(t)$. De même, on peut démontrer facilement que $|x_i| < k_{x_i}(t)$, pour $i = 3, \dots, n$. Par conséquent, les contraintes d'états prédéfinies sont non violées.

Ceci termine la preuve du théorème.

La Figure 3.2 présente le schéma proposé de la commande adaptative floue par backstepping et à base de d'observateur de perturbations.

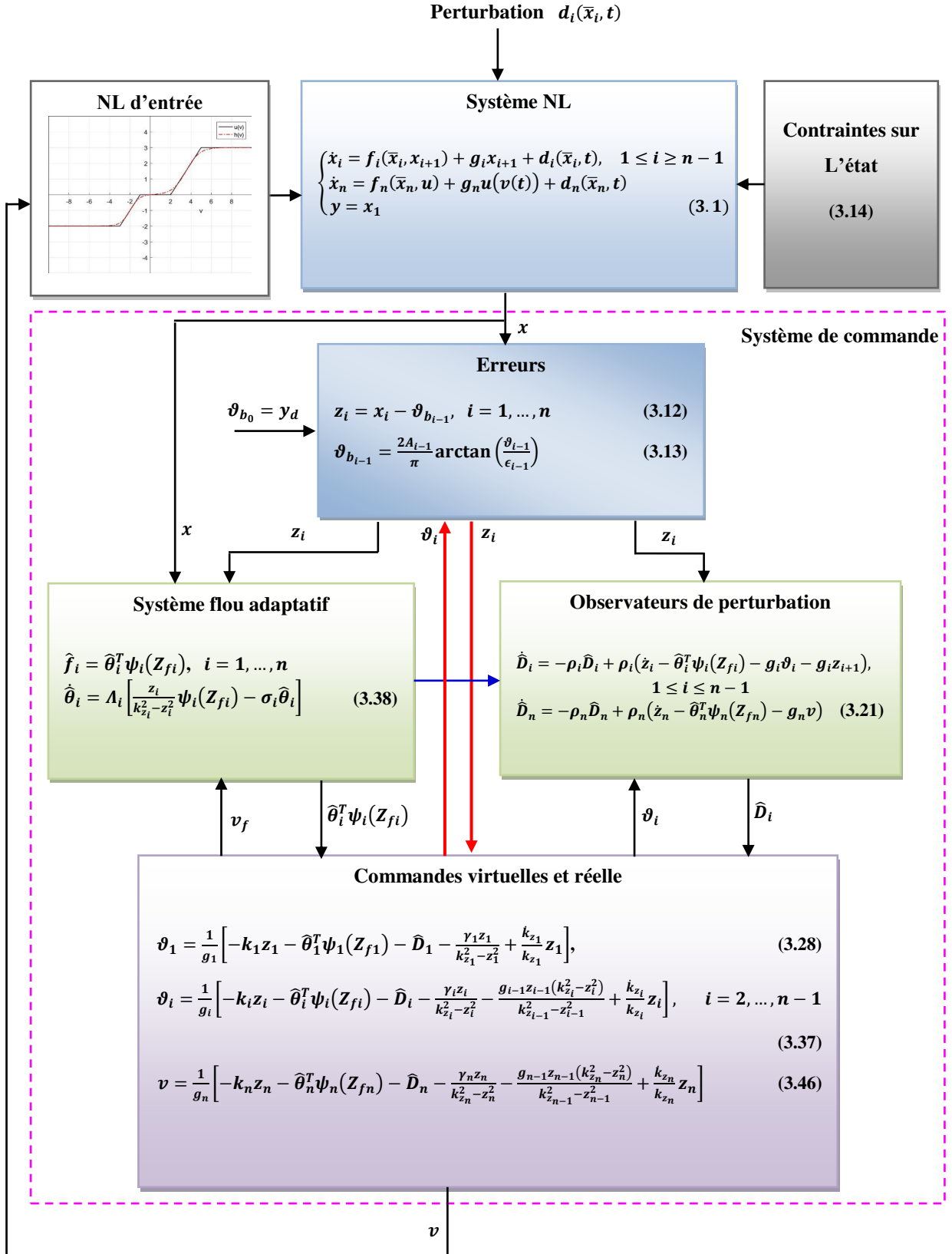


Figure 3.2 : Schéma complet de la commande adaptative floue par backstepping et à base d'observateur de perturbations.

3.4 Résultats de simulation

Afin de montrer l'efficacité de la méthode proposée, deux exemples sont donnés dans cette section.

3.4.1 Exemple 1 : Système numérique

Considérons le système non linéaire pure-feedback du second ordre [ZHA12] décrit par les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\bar{x}_1, x_2) + g_1 x_2 + d_1(\bar{x}_1, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_2, u) + g_2 u(v(t)) + d_2(\bar{x}_2, t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.61)$$

où $f_1(\bar{x}_1, x_2) = x_1 + \frac{x_2^3}{5}$, $g_1 = 1$, $d_1(\bar{x}_1, t) = 0.1\sin(x_1 t)$, $f_2(\bar{x}_2, u) = x_1 x_2 + \frac{u^3}{7}$, $g_2 = 1$, et $d_2(\bar{x}_2, t) = 0.2\cos(0.5x_2 t)$. Les variables d'état x_1 et x_2 sont supposées être soumises à des contraintes comme suit : $|x_1| < 0.8e^{-0.2t} + 0.9$ et $|x_2| < 1.3e^{-0.2t} + 0.9$.

La non-linéarité d'entrée (zone morte et saturation) $u = u(v)$ est conçue comme :

$$u = u(v) = \begin{cases} -10 & v \leq -10 \\ \frac{10}{9.8}(v + 0.2) & -10 < v \leq -0.2 \\ 0 & -0.2 < v \leq 0.2 \\ \frac{15}{14.8}(v - 0.2) & 0.2 < v \leq 15 \\ 15 & v > 15 \end{cases} \quad (3.62)$$

Pour implémenter notre commande, nous avons besoin de deux systèmes flous adaptatifs, à savoir : $\hat{\theta}_1^T \psi_1(Z_{f1})$ et $\hat{\theta}_2^T \psi_2(Z_{f2})$, avec $Z_{f1} = [x_1, x_{2f}]^T$ et $Z_{f2} = [x_1, x_2, v_f]^T$. Pour chaque variable d'entrée, nous choisissons trois fonctions d'appartenance (une triangulaire au centre et deux trapézoïdales sur les cotés) uniformément distribuées sur leurs plages respectives : $[-2, 2]$ pour x_1 , $[-3, 3]$ pour x_2 , $[-4, 4]$ pour x_{2f} et $[-7, 7]$ pour v_f .

Les paramètres de conception sont choisis comme suit : $k_1 = k_2 = 3$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 3$, $A_0 = 0.5$, $A_1 = 0.69$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.1$, et $\rho_1 = \rho_2 = 2$. Les CI du système sont fixés comme : $[x_1(0), x_2(0)]^T = [0.5, 0.5]^T$. Les paramètres flous adaptatifs sont initialisés comme suit : $\theta_{1i}(0) = \theta_{2j}(0) = 0$. Le signal de référence est $y_d = 0.5\sin(t)$.

Les résultats de simulation sont présentés sur les Figures 3.3-3.7. Nous pouvons voir dans la Figure 3.3 que la sortie du système y suit parfaitement son signal de référence y_d tout en respectant les contraintes prescrites. De la Figure 3.4, il est clair que l'état x_2 ne viole pas ses contraintes imposées. Les trajectoires des erreurs (z_1 et z_2) sont données sur les Figures 3.5 et 3.6, respectivement. D'après ces Figures, nous remarquons également que les contraintes imposées sur ces erreurs ne sont pas violées. Le signal de commande appliqué au système est illustré sur la Figure 3.7.

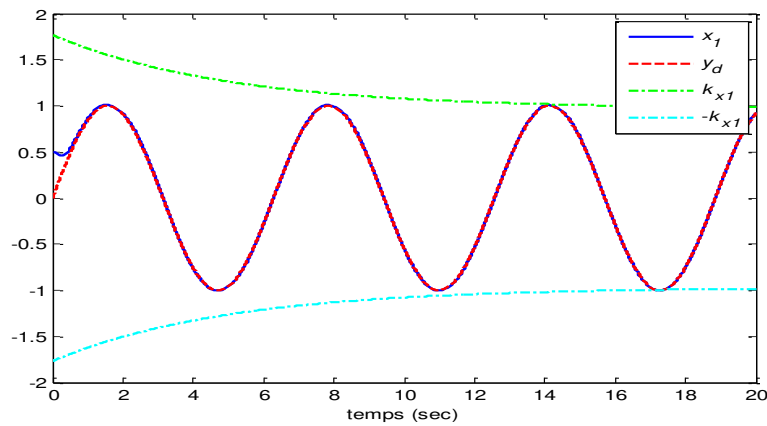


Figure 3.3 : Trajectoires de référence y_d (ligne continue), sortie y (ligne discontinue) et contraintes (ligne mixte).

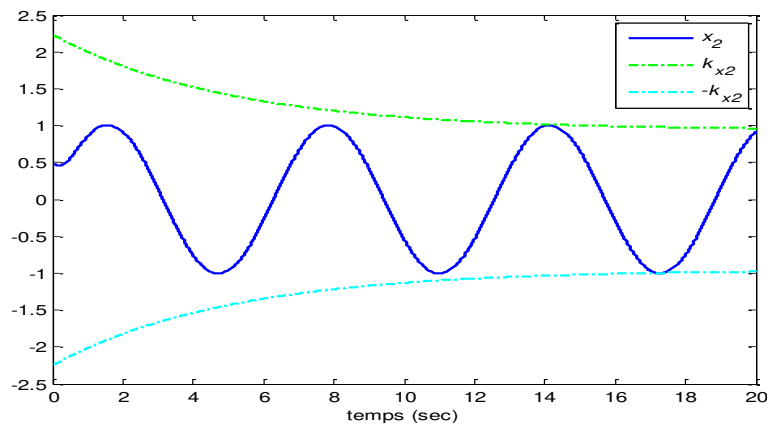


Figure 3.4 : Trajectoire d'état x_2 avec ses contraintes.

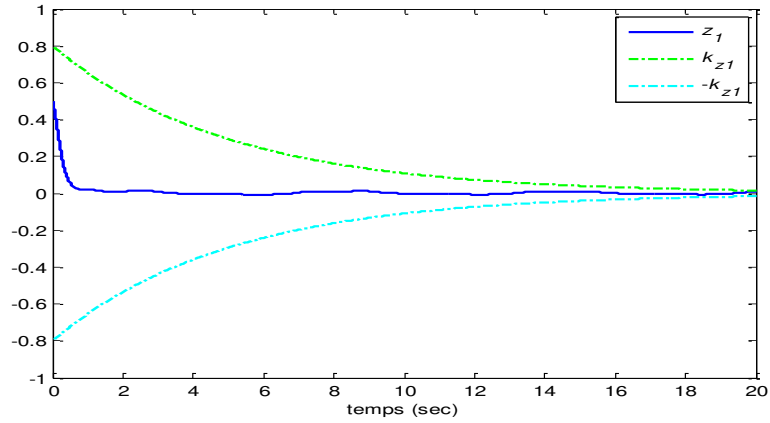


Figure 3.5 : Trajectoire d'erreur z_1 avec ses contraintes.

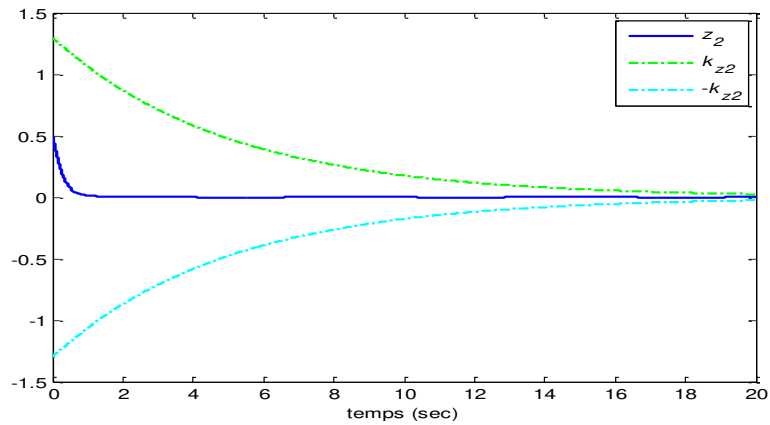


Figure 3.6 : Trajectoire d'erreur z_2 avec ses contraintes.

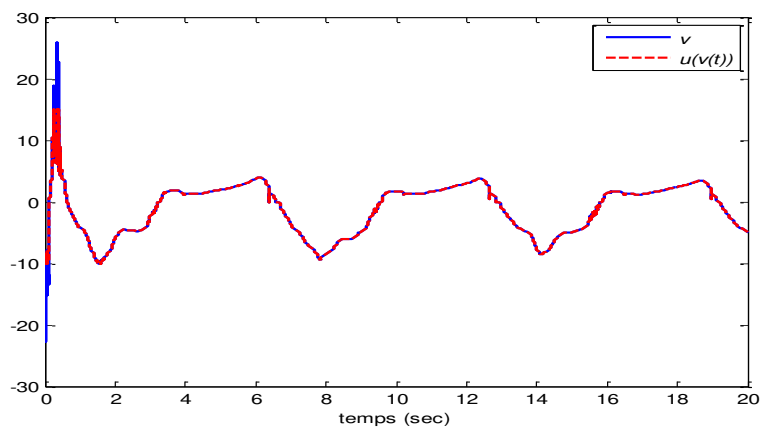


Figure 3.7 : Signal de commande v (ligne continue) et la sortie de l'actionneur u (ligne discontinue).

3.4.2 Exemple 2 : Système électromécanique

Considérons de nouveau le système électromécanique (2.82), présenté dans la Figure 2.8. Ses différents paramètres et variables sont donnés dans le Tableau 2.1. En ajoutant la non-linéarité de l'actionneur et les perturbations externes, son modèle d'état devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\bar{x}_1, x_2) + g_1 x_2 + d_1(\bar{x}_1, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_2, x_3) + g_2 x_3 + d_2(\bar{x}_2, t) \\ \dot{x}_3 = f_3(\bar{x}_3, u) + g_3 u(v(t)) + d_3(\bar{x}_3, t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.63)$$

où $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, $x_3 = I$, et $u(v(t)) = V$. $f_1(\bar{x}_1, x_2) = 0$, $g_1 = 1$, $d_1(\bar{x}_1, t) = 0.2x_1^2 + 0.5\sin(t)$, $f_2(\bar{x}_2, x_3) = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{N}{M}\sin(x_1)$, $d_2(\bar{x}_2, t) = 0.2x_2^2 + 0.2\sin(t)$, $g_2 = \frac{1}{M}$, $f_3(\bar{x}_3, u) = -\frac{R}{L}x_3 - \frac{K_B}{L}x_2$, $d_3(\bar{x}_3, t) = 0.2x_3^2 + 0.1\sin(t)$ et $g_3 = \frac{1}{L}$. Les variables d'état x_1 , x_2 et x_3 sont supposées être soumises à des contraintes comme suit : $|x_1| < 0.8e^{-0.2t} + 0.9$, $|x_2| < 1.3e^{-0.2t} + 0.9$, et $|x_3| < 1.8e^{-0.2t} + 0.9$.

La non-linéarité d'entrée (zone morte et saturation) est déterminée par (3.62).

Pour implémenter notre commande, nous avons besoin de trois systèmes flous adaptatifs, à savoir : $\hat{\theta}_1^T \psi_1(Z_{f1})$, $\hat{\theta}_2^T \psi_2(Z_{f2})$ et $\hat{\theta}_3^T \psi_3(Z_{f3})$, avec $Z_{f1} = [x_1, x_{2f}]^T$, $Z_{f2} = [x_1, x_2, x_{3f}]^T$ et $Z_{f3} = [x_1, x_2, x_3, v_f]^T$. Pour chaque variable d'entrée, nous choisissons trois fonctions d'appartenance (une triangulaire au centre et deux trapézoïdales sur les cotés) uniformément distribuées sur leurs plages respectives : $[-2, 2]$ pour x_1 , $[-3, 3]$ pour x_2 , $[-4, 4]$ pour x_{2f} , $[-4, 4]$ pour x_3 , $[-5, 5]$ pour x_{3f} et $[-10, 10]$ pour v_f .

Les paramètres de conception sont choisis comme suit : $k_1 = k_2 = 4$, $k_3 = 4.5$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 4$, $\gamma_3 = 6$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.1$, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 5$, $A_0 = 0.55$, $A_1 = 0.69$, $A_2 = 0.75$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0.1$, et $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 3$. Les CI du système sont fixées comme : $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)]^T = [0.5, 0.5, 0]^T$. Les paramètres flous adaptatifs sont initialisés comme suit : $\theta_{1i}(0) = \theta_{2j}(0) = \theta_{3k}(0) = 0$. Le signal de référence est $y_d = 0.5 \sin(t)$.

Les résultats de simulation sont présentés sur les Figures 3.8-3.14. Nous pouvons voir dans la Figure 3.8 que la sortie du système y suit parfaitement son signal de référence y_d tout en respectant les contraintes prescrites. De la Figure 3.9, il est clair que l'état x_2 ne viole pas ses contraintes imposées. Dans la Figure 3.10, nous remarquons que l'état x_3 évolue dans l'intervalle des contraintes. Les trajectoires des erreurs (z_1 , z_2 et z_3) sont

données sur les Figures 3.11-3.13. D'après ces Figures, nous remarquons également que les contraintes imposées sur ces erreurs ne sont pas violées. Le signal de commande appliqué au système est illustré sur la Figure 3.14.

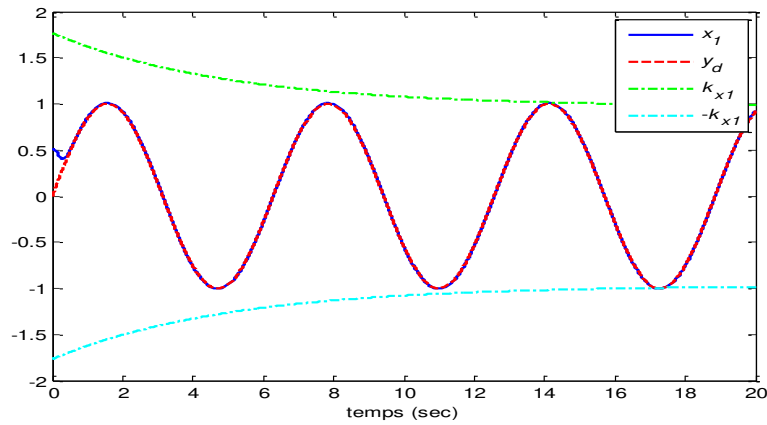


Figure 3.8 : Trajectoires de référence y_d (ligne continue), sortie y (ligne discontinue) et contraintes (ligne mixte).

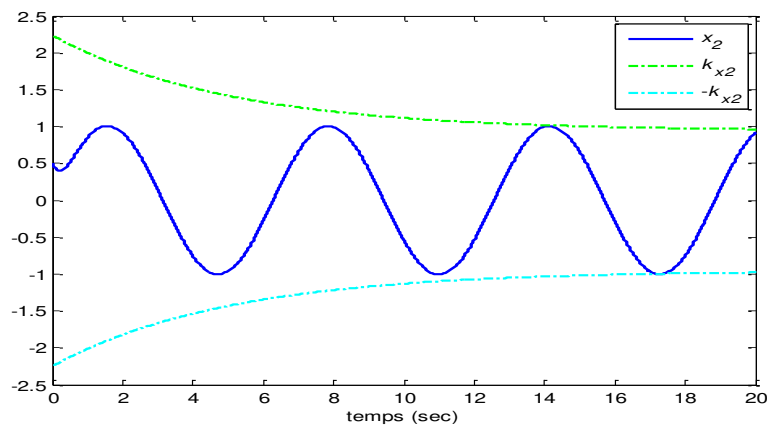


Figure 3.9 : Trajectoire d'état x_2 avec ses contraintes.

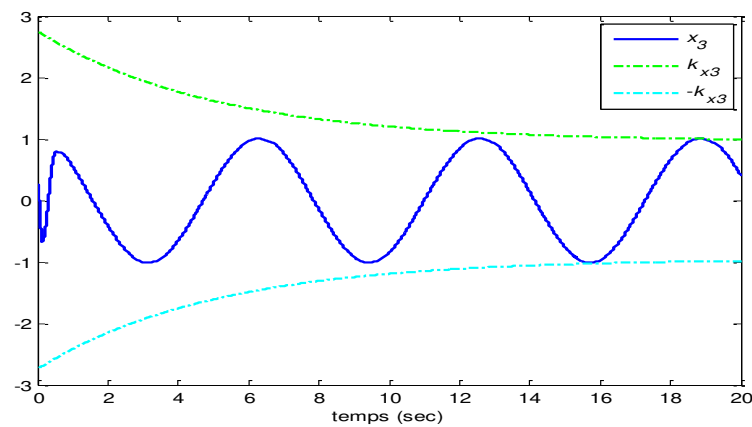


Figure 3.10 : Trajectoire d'état x_3 avec ses contraintes.

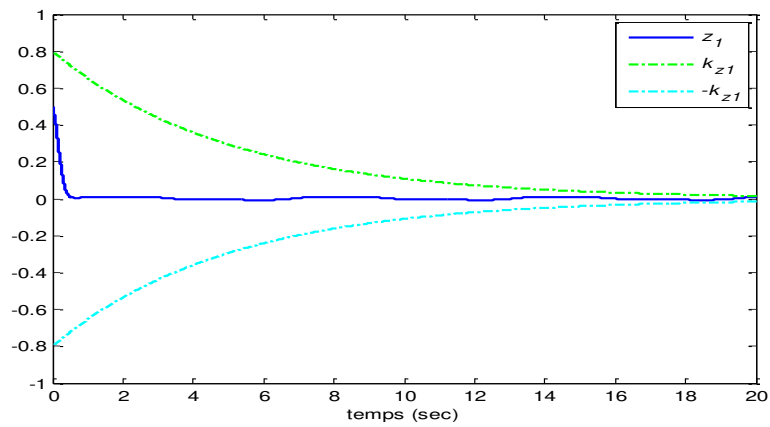


Figure 3.11 : Trajectoire d'erreur z_1 avec ses contraintes.

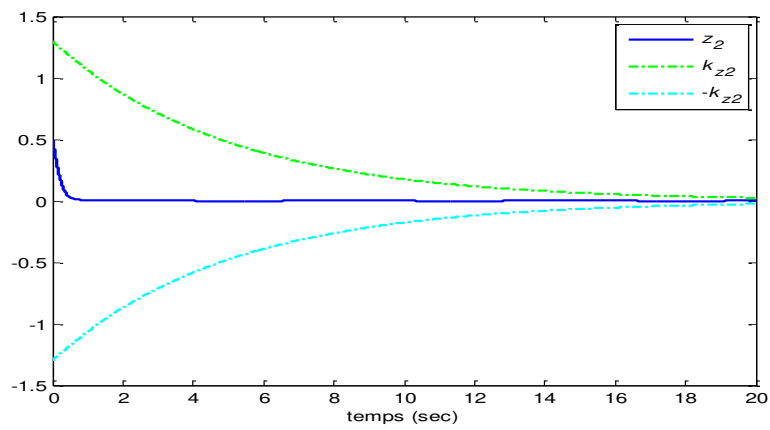


Figure 3.12 : Trajectoire d'erreur z_2 avec ses contraintes.

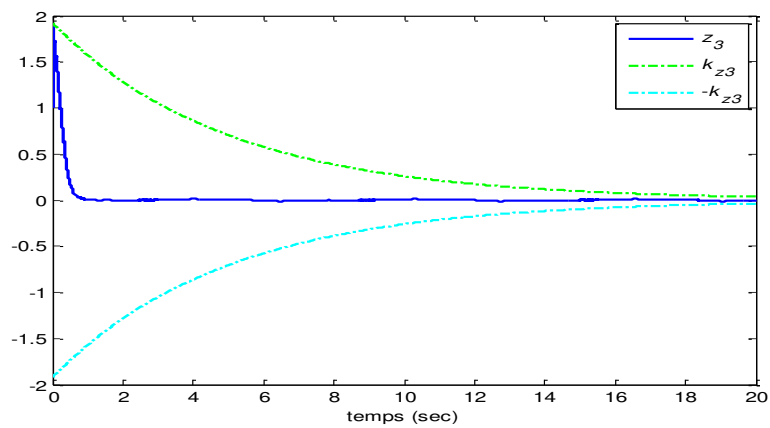


Figure 3.13 : Trajectoire d'erreur z_3 avec ses contraintes.

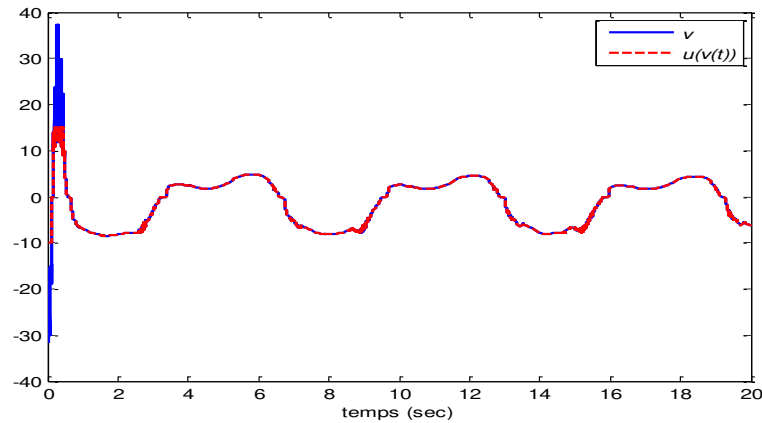


Figure 3.14 : Signal de commande v (ligne continue) et la sortie de l'actionneur u (ligne discontinue).

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une commande floue adaptative par backstepping pour une classe des systèmes non linéaires incertains ayant une forme pure-feedback, et avec des contraintes sur les états, des non-linéarités sur l'entrée (saturation + zone-morte) et des perturbations appariées. En concevant des commandes virtuelles comme des fonctions continues avec des bornes connues a priori, le problème de la condition de faisabilité dû à l'utilisation de la fonction barrière a été résolu. Par conséquent, aucune méthode hors ligne d'essais et d'erreurs n'est requise pour déterminer les bornes des commandes virtuelles. Les approximateurs flous adaptatifs ont été adoptés pour estimer en ligne des fonctions non linéaires inconnues. De plus, pour booster la robustesse du contrôleur, un observateur de perturbation approprié a été conçu. Enfin, deux exemples de simulation numérique ont été effectués pour montrer l'efficacité d'approche proposée.

CHAPITRE 4

COMMANDE FLOUE A STRUCTURE

VARIABLE DES SYSTEMES MIMO

AVEC DES NON-LINEARITES

D’ACTIONNEUR

Chapitre 4

Commande floue à structure variable des systèmes MIMO avec des non-linéarités d'actionneur

4.1 Introduction

Plusieurs systèmes physiques sont caractérisés par des modèles multi-entrées et multi-sorties (MIMO) et présentent naturellement un comportement non linéaire. La conception des lois de commande pour ce genre de systèmes était et encore est un domaine de recherche actif. Des études sur l'état de l'art dans ce domaine ont été adressées dans [GAM04, BOU10a, TAO14]. L'extension des lois de commande conçues pour les systèmes monovariables aux systèmes multivariables est généralement difficile. Cette extension devient encore plus difficile, si ces systèmes sont non linéaires, avec des modèles inconnus ou avec une matrice de gains de commande ayant un signe indéfini (i.e. si la matrice de gains de commande n'est ni définie positive ni définie négative). Plus particulièrement, l'élaboration d'un schéma de commande adaptative pour les systèmes non linéaires multivariables présente, à la fois, un défi théorique et une importance pratique. Plusieurs raisons rendent l'utilisation d'un schéma de commande adaptative indispensable, tels que: le système étant avec des incertitudes paramétriques, ou des paramètres variables avec le temps, et ayant un modèle inconnu [BOU14]. Donc, le but de ce chapitre est de traiter l'un de nombreux problèmes importants de la commande adaptative multivariable, à savoir : la conception d'une nouvelle commande adaptative floue à structure variable pour une classe de systèmes multivariables avec des non-linéarités statiques d'actionneurs statiques (saturation avec zone morte).

Au cours de trois dernières décennies, une panoplie de schémas de commande adaptative basée sur les approximateurs universels de fonctions (systèmes flous ou réseaux de neurones) a été proposée pour des systèmes triangulaires non linéaires incertains

[ZHA00, WAN02, ZHA10, TON13, XU14]. Motivés par [WAN94], les auteurs ont employé, dans ces schémas, les systèmes flous ou les réseaux de neurones pour estimer en ligne les dynamiques inconnues du modèle (dans les approches adaptatives indirectes) ou les lois de commande dites idéales (dans les approches adaptatives directes). Dans un cadre backstepping, l'analyse de la stabilité du système en BF et la dérivation des lois d'adaptation associées ont été effectuées en utilisant la deuxième approche de Lyapunov. Récemment, sous l'hypothèse que tous les mineurs principaux de la matrice des gains de commande sont non nuls et que leurs signes sont également connus, des schémas de commande floue adaptative pour une classe de systèmes MIMO non linéaires incertains ont été développés dans [BOU10b, BOU12], via l'emploi d'une propriété de décomposition matricielle dite SDU. Tout comme [WAN94, ZHA00, WAN02, ZHA10, TON13, XU14], l'analyse associée de stabilité a été également effectuée en utilisant une approche de Lyapunov. Pour compenser efficacement les erreurs d'approximation floue aussi bien que les perturbations externes éventuelles, la loi de commande dominante (qui est la commande floue adaptative) est généralement augmentée par un terme robuste. Bien que tous les travaux cités ci-dessus puissent garantir la stabilité du système en boucle fermée et de bonnes performances de poursuite, ils souffrent des inconvénients suivants :

- 1) la classe de systèmes MIMO considérée est généralement relativement simple.
- 2) le problème des non-linéarités hybrides dues aux actionneurs (i.e. zone morte + saturation) est très peu considéré.

Les non-linéarités d'entrée (à savoir la zone morte, la saturation, le backlash et l'hystérésis) sont fréquemment observées dans les actionneurs hydrauliques, mécaniques ou magnétiques [BOU10a]. Parfois, ces non-linéarités proviennent de l'imperfection des actionneurs (comme le backlash ou l'hystérésis dans les actionneurs magnétiques). Parfois, elles sont volontairement introduites (comme la zone-morte pour éviter les fuites de fluide dans certaines vannes hydrauliques, ou la saturation pour limiter la commande). Ces non-linéarités des actionneurs ont toujours des effets indésirables sur les performances du système de commande. C'est pourquoi elles doivent toujours être prises en compte lors de la phase de conception d'un schéma commande. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème des non-linéarités sans mémoires (statiques), telles que : la saturation et la zone morte.

Pour traiter le problème de *la saturation* d'entrée, de nombreux schémas de commande ont été proposés [PAR01, POL03, FAR04, ZHO05, LAB07, HU08, CHE10a, KUL11, LI14a, LI16]. Dans la littérature ouverte dédiée à la commande adaptative, l'effet de la saturation est généralement traité via les méthodes suivantes :

- 1) L'arrêt du processus d'adaptation pendant la saturation [ZHO05, LAB07].
- 2) La modification des lois d'adaptation de telle sorte que le signal d'erreur d'apprentissage soit augmenté par un terme représentant l'effet de la saturation (erreur entre l'entrée saturée et non saturée) [POL03, FAR04, LI14a, LI16].
- 3) La modification de la loi de commande afin d'assurer que le signal de commande reste toujours entre les limites de la saturation [PAR01, KUL11].
- 4) La conception de la loi de commande dans un cadre à structure variable [HU08, CHE10a].

D'autre part, *la zone morte* est une non-linéarité statique qui produit une sortie nulle dans une certaine région. Pour compenser efficacement l'effet de cette non-linéarité sans mémoire et non différentiable, les solutions suivantes sont généralement utilisées :

- 1) La construction de son modèle inverse [TAO94, TON13, LIU15] : Notons que cette solution est généralement utilisée pour annuler les autres non-linéarités d'entrée (saturation, hystérésis et backlash).
- 2) Le traitement de l'effet de la zone morte comme une perturbation [BOU10a, LI14b, CHE16].
- 3) La conception de la commande dans un cadre à structure variable [HU08, CHE10a, BOU11, BOU14, BOU17].

Malgré la quantité de travaux disponibles dans ce contexte, les problèmes de saturation d'entrée et de zone morte n'ont pas été bien discutés et de nombreuses recherches doivent être approfondies, telles que : l'extension de ces commandes pour une large classe de systèmes non linéaires MIMO, et la relaxation de certaines hypothèses restrictives.

Dans ce chapitre, nous concevons une commande adaptative floue d'une classe de systèmes non linéaires MIMO incertains ayant une forme strict-feedback et soumis à des non-linéarités d'actionneur non symétriques (saturation et zone morte). Ainsi, notre motivation se résume en trois points principaux. *Premièrement*, les fonctions non linéaires inconnues dans le modèle seront approximées en ligne par des systèmes flous adaptatifs.

Deuxièmement, le problème des non-linéarités de type saturation et zone morte, inhérent aux actionneurs, sera efficacement résolu en concevant notre commande floue adaptative par backstepping dans un cadre de commande à structure variable. **Troisièmement**, le problème lié à la non-symétrie et au signe indéfini des matrices de gains de commande sera traité via l'utilisation d'une propriété de décomposition matricielle dite SDU. Ainsi, chaque matrice de gains de commande sera décomposée en un produit de trois matrices utiles, à savoir : une matrice symétrique définie-positive, une matrice diagonale avec des +1 et -1 sur sa diagonale principale et une matrice triangulaire supérieure unitaire. En comparant avec les travaux cités ci-dessus [TAO94, PAR01, POL03, FAR04, ZHO05, LAB07, HU08, BOU10a, CHE10a, KUL11, BOU11, TON13, LI14a, LI14b, BOU14, LIU15, CHE16, BOU17], les principales contributions de ce chapitre peuvent être résumées comme suit :

- 1) Un nouveau schéma de commande adaptative floue par backstepping et à structure variable est développé pour une classe de systèmes non linéaires MIMO incertains ayant une forme strict-feedback et avec des non-linéarités d'actionneurs.
- 2) Contrairement aux travaux voisins récents, e.g. [BOU11, BOU14, BOU17], la classe sous-considération de systèmes non linéaires MIMO est relativement complexe et assez générale, dans le sens que cette classe est supposée avec des incertitudes non structurelles et non appariées (i.e. unmatched), aussi bien qu'avec des non-linéarités hybrides inhérentes aux actionneurs (zone morte avec saturation).
- 3) Les matrices des gains de commande ne sont pas supposées être définies positives ou négatives, et symétriques. Ainsi, le présent travail peut être considéré comme une généralisation des travaux voisins [HU08, CHE10a].

4.2 Formulation du problème et préliminaires

4.2.1 Formulation du problème

Considérons la classe de systèmes MIMO non linéaires incertains décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(\bar{x}_1) + G_1(\bar{x}_0)x_2 \\ \dot{x}_2 = F_2(\bar{x}_2) + G_2(\bar{x}_1)x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = F_n(\bar{x}_n) + G_n(\bar{x}_{n-1})\Phi(u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\bar{x}_0 = []$, $\bar{x}_1 = [x_1^T]^T$, $\bar{x}_2 = [x_1^T, x_2^T]^T, \dots, \bar{x}_n = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T]^T$, avec $x_i \in R^m$, $i = 1, 2, \dots, n$, $y \in R^m$, et $u \in R^m$ étant les vecteurs d'état qui sont supposés mesurables, le vecteur de sortie et le vecteur d'entrée du système, respectivement. $\Phi(u) \in R^m$ est le vecteur des non-linéarités d'actionneur. $F_i(x_i) \in R^{m \times 1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, sont des fonctions non linéaires lisses inconnues, $G_i(x_{i-1}) \in R^{m \times m}$, $i = 1, 2, \dots, n$, sont des fonctions matricielles non linéaires lisses incertaines. $G_1(\bar{x}_0)$ est une matrice constante incertaine, et \bar{x}_0 représente un vecteur vide.

Notre objectif consiste à concevoir une loi de commande adaptative floue à structure variable pour le système incertain (4.1) étant soumis à des non-linéarités d'entrée (type saturation + zone-morte), tout en garantissant la propriété SGUUB pour tous les signaux du système BF et la convergence des erreurs de poursuite vers un petit voisinage ajustable de l'origine. Ces erreurs de poursuite sont définies comme suit : $z_1 = x_1(t) - x_{1d} = y(t) - x_{1d}$, où x_{1d} est un vecteur de références désirées, étant supposées faisables.

Considérons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 4.1 :

- 1) Tous les mineurs principaux de la matrice $G_i(\cdot)$, pour $i = 1, 2, \dots, n$, ne sont pas nulles et leurs signes sont supposés connus.
- 2) Toutes les matrices $G_i(x_{i-1})$ sont de classe C^1 .
- 3) Le vecteur x_{1d} des références désirées et ses dérivées temporelles jusqu'au n -ième ordre sont mesurables, continus et bornés.

Remarque 4.1 : Plusieurs systèmes physiques (SISO ou MIMO) peuvent être modélisés sous la forme (4.1) ou bien transformés à elle, à savoir

- ❖ **Systèmes SISO :** les réacteurs chimiques à cuve agitée en continu, le robot manipulateur à un seul bras, le pendule inversé, le système Brusselator, l'oscillateur duffing, ... [BOU08b, LAI16].
- ❖ **Systèmes MIMO :** les robots manipulateurs à deux degrés de liberté, les moteurs à induction, les systèmes masse-ressort-amortisseur, les hélicoptères, ... [BOU11, HAD16, HAD19].

4.2.2 Modèle de la saturation et zone-morte

Considérons la non-linéarité d'entrée suivante (voir Figure 4.1) qui combine les effets de la saturation et zone morte [HU08, CHE10a] :

$$\Phi(u_i) = \begin{cases} \chi(u_i, u_{limax}, u_{rimax}, u_{li0}, u_{ri0})(u_i - u_{ri0}), & \text{si } u_i \geq u_{ri0} \\ 0, & \text{si } u_{li0} < u_i < u_{ri0} \\ \chi(u_i, u_{limax}, u_{rimax}, u_{li0}, u_{ri0})(u_i - u_{li0}), & \text{si } u_i \leq u_{li0} \end{cases} \quad (4.2)$$

Selon [HU08, CHE10a, HAD16, HAD19], via le théorème de la valeur moyenne (Théorème 1.10), on peut montrer l'existence de deux fonctions, à savoir $\psi_{ri}(u_i) \in [u_{ri0}, u_{ri1}]$ et $\psi_{li}(u_i) \in [u_{li1}, u_{li0}]$, telles que :

$$\chi(u_i, u_{limax}, u_{rimax}, u_{li0}, u_{ri0}) = \begin{cases} \frac{u_{rimax}}{u_i - u_{ri0}}, & \text{si } u_i > u_{ri1} \\ g'_{ri}(\psi_{ri}(u_i)), & \text{si } u_{ri0} \leq u_i \leq u_{ri1} \\ g'_{li}(\psi_{li}(u_i)), & \text{si } u_{li1} \leq u_i \leq u_{li0} \\ \frac{u_{limax}}{u_i - u_{li0}}, & \text{si } u_i < u_{li1} \end{cases} \quad (4.3)$$

avec $u_{ri1} = u_{rimax}$, $u_{li1} = u_{limax}$, et $g'_{ri}(\psi_{ri}(u_i)) = \left. \frac{dg_{ri}(z)}{dz} \right|_{z=\psi_{ri}(u_i)}$ et $g'_{li}(\psi_{li}(u_i)) = \left. \frac{dg_{li}(z)}{dz} \right|_{z=\psi_{li}(u_i)}$.

Hypothèse 4.2 : Le modèle de non-linéarité sous considérations, $\Phi(u_i)$, est donné par l'expression (4.2). Cette non-linéarité $\Phi(u_i)$, représentée sur la Figure 4.1, satisfait simultanément les propriétés de la saturation et de la zone morte asymétrique. Par conséquent, le signal d'entrée, $u(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$, est contraint par les valeurs de la saturation $u_{lmax} = [u_{l11}, \dots, u_{lm1}]^T$, $u_{rmax} = [u_{r11}, \dots, u_{rm1}]^T$, et celles de la zone-morte $u_{l0} = [u_{l10}, \dots, u_{lm0}]^T$ et $u_{r0} = [u_{r10}, \dots, u_{rm0}]^T$.

Hypothèse 4.3 : Les fonctions $g_{ri}(u_i)$ et $g_{li}(u_i)$ sont non linéaires et lisses. Elles doivent satisfaire les propriétés suivantes [CHE10a, HAD16, HAD19] :

$$0 \leq k_{ri0} \leq g'_{ri}(u_i) \leq k_{ri1}, \quad u_i \in [u_{ri0}, u_{ri1}] \quad (4.4)$$

$$0 \leq k_{li0} \leq g'_{li}(u_i) \leq k_{li1}, \quad u_i \in [u_{li1}, u_{li0}] \quad (4.5)$$

où k_{li0} , k_{li1} , k_{ri0} et k_{ri1} sont des constantes positives inconnues. A partir de (4.3), (4.4) et (4.5), il est clair que $\chi(u_i, u_{limax}, u_{rimax}, u_{li0}, u_{ri0}) > 0$ [CHE10a, HAD16, HAD19].

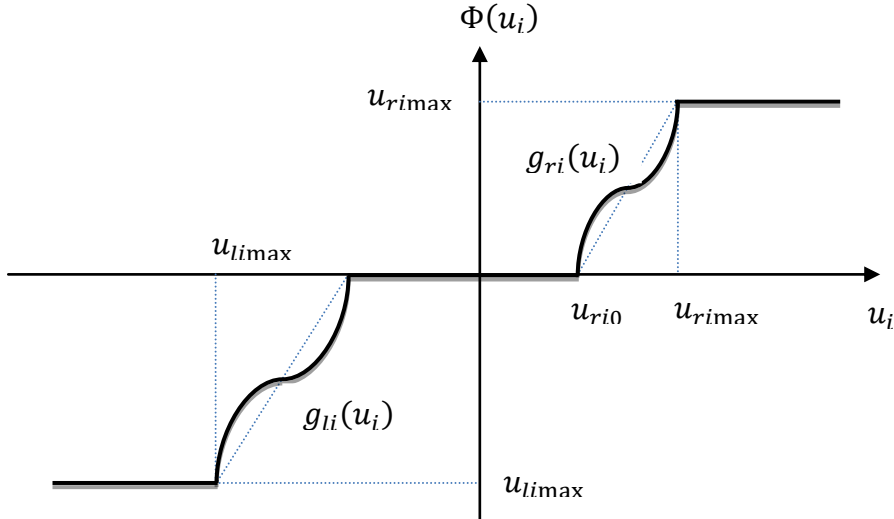


Figure 4.1 : Modèle combiné de la saturation et zone-morte.

Remarque 4.2 : Les Hypothèses 4.2 et 4.3 ne sont pas restrictives. Elles ont déjà été utilisées dans plusieurs travaux [HU08, CHE10a, HAD16, HAD19]. La non-linéarité d'entrée $\Phi(u)$, donnée par (4.2), doit satisfaire simultanément les propriétés de la saturation et de la zone morte. Contrairement à [BOU11, BOU14, BOU17], l'Hypothèse 4.3 implique que les fonctions $g_{ri}(u_i)$ et $g_{li}(u_i)$ sont non linéaires et relativement générales.

4.2.3 Décomposition matricielle SDU

Pour faciliter la conception de la commande et l'analyse de la stabilité, le Lemme 1.2 sera utilisé dans les développements ultérieurs.

La matrice $G_i(\cdot)$, ayant des mineurs principaux non nuls, peut être décomposée selon le Lemme 1.2 comme suit [BOU10b, HAD16, HAD19] :

$$G_i(\cdot) = G_{si}(\cdot)D_iT_i(\cdot) \quad (4.6)$$

avec $G_{si}(\cdot) \in R^{m \times m}$ étant une matrice définie positive et symétrique (DPS), $D_i \in R^{m \times m}$ une matrice diagonale avec des entrées $+1$ ou -1 , et $T_i(\cdot) \in R^{m \times m}$ une matrice triangulaire supérieure unitaire.

Il est à noter que cette décomposition SDU est particulièrement utile lors de la conception de la loi de commande et de l'analyse de la stabilité du système en BF. En fait, la matrice DPS $G_{si}(\cdot)$ sera incorporée par la suite dans la fonction candidate de Lyapunov.

Quant à la matrice triangulaire supérieure unitaire, $T_i(\cdot)$, elle permet d'avoir une synthèse séquentielle des commandes sans aucune boucle algébrique. Enfin, la matrice D_i contient une information utile sur le signe de la matrice originale $G_i(\cdot)$ [BOU10b, HAD16, HAD19].

Si $G_i(\cdot)$ a des mineurs principaux non nuls, trois cas peuvent avoir lieu :

- Si $G_i(\cdot)$ est définie positive (DP), donc $D_i = I_n$;
- Si $G_i(\cdot)$ est définie négative (DN), donc $D_i = -I_n$;
- Si $G_i(\cdot)$ n'est pas définie, dans ce cas la matrice D_i a des $+1$ et -1 sur sa diagonal principale.

4.3 Conception de la commande adaptative floue

Dans cette section, pour notre système (4.1) étant principalement caractérisé par des matrices de gains de commande $G_i(\bar{x}_{i-1})$ qui peuvent être non-symétriques et pas nécessairement DP et DN, et également par des non-linéarités de l'actionneur (saturation avec zone morte), une commande adaptative floue à structure variable sera conçue.

Basée sur les Hypothèses 4.1-4.3 et la méthodologie du backstepping, la conception de notre commande sera faite en n étapes.

Etape 1 : Définissons les erreurs de poursuite de sortie comme $z_1 = x_1 - x_{d1}$, et $z_2 = x_2 - \alpha_1$, où $\alpha_1 \in R^m$ est la première commande virtuelle à concevoir.

A partir de (4.1), la dynamique de z_1 est :

$$\dot{z}_1 = F_1(\bar{x}_1) + G_1(\bar{x}_0)x_2 - \dot{x}_{d1} \quad (4.7)$$

En évoquant le Lemme 1.2 (le lemme de la décomposition matricielle SDU), il s'ensuit que :

$$G_{s1}^{-1}(\bar{x}_0)\dot{z}_1 = G_{s1}^{-1}(\bar{x}_0)[F_1(\bar{x}_1) - \dot{x}_{d1}] + D_1T_1(\bar{x}_0)x_2 \quad (4.8)$$

En posant $\bar{G}_{s1}(\bar{x}_0) = G_{s1}^{-1}(\bar{x}_0)$ et $\bar{F}_1(x_1, x_2) = G_{s1}^{-1}(\bar{x}_0)[F_1(\bar{x}_1) - \dot{x}_{d1}] + [D_1T_1(\bar{x}_0) - D_1]x_2$, le système (4.8) devient :

$$\bar{G}_{s1}(\bar{x}_0)\dot{z}_1 = \bar{F}_1(x_1, x_2) + D_1x_2 \quad (4.9)$$

En ajoutant le terme $\frac{1}{2}\dot{\bar{G}}_{s1}(\bar{x}_0)z_1$ aux deux membres de (4.9), on obtient :

$$\bar{G}_{s1}(\bar{x}_0)\dot{z}_1 + \frac{1}{2}\dot{\bar{G}}_{s1}(\bar{x}_0)z_1 = -\rho_1(Z_1) + D_1z_2 + D_1\alpha_1 \quad (4.10)$$

avec $\rho_1(Z_1) = [\rho_{11}(Z_{11}), \dots, \rho_{1m}(Z_{1m})]^T = -\bar{F}_1(x_1, x_2) - \frac{1}{2}\dot{\bar{G}}_{s1}(\bar{x}_0)z_1$, et $Z_1 = [\bar{x}_1^T, x_2^T, x_{d1}^T, \dot{x}_{d1}^T]^T$.

Les fonctions non linéaires $\rho_{1j}(Z_{1j})$ avec $j = 1, \dots, m$ ont comme argument d'entrée :

$$\begin{aligned} Z_{11} &= [\bar{x}_1^T, x_{22}, \dots, x_{2m}, x_{d1}^T, \dot{x}_{d1}^T]^T, \\ Z_{12} &= [\bar{x}_1^T, x_{23}, \dots, x_{2m}, x_{d1}^T, \dot{x}_{d1}^T]^T, \\ &\vdots \\ Z_{1m} &= [\bar{x}_1^T, x_{d1}^T, \dot{x}_{d1}^T]^T. \end{aligned}$$

En raison de la structure particulière de la matrice $[D_1T_1(\bar{x}_0) - D_1]$, la fonction $\rho_1(Z_1)$ est caractérisée par *une structure de commande virtuelle triangulaire supérieure*. Donc, nous pouvons concevoir séquentiellement les commandes virtuelles α_{1i} sans aucune *boucle algébrique*.

Construisons la fonction candidate de Lyapunov comme suit :

$$V_1^* = \frac{1}{2}z_1^T \bar{G}_{s1}(\bar{x}_0)z_1 \quad (4.11)$$

Ensuite, la différenciation de V_1^* au long de (4.10) donne :

$$\dot{V}_1^* = -z_1^T \rho_1(Z_1) + z_1^T D_1 z_2 + z_1^T D_1 \alpha_1 \quad (4.12)$$

La fonction inconnue $\rho_1(Z_1)$ peut être approchée en ligne, sur un ensemble compact Ω_{Z_1} , par le système flou (1.42), comme suit :

$$\hat{\rho}_1(Z_1) = \hat{\theta}_1^T \psi_1(Z_1) \quad (4.13)$$

où $\hat{\theta}_1 = \text{diag}\{\hat{\theta}_{11}, \hat{\theta}_{12}, \dots, \hat{\theta}_{1m}\}$ est la matrice de paramètres flous adaptatifs. $\psi_1(Z_1) = [\psi_{11}^T(Z_1), \dots, \psi_{1m}^T(Z_1)]^T$ est le vecteur des FBFs censées être adéquatement sélectionnées par le concepteur.

De plus, selon le théorème d'approximation universelle [WAN94], la fonction non linéaire lisse $\rho_1(Z_1)$ peut être approximée via un système flou optimal comme suit :

$$\rho_1(Z_1) = \theta_1^{*T} \psi_1(Z_1) + \varepsilon_1(Z_1) \quad (4.14)$$

où $\varepsilon_1(Z_1)$ est l'erreur d'approximation floue, supposée bornée et inconnue.

À partir de (4.12), la commande virtuelle peut être choisie comme :

$$\alpha_1 = D_1^{-1}(\hat{\rho}_1(Z_1) - K_1 z_1) \quad (4.15)$$

avec $K_1 = K_1^T > 0$.

La substitution de (4.15) et (4.14) dans (4.12) donne :

$$\dot{V}_1^* = -z_1^T K_1 z_1 + z_1^T D_1 z_2 - z_1^T \theta_1^{*T} \psi_1(Z_1) - z_1^T \varepsilon_1(Z_1) + z_1^T \hat{\theta}_1^T \psi_1(Z_1) \quad (4.16)$$

En utilisant l'inégalité $-z_1^T \varepsilon_1(Z_1) \leq \frac{1}{2} \|\varepsilon_1\|^2 + \frac{1}{2} \|z_1\|^2$, il en résulte :

$$\dot{V}_1^* \leq -z_1^T K_1 z_1 + z_1^T D_1 z_2 + z_1^T \tilde{\theta}_1^T \psi_1(Z_1) + \frac{1}{2} \|\varepsilon_1\|^2 + \frac{1}{2} \|z_1\|^2 \quad (4.17)$$

avec $\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1^*$, où θ_1^* la valeur optimale inconnue de $\hat{\theta}_1$ garantissant la plus petite erreur d'approximation floue.

Pour étudier la stabilité de $\tilde{\theta}_1$, considérons cette variable dans la fonction de Lyapunov précédente comme suit :

$$V_1 = V_1^* + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\theta}_1^T \Lambda_1^{-1} \tilde{\theta}_1) \quad (4.18)$$

avec $\Lambda_1^{-1} > 0$.

La différenciation par rapport au temps de V_1 et puis l'utilisation de (4.17) permettent d'avoir :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{V}_1^* + \text{tr}(\tilde{\theta}_1^T \Lambda_1^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1) \\ &\leq -z_1^T K_1 z_1 + z_1^T D_1 z_2 + z_1^T \tilde{\theta}_1^T \psi_1(Z_1) + \frac{1}{2} \|\varepsilon_1\|^2 + \frac{1}{2} \|z_1\|^2 + \text{tr}(\tilde{\theta}_1^T \Lambda_1^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Construisons une loi robuste d'adaptation pour $\hat{\theta}_1$ comme suit :

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\Lambda_1(\psi_1(Z_1) z_1^T + \sigma_{m1} \hat{\theta}_1) \quad (4.20)$$

avec $\sigma_{m1} > 0$ un scalaire petit de conception.

En utilisant :

$$-\text{tr}(\tilde{\theta}_1^T \psi_1(Z_1) z_1^T) = -z_1^T \tilde{\theta}_1^T \psi_1(Z_1), \quad (4.21)$$

$$2\text{tr}(\tilde{\theta}_1^T \dot{\hat{\theta}}_1) \geq \|\dot{\tilde{\theta}}_1\|^2 - \|\theta_1^*\|^2, \quad (4.22)$$

il en résulte :

$$\dot{V}_1 \leq -z_1^T \left(K_1 - \frac{1}{2} I_{m \times m} \right) z_1 - \frac{\sigma_{m1}}{2} \|\tilde{\theta}_1\|^2 + z_1^T D_1 z_2 + \frac{1}{2} \|\varepsilon_1\|^2 + \frac{\sigma_{m1}}{2} \|\theta_1^*\|^2 \quad (4.23)$$

Dans le membre droit de (4.23), les deux premiers termes sont stables, à condition que $K_1 - \frac{1}{2} I_{m \times m} > 0$ et $\sigma_{m1} > 0$, mais le terme $z_1^T D_1 z_2$ sera annulé à l'étape suivante. Les termes restants, i.e. $\frac{1}{2} \|\varepsilon_1\|^2 + \frac{\sigma_{m1}}{2} \|\theta_1^*\|^2$, seront inclus dans l'analyse de stabilité.

Etape i ($2 \leq i \leq n - 1$) : Définissons les variables d'erreur suivantes :

$$z_i = x_i - \alpha_{i-1}, \quad \text{pour } i = 2, \dots, n - 1 \quad (4.24)$$

où $\alpha_i \in R^m$ sont les commandes virtuelles qui seront conçues ultérieurement.

A partir de (4.1) et (4.24), la dynamique de z_i peut s'écrire comme suit :

$$\dot{z}_i = F_i(\bar{x}_i) + G_i(\bar{x}_{i-1})x_{i+1} - \dot{\alpha}_{i-1} \quad (4.25)$$

Il résulte du Lemme 1.2 :

$$G_{si}^{-1}(\bar{x}_{i-1})\dot{z}_i = G_{si}^{-1}(\bar{x}_{i-1})[F_i(\bar{x}_i) - \dot{\alpha}_{i-1}] + D_i T_i(\bar{x}_{i-1})x_{i+1} \quad (4.26)$$

En posant $\bar{G}_{si}(\bar{x}_{i-1}) = G_{si}^{-1}(\bar{x}_{i-1})$ et $\bar{F}_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) = G_{si}^{-1}(\bar{x}_{i-1})[F_i(\bar{x}_i) - \dot{\alpha}_{i-1}] + [D_i T_i(\bar{x}_{i-1}) - D_i]x_{i+1}$, (4.26) peut être réécrit comme suit :

$$\bar{G}_{si}(\bar{x}_{i-1})\dot{z}_i = \bar{F}_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) + D_i x_{i+1} \quad (4.27)$$

En additionnant le terme $\frac{1}{2} \dot{\bar{G}}_{si}(\bar{x}_{i-1})z_i$ aux deux membres de (4.27), on obtient :

$$\bar{G}_{si}(\bar{x}_{i-1})\dot{z}_i + \frac{1}{2} \dot{\bar{G}}_{si}(\bar{x}_{i-1})z_i = -\rho_i(Z_i) + D_i z_{i+1} + D_i \alpha_i \quad (4.28)$$

où $z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i$ et $\rho_i(Z_i) = [\rho_{i1}(Z_{i1}), \dots, \rho_{im}(Z_{im})]^T = -\bar{F}_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) - \frac{1}{2} \dot{\bar{G}}_{si}(\bar{x}_{i-1})z_i$.

En examinant prudemment $\bar{F}_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$ et $\rho_i(Z_i)$, l'argument d'entrée de $\rho_{ij}(Z_{ij})$, pour $i = 2, \dots, n - 1$ et $j = 1, \dots, m$, est donc :

$$\begin{aligned} Z_{i1} &= [\bar{x}_i^T, x_{(i+1)2}^T, \dots, x_{(i+1)m}^T, z_i^T, \dot{\alpha}_{i-1}^T]^T, \\ Z_{i2} &= [\bar{x}_i^T, x_{(i+1)3}^T, \dots, x_{(i+1)m}^T, z_i^T, \dot{\alpha}_{i-1}^T]^T, \\ &\vdots \\ Z_{im} &= [\bar{x}_i^T, z_i^T, \dot{\alpha}_{i-1}^T]^T. \end{aligned}$$

Due à la structure particulière de la matrice de $[D_i T_i(\bar{x}_{i-1}) - D_i]$, la fonction vectorielle $\rho_i(Z_i)$ est caractérisée par *une structure de commande virtuelle triangulaire supérieure*. Par conséquent, nous pouvons concevoir séquentiellement les commandes virtuelles α_i sans tomber dans le problème de la *boucle algébrique*.

Maintenant, choisissons une fonction candidate de Lyapunov comme :

$$V_i^* = \frac{1}{2} z_i^T \bar{G}_{si}(\bar{x}_{i-1}) z_i \quad (4.29)$$

La dérivation par rapport au temps V_i^* au long des solutions de (4.28) donne :

$$\dot{V}_i^* = -z_i^T \rho_i(Z_i) + z_i^T D_i z_{i+1} + z_i^T D_i \alpha_i \quad (4.30)$$

La fonction non linéaire incertaine $\rho_i(Z_i)$ sera approximée en ligne, sur un ensemble compact Ω_{Z_i} , par le système flou (1.42), comme suit :

$$\hat{\rho}_i(Z_i) = \hat{\theta}_i^T \psi_i(Z_i) \quad (4.31)$$

avec $\hat{\theta}_i = \text{diag} \{ \hat{\theta}_{i1}, \hat{\theta}_{i2}, \dots, \hat{\theta}_{im} \}$ et $\psi_i(Z_i) = [\psi_{i1}^T(Z_i), \dots, \psi_{im}^T(Z_i)]^T$.

Selon [WAN94], l'approximation optimale de la fonction vectorielle $\rho_i(Z_i)$ par les systèmes flous est :

$$\rho_i(Z_i) = \theta_i^{*T} \psi_i(Z_i) + \varepsilon_i(Z_i) \quad (4.32)$$

avec $\varepsilon_i(Z_i)$ étant l'erreur d'approximation floue supposée bornée et inconnue.

Concevons, dans cette étape, la commande virtuelle comme suit :

$$\alpha_i = D_i^{-1} (\hat{\rho}_i(Z_i) - D_{i-1}^T z_{i-1} - K_i z_i) \quad (4.33)$$

avec $K_i = K_i^T > 0$.

Remarque 4.3 : Notons que le vecteur Z_i dépend de la dérivée de la commande virtuelle (i.e. $\dot{\alpha}_{i-1}$). Comme cette dernière n'est pas mesurable, on propose une estimation équivalente, comme suit : $\dot{\alpha}_{i-1} \approx \frac{\lambda}{p+\lambda} [\dot{\alpha}_{i-1}] = \lambda \alpha_{i-1} - \frac{\lambda}{p+\lambda} [\lambda \alpha_{i-1}] = \lambda \alpha_{i-1} - \lambda \alpha_{(i-1)f}$, avec λ étant un paramètre strictement positif et $\frac{\lambda}{p+\lambda}$ un filtre passe-bas. Il est important de souligner que le paramètre λ doit être sélectionné grand, afin d'avoir $\dot{\alpha}_{i-1} \approx \frac{\lambda}{p+\lambda} [\dot{\alpha}_{i-1}]$.

En remplaçant (4.33) et (4.32) dans (4.30), \dot{V}_i^* devient :

$$\dot{V}_i^* = -z_i^T K_i z_i + z_i^T D_i z_{i+1} - z_{i-1}^T D_{i-1} z_i - z_i^T \theta_i^{*T} \psi_i(Z_i) - z_i^T \varepsilon_i(Z_i) + z_i^T \hat{\theta}_i^T \psi_i(Z_i) \quad (4.34)$$

En utilisant l'inégalité $-z_i^T \varepsilon_i(Z_i) \leq \frac{1}{2} \|\varepsilon_i\|^2 + \frac{1}{2} \|z_i\|^2$, il en résulte :

$$\dot{V}_i^* \leq -z_i^T K_i z_i - z_{i-1}^T D_{i-1} z_i + z_i^T D_i z_{i+1} + z_i^T \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_i) + \frac{1}{2} \|\varepsilon_i\|^2 + \frac{1}{2} \|z_i\|^2 \quad (4.35)$$

où $\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_i - \theta_i^*$. Les paramètres idéaux constants et inconnues θ_i^* seront estimés en ligne par $\hat{\theta}_i$.

En considérant $\tilde{\theta}_i$ dans la fonction candidate de Lyapunov précédente, on obtient :

$$V_i = V_{i-1} + V_i^* + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\theta}_i^T \Lambda_i^{-1} \tilde{\theta}_i) \quad (4.36)$$

avec $\Lambda_i^{-1} > 0$.

Différenciation par rapport au temps de (4.36) et la substitution de l'expression (4.35) permettent d'avoir :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1} + \dot{V}_i^* + \text{tr}(\tilde{\theta}_i^T \Lambda_i^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_i) \\ &\leq -\sum_{j=1}^i z_j^T \left(K_j - \frac{1}{2} I_{m \times m} \right) z_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \|\varepsilon_j\|^2 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\theta_j^*\|^2 + z_i^T D_i z_{i+1} + z_i^T \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_i) + \text{tr}(\tilde{\theta}_i^T \Lambda_i^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_i) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Choisissons une loi d'adaptation pour $\hat{\theta}_i$ comme suit :

$$\dot{\hat{\theta}}_i = -\Lambda_i (\psi_i(Z_i) z_i^T + \sigma_{mi} \hat{\theta}_i) \quad (4.38)$$

avec $\sigma_{mi} > 0$ un petit scalaire de conception.

En utilisant :

$$-\text{tr}(\tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_i) z_i^T) = -z_i^T \tilde{\theta}_i^T \psi_i(Z_i), \quad (4.39)$$

$$2\text{tr}(\tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i) \geq \|\dot{\tilde{\theta}}_i\|^2 - \|\theta_i^*\|^2 \quad (4.40)$$

nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -\sum_{j=1}^i z_j^T \left(K_j - \frac{1}{2} I_{m \times m} \right) z_j - \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 + z_i^T D_i z_{i+1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \|\varepsilon_j\|^2 + \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\theta_j^*\|^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

avec $\left(K_j - \frac{1}{2} I_{m \times m} \right) > 0$.

Etape n : Définissons la variable d'erreur suivante :

$$z_n = x_n - \alpha_{n-1} \quad (4.42)$$

A partir de (4.1) et (4.42), la dynamique de z_n est :

$$\dot{z}_n = F_n(\bar{x}_n) + G_n(\bar{x}_{n-1})\Phi(u) - \dot{\alpha}_{n-1} \quad (4.43)$$

En évoquant le Lemme 1.2, il s'ensuit que :

$$G_{sn}^{-1}(\bar{x}_{n-1})\dot{z}_n = G_{sn}^{-1}(\bar{x}_{n-1})[F_n(\bar{x}_n) - \dot{\alpha}_{n-1}] + D_n T_n(\bar{x}_{n-1})\Phi(u) \quad (4.44)$$

En notant $\bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) = G_{sn}^{-1}(\bar{x}_{n-1})$ et $\bar{F}_n(\bar{x}_n, u) = G_{sn}^{-1}(\bar{x}_{n-1})[F_n(\bar{x}_n) - \dot{\alpha}_{n-1}] + [D_n T_n(\bar{x}_{n-1}) - D_n]\Phi(u)$, (4.44) peut être réécrit comme suit :

$$\bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1})\dot{z}_n = \bar{F}_n(\bar{x}_n, u) + D_n \Phi(u) \quad (4.45)$$

Définissons une nouvelle variable d'erreur σ comme :

$$\sigma = \vartheta_1 z_1 + \vartheta_2 z_2 + \dots + \vartheta_{n-1} z_{n-1} + z_n = \sum_{j=1}^{n-1} \vartheta_j z_j + z_n \quad (4.46)$$

avec $\vartheta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n-1$ étant des constantes de conception.

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_n^* = V_{n-1} + \frac{1}{2\delta} \sigma^T \bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) \sigma \quad (4.47)$$

avec δ étant une constante auxiliaire inconnue satisfaisant l'inégalité suivante :

$$0 < \delta \leq \chi(u_i, u_{limax}, u_{rimax}, u_{li0}, u_{ri0}) \quad (4.48)$$

En prenant la dérivée temporelle de V_n^* , il vient :

$$\dot{V}_n^* = \dot{V}_{n-1} + \frac{1}{\delta} \sigma^T \bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) \dot{\sigma} + \frac{1}{2\delta} \sigma^T \dot{\bar{G}}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) \sigma \quad (4.49)$$

En multipliant les deux membres de (4.45) par $\frac{1}{\delta} \sigma^T$, il en résulte :

$$\frac{1}{\delta} \sigma^T \bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) \dot{z}_n = \frac{1}{\delta} \sigma^T \bar{F}_n(\bar{x}_n, u) + \frac{1}{\delta} \sigma^T D_n \Phi(u) \quad (4.50)$$

A partir de (4.41), (4.49) et (4.46), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_n^* &\leq -\sum_{j=1}^{n-1} z_j^T \left(K_j - \frac{1}{2} I_{m \times m} \right) z_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \|\varepsilon_j\|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\theta_j^*\|^2 \\
 &\quad + z_{n-1}^T D_{n-1} z_n + \frac{1}{\delta} \sigma^T \bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) \dot{\sigma} + \frac{1}{2\delta} \sigma^T \dot{\bar{G}}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) \sigma \\
 &\leq -\sum_{j=1}^{n-1} z_j^T \left(K_j - \frac{1}{2} I_{m \times m} \right) z_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \|\varepsilon_j\|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\theta_j^*\|^2 \\
 &\quad + z_{n-1}^T D_{n-1} z_n + \frac{1}{\delta} \sigma^T \bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) (\sum_{j=1}^{n-1} \vartheta_j \dot{z}_j + \dot{z}_n) \\
 &\quad + \frac{1}{2\delta} \sigma^T \dot{\bar{G}}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) (\sum_{j=1}^{n-1} \vartheta_j z_j + z_n)
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

A partir de (4.46), il vient :

$$z_n = \sigma - \vartheta_1 z_1 - \vartheta_2 z_2 - \dots - \vartheta_{n-1} z_{n-1} = \sigma - \sum_{j=1}^{n-1} \vartheta_j z_j \tag{4.52}$$

L'insertion (4.52) dans (4.51) donne :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_n^* &\leq -\sum_{j=1}^{n-1} z_j^T \left(K_j - \frac{1}{2} I_{m \times m} \right) z_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \|\varepsilon_j\|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\theta_j^*\|^2 \\
 &\quad + z_{n-1}^T D_{n-1} \sigma - z_{n-1}^T D_{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \vartheta_j z_j + \frac{1}{\delta} \sigma^T \bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) \sum_{j=1}^{n-1} \vartheta_j \dot{z}_j \\
 &\quad + \frac{1}{\delta} \sigma^T \bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) \dot{z}_n + \frac{1}{2\delta} \sigma^T \dot{\bar{G}}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) \sigma
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Définissons une matrice Q comme :

$$Q = \begin{bmatrix} K_1 - \frac{1}{2} I_{m \times m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 - \frac{1}{2} I_{m \times m} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vartheta_1 D_{n-1} & \vartheta_2 D_{n-1} & \dots & \vartheta_{n-1} D_{n-1} + K_{n-1} - \frac{1}{2} I_{m \times m} \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

où K_1, K_2, \dots, K_{n-1} et ϑ_j doivent être convenablement choisis tels que $Q > 0$.

En utilisant (4.50), (4.53) et (4.54), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_n^* &\leq -[z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_{n-1}^T] Q [z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_{n-1}^T]^T + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \|\varepsilon_j\|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\theta_j^*\|^2 + \frac{1}{\delta} \sigma^T D_n \Phi(u) + \frac{1}{\delta} \sigma^T \bar{F}_n(\bar{x}_n, u) + \sigma^T D_{n-1}^T z_{n-1} \\
 &\quad + \frac{1}{\delta} \sigma^T \bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) \sum_{j=1}^{n-1} \vartheta_j \dot{z}_j + \frac{1}{2\delta} \sigma^T \dot{\bar{G}}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) \sigma
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Nous dénotons :

$$\begin{aligned}
 \rho_n(Z_n) &= [\rho_{n1}(Z_{n1}), \dots, \rho_{nm}(Z_{nm})]^T \\
 &= -\frac{1}{\delta} \left(\delta D_{n-1}^T z_{n-1} + \bar{F}_n(\bar{x}_n, u) + \bar{G}_{sn}(\bar{x}_n) \sum_{j=1}^{n-1} \vartheta_j \dot{z}_j + \frac{1}{2} \dot{\bar{G}}_{sn}(\bar{x}_n) \sigma \right)
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

avec $Z_n = [\bar{x}_n^T, z_n^T, u^T, \dot{\alpha}_1^T, \dots, \dot{\alpha}_{n-1}^T]^T$.

Les fonctions non linéaires $\rho_{nj}(Z_{nj})$ avec $j = 1, \dots, m$ ont comme argument d'entrée :

$$\begin{aligned} Z_{n1} &= [\bar{x}_n^T, z_n^T, u_2, \dots, u_m, \dot{\alpha}_1^T, \dots, \dot{\alpha}_{n-1}^T]^T, \\ Z_{n2} &= [\bar{x}_n^T, z_n^T, u_3, \dots, u_m, \dot{\alpha}_1^T, \dots, \dot{\alpha}_{n-1}^T]^T, \\ &\vdots \\ Z_{nm} &= [\bar{x}_n^T, z_n^T, \dot{\alpha}_1^T, \dots, \dot{\alpha}_{n-1}^T]^T. \end{aligned}$$

La fonction non linéaire incertaine $\rho_n(Z_n)$ sera approximée en ligne, par le système flou (1.42), comme suit :

$$\hat{\rho}_n(Z_n) = \hat{\theta}_n^T \psi_n(Z_n) \quad (4.57)$$

avec $\hat{\theta}_n = \text{diag} \{ \hat{\theta}_{n1}, \hat{\theta}_{n2}, \dots, \hat{\theta}_{nm} \}$ et $\psi_n(Z_n) = [\psi_{n1}^T(Z_n), \dots, \psi_{nm}^T(Z_n)]^T$. Le système flou adaptatif $\hat{\theta}_n^T \psi_n(Z_n)$ estimera son correspondant optimal inconnu $\theta_n^{*T} \psi_n(Z_n)$ défini par :

$$\rho_n(Z_n) = \theta_n^{*T} \psi_n(Z_n) + \varepsilon_n(Z_n) \quad (4.58)$$

avec $\varepsilon_n(Z_n)$ étant l'erreur d'approximation floue, supposée bornée et inconnue.

En invoquant (4.56)-(4.58), (4.55) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_n^* &\leq -[z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_{n-1}^T] Q [z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_{n-1}^T]^T + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \|\varepsilon_j\|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\theta_j^*\|^2 - \sigma^T \theta_n^{*T} \psi_n(Z_n) - \sigma^T \varepsilon_n(Z_n) + \frac{1}{\delta} \sigma^T D_n \Phi(u) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Posons $S = [S_1, S_2, \dots, S_m]^T = D_n^T \sigma$.

Finalement, nous concevons la commande floue adaptative à structure variable comme suit :

$$u_i = \begin{cases} -\frac{S_i}{\|S\|^2} (\sigma^T \Gamma \sigma + \|\sigma^T\| \|\hat{\theta}_n^T \psi(Z_n)\| + \pi) + u_{ri0} & \text{si } S_i < 0 \\ 0 & \text{si } S_i = 0 \\ -\frac{S_i}{\|S\|^2} (\sigma^T \Gamma \sigma + \|\sigma^T\| \|\hat{\theta}_n^T \psi(Z_n)\| + \pi) + u_{li0} & \text{si } S_i > 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

où $\pi > 0$ est une constante de conception, $\Gamma = \Gamma^T > 0$ est une matrice définie positive de dimension appropriée, u_{ri0} et u_{li0} sont les paramètres de la zone morte.

4.3.1 Analyse de la stabilité

Le lemme suivant sera employé par la suite dans l'analyse de stabilité.

Lemme 4.1 : Supposons que la non-linéarité de l'actionneur $\Phi(u)$ satisfait les Hypothèses 4.2 et 4.3, et si la loi de commande est conçue comme (4.60), nous avons :

$$\sigma^T(t)D_n\Phi(u) \leq -\delta(\sigma^T\Gamma\sigma + \|\sigma^T\| \|\hat{\theta}_n^T\psi(Z_n)\| + \pi) \quad (4.61)$$

Preuve du Lemme 4.1 : A partir de (4.2) et (4.60), si $u_i > u_{r_{i0}}$, on devrait avoir $S_i(t) < 0$ et donc :

$$\begin{aligned} (u_i - u_{r_{i0}})\Phi(u_i) &= -\frac{S_i}{\|S\|^2} (\sigma^T\Gamma\sigma + \|\sigma^T\| \|\hat{\theta}_n^T\psi(Z_n)\| + \pi)\Phi(u_i) \\ &\geq \delta(u_i - u_{r_{i0}})^2 \\ &= \delta \left(\frac{S_i}{\|S\|^2} (\sigma^T\Gamma\sigma + \|\sigma^T\| \|\hat{\theta}_n^T\psi(Z_n)\| + \pi) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.62)$$

et le cas $u_i < u_{l_{i0}}$ implique $S_i(t) > 0$, et donc, nous avons :

$$\begin{aligned} (u_i - u_{l_{i0}})\Phi(u_i) &= -\frac{S_i}{\|S\|^2} (\sigma^T\Gamma\sigma + \|\sigma^T\| \|\hat{\theta}_n^T\psi(Z_n)\| + \pi)\Phi(u_i) \\ &\geq \delta(u_i - u_{l_{i0}})^2 \\ &= \delta \left(\frac{S_i}{\|S\|^2} (\sigma^T\Gamma\sigma + \|\sigma^T\| \|\hat{\theta}_n^T\psi(Z_n)\| + \pi) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Considérant (4.62) et (4.63) rendements :

$$S_i\Phi(u_i) \leq -\delta \frac{S_i^2}{\|S\|^2} (\sigma^T\Gamma\sigma + \|\sigma^T\| \|\hat{\theta}_n^T\psi(Z_n)\| + \pi), \text{ pour } i = 1, \dots, m \quad (4.64)$$

Par conséquent, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sigma^T D_n \Phi(u) = \sum_{i=1}^m S_i \Phi(u_i) \leq -\delta (\sigma^T \Gamma \sigma + \|\sigma^T\| \|\hat{\theta}_n^T \psi(Z_n)\| + \pi) \quad (4.65)$$

Ainsi, ceci termine la démonstration du Lemme 4.1.

La substitution de l'expression (4.61) dans (4.59) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_n^* &\leq -[z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_{n-1}^T] Q [z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_{n-1}^T]^T + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \|\varepsilon_j\|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\theta_j^*\|^2 - \sigma^T \Gamma \sigma + \sigma^T \tilde{\theta}_n^T \psi(Z_n) - \sigma^T \varepsilon_n(Z_n) \end{aligned} \quad (4.66)$$

En utilisant l'inégalité $-\sigma^T \varepsilon_n(Z_n) \leq \frac{1}{2} \|\varepsilon_n\|^2 + \frac{1}{2} \|\sigma\|^2$, (4.66) peut être réécrit comme :

$$\begin{aligned} \dot{V}_n^* &\leq -[z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_{n-1}^T] Q [z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_{n-1}^T]^T + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \|\varepsilon_j\|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\theta_j^*\|^2 - \sigma^T \left(\Gamma - \frac{1}{2} I_{m \times m} \right) \sigma + \sigma^T \tilde{\theta}_n^T \psi(Z_n) \end{aligned} \quad (4.67)$$

où $\tilde{\theta}_n = \hat{\theta}_n - \theta_n^*$.

En introduisant $\tilde{\theta}_n$ dans la fonction candidate de Lyapunov précédente, on obtient :

$$V_n = V_n^* + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\theta}_n^T \Lambda_n^{-1} \tilde{\theta}_n) \quad (4.68)$$

où $\Lambda_n^{-1} > 0$.

En différenciant par rapport au temps V_n et puis en utilisant (4.67), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \dot{V}_n^* + \text{tr}(\tilde{\theta}_n^T \Lambda_n^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_n) \\ &\leq -[z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_{n-1}^T] Q [z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_{n-1}^T]^T + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \|\varepsilon_j\|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\theta_j^*\|^2 - \sigma^T \left(\Gamma - \frac{1}{2} I_{m \times m} \right) \sigma + \sigma^T \tilde{\theta}_n^T \psi(Z_n) + \text{tr}(\tilde{\theta}_n^T \Lambda_n^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_n) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Choisissons la loi d'adaptation pour $\hat{\theta}_n$ comme suit :

$$\dot{\hat{\theta}}_n = -\Lambda_n (\psi_n(Z_n) \sigma^T + \sigma_{mn} \theta_n) \quad (4.70)$$

où $\sigma_{mn} > 0$ est un petit scalaire de conception.

Il est clair que [HAD16] :

$$-\text{tr}(\tilde{\theta}_n^T \psi_n(Z_n) \sigma^T) = -\sigma^T \tilde{\theta}_n^T \psi_n(Z_n) \quad (4.71)$$

$$2\text{tr}(\tilde{\theta}_n^T \hat{\theta}_n) \geq \|\tilde{\theta}_n\|^2 - \|\theta_n^*\|^2 \quad (4.72)$$

En utilisant (4.70)-(4.72), (4.69) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -[z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_{n-1}^T] Q [z_1^T \quad z_2^T \quad \dots \quad z_{n-1}^T]^T - \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \|\varepsilon_j\|^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\theta_j^*\|^2 \\ &\leq -\kappa V_n + \mu \end{aligned} \quad (4.73)$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa &= \min \left\{ \min_j \left(\frac{2\lambda_{\min}(Q)}{\sigma_{\max}(\bar{G}_{sj}(\bar{x}_{j-1}))} \right), \min_j \left(\frac{2\delta\lambda_{\min}(\Gamma - \frac{1}{2}I_m)}{\sigma_{\max}(\bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1}))} \right), \min_j \left(\frac{\sigma_{mj}}{\lambda_{\max}(\Lambda_j^{-1})} \right) \right\}, \\ \mu &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \|\bar{\varepsilon}_j\|^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{mj}}{2} \|\theta_j^*\|^2 \end{aligned} \quad (4.74)$$

où $\sigma_{\max}(\bar{G}_{sj}(\bar{x}_{j-1}))$, pour $j = 1, \dots, n-1$ et $\sigma_{\max}(\bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1}))$ doivent satisfaire les relations suivantes :

$$X^T \bar{G}_{sj}(\bar{x}_{j-1}) X \leq \sigma_{\max}(\bar{G}_{sj}(\bar{x}_{j-1})) X^T I_m X, \text{ pour } j = 1, \dots, n-1$$

$$X^T \bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1}) X \leq \sigma_{\max}(\bar{G}_{sn}(\bar{x}_{n-1})) X^T I_m X$$

où $X \in R^m$.

Le Théorème suivant résume les résultats fondamentaux proposés.

Théorème 4.1 : *Pour le système non linéaire multivariable incertain (4.1), caractérisé par une forme strict-feedback et soumis à la fois à une zone-morte et à une saturation à l'entrée. Si les Hypothèses 4.1-4.3 sont valides, la loi de commande proposée (4.60) et ses lois d'adaptation (4.20), (4.38) et (4.70) peuvent garantir que tous les signaux du système de commande en boucle fermée, i.e. $z_1, z_2, \dots, z_n, \sigma$ et $\tilde{\theta}_j, j = 1, 2, \dots, n$, sont SGUUB. De plus, les erreurs de poursuite z_1 peuvent converger vers l'ensemble compact ajustable suivant :*

$$\Omega_{zs} = \left\{ z_1 \in R^m \mid \|z_1\| \leq \sqrt{\left(\frac{2}{\sigma_{\min}(\bar{G}_{s1})}\right) (V_n(0) + \mu/\kappa)} \right\},$$

où μ et κ sont définis par (4.74).

Preuve du Théorème 4.1 : En multipliant (4.73) par $e^{\kappa t}$, on obtient :

$$\frac{d}{dt} (V_n e^{\kappa t}) \leq \mu e^{\kappa t} \quad (4.75)$$

En intégrant (4.75) de 0 à t , il vient :

$$0 \leq V_n \leq \frac{\mu}{\kappa} + \left(V_n(0) - \frac{\mu}{\kappa} \right) e^{-\kappa t} \leq V_n(0) + \frac{\mu}{\kappa} \quad (4.76)$$

Ainsi, d'après (4.76) et (4.68), on peut conclure que tous les signaux du système en BF sont SGUUB et que les erreurs de poursuite convergent asymptotiquement vers un petit voisinage ajustable autour de zéro :

$$\|z_1\| \leq \sqrt{\left(\frac{2}{\sigma_{\min}(\bar{G}_{s1})}\right) (V_n(0) + \mu/\kappa)} \quad (4.77)$$

De même, les bornes de z_j et $\tilde{\theta}_i$, pour $j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, n$ peuvent être facilement établies. Ceci complète la preuve du Théorème 4.1.

Pour résumer, la Figure 4.2 montre le schéma proposé de la commande floue adaptative à structure variable.

Remarque 4.4 : D'après le Théorème 4.1 et les équations (4.73), (4.74) et (4.77), il est clair qu'en choisissant convenablement les paramètres de conception (à savoir, $\sigma_{mj}, \Lambda_j, K_i$ et Γ), les erreurs de poursuite z_1 convergeront vers un petit voisinage de l'origine. En effet, ces erreurs peuvent être ajustées et diminuées, en augmentant le paramètre κ (i.e. en augmentant $\lambda_{\min}(\Lambda_j), \lambda_{\min}(K_i)$ et $\lambda_{\min}(\Gamma)$) et en diminuant le paramètre μ (i.e. en

réduisant les valeurs de σ_{mj}). Cependant, les signaux de commande générés peuvent avoir une grande amplitude, si κ est choisi suffisamment grand. Par conséquent, un compromis est toujours recherché entre l'admissibilité du signal de commande et la qualité de performances de poursuite

Remarque 4.5 : Même si la classe de systèmes MIMO considérée dans ce chapitre et celle de [CHE10] sont différentes, pour mettre clairement en évidence nos contributions, une étude comparative théorique entre les deux méthodologies de commande est donnée dans le Tableau 4.1.

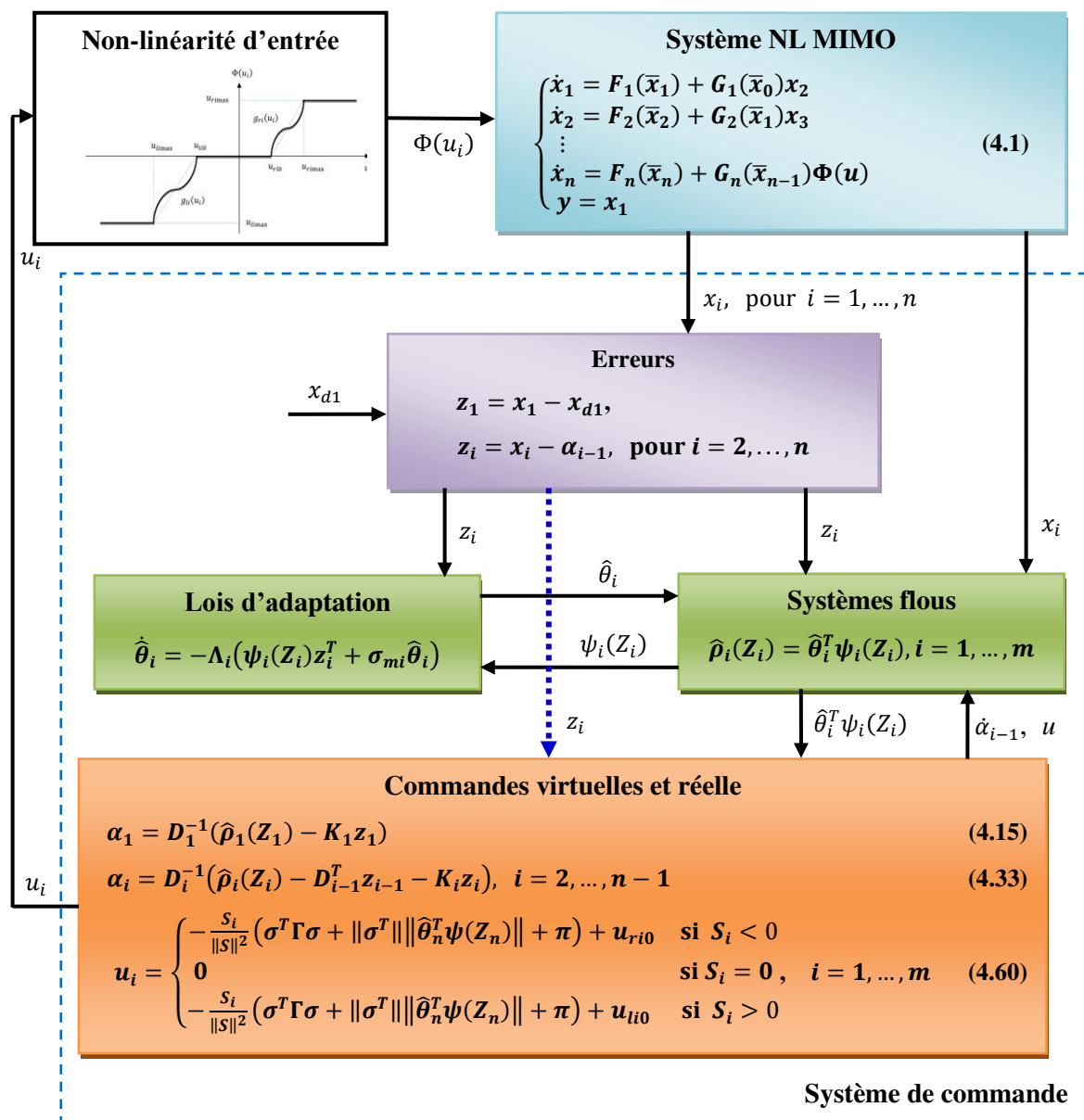


Figure 4.2 : Schéma de la commande floue adaptative à structure variable.

<i>Comparison</i>	<i>Notre contrôleur</i>	<i>Contrôleur proposé dans [CHE10a]</i>
<i>La classe de systèmes MIMO considérée</i>	$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(\bar{x}_1) + G_1(\bar{x}_0)x_2 \\ \dot{x}_2 = F_2(\bar{x}_2) + G_2(\bar{x}_1)x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = F_n(\bar{x}_n) + G_n(\bar{x}_{n-1})\Phi(u) \\ y = x_1 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1) + G_1(x_1)x_2 + D_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_i = F_i(\bar{x}_i) + G_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + D_i \\ \vdots \\ \dot{x}_n = F_n(\bar{x}_n) + G_n(\bar{x}_n)\Phi(u) + D_n \\ y = x_1 \end{cases}$
<i>Type de non-linéarités d'entrée</i>	Saturation et zone-morte	Saturation et zone-morte
<i>Hypothèses faites</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1- Tous les vecteurs d'état sont mesurables. 2- $F_i(x_i)$ et $G_i(x_{i-1})$ sont inconnus, à l'exception des signes des mineurs principaux de G_i. 3- Les matrices $G_i(x_{i-1})$ peuvent être non symétriques et indéfinies (i.e. avec des mineurs principaux non nuls). 	<ol style="list-style-type: none"> 1- Tous les vecteurs d'état sont mesurables. 2- $F_i(x_i)$ et $G_i(x_i)$ sont inconnus. Mais les matrices $G_i(x_i)$ sont toutes définies positives et symétriques. 3- Les termes de perturbation, $D_i(\bar{x}_i, t)$, sont bornés par certaines fonctions connues a priori.
<i>Les caractéristiques de chaque schéma de contrôle proposé</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1- Le schéma de commande est valable pour G_i DP, ou DN, voire indéfinie et non symétrique. 2- Les lois de commande virtuelle sont lisses. 3- La loi de commande est assez simple. 4- Le schéma de commande adaptative peut être considéré comme un schéma direct. Donc, il est simple et tout à fait adapté aux applications industrielles. 	<ol style="list-style-type: none"> 1- Le système de commande est valable uniquement pour un système avec des G_i DPS. 2- Les lois de commande virtuelle ne sont pas lisses. Ainsi, le contrôleur conçu est discutable. Rappelons que dans un concept de backstepping, les lois de commande virtuelle doivent être dérivables. 3- La commande est complexe, comme des fonctions matricielles incertaines à estimer à chaque étape. 4- Le schéma de commande adaptative est un schéma de type indirect. Donc, il ne convient pas tout à fait aux applications industrielles, en raison de sa structure complexe.

Tableau 4.1 : Comparaison entre notre contrôleur et celui proposé dans [CHE10a].

4.4 Résultats de simulation

Dans un cadre de simulation numérique, la commande proposée est appliquée aux modèles de deux systèmes MIMO, à savoir : un robot manipulateur à deux degrés de liberté et un hélicoptère de laboratoire CE150.

4.4.1 Exemple 1 : Robot manipulateur à deux degrés de liberté

Considérons un robot manipulateur à deux degrés de liberté qui se déplace dans un plan horizontal (Figure 4.3). Son modèle dynamique est donné par [BOU10a, BOU10b] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = \tau \quad (4.78)$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \Phi(u_1) \\ \Phi(u_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \right\}$$

où $M_{11} = a_1 + 2a_3 \cos(q_2) + 2a_4 \sin(q_2)$, $M_{22} = a_2$, $M_{21} = M_{12} = a_2 + a_3 \cos(q_2) + a_4 \sin(q_2)$ et $h = a_3 \cos(q_2) + a_4 \sin(q_2)$, avec $a_1 = I_1 + m_1 l_{cl}^2 + I_e + m_e l_{ce}^2 + m_e l_1^2$, $a_2 = I_e + m_e l_{ce}^2$, $a_3 = m_e l_1 l_{ce} \cos(\delta_e)$ et $a_4 = m_e l_1 l_{ce} \sin(\delta_e)$.

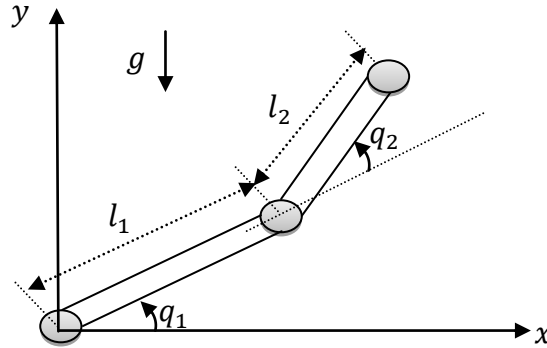


Figure 4.3 : Robot manipulateur à deux degrés de liberté.

Soit $x = [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2]^T$ le vecteur d'état, y_1 et y_2 sont les sorties du système, u_1 et u_2 sont les entrées de commande, $\Phi(u_i)$, pour $i = 1, 2$, représentent les non-linéarités de l'actionneur (i.e. zone morte avec saturation). Les valeurs des paramètres de ce robot sont: $l_{cl} = 0.5(m)$, $l_{ce} = 0.6(m)$, $l_1 = 1(m)$, $I_1 = 0,12$, $I_e = 0.25$, $m_1 = 1(kg)$, $m_e = 2(kg)$, $g = 9.81 (m/s^2)$ et $\delta_e = 30^\circ$ [BOU10a, BOU10b].

Sa représentation dans l'espace d'états est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{q} = M^{-1}(q)[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q}] \end{cases} \quad (4.79)$$

En ajoutant les non-linéarités de l'actionneur et en écrivant le système (4.79) sous la forme (4.1), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(\bar{x}_1) + G_1(\bar{x}_0)x_2 \\ \dot{x}_2 = F_2(\bar{x}_2) + G_2(\bar{x}_1)\Phi(u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.80)$$

où $x_1 = \bar{x}_1 = [q_1, q_2]^T$, $x_2 = [\dot{q}_1, \dot{q}_2]^T$, $\bar{x}_2 = [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2]^T$, $F_1(\bar{x}_1) = 0$, $G_1(\bar{x}_0) = \bar{I}_2$ (où \bar{I}_2 est la matrice identité), $F_2(\bar{x}_2) = \begin{bmatrix} f_{21}(\bar{x}_2) \\ f_{22}(\bar{x}_2) \end{bmatrix} = M^{-1}(\bar{x}_1)[-C(x_1, x_2)x_2]$, $G_2(\bar{x}_1) = \begin{bmatrix} g_{11}^2(\bar{x}_1) & g_{12}^2(\bar{x}_1) \\ g_{21}^2(\bar{x}_1) & g_{22}^2(\bar{x}_1) \end{bmatrix} = M^{-1}(\bar{x}_1)$, et $\Phi(u) = [\Phi(u_1), \Phi(u_2)]^T$.

L'objectif de commande est de forcer la sortie du système y pour suivre les trajectoires désirées $x_{d1} = [\sin(t), \sin(t)]^T$.

La commande conçue pour le système (4.80) est donnée par :

$$z_1 = x_1 - x_{d1}, \text{ et } z_2 = x_2 - \alpha_1 \quad (4.81)$$

$$\alpha_1 = D_1^{-1}(\hat{\theta}_1^T \psi(Z_1) - K_1 z_1) = D_1^{-1} \left(\begin{bmatrix} \hat{\theta}_{11}^T \psi(Z_{11}) \\ \hat{\theta}_{12}^T \psi(Z_{12}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} \right) \quad (4.82)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = -\Lambda_i(\psi_i(Z_i)z_i^T + \sigma_{mi}\hat{\theta}_i), \text{ pour } i = 1, 2 \quad (4.83)$$

$$u_i = \begin{cases} -\frac{S_i}{\|S\|^2}(\sigma^T \Gamma \sigma + \|\sigma^T\| \|\hat{\theta}_2^T \psi(Z_2)\| + \pi) + u_{ri0} & \text{si } S_i < 0 \\ 0 & \text{si } S_i = 0, \text{ pour } i = 1, 2 \\ -\frac{S_i}{\|S\|^2}(\sigma^T \Gamma \sigma + \|\sigma^T\| \|\hat{\theta}_2^T \psi(Z_2)\| + \pi) + u_{li0} & \text{si } S_i > 0 \end{cases} \quad (4.84)$$

où $\hat{\theta}_2^T \psi(Z_2) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{21}^T \psi(Z_{21}) \\ \hat{\theta}_{22}^T \psi(Z_{22}) \end{bmatrix}$, $\sigma = \vartheta_1 z_1 + z_2$ et $S = D_2^T \sigma$.

Notons que pour ce système $D_1^{-1} = D_1 = I_2$ et $D_2^{-1} = D_2 = I_2$. Pour implémenter notre commande, nous avons besoin de quatre systèmes flous adaptatifs, à savoir : $\hat{\theta}_{11}^T \psi(Z_{11})$, $\hat{\theta}_{12}^T \psi(Z_{12})$, $\hat{\theta}_{21}^T \psi(Z_{21})$ et $\hat{\theta}_{22}^T \psi(Z_{22})$ avec $Z_{11} = [q_1, q_2, \dot{q}_2]^T$, $Z_{12} = [q_1, q_2]^T$, $Z_{21} = [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, u_2]^T$ et $Z_{22} = [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2]^T$. Pour chaque variable d'entrée, nous choisissons trois fonctions d'appartenance (une triangulaire au centre et deux trapézoïdales sur les côtés) uniformément distribuées sur leurs plages respectives sont $[-2, 2]$ pour q_1, q_2, \dot{q}_1 , et \dot{q}_2 , et $[-18, 18]$ pour u_2 .

Les paramètres de conception sont choisis comme suit : $\pi = 1$, $\vartheta_{1i} = 13$, $K_1 = \text{diag}\{3, 2\}$, $\Gamma = \text{diag}\{100, 100\}$, $\Lambda_1 = 10$, $\Lambda_2 = 15$ et $\sigma_{m1} = \sigma_{m2} = 0.1$. La non-linéarité d'entrée non différentiable est choisie comme celle de la Figure 3.1. Les paramètres de la zone morte sont sélectionnés comme suit : $u_{r10} = 3.5$, $u_{r20} = 3$, $u_{l10} = -3$, et $u_{l20} = -3.5$. Quant aux paramètres de la saturation, ils sont : $u_{r1max} = 13$, $u_{r2max} = 7$, $u_{l1max} = -10$, $u_{l2max} = -5$ et $k_{r11} = k_{r21} = 2$, $k_{l11} = k_{l21} = 1$.

Les CI du système sont pris comme suit : $x(0) = [0.5 \ 0.5 \ 0 \ 0]^T$. Les CI des paramètres adaptatifs sont choisis comme suit : $\theta_{11j}(0) = \theta_{12i}(0) = \theta_{21k}(0) = \theta_{22h}(0) = 0.005$.

Les résultats de simulation obtenus sont illustrés par les Figures 4.4-4.8. Les signaux de commande générés sont représentés sur la Figure 4.8. Les performances de poursuite des sorties q_1 et q_2 sont illustrées par les Figures 4.4 et 4.5, respectivement. Les erreurs de poursuite correspondantes sont également indiquées sur les Figures 4.6 et 4.7, respectivement. A partir de ces résultats représentés, il est clair que les trajectoires réelles convergent vers les trajectoires souhaitées et que la stabilité du système en boucle fermée est garantie malgré la présence des non-linéarités de l'actionneur (i.e. la zone-morte d'entrée avec saturation), ainsi que la dynamique incertaine. Les entrées de commande sont également admissibles et bornées, i.e. limitées par leurs bornes physiques inférieure et supérieure.

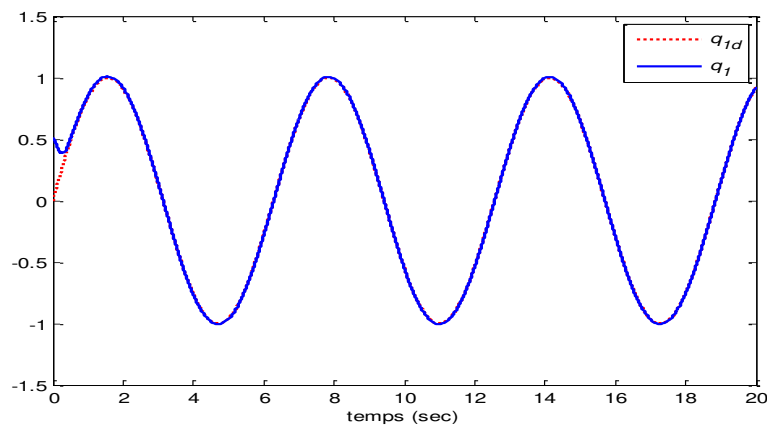


Figure 4.4 : Poursuite de la sortie de la liaison 1.

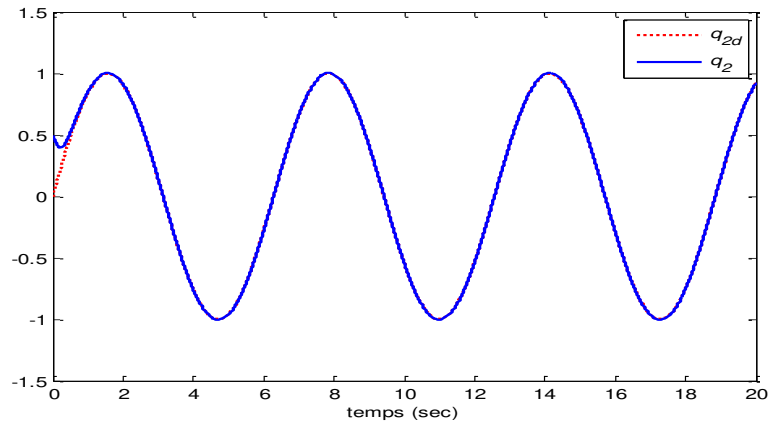


Figure 4.5 : Pursuite de la sortie de la liaison 2.

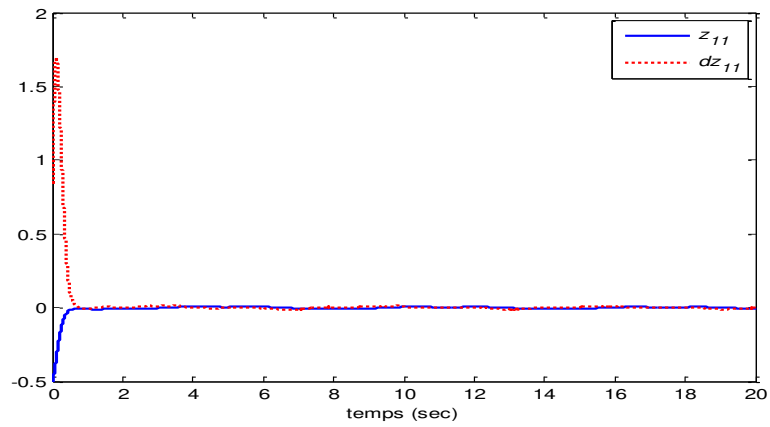


Figure 4.6 : Erreurs de poursuite de la liaison 1.

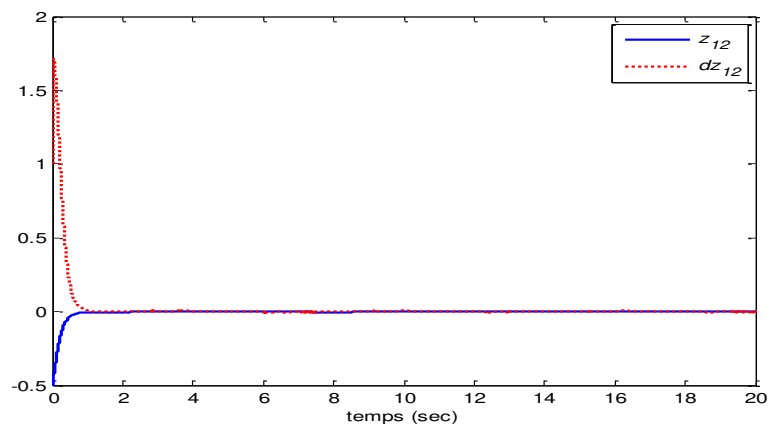


Figure 4.7 : Erreurs de poursuite de la liaison 2.

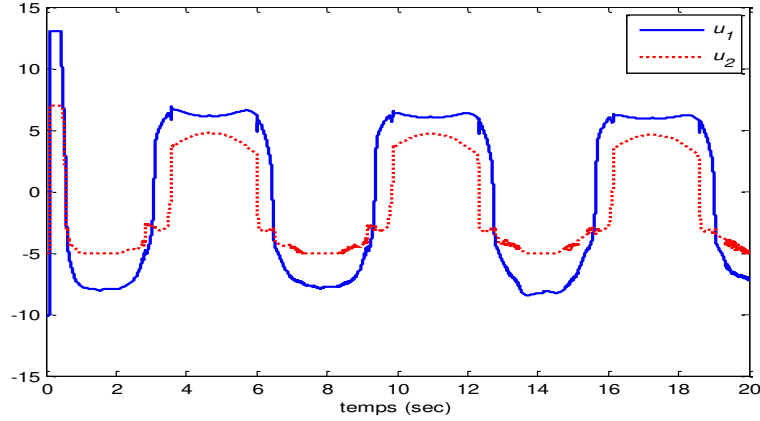


Figure 4.8 : Signaux de commande.

4.4.2 Exemple 2 : Hélicoptère CE150

Considérons un hélicoptère de laboratoire (CE150), illustré sur la Figure 4.9, où l'angle d'élévation θ et l'angle d'azimut ϕ sont commandés respectivement par le rotor principal (u_2) et le rotor secondaire (u_1). Cet hélicoptère est un système MIMO avec une dynamique non linéaire incertaine [HAD16, HAD19]. Son modèle simplifié est donné par :

$$M(\phi, \theta) \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + C(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + G(\phi, \theta) = \tau \quad (4.85)$$

où

$$M(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) I_{l_2}^2 & 0 \\ 0 & I_{l_2} \end{bmatrix}, \quad G(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ mg I_c \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$C(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -\cos \theta \sin \theta \dot{\theta} I_{l_2} & -\cos \theta \sin \theta \dot{\phi} I_{l_2} \\ \cos \theta \sin \theta \dot{\phi} I_{l_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et } \tau = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

avec $I_{l_2} = \frac{m_l (l_1^3 + l_2^3)}{3 (l_1 + l_2)} + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$, et $l_c = (m_l (l_1 - l_2) + m_1 l_1 - m_2 l_2) / m$.

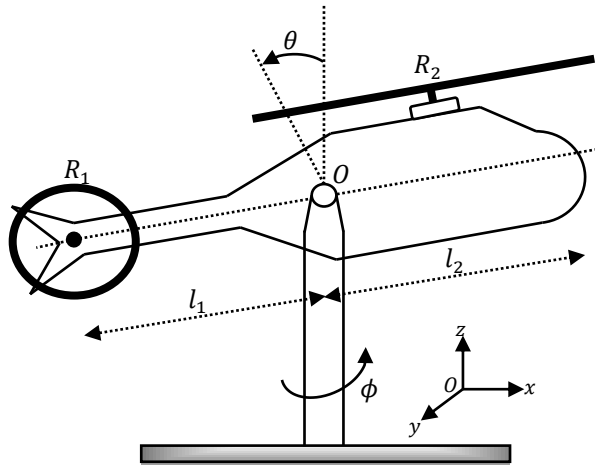


Figure 4.9 : Hélicoptère de laboratoire (CE150).

Le modèle (4.85) peut être écrit sous la forme (4.1) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(\bar{x}_1) + G_1(\bar{x}_0)x_2 \\ \dot{x}_2 = F_2(\bar{x}_2) + G_2(\bar{x}_1)\Phi(u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.86)$$

où $x_1 = \bar{x}_1 = [\phi, \theta]^T$, $x_2 = [\dot{\phi}, \dot{\theta}]^T$, $\bar{x}_2 = [\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}]^T$, $F_1(\bar{x}_1) = 0$, $G_1(\bar{x}_0) = \bar{I}_2$

(où \bar{I}_2 est la matrice identité), $F_2(\bar{x}_2) = \begin{bmatrix} f_{21}(\bar{x}_2) \\ f_{22}(\bar{x}_2) \end{bmatrix} = M^{-1}(x_1)[-C(x_1, x_2)x_2 - G(x_1)]$,

$G_2(\bar{x}_1) = \begin{bmatrix} g_{11}^2(\bar{x}_1) & g_{12}^2(\bar{x}_1) \\ g_{21}^2(\bar{x}_1) & g_{22}^2(\bar{x}_1) \end{bmatrix} = M^{-1}(\bar{x}_1)$ et $\Phi(u) = [\Phi(u_1), \Phi(u_2)]^T$.

Les valeurs des paramètres de cet hélicoptère sont [HAD16, HAD19] : $l_1 = 0.198$ (m), $l_2 = 0.174$ (m), $m_1 = 0.42$ (kg), $m_2 = 0.16$ (kg), $m_l = 0.35$ (kg), $m = m_1 + m_2 + m_l$, et $g = 9.81$ (m/s²).

L'objectif de commande est de forcer la sortie du système $y = x_1 = [\phi, \theta]^T$ pour suivre les trajectoires désirées $x_{d1} = [\sin(t), \sin(t)]^T$. La commande conçue pour ce système est définie comme dans l'exemple précédent, i.e. elle est donnée par les expressions (4.81)-(4.84).

Notons que pour ce système $D_1^{-1} = D_1 = I_2$, et $D_2^{-1} = D_2 = I_2$. Pour implémenter notre commande, nous avons besoin de quatre systèmes flous adaptatifs, à savoir : $\hat{\theta}_{11}^T \psi_{11}(Z_{11})$, $\hat{\theta}_{12}^T \psi_{12}(Z_{12})$, $\hat{\theta}_{21}^T \psi_{21}(Z_{21})$, et $\hat{\theta}_{22}^T \psi_{22}(Z_{22})$, avec $Z_{11} = [\phi, \theta, \dot{\theta}]^T$, $Z_{12} = [\phi, \theta]^T$, $Z_{21} = [\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}, u_2]^T$ et $Z_{22} = [\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}]^T$. Pour chaque variable d'entrée, nous choisissons trois fonctions d'appartenance (une triangulaire au centre et deux trapézoïdales sur les côtés) uniformément distribuées sur leurs plages respectives : sont $[-2, 2]$ pour q_1, q_2, \dot{q}_1 et \dot{q}_2 , et $[-18, 18]$ pour u_2 .

Les paramètres de conception sont choisis comme suit : $\pi = 1$, $\vartheta_{1i} = 15$, $K_1 = \text{diag}\{2.5, 1\}$, $\Gamma = \text{diag}\{150, 150\}$, $\Lambda_1 = 10$, $\Lambda_2 = 15$ et $\sigma_{m1} = \sigma_{m2} = 0.1$. La non-linéarité d'entrée non différentiable est choisie comme celle de la Figure 3.1. Les paramètres de la zone morte sont sélectionnés comme suit : $u_{r10} = 2$, $u_{r20} = 2.5$, $u_{l10} = -3$, $u_{l20} = -4$. Quant aux paramètres de la saturation, ils sont : $u_{r1max} = 10.5$, $u_{r2max} = 3.5$, $u_{l1max} = -10.5$, $u_{l2max} = -3$, $k_{r10} = k_{r11} = 3$, $k_{l10} = k_{l11} = 1$, $k_{r20} = k_{r21} = 3$, et $k_{l20} = k_{l21} = 1$.

Les CI du système sont pris comme suit : $x(0) = [0.5 \ 0.5 \ 0 \ 0]^T$. Les CI des paramètres adaptatifs sont choisis comme suit : $\theta_{11j}(0) = \theta_{12i}(0) = \theta_{21k}(0) = \theta_{22h}(0) = 0.005$.

Pour ce modèle d'hélicoptère, les résultats de simulation obtenus sont présentés sur les Figures 4.10-4.14. Les signaux de commande appliqués sont représentés sur la Figure 4.14. Les performances de poursuite pour les sorties θ et ϕ (i.e. l'élévation et l'azimut) sont illustrées par les Figures 4.10 et 4.11, respectivement. Les erreurs de poursuite correspondantes sont illustrées sur les Figures 4.12 et 4.13, respectivement. A partir de ces résultats de simulation, on peut clairement voir que les erreurs de poursuite convergent vers de petites valeurs, comme déjà prévu dans l'analyse de stabilité, malgré la présence des dynamiques incertaines et des non-linéarités de l'actionneur. Les signaux de commande générés sont admissibles, bornés et restent dans les plages requises.

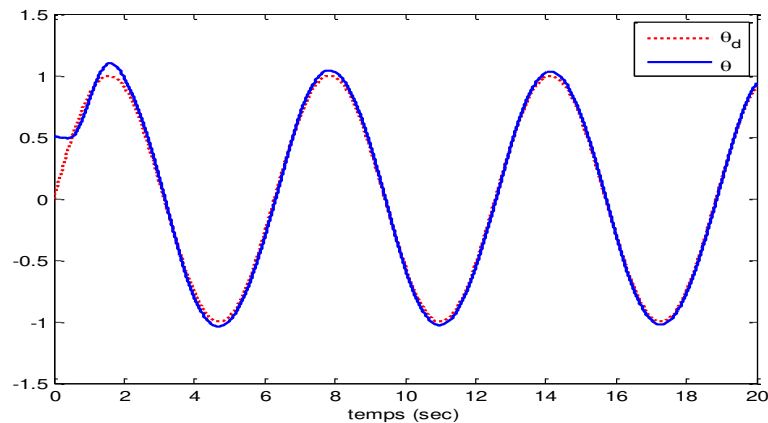


Figure 4.10 : *Trajectoire de l'élévation.*

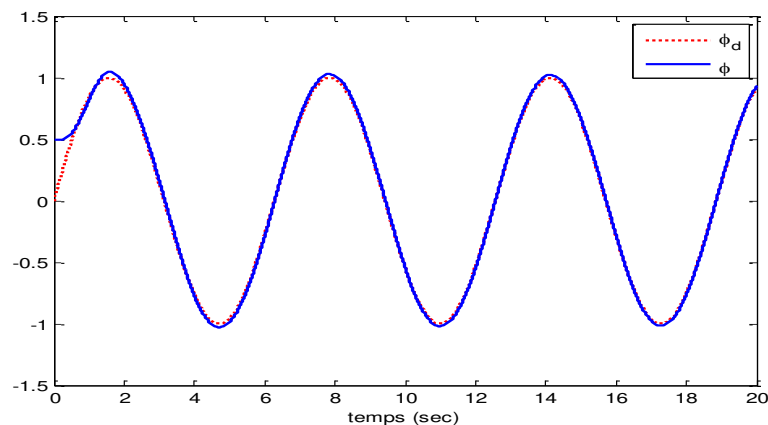


Figure 4.11 : *Trajectoire de l'azimut.*

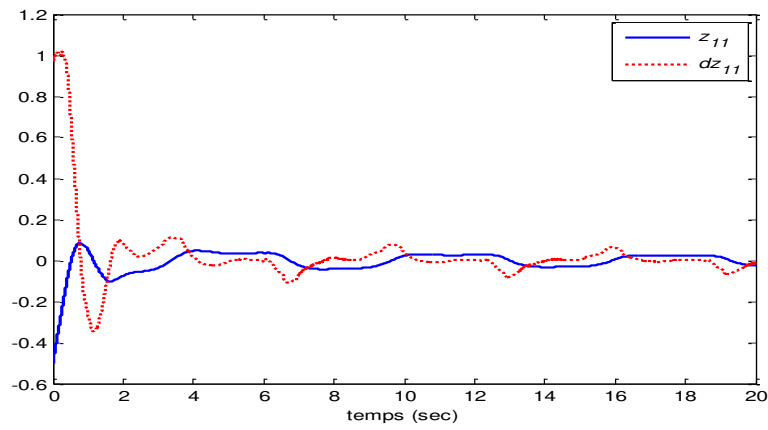


Figure 4.12 : Trajectoire des erreurs de poursuite de l'élévation.

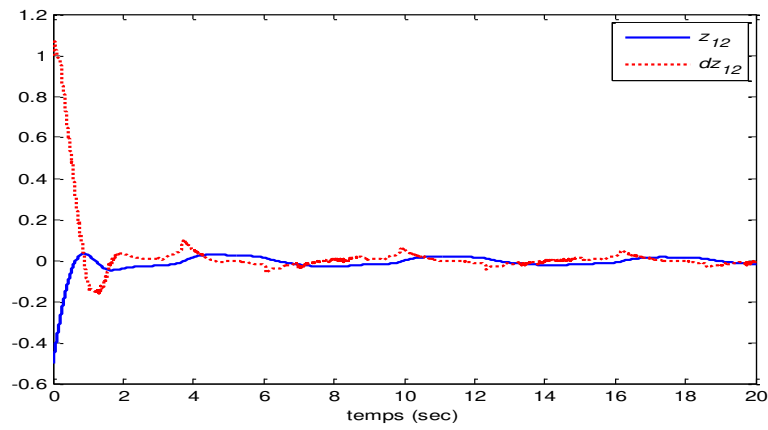


Figure 4.13 : Trajectoire des erreurs de poursuite de l'azimut.

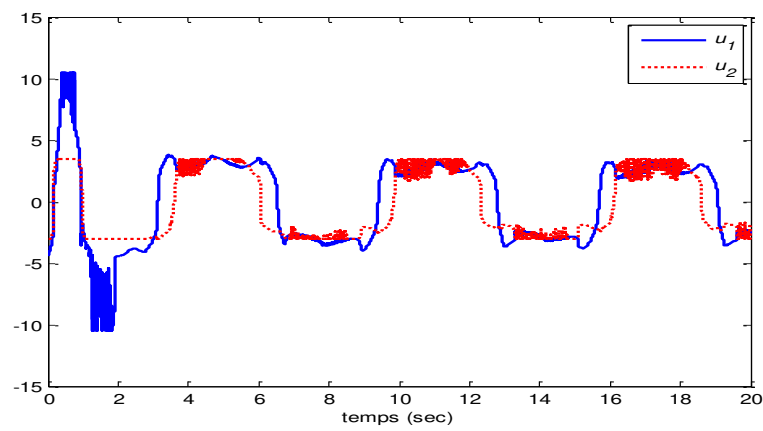


Figure 4.14 : Signaux de commande.

4.5 Conclusion

Ce chapitre a proposé une nouvelle commande floue adaptative à structure variable pour une classe de systèmes multivariables non linéaires incertains avec saturation et zone-morte à l'entrée. Pour résoudre le problème des non-linéarités d'entrée et de la dynamique inconnue du système, on a utilisé respectivement les techniques suivantes : la commande à structure variable et l'approximation des fonctions inconnues par les systèmes flous adaptatifs. Pour faciliter la conception de la commande et l'analyse de la stabilité, une propriété de décomposition matricielle dite SDU a été exploitée pour factoriser les matrices des gains de commande. L'emploi de la deuxième approche de Lyapunov nous a permis de conclure sur la propriété SGUUB de tous les signaux du système en BF ainsi que la convergence des erreurs de poursuite vers un petit voisinage ajustable autour de l'origine. Pour montrer et mettre évidence les performances de la commande proposée, des études de simulation ont été menées sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté et un hélicoptère de laboratoire CE150.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Les travaux de cette thèse portent essentiellement sur deux thèmes majeurs :

- ❖ Développement des commandes adaptatives floues par backstepping pour une classe de systèmes non linéaires monovariables incertains, avec la prise en compte des contraintes d'état ou de sortie, des non-linéarités inhérentes des actionneurs, et des perturbations externes non appariées.
- ❖ Conception d'une commande backstepping adaptative floue pour une classe de systèmes non linéaires multivariables incertains avec des non-linéarités omniprésentes des actionneurs (saturation + zone-morte).

En s'appuyant sur leur propriété d'approximation universelle et leur capacité de manipuler des données numériques aussi bien que linguistiques, les systèmes flous adaptatifs ont été employés tout au long de cette thèse comme des éléments de base pour approcher les fonctions non linéaires inconnues. La conception des commandes proposées, l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée ainsi bien que la dérivation des lois d'adaptation ont été réalisées par une approche combinée de Lyapunov et du backstepping. En effet, par cette méthodologie du backstepping, nous sommes arrivés à concevoir trois lois de commande adaptative floue qui stabilisent trois différentes classes de systèmes non linéaires incertains (i.e. avec trois différentes formes : strict-feedback, nonstrict-feedback et pure-feedback) en présence des contraintes des états (ou de sortie), des non-linéarités omniprésentes des actionneurs et des perturbations externes non appariées. Rappelons que l'idée de la commande backstepping consiste à transformer les systèmes bouclés en sous-systèmes du premier ordre en cascade. C'est une méthode de synthèse multi-étape où, à chaque étape, une loi de commande intermédiaire (appelée aussi fonction stabilisante ou encore commande virtuelle) garantissant la convergence du système vers son état d'équilibre est générée en utilisant une fonction de Lyapunov appropriée. Cette dernière assure ainsi pas à pas la stabilisation de chaque étape de la synthèse.

Dans ce qui suit, nous donnons un résumé des résultats obtenus et des perspectives à notre travail.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté un bref rappel sur les systèmes non linéaires, les systèmes flous, et aussi les outils mathématiques de synthèse et d'analyse indispensables pour la conception des schémas de commande développées dans cette thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié le problème de poursuite de la sortie en temps fini pour une classe de systèmes non linéaires monovariables incertains ayant une forme nonstrict-feedback et étant soumis à des contraintes de sortie, des non-linéarités d'actionneur de type saturation et des perturbations externes non appariées (i.e. des perturbations ne vérifiant pas la condition de recouvrement, unmatched perturbations). En utilisant une fonction barrière de Lyapunov et le concept de la commande à surface dynamique, une nouvelle loi de commande backstepping adaptative floue en temps fini a été proposée. Dans ce schéma de commande, les systèmes flous ont été utilisés pour modéliser en ligne des fonctions non linéaires incertaines. La technique de commande à surface dynamique a été employée pour faire face efficacement au problème d'*explosion de la complexité* intrinsèquement lié à la méthodologie du backstepping. Pour booster la robustesse de la commande proposée, des observateurs de perturbations ont été construits. Via une étude rigoureuse de la stabilité du système en boucle fermé, nous avons démontré que le contrôleur proposé peut réaliser une poursuite pratique en temps fini de la sortie, tout en garantissant la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée et la non violation des contraintes variant dans le temps imposées sur la sortie. Finalement, nous avons montré numériquement les performances de la commande développée sur deux systèmes non linéaires à savoir : un système numérique et un système électromécanique.

Dans le troisième chapitre, nous avons proposé une commande floue adaptive par backstepping pour une classe de systèmes non linéaires monovariables incertains ayant une forme pure-feedback. Cette classe de systèmes est supposée soumise à des contraintes variant dans le temps sur les états, à des non-linéarités inévitables d'actionneur (saturation + zone morte), et à des perturbations externes ne vérifiant pas la condition de recouvrement (matching condition). Pour éviter l'excursion des états du système vers des valeurs indésirables, des fonctions barrières de Lyapunov ont été employées dans la conception de

la commande et l'analyse de la stabilité. Contrairement à plusieurs travaux voisins, ce schéma de commande a rigoureusement résolu le problème dit “*non faisabilité des lois de commande virtuelles*”, intrinsèquement lié à l'utilisation de la fonction barrière de Lyapunov. En effet, notre idée consiste à concevoir des commandes virtuelles bornées dont les bornes sont connues a priori. En concevant un observateur non linéaire de perturbations, les termes incertains ; regroupant les perturbations ; les erreurs d'approximation flous ; les erreurs d'approximation des commandes virtuelles ; et la dérivée des commandes virtuelles, sont robustement compensées et l'explosion de complexité est également évitée. Le schéma proposé assure la convergence de l'erreur de poursuite de sortie vers un voisinage arbitrairement petit de l'origine, la bornitude de tous les signaux du système en BF aussi bien que le non violation des contraintes prédéfinies des états. Cette approche de commande proposée a été testée par simulation, pour résoudre un problème de poursuite de deux systèmes non linéaires, à savoir : un système numérique et un système électromécanique. Le comportement du système de commande pour les deux exemples est tout à fait conforme aux résultats théoriques obtenus.

Dans le dernier chapitre, nous avons développé une commande adaptative floue par backstepping pour une classe de systèmes non linéaires MIMO incertains ayant une forme strict-feedback en présence des non-linéarités inhérentes des actionneurs (saturation + zone morte). Les matrices des gains de commande sont supposées non-symétriques mais avec des mineurs principaux non nuls. Pour simplifier la conception de la commande et l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée, dans chaque étape du backstepping, la matrice des gains de commande est décomposée en trois matrices utiles : une matrice symétrique et définie positive $G_{si}(\cdot)$ qui a été introduite dans la fonction de Lyapunov pour analyser la stabilité, une matrice constante D_i contenant une information utile sur le signe de la matrice originale $G_i(\cdot)$, enfin une matrice triangulaire supérieure avec des uns sur sa diagonale, $T_i(\cdot)$, qui nous permet de faire une synthèse séquentielle des signaux de commande sans avoir le problème de la boucle algébrique. La technique de commande à structure variable (VSC) a été employée pour traiter l'effet de la non-linéarité non-symétrique de type saturation et zone morte. Dans un cadre approprié de simulation numérique, l'approche de commande proposée a été testée avec succès sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté et un modèle d'hélicoptère (CE150).

Bien qu'ils répondent à de multiples problèmes, les résultats fondamentaux proposés dans cette thèse restent perfectibles et ouvrent la voie à de nouveaux axes de recherche. Parmi les directions jugées prometteuses, nous retenons principalement :

- ❖ Dans les stratégies de commande développées dans cette thèse, le vecteur d'état est supposé disponible. En pratique, la mesure de tous les états est généralement impossible à cause de contraintes physiques et/ou du coût élevé des capteurs. Il serait alors intéressant de concevoir des commandes floues adaptatives par backstepping à base d'observateur d'état.
- ❖ Les approches de commande floue adaptative développées dans les chapitres 3 et 4 assurent seulement une convergence en temps infinie, une extension de ces approches pour garantir une convergence rapide en temps fixe (où le temps de convergence ne dépend que d'un paramètre de conception) ou encore en temps fini (où le temps de convergence fini dépend des CI) serait très intéressante.
- ❖ Les approches de commande backstepping floue adaptative, proposées dans les chapitres 2 et 3, sont conçues pour une classe de systèmes non linéaires monovariables incertains. Donc, on peut prévoir leur extension pour des systèmes multivariables incertains.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [APO57] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.
- [AST08] A. Astol, D. Karagiannis, and R. Ortega, *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*, Springer, New York, U.S.A., 2008.
- [BAN10] J. S. Bang, H. Shim, S. K. Park and J. H. Seo, “Robust tracking and vibration suppression for a two-inertia system by combining backstepping approach with disturbance observer,” *IEEE Trans Ind Electron*, Vol. 57, pp. 3197–3206, 2010.
- [BHA00] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Finite Time Stability of Continuous Autonomous Systems,” *SIAM J. Control Optim*, vol.38, 2000, pp 751–766.
- [BOU08a] A. Boulkroune, *Commande floue adaptative avec et sans observateur des systèmes non linéaires incertains*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Polytechnique d’Alger, Algérie, 2008.
- [BOU08b] A. Boulkroune, M. Tadjine, M. M’Saad, and M. Farza, “How to design a fuzzy adaptive control based on observers for uncertain affine nonlinear systems,” *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 159, no. 8, pp. 926–948, 2008.
- [BOU10a] A. Boulkroune, M. M’Saad, and H. Chekireb, “Design of a fuzzy adaptive controller for MIMO nonlinear time-delay systems with unknown actuator nonlinearities and unknown control direction,” *Inf. Sci.*, vol. 180, no. 24, pp. 5041–5059, 2010.
- [BOU10b] A. Boulkroune, M. Tadjine, M. M’Saad, and M. Farza, “Fuzzy adaptive controller for MIMO nonlinear systems with known and unknown control direction,” *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 161, no. 3, pp. 797–820, 2010.
- [BOU11] A. Boulkroune and M. M’Saad, “A fuzzy adaptive variable-structure control scheme for uncertain chaotic MIMO systems with sector nonlinearities and dead-zones,” *Expert Syst. Appl.*, vol. 38, no. 12, pp. 14744–14750, 2011.
- [BOU12] A. Boulkroune, M. M’Saad, et M. Farza, “Fuzzy approximation based indirect adaptive controller for multi-input multi-output non-affine systems with unknown control direction,” *IET Control Theory Appl.*, vol. 6, no. 17, pp. 2619–2629, 2012.

- [BOU14] A. Boulkroune, M. Msaad, and M. Farza, “State and output feedback fuzzy variable-structure controllers for multivariable nonlinear systems subject to input nonlinearities,” *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol. 71, pp. 539–556, 2014.
- [BOU17] A. Boulkroune, M. M’saad, and M. Farza, “Adaptive fuzzy system based variable-structure controller for multivariable non-affine nonlinear uncertain systems subject to actuator nonlinearities,” *Neural Comput. Appl.*, vol. 28, no. 11, pp.3371–3384, 2017.
- [BOU18] A. Boulkroune, L. Merazka, and H. Li, “Fuzzy adaptive state-feedback control scheme of uncertain nonlinear multivariable systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 27, no. 9, pp. 1703-1713, 2018.
- [BOU20] N. Bounar, S. Labdai, A. Boulkroune, M. Farza, and M. M’Saad, “Adaptive Fuzzy Control Scheme for Variable-Speed Wind Turbines Based on a Doubly-Fed Induction Generator,” *Iranian J. of Science and Technology, Trans. of Electrical Engineering*, vol. 44, pp. 629-641, 2020.
- [BUC93] J. Buckley, “Sugeno type controllers are universal controllers,” *Fuzzy sets and Systems*, vol. 53, pp. 299-303, 1993.
- [CAO17] F. Cao and J. Liu, “Vibration control for a rigid-flexible manipulator with full state constraints via Barrier Lyapunov Function,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 406, pp. 237–252, 2017.
- [CHE04] W. H. Chen, “Disturbance observer based control for nonlinear systems,” In *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, vol. 9, no. 4, pp. 706-710, 2004.
- [CHE10a] M. Chen, S. S. Ge, and B. V. E. How, “Robust adaptive neural network control for a class of uncertain MIMO nonlinear systems with input nonlinearities,” *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 21, no. 5, pp. 796–812, 2010.
- [CHE10b] M. Chen and W. H. Chen, “Sliding mode control for a class of uncertain nonlinear system based on disturbance observer,” *Int. J. Adapt. Control Signal Process.*, vol. 24, no. 1, pp. 51–64, Jan. 2010.
- [CHE11] M. Chen, S. S. Ge, and B. B. Ren, “Adaptive tracking control of uncertain MIMO nonlinear systems with input constraints,” *Automatica*, vol. 47, no. 3, pp. 452–465, 2011.
- [CHE15] M. Chen, G. Tao, and B. Jiang, “Dynamic Surface Control Using Neural Networks for a Class of Uncertain Nonlinear Systems With Input Saturation,” in *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 26, no. 9, pp. 2086-2097, Sept. 2015.

- [CHE16] M. Chen and G. Tao, “Adaptive fault-tolerant control of uncertain nonlinear large-scale systems with unknown dead-zone,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 46, no. 8, pp. 1851–1862, 2016.
- [COS03] R. R. Costa, L. Hsu, A. K. Imai, and P. Kokotovic, “Lyapunov-based adaptive control of MIMO systems,” *Automatica*, vol.39, no.7, pp. 1251–1257, 2003.
- [DAW94] D. Dawson, M. James, J. Carroll, and M. Schneider, “Integrator backstepping control of a brush DC motor turning a robotic load,” *IEEE Trans. on Cont. Sysys Tech.*, vol. 2, no. 3, pp. 233–244, 1994.
- [DIN15] S. Ding and W. X. Zheng, “Robust control of multiple integrators subject to input saturation and disturbance,” *International Journal of Control*, vol. 88, no. 4, pp. 844–856, 2015.
- [FAR04] J. Farrell, M. Polycarpou, and M. Sharma, “On-line approximation based control of uncertain nonlinear systems with magnitude, rate and bandwidth constraints on the states and actuators,” In *Proceedings of the American control conference. IEEE, Boston, Ma, USA*, vol. 3, pp. 2557–2562, 2004.
- [FEU78] A. Feurer and A. S. Morse, “Adaptive control of single-input, single-output linear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 23, no. 4, pp. 557–569, 1978.
- [GAM04] A. Gambler, “Multivariable adaptive state-space control: a survey,” In *Proc. of the IEEE 5th Asian cont. conf.*, vol. 1, pp. 185–191, 2004.
- [HAD08] W. M. Haddad, S. G. Nersesov, and D. Liang, “Finite-time stability for time-varying nonlinear dynamical systems,” *Proc. of the ACC 2008 Conference*, Seattle, WA, USA, 2008.
- [HAD14] **M. Haddad**, Commande adaptative floue des systèmes multivariables non linéaires incertains avec des non linéarités à l’entrée. Mémoire de Magister, Université de Jijel, 2014.
- [HAD16] **M. Haddad** and A. Boulkroune, “Adaptive fuzzy system-based variablestructure controller for uncertain MIMO nonlinear systems subject to actuator nonlinearities,” In: *Proceedings of the 8th International Conference on Modelling, Identification And Control (ICMIC), Algiers, Algeria*, pp. 1002–1019, 2016.
- [HAD19] **M. Haddad**, F. Zouari, A. Boulkroune, and S. Hamel, “Variable-structure backstepping controller for multivariable nonlinear systems with actuator nonlinearities based on adaptive fuzzy system,” *Soft Computing*, vol. 23, no. 23, pp.12277–12293, 2019.

- [HAH63] W. Hahn, “Theory and Application of Liapunov’s Direct Method,” *Prentice Hall inc.*, N.J. 1963.
- [HAI86] V. T. Haimo, “Finite Time Controllers,” *SIAM, J. Control Optim.*, 1986, pp. 760–770.
- [HAM16] S. Hamel, A. Boukroune, and A. Bouzeriba, “Function vector synchronization based on fuzzy control for uncertain chaotic systems with dead-zone nonlinearities,” *Complexity*, vol. 21, no. S1, pp. 234–249, 2016.
- [HE14] W. He, S. Zhang, and S. S. Ge, “Adaptive control of a flexible crane system with the boundary output constraint,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 61, pp. 4126–4133, 2014.
- [HED00] J. K. Hedrick and P. P. Yip, “Multiple sliding surface control: theory and application,” *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, vol. 122, no. 4, pp. 586–593, 2000.
- [HSU07] L. Hsu, R. R. Costa, and F. Lizarralde, “Lyapunov/passivity-based adaptive control of relative degree two MIMO systems with an application to visual serving,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 52, no. 2, pp. 364–371, 2007.
- [HU08] Q. L. Hu, G. F. Ma, and L. H. Xie, “Robust and adaptive variable structure output feedback control of uncertain systems with input nonlinearity,” *Automatica*, vol. 44, no. 2, pp. 552–559, 2008.
- [IOA96] P. A. Ioannou and J. Sun, *Robuste Adaptive Control*, Prentice Hall, New-Jersey, 1996.
- [KAN91] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse, “Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 11, pp. 1241–1253, 1991.
- [KHA02] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems, 3rd Edition*. Upper Saddle River, New-Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [KOK89] P. V. Kokotovic and H. J. Sussmann, “A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems,” *Systems and Control Letters*, vol. 13, pp. 125–133, 1989.
- [KRS95] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, New York: Wiley and Sons, 1995.
- [KUL11] A. Kulkarni, “Wavelet based control for a class of delayed nonlinear systems with input constraints,” *Expert. Syst. Appl.*, vol. 38, no. 3, pp. 1993–1998, 2011.

- [LAB05] S. Labiod, Contribution à la Commande Adaptative Floue des Systèmes Non Linéaires. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Polytechnique (ENP) d'Alger, Algérie, 2005.
- [LAB07] S. Labiod, et T. M. Guerra, "Direct adaptive fuzzy control of a class of nonlinear systems with input saturation," *IFAC Proc.*, vol. 40, no. 21, pp. 169–174, 2007.
- [LAI16] G. Lai, Z. Liu, Y. Zhang, and C. P. Chen, "Adaptive fuzzy tracking control of nonlinear systems with asymmetric actuator backlash based on a new smooth inverse," *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 46, no. 6, pp.1250–1262, 2016.
- [LEE11] H. Lee, "Robust adaptive fuzzy control by backstepping for a class of MIMO nonlinear systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 19, no. 2, pp. 265–275, 2011.
- [LI12] Y. Li, S. Tong, T. Li, "Fuzzy adaptive dynamic surface control for a single link flexible joint robot," *Nonlinear Dyn.*, vol. 70, pp. 2035-2048, 2012.
- [LI14a] Y. Li, S. Tong, and T. Li, "Adaptive fuzzy output-feedback control for output constrained nonlinear systems in the presence of input saturation," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 248, pp. 138–155, 2014.
- [LI14b] Y. Li and S. Tong, "Adaptive fuzzy output-feedback control of pure-feedback uncertain nonlinear systems with unknown dead-zone," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 22, no. 5, pp. 1341–1347, 2014.
- [LI15] D. J. Li and D. P. Li, "Adaptive controller design-based neural networks for output constraint continuous stirred tank reactor," *Neurocomputing*, vol. 153, pp. 159–163, Apr. 2015.
- [LI16] Y. Li, S. Tong, and T. Li, "Hybrid fuzzy adaptive output feedback control design for uncertain MIMO nonlinear systems with time-varying delays and input saturation," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 24, pp. 841–853, 2016.
- [LI17] R. Li, M. Chen and Q. Wu, "Adaptive neural tracking control for uncertain nonlinear systems with input and output constraints using disturbance observer," *Neurocomputing*, vol. 235, pp. 27–37, 2017.
- [LI18] Y. Li and Z. Lin, "An asymmetric Lyapunov function for linear systems with asymmetric actuator saturation," *Int. J. Robust Nonlin. Control*, vol. 28, no. 5, pp. 1624–1640, 2018.
- [LI19] H. Li, S. Zhao, and W. He, "Adaptive finite-time tracking control of full state constrained nonlinear systems with dead-zone." *Automatica*, vol. 100, no. 100, pp. 99-107, 2019.

- [LIN06] C. M. Lin, C. F. Hsu, and I. F. Chung, “Intelligent Backstepping Control for Chaotic Systems Using Self-Growing Fuzzy Neural Network,” *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, pp. 299–308, 2006.
- [LIU15] Z. Liu, F. Wang, Y. Zhang, X. Chen, and C. L. P. Chen, “Adaptive tracking control for a class of nonlinear systems with a fuzzy dead-zone input,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 23, no. 1, pp. 193–204, 2015.
- [LIU17a] W. Liu, C. C. Lim, P. Shi, and S. Y. Xu, “Backstepping fuzzy adaptive control for a class of quantized nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol.25, no.5, pp.1090–1101, 2017.
- [LIU17b] Y. J. Liu and S. C. Tong, “Barrier Lyapunov functions for Nussbaum gain adaptive control of full-state constrained nonlinear systems,” *Automatica*, vol. 76, no. 2, pp. 143–152, 2017.
- [LIU19a] W. Liu, Q. Ma, G. Zhou, and J. Zhao, “Adaptive dynamic surface control using disturbance observer for nonlinear systems with input saturation and output constraints,” *International Journal of Systems Science*, vol. 50, no. 9, pp. 1784–1798, 2019.
- [LIU19b] L. Liu, Y. J. Liu, D. Li, and al, “Barrier Lyapunov function-based adaptive fuzzy FTC for switched systems and its applications to resistance-inductance-capacitance circuit system,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 50, no. 8, pp. 3491–3502, 2019.
- [LIU20] C. Liu, H. Wang, X. Liu, and Y. Zhou, “Adaptive fuzzy funnel control for nonlinear systems with input dead-zone and saturation,” *International Journal of Systems Science*, vol. 51, no. 9, pp. 1542–1555, 2020.
- [MEN16] W. Meng, Q. Yang, J. Si, and Y. Sun, “Adaptive neural control of a class of output-constrained non-affine systems,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 46, pp. 85–95, 2016.
- [MI20] Y. Mi, J. Yao, W. Deng, and Y. Xie, “Output feedback control of integrator systems with disturbance and input saturation,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 14, pp. 9330–9350, 2020.
- [MIS21] P. K. Mishra, N. K. Dhar, and N. K. Verma, “Adaptive neural-network control of MIMO nonaffine nonlinear systems with asymmetric time-varying state constraints,” *IEEE Trans. on cybernetics*, vol. 51, no. 4, pp. 2042–2054, 2021.
- [MOR93] A. S. Morse, “A gain matrix decomposition and some its applications,” *Systems and control letter*, vol. 21, pp. 1–10, 1993.
- [MOU03] E. Moulay and W. Perruquetti, “Finite Time Stability of Non Linear Systems,” *In IEEE Conference on Decision and Conl.*, Hawaii, USA, 2003.

- [MOU05] E. Moulay, Une contribution à l'étude de la stabilité en temps fini et de la stabilisation. Thèse de doctorat, université des sciences et technologie de Lille, 2005.
- [NGO05] K. B. Ngo, R. Mahony, and Z. P. Jiang, "Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints," In *Proc. 44th IEEE Conf. Decision & Control*, Seville, Spain, pp. 8306–8312, Dec. 2005.
- [PAR01] J. H. Park, and G. T. Park, "Robust adaptive controller using universal approximators for nonlinear systems under input constraint," In *Proceedings of the international symposium on industrial electronics (ISIE). IEEE, Pusan, South Korea*, vol. 3, pp. 1881–1886, 2001.
- [POL01] M.M. Polycarpou, "Fault accommodation of a class of multivariable nonlinear dynamical systems using a learning approach," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 46, pp. 736–742, 2001.
- [POL03] M. Polycarpou, J. Farrell, and M. Sharma, "On-line approximation control of uncertain nonlinear systems: issues with control input saturation," In *Proceedings of the American control conference, Denver, Colorado, USA*, vol. 1, pp. 543–548, 2003.
- [REN10] B. Ren, S. S. Ge, K. P. Tee, and T. H. Lee, "Adaptive neural control for output-feedback nonlinear systems using a barrier Lyapunov function," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 21, pp. 1339–1345, 2010.
- [SLO91] J. E. Slotine, J. Jacques, and W. P. Li, *Applied nonlinear Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1st edition, 1991.
- [SON98] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. New York: Springer, 2nd ed., 1998.
- [SON11] B. Song and J. Karl Hedrik, *Dynamic Surface Control of Uncertain Nonlinear Systems; An LMI Approach*, Springer-Verlag, 2011.
- [SWA97] D. Swaroop, J. C. Gerdes, P. P. Yip, and J. K. Hedrick, "Dynamic surface control of nonlinear systems," In *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)*, IEEE, vol. 5, pp. 3028–3034, 1997.
- [SWA00] D. Swaroop, J. K. Hedrick, P. P. Yip, and J. C. Gerdes, "Dynamic surface control for a class of nonlinear systems," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 45, no. 10, pp. 1893–1899, 2000.
- [SUI18] S. Sui, S. Tong, and C. L. P. Chen, "Finite-time filter decentralized control for nonstrict-feedback nonlinear large-scale systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 26, no. 6, pp. 3289–3300, 2018.

- [SUI20] S. Sui, C. P. Chen, and S. Tong, “A Novel Adaptive NN Prescribed Performance Control for Stochastic Nonlinear Systems,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020.
- [SUN18a] K. K. Sun, S. H. Mou, J. B. Qiu, T. Wang, and H. J. Gao, “Adaptive fuzzy control for non-triangular structural stochastic switched nonlinear systems with full state constraints,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 27, no. 8, pp. 1587–1601, Nov. 2018.
- [SUN18b] Y. Sun, B. Chen, C. Lin, and H. Wang, “Finite-time adaptive control for a class of nonlinear systems with nonstrict feedback structure,” *IEEE Trans. Cyber.*, vol. 48, no. 10, pp. 2774-2782, 2018.
- [SUN20] W. Sun, S. Su, Y. Wu, and J. Xia, “A novel adaptive fuzzy control for output constrained stochastic non-strict feedback nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 29, no. 5, pp. 1188–1197, Jan. 2020.
- [TAN16] Z. L. Tang, S. S. Ge, K. P. Tee, and W. He, “Robust adaptive neural tracking control for a class of perturbed uncertain nonlinear systems with state constraints,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 46, no. 12, pp. 1618–1629, 2016.
- [TAO94] G. Tao and P. V. Kokotovic “Adaptive sliding control of plants with unknown dead-zone,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 39, no. 1, pp. 59–68, 1994.
- [TAO03] G. Tao, *Adaptive control design and analysis*, John Wiley & sons, 2003.
- [TAO14] G. Tao, “Multivariable adaptive control: a survey,” *Automatica*, vol. 50, no. 11, pp. 2737–2764, 2014.
- [TEE09] K. P. Tee, S. S. Ge, and E. H. Tay, “Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems,” *Automatica*, vol. 45, no. 4, pp. 918–927, 2009.
- [TEE11] K. P. Tee, B. Ren, and S. S. Ge, “Control of nonlinear systems time-varying output constraints,” *Automatica*, vol. 47, no. 11, pp. 2511–2516, 2011.
- [TEE12] K. P. Tee and S. S. Ge, “Control of state-constrained nonlinear systems using integral barrier Lyapunov functionals,” In *IEEE conference on decision and control*, pp. 3239–3244, 2012.
- [TON13] S. Tong and Y. Li, “Adaptive fuzzy decentralized output feedback control for nonlinear large-scale systems with unknown dead zone inputs,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 21, no. 5, pp. 913–925, 2013.

- [TON16] S. C. Tong, Y. M. Li, and S. Sui, “Adaptive fuzzy tracking control design for SISO uncertain non-strict feedback nonlinear systems,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 24, no. 6, pp. 1441–1454, Dec. 2016.
- [TSI89] J. Tsiniias, “Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization,” *Mathematical Control Signal Systems*, vol. 2, pp. 343–357, 1989.
- [WAN92] L. X. Wang and J. M. Mendel, “Fuzzy basis function, universal approximation, and orthogonal least square learning,” *IEEE transactions on neural networks*, vol. 3, no. 5, pp. 807-814, 1992.
- [WAN94] L. X. Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [WAN02] D. Wang, J. Huang, “Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form,” *Automatica*, vol. 38, no. 8, pp. 1365–1372, 2002.
- [WAN05] D. Wang and J. Huang, “Neural network-based adaptive dynamic surface control for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 16, no.1, pp. 195–202, 2005.
- [WAN08] M. Wang, B. Chen, and P. Shi, “Adaptive neural control for a class of perturbed strict-feedback nonlinear time-delay systems,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, vol. 38, no. 3, pp. 721–730, 2008.
- [WAN15] T. Wang, Y. F. Zhang, J. B. Qiu, and H. J. Gao, “Adaptive fuzzy backstepping control for a class of nonlinear systems with sampled and delayed measurements,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 23, no. 2, pp. 302–312, 2015.
- [WAN18a] X. Wang, X. Yin, Q. Wu, and F. Meng, “Disturbance observer based adaptive neural control of uncertain MIMO nonlinear systems with unmodeled dynamics,” *Neurocomputing*, vol. 313, pp. 247–258, Nov. 2018.
- [WAN18b] F. Wang, B. Chen, X. Liu, and C. Lin, “Finite-time adaptive fuzzy tracking control design for nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 26, no. 3, pp. 1207-1216, 2018.
- [WAN20] W. Wang, Y. Pan, and H. Liang, “Adaptive neural finite-time containment control for nonlower triangular nonlinear multi-agent systems with dynamics uncertainties,” *Neurocomputing*, vol. 391, pp. 157-166, 2020.
- [WEI67] L. Weiss and E. Infante, “Finite-time stability under perturbing forces and on product spaces,” *IEEE Transactions of Automatic Control*, vol. 12, no. 1, pp. 54-59, 1967.

- [WU00] F. Wu, K. M. Grigoriadis, and A. Packard, "Anti-windup controller design using linear parameter-varying control methods," *international Journal of Control*, vol. 73, no. 12, pp. 1104–1114, Aug. 2000.
- [WU20] Y. Wu, R. Xie, and X. Xie, "Adaptive finite-time fuzzy control of full-state constrained high-order nonlinear systems without feasibility conditions and its application," *Neurocomputing*, vol. 399, pp. 86-95, 2020.
- [XU14] B. Xu, Z. K. Shi, C. G. Yang, and F. C. Sun, "Composite neural dynamic surface control of a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form," *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 44, no. 12, pp. 2626–2634, 2014.
- [YAN20] Y. Yang, J. Tan, and D. Yue, "Prescribed performance tracking control of a class of uncertain pure-feedback nonlinear systems with input saturation," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Syst.*, vol. 50, pp. 1733–1745, 2020.
- [YAN21] W. Yang, Y. Pan, H. Liang, "Event-triggered adaptive fixed-time NN control for constrained nonstrict-feedback nonlinear systems with prescribed performance," *Neurocomputing*, vol. 422, pp. 332-344, 2021.
- [YE20] L. Ye, B. Tian, H. Liu, Q. Zong, B. Liang, and B. Yuan, "Anti-windup robust backstepping control for an under actuated reusable launch vehicle," *IEEE Trans. on Syts., Man, and Cybernetics: Systems*, pp. 1–11, 2020.
- [YIM01] W. Yim, "Adaptive control of a flexible joint manipulator," *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul, Korea*, pp. 3441–3446, May 21–26, 2001.
- [YIP98] P. P. Yip and J. K. Hedrick, "Adaptive dynamic surface control: a simplified algorithm for adaptive backstepping control of nonlinear systems," *International Journal of Control*, vol. 71, no. 5, pp. 959–979, 1998.
- [YU05] S. Yu, X. Yu, B. Shirinzadeh, and Z. Man, "Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode," *Automatica*, vol. 41, no. 11, pp. 1957-1964, 2005.
- [YU16] J. P. Yu, P. Shi, and L. Zhao, "Finite-time command filtered backstepping control for a class of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 92, pp. 173-180, 2016.
- [YU18] J. P. Yu, L. Zhao, H. S. Yu, C. Lin, and W. J. Dong, "Fuzzy finite-time command filtered control of nonlinear systems with input saturation," *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 48, no. 8, pp. 2378-2387, 2018.
- [ZHA00] T. Zhang, S. S. Ge, and C. C. Hang, "Adaptive neural network control for strict-feedback nonlinear systems using backstepping design," *Automatica*, vol. 36, no. 12, pp. 1835–1846, 2000.

- [ZHA10] T. P. Zhang, H. Wen, and Q. Zhu, “Adaptive fuzzy control of nonlinear systems in pure-feedback form based on input-to state stability,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 18, no. 1, pp. 80–93, 2010.
- [ZHA12] T. P. Zhang, Q. Zhu, and Y. Q. Yang, “Adaptive neural control of non-affine pure-feedback non-linear systems with input nonlinearity and perturbed uncertainties,” *International Journal of Systems Science*, vol. 43, no. 4, pp. 691–706, 2012.
- [ZHA17] T. Zhang, M. Xia, and Y. Yi, “Adaptive neural dynamic surface control of strict-feedback nonlinear systems with full state constraints and unmodeled dynamics,” *Automatica*, vol. 81, pp. 232–239, 2017.
- [ZHA19] K. Zhao and Y. Song, “Removing the feasibility conditions imposed on tracking control designs for state-constrained strict-feedback systems,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 64, no. 3, pp. 1265–1272, Mar. 2019.
- [ZHO05] Y. S. Zhong, “Globally stable adaptive system design for minimum phase SISO plants with input saturation,” *Automatica*, vol. 41, pp. 674–692, 2005.
- [ZHO08] J. Zhou and C. Wen, *Adaptive Backstepping Control of Uncertain Systems: Nonsmooth Nonlinearities, Interactions or Time-Variations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [ZHU18] Z. Zhu, Y. Xia, and M. Fu, “Attitude stabilization of rigid spacecraft with finite-time convergence,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, no. 6, pp. 686–702, 2018.
- [ZOG14] N. Zoghlami, *Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques interconnectés et problème de consensus en temps fini*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique de Tunisie, 2014.