

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



N° d'ordre :

Série :

THESE

présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

Yacine Bouguerra

THEME

Etats cohérents de l'oscillateur harmonique inversé
et Angle de Hannay pour le champ de Yang-Mills

Soutenue le :04/07/2017

Devant le Jury :

Présidente :	Z. Belghobsi	Prof	Univ. Jijel
Directeur :	M. Maamache	Prof.	UFA. Setif 1
Examineurs :	A. Bounames	Prof	Univ. Jijel
	F. Benamira	Prof	Univ. Constantine
	Kh. Nouicer	Prof	Univ. Jijel
	M. N. Baadji	MCA	Univ. M'sila

Table des matières

Introduction	6
1 Théorie des invariants	8
1.1 Solution de L'équation de Schrödinger	8
1.2 Oscillateur harmonique avec fréquence variable	10
1.3 L'oscillateur harmonique généralisé	13
1.4 Oscillateur harmonique dépendent du temps en présence de l'effet AB	16
1.5 Les invariants linéaires	21
2 Les états cohérents	23
2.1 L'oscillateur harmonique	24
2.2 Définition et propriétés des états cohérents	27
3 L'oscillateur harmonique inversé	30
3.1 Introduction	30
3.2 Dérivation d'un invariant linéaire	31
3.3 Solution de l'équation de Schrödinger	33
3.4 Les états cohérents Généralisées	35
4 Angle de Hannay pour le champ de Yang-Mills	46
4.1 Angle de Hannay	47
4.2 Condensates de Yang-Mills	49
4.3 Evolution des champs de Yang-Mills	51
4.4 Angle de Hannay pour le champ de Yang-Mills	55

Conclusion	60
Bibliographie	61
Annexe : Articles	65

Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au sein de l'université Ferhat Abbas Sétif .

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la patience qu'il m'a donné pour terminer cette thèse.

Je tiens à présenter ma profonde gratitude Mr. Maamache Mustapha, professeur à l'université de Sétif, qui a dirigé cette thèse dans la continuité de mon Magister. J'ai eu l'honneur d'être son étudiant et le grand plaisir d'accomplir ce travail sous sa direction. J'ai toujours bénéficié de son aide précieuse, de sa haute compétence et patience .

Je tiens à remercier vivement Mm. Zouina Belghobsi, Professeur à l'université de Jijel pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse .

Je remercie, également et sincèrement Mr. Abdelhafid Bounames, professeur à l'université de Jijel, Mr. Farid. Benamira, professeur à l'université de Constantine, Mr Khireddine Nowicer, professeur à l'université de Jijel, et Mr M. Nadjib Baadji maître de conférence à l'université de M'sila pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de le juger .

J'adresse mes vifs remerciements à tous les enseignants qui, par leur enseignement, leur encouragement et leur aide, ont contribué à ma formation durant tous mes études dès le primaire à l'université .

Enfin, je voudrai aussi remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu l'occasion de travailler ou de discuter, toutes les personnes qui en fait ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de cette thèse .

Yacine

DEDICACES

Je dédie ce travail à mes parents qui m'ont toujours soutenu : ce sont eux qui ont le plus contribué à ma réussite et je leur en suis extrêmement reconnaissant.

Je tiens aussi le dédie à mes frères et ma sœur, je les remercie pour leurs encouragements et leurs aides sans cesse .

Je le dédie à ma femme, qui a eu la patience de partager mon quotidien et a su garder son calme et son humour en toutes circonstances, ainsi que ma petite fille ASMA.

A tous mes amis sans citer les noms .

A tous ceux qui aiment Yacine et ceux que Yacine aime .

Introduction

La mécanique quantique constitue un outil très important pour interpréter plusieurs phénomènes physiques. Généralement, un système quantique est décrit par des opérateurs qui agissent sur un espace vectoriel de Hilbert muni d'un produit scalaire défini positif. La dynamique d'un système quantique est décrite par un opérateur linéaire appelé Hamiltonien qui régit l'évolution de ce système via l'équation de Schrödinger. Ainsi, on peut obtenir les états du système physique et les niveaux d'énergie. Les manuels standards de la mécanique quantique, dans leurs majorités, discutent exclusivement les propriétés des systèmes quantiques où l'Hamiltonien est indépendant du temps. Cependant, en réalité, les systèmes physiques sont soumis à des interactions des milieux extérieures qui seront modélisées par des paramètres intervenant dans l'Hamiltonien du système. Dans de nombreuses situations pratiques, ces paramètres sont dépendants du temps [1, 2, 3]. L'étude de ces systèmes est très difficile à traiter, et dans la majorité des cas, que se soit classique ou quantique, on aura recours à des approximations, parmi lesquelles, l'approximation adiabatique. L'un des aspects les plus intéressants, concernant l'approximation adiabatique, d'un système physique dépendant du temps est : la phase géométrique quantique de Berry [4] et l'angle géométrique classique de Hannay [5].

Si un système est décrit par un Hamiltonien $H(\mathbf{X}(t))$ dépendant d'un ensemble de paramètres $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ vari lentement en fonction du temps, le théorème adiabatique stipule que [6] : « *si le système se trouve à l'instant initial dans un état propre $\psi(\mathbf{X}(t_0))$ de $H(\mathbf{X}(t_0))$, il passe au temps t_1 dans l'état propre $\psi(\mathbf{X}(t_1))$, à un facteur de phase près, de $H(\mathbf{X}(t_1))$ qui s'en déduit par continuité* ». Berry a montré que cette phase est la somme de deux termes dans l'un est dynamique relatif à l'Hamiltonien du système et l'autre de nature géométrique ou phase de Berry. En terme plus claire, l'évolution d'un état propre reste état propre à un facteur de phase près.

Plusieurs auteurs [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13] ont montrés que les résultats de l'approximation adiabatique peuvent être obtenus à partir de la théorie des invariants de Lewis-Riesenfeld [14].

Cette théorie représente une alternative pour la résolution de l'équation de Schrödinger lorsque l'Hamiltonien du système est explicitement dépendant du temps.

L'objectif primordial de ce travail est de traiter l'oscillateur harmonique inversé indépendant du temps via la théorie des invariants dépendant du temps. Nous montrons que les solutions obtenus à l'aide de la théorie des invariants Hermitiens ne sont rien d'autre que les états cohérents obtenus par Bagrov et al [15] par l'intermédiaire des invariants non Hermitiens qui à notre avis n'est pas conforme à la théorie des invariants de Lewis-Riesenfeld [14].

Pour permettre à enrichir cette thèse, on a étudié le comportement classique du champ de Yang-Mills sous l'hypothèse d'une évolution adiabatique des paramètres dépendants temps.

Le travail est organisé comme suit :

Le premier chapitre introduit la théorie des invariants et le lien entre les fonctions propres de ces invariants et la solution de l'équation de Schrödinger. Comme applications de cette théorie on rappelle les exemples de l'oscillateur harmonique avec fréquence variable, de l'oscillateur harmonique généralisé ainsi que l'oscillateur harmonique avec masse et fréquence variables à deux dimensions en présence de l'effet Aharonov-Bohm. Enfin on mentionnera quelques exemples utilisant les invariants linéaires.

Le deuxième chapitre s'intéresse aux états cohérents, leurs propriétés et leurs évolutions au cours du temps. Ce chapitre, est d'une grande importance capitale pour notre travail.

Le troisième chapitre, qui constitue le but de cette thèse, attaque le problème de l'oscillateur inversé. On dérive l'invariant linéaire et Hermitien de ce système puis on résout l'équation aux valeurs propres de l'invariant. Enfin, on calcule la phase puis on déduit les fonctions d'ondes sous forme d'un paquet d'ondes Gaussien qui s'obtiennent par l'action, sur le vide, de l'opérateur unitaire de déplacement $D(z, t)$ utilisé pour construire les états cohérents.

Le quatrième chapitre s'intéresse à l'angle de Hannay pour le champ de Yang-Mills. Le fait que l'équation d'évolution classique pour le champ de Yang-Mills est celle d'une particule confinée dans un potentiel quartique, nous permet d'étudier l'angle de Hannay de ce système.

Une conclusion couronne ce travail.

Chapitre 1

Théorie des invariants

La théorie des invariants a été introduite pour la première fois par Lewis et Riesenfeld pour résoudre les problèmes de l'oscillateur harmonique avec fréquence dépendante du temps et celui d'une particule dans un champ électromagnétique dépendant du temps [14]. Dans ce chapitre, on exposera la théorie des invariants de Lewis Riesenfeld avec application pour un oscillateur harmonique, oscillateur harmonique généralisé et oscillateur harmonique à deux dimensions dépendants du temps en présence de l'effet Aharonov Bohm [16].

1.1 Solution de L'équation de Schrödinger

La théorie des invariants, ou théorie de Lewis-Riesenfeld, a été d'un grand apport pour l'obtention de la solution des systèmes dépendant du temps. Cette théorie consiste à relier les états propres de l'opérateur invariant hermitien à la solution de l'équation de Schrödinger décrite par un Hamiltonien $H(t)$ dépendant explicitement du temps

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H(t) |\psi\rangle, \quad (1.1)$$

où l'opérateur invariant $I(t)$ vérifie l'équation de Von-Neuman

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] = 0. \quad (1.2)$$

Nous constatons que l'action de l'invariant sur un vecteur d'état $|\psi\rangle$ solution de l'équation de Schrödinger (1.1) est aussi solution de l'équation Schrödinger suivante

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I |\psi\rangle) = H(t) (I |\psi\rangle). \quad (1.3)$$

Supposons que l'opérateur invariant $I(t)$ admet un ensemble d'états propres $|\varphi_{\lambda,k}\rangle$

$$I(t) |\varphi_{\lambda,k}\rangle = \lambda |\varphi_{\lambda,k}\rangle, \quad (1.4)$$

qui lui correspondent des valeurs propres λ , où k représente tous les autres nombres quantiques nécessaire spécifiant les états propres de $I(t)$ (car cet opérateur peut avoir un spectre dégénéré). Ces fonctions propres sont supposées orthonormées

$$\langle \varphi_{\lambda',k'} | \varphi_{\lambda,k} \rangle = \delta_{\lambda',\lambda} \delta_{k',k}. \quad (1.5)$$

En vertu de l'hermiticité de $I(t)$, les valeurs propres λ sont réelles et indépendantes du temps, en effet, la dérivée par rapport au temps de l'équation (1.4) donne

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda,k}\rangle, \quad (1.6)$$

multiplions ensuite à gauche par $\langle \varphi_{\lambda,k'} |$, on aura

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \varphi_{\lambda,k} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k'} \rangle. \quad (1.7)$$

La valeur moyenne de (1.2) dans les états s'écrit

$$i\hbar \langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \varphi_{\lambda',k'} | H | \varphi_{\lambda,k} \rangle = 0, \quad (1.8)$$

qui implique que pour $\lambda' = \lambda$

$$\langle \varphi_{\lambda,k} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k'} \rangle = 0, \quad (1.9)$$

d'où on déduit que les valeurs propres sont constantes (indépendante du temps).

Le fait que les valeurs propres λ sont constantes permet de faire le lien entre les états propres de $I(t)$ et les solutions de l'équation de Schrödinger, en effet l'équation (1.6) multiplié à gauche par $\langle \varphi_{\lambda',k'} |$ donne

$$(\lambda - \lambda') \langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle = \langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle, \quad (1.10)$$

qui, pour $\lambda' \neq \lambda$, permet d'écrire l'équation (1.8) sous la forme suivante

$$i\hbar \langle \varphi_{\lambda',k'} | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda,k} \rangle = \langle \varphi_{\lambda',k'} | H | \varphi_{\lambda,k} \rangle. \quad (1.11)$$

On aurait pu déduire immédiatement que les fonctions propres $|\varphi_{\lambda,k}\rangle$ sont des solutions de l'équation de Schrödinger si $\lambda = \lambda'$. Cela pourrait être le cas si on utilisera le fait que les phases des états stationnaires ne sont pas fixées. En effet, on peut donc très bien multiplier $|\varphi_{\lambda,k}\rangle$ par un facteur de phase dépendant du temps :

$$|\varphi_{\lambda,k}\rangle_{\alpha} \equiv \exp[i\alpha_{\lambda k}(t)] |\varphi_{\lambda,k}\rangle, \quad (1.12)$$

où $\alpha_{\lambda k}(t)$ est une fonction réelle du temps arbitrairement choisie. Ces $|\varphi_{\lambda,k}\rangle_{\alpha}$ sont aussi des états propres orthonormés de $I(t)$ associés aux valeurs propres λ . Si on choisit bien les phases $\alpha_{\lambda k}(t)$, l'équation (1.11) sera vérifiée pour $\lambda = \lambda'$ et donc l'objectif sera atteint. Il faut juste avoir le choix des phase $\alpha_{\lambda k}(t)$ tel que

$$\hbar\delta_{kk'} \frac{d\alpha_{\lambda k}}{dt} = \langle \varphi_{\lambda,k'} | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \varphi_{\lambda,k} \rangle. \quad (1.13)$$

Ce choix montre que l'équation (1.11) pour $|\varphi_{\lambda,k}\rangle_{\alpha}$ est vérifiée pour $\lambda = \lambda'$ et les élément non diagonaux $\langle \varphi_{\lambda,k'} | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \varphi_{\lambda,k} \rangle$ sont identiquement nuls. Pour $k = k'$, la phase $\alpha_{\lambda k}(t)$ vérifie l'équation :

$$\hbar \frac{d\alpha_{\lambda k}}{dt} = \langle \varphi_{\lambda,k} | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \varphi_{\lambda,k} \rangle. \quad (1.14)$$

La solution de l'équation de Schrödinger s'écrit comme une combinaison linéaire des états propres

$$|\psi\rangle = \sum_{\lambda k} C_{\lambda k} \exp[i\alpha_{\lambda k}(t)] |\varphi_{\lambda,k}(t)\rangle, \quad (1.15)$$

1.2 Oscillateur harmonique avec fréquence variable

L'oscillateur harmonique dépendant du temps (OHDT) présente un grand intérêt en mécanique quantique [14, 17, 18, 19, 20, 21]. La théorie des invariants est une méthode puissante pour étudier ce système, car il peut être traité d'une manière exacte et offres plusieurs applications dans la description des systèmes physiques.

L'Hamiltonien décrivant l'oscillateur harmonique avec fréquence dépendant du temps est

$$H(t) = \left[\frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2(t)q^2 \right], \quad (1.16)$$

où q et p vérifient la relation de commutation $[q, p] = i\hbar$. M la masse et la fréquence $\omega(t)$ est une fonction réelle dépendante du temps.

Remarquons que l'Hamiltonien $H(t)$ (1.16) s'écrit sous la forme suivante [17][18]

$$H(t) = \frac{1}{M}T_1 + M\omega^2(t)T_3, \quad (1.17)$$

où les opérateurs $T_1 = \frac{1}{2}p^2$, $T_2 = \frac{1}{2}(qp + pq = \frac{1}{2}\{p, q\})$ et $T_3 = \frac{1}{2}q^2$ vérifient les relations de commutations

$$[T_1, T_2] = -2i\hbar T_1, \quad [T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \quad [T_1, T_3] = -i\hbar T_2. \quad (1.18)$$

On exprime l'invariant $I(t)$ sur la même base,

$$I(t) = \sum_l \beta_l(t)T_l, \quad l = 1, 2, 3, \quad (1.19)$$

où $\beta_l(t)$ sont des fonctions dépendantes du temps à déterminer

La substitution de $H(t)$ (1.16) et $I(t)$ (1.19) dans l'équation de Von-Neuman (1.2) conduit à un système d'équations linéaires simples du premier ordre pour les coefficients β_l

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= -\frac{2}{M}\beta_2, \\ \dot{\beta}_2 &= M\omega_1^2\beta_1 - \frac{1}{M}\beta_3, \\ \dot{\beta}_3 &= 2M\omega^2\beta_2, \end{aligned} \quad (1.20)$$

en posant $\beta_1 = \rho^2$, ce système se découple facilement,

$$\begin{aligned} \beta_2 &= -M\rho\dot{\rho}, \\ \beta_3 &= \frac{1}{\rho^2}(1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2). \end{aligned}$$

Ainsi, l'invariant s'écrit sous la forme

$$I(t) = \frac{1}{2}\left\{\rho^2 p^2 - M\rho\dot{\rho}(pq + qp) + \frac{1}{\rho^2}(1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2)q^2\right\}, \quad (1.21)$$

où ρ vérifié l'équation auxiliaire

$$\ddot{\rho} + \omega^2\rho = \frac{1}{M^2\rho^3}. \quad (1.22)$$

Il nous reste à déterminer les fonctions propres de $I(t)$

$$I(t)|\phi_n\rangle = \lambda_n|\phi_n\rangle. \quad (1.23)$$

En utilisant la transformations unitaire $\phi_n = U^{-1}\phi'_n$ ($U(t) = \exp\left[-\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho}q^2\right]$) et le changement de variable $\sigma = \frac{q}{\rho}$, cette équation aux valeurs propres prend la forme d'une équation de Schrödinger stationnaire

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}\right]\varphi_n(\sigma) = \lambda_n\varphi_n(\sigma). \quad (1.24)$$

C'est une équation de Schrödinger indépendante du temps d'un oscillateur harmonique de masse et fréquence égales à un. La solution est bien connue [19]

$$\varphi_n(\sigma) = \left[\frac{1}{n!2^n\sqrt{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2\hbar}\right] H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma\right], \quad (1.25)$$

où

$$\phi'_n(q, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\varphi_n(\sigma). \quad (1.26)$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ a été introduit pour garantir la condition de normalisation

$$\int \phi_n'^*(q, t)\phi'_n(q, t) dq = \int \varphi_n'^*(\sigma)\varphi'_n(\sigma) d\sigma = 1. \quad (1.27)$$

Les valeurs propres sont données par

$$\lambda_n = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (1.28)$$

et H_n étant les polynômes d'Hermites d'ordre n . En regroupant les résultats intermédiaires ci-dessus, on obtient les fonction propres de $I(t)$

$$\phi_n(q, t) = \left[\frac{1}{n!2^n\rho\sqrt{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{iM}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M\rho^2}\right)q^2\right] H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{q}{\rho}\right)\right]. \quad (1.29)$$

Sachant que la phase $\alpha_n(t)$ est donnée par

$$\hbar\dot{\alpha}_n(t) = \langle\phi_n(q, t)|\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right)|\phi_n(q, t)\rangle, \quad (1.30)$$

et en utilisant $\phi_n(q, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}U^{-1}\varphi_n(\sigma)$, ainsi que l'équation auxiliaire pour éliminer ω^2 de l'Hamiltonien on obtient la phase

$$\alpha_n(t) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{dt'}{M\rho^2}. \quad (1.31)$$

D'où l'évolué ψ_n , solution de l'équation de Schrödinger, est

$$\begin{aligned} \psi_n(q, t) = & \left[\frac{1}{n! 2^n \rho \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{iM}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M\rho^2} \right) q^2 - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{dt'}{M\rho^2} \right] \\ & \times H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q}{\rho} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.32)$$

ainsi, la solution générale de l'équation de Schrödinger est

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) = & \sum_n C_n \left[\frac{1}{n! 2^n \rho \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{iM}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M\rho^2} \right) q^2 - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{dt'}{M\rho^2} \right] \\ & \times H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q}{\rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

1.3 L'oscillateur harmonique généralisé

On se propose de résoudre l'équation de Schrödinger associée à l'oscillateur harmonique généralisé dépendant du temps [22]

$$H(t) = \frac{1}{2} [Z(t) p^2 + Y(t) (pq + qp) + X(t) q^2], \quad (1.34)$$

où q et p sont les coordonnées canonique, $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$ sont des fonctions arbitraires (dépendantes du temps).

L'invariant associé à ce système a été construit par Morales [23] dans le but d'étudier la phase de Berry non adiabatique associée, puis une discussion approfondie a été donnée par Gao, Xu et Qian [7] pour construire les états cohérents. L'importance de l'oscillateur harmonique généralisée a été souligné par plusieurs auteurs dans divers contextes [24],[25], [26] et [27].

Pour la construction d'un invariant du système décrit par l'hamiltonien dépendant du temps (1.34), reprenon la même démarche du paragraphe précédent, c'est-à-dire écrire l'invariant sur la base $\{T_1, T_2, T_3\}$

$$I(t) = \sum_r \mu_r(t) T_r, \quad (1.35)$$

et utilisant l'équation de Von-Neuman (1.2) pour enfin aboutir aux équations différentielles

dépendantes du temps que doit vérifiées les inconnue μ_r .

$$\dot{\mu}_1 = 2\mu_1 Y - 2\mu_2 Z ,$$

$$\dot{\mu}_2 = \mu_1 X - \mu_3 Z ,$$

$$\dot{\mu}_3 = 2\mu_2 X - 2\mu_3 Y ,$$

qui se découpent en posant $\mu_1 = \rho^2$ où ρ est la solution de l'équation auxiliaire

$$\ddot{\rho} - \frac{\dot{Z}}{Z}\dot{\rho} + \left[(XZ - Y^2) + \frac{\dot{Z}}{Z}Y - \dot{Y} \right] \rho = \frac{Z^2}{\rho^3} , \quad (1.36)$$

et

$$\mu_2 = \frac{\rho^2 Y - \rho \dot{\rho}}{Z} ,$$

$$\mu_3 = \frac{1}{\rho^2} \left[1 + \left(\frac{\rho^2 Y - \rho \dot{\rho}}{Z^2} \right)^2 \right] .$$

Ainsi, l'invariant s'écrit sous la forme

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[\left\{ \rho^2 p^2 + \frac{\rho^2 Y - \rho \dot{\rho}}{Z} (pq + qp) + \frac{1}{\rho^2} \left[1 + \left(\frac{\rho^2 Y - \rho \dot{\rho}}{Z^2} \right)^2 \right] q^2 \right\} \right] . \quad (1.37)$$

Pour obtenir les fonctions propres de $I(t)$, considérons la transformation unitaire

$$\phi'_n(q, t) = U \phi_n(q, t), \quad (1.38)$$

avec

$$U = \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{Y\rho - \dot{\rho}}{Z\rho} \right) q^2 \right] . \quad (1.39)$$

$$UpU^+ = p - \left(\frac{Y\rho - \dot{\rho}}{Z\rho} \right) q$$

$$Up^2U^+ = p^2 - \left(\frac{Y\rho - \dot{\rho}}{Z\rho} \right) (pq + qp) + \left(\frac{Y\rho - \dot{\rho}}{Z\rho} \right)^2 q^2$$

Cette transformation unitaire peuvent d'écrire l'équation aux valeurs propres comme suit

$$I' \phi'_n(q, t) = \lambda_n \phi'_n(q, t), \quad (1.40)$$

où

$$I' = UIU^+ = \frac{1}{2} \left\{ \rho^2 p^2 + \frac{1}{\rho^2} q^2 \right\}. \quad (1.41)$$

Si on définit la nouvelle variable $\sigma = \frac{q}{\rho}$, on peut écrire l'équation aux valeurs propres (1.41) comme suit

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2} \right] \varphi_n(\sigma) = \lambda_n \varphi_n(\sigma), \quad (1.42)$$

avec

$$\phi'_n(q, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varphi_n(\sigma). \quad (1.43)$$

Le facteur $\sqrt{\rho}$ est introduit dans l'équation (1.43) pour garantir la condition de normalisation

$$\int \phi_n'^*(q, t) \phi'_n(q, t) dq = \int \varphi_n^*(\sigma) \varphi_n(\sigma) d\sigma = 1.$$

La solution de l'équation (1.42) [19] est

$$\varphi_n(\sigma) = \left[\frac{1}{n! 2^n \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2\hbar} \right] H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma \right], \quad (1.44)$$

où $\lambda_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right)$, et H_n le polynôme d'Hermite d'ordre n . Alors

$$\begin{aligned} \phi_n(q, t) &= U^+ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varphi_n(\sigma) \\ \phi_n(q, t) &= \left[\frac{1}{n! 2^n \rho \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{Y\rho - \dot{\rho}}{Z\rho} - \frac{i}{\rho^2} \right) q^2 \right] H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q}{\rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Maintenant, il nous reste à trouver la phase $\alpha_n(t)$. Pour cela on utilise (1.14),

$$\begin{aligned} \hbar \frac{d\alpha_n}{dt} &= \langle \phi_n | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | \phi_n \rangle \\ &= \frac{1}{\rho} \langle \varphi_n(\sigma) | i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} U^+ - U H U^+ | \varphi_n(\sigma) \rangle \\ &= \frac{1}{\rho} \langle \varphi_n(\sigma) | i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} U^+ - U \left(\frac{1}{2} [Zp^2 + Y(pq + qp) + Xq^2] \right) U^+ | \varphi_n(\sigma) \rangle \\ \hbar \frac{d\alpha_n}{dt} &= \frac{1}{\rho} \langle \varphi_n(\sigma) | i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} U^+ \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} \left[Zp^2 + \frac{\dot{\rho}}{\rho} (qp + pq) + Z \left(\frac{Y\rho - \dot{\rho}}{Z\rho} \right)^2 q^2 - 2Y \left(\frac{Y\rho - \dot{\rho}}{Z\rho} \right) q^2 + Xq^2 \right] \right) | \varphi_n(\sigma) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial}{\partial t} U^+ &= \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{Y\rho - \dot{\rho}}{Z\rho} \right) q^2 \right] \frac{\partial}{\partial t} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{Y\rho - \dot{\rho}}{Z\rho} \right) q^2 \right] \\
&= \frac{i}{2\hbar} \left(\frac{(\dot{Y}\rho + Y\dot{\rho} - \ddot{\rho}) Z\rho - (\dot{Z}\rho + Z\dot{\rho})(Y\rho - \dot{\rho})}{Z^2\rho^2} \right) q^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hbar \frac{d\alpha_n}{dt} &= \frac{1}{\rho} \langle \varphi_n(\sigma) | -\frac{Z}{2\rho^4} q^2 - \frac{1}{2} Z p^2 | \varphi_n(\sigma) \rangle \\
&= \frac{1}{\rho} \langle \varphi_n(\sigma) | -\frac{Z}{\rho^2} \left(\frac{1}{2} \rho^2 p^2 + \frac{1}{2\rho^2} q^2 \right) | \varphi_n(\sigma) \rangle
\end{aligned}$$

$$\hbar \frac{d\alpha_n}{dt} = \frac{1}{\rho} \langle \varphi_n | -\frac{Z I'}{\rho^2} | \varphi_n \rangle$$

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = -\frac{\lambda_n Z}{\hbar \rho^2}$$

on trouve

$$\alpha_n(t) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^t \frac{Z}{\rho^2} dt'. \quad (1.46)$$

Enfin, on utilise l'équation (1.15) et (1.45), on trouve la solution de l'équation de Schrödinger suivante

$$\begin{aligned}
\Psi(q, t) &= \sum_n C_n \left[\frac{1}{n! 2^n \rho \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{Y\rho - \dot{\rho}}{Z\rho} - \frac{i}{\rho^2} \right) q^2 - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{Z}{\rho^2} dt' \right] \\
&\times H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q}{\rho} \right) \right]. \quad (1.47)
\end{aligned}$$

1.4 Oscillateur harmonique dépendent du temps en présence de l'effet AB

Les exemples précédent qui ont été traités à une dimension. Généralisons l'étude aux systèmes bidimensionnels (2D) tels que les oscillateurs harmoniques dépendant du temps à 2D en présence d'un champ magnétique qui ont fait l'objet d'étude détaillé [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35]. Il est commode de rappeler l'utilisation de la théorie des invariants qui a fait l'objet de mon mémoire de Magister [16]. L'effet Aharonov-Bohm est un effet de déplacement des franges d'interférence dû au potentiel vecteur d'un champ magnétique localisé dans une région infiniment petite de l'espace. Il suscite toujours un intérêt considérable avec son application dans le divers branche de la physique [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42].

Nous considérons un oscillateur harmonique bidimensionnel avec masse et fréquence dépendantes du temps confinées au plan (x,y) en présence de l'effet AB [43]. L'équation de Shrödinger est donnée par

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)r^2 \right] \psi, \quad (1.48)$$

où \mathbf{A} est le potentiel vecteur. Le champ magnétique \mathbf{B} , associé à l'effet AB, est supposé perpendiculaire au plan et confiné à un filament de rayon tendant vers zéro de sorte que le flux

$$\nu = -e \int_0^\infty B(r)rdr, \quad (1.49)$$

est fini et non nul. Cependant, le champ magnétique \mathbf{B} doit être de la forme [37, 38]

$$eB(r) = -\frac{\nu}{r}\delta(r). \quad (1.50)$$

Le potentiel \mathbf{A} est donc

$$e\mathbf{A} = -\frac{\nu}{r}\mathbf{u}_\varphi. \quad (1.51)$$

L'équation (1.48) en coordonnées polaires s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{1}{2M} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) \right] + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 \right] \psi. \quad (1.52)$$

où $p_r = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right)$ et $p_\varphi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$

En suivant la démarche précédente à savoir celle de l'oscillateur harmonique, il suffit d'identifier les générateurs

$$\begin{aligned} T_1^\nu &= \frac{1}{2} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) \right], \\ T_2 &= \frac{1}{2} (p_r r + r p_r), \\ T_3 &= \frac{1}{2} r^2, \end{aligned}$$

qui vérifient les relations de commutations suivantes

$$[T_1^\nu, T_2] = -2i\hbar T_1^\nu, \quad [T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \quad [T_1^\nu, T_3] = -i\hbar T_2. \quad (1.53)$$

L'Hamiltonien $H(t)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des générateurs T_l ($l = 1, 2, 3$)

$$H(t) = \frac{1}{M(t)} T_1^\nu + M(t) \omega^2(t) T_3, \quad (1.54)$$

et l'invariant $I(t)$ s'écrit sur la même base sous la forme

$$I(t) = \rho^2 T_1^\nu - M \rho \dot{\rho} T_2 + \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) T_3, \quad (1.55)$$

où ρ vérifié l'équation auxiliaire

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M} \dot{\rho} + \rho \omega^2 = \frac{1}{M^2 \rho^3}. \quad (1.56)$$

Pour résoudre l'équation aux valeurs propres de l'invariant

$$I \phi_m(r, \varphi, t) = \lambda_m \phi_m(r, \varphi, t), \quad (1.57)$$

considérons la transformation unitaire dépendante du temps

$$U(t) = \exp \left[-\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} T_3 \right], \quad (1.58)$$

tel que

$$\phi_m(r, \varphi, t) = U^{-1} \phi'_m(r, \varphi, t), \quad (1.59)$$

l'équation (1.57) se transforme en

$$I' \phi'_m(r, \varphi, t) = \lambda_m \phi'_m(r, \varphi, t), \quad (1.60)$$

où l'invariant I' est donné par

$$I' = UIU^+ = \rho^2 T_1^\nu + \frac{1}{\rho^2} T_3. \quad (1.61)$$

L'équation aux valeurs propres s'écrit

$$\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \rho^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right)^2 + \frac{\rho^2}{r^2} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\hbar^2}{4} + 2\nu p_\varphi + \nu^2 \right) + \frac{r^2}{\rho^2} \right] \phi'_{n,m} = \lambda_{n,m} \phi'_{n,m}, \quad (1.62)$$

faisons le changement de variable $\xi = \frac{r}{\rho}$, l'équation (1.62) devient

$$\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i2 \frac{\nu}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\nu^2}{\hbar^2} \right) \right) + \xi^2 \right] \chi_{n,m} = \lambda_{n,m} \chi_{n,m}, \quad (1.63)$$

où

$$\phi'_{n,m}(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho} \chi_{n,m}(\xi, \varphi). \quad (1.64)$$

Les solutions de cette dernière équation peuvent être factorisées comme suit

$$\chi_{n,m}(\xi, \varphi) = f_{n,m}(\xi) e^{im\varphi}, \quad (1.65)$$

cela conduit à

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{(m + \frac{\nu}{\hbar})^2}{\xi^2} \right) + \left(\frac{2\lambda_{n,m}}{\hbar^2} - \frac{\xi^2}{\hbar^2} \right) \right] f_{n,m}(\xi) = 0. \quad (1.66)$$

Les solutions de l'Eq. (1.66) sont données par [43]

$$\chi_{n,m}(\xi, \varphi) = A_{n,m} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\hbar} \right] \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(-n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{\xi^2}{\hbar} \right) \exp [im\varphi], \quad (1.67)$$

avec valeurs propres constantes

$$\lambda_{n,m} = \hbar \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ et } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.68)$$

Pour calculer la phase, il suffit de substituer l'Hamiltonien du système ainsi que les fonctions propres (1.64) dans l'équation (1.14), qui donne

$$\begin{aligned} \hbar \dot{\alpha}(t) = & \langle \phi'_{n,m} | U \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i2\frac{\nu}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\nu^2}{\hbar^2} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \right\} U^+ | \phi'_{n,m} \rangle. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Sachant que

$$U \frac{\partial}{\partial r} U^+ \phi'_{n,m} = \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} r + \frac{\partial}{\partial r} \right) \phi'_{n,m}, \quad (1.70)$$

$$U \frac{\partial^2}{\partial r^2} U^+ \phi'_{n,m} = \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} - \frac{M^2\dot{\rho}^2}{\hbar^2\rho^2} r^2 + \frac{2iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \phi'_{n,m}, \quad (1.71)$$

et

$$U \frac{\partial}{\partial t} U^+ \phi'_{n,m} = \left(i \frac{\dot{M}\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 + i \frac{M\ddot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 - i \frac{M\dot{\rho}^2}{2\hbar\rho^2} r^2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi'_{n,m}. \quad (1.72)$$

L'équation (1.69) devient

$$\begin{aligned}
\hbar\dot{\alpha}(t) = & \langle \phi'_{n,m} | \left\{ i\hbar \left(i\frac{\dot{M}\dot{\rho}}{2\hbar\rho}r^2 + i\frac{M\ddot{\rho}}{2\hbar\rho}r^2 - i\frac{M\dot{\rho}^2}{2\hbar\rho^2}r^2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \right. \\
& + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} - \frac{M^2\dot{\rho}^2}{\hbar^2\rho^2}r^2 + \frac{2iM\dot{\rho}}{\hbar\rho}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \\
& + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r} \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho}r + \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i2\frac{\nu}{\hbar}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\nu^2}{\hbar^2} \right) \\
& \left. - \frac{1}{2}M\omega^2r^2 \right\} | \phi'_{n,m} \rangle. \tag{1.73}
\end{aligned}$$

et se simplifie en

$$\begin{aligned}
\hbar\dot{\alpha}(t) = & \langle \phi'_{n,m} | \left\{ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{M}\dot{\rho}}{\rho} + \frac{M\ddot{\rho}}{\rho} \right) r^2 \right. \\
& + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} + \frac{2iM\dot{\rho}}{\hbar\rho}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \\
& + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i2\frac{\nu}{\hbar}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\nu^2}{\hbar^2} \right) \\
& \left. - \frac{1}{2}M\omega^2r^2 \right\} | \phi'_{n,m} \rangle, \tag{1.74}
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation auxiliaire (1.56), il vient

$$\begin{aligned}
\hbar\dot{\alpha}(t) = & \langle \phi'_{n,m} | \left\{ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2M\rho^4}r^2 + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} + \frac{2iM\dot{\rho}}{\hbar\rho}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{iM\dot{\rho}}{\hbar\rho} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i2\frac{\nu}{\hbar}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\nu^2}{\hbar^2} \right) \right\} | \phi'_{n,m} \rangle. \tag{1.75}
\end{aligned}$$

Faisons le changement des variables $\xi = \frac{r}{\rho}$, ce qui implique que $\phi'_{n,m}(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho}\varphi_{n,m}(\xi, \varphi)$ et $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\dot{\rho}\xi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \xi}$, après des simplifications simples, nous obtenons

$$\hbar\dot{\alpha}(t) = \langle \phi'_{n,m} | -\frac{I'}{M\rho^2} | \phi'_{n,m} \rangle,$$

finalemt, la phase s'écrit

$$\alpha_{n,m}(t) = - \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t')\rho^2}. \tag{1.76}$$

Les solutions exactes de l'équation de Schrödinger (1.48) en coordonnées polaires sont

données par

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(r, \varphi, t) &= \frac{A_{n,m}}{\rho} \exp \left[\frac{iM}{2\hbar} \left(\rho \dot{\rho} + \frac{i}{M} \right) r^2 \right] \exp \left[-i \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2} \right] \\ &\times r^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(-n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{r^2}{\hbar} \right) \exp [im\varphi], \end{aligned} \quad (1.77)$$

et qui se réécrivent en fonction des polynômes de Laguerre [44] sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(r, \varphi, t) &= \frac{A_{n,m}}{\rho} \exp \left[\frac{iM}{2\hbar} \left(\rho \dot{\rho} + \frac{i}{M} \right) r^2 \right] \exp \left[-i \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2} \right] \\ &\times r^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \frac{n! \Gamma \left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right)}{\Gamma \left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 + n \right)} L_n^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \exp [im\varphi], \end{aligned} \quad (1.78)$$

où $A_{n,m}$ sont des constantes reliées aux conditions initiales.

En absence de l'effet AB $\nu = 0$, la solution (1.78) est réduite à la solution de oscillateur harmonique dépendant du temps à 2D. D'autre part, nous pouvons faire une observation intéressante, si le flux magnétique est quantifié, c'est-à-dire $\frac{\nu}{\hbar} = \text{nombre entier}$, les fonctions d'ondes (1.78) coïncident exactement avec la solution de oscillateur harmonique dépendant du temps à 2D.

1.5 Les invariants linéaires

Sachant que les invariants quadratique (p^2, q^2, pq, qp) déterminés dans les paragraphes précédentes peuvent être obtenus à partir d'un produit de deux invariants linéaires en p et q , cela a conduit plusieurs auteurs [45],[46], [47], [48],[49],[15], [50].... à étudier les exemples précédents en utilisant des invariant linéaires. A titre d'exemple, Dodonov et al [48] ont construit des états cohérents pour un oscillateur dans un champ électrique linéaire dépendant du temps au moyen des invariants linéaires non Hermitiens similaires à étant un opérateur annihilation

$$A(t) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[\epsilon(t)p - \dot{\epsilon}(t)q - \int f(t')\epsilon(t')dt' \right]. \quad (1.79)$$

où $\epsilon(t)$ vérifie l'équation classique

$$\ddot{\epsilon} + \omega_0^2 \epsilon = 0. \quad (1.80)$$

et $f(t)$ étant le champ électrique appliqué avec la condition supplémentaire $\dot{\epsilon}\epsilon^* - \epsilon^*\dot{\epsilon} = 2i$ pour que la relation de commutation $[A(t), A^+(t)] = 1$ soit vérifié. Ainsi, les états cohérents $\psi_\alpha(q, t)$

$$\psi_\alpha(q, t) = \frac{1}{(\pi\epsilon^2)^{1/4}} \exp \left[\frac{i\dot{\epsilon}}{2\epsilon} q^2 + \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} \alpha q - \frac{\epsilon^*}{2\epsilon} \alpha^2 - \frac{1}{2} |\alpha|^2 - \frac{\delta}{\epsilon} q - \frac{\epsilon^*}{4\epsilon} \delta^2 - \frac{1}{4} |\delta|^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \left(\delta^* + \frac{\epsilon^*}{\epsilon} \delta \right) - \frac{i}{2} \int \text{Im}(\delta\dot{\delta}^*) dt' \right],$$

où $\delta(t) = -i \int f(t') \epsilon(t') dt'$, sont état propre de l'opérateur $A(t)$.

S'inspirant des travaux de Dodonov [48], Bagrov [15] et al ont repris les invariants linéaires non Hermitiens

$$\hat{A}(\tau) = f(\tau)\hat{a} + g(\tau)\hat{a}^+ + \varphi(\tau). \quad (1.81)$$

pour construire les états cohérents de la particule libre [49], l'oscillateur inversé [15] et l'oscillateur généralisé [50]. Dans le cas de l'oscillateur inversé, Bagrov et al [15] ont introduit des opérateurs de création et d'annihilation de telle sorte que ces derniers sont des invariants *non Hermitiens* (1.81) où

$$\begin{aligned} f(\tau) &= c_1 \cosh 2\tau + ic_2 \sinh 2\tau, \\ g(\tau) &= c_2 \cosh 2\tau - ic_1 \sinh 2\tau, \quad \varphi(\tau) = c_3. \end{aligned}$$

Ils ont aussi supposé que $c_3 = 0$ et $|c_1|^2 - |c_2|^2 = 1$ pour que $[\hat{A}(\tau), \hat{A}^+(\tau)] = 1$. À l'aide de ces opérateurs et ces contraintes, ils ont construire les états cohérents

$$\langle q | z, \tau \rangle = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}(f-g)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{f+g}{f-g} \left(q - \frac{\sqrt{2}z}{f+g} \right)^2 + \frac{f^* + g^*}{f+g} \frac{z^2}{2} - \frac{|z|^2}{2} \right]. \quad (1.82)$$

Chapitre 2

Les états cohérents

Au début de la mécanique quantique, en 1926, Schrödinger [51] (prix Nobel de Physique 1933) était intéressé par l'étude des états quantiques qui décrivent le comportement classique de l'opérateur position d'un système quantique. Il a introduit un système de fonctions d'onde non-orthonormée pour décrire des paquets d'ondes pour les oscillateurs harmonique quantiques.

Dans les années soixantes, Glauber a repris les travaux de Schrödinger et a montré que les états cohérents de l'oscillateur harmonique obtenu à partir de l'action de l'opérateur déplacement sur le vide. Ces états cohérents aussi sont des états propres d'opérateur annihilation. Il a montré aussi que les états cohérents sont appropriés à décrire quantiquement un faisceau laser cohérent.

La notion d'états cohérents est enracinée en mécanique quantique. Le terme «cohérent», introduit par Glauber [52], [53] (prix Nobel de Physique 2005) provient de l'optique quantique (un rayonnement cohérent, sources d'émission de façon cohérente, etc...). Glauber est considéré comme l'un des fondateurs de la théorie des états cohérents, avec Klauder [54],[55],[56] et Sudarshan [57], dans le cadre de la description des faisceaux de lumière cohérente émis par des lasers en optique quantique. Depuis lors, les états cohérents ont été utilisés presque dans toutes les branches de la physique quantique (optique quantique, la physique de l'état nucléaires, atomiques et solides, l'électrodynamique quantique ...).

2.1 L'oscillateur harmonique

Les premiers exemples d'états cohérents découverts par Schrödinger sont ceux de l'oscillateur harmonique. Ce dernier système est considéré comme étant le prototype des modèles physiques intégrables. Les états cohérents $|z\rangle$ associés à ce système ont fait l'objet de beaucoup d'études et leurs propriétés ont été fréquemment utilisés comme modèle de base, servant de généralisation pour d'autres systèmes. Ces états $|z\rangle$ sont paramétrisés par un nombre complexe z et sont définis de façon à retrouver la solution classique.

L'oscillateur harmonique est un système d'une grande importance en mécanique classique et quantique, car il décrit les petites oscillations de systèmes physiques autour d'une position d'équilibre stable. Pour fixer les idées, et afin de prendre l'exemple simple d'un mouvement à une dimension, examinons le cas des vibrations d'une molécule diatomique dont les deux noyaux ont des masses m_1 et m_2 . On prend pour axe des x la droite joignant les deux noyaux et on note $x = x_1 - x_2$ la coordonnée de la particule relative. À l'équilibre, les deux noyaux se trouvent à une distance $x = x_0$. En physique classique, l'Hamiltonien de la particule relative peut s'écrire

$$h = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad (2.1)$$

où $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ est la masse réduite et $q = x - x_0$. La quantification de ce Hamiltonien (2.1) obtenue avec les postulats de la quantification canonique, $q \rightarrow \hat{q}, p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ est $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ (dans la représentation position) nous donne l'Hamiltonien quantique

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{q}^2. \quad (2.2)$$

Il est utile de définir des quantités sans dimensions, en introduisant les opérateurs \hat{Q} et \hat{P}

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{q} \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}} \hat{p} \quad \text{avec} \quad [\hat{Q}, \hat{P}] = iI. \quad (2.3)$$

Nous allons construire les vecteurs propres de \hat{H} dans l'espace de Fock. Au lieu de travailler avec des opérateurs \hat{q} et \hat{p} , il est plus approprié d'introduire les opérateurs *d'annihilation* (*destruction*) a et *création* a^+ défini par

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q} + i\hat{P}) \quad (2.4)$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q} - i\hat{P}), \quad (2.5)$$

ces opérateurs vérifient les relations de commutation

$$[a, a^+] = I, \quad [a, I] = [a^+, I] = 0. \quad (2.6)$$

Ces relations de commutation signifient que les opérateurs a, a^+, I (respectivement, \hat{Q}, \hat{P}, I) sont des générateurs d'une algèbre de Lie, dite algèbre de Heisenberg- Weyl. L'Hamiltonien (2.2) peut s'écrire sous la forme suivante

$$H = \hbar\omega \left(aa^+ + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right), \quad (2.7)$$

où l'opérateur $N = aa^+$ est l'opérateur nombre de particules vérifient les relations de commutation suivantes

$$[N, a^+] = a^+, \quad [N, a] = -a. \quad (2.8)$$

Il est évident que les états propres de l'opérateur N sont également des états propres de l'oscillateur harmonique. En effet, si l'on peut définir un ensemble complet des états propres $|n\rangle$ ($|n\rangle$ est un élément de l'espace de Fock), forment une base de l'espace de Hilbert, de telle sorte que

$$N |n\rangle = n |n\rangle, \quad (2.9)$$

et l'action des opérateurs création a^+ et annihilation a sur l'état $|n\rangle$ sont respectivement

$$a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (2.10)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (2.11)$$

alors, ces états sont également des états propres de l'Hamiltonien

$$H |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (2.12)$$

où les valeurs propres n sont des nombres entiers ($n = 0, 1, 2, \dots$). Des équations (2.10), (2.11), on peut exprimer les vecteurs $|n\rangle$ en fonction de l'état fondamental (état du vide) $|0\rangle$

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (2.13)$$

ces états ainsi obtenues vérifient la condition d'orthogonalité et forment un ensemble complet

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1 \quad (2.14)$$

Dans le but de déterminer la forme explicite des fonctions donne $\psi_n(Q) = \langle Q | n \rangle$. Multiplions l'équation (2.13) à gauche par le bra $\langle Q |$ et en remplaçant a^+ par son expression (2.5), on obtient les fonctions d'onde

$$\psi_n(Q) = \left(\frac{1}{2^n n!} \right)^{\frac{1}{2}} \left[Q - \frac{d}{dQ} \right]^n \psi_0(Q), \quad (2.15)$$

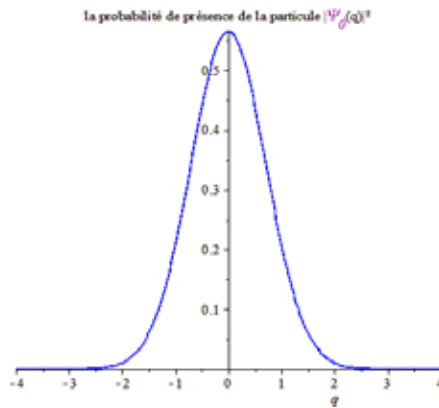
où, $\psi_0(Q) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{Q^2}{2}}$, l'état fondamental est une gaussienne correspondante à un état cohérent particulier car c'est aussi un état propre H . Les fonctions d'onde $\psi_n(Q)$ sont orthogonales pour $n \neq n'$ et normalisées à l'unité en raison de $\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$. Les fonctions (2.15) sont reliées aux polynômes de Hermite $H_n(Q)$

$$\psi_n(Q) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} e^{-\frac{Q^2}{2}} H_n(Q), \quad (2.16)$$

La fonction propre fondamentale $\psi_0(q)$ (l'état de vide) donne pour expression de la probabilité de présence de la particule oscillante dans son état fondamental

$$|\psi_0(q)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar} q^2}.$$

Cette expression est représentée par une courbe de Gauss ; la probabilité de présence maximale se situe en sa position d'équilibre, $q = 0$. Lorsqu'on considère des états $\psi_n(q)$ correspondant à des niveaux d'énergie de plus en plus élevés, la fréquence des oscillations s'accroît. On constate alors que les maxima de probabilité de présence se situent au voisinage des positions extrêmes d'oscillation.



2.2 Définition et propriétés des états cohérents

Les états cohérents de l'oscillateur harmonique, ou états semi-classiques, sont des états quantiques remarquables où les valeurs moyennes des opérateurs position et impulsion sont proches des valeurs classiques de la position et de l'impulsion. Dans la littérature, il existe plusieurs approches qui permettent de construire ces états cohérents [58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72].

L'algèbre de l'oscillateur harmonique (algèbre de Weyl-Heisenberg) est engendré par trois opérateurs linéaires, à savoir, un opérateur d'annihilation a , un opérateur de création a^+ et un opérateur nombre de particules $N = aa^+$ satisfaisant aux relations de commutations (2.6) et (2.8).

Parmi ces approches, on peut définir les états cohérents habituels comme des états propres de l'opérateur annihilation de l'oscillateur harmonique

$$a |z\rangle = z |z\rangle, \quad (2.17)$$

où z est un paramètre complexe. Les vecteurs propres (2.13) de l'opérateur nombre de particules N (ou de l'Hamiltonien (2.7)) peuvent être utilisés pour écrire les états cohérents sur la base des états propres de l'oscillateur harmonique

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n | z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle 0 | \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |z\rangle, \\ &= \langle 0 | z\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \end{aligned} \quad (2.18)$$

où le coefficient $\langle 0 | z\rangle$ peut être fixé par la condition de normalisation

$$\begin{aligned} |\langle z | z\rangle|^2 &= |\langle 0 | z\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = |\langle 0 | z\rangle|^2 e^{|z|^2} = 1 \\ \Rightarrow \langle 0 | z\rangle &= e^{-\frac{|z|^2}{2}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Alors, l'état cohérent de l'oscillateur harmonique

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(za^+)^n}{n!} |0\rangle, \quad (2.20)$$

ces états cohérents peuvent être générés à partir du vide $|0\rangle$ par l'action d'un opérateur unitaire

$$D(z) = \exp(z a^+ - z^* a). \quad (2.21)$$

En effet,

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z a^+)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{z a^+} |0\rangle, \quad (2.22)$$

qui se met sous une forme plus élégante grâce à la relation $e^{-z^* a} |0\rangle = |0\rangle$

$$\begin{aligned} |z\rangle &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{z a^+} e^{-z^* a} |0\rangle, \\ |z\rangle &= \exp(z a^+ - z^* a) |0\rangle = D(z) |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.23)$$

On peut définir ces états cohérents comme des états qui minimisent la relation d'incertitude de Heisenberg

$$(\Delta \hat{q})(\Delta \hat{p}) \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.24)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta \hat{q} &= \sqrt{\langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2}, \\ \Delta \hat{p} &= \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}, \end{aligned}$$

tel que

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^+), \quad (2.25)$$

$$\hat{p} = i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (a^+ - a), \quad (2.26)$$

en effet, les valeurs moyennes des opérateurs position \hat{q} et impulsion \hat{p} dans les états $|z\rangle$ donnent

$$\langle \hat{q} \rangle = \langle z | \hat{q} | z \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re} z, \quad (2.27)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \langle z | \hat{p} | z \rangle = \sqrt{2\hbar m \omega} \operatorname{Im} z. \quad (2.28)$$

et les fluctuations correspondantes

$$\Delta \hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \Delta \hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}}, \quad (2.29)$$

le produit

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}. \quad (2.30)$$

est minimale. En ce sens, les états cohérents se rapprochent aux trajectoires classiques, d'où le nom d'états *quasi-classiques*.

Bien connu également est la propriété des ces états formant une base surcomplète

$$\int \int \frac{d\operatorname{Re} z d\operatorname{Im} z}{\pi} |z\rangle \langle z| = 1. \quad (2.31)$$

Dans cette base un état $|z'\rangle$ a pour coefficients

$$\langle z | z'\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2} - \frac{|z'|^2}{2} + z^* z'\right) \neq 0, \quad (2.32)$$

ce qui signifie que les états cohérents $|z\rangle$ et $|z'\rangle$ ne sont pas mutuellement orthogonaux et le module au carré du produit $\langle z | z'\rangle$ représente la mesure de la distance entre les deux états cohérents.

L'opérateur déplacement $D(z)$ a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} D(0) &= 1 \\ D^+(z) &= D(-z) = D^{-1}(z) \\ [a, D(z)] &= zD(z) \\ D^+(z) a D(z) &= a + z \\ D^+(z) a^+ D(z) &= a^+ + z^* \\ D(z_1) D(z_2) &= e^{i\operatorname{Im}(z_1 z_2^*)} D(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

Cette dernière propriété permet de montrer simplement que : si un oscillateur harmonique initialement dans son état fondamental est couplé pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ à une force classique $F(t)$, il se trouvera pour $t > t_2$ dans un état cohérent déterminé par la transformée de Fourier $\tilde{F}(\omega)$ de $F(t)$

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} e^{i\omega t} F(t) dt \quad (2.33)$$

Ayant défini les états cohérents de l'oscillateur harmonique, dans le chapitre suivant, nous définirons des paquets d'ondes Gaussiennes de l'oscillateur inversé. Ces paquets d'ondes ont les mêmes propriétés que les états cohérents

Chapitre 3

L'oscillateur harmonique inversé

3.1 Introduction

En mécanique quantique, un nombre restreint de système peut être résolu exactement. Parmi ces systèmes l'oscillateur inversé (inverted oscillator), qui est un système dont le potentiel exerce une force répulsive sur la particule et il est soluble du point de vue classique et quantique. Cet oscillateur peut être obtenu en changeant la fréquence angulaire de l'oscillateur harmonique ω par $i\omega$. Plus d'une décennie, cet oscillateur inversé a suscité un intérêt remarquable en physique [15], [73]–[79]. Une propriété importante est que les fonctions d'ondes de l'oscillateur inversé n'oscillent pas au cours du temps et leurs propriétés physiques sont très différentes de ceux de l'oscillateur harmonique. Il est bien établi que les solutions classiques de l'oscillateur inversé dans l'espace de phase divergent exponentiellement [74]. Le spectre d'énergie n'est pas discret. Vu que le système est non borné inférieurement, l'énergie du point zéro n'existe pas dans ce système [74].

L'oscillateur inversé peut être utilisé pour décrire des phénomènes physiques tels que de l'interaction d'une onde lumineuse des solitons avec la matière [80], le modèle du champ scalaire dans l'expansion de l'univers [81], les phénomènes de super fluorescence [82], le modèle cosmologique avec un potentiel négatif [83] etc....

Barton [73] a étudié l'effet tunnel et la durée de séjour de l'équilibre instable de la position du paquet d'onde de l'oscillateur inversé. Stimulée par ces études nous définissons dans ce chapitre, en utilisant la théorie Hermitienne des invariants, un paquet d'onde gaussien de

l'oscillateur inversé qui reproduit l'évolution classique au niveau quantique et qui est obtenu par l'action de l'opérateur déplacement sur un état fondamental. Contrairement à ceux obtenus dans la référence [15] par la méthode des invariants non Hermitiens. La méthode utilisée par Bagrov et al [15] induit beaucoup de contraintes, nous analysons, dans le présent chapitre, le comportement temporel des paquets d'ondes déplacées par certains paramètres définissant l'invariant et l'état cohérent. Lorsque on utilise un invariant Hermitien on se débarrasse de toutes ces contraintes ce qui fait l'originalité de ce travail.

3.2 Dérivation d'un invariant linéaire

L'oscillateur inversé est décrit par l'Hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (3.1)$$

On doit donc, résoudre de l'équation de Schrödinger associée à l'Hamiltonien (3.1)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = H \Psi(q, t). \quad (3.2)$$

Les équations classiques du mouvement associées à ce système sont données par les équations d'Hamilton :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = m\omega^2 q, \end{aligned}$$

dont les solutions sont :

$$q = A \cosh \omega t + B \sinh \omega t, \quad (3.3)$$

$$p = m\omega(A \sinh \omega t + B \cosh \omega t), \quad (3.4)$$

où A et B sont des constantes réelles arbitraires.

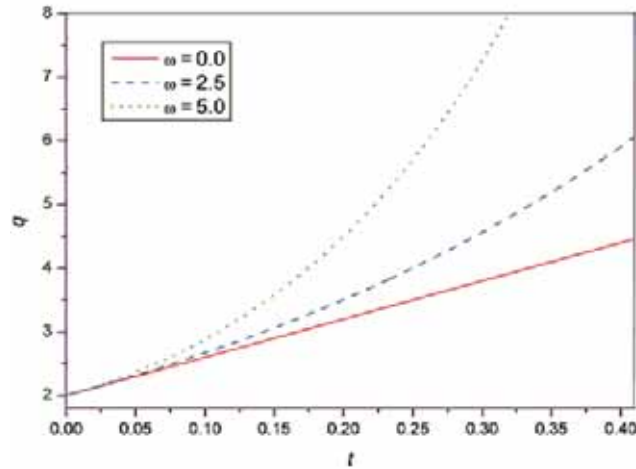


Figure 1 : Le comportement temporel de la solution classique q exprimée dans l'équation (3.3). On a utilisé $A = 2$ et $B = 5/\omega$ [84].

Introduisant l'opérateur invariant $I(t)$ hermitien et linéaire en \hat{q} et \hat{p}

$$I(t) = \alpha(t)\hat{p} + \beta(t)\hat{q} + \gamma(t), \quad (3.5)$$

où $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ sont des coefficients réels dépendant du temps qui seront déterminés par la suite. L'opérateur invariant $I(t)$ devrait satisfaire à l'équation de Liouville-Von Neumann

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0. \quad (3.6)$$

En insérant les équations (3.1) et (3.5) dans l'équation (3.6), on obtient un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre pour les coefficients $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\beta}{m}, \quad \dot{\beta} = -\alpha m \omega^2, \quad \dot{\gamma} = 0. \quad (3.7)$$

Les solutions générales de ces équations différentielles sont données par

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cosh \omega t + \frac{\beta_0}{m\omega} \sinh \omega t, \quad (3.8)$$

$$\beta(t) = -\alpha_0 m \omega \sinh \omega t - \beta_0 \cosh \omega t, \quad (3.9)$$

$$\gamma(t) = \gamma_0, \quad (3.10)$$

où α_0 , β_0 et γ_0 sont des constantes réelles arbitraires. L'invariant $I(t) = I^+(t)$ s'écrit

$$I(t) = \left[\alpha_0 \cosh \omega t + \frac{\beta_0}{m\omega} \sinh \omega t \right] \hat{p} + [-\alpha_0 m \omega \sinh \omega t - \beta_0 \cosh \omega t] \hat{q} + \gamma_0. \quad (3.11)$$

Dans la littérature [15],[79], γ_0 est une constante arbitraire, qui a été choisi égale à zéro. Ce choix ne conduit pas à l'état cohérent. Dans tous ce qui suivra $\gamma_0 \neq 0$.

Intéressons nous à l'équation aux valeurs propres

$$I(t)\varphi_\lambda(q, t) = \lambda\varphi_\lambda(q, t), \quad (3.12)$$

pour déterminer les fonctions propres $\varphi_\lambda(q, t)$ et les valeurs propres λ . Pour simplifier la résolution de cette équation, considérons la transformation unitaire suivante

$$\varphi'_\lambda(q, t) = U\varphi_\lambda(q, t), \quad (3.13)$$

où l'opérateur unitaire U est donnée par

$$U = \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\frac{\beta}{\alpha}q^2\right], \quad (3.14)$$

ayant les les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} U\hat{q}U^+ &= \hat{q}, \\ U\hat{p}U^+ &= \hat{p} - \frac{\beta}{\alpha}\hat{q}. \end{aligned}$$

Dans se cas, l'invariant se transforme en

$$I' = UIU^+ = \alpha\hat{p} + \gamma_0. \quad (3.15)$$

Par conséquent, il est plus simple de résoudre l'équation aux valeurs propres pour l'invariant transformé (3.15).

3.3 Solution de l'équation de Schrödinger

L'équation aux valeurs propres du système transformé, $I'(t)\varphi'_\lambda(q, t) = \lambda\varphi'_\lambda(q, t)$ s'écrit

$$\left[\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\lambda}{i\hbar\alpha} - \frac{\gamma_0}{i\hbar\alpha}\right]\varphi'_\lambda(q, t) = 0, \quad (3.16)$$

dont la solution est

$$\varphi'_\lambda(q, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{\lambda - \gamma_0}{\alpha}q\right]. \quad (3.17)$$

En utilisant l'équation (3.13), nous déduisons les états propres de l'opérateur invariant I

$$\varphi_\lambda(q, t) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\lambda - \gamma_0}{\alpha} q - \frac{\beta}{2\alpha} q^2 \right) \right]. \quad (3.18)$$

Selon la théorie des invariants [14], la différence entre les états propres de l'invariant φ_λ et les solutions de l'équation de Schrödinger ψ_λ est seulement la multiplication d'un facteur de phase $\exp[i\delta_\lambda(t)]$. On peut écrire les solutions de l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien (3.1) sous la forme

$$\psi_\lambda(q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\alpha_0}} \exp[i\delta_\lambda(t)] \varphi_\lambda(q, t), \quad (3.19)$$

où le facteur $1/\sqrt{2\pi\hbar\alpha_0}$ est une constante de normalisation.

En substituant l'équation (3.19) dans l'équation de Schrödinger $i\hbar\partial\psi_\lambda(q, t)/\partial t - H\psi_\lambda(q, t) = 0$, on obtient la phase $\dot{\delta}_\lambda(t)$ [85],[86] et [87]

$$\hbar\dot{\delta}_\lambda(t) = \int d\lambda' \langle \varphi_\lambda | \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right] | \varphi_{\lambda'} \rangle. \quad (3.20)$$

En injectant l'Hamiltonien (3.1) et les états propres (3.18) dans la dernière équation

$$\hbar\dot{\delta}(t)_\lambda = i\hbar \int d\lambda' \langle \varphi_\lambda | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda'} \rangle - \frac{1}{2m} \int d\lambda' \langle \varphi_\lambda | \hat{p}^2 | \varphi_{\lambda'} \rangle + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2 \int d\lambda' \langle \varphi_\lambda | | \varphi_{\lambda'} \rangle,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \hbar\dot{\delta}(t)_\lambda &= \int d\lambda' \left(\frac{(\lambda' - \gamma_0) \dot{\alpha}}{\alpha^2} \hat{q} + \frac{\dot{\beta}\alpha - \beta\dot{\alpha}}{2\alpha^2} \hat{q}^2 \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\lambda - \lambda'}{\alpha} \hat{q} \right) \right] \\ &+ \frac{\hbar^2}{2m} \int d\lambda' \left[\left(-\frac{i\beta}{\hbar\alpha} \right) - \frac{1}{\hbar^2} \left[\left(\frac{\lambda' - \gamma_0}{\alpha} \right) - \frac{\beta}{\alpha} \hat{q} \right]^2 \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\lambda - \lambda'}{\alpha} \hat{q} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2 \int d\lambda' \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\lambda - \lambda'}{\alpha} \hat{q} \right) \right], \end{aligned}$$

après un calcul facile, on trouve

$$\hbar\dot{\delta}_\lambda(t) = -\frac{i\hbar\beta}{2m\alpha} - \frac{1}{2m\hbar} \frac{(\lambda - \gamma_0)^2}{\alpha^2},$$

qui intègre par rapport au temps, donne $\delta_\lambda(t)$

$$\delta_\lambda(t) = \delta_\lambda(0) - \frac{(\lambda - \gamma_0)^2}{2m\hbar} \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha^2(\tau)} + i \ln \sqrt{\frac{\alpha(t)}{\alpha(0)}}. \quad (3.21)$$

Pour plus de commodité, on peut choisir $\delta_\lambda(0) = 0$. Finalement, les fonctions d'onde $\psi_\lambda(q, t)$ solutions de l'équation de Schrödinger du système sont données par

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(q, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\alpha(t)}} \exp \left[-i \int_0^t \frac{(\lambda - \gamma_0)^2 d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} \right] \\ &\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\lambda - \gamma_0}{\alpha} q - \frac{\beta}{2\alpha} q^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Notons que ces solutions correspondent à des ondes planes. Il est facile de remarquer que la valeur moyenne de q dans l'état (3.22) diverge [88] :

$$\begin{aligned} \langle q \rangle_{\psi_\lambda} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\lambda^*(q, t) q \psi_\lambda(q, t) dq \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar\alpha(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} q dq \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.23)$$

La raison de cette divergence est que les états quantiques (3.22) sont exprimées en fonction des ondes planes. Les solutions quantiques d'ondes localisées seront définie, dans la section suivante, en construisant un paquet d'onde Gaussien qui renormalise la divergence de $\langle q \rangle$.

3.4 Les états cohérents Généralisées

La solution général de l'équation de Schrödinger en terme de paquet d'ondes localisées peut être obtenu par une combinaison linéaire des solutions données par l'équation (3.22)

$$\Psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \psi_\lambda(q, t) d\lambda, \quad (3.24)$$

où $g(\lambda)$ est une fonction poids qui détermine l'état du système d'une telle manière que $\Psi(q, t)$ sera de carré sommable (intégrable). Le choix de la fonction poids $g(\lambda)$ sous forme d'une gaussienne

$$g(\lambda) = \sqrt{\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}} \exp[-a(\lambda - I_0)^2] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \frac{a_0}{\alpha_0} \left(\lambda - \frac{I_0}{2} \right) \right], \quad (3.25)$$

où a , a_0 et I_0 sont des constantes réelles positives, conduit à un paquet d'onde gaussien. Pour le cas où $I_0 = 0$ et $a_0 = 0$, ce choix se réduit à celui des références [79] et [75]. Substituant les

équations (3.22) et (3.25) dans l'équation (3.24), on trouve

$$\Psi(q, t) = \sqrt{\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\alpha(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp[-a(\lambda - I_0)^2] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{a_0}{\alpha_0} \left(\lambda - \frac{I_0}{2}\right)\right] \right. \\ \left. \exp\left[-i \int_0^t \frac{(\lambda - \gamma_0)^2}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} d\tau\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\lambda - \gamma_0}{\alpha} q - \frac{\beta}{2\alpha} q^2\right)\right] \right\} d\lambda,$$

pour calculer l'intégrale de cette dernière équation, effectuons le changement de variable $\lambda \rightarrow \lambda + I_0$, on obtient la solution sous forme d'un paquet d'onde Gaussien normalisée

$$\Psi(q, t) = \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\hbar\alpha(t) \sqrt{2\pi} \left(a + i \int_0^t \frac{d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)}\right)}} \exp\left[-i \int_0^t \frac{(\gamma_0 - I_0)^2}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} d\tau\right] \\ \times \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{I_0 a_0}{2 \alpha_0}\right] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left[-\frac{\gamma_0 - I_0}{\alpha} q - \frac{\beta(t)}{2\alpha(t)} q^2\right]\right\} \\ \times \exp\left\{-\frac{\left[q - \alpha(t) \left(\frac{a_0}{\alpha_0} - \int_0^t \frac{\gamma_0 - I_0}{m\alpha^2(\tau)} d\tau\right)\right]^2}{4\hbar^2\alpha^2(\tau) \left(a + i \int_0^t \frac{1}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} d\tau\right)}\right\}. \quad (3.26)$$

Cette fonction d'onde joue un rôle essentiel dans la description quantique de l'oscillateur inversé et peut être utilisé pour étudier diverses propriétés quantiques du système. Par exemple, on peut calculer les valeurs moyennes des variables canoniques et leurs carrés.

Par définition, la valeur moyenne d'un opérateur arbitraire O est

$$\langle O \rangle = \int \Psi^*(q, t) O \Psi(q, t) dq. \quad (3.27)$$

Pour le cas des variables canoniques q et p , les valeurs moyennes de q et p dans l'état $\Psi(q, t)$ peuvent être facilement calculées en utilisant l'équation ci-dessus

$$\langle q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(q, t) q \Psi(q, t) dq \\ = \sqrt{\frac{a}{2\pi\hbar^2\alpha^2(t) \left(a^2 + \left[\int_0^t \frac{d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)}\right]^2\right)}} \int_{-\infty}^{\infty} q \exp\left\{-\frac{a \left[q - \alpha(t) \left(\frac{a_0}{\alpha_0} - \int_0^t \frac{\gamma_0 - I_0}{m\alpha^2(\tau)} d\tau\right)\right]^2}{2\hbar^2\alpha^2(\tau) \left(a^2 + \left[\int_0^t \frac{d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)}\right]^2\right)}\right\} dq,$$

pour évaluer l'intégrale, faisons le changement de variable $q \rightarrow q + \alpha(t) \left(\frac{a_0}{\alpha_0} - \int_0^t \frac{\gamma_0 - I_0}{m\alpha^2(\tau)} d\tau\right)$ qui

donne

$$\langle q \rangle = \sqrt{\frac{a}{2\pi\hbar^2\alpha^2(t) \left(a^2 + \left[\int_0^t \frac{d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} \right]^2 \right)}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(q + \alpha(t) \left(\frac{a_0}{\alpha_0} - \int_0^t \frac{\gamma_0 - I_0}{m\alpha^2(\tau)} d\tau \right) \right) \exp \left\{ -\frac{a}{2\hbar^2\alpha^2(\tau) \left(a^2 + \left[\int_0^t \frac{d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} \right]^2 \right)} q^2 \right\} dq,$$

finalemt, on trouve

$$\langle q \rangle = \alpha(t) \left(\frac{a_0}{\alpha_0} - \frac{\gamma_0 - I_0}{m} \Gamma(t) \right), \quad (3.28)$$

où

$$\Gamma(t) = \int_0^t \frac{1}{\alpha^2(\tau)} d\tau = \frac{m}{\alpha_0\beta_0 + m\alpha_0^2\omega \coth \omega t}. \quad (3.29)$$

La valeur moyenne de p dans le paquet d'onde $\Psi(q, t)$

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(q, t) p \Psi(q, t) dq \\ &= \sqrt{\frac{a}{\hbar\alpha^2(t) \left(a^2 + \left[\frac{\Gamma(t)}{2m\hbar} \right]^2 \right)}} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{(\gamma_0 - I_0)}{\alpha} - \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} q + \frac{2i \left\{ q - \left[\alpha(t) \left(\frac{a_0}{\alpha_0} - \frac{(\gamma_0 - I_0)\Gamma(t)}{m} \right) \right] \right\}}{4\hbar\alpha^2(\tau) \left(a + i\frac{\Gamma(t)}{2m\hbar} \right)} \right) \\ &\quad \exp \left\{ -\left(\frac{2a}{4\hbar^2\alpha^2(\tau) \left(a^2 + \left[\frac{\Gamma(t)}{2m\hbar} \right]^2 \right)} \right) \left\{ q - \left[\alpha(t) \left(\frac{a_0}{\alpha_0} - \frac{(\gamma_0 - I_0)\Gamma(t)}{m} \right) \right] \right\}^2 \right\} dq \end{aligned}$$

donne

$$\langle p \rangle = -\frac{\gamma_0 - I_0}{\alpha(t)} - \beta(t) \left(\frac{a_0}{\alpha_0} - \frac{\gamma_0 - I_0}{m} \Gamma(t) \right). \quad (3.30)$$

De la même manière, on peut calculer les valeurs moyennes des opérateurs q^2 et p^2 dans le paquet d'onde $\Psi(q, t)$

$$\langle q^2 \rangle = \langle q \rangle^2 + \frac{\hbar^2\alpha^2(t)}{a} \left[a^2 + \left(\frac{\Gamma(t)}{2m\hbar} \right)^2 \right], \quad (3.31)$$

$$\langle p^2 \rangle = \langle p \rangle^2 - \frac{\beta(t)\Gamma(t)}{2ma\alpha(t)} + \frac{\beta^2(t)}{\alpha^2(t)} (\Delta q)^2 + \left[\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\Gamma^2(t)}{16m^2a^2} \right] \frac{1}{(\Delta q)^2}. \quad (3.32)$$

Il est utile de calculer les variances Δq et Δp

$$\Delta q = [\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2]^{1/2} = \frac{\hbar\alpha(t)}{\sqrt{a}} \left[a^2 + \left(\frac{\Gamma(t)}{2m\hbar} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.33)$$

$$\Delta p = [\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2]^{1/2} = \frac{\hbar}{2} \left[\left(\frac{2\beta(t)}{\hbar\alpha(t)} \Delta q - \frac{\Gamma(t)}{2ma\hbar\Delta q} \right)^2 + (\Delta q)^{-2} \right]^{1/2}. \quad (3.34)$$

La relation l'incertitude de Heisenberg est vérifiée, car

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2} \left[1 + \left(\frac{2\beta(t)}{\hbar\alpha(t)} (\Delta q)^2 - \frac{\Gamma(t)}{2ma\hbar} \right)^2 \right]^{1/2} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (3.35)$$

ce qui est représenté dans la figure.2

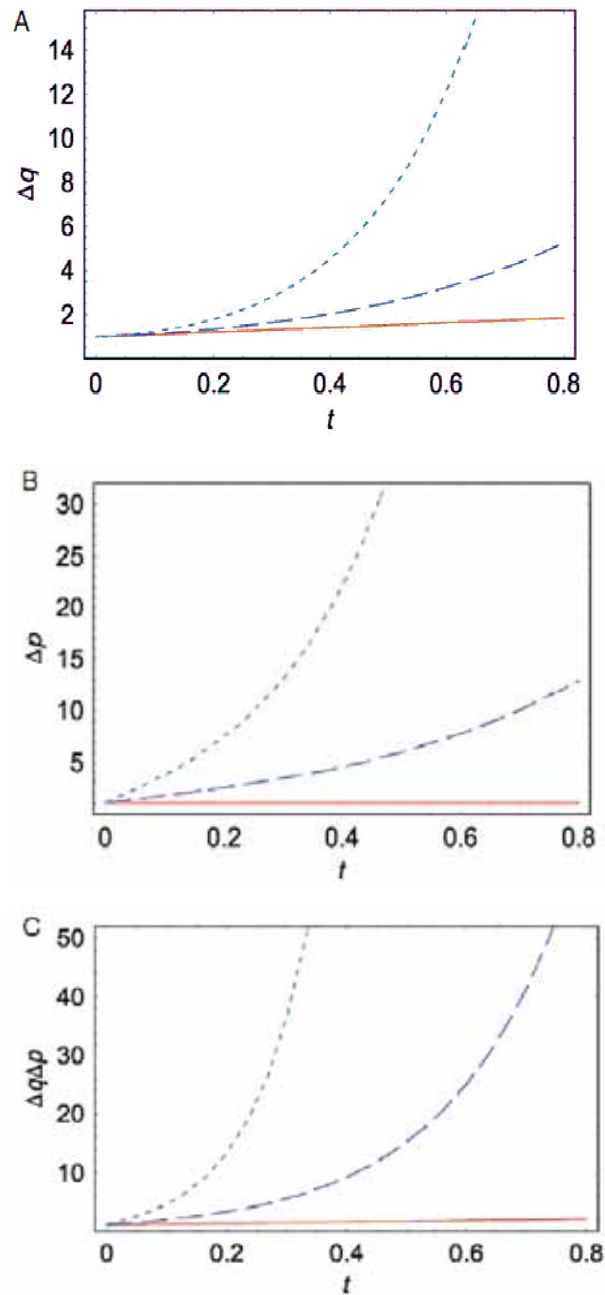


Figure. 2 : L'évolution temporelle de Δq (A), Δp (B) et le produit $\Delta q \Delta p$ (C) pour différentes valeurs de ω . La ligne continue rouge pour $\omega \rightarrow 0.0$, la ligne bleue en pointillés pour $\omega = 2.5$, et la ligne pointillée verte pour $\omega = 5.0$. Nous avons utilisé $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = 1$, $I_0 = 5$, $a = 1$, $a_0 = 2$, $m = 1$, et $\hbar = 1$ [84].

Les figures :2 (A) et 2 (B) montrent que Δq et Δp augmentent en fonction du temps. Par conséquent, le produit $\Delta q \Delta p$ augmente aussi, ce qui est montré sur la figure.2 (C). Le cas de la particule libre peut être obtenu à partir de nos résultats lorsque on suppose $\omega = 0$. Les figures 2 (A),2 (B)et 2 (C) montre dans ce cas la ($\omega = 0$) que l'incertitude Δq augmente linéairement au cours du temps et Δp reste toujours constant. Par conséquent, le produit $\Delta q \Delta p$ dans le cas de la particule libre augmente linéairement avec le temps. Ces résultats sont en accord avec ceux de la Référence [89].

Le paquet d'onde $\Psi(q, t)$ peut s'exprimer en fonction de $\langle q \rangle$ et $\langle p \rangle$ en utilisant le fait que

$$-(\gamma_0 - I_0) = \alpha(t) \langle p \rangle + \beta(t) \langle q \rangle, \quad (3.36)$$

$$\int_0^t \frac{\gamma_0 - I_0}{m\alpha^2(\tau)} d\tau = \frac{a_0}{\alpha_0} - \frac{\langle q \rangle}{\alpha(t)}. \quad (3.37)$$

Ainsi nous pouvons réécrire la solution général de l'équation de Schrödinger (3.26) comme suit

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) = & \sqrt{\frac{\hbar\alpha(t) \left(a - i \int_0^t \frac{d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} \right)}{\sqrt{2\pi a \Delta q^2}}} \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} \left(\langle p \rangle \langle q \rangle + \frac{\gamma_0 a_0}{\alpha_0} \right) \right] \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \langle p \rangle q \right] \exp \left\{ - \left(\frac{i}{\hbar} \frac{\beta(t)}{2\alpha(t)} + \frac{a - i \int_0^t \frac{1}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} d\tau}{4a\Delta q^2} \right) [q - \langle q \rangle]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dans la limite $\omega \rightarrow 0$, la fonction d'onde (3.38) se réduit à celle d'une particule libre

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{free particle}}(q, t) = & \sqrt{\frac{\hbar\alpha(t) \left(a - i \int_0^t \frac{d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} \right)}{\sqrt{2\pi a \Delta q^2}}} \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} \left(\langle p \rangle \langle q \rangle + \frac{I_0 \gamma_0}{\alpha_0 \beta_0} \right) \right] \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \langle p \rangle q \right] \exp \left\{ - \left(\frac{i}{\hbar} \frac{\beta(t)}{2\alpha(t)} + \frac{a - i \int_0^t \frac{1}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} d\tau}{4a\Delta q^2} \right) [q - \langle q \rangle]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

qui est en accord avec les résultats de la référence [89].

Le remplacement de $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ par leurs valeurs respectivement (3.8), (3.9) et (3.10) dans les équations (3.28) et (3.30) montre que les valeurs moyennes de q et p suivent le mouvement classique

$$\langle q \rangle = q_{\text{cl}} = a_0 \cosh \omega t + \frac{1}{\alpha_0 m \omega} (a_0 \beta_0 - \gamma_0 + I_0) \sinh \omega t, \quad (3.40)$$

$$\langle p \rangle = p_{\text{cl}} = m \omega \left[a_0 \sinh \omega t + \frac{1}{\alpha_0 m \omega} (a_0 \beta_0 - \gamma_0 + I_0) \cosh \omega t \right], \quad (3.41)$$

où q_{cl} et p_{cl} sont respectivement la position et l'impulsion classique.

Etant donné que le mouvement classique été reproduit à l'aide du paquet d'onde gaussien, on peut leur attribué le nom des états cohérents généralisé. Les questions qui se posent :

i) est ce que ces états peuvent être obtenu à partir de l'action de l'opérateur déplacement sur l'état fondamental ?

ii) Sont ils des états propre d'un opérateur d'annihilation ?

La reponse à la première question est oui car, on note que l'expression de la fonction d'onde $\Psi(q, t)$ (3.38) s'obtient à partir de l'application de l'opérateur déplacement $D(z, t)$

$$D(z, t) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\langle p \rangle q - \langle q \rangle p) \right], \quad (3.42)$$

dont les propriétés sont

$$D^\dagger(z, t)qD(z, t) = q + \langle q \rangle = q + q_{cl}, \quad (3.43)$$

$$D^\dagger(z, t)pD(z, t) = p + \langle p \rangle = p + p_{cl}, \quad (3.44)$$

sur l'état du vide $\Psi_0(q, t)$ correspondent à une particule au repos $\langle p \rangle = 0$ et à l'origine $\langle q \rangle = 0$

$$\Psi_0(q, t) = \Psi(q, t) |_{\langle q \rangle=0, \langle p \rangle=0}, \quad (3.45)$$

$$D(z, t)\Psi_0(q, t) = \Psi(q, t). \quad (3.46)$$

Concernant la deuxième question, la réponse est évidente car ces paquets d'ondes gaussiens sont des états propres de l'opérateur annihilation

$$\hat{A}(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{a}\hbar\alpha(t)} - \frac{\beta(t)\Gamma(t)}{2\hbar m\sqrt{a}} + i\sqrt{a}\beta(t) \right) \hat{q} + \frac{i}{\hbar} \left(\sqrt{a}\hbar\alpha(t) + \frac{i\alpha(t)\Gamma(t)}{2m\sqrt{a}} \right) \hat{p}$$

Enfin, la densité de probabilité est le module au carré de la fonction d'onde (3.38)

$$|\Psi(q, t)|^2 = \frac{\hbar\alpha(t)}{\sqrt{2\pi a}\Delta q^2} \sqrt{\left(a^2 + \left(\int_0^t \frac{d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} \right)^2 \right)} \exp \left\{ -\frac{[q - \langle q \rangle]^2}{2(\Delta q)^2} \right\}, \quad (3.47)$$

sachant que $\Delta q = \frac{\hbar\alpha(t)}{\sqrt{a}} \sqrt{a^2 + \left(\int_0^t \frac{1}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} d\tau \right)^2}$, la densité de probabilité (3.47) se simplifié considérablement et n'est rien d'autre qu'une gaussienne de largeur (l'écart-type) Δq et de variance $(\Delta q)^2$

$$|\Psi(q, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta q} \exp \left(-\frac{(q - \langle q \rangle)^2}{2(\Delta q)^2} \right). \quad (3.48)$$

Evidement cette équation montre qu'à l'instant initiale un paquet d'onde gaussien reste gaussien au cours du temps. La densité de probabilité $|\Psi(q, t)|^2$ est représentée dans les figures 3 et 4

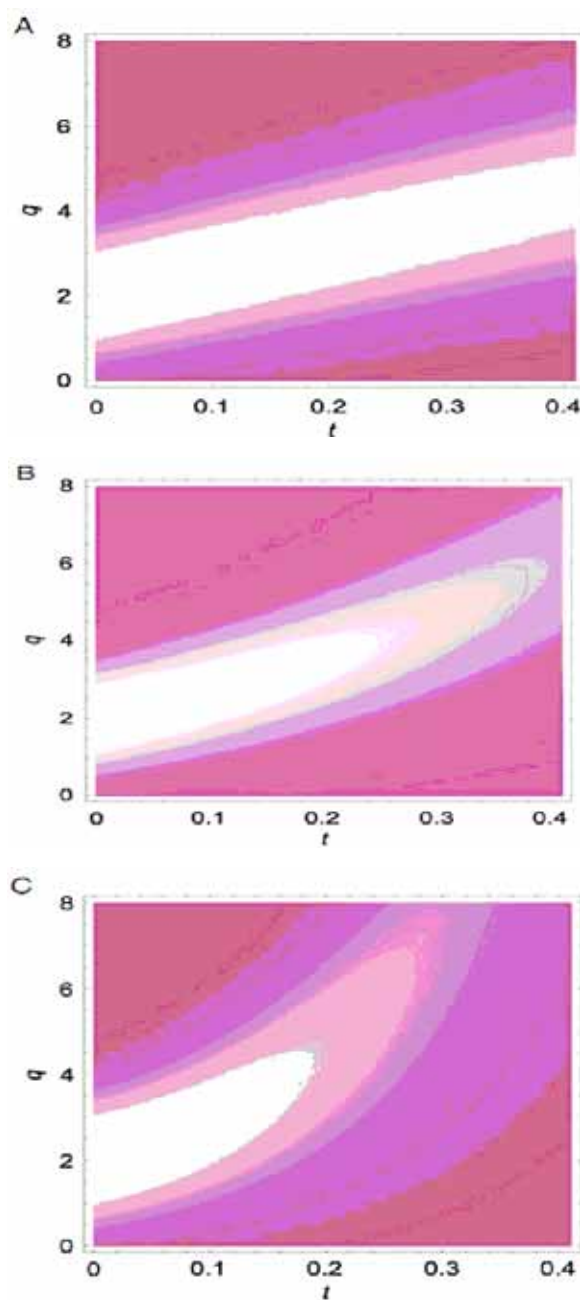


Figure. 3 : L'évolution temporelle de la densité de probabilité $|\Psi(q, t)|^2$: (A) pour $\omega \rightarrow 0, 0$,
 (B) pour $\omega = 2, 5$, et (C) pour $\omega = 5, 0$. On a fixé les constantes $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = 1$,
 $I_0 = 5$, $a = 1$, $a_0 = 2$, $m = 1$, et $\hbar = 1$ [84].

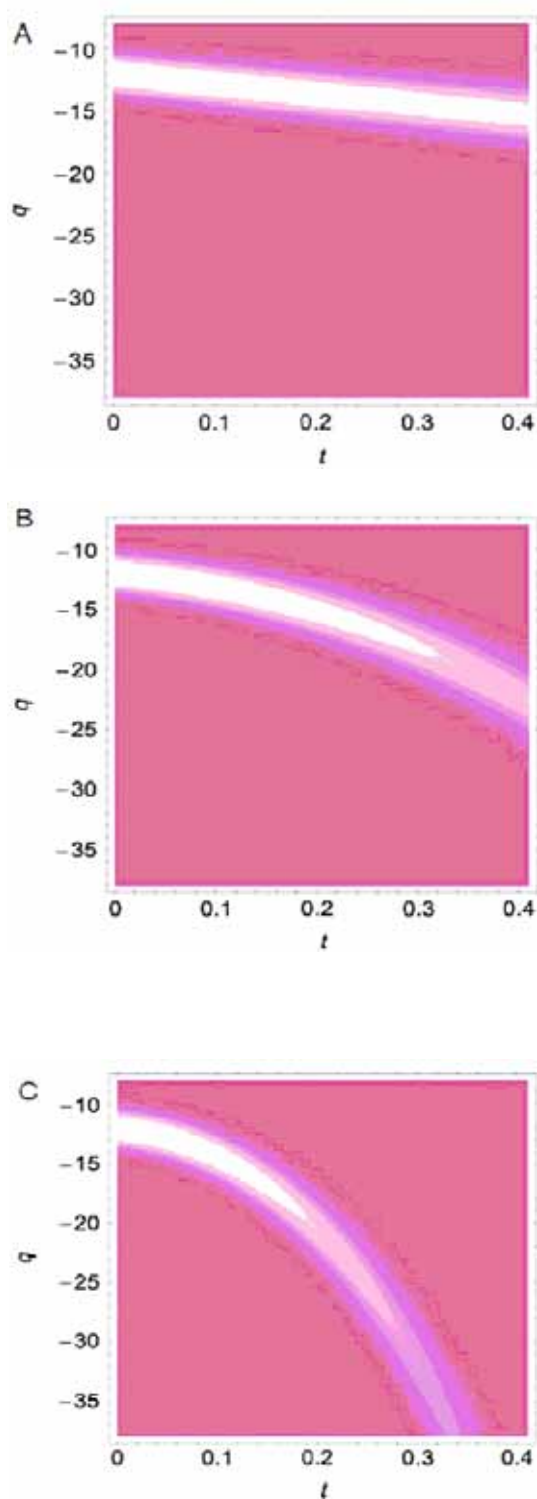


Figure. 4 : La même chose que la figure 3, sauf qu'on a prendre $a_0 = -12$.

Les figures 3 et 4 montrent que le paquet d'ondes se déplace dans la direction positive (figures 3) ou négative (figures 4) de q à savoir les conditions initiales. Nous pouvons dire pour $\omega \neq 0$ que la vitesse du paquet d'ondes augmente au cours du temps.

Chapitre 4

Angle de Hannay pour le champ de Yang-Mills

Un modèle cosmologique est une représentation mathématique de l'univers qui cherche à expliquer les raisons de son aspect actuel, et à décrire son évolution au cours du temps. Divers modèles cosmologiques gouvernés par des champs homogènes (invariant par translation) et isotropes (invariant par rotation) en présence de la gravitation deviennent un sujet de recherche très intéressant en cosmologie. Traditionnellement, la plupart des modèles acceptés sont modélisés par un ou plusieurs champs scalaires. Du point de vue de la relativité générale, la théorie des champs de jauge non abéliens de la gravitation peut être considérée comme la généralisation de la théorie Einstein-Maxwell.

Une classe des modèles non linéaires avec des champs de jauge non-abéliens suggérés par Gal'tsov et ses collaborateurs [90, 91, 92, 93, 94], étudiés diverses généralisations notamment ; l'expansion de l'univers, des hautes corrections de la courbure d'espace, des champs de Higgs et la constante cosmologique. Des études approfondies sur le champ de jauge de YM ou Einstein-Yang-Mills (EYM) ont été réalisées dans le but d'expliquer l'origine de l'inflation cosmique [93].

Cai et Papini [95] ont montré qu'une généralisation covariante de la phase de Berry qui est reliée à l'angle de Hannay conduit à générer des champs de jauge non-abélien selon la méthode adoptée par Wilczek et Zee [96] tenant compte des approximations non-relativistes. En fait, ce formalisme covariant est non seulement acceptable, mais de plus il est conforme avec la théorie

de Yang-Mills [95]. En plus, Cai et Papini [97] ont généralisé cette théorie à des systèmes non linéaires. Les champs de Yang-Mills sont des champs vectoriels qui obéissent à l'invariance de jauge locale $SU(2)$. Une caractéristique particulière des champs de Yang-Mills est qu'ils sont décrits par des oscillateurs quartiques [90].

La théorie de Yang-Mills classique est hautement non linéaire et les équations de Yang-Mills qui lui sont associées sont très difficiles à résoudre de façon exacte en dehors de cas particuliers. Pour simplifier l'analyse du système, on suppose que les paramètres dépendent lentement du temps donc le système évolue adiabatiquement. Cette théorie adiabatique nous permet d'étudier l'évolution classique de l'oscillateur quartique et ainsi d'introduire la notion d'angle géométrique ou angle de Hannay.

4.1 Angle de Hannay

Le théorème adiabatique en mécanique classique [98] stipule qu'au cours d'un changement adiabatique des paramètres d'un Hamiltonien intégrable les variables d'action I restent constantes et les variables angulaires conjuguées θ évoluent avec des vitesses $\dot{\theta}(t)$ égales aux fréquences instantanées associées à l'Hamiltonien au même instant plus une contribution géométrique qui ne dépend que du circuit suivi dans l'espace des paramètres [5],[99],[100].

Pour simplifier, considérons un système à une dimension décrit par l'Hamiltonien $H(q, p, \mathbf{X}(t))$ caractérisé par les paramètres $\mathbf{X}(t)$ lentement variables en fonction du temps.

Soit $S(q, I, \mathbf{X}(t))$ une fonction génératrice de la transformation canonique $(q, p) \rightarrow (I, \theta)$ où

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\partial S}{\partial I}. \quad (4.1)$$

La dynamique des nouvelles variables I et θ est régie par le nouvel Hamiltonien

$$\tilde{H}(I, \theta, \mathbf{X}(t)) = H(I, \mathbf{X}(t)) + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Pour exprimer $\frac{\partial S}{\partial t}$ dans les variables I et θ , Berry [99] introduit la fonction \mathfrak{S}

$$\mathfrak{S}(I, \theta, \mathbf{X}) = S[q(I, \theta, \mathbf{X}), I, \mathbf{X}], \quad \text{où} \quad \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t+\mathbf{T})$$

alors, l'Hamiltonien (4.2) s'écrit

$$\begin{aligned}\tilde{H}(I, \theta, \mathbf{X}(t)) &= H(I, \mathbf{X}(t)) + \dot{\mathbf{X}}(t) \frac{\partial \mathfrak{S}(I, \theta, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \\ &= H(I, \mathbf{X}(t)) + \dot{\mathbf{X}}(t) \left[\frac{\partial \mathfrak{S}(I, \theta, \mathbf{X}(t))}{\partial \mathbf{X}} - p(I, \theta, \mathbf{X}(t)) \frac{\partial q(I, \theta, \mathbf{X}(t))}{\partial \mathbf{X}} \right]\end{aligned}\quad (4.3)$$

L'hypothèse adiabatique consiste à remplacer les membres de droite des deux équations de Hamilton

$$\dot{I} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I}$$

par leurs moyennes sur la trajectoire d'action I de l'Hamiltonien $H(q, p, \mathbf{X})$ (la moyenne d'une grandeur $f(q, p, \mathbf{X})$ étant définie par $\bar{f}(I, \mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta f(q(I, \theta, \mathbf{X}), p(I, \theta, \mathbf{X}), \mathbf{X})$)

La première équation donne le théorème adiabatique standard $\dot{I} = 0$. La seconde donne la vitesse angulaire somme d'une partie dynamique

$$\dot{\theta}_D = \overline{\frac{\partial H(I, \mathbf{X})}{\partial I}} = \omega(I, \mathbf{X}) \quad (4.4)$$

et d'une partie géométrique,

$$\Delta\theta_H = -\frac{\partial}{\partial I} \oint p \frac{\partial q}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}. \quad (4.5)$$

Pour bien illustrer la notion d'angle de Hannay, on se propose d'étudier l'exemple de l'oscillateur harmonique généralisé à une dimension [99]

$$H(t) = \frac{1}{2} [X(t) q^2 + 2Y(t) qp + Z(t) p^2] = I\dot{\theta}, \quad (4.6)$$

où $\dot{\theta} = \sqrt{XZ - Y^2}$ ($XZ > Y^2$) est la fréquence instantanée. En effectuant la transformation canonique aux variables action-angle (I, θ)

$$q(I, \theta, \mathbf{X}(t)) = \sqrt{\frac{2Z}{\dot{\theta}}} \cos \theta, \quad (4.7)$$

$$p(I, \theta, \mathbf{X}(t)) = -\sqrt{\frac{2Z}{\dot{\theta}}} \left(\frac{Y}{Z} \cos \theta + \frac{\dot{\theta}}{Z} \sin \theta \right). \quad (4.8)$$

Le nouvel Hamiltonien

$$\tilde{H}(I, \theta, \mathbf{X}(t)) = H(I, \theta, \mathbf{X}(t)) + \frac{\partial S(q(I, \theta, \mathbf{X}(t)), I, \mathbf{X}(t))}{\partial t}. \quad (4.9)$$

L'angle de Hannay définie par (4.5) conduit a

$$\Delta\theta_H = \frac{1}{2} \oint \frac{XdZ - ZdY}{Z\sqrt{XZ - Y^2}}. \quad (4.10)$$

Ce calcul va être utilisé dans la suite.

4.2 Condensates de Yang-Mills

On ne prétend pas d'écrire le modèle de Yang-Mills en cosmologie mais on utilise les résultats obtenus dans la littérature pour décrire l'évolution adiabatique des équations du mouvement du champ de Higgs dans la jauge de Yang-Mills. L'action classique qui décrit le modèle d'Einstein-Yang-Mills-Higgs en théorie des jauge associée à une symétrie brisée en présence d'un champ Yang-Mills peut être exprimée en fonction de $\alpha = M_W/(gM_{\text{Pl}})$ et $\beta = M_H/M_W$, où g constante de couplage, M_{Pl} , M_W sont respectivement, la masse de Planck et la masse du boson W, et M_H étant la masse de Higgs. Gal'tsov et Davydov [90] ont proposé un modèle décrivant les équations des champ scalaires de Higgs q et de Yang-Mills f sous la forme

$$\ddot{q} + 3H(t)\dot{q} = -\frac{3}{2a^2(t)}q[1 + f(t)]^2 - \beta^2(q^2 - \alpha^2)q, \quad (4.11)$$

$$\ddot{f} + H(t)\dot{f} = -\frac{1}{2}q^2[1 + f(t)] - \frac{2}{a^2(t)}(f^2 - 1)f, \quad (4.12)$$

où le paramètre de Hubble $H(t)$ est dépend du temps et décrit le taux d'expansion de l'univers à un instant donné, $a(t)$ est un facteur d'échelle qui apparaît dans les métriques de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)[90].

D'après [90], les équations (4.11) et (4.12) dans des cas particuliers ont des solutions non triviales telles que [90]

$$f = \frac{\sqrt{8}\beta - \sqrt{3}}{\sqrt{8}\beta + \sqrt{3}}, \quad q = \sqrt{f}\alpha, \quad a^2 = \frac{4(1-f)}{\alpha^2}, \quad (4.13)$$

dans l'équation (4.11) se réduit à

$$\ddot{q} + 3H(t)\dot{q} + \omega^2(t)q = -\beta^2q^3, \quad (4.14)$$

où

$$\omega^2(t) = \frac{3}{2a^2(t)} \left(\frac{\sqrt{8}\beta - \sqrt{3}}{\sqrt{8}\beta + \sqrt{3}} + 1 \right)^2 - \beta^2\alpha^2. \quad (4.15)$$

Remarquons que l'équation (4.14) décrit la dynamique d'un oscillateur quartique dépendant du temps dont l'Hamiltonien [90]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[e^{-3\int H(t)dt} p^2 + \omega^2(t) e^{3\int H(t)dt} q^2 + 2\beta^2 e^{3\int H(t)dt} q^4 \right]. \quad (4.16)$$

A partir des équations de Hamilton on déduit que

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = e^{-3 \int H(t) dt} p, \quad (4.17)$$

$$p = \dot{q} e^{3 \int H(t) dt}, \quad (4.18)$$

et en termes d'une nouvelle variable Q définie comme

$$Q = q e^{\frac{3}{2} \int H(t') dt'},$$

l'Hamiltonien (4.16) s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P, Q, t) = & \frac{1}{2} P^2 + \frac{3}{2} H(t) P Q + \frac{1}{2} \omega^2(t) Q^2 \\ & + \beta^2 Q^4 e^{-3 \int H(t') dt'}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dans le cas particulier, où les paramètres $H(t)$, $\omega^2(t)$ et β^2 sont donnés respectivement par $2\lambda(t)/3$, ω_0^2 , et $\nu/4$, l'Hamiltonien (4.19) se réduit à celui défini par l'équation (30) dans la référence [101]

$$\mathcal{H}_D(P, Q) = \frac{1}{2} P^2 + \lambda P Q + \frac{1}{2} \omega_0^2 Q^2 + \frac{\nu}{4} e^{-3 \int H(t') dt'} Q^4, \quad (4.20)$$

et qui correspond à l'Hamiltonien de l'oscillateur quartique amorti.

D'après les équations de Hamilton

$$\dot{Q} = \partial \mathcal{H} / \partial P = P + \frac{3}{2} H Q, \quad \dot{P} = -\partial \mathcal{H} / \partial Q = -\frac{3}{2} H P - \omega^2(t) Q - 4\beta^2 e^{-3 \int H(t') dt'} Q^3, \quad (4.21)$$

on obtient l'équation classique du mouvement

$$\ddot{Q} + \left(\Omega^2 - \frac{3}{2} \dot{H} \right) Q + 4\beta^2 e^{-3 \int H(t') dt'} Q^3 = 0, \quad (4.22)$$

dont la forme est un peu compliquée et $\Omega^2 = \omega^2(t) - \frac{9}{4} H^2(t)$. Sur la base de la description mathématique associée aux condensates de Yang-Mills présentés ci-dessous, les propriétés de phase des champs de Yang-Mills et l'angle de Hannay seront étudiées dans la suite.

4.3 Evolution des champs de Yang-Mills

Dans le but d'étudier d'évolution temporel des champs de YM, nous introduisons la variable complexe Z et son conjugué complexe \bar{Z} tel que

$$Z = \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \left[Q - \frac{i}{\Omega} \left(\frac{3}{2} H Q + P \right) \right], \quad (4.23)$$

$$\bar{Z} = \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \left[Q + \frac{i}{\Omega} \left(\frac{3}{2} H Q + P \right) \right]. \quad (4.24)$$

D'une manière équivalente, Q et P peuvent s'écrire comme suit

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} (Z + \bar{Z}), \quad (4.25)$$

$$P = \frac{i\Omega - \frac{3}{2}H}{\sqrt{2\Omega}} Z - \frac{i\Omega + \frac{3}{2}H}{\sqrt{2\Omega}} \bar{Z}. \quad (4.26)$$

D'après les équations de Hamilton (4.21)

$$\begin{aligned} & -\frac{\dot{\Omega}}{2\Omega\sqrt{2\Omega}} (Z + \bar{Z}) + \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} (\dot{Z} + \dot{\bar{Z}}) \\ &= \frac{i\Omega - \frac{3}{2}H}{\sqrt{2\Omega}} Z - \frac{i\Omega + \frac{3}{2}H}{\sqrt{2\Omega}} \bar{Z} + \frac{3}{2}H \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} (Z + \bar{Z}), \end{aligned}$$

alors

$$\dot{\bar{Z}} = \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} (Z + \bar{Z}) + \left[i\Omega - \frac{3}{2}H \right] Z - \left[i\Omega + \frac{3}{2}H \right] \bar{Z} + \frac{3}{2}H (Z + \bar{Z}) - \dot{Z},$$

qui se simplifie en

$$\dot{\bar{Z}} = \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} (Z + \bar{Z}) + i\Omega Z - i\Omega \bar{Z} - \dot{Z}. \quad (4.27)$$

D'autre part, la deuxième équation de Hamilton (4.21) permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{i\dot{\Omega} - \frac{3}{2}\dot{H}}{\sqrt{2\Omega}} Z - \frac{(i\Omega - \frac{3}{2}H)\dot{\Omega}}{2\Omega\sqrt{2\Omega}} Z + \frac{i\Omega - \frac{3}{2}H}{\sqrt{2\Omega}} \dot{Z} - \frac{i\dot{\Omega} + \frac{3}{2}\dot{H}}{\sqrt{2\Omega}} \bar{Z} + \frac{(i\Omega + \frac{3}{2}H)\dot{\Omega}}{2\Omega\sqrt{2\Omega}} \bar{Z} - \frac{i\Omega + \frac{3}{2}H}{\sqrt{2\Omega}} \dot{\bar{Z}} \\ &= -\frac{3}{2}H \left[\frac{i\Omega - \frac{3}{2}H}{\sqrt{2\Omega}} Z - \frac{i\Omega + \frac{3}{2}H}{\sqrt{2\Omega}} \bar{Z} \right] - \omega^2(t) \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} (Z + \bar{Z}) - 4\beta^2 e^{-3\int H(t')dt'} \left[\frac{1}{\sqrt{2\Omega}} (Z + \bar{Z}) \right]^3 \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
& \dot{Z} \\
= & -\frac{3}{2} \frac{1}{2i\Omega} H \left[\left(i\Omega - \frac{3}{2} H \right) Z - \left(i\Omega + \frac{3}{2} H \right) \bar{Z} \right] - \frac{\omega^2(t)}{2i\Omega} (Z + \bar{Z}) - \frac{4\beta^2}{2i\Omega} e^{-3 \int H(t') dt'} \frac{1}{2\Omega} (Z + \bar{Z})^3 \\
& - \frac{\left(i\dot{\Omega} - \frac{3}{2} \dot{H} \right)}{2i\Omega} Z + \frac{1}{2i\Omega} \frac{\left(i\Omega - \frac{3}{2} H \right) \dot{\Omega}}{2\Omega} Z + \frac{i\dot{\Omega} + \frac{3}{2} \dot{H}}{2i\Omega} \bar{Z} - \frac{1}{2i\Omega} \frac{\left(i\Omega + \frac{3}{2} H \right) \dot{\Omega}}{2\Omega} \bar{Z} \\
& + \frac{i\Omega + \frac{3}{2} H}{2i\Omega} \left[\frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} (Z + \bar{Z}) + i\Omega Z - i\Omega \bar{Z} - \dot{Z} \right]
\end{aligned}$$

finalemt, on trouve

$$\begin{aligned}
\dot{Z} = & i\Omega Z + \frac{4i\beta^2}{4\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} (Z + \bar{Z})^3 \\
& - \frac{3i}{2} \frac{\dot{H}}{2\Omega} Z + \frac{\dot{\Omega} - \frac{3i}{2} \dot{H}}{2\Omega} \bar{Z}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Cette équation peut être résolue perturbativement en utilisant la transformation canonique à la forme normale [102] si on suppose que le système est faiblement non-linéaire $[(4\beta^2/\omega^2)Q^2 \ll 1]$ et que les paramètres H , ω , et β varient adiabatiquement. Dans ces conditions, on introduit alors la transformation proche de l'identité

$$Z = u + \delta\bar{u}, \tag{4.29}$$

où δ est suffisamment petit pour que $u \gg \delta\bar{u}$. Alors, l'équation (4.28) peut être réécrite en fonction des nouvelles variables u et \bar{u}

$$\begin{aligned}
& \dot{u} + \delta\dot{\bar{u}} + \delta\dot{\bar{u}} \\
= & i\Omega (u + \delta\bar{u}) + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} [(u + \bar{u}) + (\delta\bar{u} + \bar{\delta}u)]^2 \\
& \times [(u + \bar{u}) + (\delta\bar{u} + \bar{\delta}u)] - \frac{3i}{2} \frac{\dot{H}}{2\Omega} (u + \delta\bar{u}) + \frac{\dot{\Omega} - \frac{3i}{2} \dot{H}}{2\Omega} (\bar{u} + \bar{\delta}u),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \dot{u} + \delta\dot{\bar{u}} + \delta\dot{\bar{u}} \\
= & i \left(\Omega - \frac{3\dot{H}}{4\Omega} \right) u + i \left(\Omega - \frac{3\dot{H}}{4\Omega} \right) \delta\bar{u} \\
& + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} [(u + \bar{u})^2 + 2(u + \bar{u})(\delta\bar{u} + \bar{\delta}u)] [(u + \bar{u}) + (\delta\bar{u} + \bar{\delta}u)] \\
& + \frac{\dot{\Omega} - \frac{3i}{2} \dot{H}}{2\Omega} (\bar{u} + \bar{\delta}u).
\end{aligned}$$

Comme $(\delta\bar{u} + \bar{\delta}u)^2 \ll 1$, on aura

$$\begin{aligned} \dot{u} &= iY u + iY \delta\bar{u} + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} (u + \bar{u})^2 \\ &\quad \times [(1 + 3\bar{\delta}) u + (1 + 3\delta)\bar{u}] + \frac{\dot{\Omega} - \frac{3i}{2}\dot{H}}{2\Omega} \\ &\quad \times (\bar{u} + \bar{\delta}u) - \dot{\delta}\bar{u} - \delta\dot{u}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

avec $Y = \Omega - \frac{3\dot{H}}{4\Omega}$. Le conjugué complexe de l'équation ci-dessus nous donne

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}} &= -iY \bar{u} - iY \bar{\delta}u - \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} (u + \bar{u})^2 \\ &\quad \times [(1 + 3\delta)\bar{u} + (1 + 3\bar{\delta})u] \\ &\quad + \frac{\dot{\Omega} + \frac{3i}{2}\dot{H}}{2\Omega} (u + \delta\bar{u}) - \dot{\delta}u - \bar{\delta}\dot{u}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

On peut éliminer le terme non-linéaire résonant proportionnel à \bar{u} dans l'équation (4.30) pour la nouvelle variable u . En effet, injectant l'expression de $\dot{\bar{u}}$ défini par l'équation (4.31) dans l'équation (4.30)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= iY u + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} (u + \bar{u})^2 \\ &\quad \times [(1 + 3\bar{\delta}) u + (1 + 3\delta)\bar{u}] + \frac{\dot{\Omega} - \frac{3i}{2}\dot{H}}{2\Omega} (\bar{u} + \bar{\delta}u) \\ &\quad - \dot{\delta}\bar{u} + 2iY \delta\bar{u} + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} \delta (u + \bar{u})^2 \\ &\quad \times [(1 + 3\delta)\bar{u} + (1 + 3\bar{\delta})u] - \frac{\dot{\Omega} + \frac{3i}{2}\dot{H}}{2\Omega} \delta u. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Or, dans le cas où δ et son conjugué complexe $\bar{\delta}$ sont de la forme

$$\delta = \frac{\frac{3}{2}\dot{H} + i\dot{\Omega}}{4\Omega^2} \quad \bar{\delta} = \frac{\frac{3}{2}\dot{H} - i\dot{\Omega}}{4\Omega^2}. \quad (4.33)$$

L'équation (4.32) se simplifie

$$\begin{aligned} \dot{u} &= iY u + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} (u + \bar{u})^2 \\ &\quad \times [(1 + \delta + 3\bar{\delta}) u + (1 + 4\delta)\bar{u}]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Le premier terme dans l'équation (4.32), $iY u = i \left(\Omega - \frac{3\dot{H}}{4\Omega} \right) u$ contient déjà l'angle de Hannay de l'oscillateur généralisé linéaire, où Ω la fréquence instantanée et une contribution

géométrique $\frac{3\dot{H}}{4\Omega}$ qui est l'angle de Hannay. Pour d'obtenir la correction non linéaire on introduit un second changement de variable proche de l'identité [101] tel que

$$u = v + \alpha v^3 + \rho v \bar{v}^2 + \gamma \bar{v}^3, \quad (4.35)$$

où α , ρ , et γ sont des coefficients réels dépendants du temps. En insérant (4.35) dans l'équation (4.34), on obtient pour v l'équation

$$\begin{aligned} (1 + 3\alpha v^2 + \rho \bar{v}^2) \dot{v} &= iY(v + \alpha v^3 + \rho v \bar{v}^2 + \gamma \bar{v}^3) \\ &+ \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} (v + \bar{v})^2 [(1 + \delta + 3\bar{\delta})(v \\ &+ \alpha v^3 + \rho v \bar{v}^2 + \gamma \bar{v}^3) + (1 + 4\delta)(\bar{v} + \alpha \bar{v}^3 \\ &+ \rho \bar{v} v^2 + \gamma v^3)] - (2\rho v + 3\gamma \bar{v}^2) \dot{\bar{v}} - \dot{\alpha} v^3 \\ &- \dot{\rho} v \bar{v}^2 - \dot{\gamma} \bar{v}^3, \end{aligned} \quad (4.36)$$

dont le conjugué complexe est

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}} (1 + 3\alpha \bar{v}^2 + \rho v^2) &= -iY(\bar{v} + \alpha \bar{v}^3 \\ &+ \rho \bar{v} v^2 + \gamma v^3) - \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} (v + \bar{v})^2 \\ &\times [(1 + \bar{\delta} + 3\delta)(\bar{v} + \alpha \bar{v}^3 + \rho \bar{v} v^2 + \gamma v^3) \\ &+ (1 + 4\bar{\delta})(v + \alpha v^3 + \rho v \bar{v}^2 + \gamma \bar{v}^3)] \\ &- \dot{v} (2\rho \bar{v} + 3\gamma v^2) - \dot{\alpha} \bar{v}^3 - \dot{\rho} \bar{v} v^2 - \dot{\gamma} v^3, \end{aligned} \quad (4.37)$$

réinjectant $\dot{\bar{v}}$ défini par l'équation (4.37) dans (4.36), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{v} + \dot{\alpha} v^3 + \dot{\rho} v \bar{v}^2 + \dot{\gamma} \bar{v}^3 &= iYv + \frac{3i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} [1 + 2(\delta + \bar{\delta})] v^2 \bar{v} \\ &+ \left[2\alpha iY + e^{-3 \int H(t') dt'} \frac{i\beta^2}{\Omega^2} (1 + \delta + 3\bar{\delta}) \right] v^3 \\ &+ \left[2i\rho Y + e^{-3 \int H(t') dt'} \frac{3i\beta^2}{\Omega^2} (1 + 3\delta + \bar{\delta}) \right] v \bar{v}^2 \\ &+ \left[4i\gamma Y + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} (1 + 4\delta) \right] \bar{v}^3. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Pour que l'équation (4.37) ne contient plus des termes non résonants (cubiques), on peut

choisir les équations différentielles telles que les coefficients de la transformation α , ρ et γ sont :

$$\dot{\alpha} = 2\alpha iY + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} (1 + \delta + 3\bar{\delta}), \quad (4.39)$$

$$\dot{\rho} = 2i\rho Y + \frac{3i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} (1 + 3\delta + \bar{\delta}), \quad (4.40)$$

$$\dot{\gamma} = 4i\gamma Y + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} (1 + 4\delta), \quad (4.41)$$

alors, l'équation (4.38) se réduit à

$$\dot{v} = iYv + \frac{3i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3 \int H(t') dt'} [1 + 2(\delta + \bar{\delta})] v^2 \bar{v}. \quad (4.42)$$

Cette formule sera utilisée dans la section suivante pour étudier les propriétés de phase du champ de Yang-Mills et l'angle de Hannay correspondant.

4.4 Angle de Hannay pour le champ de Yang-Mills

On sait que le champ deYM est un champ de jauge. Alors, du point de vue théorique la discussion d'existence d'un angle de Hannay non nul dans l'évolution du champ de YM est nécessaire [92, 96]. En écrivant v sous la forme

$$v = A e^{\frac{3}{2} \int H(t') dt'} e^{i\Theta}, \quad (4.43)$$

nous pouvons confirmer à partir de l'équation (4.42) que les équations de l'amplitude A et l'angle $\dot{\Theta}$ sont

$$\dot{A} + \frac{3}{2} HA + iA\dot{\Theta} = iYA + \frac{3i\beta^2}{\Omega^2} [1 + 2(\delta + \bar{\delta})] A^3. \quad (4.44)$$

$$\dot{A} + \frac{3}{2} HA - iA\dot{\Theta} = -iYA - \frac{3i\beta^2}{\Omega^2} [1 + 2(\delta + \bar{\delta})] A^3, \quad (4.45)$$

où la somme de (4.44) et (4.45) est

$$\dot{A} + 3HA = 0. \quad (4.46)$$

D'autre part, la soustraction de l'équation (4.45) de l'équation (4.44) nous donne

$$\dot{\Theta} = Y + \frac{3\beta^2}{\Omega^2} [1 + 2(\delta + \bar{\delta})] A^2. \quad (4.47)$$

L'équation (4.46) montre qu'il est possible de calculer la forme explicite de $A(t)$ à condition que $H(t)$ soit connue. Si $A(t)$ est connue l'équation (4.47) nous donne Θ et par conséquent, on peut identifier la solution complète de v (4.43). Comme on a

$$\delta + \bar{\delta} = \frac{3\dot{H}}{2\Omega^2}, \quad (4.48)$$

l'équation (4.47) peut être réécrit sous la forme

$$\dot{\Theta} = \Omega \left(1 + \frac{3\beta^2}{\Omega^3} A^2 \right) - \frac{3\dot{H}}{4\Omega} \left(1 + \frac{6\beta^2}{\Omega^3} A^2 \right). \quad (4.49)$$

Sachant que $A = A_0 e^{3 \int_0^t H dt'}$ solution de l'équation (4.46), l'équation (4.49) devient

$$\dot{\Theta} = \Omega - \frac{3\dot{H}}{4\Omega} + \frac{3\beta^2}{\Omega^2} \left(1 - \frac{3\dot{H}}{2\Omega^2} \right) A_0^2 e^{6 \int_0^t H dt'}. \quad (4.50)$$

En particulier, pour t suffisamment petit et sous l'hypothèse du changement adiabatique des paramètres H et β ($e^{6 \int_0^t H dt'} \simeq 1 + 6 \int_0^t H dt'$), on peut exprimer $\dot{\Theta}$ sous la forme

$$\dot{\Theta} = \Omega \left[1 + \frac{3}{\Omega^3} \beta^2 \left(1 + 6 \int_0^t H dt' \right) A_0^2 \right] - \frac{3\dot{H}}{4\Omega} \left[1 + \frac{6}{\Omega^3} \beta^2 \left(1 + 6 \int_0^t H dt' \right) A_0^2 \right]$$

ou bien

$$\dot{\Theta} = \Omega \left(1 + \frac{3\tilde{\beta}^2}{\Omega^3} A_0^2 \right) - \frac{3\dot{H}}{4\Omega} \left(1 + \frac{6\tilde{\beta}^2}{\Omega^3} A_0^2 \right), \quad (4.51)$$

où $\tilde{\beta} = \beta(1 + 3 \int_0^t H dt')$ est un paramètre renormalisé. Le premier terme est la partie dynamique renormalisée de la fréquence Ω . Le second terme est un élément géométrique. Ainsi, l'angle de Hannay est obtenue

$$\Delta\Theta_H(t) = - \int_{t_0}^t \frac{3\dot{H}}{4\Omega} \left(1 + \frac{6\tilde{\beta}^2}{\Omega^3} A_0^2 \right) dt. \quad (4.52)$$

Les figures (1-4) représentent l'évolution au cours du temps de l'équation (4.52) et leurs dérivées par rapport au temps. Pour le choix de $t_0 = 1$, nous avons pris $H = \dot{a}(t)/a(t)$ avec $a(t) = (t/a_0)^{a_1}$ où a_0 et a_1 sont des constantes.

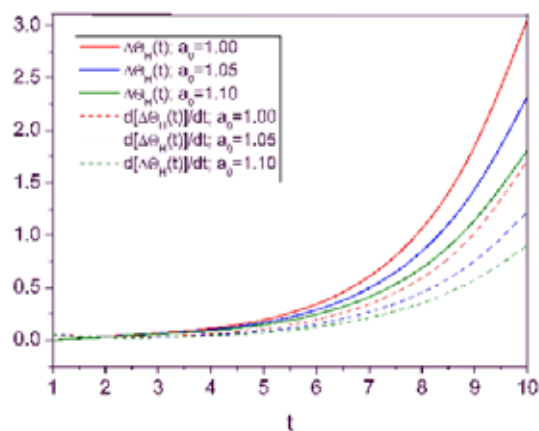


Figure. 1 : La variation de l'angle de Hannay au cours du temps et leurs dérivées par rapport au temps pour différentes valeurs de a_0 . Nous avons utilisé $a_1 = 1$, $A_0 = 1$, $\alpha = 1$, et $\beta = 1$.

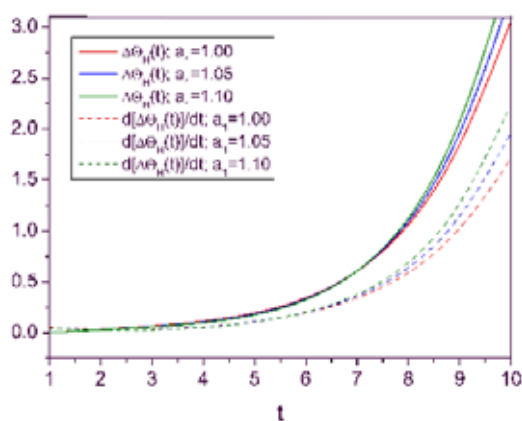


Figure. 2 : La variation de l'angle de Hannay au cours du temps et leurs dérivées par rapport au temps pour différentes valeurs de a_1 . Nous avons utilisé $a_0 = 10$, $A_0 = 1$, $\alpha = 1$, et $\beta = 1$.

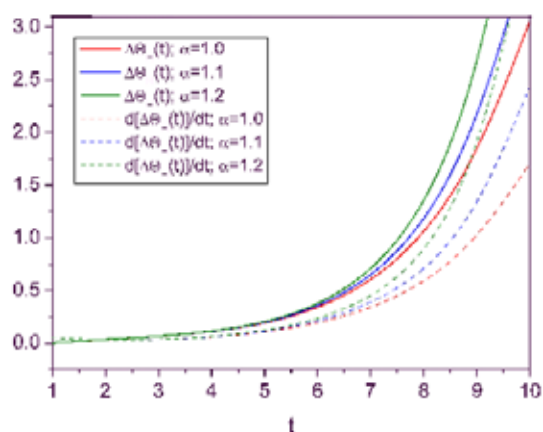


Figure. 3 : La variation de l'angle de Hannay au cours du temps et leurs dérivées par rapport au temps pour différentes valeurs de α . Nous avons utilisé $a_0 = 10$, $a_1 = 1$, $A_0 = 1$, et $\beta = 1$.

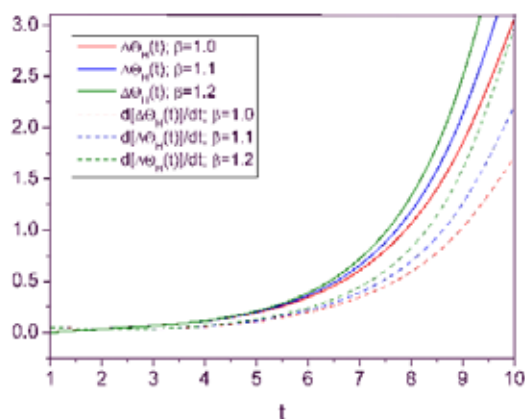


Figure. 4 : La variation de l'angle de Hannay au cours du temps et leurs dérivées par rapport au temps pour différentes valeurs de β . Nous avons utilisé $a_0 = 10$, $a_1 = 1$, $A_0 = 1$, et $\alpha = 1$.

Sur ces figures, on voit que l'angle d'Hannay augmente lentement au début, mais il devient progressivement plus rapide au cours du temps. Il s'agit d'un écart par un angle supplémentaire émergeant dans un système classique le long de la variation adiabatique des paramètres. La figure 1 montre que l'angle de Hannay au cours du temps devient faible lorsque a_0 augmente. D'autre part, à partir des Figures. 2-4, on peut conclure que l'accumulation de l'angle de Hannay devient important lorsque les paramètres tels que a_1 , α et β augmentent.

Le décalage d'angle de Hannay donné dans l'équation (4.52) fournit un terrain fertile pour des applications en cosmologie tel que l'évolution de l'univers.

Conclusion

Dans cette thèse nous avons défini les états cohérents de l'oscillateur inversé. Ces états ont une forme gaussienne et évoluent tout en restant gaussien. Ces paquets gaussiens sont obtenus, en considérant la combinaison des fonctions propres d'un invariant linéaire hermitien. Ces paquets d'onde vérifient toutes les propriétés relatives aux états cohérents de l'oscillateur harmonique. Enfin, nous estimons que les états cohérents de l'oscillateur inversé peuvent être introduits dans les cours de la mécanique quantique fondamentale car :

- i) ils reproduisent l'évolution classique.
- ii) sont fonctions propres de l'opérateur annihilation A .
- iii) s'obtiennent à partir de l'action de $D(z, t) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\langle p \rangle q - \langle q \rangle p) \right]$ sur la fonction d'états fondamental $\Psi_0(q, t) = \Psi(q, t) |_{\langle q \rangle=0, \langle p \rangle=0}$.
- iv) ne minimisent pas le principe d'incertitude de Heisenberg $\Delta q \Delta p$.

D'autre part, on a montré que l'angle de Hannay a un rôle dans la compréhension conceptuelle de plusieurs problèmes cosmologiques et peut en fait être utilisé comme un moyen supplémentaire pour l'inflation cosmique. On peut prétendre que l'observation de l'angle de Hannay peut servir de démonstration pour la validité de cette théorie cosmologique.

Bibliographie

- [1] M. A. Markov (Ed.), *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems*, 1989, Nova Science Publishers, Commack.
- [2] M. Kleber, Phys. Rep. **236** (1994) 331.
- [3] Chung-In Um, Kyu-Hwang Yeon, and Thomas F. George, Phys. Rep. **362** (2002) 63.
- [4] M.V. Berry, Proc. Roy. Soc. London A **392**, (1984) 45.
- [5] J. H. Hannay, J. Phys. A **18**, (1985) 221.
- [6] A. Messiah, "mécanique quantique", édition Dunod. (Paris, 1995).
- [7] X. C. Gao, J. B. Xu and T. OZ. Qian, Ann. of Phys. **204** (1990) 235.
- [8] X. C. Gao, J.B. Xu, T.Z. Qian, Phys. Lett. A **152** (1991) 449.
- [9] Y. Z. Lai, J.Q. Liang, H.J.W. Muller-Kirsten, J.G. Zhou, Phys. Rev. A **53** (1996) 3691.
- [10] J. Fu, X. C. Gao , J.B. Xu and X. B. Zou Acta Phys. Sin. **47** (1998) 606.
- [11] J. Q. Shen , H. Y. Zhu and J. Li Acta Phys. Sin. **50** (2001)1884.
- [12] J. Q. Shen , H. Y. Zhu and S. L. Shi Acta Phys. Sin. **51** (2002) 536.
- [13] D. M. Tong, K. Singh, L. C. Kwek, X. J. Fan, C. H. Oh, Physics Letters A **339** (2005) 288.
- [14] H. R. Lewis, Jr. and W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10** (1969) 1458.
- [15] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, E. S. Macedo, and A. S. Pereira, J. Phys. A **46**, (2013) 325305.
- [16] Y. Bouguerra, *Systèmes à deux dimensions dépendants du temps en présence de l'effet Aharonov-Bohm*, (2006).

- [17] J. Y. Ji, J. Kim and S. P. Kim, Phys. Rev. **A 51** (1995) 4268.
- [18] M. Maamache, Phys. Rev. A **52** (1995) 936.
- [19] I. A. Pedrosa, G. P. Serra and I. Guedes, Phys. Rev. A **56** (1997) 4300.
- [20] L. S. Brown, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 527.
- [21] I. A. Pedrosa, Phys. Rev. **A 55** (1997) 3219.
- [22] M. HIRAYAMA, Progress of Theo Phys, **86** (1991) 343.
- [23] D. A. Morales, J. Phys. A : Math. Gen. **21** (1988) 889.
- [24] J. M. Cerverò and J. D. Lejarreta, J. of Phys. **A22** (1989) 663.
- [25] R. Jackiw, Int. J. Mod. Phys. A **3** (1988) 285.
- [26] L. Vinet, Phys. Rev. D **37** (1988) 2369.
- [27] Ph. De Sousa Gerbert, Ann. of Phys. **189** (1989) 155.
- [28] C. Yüce, Ann. Phys. **308** (2003) 599.
- [29] M. Maamache, A. Bounames and N. Ferkous, Phys. Rev A **73** (2006) 016101.
- [30] A. B. Nassar, Physica A **24** (1987) 24.
- [31] M. S. Abdalla, Phys. Rev. A **37** (1988) 4026.
- [32] J. M. F. Bassalo, L. C. L. Botelho, H. S. A. Neto and P. T. S. Alencar, Rev. Bras. Fis. **19** (1989) 598.
- [33] B. Baseia, S. S. Mizrahi and M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. A **46** (1992) 5885.
- [34] C. A. S. Ferreira, P. T. S. Alencar and J. M. F. Bassalo, Phys. Rev. A **66** (2002) 024103.
- [35] J. R. Choi, J. Phys. C **15** (2004) 823.
- [36] M. Peshkin and A. Tonomura, The Aharonov-Bohm Effect, Springer, Berlin, 1989.
- [37] C. R. Hagen, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 503 .
- [38] C. R. Hagen, Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991) 3119.
- [39] X. Zhu and W. C. Henneberger, Nuovo Cimento B **108** (1993) 381.
- [40] C. Furtado and F. Moraes, J. Phys. A **33** (2000) 5513.
- [41] S. Azevedo, Phys. Lett. A **293** (2002) 283.

- [42] N. Ferkous and A. Bounames, Phys. Lett. A **325** (2004) 21.
- [43] Y. Bouguerra, M. Maamache, and A. Bounames, Int. J. Theor. Phys. **45**, (2006)1807.
- [44] Z. X. Wang and D. R. Due, *Special Function*, World Scientific Pub., Singapore, 1989, pp.327.
- [45] I. A. Malkin and V. I. Man'ko (unpublished) ; V. I. Man'ko, in Coherent states in quantum theory (in Russian) (Mir, Moscow, 1972), p. 5.
- [46] I. A. Malkin, V. I. Man'ko, and D. A. Trifonov, P. N, Phys. Rev. D **2** (1970) 1371.
- [47] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Man'ko, Physica, **72** (3) (1974) 597.
- [48] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, Phys. Rev. A **20**, (1979) 550.
- [49] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, and A. S. Pereira, Phys.-Usp. **57**, 891 (2014).
- [50] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, and A. S. Pereira, Braz. J. Phys. **45**, 369 (2015).
- [51] E. Schrödinger, Naturwissenschaften 14, 664 (1926).
- [52] Roy. J. Glauber, Phys. Rev.**130**, 2529(1963) ; Phys. Rev. Lett. **10**, 84 (1963) .
- [53] Roy. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [54] J. R. Klauder : J. Math. Phys. **4** (1963) 1055.
- [55] J. R. Klauder : J. Math. Phys. **4** (1963) 1058.
- [56] J. R. Klauder. "*Are coherent states the natural language of quantum theory?*" Fundamental Aspects of Quantum Theory. Springer US, 1-12 ; V. Gorini and A. Frigerio (eds.), NATO ASI Series, vol. B 144, Plenum Press, New York, (1986).
- [57] J. R. Klauder and E.C.G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics*, Benjamin, New York, (1968).
- [58] A. O. Barut and L. Girardello, Commun. Math. Phys. **21**, 41 (1971).
- [59] M. M. Nieto and L. M. Simmons, Phys. Rev. D **20** (1979) 1321.
- [60] M. M. Nieto and L. M. Simmons, Phys. Rev. D **20** (1979) 1332.
- [61] M. M. Nieto and L. M. Simmons, Phys. Rev. D **20** (1979) 342.
- [62] M. M. Nieto and L. M. Simmons, Phys. Rev. Lett. **41** (1987) 207

- [63] D. A. Trifonov, J. Phys. A **31**, 5673 (1998).
- [64] J. P. Gazeau and J. R. Klauder, J. Phys. A Math. Gen. **32** (1999) 123.
- [65] J. R. Klauder, J. Phys. A. Math. Gen. **29** (1996) L297.
- [66] J. P. Gazeau and B. Champagne, *The Fibonacci-deformed harmonic oscillator Algebraic Methods in Physics* (CMR Series in Theoretical and Mathematical Physics vol 3) ed Y Saint-Aubin and L Vinet and L vinet (Berlin : Springer).
- [67] A. M. Perelomov, Commun. Math. Phys. **26**, 222 (1972).
- [68] R. Gilmore , Ann. Phys. (NY) **74**, (1972) 391 ; J. Math. Phys. **15**, 2090 (1974).
- [69] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications* (Berlin : Springer) (1986).
- [70] J. R. Klauder and B. S. Skagerstam, *Coherent tates Applications in Physics and Mathematical Physics* (Singapore, World Scientific) 1985.
- [71] W. M. Zhang, D. H. Feng and R. Gilmore, Rev. Mod. Phys. **62** (1990) 867.
- [72] S. T. Ali, J. P. Antoine and J. P. Gazeau, *Coherent States, Wavelets and Their Generalizations*, New York : Springer, (2000).
- [73] G. Barton, Ann. Phys. **166** (1986) 322.
- [74] C. Yuce, A. Kilic, and A. Coruh, Phys. Scripta **74** (2006) 114.
- [75] A. L. de Lima, A. Rosas, and I. A. Pedrosa, Ann. Phys. **323** (2008)2253.
- [76] R. K. Bhaduri, A. Khare, S. M. Reimann, and E. L. Tomusiak, Ann. Phys. **254** (1997) 25.
- [77] Z. Lewis and T. Takeuchi, Phys. Rev. D **84** (2011) 105029.
- [78] K. K. Kim and S. P. Kim, J. Korean Phys. Soc. **56** (2010) 1055.
- [79] I. A. Pedrosa, A. L. de Lima, and A. M. de M. Carvalho, Can. J. Phys. **93** (2015) 841.
- [80] G. Chong and W. Hai, J. Phys. B **40** (2007) 211.
- [81] A. H. Guth and S.-Y. Pi, Phys. Rev. D **32** (1985) 1899.
- [82] R. J. Glauber and F. Haake, Phys. Lett. A **68** (1978) 29.
- [83] G. Felder, A. Frolov, L. Kofman, and A. Linde, Phys. Rev. D **66** (2002) 023507.

- [84] S. Wolfram, Mathematica (Wolfram Media, 2003), 5th ed., <http://www.wolfram.com>.
- [85] M. Maamache, and Y. Saadi, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 150407.
- [86] M. Maamache, and Y. Saadi, *Phys. Rev. A* **78** (2008) 052109.
- [87] Y. Saadi, and M. Maamache, *Phys. Lett. A* **376** (2012) 1328 .
- [88] J. R. Choi, *Phys. Rev. A* **82**, (2010) 055803.
- [89] M. Maamache, A. Khatir, H. Lakehal, and J. R. Choi, *Sci Rep.* **6** (2016) 30538.
- [90] D. V. Gal'tsov, E. A. Davydov, *Int. J. Mod. Phys. : Conf. Ser.* **14**, (2012) 316.
- [91] E. A. Davydov, D. V. Gal'tsov, *Gravit. Cosmol.* **21**, (2015) 35.
- [92] D. V. Gal'tsov, E. A. Davydov, *Proc. Steklov Inst. Math.* **272**, (2011) 119.
- [93] D. V. Gal'tsov, *Proceedings of the 43rd Rencontres de Moriond La Thuile* **J08**, Gal'tsov(1-16) (2008).
- [94] V. V. Dyadichev, D. V. Gal'tsov, A. G. Zorin, M. Yu. Zotov, *Phys. Rev. D* **65**, (2002) 084007.
- [95] Y. Q. Cai, G. Papini, *Mod. Phys. Lett. A* **4**, (1989) 1143.
- [96] F. Wilczek, A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **52**, (1984) 2111,
- [97] Y. Q. Cai, G. Papini, *Class. Quantum Grav.* **7**, (1990) 269.
- [98] V.I. Arnold, *Mathematical Methods in Classical Mechanics* (Springer, New York, 1978) Chapitre 10, p. 297.
- [99] M. V. Berry, *J. Phys. A* **18**, (1985) 15.
- [100] M. Maamache, J. P. Provost, & G. Vallée, *J. Phys. A : Math Gen*, **23** (1990), 5765.
- [101] O. V. Usatenko, J.-P. Provost, G. Vallée, A. Boudine, *Phys. Lett. A* **250**, (1998) 99.
- [102] V.I. Arnold, *Mathematical Methods in Classical Mechanics* (Springer, New York, 1978) Appendix 7, p. 385.

ANNEXE

Time behavior of a Gaussian wave packet accompanying the generalized coherent state for the inverted oscillator

Mustapha Maamache¹, Yacine Bouguerra^{1,2}, and Jeong Ryeol Choi^{3,*}

¹Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif 19000, Algeria

²Département de Physique, Faculté des Sciences, Université de Jijel, BP 98, Ouled Aissa, Jijel 18000, Algeria

³Department of Radiologic Technology, Daegu Health College, Buk-gu, Daegu 41453, Republic of Korea

*E-mail: choiardor@hanmail.net

Received February 15, 2016; Revised March 28, 2016; Accepted April 11, 2016; Published June 7, 2016

.....
 A Gaussian wave packet of the inverted oscillator is investigated using the invariant operator method together with the unitary transformation method. A simple wave packet directly derived from the eigenstates of the invariant operator of the system corresponds to a plane wave that is fully delocalized. However, we can construct a weighted wave packet in terms of such plane waves, which corresponds to a Gaussian wave. This wave packet is associated with the generalized coherent state, which can be crucially utilized for investigating the classical limit of quantum wave mechanics. Various quantum properties of the system, such as fluctuations of the canonical variables, the uncertainty product, and the motion of the wave packet or quantum particle, are analyzed by means of this wave packet. We have confirmed that the time behavior of such a wave packet is very similar to the counterpart classical state. The wave packet runs away from the origin in the positive or negative direction in the 1D coordinate depending on the condition of the initial state. We have confirmed that this wave packet not only moves acceleratively but also spreads out during its propagation.

Subject Index A10, A60

1. Introduction

Quantum solutions can only be exactly derived for a very few of the numerous mechanical systems. The inverted oscillator, the potential of which exerts a repulsive force on the particle, belongs to a rare type of system that is solvable from both the classical and quantum-mechanical points of view. This oscillator can be obtained by changing the normal angular frequency of the simple harmonic oscillator to a purely imaginary one: $\omega \rightarrow i\omega$. For more than a decade, the quantum characteristics of the inverted oscillator have attracted noticeable interest from the theoretical physics community and there have been many associated reports [1–9]. The wave packets of the inverted oscillator do not oscillate over time and their physical properties are very different from those of the simple harmonic oscillator. It is well known that the classical solutions of the inverted oscillator in phase space diverge exponentially over time. The energy spectrum of the inverted oscillator is not discrete but continuous, like a free particle. Moreover, zero-point energy does not exist in this system [1] because the system is unbound.

As well as the ordinary harmonic oscillator, the inverted oscillator can also be applied to various physical systems. For example, it can be used to describe the physical mechanism of matter-wave bright solitons [10], a particular scalar field model in the inflationary universe [11], superfluorescence phenomena [12], and a cosmological model with a negative potential [13]. Tunneling effects and sojourn time in the unstable equilibrium position for the wave packet in the inverted oscillator have been studied by Barton [2]. Combescure and Combescure proposed a method for evaluating the quantum fidelity of the inverted oscillator with a singular perturbation, which is an important concept in the field of quantum computation and quantum chaos [14]. The factorization method with supersymmetric quantum mechanics is used by Bermudez and Fernández in order to study the general algebraic structure of the inverted oscillator [15].

Stimulated by these trends in this research field, we analyze, in this paper, the time behavior of displaced wave packets accompanying the generalized coherent state (GCS) for the inverted oscillator. Because the wave packets of the inverted oscillator are unbound, its mathematical treatment is somewhat difficult and cumbersome. Hence, it is necessary to find mathematical tools that can be potentially applicable to this situation. A convenient mathematical tool for solving the Schrödinger equation in this case is the invariant operator method [16]. There are linear and quadratic invariants for a dynamical system.

We argue that the general solutions of the Schrödinger equation for the inverted oscillator can be derived by utilizing a linear Hermitian invariant operator (LHIO). In this work, we reexamine and interpret the general solution of the Schrödinger equation for the inverted oscillator on the basis of the Lewis–Riesenfeld framework [16]. Not only for a free particle [17] but also for the inverted oscillator [5], Bagrov et al. proposed non-Hermitian time-dependent linear invariants expressed in terms of momentum p and position operator q . We shall show that the general quantum solutions of the inverted oscillator can be formulated through the use of the LHIO instead of such non-Hermitian linear invariants. Notice that the previously adopted methods for the procedure of obtaining quantum solutions lead to “a constraint which is that the non-Hermiticity assumption should be taken in order to get physical solutions of the system” (see, e.g., Refs. [5,17]). However, this assumption is actually unnecessary.

In the context of the quantum inverted harmonic oscillator, the eigenstates of the time-dependent linear Hermitian invariant are associated with the plane wave solutions of the system and are not normalizable. The plane waves relevant to such states are fully delocalized. However, it is customary to expand any normalizable solutions of a time-dependent Schrödinger equation for an unbound system in terms of plane waves, using the Fourier transform. This means that we can build general quantum solutions that correspond to localized wave packets through the manipulation of the plane wave solutions. Gaussian wave packets, known as typically localized wave packets, are the simplest examples of coherent states. The well known coherent states for the case of the simple harmonic oscillator are those that were originally obtained by Schrödinger [18]. The expectation values of the position and momentum operators for such Gaussian wave packets are the same as those of the corresponding classical solutions.

The LHIO that we will employ in this work is useful for studying coherent states for diverse dynamical systems [19–21]. The Schrödinger solutions of the inverted oscillator can be represented in terms of the eigenstates of the LHIO. This is the reason why the LHIO plays an important role in this research. In order to simplify the eigenvalue equation of the original LHIO, we will use a unitary transformation method by introducing a suitable unitary operator. This may help us to derive the eigenstates of the invariant operator and the corresponding wave functions.

Meanwhile, a GCS may also be derived by utilizing other kinds of invariant operators. For instance, Bagrov et al. have introduced a non-Hermitian linear invariant operator in order to obtain GCSs of the inverted oscillator considering the separability property of the Hilbert space [5]. Notice that the method of Bagrov et al. requires the imposition of several constraints on the parameters. However, our method, based on LHIO, does not require such constraints.

2. The linear invariant and its unitary transformation

In order to analyze the quantum motion of the inverted oscillator, the solution of the Schrödinger equation, $i\hbar\partial\Psi(q, t)/\partial t - H\Psi(q, t) = 0$, is necessary. For this system, the Hamiltonian is given by

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2q^2. \quad (1)$$

From Hamiltonian dynamics, we can easily verify that the classical solution for this system is given by

$$q = A \cosh \omega t + B \sinh \omega t, \quad (2)$$

$$p = m\omega(A \sinh \omega t + B \cosh \omega t), \quad (3)$$

where A and B are arbitrary real constants. In the subsequent sections, we will analyze the quantum motion of the wave packet and examine whether the trajectory of the packet follows this classical one given in Eq. (2). The conventional procedure for obtaining quantum solutions based on the Schrödinger equation leads to plane wave solutions that cannot be normalized. The plane wave solution is in general delocalized at a position. For this reason, we cannot describe the Gaussian wave packet of the system from such a plane wave solution, because the Gaussian wave packet corresponds to the coherent state for a localized wave.

Hence, it is necessary to employ an alternate method in order to investigate the time behavior of the Gaussian wave packet for the system. Invariant operator methods based on LHIO are useful in this case, because the eigenstates for the LHIO enable us to derive the GCS for a localized wave packet, as mentioned in Sect. 1. We suppose that there exists a linear Hermitian invariant operator $I(t)$ for the system, which has the form

$$I(t) = \alpha(t)p + \beta(t)q + \gamma(t), \quad (4)$$

where $\alpha(t)$, $\beta(t)$, and $\gamma(t)$ are time-dependent coefficients that will be determined afterwards. From the definition of the invariant operator, $I(t)$ should satisfy the Liouville–von Neumann equation as

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] = 0. \quad (5)$$

By inserting Eqs. (1) and (4) into Eq. (5), we obtain first-order linear differential equations for the coefficients such that

$$\dot{\alpha} = -\frac{\beta}{m}, \quad \dot{\beta} = -\alpha m \omega^2, \quad \dot{\gamma} = 0. \quad (6)$$

The general solutions of these equations are given by

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cosh \omega t + \frac{\beta_0}{m\omega} \sinh \omega t, \quad (7)$$

$$\beta(t) = -\alpha_0 m \omega \sinh \omega t - \beta_0 \cosh \omega t, \quad (8)$$

$$\gamma(t) = \gamma_0, \quad (9)$$

where α_0 , β_0 , and γ_0 are arbitrary real constants. Now, we can confirm that Eq. (4) with Eqs. (7)–(9) are the LHIO of the system. Notice that this operator is a Hermitian, $I = I^\dagger$, as we initially supposed.

The eigenstates $\varphi_\lambda(q, t)$ of the LHIO are the solutions of the equation

$$I(t)\varphi_\lambda(q, t) = \lambda\varphi_\lambda(q, t), \quad (10)$$

where λ is an eigenvalue that does not depend on time. To facilitate the evaluation of this equation, let us consider a unitary transformation of the form

$$\varphi'_\lambda(q, t) = U\varphi_\lambda(q, t), \quad (11)$$

where the unitary operator U is given by

$$U = \exp\left[-\frac{i}{2\hbar}\frac{\beta}{\alpha}q^2\right]. \quad (12)$$

Then, the invariant in the transformed system is evaluated as

$$I' = UIU^\dagger = \alpha p + \gamma_0. \quad (13)$$

This formula is much simpler than the original invariant operator given in Eq. (4). Hence, it is better to solve the eigenvalue equation in the transformed system rather than solving the original one, Eq. (10). In the next section, we will derive the eigenstate φ'_λ of I' in the transformed system. Once φ'_λ is derived, its inverse transformation gives the eigenstate φ_λ of I , which belongs to the original system (untransformed system). By utilizing φ_λ , we can further derive the wave function of the GCS.

3. Preliminary quantum solution

Notice that the eigenvalue equation (10) can be mapped into that of the transformed system, $I'(t)\varphi'_\lambda(q, t) = \lambda\varphi'_\lambda(q, t)$. Using Eq. (13), this can be rewritten as

$$\left[\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\lambda}{i\hbar\alpha} - \frac{\gamma_0}{i\hbar\alpha}\right]\varphi'_\lambda(q, t) = 0. \quad (14)$$

We can easily show that the solutions of Eq. (14) are of the form

$$\varphi'_\lambda(q, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{\lambda - \gamma_0}{\alpha}q\right]. \quad (15)$$

Using the inverse of Eq. (11), we can see that the eigenstates of $I(t)$ with the eigenvalue λ are given by

$$\varphi_\lambda(q, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\lambda - \gamma_0}{\alpha}q - \frac{\beta}{2\alpha}q^2\right)\right]. \quad (16)$$

Because the difference between the eigenstates φ_λ and the Schrödinger solutions ψ_λ is only a multiplication of a phase factor $\exp[i\delta_\lambda(t)]$ according to the invariant operator theory [16], we can write the solutions of the Schrödinger equation for the Hamiltonian, Eq. (1), as

$$\psi_\lambda(q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\alpha_0}} \exp[i\delta_\lambda(t)] \varphi_\lambda(q, t), \quad (17)$$

where the factor $1/\sqrt{2\pi\hbar\alpha_0}$ is a normalization constant.

On the other hand, by substituting Eq. (17) into the Schrödinger equation $i\hbar\partial\psi_\lambda(q, t)/\partial t - H\psi_\lambda(q, t) = 0$, we have [22–24]

$$\hbar\dot{\delta}_\lambda(t) = \int d\lambda' \left\langle \varphi_{\lambda'} \left| \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right] \right| \varphi_\lambda \right\rangle. \quad (18)$$

A little evaluation after the substitution of the Hamiltonian, Eq. (1), and the eigenstates, Eq. (16), into this equation results in

$$\hbar\dot{\delta}_\lambda(t) = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{2m\hbar} \frac{(\lambda - \gamma_0)^2}{\alpha^2}. \quad (19)$$

Then, from the integration with respect to time, we obtain the phase $\delta_\lambda(t)$ as

$$\delta_\lambda(t) = \delta_\lambda(0) - \frac{(\lambda - \gamma_0)^2}{2m\hbar} \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha^2(\tau)} + i \ln \sqrt{\frac{\alpha(t)}{\alpha(0)}}. \quad (20)$$

In the evaluation of the last term in this equation, we have used the first relation in Eq. (6). For convenience, let us choose $\delta_\lambda(0) = 0$. Then, the physical orthogonal wave functions $\psi_\lambda(q, t)$, which are the solutions of the Schrödinger equation for the system, are given by

$$\psi_\lambda(q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\alpha(t)}} \exp \left[-i \int_0^t \frac{(\lambda - \gamma_0)^2 d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\lambda - \gamma_0}{\alpha} q - \frac{\beta}{2\alpha} q^2 \right) \right]. \quad (21)$$

Notice that these Schrödinger solutions correspond to those of the plane waves. They describe delocalized wave packets that cannot be normalized in a general way. Localized quantum wave solutions will be evaluated in the next section on the basis of these wave solutions.

4. Generalized coherent state

The general Schrödinger state for a localized wave packet can be described by a linear combination of the solutions given in Eq. (21):

$$\Psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \psi_\lambda(q, t) d\lambda, \quad (22)$$

where $g(\lambda)$ is a weight function that determines the state of the system in such a way that $\Psi(q, t)$ can be square integrable. Any suitable choice of $g(\lambda)$ yields a conventional solution as the Gaussian wave-packet function. Let us now choose the weight function as a Gaussian form too:

$$g(\lambda) = \sqrt{\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}} \exp \left[-a(\lambda - I_0)^2 \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \frac{a_0}{\alpha_0} \left(\lambda - \frac{I_0}{2} \right) \right], \quad (23)$$

where a , a_0 , and I_0 are positive real constants. For a simple case with $I_0 = 0$ and $a_0 = 0$, this reduces to that in Refs. [3] and [4]. Substituting Eqs. (21) and (23) into Eq. (22) and accomplishing the integration after changing the integration variable $\lambda \rightarrow \lambda + I_0$ without loss of generality, we obtain the normalized Gaussian solution as

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) = & \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\hbar\alpha(t)\sqrt{2\pi}\left(a + i\int_0^t \frac{d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)}\right)}} \exp\left[-i\int_0^t \frac{(\gamma_0 - I_0)^2}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} d\tau\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{I_0 a_0}{2\alpha_0}\right] \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{\gamma_0 - I_0}{\alpha}q - \frac{\beta(t)}{2\alpha(t)}q^2\right]\right\} \\ & \times \exp\left\{-\frac{\left[q - \alpha(t)\left(\frac{a_0}{\alpha_0} - \int_0^t \frac{\gamma_0 - I_0}{m\alpha^2(\tau)} d\tau\right)\right]^2}{4\hbar^2\alpha^2(\tau)\left(a + i\int_0^t \frac{1}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} d\tau\right)}\right\}. \end{aligned} \tag{24}$$

This wave function plays a central role in the quantum mechanics of the inverted oscillator and can be used to investigate various quantum properties of the system. For instance, we can derive expectation values of canonical variables and their squares (see Appendix A).

It is well known that the position uncertainty can be derived from $\Delta q = \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2}$. Then, using Eqs. (A2) and (A5) in Appendix A, we have

$$\Delta q = \frac{\hbar\alpha(t)}{\sqrt{a}} \left[a^2 + \left(\frac{\Gamma(t)}{2m\hbar}\right)^2 \right]^{1/2}, \tag{25}$$

where $\Gamma(t)$ is defined in Eq. (A4) in Appendix A. By noting that $\alpha(t)$ is given in Eq. (7), the time function $\Gamma(t)$ in this equation can be evaluated as

$$\Gamma(t) = \int_0^t \frac{1}{\alpha^2(\tau)} d\tau = \frac{m}{\alpha_0\beta_0 + m\alpha_0^2\omega \coth \omega t}. \tag{26}$$

Similarly, from Eqs. (A3) and (A6), we also have the momentum uncertainty such that

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2} \left[\left(\frac{2\beta(t)}{\hbar\alpha(t)} \Delta q - \frac{\Gamma(t)}{2ma\hbar\Delta q} \right)^2 + (\Delta q)^{-2} \right]^{1/2}. \tag{27}$$

By multiplying Eqs. (25) and (27), the uncertainty product for canonical variables is given by

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2} \left[1 + \left(\frac{2\beta(t)}{\hbar\alpha(t)} (\Delta q)^2 - \frac{\Gamma(t)}{2ma\hbar} \right)^2 \right]^{1/2}. \tag{28}$$

This is always larger than $\hbar/2$ which is the quantum-mechanically allowed minimum value for the uncertainty product. We have plotted the uncertainty product, as well as Δq and Δp , as a function of time in Fig. 1 for several different values of ω . From Fig. 1(A), we see that Δq always increases with time provided that it moves. From Fig. 1(B), we can confirm that Δp also increases with time. As a consequence, the uncertainty product increases. This phenomenon is interesting if we think that the uncertainty product of the normal oscillator is constant.

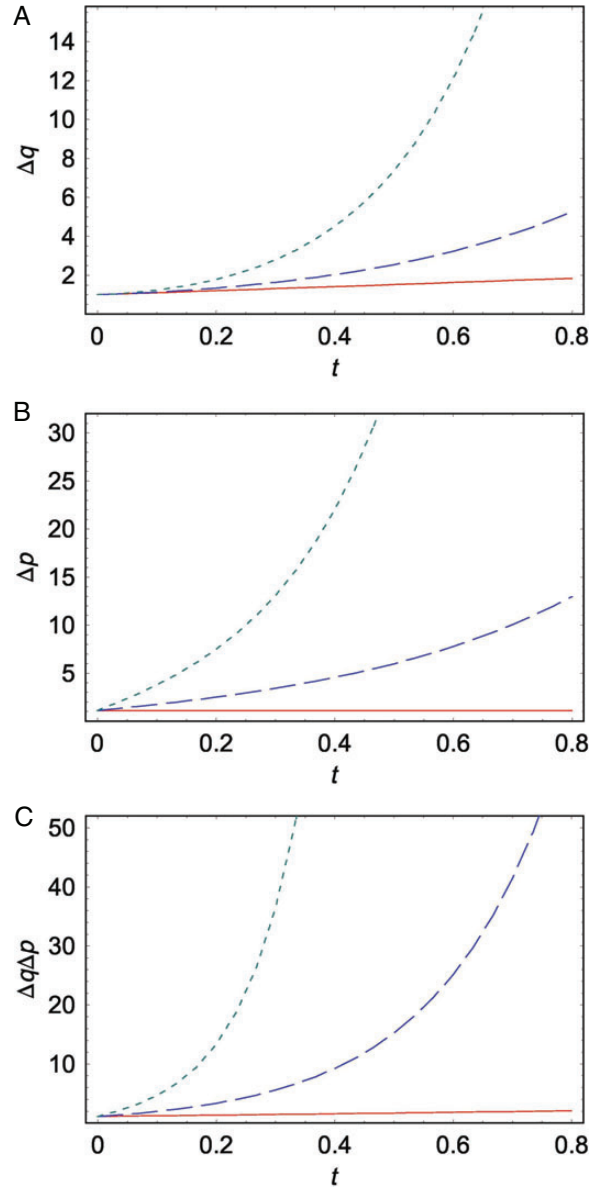


Fig. 1. Time evolution of the uncertainty Δq (A) and Δp (B), and the corresponding uncertainty product $\Delta q \Delta p$ (C) for different values of ω . The values of ω are $\omega \rightarrow 0.0$ for the solid red line, $\omega = 2.5$ for the dashed blue line, and $\omega = 5.0$ for the dotted green line. We have used $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = 1$, $I_0 = 5$, $a = 1$, $a_0 = 2$, $m = 1$, and $\hbar = 1$.

For the case of a free particle ($\omega = 0$), Δq increases linearly with time while Δp is always constant. Hence, the uncertainty product of a free particle increases linearly with time. These analyses for $\omega = 0$ are totally in agreement with the results of Ref. [25].

In terms of Δq obtained here, we have the following obvious relations:

$$-(\gamma_0 - I_0) = \alpha(t)\langle p \rangle + \beta(t)\langle q \rangle, \tag{29}$$

$$\int_0^t \frac{\gamma_0 - I_0}{m\alpha^2(\tau)} d\tau = \frac{a_0}{\alpha_0} - \frac{\langle q \rangle}{\alpha(t)}. \tag{30}$$

Then, by making use of these relations, we can rewrite the general Schrödinger state (Eq. (24)) as follows

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) = & \sqrt{\frac{\hbar\alpha(t) \left(a - i \int_0^t \frac{d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} \right)}{\sqrt{2\pi a}(\Delta q)^2}} \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} \left(\langle p \rangle \langle q \rangle + \frac{\gamma_0 a_0}{\alpha_0} \right) \right] \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \langle p \rangle q \right] \exp \left\{ - \left(\frac{i}{\hbar} \frac{\beta(t)}{2\alpha(t)} + \frac{a - i \int_0^t \frac{1}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} d\tau}{4a(\Delta q)^2} \right) [q - \langle q \rangle]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

If we set $\omega \rightarrow 0$, the system converts to a free particle. In the case of a free particle, the quantity I_0 , where $I_0 = a_0\beta_0$, can be written as

$$\begin{aligned} I_0 - \alpha(t)\langle p \rangle - \beta(t)\langle q \rangle &= I_0 + \left(\alpha_0 - \frac{\beta_0}{m} t \right) \frac{\gamma_0}{\alpha_0} - \beta_0 \left(a_0 - \frac{\gamma_0}{m\alpha_0} t \right) \\ &= \gamma_0. \end{aligned} \quad (32)$$

For this case, Eq. (31) reduces to the wave solution of a free particle, which is

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{free particle}}(q, t) = & \sqrt{\frac{\hbar\alpha(t) \left(a - i \int_0^t \frac{d\tau}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} \right)}{\sqrt{2\pi a}(\Delta q)^2}} \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} \left(\langle p \rangle \langle q \rangle + \frac{I_0\gamma_0}{\alpha_0\beta_0} \right) \right] \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \langle p \rangle q \right] \exp \left\{ - \left(\frac{i}{\hbar} \frac{\beta(t)}{2\alpha(t)} + \frac{a - i \int_0^t \frac{1}{2m\hbar\alpha^2(\tau)} d\tau}{4a(\Delta q)^2} \right) [q - \langle q \rangle]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

This coincides with the results of Ref. [25].

5. Time evolution of the Gaussian wave packet

From the absolute square of Eq. (31), we derive the probability density of the displaced wave packet in the form

$$|\Psi(q, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta q} \exp \left(-\frac{(q - \langle q \rangle)^2}{2(\Delta q)^2} \right). \quad (34)$$

Because this equation is a Gaussian form, we can readily conclude that $\Psi(q, t)$ is the Gaussian wave packet. This packet is displaced as much as $\langle q \rangle$ from the origin and spreads as the packet propagates because Δq increases in time, as shown in Fig. 1. We can analyze the time behavior of this packet from its density plot, given in Fig. 2. The wave packet in this figure moves in the positive q direction. We can confirm that the speed of the wave-packet-propagation accelerates over time, provided that $\omega \neq 0$. From a comparison of this figure with Fig. 3 which shows the corresponding classical solutions, we see that the centroid of the wave packet follows the counterpart classical trajectory. This result is natural if we think that $|\Psi(q, t)|^2$ is represented in terms of $\langle q \rangle$, which is expected to follow the classical solution. Figure 4 is the same as Fig. 2, but with a somewhat different choice of the parameter a_0 . In this case, the wave packet or particle moves in the negative q direction with different initial conditions.

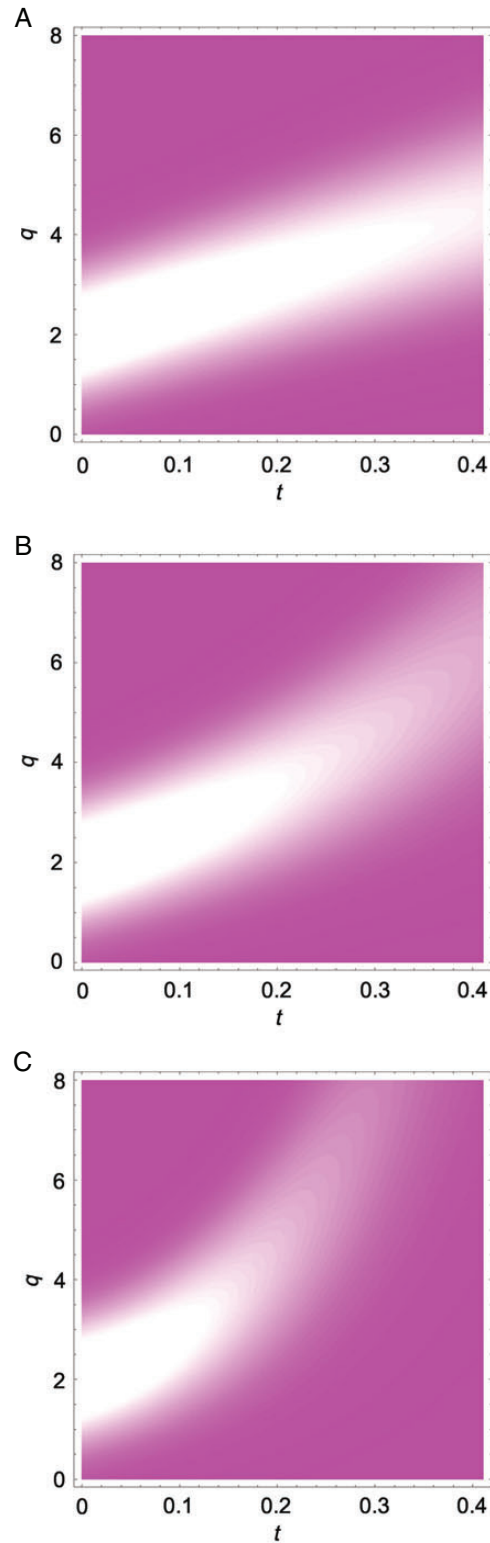


Fig. 2. The time evolution of the probability density $|\Psi(q, t)|^2$ with $\omega \rightarrow 0.0$ for (A), $\omega = 2.5$ for (B), and $\omega = 5.0$ for (C). We have used $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = 1$, $I_0 = 5$, $a = 1$, $a_0 = 2$, $m = 1$, and $\hbar = 1$. This figure is a density plot produced using the Mathematica program (Wolfram Research) [26] with the choice of the command “PlotRange \rightarrow {0, 0.3}”.

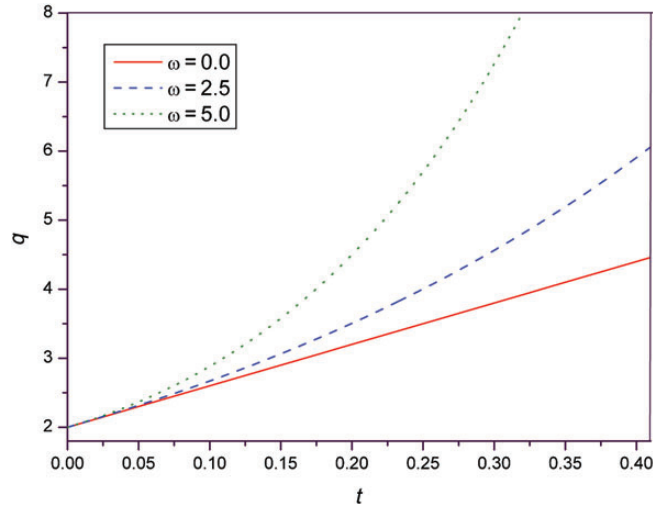


Fig. 3. The time behavior of the classical solution q given in Eq. (2) with $\omega \rightarrow 0.0$ for the solid red line, $\omega = 2.5$ for the dashed blue line, and $\omega = 5.0$ for the dotted green line. We have used $A = 2$ and $B = 5/\omega$.

If we use the integral formula given in Eq. (26), we can easily confirm from Eqs. (A2) and (A3) in Appendix A that the analytic forms of $\langle q \rangle$ and $\langle p \rangle$ can be rewritten such that

$$\langle q \rangle = \frac{1}{\alpha_0 m \omega} [a_0 \alpha_0 m \omega \cosh \omega t + (a_0 \beta_0 - \gamma_0 + I_0) \sinh \omega t], \quad (35)$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\alpha_0} [a_0 \alpha_0 m \omega \sinh \omega t + (a_0 \beta_0 - \gamma_0 + I_0) \cosh \omega t]. \quad (36)$$

By rescaling the coefficients as $a_0 \equiv A$ and $(a_0 \beta_0 - \gamma_0 + I_0)/(\alpha_0 m \omega) \equiv B$, we see that the above equations become the same as those of the classical solutions given in Eqs. (2) and (3), respectively. Hence, the centroids of the quantum trajectories for the canonical variables are exactly the same as those of the classical ones. Based on these consequences for the inverted oscillator, we can deduce precise physical meanings associated with Eq. (34). Although the most probable trajectory of the wave packet is a classical one, it does not always follow it because of the uncertainty of Δq . If Δq is large, it is difficult to predict the position of the quantum particle at a certain instant. While it is known that the Gaussian wave packet for a harmonic oscillator oscillates back and forth [19,27], this packet does not oscillate. For a wave packet that initially stays at a certain position with $p = 0$ typically runs away from the origin at a later time.

It is well known that the introduction of annihilation operator and its Hermitian conjugate operator (creation operator) is very useful when we investigate the quantum features of the simple harmonic oscillator. There also exist such annihilation and creation operators for the inverted oscillator. For detailed method of constructing the annihilation operator for the inverted oscillator and of obtaining its corresponding eigenvalue z , you can refer to Ref. [5]. The coherent state which is associated with the Gaussian wave packet can be represented in terms of z . In order to investigate the time behavior of the Gaussian wave packet derived in the previous section in more detail, we introduce the displacement unitary operator $D(z, t)$, which is

$$D(z, t) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\langle p \rangle q - \langle q \rangle p) \right]. \quad (37)$$

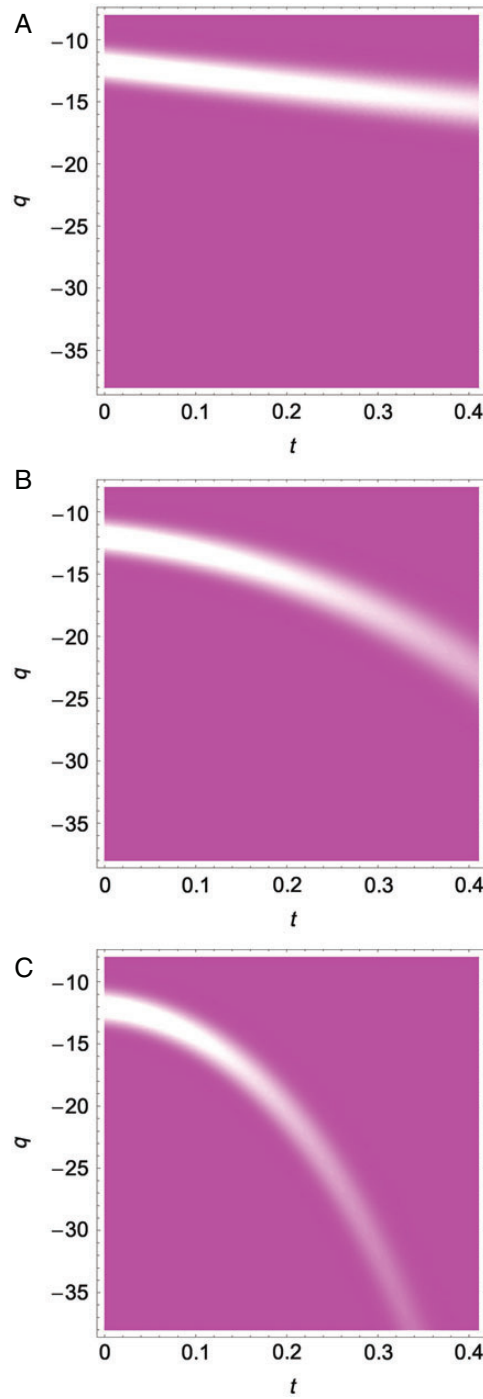


Fig. 4. The same as Fig. 2, but using a different value of a_0 . (Here, $a_0 = -12$.)

By means of this operator, we can convert coordinate and momentum operators so that they are displaced as

$$D^\dagger(z, t)qD(z, t) = q + \langle q \rangle = q + q_{cl}, \tag{38}$$

$$D^\dagger(z, t)pD(z, t) = p + \langle p \rangle = p + p_{cl}, \tag{39}$$

where q_{cl} and p_{cl} are the classical coordinate and momentum, respectively. We can construct the GCSs as follows:

$$D(z, t)\Psi_0(q, t) = \exp\left[-\frac{|z|^2}{2}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \Psi_n(q, t), \quad (40)$$

where $\Psi_n(q, t)$ are n th-order Fock-state wave functions [5]. It is interesting to note that the general expression of the Gaussian wave $\Psi(q, t)$ (Eq. (31)) corresponds to the standard coherent state obtained by applying the displacement operator, $D(z, t)$, to the ground state, $\Psi_0(q, t)$. Notice that $\Psi_0(q, t)$ corresponds to a particle at rest, $\langle p \rangle = 0$, at the origin, $\langle q \rangle = 0$:

$$\Psi_0(q, t) = \Psi(q, t)|_{\langle q \rangle=0, \langle p \rangle=0}. \quad (41)$$

Now we can easily confirm that the wave function given in Eq. (31) can be rewritten as follows:

$$\Psi(q, t) = D(z, t)\Psi_0(q, t). \quad (42)$$

Hence, the GCS associated with the quantum motion of the inverted oscillator can be obtained by displacing the ground-state wave packet.

6. Conclusion

The quantum characteristics of the Gaussian wave packet for the inverted oscillator have been studied with emphasis on its time behavior. For this purpose, we used the invariant operator and unitary transformation methods. The linear invariant operator of the system was constructed from the Liouville–von Neumann equation. The eigenstates $\varphi_\lambda(q, t)$ of the invariant operator were evaluated using the unitary transformation method and are given in Eq. (16). Schrödinger solutions of the system have been derived by making use of the eigenstates $\varphi_\lambda(q, t)$. The simple Schrödinger solutions $\psi_\lambda(q, t)$ given in Eq. (21) are represented in terms of the eigenstates $\varphi_\lambda(q, t)$. From Eq. (17), we see that the only difference between $\psi_\lambda(q, t)$ and $\varphi_\lambda(q, t)$ is that $\psi_\lambda(q, t)$ has a phase factor while $\varphi_\lambda(q, t)$ does not. Notice that $\psi_\lambda(q, t)$ is the plane wave. While the solutions $\psi_\lambda(q, t)$ are associated with a delocalized wave packet, the Schrödinger solution $\Psi(q, t)$ weighted by $g(\lambda)$, Eq. (31), corresponds to a Gaussian wave packet that is localized. The wave function $\Psi(q, t)$ is in fact the GCS of the system

To investigate the quantum characteristics of $\Psi(q, t)$, we have introduced the displacement operator $D(z, t)$. It is shown that the wave function $\Psi(q, t)$ can also be obtained by displacing the ground-state wave function $\Psi_0(x, t)$ with $D(z, t)$. The properties of this Gaussian wave packet are very similar to the classical ones. The trajectory of the centroid of the wave packet is exactly the same as the classical trajectory. Note that $\Psi(x, t)$ is displaced as much as $\langle q \rangle$ from the origin and runs away from the origin in a positive q or negative q direction depending on the initial condition. Moreover, from Fig. 1(A), we can confirm that the width Δq of $\Psi(q, t)$ spreads over time. For a simple case with the condition $\omega \rightarrow 0$, the wave packet reduces to that of a free particle and our corresponding results coincide with the previous research into a free-particle wave packet given in Ref. [25].

Acknowledgements

The research of J.R.C. was supported by the Basic Science Research Program of the year 2015 through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (Grant No. NRF-2013R1A1A2062907).

Appendix A.

In this appendix, we derive the expectation values of the canonical variables q and p and their squares. The expectation value of an arbitrary operator O can be evaluated from

$$\langle O \rangle = \langle \Psi(t) | O | \Psi(t) \rangle, \quad (\text{A1})$$

where $|\Psi(t)\rangle$ is the wave function whose configuration representation is given in Eq. (24). For the case of q and p , the expectation values in the state $\Psi(q, t)$ are easily evaluated using the above equation as

$$\langle q \rangle = \alpha(t) \left(\frac{a_0}{\alpha_0} - \frac{\gamma_0 - I_0}{m} \Gamma(t) \right), \quad (\text{A2})$$

$$\langle p \rangle = -\frac{\gamma_0 - I_0}{\alpha(t)} - \beta(t) \left(\frac{a_0}{\alpha_0} - \frac{\gamma_0 - I_0}{m} \Gamma(t) \right), \quad (\text{A3})$$

where

$$\Gamma(t) = \int_0^t \frac{1}{\alpha^2(\tau)} d\tau. \quad (\text{A4})$$

In a similar way, the square of the canonical variables can also be evaluated as

$$\langle q^2 \rangle = \frac{\hbar^2 \alpha^2(t)}{a} \left[a^2 + \left(\frac{\Gamma(t)}{2m\hbar} \right)^2 \right] + \alpha^2(t) \left(\frac{a_0}{\alpha_0} - \frac{\gamma_0 - I_0}{m} \Gamma(t) \right)^2, \quad (\text{A5})$$

$$\langle p^2 \rangle = \langle p \rangle^2 - \frac{\beta(t)\Gamma(t)}{2ma\alpha(t)} + \frac{\beta^2(t)}{\alpha^2(t)} (\Delta q)^2 + \left[\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\Gamma^2(t)}{16m^2 a^2} \right] \frac{1}{(\Delta q)^2}. \quad (\text{A6})$$

We can see that $\langle p^2 \rangle$ is represented in terms of the variance of q , which is defined in the form $\Delta q = [\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2]^{1/2}$. For more details of Δq , see Eq. (25).

References

- [1] C. Yuce, A. Kilic, and A. Coruh, Phys. Scripta **74**, 114 (2006).
- [2] G. Barton, Ann. Phys. **166**, 322 (1986).
- [3] I. A. Pedrosa, A. L. de Lima, and A. M. de M. Carvalho, Can. J. Phys. **93**, 841 (2015).
- [4] A. L. de Lima, A. Rosas, and I. A. Pedrosa, Ann. Phys. **323**, 2253 (2008).
- [5] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, E. S. Macedo, and A. S. Pereira, J. Phys. A **46**, 325305 (2013).
- [6] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, and A. S. Pereira, Braz. J. Phys. **45**, 369 (2015).
- [7] R. K. Bhaduri, A. Khare, S. M. Reimann, and E. L. Tomusiak, Ann. Phys. **254**, 25 (1997).
- [8] Z. Lewis and T. Takeuchi, Phys. Rev. D **84**, 105029 (2011).
- [9] K. K. Kim and S. P. Kim, J. Korean Phys. Soc. **56**, 1055 (2010).
- [10] G. Chong and W. Hai, J. Phys. B **40**, 211 (2007).
- [11] A. H. Guth and S.-Y. Pi, Phys. Rev. D **32**, 1899 (1985).
- [12] R. J. Glauber and F. Haake, Phys. Lett. A **68**, 29 (1978).
- [13] G. Felder, A. Frolov, L. Kofman, and A. Linde, Phys. Rev. D **66**, 023507 (2002).
- [14] M. Combescure and A. Combescure, J. Math. Anal. Appl. **326**, 908 (2007).
- [15] D. Bermudez and D. J. Fernández C., Ann. Phys. **333**, 290 (2013).
- [16] H. R. Lewis Jr. and W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
- [17] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, and A. S. Pereira, Phys.-Usp. **57**, 891 (2014).
- [18] E. Schrödinger, Naturwissenschaften **14**, 664 (1926).
- [19] J. R. Choi, Chin. Phys. C **35**, 233 (2011).
- [20] I. A. Pedrosa, C. Furtado, and A. Rosas, Phys. Lett. B **651**, 384 (2007).
- [21] J. R. Choi, Phys. Rev. A **82**, 055803 (2010).
- [22] M. Maamache, and Y. Saadi, Phys. Rev. Lett. **101**, 150407 (2008).

- [23] M. Maamache, and Y. Saadi, Phys. Rev. A **78**, 052109 (2008).
- [24] Y. Saadi, and M. Maamache, Phys. Lett. A **376**, 1328 (2012).
- [25] M. Maamache, A. Khatir, H. Lakehal, and J. R. Choi, unpublished.
- [26] S. Wolfram, *Mathematica* (Wolfram Media, 2003), 5th ed., <http://www.wolfram.com>.
- [27] J. R. Choi, Sci. Rep. **4**, 6880 (2014).

Nonlinear description of Yang-Mills cosmology: cosmic inflation and the accompanying Hannay's angle^{*}

Yacine Bouguerra^{1,2} Mustapha Maamache¹ Jeong Ryeol Choi^{3;1)}

¹ Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif 19000, Algeria

² Département de Physique, Faculté des Sciences, Université de Jijel, BP 98, Ouled Aissa, Jijel 18000, Algeria

³ Department of Radiologic Technology, Daegu Health College, Yeongsong-ro 15, Buk-gu, Daegu 41453, Republic of Korea

Abstract: Hannay's angle is a classical analogue of the "geometrical phase factor" found by Berry in his research on the quantum adiabatic theorem. This classical analogue is defined if closed curves of constant action variables return to the same curves in phase space after an adiabatic evolution. Adiabatic evolution of Yang-Mills cosmology, which is described by a time-dependent quartic oscillator, is investigated. Phase properties of the Yang-Mills fields are analyzed and the corresponding Hannay's angle is derived from a rigorous evaluation. The obtained Hannay's angle shift is represented in terms of several observable parameters associated with such an angle shift. The time evolution of Hannay's angle in Yang-Mills cosmology is examined from an illustration plotted on the basis of numerical evaluation, and its physical nature is addressed. Hannay's angle, together with its quantum counterpart Berry's phase, plays a pivotal role in conceptual understanding of several cosmological problems and indeed can be used as a supplementary probe for cosmic inflation.

Keywords: Yang-Mills cosmology, Hannay angle, time-dependent quartic Hamiltonian, inflation

PACS: 03.65.Vf; 04.20.Cv; 03.50.-z **DOI:** 10.1088/1674-1137/41/6/065103

1 Introduction

After the advent of the inflation paradigm for the expanding universe, various cosmological models that are governed by homogeneous and isotropic fields in addition to gravity have become an active research topic in cosmology. While most traditionally accepted fields for such a paradigm are a single or several multiple scalar fields, a large number of cosmological models employ sophisticated cosmological theories based on reliable candidates for dark energy, which is responsible for the inflation. A class of potential theories of cosmology is those associated with non-minimally coupled Yang-Mills (YM) fields, suggested by Gal'tsov and his collaborators [1–5]. Extensive studies on YM or Einstein-Yang-Mills (EYM) cosmology has been carried out for the last two decades and longer, partly motivated by its suitability for explaining the origin of the current stage of accelerated inflation [4].

The aim of this paper is to analyze analytical description of YM condensates in cosmology. In particular, we investigate cosmic evolution of YM fields and find the cosmological Hannay's angle, which seems to shed light

on the process of cosmological evolution. Let us recall briefly Hannay's angle, which is, for some Hamiltonians, a slight modification of the old classical adiabatic theorem which makes statements only for integrable Hamiltonian systems expressed in an action-angle variable (I, θ) . It says that, in adiabatic evolution, the action variable $I(t, \vec{X}(t))$ is adiabatic invariant, while the angle can be calculated by solving for the instantaneous frequency of the system $\dot{\theta}(t, \vec{X}(t)) = \frac{\partial H(I, \vec{X}(t))}{\partial I}$. The existence of the action variable $I(t, \vec{X}(t))$ implies that the evolution of the angle variables can be determined by making a time-dependent canonical transformation of the phase space variables to action-angle variables. Transformation to action-angle variables can be fulfilled by the generating function

$$S(q, I, \vec{X}(t)) = \int^{q^a} dq^a p(q^a, I, \vec{X}(t)), \quad (1)$$

where $p = \partial S / \partial q$ and $\theta = \partial S / \partial I$. Hannay discovered, for some Hamiltonians, that an extra geometric shift $\Delta\theta$, in

Received 16 December 2016, Revised 14 January 2017

^{*} Supported by Basic Science Research Program through National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (NRF-2016R1D1A1A09919503)

1) E-mail: choiardor@hanmail.net

©2017 Chinese Physical Society and the Institute of High Energy Physics of the Chinese Academy of Sciences and the Institute of Modern Physics of the Chinese Academy of Sciences and IOP Publishing Ltd

the angle variable θ that is conjugate to the action variable I , can be determined from

$$\Delta\theta = \frac{\partial}{\partial I} \int_0^t \left\langle \frac{\partial S(I, \theta, \vec{X}(t'))}{\partial t'} \right\rangle dt', \quad (2)$$

where $\langle \rangle$ denotes the average over θ at a fixed time.

Cai and Papini [6] showed that a covariant generalization of Berry's phase which is connected to Hannay's angle leads to generating non-Abelian gauge fields in the manner adopted by Wilczek and Zee [7] with non-relativistic approximations. In fact, such covariant formalism is not only very acceptable but also naturally accompanies the theory of YM fields [6]. Moreover, through their further study, Cai and Papini [8] extended the theory of such covariant generalization to non-linearly evolving systems. Yang-Mills fields are vector fields that obey local gauge invariance. We can use them to solve the isotropy problem via an $SU(2)$ YM configuration. A special feature of the YM cosmologies driven by $SU(2)$ gauge fields is that they are described by quartic oscillators [1] that are composed of a time-dependent quadratic plus quartic Hamiltonian. In the YM cosmology description with this potential, the conformal invariance for the quadratic action of YM fields is conserved without introducing a mass scale [4], enabling us to solve the problem of vector inflation.

The time-dependent Hamiltonian and the corresponding Lagrangian for the quartic oscillator that describes the $SU(2)$ YM field will be constructed from the basic equation for the Higgs scalar. To facilitate the analysis of the system, we assume that the system evolves adiabatically in time, i.e., the parameters of the system are slowly varying. This assumption is mostly taken for granted in actual mathematical tasks that are considered to tackle dynamical systems with computational schemes. The treatment of the time-dependent quartic oscillator may be not an easy task because of the time dependence of the parameters as well as the presence of the quartic term in the Hamiltonian [9]. To simplify the problem, we perform a canonical transformation that preserves the form of the Hamiltonian equations. Based on this transformation, the time evolution of the system will be investigated on the basis of a perturbative way [10]. Phase properties of the system and Hannay's angle [11] will be derived and their physical natures will be addressed. Hannay's angle is the classical counterpart of the additional quantum phase known as Berry's phase [12–15]. Among the many areas in which Hannay's angle and Berry's phase play important roles, cosmology [6,8,16–23] and celestial mechanics [24, 25] have been actively investigated so far in connection with them. Hannay's angle (or Berry's phase) can be applied in extracting useful information associated with the theoretical interpretation of observational aspects of inflation-

ary perturbations, such as the dynamical evolution of the quantum fluctuations [16], vacuum instability [17], the symmetry breaking of cosmological time [18], and energy conservation in a gravity-scalar system [19].

2 Yang-Mills condensates

One recently suggested potential candidate for the dark energy component is the YM condensate [26–29]. The introduction of the YM gauge boson condensate in Robertson-Walker spacetime is adequate to explain the advent of an inflationary expansion after the Planck time in the early universe [30]. The inflation of the Universe in the early epoch has been verified by the recent analysis of observational data carried out by a research group at the Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics using the astronomical instrument BICEP2 (for details refer to their announcement on March 17, 2014, and Ref. [31]). They have discovered a faint but distinctive twisting component (B-mode waves) in the polarization of CMB radiation, which originated from primordial gravitational waves. Such a signal is regarded as the imprint of large-scale primordial cosmic inflation. However, the validity of the experimental results and the relevant cosmological consequences became controversial afterwards and they should be reconfirmed by further observations by, for example, the Keck Array [32].

Einstein-Yang-Mills-Higgs action in the gauge theory associated with spontaneous symmetry breaking with a $SU(2)$ YM field can be described in terms of $\alpha = M_W/(gM_{\text{Pl}})$ and $\beta = M_H/M_W$, where M_{Pl} is the Planck mass, M_W is the W-boson mass, and M_H is the Higgs mass. Gal'tsov and Davydov [1, 2] suggested the equation for the Higgs scalar q in YM cosmology as

$$\ddot{q} + 3H(t)\dot{q} = -\frac{3}{2a^2(t)}q[1+f(t)]^2 - \beta^2(q^2 - \alpha^2)q, \quad (3)$$

where $H(t)$ is the Hubble parameter, $a(t)$ is the scale factor that appears in the FRW metrics, and $f(t)$ is a dimensionless single scalar function.

We suppose that the Higgs field varies much faster than the YM field during some stage of cosmological evolution [1, 2, 33, 34]. This allows a separate description of the Higgs field via the quartic time-dependent oscillator model described in terms of adiabatically varying parameters. According to this, we consider a universe that yields a non-trivial steady state with the parameter [1]

$$f = \frac{\sqrt{8}\beta - \sqrt{3}}{\sqrt{8}\beta + \sqrt{3}}, \quad (4)$$

which satisfies the equations for fields associated with the YM and Higgs scalar functions. Now, Eq. (3) becomes

$$\ddot{q} + 3H(t)\dot{q} + \omega^2(t)q = -\beta^2q^3, \quad (5)$$

where

$$\omega^2(t) = \frac{3}{2a^2(t)} \left(\frac{\sqrt{8}\beta - \sqrt{3}}{\sqrt{8}\beta + \sqrt{3}} + 1 \right)^2 - \beta^2 \alpha^2. \quad (6)$$

According to the value of β , there are stable and unstable directions of cosmic evolution from a fixed point in the phase space [1]. We are interested in the points which are stable against small perturbations. The translation of the long quasistable states may terminate during the period of inflation. The time behavior of solutions of Eq. (5) is essentially characterized by the parameters α and β in this case. The evolution of the scale factor would then be mainly dominated by the Higgs potential, inducing a slow-roll regime.

Notice that Eq. (5) is a kind of time-dependent quartic oscillator equation. The Hamiltonian for this oscillator can be represented in the form

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [e^{-3\int H(t)dt} p^2 + \omega^2(t) e^{3\int H(t)dt} q^2 + 2\beta^2 e^{3\int H(t)dt} q^4]. \quad (7)$$

This Hamiltonian is important for treating YM condensates in cosmology [1]. From Hamilton's equation

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = e^{-3\int H(t)dt} p, \quad (8)$$

the canonical momentum of the system becomes

$$p = \dot{q} e^{3\int H(t)dt}. \quad (9)$$

From a fundamental relation for the Lagrangian, $\mathcal{L} = p\dot{q} - \mathcal{H}$, we obtain

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} e^{3\int H(t)dt} [\dot{q}^2 - \omega^2(t) q^2 - 2\beta^2 q^4]. \quad (10)$$

In terms of a new variable Q that is defined as $Q = q e^{\frac{3}{2}\int H(t')dt'}$, the Lagrangian can be rewritten such that

$$\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} [\dot{Q}^2 - 3H(t)Q\dot{Q} - \Omega^2(t)Q^2 - 2\beta^2 e^{-3\int H(t')dt'} Q^4], \quad (11)$$

where

$$\Omega^2(t) = \omega^2(t) - \frac{9}{4} H^2(t). \quad (12)$$

The corresponding Hamiltonian in the transformed system is given by

$$\mathcal{H}(P, Q, t) = P\dot{Q} - \mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t). \quad (13)$$

Considering $P = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{Q}$, we have

$$\dot{Q} = P + \frac{3}{2} H(t) Q. \quad (14)$$

Then, the Hamiltonian is represented to be

$$\mathcal{H}(P, Q, t) = \frac{1}{2} P^2 + \frac{3}{2} H(t) P Q + \frac{1}{2} \omega^2(t) Q^2 + \beta^2 Q^4 e^{-3\int H(t')dt'}. \quad (15)$$

For a particular case where the parameters are given by $H(t) = 2\lambda(t)/3$, $\omega^2(t) = \omega_0^2$, and $\beta^2 = \nu/4$, the Hamiltonian reduces to that in Eq. (30) of Ref. [10]:

$$\mathcal{H}_D(P, Q) = \frac{1}{2} P^2 + \lambda P Q + \frac{1}{2} \omega_0^2 Q^2 + \frac{\nu}{4} e^{-3\int H(t')dt'} Q^4. \quad (16)$$

which corresponds to the Hamiltonian of the damped quartic oscillator.

Since the description of the YM field in this model yields the general quartic oscillator Hamiltonian, Eq. (15), which is characterized by general time-dependent parameters, a careful mathematical treatment is necessary for a rigorous analysis of the system. From Hamilton's equations

$$\dot{Q} = \partial \mathcal{H} / \partial P, \quad \dot{P} = -\partial \mathcal{H} / \partial Q, \quad (17)$$

we obtain the classical equation of motion as

$$\ddot{Q} + \left(\Omega^2 - \frac{3}{2} \dot{H} \right) Q + 4\beta^2 e^{-3\int H(t')dt'} Q^3 = 0, \quad (18)$$

which is a somewhat complicated form. The concept of effective YM condensate naturally allows a solution of the coincidence problem in the dark energy model of a flat expanding universe [27–29]. Based on the mathematical description associated with YM condensates given here, the phase properties of YM fields and the relevant Hannay's angle shift will be investigated in the subsequent sections.

3 Time evolution of the Yang-Mills fields

To know how the Universe evolved from the early epoch to today, it is necessary to study the time evolution of the Universe regarding its constituent fields and matters. To study the time behavior of the YM fields, we introduce a complex variable Z and its complex conjugate \bar{Z} such that

$$Z = \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \left[Q - \frac{i}{\Omega} \left(\frac{3}{2} H Q + P \right) \right], \quad (19)$$

$$\bar{Z} = \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \left[Q + \frac{i}{\Omega} \left(\frac{3}{2} H Q + P \right) \right]. \quad (20)$$

Equivalently, Q and P can be read as

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} (Z + \bar{Z}), \quad (21)$$

$$P = \frac{i\Omega - \frac{3}{2}H}{\sqrt{2\Omega}} Z - \frac{i\Omega + \frac{3}{2}H}{\sqrt{2\Omega}} \bar{Z}. \quad (22)$$

From the first of the Hamilton's equations given in Eq. (17), we have

$$\dot{Z} = \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} (Z + \bar{Z}) + i\Omega Z - i\Omega \bar{Z} - \dot{Z}. \quad (23)$$

The evaluation of the second Hamilton's equation, Eq. (17), leads to

$$\begin{aligned} \dot{Z} = i\Omega Z + \frac{4i\beta^2}{4\Omega^2} e^{-3\int H(t') dt'} (Z + \bar{Z})^3 \\ - \frac{3i}{2\Omega} \dot{H} Z + \frac{\dot{\Omega} - \frac{3i}{2}\dot{H}}{2\Omega} \bar{Z}. \end{aligned} \quad (24)$$

This equation can be solved perturbatively using its canonical reduction to a normal form, provided that the system is weakly nonlinear $[(4\beta^2/\omega^2)Q^2 \ll 1]$ in addition to the supposition that the parameters, H , ω , and β , vary adiabatically, i.e., slowly in time. The previous supposition that the Higgs field varies much faster than the YM one during some stage of cosmological evolution allows us to assume that the system is weakly nonlinear. Thus Eq. (24) can be solved perturbatively using its canonical reduction to normal form. Under these conditions, let us take advantage of the following near to identity transformation

$$Z = u + \delta\bar{u}, \quad (25)$$

where δ is sufficiently small so that $u \gg \delta\bar{u}$. Then, Eq. (24) can be rewritten in terms of u and \bar{u} as

$$\begin{aligned} \dot{u} = iY u + iY \delta\bar{u} + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3\int H(t') dt'} (u + \bar{u})^2 \\ \times \left[(1+3\bar{\delta}) u + (1+3\delta)\bar{u} \right] + \frac{\dot{\Omega} - \frac{3i}{2}\dot{H}}{2\Omega} \\ \times (\bar{u} + \delta u) - \dot{\delta}\bar{u} - \delta\dot{\bar{u}}. \end{aligned} \quad (26)$$

where $Y = \Omega - \frac{3}{2}\dot{H}/(2\Omega)$. Using the complex conjugate of the above equation:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}} = -iY \bar{u} - iY \delta u - \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3\int H(t') dt'} (u + \bar{u})^2 \\ \times \left[(1+3\delta)\bar{u} + (1+3\bar{\delta}) u \right] \\ + \frac{\dot{\Omega} + \frac{3i}{2}\dot{H}}{2\Omega} (u + \delta\bar{u}) - \dot{\delta}u - \delta\dot{u}, \end{aligned} \quad (27)$$

we can eliminate \bar{u} in Eq. (26). Then, Eq. (26) becomes

$$\begin{aligned} \dot{u} = iY u + iY \delta\bar{u} + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3\int H(t') dt'} (u + \bar{u})^2 \\ \times \left[(1+3\bar{\delta}) u + (1+3\delta)\bar{u} \right] + \frac{\dot{\Omega} - \frac{3i}{2}\dot{H}}{2\Omega} (\bar{u} + \delta u) \\ - \dot{\delta}\bar{u} + iY \delta\bar{u} + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3\int H(t') dt'} \delta (u + \bar{u})^2 \\ \times \left[(1+3\delta)\bar{u} + (1+3\bar{\delta}) u \right] - \frac{\dot{\Omega} + \frac{3i}{2}\dot{H}}{2\Omega} \delta u. \end{aligned} \quad (28)$$

Now, for the case that δ and its complex conjugate have the form

$$\delta = \frac{3}{2} \frac{\dot{H} + i\dot{\Omega}}{4\Omega^2}, \quad \bar{\delta} = \frac{3}{2} \frac{\dot{H} - i\dot{\Omega}}{4\Omega^2}, \quad (29)$$

Eq. (28) becomes

$$\begin{aligned} \dot{u} = iY u + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3\int H(t') dt'} (u + \bar{u})^2 \\ \times \left[(1+\delta+3\bar{\delta}) u + (1+4\delta)\bar{u} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

For further study of the nonlinear correction, it is necessary to introduce a second change of the variable, which is near to identity, such that [10]

$$u = v + \alpha v^3 + \rho v\bar{v}^2 + \gamma \bar{v}^3, \quad (31)$$

where α , ρ , and γ are time-dependent coefficients that are real. By inserting this in Eq. (30), the equation for the new variable v can be obtained as

$$\begin{aligned} (1+3\alpha v^2 + \rho\bar{v}^2) \dot{v} \\ = iY (v + \alpha v^3 + \rho v\bar{v}^2 + \gamma \bar{v}^3) \\ + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3\int H(t') dt'} (v + \bar{v})^2 \left[(1+\delta+3\bar{\delta})(v + \alpha v^3 + \rho v\bar{v}^2 + \gamma \bar{v}^3) + (1+4\delta)(\bar{v} + \alpha \bar{v}^3 + \rho \bar{v}v^2 + \gamma v^3) \right] - (2\rho v + 3\gamma \bar{v}^2) \dot{\bar{v}} - \dot{\alpha} v^3 - \dot{\rho} v\bar{v}^2 - \dot{\gamma} \bar{v}^3. \end{aligned} \quad (32)$$

Using the complex conjugate of this equation:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}} (1+3\alpha \bar{v}^2 + \rho v^2) \\ = -iY (\bar{v} + \alpha \bar{v}^3) \\ + \rho \bar{v}v^2 + \gamma v^3 - \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3\int H(t') dt'} (v + \bar{v})^2 \\ \times \left[(1+\bar{\delta}+3\delta)(\bar{v} + \alpha \bar{v}^3 + \rho \bar{v}v^2 + \gamma v^3) + (1+4\bar{\delta})(v + \alpha v^3 + \rho v\bar{v}^2 + \gamma \bar{v}^3) \right] \\ - \dot{v} (2\rho \bar{v} + 3\gamma v^2) - \dot{\alpha} \bar{v}^3 - \dot{\rho} \bar{v}v^2 - \dot{\gamma} v^3, \end{aligned} \quad (33)$$

we can eliminate \dot{v} in Eq. (32). Then, Eq. (32) yields

$$\begin{aligned} & \dot{v} + \dot{\alpha}v^3 + \dot{\rho}v\bar{v}^2 + \dot{\gamma}\bar{v}^3 \\ &= iYv + \frac{3i\beta^2}{\Omega^2}e^{-3\int H(t')dt'} [1+2(\delta+\bar{\delta})] v^2\bar{v} \\ &+ \left[2\alpha iY + e^{-3\int H(t')dt'} \frac{i\beta^2}{\Omega^2} (1+\delta+3\bar{\delta}) \right] v^3 \\ &+ \left[2i\rho Y + e^{-3\int H(t')dt'} \frac{3i\beta^2}{\Omega^2} (1+3\delta+\bar{\delta}) \right] v\bar{v}^2 \\ &+ \left[4i\gamma Y + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3\int H(t')dt'} (1+4\delta) \right] \bar{v}^3. \end{aligned} \quad (34)$$

Hence, we can confirm that, according to the nonlinear change of variable u [Eq. (31)], the expression \dot{u} given in Eq. (30) can be converted in terms of the new variable v as Eq. (34), where the time derivatives of α , ρ , and γ hold the equations

$$\dot{\alpha} = 2\alpha iY + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3\int H(t')dt'} (1+\delta+3\bar{\delta}), \quad (35)$$

$$\dot{\rho} = 2i\rho Y + \frac{3i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3\int H(t')dt'} (1+3\delta+\bar{\delta}), \quad (36)$$

$$\dot{\gamma} = 4i\gamma Y + \frac{i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3\int H(t')dt'} (1+4\delta). \quad (37)$$

Then, Eq. (34) becomes

$$\dot{v} = iYv + \frac{3i\beta^2}{\Omega^2} e^{-3\int H(t')dt'} [1+2(\delta+\bar{\delta})] v^2\bar{v}. \quad (38)$$

This formula will be used in the next section to investigate phase properties of the YM field and the corresponding Hannay's angle.

4 Phase properties: Hannay's angle

Phase properties of the adiabatically evolving YM field with time-dependent parameters of the Hamiltonian will be investigated in this section. The discussion of the non-vanishing Hannay's angle in the evolution of the YM field is necessary from a theoretical point of view mainly because of its gauge-theoretical structure [2, 7]. By setting

$$v = Ae^{\frac{3}{2}\int H(t')dt'} e^{i\Theta}, \quad (39)$$

we can confirm from the use of Eq. (38) that the equations for the amplitude A and the angle Θ are read

$$\dot{A} + \frac{3}{2}HA + iA\dot{\Theta} = iYA + \frac{3i\beta^2}{\Omega^2} [1+2(\delta+\bar{\delta})] A^3. \quad (40)$$

By adding this equation with its complex conjugate, which is

$$\dot{A} + \frac{3}{2}HA - iA\dot{\Theta} = -iYA - \frac{3i\beta^2}{\Omega^2} [1+2(\delta+\bar{\delta})] A^3, \quad (41)$$

we have

$$\dot{A} + 3HA = 0. \quad (42)$$

The subtraction of Eq. (41) from Eq. (40) gives

$$\dot{\Theta} = Y + \frac{3\beta^2}{\Omega^2} [1+2(\delta+\bar{\delta})] A^2. \quad (43)$$

It is possible to obtain an explicit form of $A(t)$ from Eq. (42) provided that $H(t)$ is known. Consequently, if $A(t)$ is known, we can also obtain Θ from Eq. (43). In this way, we can identify a complete solution of v given in Eq. (39).

Because

$$\delta + \bar{\delta} = \frac{3\dot{H}}{2\Omega^2}, \quad (44)$$

the derivative of the angle given in Eq. (43) can be rewritten as

$$\dot{\Theta} = \Omega \left(1 + \frac{3\beta^2}{\Omega^3} A^2 \right) - \frac{3\dot{H}}{4\Omega} \left(1 + \frac{6\beta^2}{\Omega^3} A^2 \right). \quad (45)$$

If we consider the fact that Eq. (42) implies that A is given by $A = A_0 e^{3\int_0^t H dt'}$, this equation becomes

$$\dot{\Theta} = \Omega - \frac{3\dot{H}}{4\Omega} + \frac{3\beta^2}{\Omega^2} \left(1 - \frac{3\dot{H}}{2\Omega^2} \right) A_0^2 e^{6\int_0^t H dt'}. \quad (46)$$

In particular, for the limit that t is sufficiently small, we can express $\dot{\Theta}$, under the assumption of the adiabatic change of the parameters H and β , in the form

$$\dot{\Theta} = \Omega \left(1 + \frac{3\tilde{\beta}^2}{\Omega^3} A_0^2 \right) - \frac{3\dot{H}}{4\Omega} \left(1 + \frac{6\tilde{\beta}^2}{\Omega^3} A_0^2 \right), \quad (47)$$

where $\tilde{\beta}$ is a renormalized parameter of the form $\tilde{\beta} = \beta \left(1 + 3 \int_0^t H dt' \right)$. The second term in Eq. (47) is the time-dependent geometric one, i.e., Hannay's part of $\dot{\Theta}$, whereas the first term is the dynamical part. Thus, Hannay's angle is obtained to be

$$\Theta_H(t) = - \int_0^t \frac{3\dot{H}}{4\Omega} \left(1 + \frac{6\tilde{\beta}^2}{\Omega^3} A_0^2 \right) dt + \Theta_H(0), \quad (48)$$

where $\Theta_H(0)$ is the initial Hannay's angle. If we think that it is difficult to know the amount of $\Theta_H(0)$, the difference in Hannay's angle between arbitrary two times t_0 and t ($t_0 < t$) may be more useful:

$$\Delta\Theta_H(t) = - \int_{t_0}^t \frac{3\dot{H}}{4\Omega} \left(1 + \frac{6\tilde{\beta}^2}{\Omega^3} A_0^2 \right) dt. \quad (49)$$

The appearance of this angle holonomy is of purely geometrical origin. Figures 1-4 represent simple time evolutions of Eq. (49) and their time derivatives where we

have taken $H = \dot{a}(t)/a(t)$ and $a(t) = (t/a_0)^{a_1}$. Here, a_0 and a_1 are constants. In these figures, Hannay's angle slowly increases at first, but its increment becomes gradually faster as time goes by. This is an extra angle shift emerging via the angle variables in a classical system along adiabatic or non-adiabatic changes of the parameters through a closed path in the parameter space. Figure 1 shows that the accumulation of Hannay's angle over time becomes small as a_0 increases. On the other hand, from Figs. 2-4, we can conclude that the accumulation of Hannay's angle becomes large as the parameters such as a_1 , α , and β increase. From the time derivatives of Hannay's angle in the figures, we can confirm the exact ratio of the increment of geometric angle per unit time.

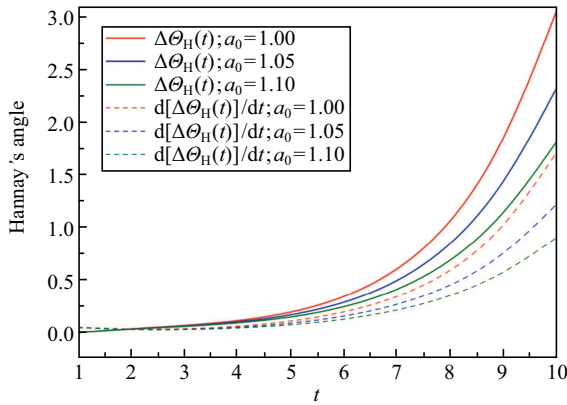


Fig. 1. (color online) Hannay's angle shifts for several different values of a_0 and their time derivatives represented as a function of t . This is plotted on the basis of numerical evaluation of Eq. (49) with the choice of $t_0 = 1$, where all values are taken to be dimensionless for the sake of convenience (This convention will also be applied to all the subsequent figures.). The values we used here are $a_1 = 1$, $A_0 = 1$, $\alpha = 1$, and $\beta = 1$.

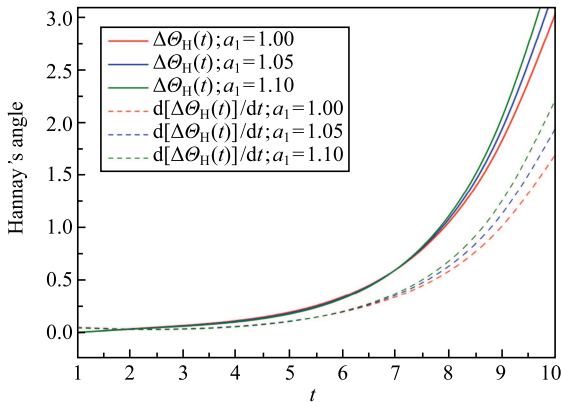


Fig. 2. (color online) Hannay's angle shifts for several different values of a_1 and their time derivatives represented as a function of t . The values we used here are $a_0 = 10$, $A_0 = 1$, $\alpha = 1$, and $\beta = 1$.

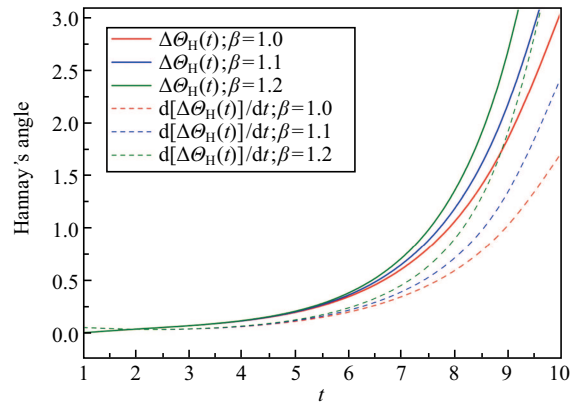


Fig. 3. (color online) Hannay's angle shifts for several different values of α and their time derivatives represented as a function of t . The values we used here are $a_0 = 10$, $a_1 = 1$, $A_0 = 1$, and $\beta = 1$.

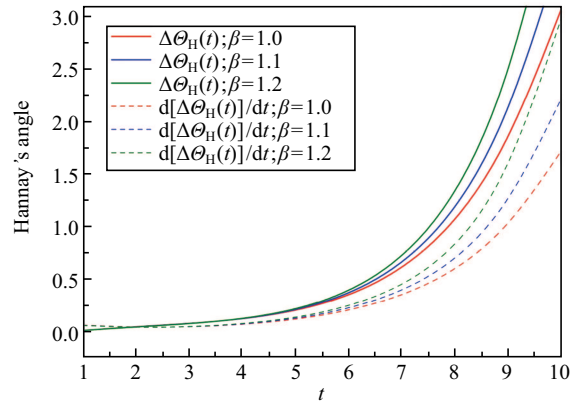


Fig. 4. (color online) Hannay's angle shifts for several different values of β and their time derivatives represented as a function of t . The values we used here are $a_0 = 10$, $a_1 = 1$, $A_0 = 1$, and $\alpha = 1$.

Through a comparative study via the first order approximation of perturbation theory [10], we can easily confirm that the damped quartic oscillator is canonically equivalent to this generalized quartic oscillator with a renormalized parameter $\tilde{\beta}$. Hence, both systems have an identical Hannay's angle. The Hannay's angle shift given in Eq. (49) provides fertile ground for applications in analyzing the evolution of the Universe.

Because the amount of phase shift originating from Hannay's angle is in general very small compared to the dynamical phase shift, the detection of Hannay's angle may be a somewhat cumbersome task and requires high precision measurements or observations [35]. A simple observation of Hannay's angle is possible for an elliptically orbiting object in celestial mechanics by averaging initial angles of the motion over the torus [35–38]. Such measurability of Hannay's angle can be extended to more

general and complicated systems, such as circular three-body gravitational systems [24, 25, 39], non-Abelian gauge fields systems [40], interacting many-particle boson systems [41], and systems undergoing noncyclic evolution [42]. In cosmology associated with the theory developed here, the evolution of Hannay's angle given in Eq. (49) is represented in terms of observable parameters. One can claim that the observation of Hannay's angle can serve as a demonstration of the validity of a given cosmological theory. This is the physical significance of analyzing the cosmological Hannay's angle regarding its theoretical and observational aspects.

5 Conclusion

The time behavior of YM cosmology has been investigated under the adiabatic evolution of time-dependent parameters. Novel features of phase transition in the early epoch can be explained by YM condensates which accompany the description of dark energy responsible for the inflation of the Universe. A rigorous evaluation leads the equation for the YM field to that of a particle confined in the quartic potential. Although the usual YM action is conformally invariant, YM fields associated with a vector field for inflation violate conformal invariance [3]. The phase properties of the system were ana-

lyzed and Hannay's angle was derived. Hannay's angle, given in Eq. (48), is equivalent to that of a damped quartic oscillator. We can confirm that the system acquires a supplement angular shift as the system evolves in phase space according to the adiabatic theorem. The smooth dependence of the Hamiltonian associated with the YM field on time-dependent parameters is responsible for the emergence of this additional change of the angle. Hannay's angle under a semiclassical approximation exhibits a well-known natural relation with Berry's phase in a quantum system [13], which is necessary to understand the quantum characteristics of the system. Hannay's angle and Berry's phase play important roles in analyzing several conceptual problems relevant to anomalies and their related problems [17] and indeed can be used as a supplementary measure to probe the inflation that is typically introduced in inflationary cosmologies [16]. An indirect route for estimating scalar or tensor spectral indices and other observable parameters therefrom can be achieved by measuring Hannay's angle or Berry's phase of the cosmological perturbations. During slow roll inflation, the overall phase or angle accumulated by the adiabatic limit of each mode along sub-Hubble oscillations is a new parameter made of the spectral indices of the corresponding scalar or tensor.

References

- 1 D. V. Gal'tsov and E. A. Davydov, *Int. J. Mod. Phys.: Conf. Ser.*, **14**: 316 (2012)
- 2 D. V. Gal'tsov and E. A. Davydov, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **272**: 119 (2011).
- 3 E. A. Davydov and D. V. Gal'tsov, *Gravit. Cosmol.*, **21**: 35 (2015)
- 4 D. V. Gal'tsov, *Proceedings of the 43rd Rencontres de Moriond La Thuile J08*, Gal'tsov(1-16) (2008). [arXiv:0901.0115v1 [gr-qc]]
- 5 V. V. Dyadichev, D. V. Gal'tsov, A. G. Zorin, and M. Yu. Zotov, *Phys. Rev. D*, **65**: 084007 (2002)
- 6 Y. Q. Cai and G. Papini, *Mod. Phys. Lett. A*, **4**: 1143 (1989)
- 7 F. Wilczek and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.*, **52**: 2111 (1984)
- 8 Y. Q. Cai and G. Papini, *Class. Quantum Grav.*, **7**: 269 (1990)
- 9 S. Albeverio and S. Mazzucchi, *J. Funct. Anal.*, **238**: 471 (2006)
- 10 O. V. Usatenko, J.-P. Provost, G. Vallée, and A. Boudine, *Phys. Lett. A*, **250**: 99 (1998)
- 11 J. H. Hannay, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18**: 221 (1985)
- 12 D. H. Kobe and J. Zhu, *Int. J. Mod. Phys. B*, **7**: 4827 (1993)
- 13 H. D. Liu, X. X. Yi, and L. B. Fu, *Ann. Phys. (N.Y.)*, **339**: 1 (2013)
- 14 A. K. Pati, *Ann. Phys. (N.Y.)*, **270**: 178 (1998)
- 15 O. V. Usatenko, J.-P. Provost, and G. Vallée, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**: 2607 (1996)
- 16 B. K. Pal, S. Pal, and B. Basu, *Class. Quantum Grav.*, **30**: 125002 (2013)
- 17 D. P. Datta, *Phys. Rev. D*, **48**: 5746 (1993)
- 18 S. P. Kim, *Phys. Lett. A*, **191**: 365 (1994)
- 19 D. P. Datta, *Mod. Phys. Lett. A*, **08**: 601 (1993)
- 20 A. Mostafazadeh, *Turk. J. Phys.*, **24**: 411 (2000)
- 21 B. K. Pal, S. Pal, and B. Basu, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **405**: 012025 (2012)
- 22 R. Brout and G. Venturi, *Phys. Rev. D*, **39**: 2436 (1989)
- 23 H. Rosu, P. Espinoza, and M. Reyes, *Il Nuovo Cimento B*, **114**: 1439 (1999)
- 24 A. D. A. M. Spallicci, *Il Nuovo Cimento B*, **119**: 1215 (2004)
- 25 M. V. Berry and M. A. Morgan, *Nonlinearity*, **9**: 787 (1996)
- 26 W. Zhao, Y. Zhang, and M. Tong, *Quantum Yang-Mills condensate dark energy models*, in *Dark Energy: Theories, Developments and Implications*, K. Lefebvre and R. Garcia(eds.), Ch. 5 (New York, Nova Science Publishers, Inc., 2010). pp. 89-110
- 27 Y. Zhang, T. Y. Xia, and W. Zhao, *Class. Quantum Grav.* **24**: 3309 (2007)
- 28 T. Y. Xia and Y. Zhang, *Phys. Lett. B*, **656**: 19 (2007)
- 29 S. Wang, Y. Zhang, and T. Y. Xia, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **2008**: 037 (2008)
- 30 Y. Zhang, *Phys. Lett. B*, **340**: 18 (1994)
- 31 P. A. R. Ade et al, *Phys. Rev. Lett.*, **112**: 241101 (2014)
- 32 P. A. R. Ade et al, arXiv: 1603.05976v1 (2016)
- 33 J. J. van der Bij and E. Radu, *Int. J. Mod. Phys. A*, **18**: 2379 (2003)
- 34 G. D. Moore, *Phys. Rev. D*, **62**: 085011 (2000)
- 35 S. Golin, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**: 4573 (1989)
- 36 S. Golin, A. Knauf, and S. Marmi, *Commun. Math. Phys.*, **123**: 95 (1989)
- 37 S. Golin and S. Marmi, *Europhys. Lett.*, **8**: 399 (1989)
- 38 S. Golin and S. Marmi, *Nonlinearity*, **3**: 507 (1990)
- 39 A. D. A. M. Spallicci, A. Morbidelli, and G. Metris, *Nonlinearity*, **18**: 45 (2005)
- 40 C. A. Mead, *Phys. Rev. Lett.*, **59**: 161 (1987)
- 41 S. C. Li, J. Liu, and L. B. Fu, *Phys. Rev. A*, **83**: 042107 (2011)
- 42 A. G. Wagh, V. C. Rakhecha, P. Fischer, and A. Ioffe, *Phys. Rev. Lett.*, **81**: 1992 (1998)

Abstract:

This work is made of two parts; In the first one we have determine the linear and Hermitian invariant of the inverted oscillator then solving the eigenvalues equation and calculating the phase as well as the solution of the Schrödinger equation of the system. This solution in the form of a Gaussian wave packet allows us to define the coherent states of the inverted oscillator. These coherent states reproduce the classical evolution, they are eigenstates of the annihilation operator and they are obtained by applying the displacement operator to the ground state.

In the second part, we used the fact that the evolution equation of the Yang-Mills field is that of a particle confined in a quartic potential. The adiabatic evolution allows us to study the classical evolution of the quartic oscillator and introduce the notion geometric angle of this system.

ملخص:

يتكون هذا العمل من جزأين، في الجزء الأول قمنا بتحديد اللامتغير الخطي و الهرميتي للهزاز التوافقي المقلوب ثم نحل معادلة القيمة الذاتية ونحسب الطور وكذلك حل معادلة شرودنغر لهذه الجملة . هذا الحل على شكل حزمة موجة لجاوس سمح لنا بتحديد الحالات المتماسكة (شبه كلاسيكية) للهزاز التوافقي المقلوب. الحالات المتماسكة تصف التطورات الكلاسيكية لهذه الجملة، هي دوال خاصة لمؤثر الهدم والتي يتم الحصول عليها من خلال تطبيق مؤثر الإزاحة على الفراغ. في الجزء الثاني، استعملنا حقيقة أن معادلة تطور حقل يانغ ميلز تشبه عبارة معادلة تطور لجسيمة خاضعة لتأثير كمون من الدرجة الرابعة . التغيرات الكاظمية سمحت لنا بدراسة تطور الهزاز التوافقي من الدرجة الرابعة الكلاسيكي ، وبالتالي إلى إدخال مفهوم زاوية هاني لهذا النظام.