

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA – JIJEL
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

THESE

**En vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN SCIENCES**

Filière : PHYSIQUE

Spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

Présentée Par

Basma AINOUZ

Intitulée

Etude de l'effet du potentiel scalaire sur la
création des paires de particules

Devant le jury :

Présidente :	Z. Belghobsi	Prof	Univ. MSBY. Jijel
Rapporteur :	S. Haouat	Prof	Univ. MSBY. Jijel
Examineurs :	K. Nouicer	Prof	Univ. MSBY. Jijel
	A. Garbi	Prof	Univ. A. Mira, Bejaia
	A. Bouchareb	MCA	Univ. B M. Annaba
	N. Belaloui	Prof	Univ. Mentouri, Constantine

Dédicaces

À la mémoire de mon père

Que Dieu ait son âme et l'abrite dans son immense paradis

À ma mère

Puisse Dieu, le tout puissant, la garde et la protège

À mes frères Ahmed et Mohamed

À mes sœurs

À mes adorables neveux et nièces

À toute ma famille

À mes amies

Je dédie ce modeste travail

Basma Ainouz

Remerciements

Je tiens, d'abord à remercier en premier lieu et avant tous, le bon Dieu le tout puissant, qui ma donné la force, la patience, la foi et de m'avoir permis d'arriver à ce stade-là.

Cette thèse a été réalisée au sein de Laboratoire de Physique Théorique (LPTh).

J'exprime ma sincère reconnaissance à Mr. S. Haouat, professeur à l'université de Jijel, le directeur de ma thèse, pour ses conseils scientifiques et ses discussions utiles et fructueux. Je le remercie encore, pour son aide, sa disponibilité permanente et le soutien qu'il m'a accordé pour faire avancer ce travail.

Je tiens aussi à exprimer toute ma profonde gratitude à Melle Z. Belghobsi, professeur à l'université de Jijel, Pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements les plus sincères vont : à Mr. N. Belaloui Professeur à l'université de Constantine, à Mr. A. Garbi professeur à l'université de Bejaia, à Mr. A. Bouchareb Maître de conférences à l'université d'Annaba, et également à Mr. K. Nouicer Professeur à l'université de Jijel, membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à ce travail en acceptant de prendre part d'évaluer et de juger cette thèse.

Mes plus chaleureux remerciements s'adressent à tous mes enseignants dès le primaire à l'université, qui ont assuré ma formation durant toutes mes études. Je remercie aussi tous les membres du LPTh, particulièrement, Melle Lamri Houria pour sa gentillesse et sa disponibilité.

Mes remerciements vont aussi à mes amies et mes collègues pour leur soutien.

Le bouquet de mes remerciements je le présente à tous les membres de ma famille pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral, notamment, à ma mère pour sa tendresse, son amour, sa patience, son soutien, son sacrifice et son douaa depuis ma naissance. Et enfin, à l'esprit de mon père, mon exemple éternel, qui n'a pas vu l'aboutissement de mon travail mais je sais que tu en aurais été fier de ta fille...

Basma Ainouz

Table des matières

1	Introduction générale	6
2	De la mécanique quantique à la théorie des champs	13
2.1	Introduction	13
2.2	Mécanique quantique relativiste	14
2.2.1	Principe de correspondance et équation de Klein Gordon	14
2.2.2	Equation de Dirac	16
2.2.3	Covariance relativiste	19
2.2.4	Modes de couplage	21
2.3	Paradoxe de Klein	23
2.4	Théorie quantique des champs	24
2.4.1	Champ scalaire libre	25
2.4.2	Champ spinoriel libre	28
2.5	Création de particules	30
2.5.1	TQC en présence d'un champ électrique	30
2.5.2	Interprétation en termes de particules	31
2.5.3	Création de particules à partir du vide	33
2.6	Conclusion	35
3	Paradoxe de Klein en présence d'un potentiel scalaire	36
3.1	Introduction	36
3.2	Paradoxe de Klein en présence d'un potentiel scalaire	37
3.3	Interprétation dans le cadre des champs quantiques	43
3.3.1	Le choix des états "in" et "out"	43
3.3.2	Création des particules	45
3.4	Conclusion	49

4	Création de particules de spin 0 en présence d'un potentiel scalaire de type Sauter	50
4.1	Introduction	50
4.2	Equation de Klein Gordon et Comportement des Solutions	51
4.3	Les états "in" et "out"	53
4.3.1	Le choix de Hansen et Ravndal	53
4.3.2	Le choix de Nikishov	54
4.4	Solutions exactes	55
4.5	Création de particules	58
4.6	La limite $a \gg 1$	62
4.7	Conclusion	63
5	Effet de Schwinger résonnant en présence d'un potentiel scalaire	65
5.1	Introduction	65
5.2	Effet de Schwinger en présence d'un champ électrique homogène	66
5.3	Création de particules en présence d'un potentiel scalaire	69
5.3.1	Solutions de l'équation de Klein Gordon	69
5.3.2	Le choix des états "in" et "out" et la création de particules	70
5.4	Approximation semi-classique	72
5.5	La jauge dépendante du temps	73
5.6	La somme sur tous les états	77
5.6.1	Le lagrangien effectif	77
5.6.2	Le nombre total de particules créées	78
5.7	Conclusion	82
6	Création des particules de Dirac en présence d'un potentiel scalaire	84
6.1	Introduction	84
6.2	Equation de Dirac en présence d'un potentiel scalaire	84
6.3	Potentiels linéaires	88
6.3.1	Solutions de l'équation de Dirac	89
6.3.2	Transformation de Bogoliubov et création des particules	91
6.3.3	La somme sur tous les états	92
6.4	Potentiels de type Sauter	95
6.4.1	Les états "in" et "out"	96

6.4.2	Création de particules	99
6.4.3	La limite $a \rightarrow 0$	100
6.4.4	La limite $a \rightarrow \infty$	101
6.5	Conclusion	102
7	Inclusion d'un champ magnétique	103
7.1	Introduction	103
7.2	Particules de spin 0	104
7.2.1	Potentiels de Sauter avec un champ magnétique homogène	104
7.2.2	Potentiels linéaires avec un champ magnétique	106
7.2.3	La somme sur tous les états	108
7.3	Particules de spin 1/2	110
7.3.1	Equation de Dirac	110
7.3.2	Potentiels de type Sauter	114
7.3.3	Potentiels linéaires	117
7.3.4	Somme sur tous les états	118
7.4	Conclusion	122
8	Conclusion générale	123

Chapitre 1

Introduction générale

Le but principal de la physique théorique est de mettre en évidence les forces fondamentales qui gouvernent l'univers et de les décrire de la manière la plus simple et la plus apte à rendre possible l'étude des phénomènes physiques. Une telle description des forces de la nature, nous permet de mieux comprendre le comportement de la matière, des particules élémentaires aux objets célestes. La théorie quantique des champs (TQC) est le cadre physique le plus efficace pour décrire ces forces [1, 2, 3, 4]. L'aptitude de sa formulation et la puissance de ses calculs lui confèrent une utilité dans différents domaines, comme par exemple la physique des particules, la physique de la matière condensée et même la théorie de la gravitation. De plus, ses prédictions pour les interactions entre les électrons et les photons se sont avérées exactes à une précision de 10^{-8} . L'exemple le plus connu en électrodynamique quantique (QED) est le rapport gyromagnétique de l'électron g , au sujet duquel des développements récents ont été spectaculaires tant dans le domaine théorique que dans le domaine expérimental. Du côté théorique, des calculs à quatre et à cinq boucles impliquant des centaines de diagrammes de Feynman donnent g comme une série de puissances de la constante de structure fine $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ [5, 6, 7, 8],

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_{\text{th}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} - a_2 \times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + a_3 \times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 - a_4 \times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \dots \quad (1.1)$$

Du côté expérimental, une mesure directe de g , sans mesurer α , a été effectuée en utilisant un cyclotron à un électron et le résultat [9, 10],

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_{\text{exp}} = 0.00115965218073, \quad (1.2)$$

s'accorde remarquablement bien avec la valeur obtenue à partir de (1.1) en utilisant une mesure indépendante de α à partir de l'effet de recul de l'atome de Rubidium Rb et Césium Cs [11, 12],

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_{\text{Rb}} = 0.00115965217886 \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_{\text{Cs}} = 0.00115965218161. \quad (1.4)$$

Ceci est une confirmation impressionnante de la précision de la QED perturbative.

Par contre, le régime non perturbatif de la QED qui se pose lorsque nous considérons des champs extérieurs ultra-forts, n'a pas connu un développement aussi rapide. En général, le régime non perturbatif concerne non seulement la QED, mais aussi toute théorie quantique des champs en présence des champs extérieurs intenses donnant lieu à plusieurs effets quantiques comme par exemple la création de paires particule-antiparticule.

La création de paires de particules par un champ électromagnétique à partir du vide, nommée l'effet de Schwinger, a été prédite dans le contexte de l'électrodynamique quantique, il y a plusieurs décennies [13]. Aujourd'hui, il est bien connu que tout champ électrique intense peut créer des paires de particules chargées [14].

La compréhension du phénomène de création de particules à partir du vide dépend de la définition de ce vide. Selon la physique contemporaine, il n'y a pas de vide au sens ordinaire du néant absolu. Il y a plutôt un vide quantique fluctuant. Ceci est étroitement lié à l'énergie du point zéro, la plus faible énergie possible qu'un système quantique puisse avoir. Le terme énergie du point zéro qui est une traduction du mot allemand "Nullpunktsenergie", remonte jusqu'à l'époque de la physique pré-quantique et surtout aux travaux de Planck et d'Einstein sur le rayonnement du corps noir. L'importance du problème du corps noir réside non seulement dans le développement de la théorie quantique mais aussi dans la conception de l'énergie du point zéro (le vide). Il constitue alors la première physique de l'énergie au zéro absolu de température. C'est l'énergie associée au mouvement persistant même au zéro absolu, où classiquement tout mouvement cesse.

Devant l'échec de la loi de Reilly-Jeans qui est conséquence inévitable de la physique classique et du théorème d'équipartition de l'énergie, dans la description du rayonnement thermique, Planck a suggéré la quantification de l'énergie échangée entre l'oscillateur harmonique et le rayonnement. En 1900, il a publié sa théorie sur le rayonnement du corps noir [15], où il a montré que l'énergie moyenne d'un oscillateur en équilibre thermique avec le

rayonnement est

$$U = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}, \quad (1.5)$$

ce qui a conduit à la fameuse loi de Planck

$$u(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}. \quad (1.6)$$

Malgré son accord avec les résultats expérimentaux, cette formule ne reproduit pas la loi classique à la limite $k_B T \gg h\nu$. En effet, pour $k_B T \gg h\nu$, l'énergie moyenne U se comporte comme

$$U \simeq \frac{h\nu}{1 + \left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)^2 - 1} = k_B T - \frac{1}{2} h\nu \quad (1.7)$$

Ainsi, l'énergie moyenne U contient en plus de l'énergie prédite par le théorème d'équipartition de l'énergie dans la limite classique $k_B T$, une correction indépendante de la température. Planck a ainsi constaté qu'il devait ajouter le terme $\frac{1}{2} h\nu$ à U . En 1912, il a publié sa deuxième théorie [16] où il a pu montrer que l'énergie moyenne U est plutôt donnée par

$$U = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} + \frac{1}{2} h\nu. \quad (1.8)$$

La correction $\frac{1}{2} h\nu$ n'est rien d'autre que l'énergie exacte de l'état fondamental d'un oscillateur harmonique quantique, une conséquence de sa nature ondulatoire. Le principe d'incertitude implique que chaque système physique possède un point zéro pour son énergie, supérieure au minimum de son puits de potentiel classique. Cela entraîne du mouvement même au zéro absolu. Tous les systèmes de la mécanique quantique subissent alors des fluctuations même quand ils sont à leur état fondamental (auquel est associée une énergie du point zéro).

Ce résultat peut être généralisé aux champs quantiques comme suit : même en l'absence de toute matière, le vide possède une énergie du point zéro, fluctuante, d'autant plus grande que le volume considéré est petit. Aux échelles macroscopiques, l'énergie du point zéro est négligeable car les fluctuations quantiques de l'état du vide s'annulent sur des grands volumes. Cette énergie possède cependant des effets physiques microscopiques. En QED, ces fluctuations quantiques donnent au vide le comportement d'un milieu polarisable, conduisant à de nouveaux effets quantiques, comme l'effet Casimir, l'émission spontanée de photons par des atomes et la création de paires particule-antiparticule et permettant ainsi, une nouvelle

fenêtre expérimentale sur le régime largement inexploré de l'électrodynamique quantique non perturbative.

Selon cette définition du vide quantique, la création de particules implique l'évolution d'un système quantique d'une configuration d'équilibre initiale (le vide) à une nouvelle configuration d'équilibre finale (état excité) à travers une évolution intermédiaire, hors équilibre, établie par le champ électrique.

Avec l'avènement de la mécanique quantique relativiste, le phénomène de la création des particules a trouvé une autre interprétation à travers l'étude de la diffusion des particules relativistes par une barrière de potentiel et le paradoxe de Klein associé [17]. Dans une image semi-classique, un état d'énergie négative (une particule virtuelle) de la mer de Dirac dans une région de la barrière peut être transmis à l'autre région en devenant un état d'une particule et en laissant dans la première région un trou qui représente une antiparticule [18].

Cette interprétation a été approfondie dans le cadre de la théorie quantique des champs en présence d'un champ extérieur intense [19]. Selon cette théorie qui a un vide instable, les particules sont mal définies en présence d'un champ extérieur. En général, dans le formalisme de la matrice de diffusion, il existe deux définitions différentes des particules, à savoir les particules entrantes (particules "in") et les particules sortantes (particules "out"). Cela dépend de deux définitions de l'état du vide, le vide "in" et le vide "out". Les particules créées sont donc des particules "out" dans le vide "in". Dans ce contexte, le problème se réduit à la définition des états "in" et "out" à partir desquels nous pouvons déterminer toutes les quantités physiques qui décrivent le phénomène grâce à une transformation entre les états "in" et "out" (transformation de Bogoliubov) [19]. Bien entendu, des solutions analytiques à l'équation du champ sont indispensables. Il est à noter que cette méthode s'est révélée particulièrement utile pour étudier la création de particules, soit en QED, soit en cosmologie où l'expansion de l'univers produit des particules [20, 21, 22].

D'autre part, cet effet, prédit en théorie, est très difficile à réaliser expérimentalement car il est très faible et nécessite un champ électrique de l'ordre de la valeur critique $E_c = \frac{m^2}{e} = 10^{16}$ V/cm (pour les électrons) qui dépasse les capacités technologiques actuelles. De plus, il peut arriver que les intensités atteignables dans les prochaines installations laser à haute intensité soient encore trop petites pour qu'aucun signal clair de la création de particules ne soit détecté [23]. Dans ce contexte, de nombreuses recherches se sont portés sur la question de savoir comment améliorer par des effets dynamiques le taux des particules créées [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31].

Le principe de base de l'effet de Schwinger assisté dynamiquement est de superposer un champ laser faible de pulsations rapides et un champ laser intense de pulsations lentes. Il a été montré dans [24] que le laser de pulsations rapides contribue à réduire la barrière à travers laquelle passent les particules virtuelles, en provoquant ainsi une amplification significative de la création des particules.

Il est également difficile d'étudier analytiquement l'effet de Schwinger assisté dynamiquement sous tous ses aspects en raison de sa nature non perturbative qui nécessite soit un traitement exact, soit des approximations semi-classiques. Le défi est donc double, d'une part nous devons utiliser des superpositions de champs électriques de différents paramètres et de l'autre part nous devons considérer une sorte d'analyse non perturbative.

Au-delà de la méthode basée sur la transformation de Bogolubov, plusieurs techniques ont été développées afin de répondre aux deux exigences contradictoires ; Afin d'amplifier l'effet pour pouvoir l'observer au laboratoire, nous devons considérer des interactions pour lesquelles l'équation du champ n'a en générale pas de solutions analytiques, d'un côté, et de l'autre côté, nous devons utiliser un traitement non perturbatif. Parmi ces techniques, nous citons les méthodes semi-classiques WKB [32, 33], les approches cinétiques quantiques [34, 35, 36], les techniques des instantons [37, 38, 39, 40] et les méthodes de l'action effective de Schwinger [41, 42, 43, 44].

Dans cette thèse, nous nous proposons d'étudier la création de particules en présence à la fois d'un champ électrique, décrit par un potentiel vecteur, et d'un potentiel scalaire par l'utilisation de la méthode basée sur la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" et "out" [45, 46, 47, 48].

Durant les deux dernières décennies, les problèmes liés aux particules relativistes soumises à l'action combinée d'un potentiel vecteur et d'un potentiel scalaire sont extensivement étudiés où les solutions aux équations d'onde correspondantes sont obtenues par plusieurs approches. Cependant, la majorité des études publiées porte sur les états liés [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62]. A notre connaissance, à l'exception de quelques travaux sur la diffusion des particules relativistes en présence d'un potentiel scalaire et le paradoxe de Klein associé [63, 64, 65, 66, 67], l'effet de Schwinger n'a jamais été étudié en présence d'un potentiel scalaire.

Le fait que les potentiels scalaires apparaissent dans certains domaines de la physique comme la physique des particules [68, 69, 70, 71], la théorie de la gravitation de Kaluza-Klein [72, 73] et la physique des semi-conducteurs [74, 75], où l'effet de Schwinger en présence

d'un champ électrique intense est d'une grande importance, nous motive à étudier l'effet du potentiel scalaire sur la création de particules. De plus, comme le potentiel scalaire se couple à la masse de la particule, il ne fait pas de différence entre une particule et son antiparticule. En d'autres termes, contrairement au champ électrique, le potentiel scalaire agit sur les particules et les antiparticules de la même manière. Il modifie cependant, par son ajout à la masse de la particule, l'écart entre les énergies positives et négatives, pouvant ainsi avoir un effet significatif sur le processus de création de particules.

Cette thèse se compose essentiellement de 8 chapitres

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons les ingrédients nécessaires pour bien comprendre les problématiques traitées dans cette thèse. En premier lieu, nous exposons les différents concepts qui découlent du développement historique de la théorie quantique relativiste. Après avoir souligné les limites de la mécanique quantique relativiste avec son interprétation monoparticulaire, nous expliquons comment la théorie quantique des champs a pu unifier la mécanique quantique et la relativité restreinte, donnant lieu la création et l'annihilation des particules. Ensuite, nous montrons comment décrire le processus de création des particules à partir du vide dans le cadre de la théorie quantique des champs.

Dans le troisième chapitre, nous considérons la diffusion d'une particule relativiste par une barrière qui se compose de deux composantes. La première composante est la barrière vectorielle habituelle qui se couple à la particule via sa charge électrique tandis que la deuxième est une barrière scalaire qui se couple à la masse de la particule. En premier lieu, nous résolvons l'équation de Dirac avec un mélange général des potentiels vecteur et scalaire et nous discutons de l'apparition du paradoxe de Klein. Ensuite, nous proposons de traiter le problème dans le cadre de la théorie quantique des champs où nous donnons deux ensembles de solutions exactes qui peuvent être interprétées comme des états "in" et "out". Finalement, en utilisant la relation entre ces deux ensembles, nous déterminons la probabilité de création de paires, le nombre moyen de particules créées et la persistance du vide.

Dans le quatrième chapitre, nous nous proposons d'étudier la création des particules de spin 0 en considérant des potentiels du type Sauter pour lesquels l'équation de Klein Gordon admet des solutions analytiques exactes. Nous introduisons, d'abord, un champ de Bosons interagissant avec les potentiels scalaires et vectoriels. Ensuite, nous résolvons l'équation de Klein Gordon correspondante. Pour étudier le processus de création des particules, nous considérons deux définitions différentes des états. Ensuite, nous établissons la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" et "out" et nous extrayons la probabilité de créer une

paire de particules dans un état donné, le nombre moyen de particules créées et la persistance du vide à partir des coefficients de Bogoliubov.

Dans le cinquième chapitre nous nous proposons d'étudier la création de particules de spin 0 en présence des potentiels linéaires. Dans cette étude, nous prêtons attention aux aspects suivants :

- 1) La validité du calcul semi classique.
- 2) L'invariance de jauge.
- 3) La somme sur tous les états possibles et le calcul du lagrangien effectif de Schwinger.

Dans le sixième chapitre, nous nous proposons d'étudier des particules de spin 1/2 qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac au lieu de la statistique de Bose-Einstein. Comme applications, nous considérons les potentiels linéaires et les potentiels du type Sauter. Pour chaque application nous résolvons, en premier lieu, l'équation de Dirac correspondante. Ensuite, nous utilisons la transformation de Bogoliubov pour calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées. Pour les potentiels linéaires nous calculons le lagrangien effectif de Schwinger en faisant la somme sur tous les états possibles.

Dans le septième chapitre, nous nous intéressons à l'effet du potentiel scalaire sur la création des particules en présence d'une combinaison d'un champ électrique et un champ magnétique.

Le huitième chapitre est une conclusion générale qui récapitule l'ensemble des résultats obtenus.

Chapitre 2

De la mécanique quantique à la théorie des champs

2.1 Introduction

En physique du XX^{e} siècle, nous pouvons voir que deux théories monumentales ont radicalement changé la façon dont nous comprenons l'espace, le temps et la matière. Il s'agit de la théorie de la relativité restreinte et la mécanique quantique. Ces théories ont étendu notre compréhension aux parties du monde naturel qui ne sont normalement pas accessibles aux sens et à l'expérience humains. La théorie de la relativité restreinte concerne des observables et des objets se déplaçant à des vitesses et des énergies extrêmement élevées. La mécanique quantique est indispensable pour comprendre les propriétés de la matière à l'échelle microscopique : noyaux, atomes, molécules, etc.

Cependant, malgré le succès impressionnant de la mécanique quantique dans la description de la physique subatomique, il était immédiatement clair après sa formulation que son extension relativiste n'était pas exempte de difficultés. Comme nous le verrons ci-dessous, l'unification de la mécanique quantique avec la relativité restreinte nous oblige à abandonner l'interprétation monoparticulaire de la fonction d'onde. Au lieu de cela, nous devons considérer les champs quantiques dont les excitations élémentaires sont associées à des états de particules.

L'objectif de ce chapitre est d'expliquer pourquoi la mécanique quantique ne suffit pas et comment la théorie quantique des champs nous est imposée par la relativité restreinte. Nous passerons en revue un certain nombre d'énigmes qui apparaissent dans la tentative d'étendre

les résultats de la mécanique quantique à des systèmes où les effets relativistes ne peuvent être ignorés. Leur résolution nécessite de renoncer à la description de la mécanique quantique d'une seule particule pour permettre la création et l'annihilation des particules. Comme nous le verrons, les champs quantiques fournissent le bon outil pour gérer cela.

2.2 Mécanique quantique relativiste

Dans cette section, nous fournirons une dérivation heuristique des deux équations de la mécanique quantique les plus utilisées dans le régime relativiste, à savoir l'équation de Klein Gordon et celle de Dirac.

2.2.1 Principe de correspondance et équation de Klein Gordon

La première équation pour une particule relativiste libre en mécanique quantique résulte de l'application du principe de correspondance, qui consiste à remplacer les observables classiques par des opérateurs agissant sur les fonctions d'onde. Dans la représentation de position, le principe de correspondance stipule que l'énergie, notée ω , est associée à l'opérateur

$$\hat{\omega} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.1)$$

tandis que la quantité de mouvement \vec{p} est associée au gradient $\vec{\nabla}$,

$$\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}. \quad (2.2)$$

L'incorporation de ces opérateurs dans la relation de dispersion relativiste

$$\omega^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.3)$$

donne directement l'équation de Klein Gordon

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \varphi = 0, \quad (2.4)$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme covariante

$$\left[\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \varphi = 0 \quad (2.5)$$

avec

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

La dérivation d'une équation relativiste est donc très simple. Cependant, malgré cette simplicité, il a été constaté, dès son premier avènement, que le contenu physique de cette équation ne peut être incarné dans le cadre de la mécanique quantique habituelle. Pour expliquer cela, considérons d'abord les solutions de cette équation pour une particule libre.

Solutions libres

Comme en mécanique quantique non relativiste, la particule libre est décrite par une onde plane

$$\varphi(t, \vec{r}) = C \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (\omega t - \vec{p} \cdot \vec{r}) \right] \quad (2.7)$$

où ω et \vec{p} représentent respectivement l'énergie et l'impulsion de la particule. La substitution de la solution (2.7) dans l'équation de Klein-Gordon (2.4) donne deux valeurs possible pour l'énergie, $\omega = \pm E_{\vec{p}}$ avec

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.8)$$

La solution générale de l'équation de Klein Gordon est donc

$$\varphi(t, \vec{r}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[A_+(\vec{p}) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} p \cdot x \right) + A_-(\vec{p}) \exp \left(\frac{i}{\hbar} p \cdot x \right) \right]. \quad (2.9)$$

Nous avons alors, en plus de la solution habituelle à énergie positive, une solution à énergie négative.

Par conséquent, le spectre d'énergie de la théorie qui satisfait $|\omega| > m$, n'a pas de limite inférieure et n'a pas donc d'état fondamental. Les solutions à énergie négative qui semblent être la première difficulté de la mécanique quantique relativiste, sont d'un grand intérêt physique. Par exemple comme il a été montré par Holstein [76], la tentative de calculer le propagateur en ne considérant que les solutions d'énergie positive, viole le principe de causalité. Le problème est donc comment interpréter ces solutions.

Avant d'aborder l'interprétation des solutions d'énergie négative, exposons l'équation de continuité qui découle de l'équation de Klein Gordon.

Equation de continuité

L'interprétation probabiliste de toute équation d'onde est basée sur l'établissement d'une loi de conservation (équation de continuité) qui s'écrit en général sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (2.10)$$

Pour l'équation de Klein Gordon, nous avons

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) \quad (2.11)$$

et

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left(\varphi^* \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} \varphi^* \right). \quad (2.12)$$

Cette loi de conservation diffère dans un aspect important de celle dérivée à partir de l'équation de Schrödinger, à savoir l'expression de ρ n'est pas définie positive. La solution de l'équation de Klein Gordon n'est pas donc une fonction d'onde.

Il est à noter que lorsque l'équation de Klein-Gordon a été initialement suggérée, le fait que ρ n'est pas définie positive inquiétait les physiciens à point que l'équation de Klein Gordon a été rejetée et la recherche d'une équation d'onde invariante de Lorentz s'est poursuivie.

2.2.2 Equation de Dirac

Le fait que l'équation de Klein-Gordon ne produisait pas une densité de probabilité définie positive est liée à la dérivée du second ordre par rapport au temps. Cette dérivée est la conséquence du principe de correspondance appliqué sur la relation de dispersion relativiste (2.3) qui implique un terme d'ordre 2 en ω .

Une équation d'onde relativiste de Lorentz plus satisfaisante, c'est-à-dire avec une densité définie positive, n'aurait donc qu'une dérivée du premier ordre par rapport au temps. Cependant, en raison de l'équivalence des coordonnées spatiales et temporelles dans l'espace de Minkowski, une telle équation ne peut avoir que des dérivées du premier ordre par rapport aux coordonnées spatiales. Elle doit alors comporter un opérateur différentiel de type $\mathcal{D} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} = -i\hbar \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}$. Dirac a proposé l'équation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -i\hbar c \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \Psi \right) + \beta mc^2 \Psi \equiv H_{Dirac} \Psi, \quad (2.13)$$

où les matrices $\vec{\alpha}$ et β peuvent être déterminées par la condition d'hermiticité de H_{Dirac} et le fait que H_{Dirac}^2 doit être égal à $\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$. Dans la représentation de Dirac (dite aussi représentation standard) les matrices $\vec{\alpha}$ et β sont données par

$$\vec{\alpha} = \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

où σ_k ($k = 1, 2, 3$) sont les matrices de Pauli 2×2 .

En introduisant les matrices γ^μ avec $\gamma^0 = \beta$ et $\gamma^k = \beta \alpha_k$, nous pouvons écrire la forme covariante de l'équation de Dirac pour une particule libre

$$[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc]\Psi = 0. \quad (2.15)$$

Solutions libres

Comme dans le cas de l'équation de Klein Gordon, nous considérons des solutions d'ondes planes de la forme

$$\Psi = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right)\Phi(p) \quad (2.16)$$

où $p^\mu = (\omega, \vec{p})$. Le spineur $\Phi(p)$ vérifie l'équation

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)\Phi(p) = 0. \quad (2.17)$$

Pour avoir des solutions non nulles, le déterminant de $(\gamma^\mu p_\mu - mc)$ doit être nul

$$\det(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0 \implies \frac{\omega^2}{c^2} = |\vec{p}|^2 + m^2 c^2. \quad (2.18)$$

Pour $\omega \geq mc^2$, ($\omega = E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}$), nous avons donc deux solutions linéairement indépendantes

$$\Psi_{\nu=1,2}^+ = u(\vec{p}, \nu) \exp\left(\frac{-i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right) = \sqrt{\frac{E_p + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \chi_\nu \\ \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + mc^2} \chi_\nu \end{pmatrix} \exp\left(\frac{-i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right), \quad (2.19)$$

avec $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\omega < mc^2$, ($\omega = -E_p$), nous avons

$$\Psi_{\nu=1,2}^- = v(\vec{p}, \nu) \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) = \sqrt{\frac{E_p + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + mc^2} \chi_\nu \\ \chi_\nu \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right). \quad (2.20)$$

Les spineurs $u(\vec{p}, \nu)$ et $v(\vec{p}, \nu)$ vérifient les identités suivantes

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p}, \nu) u(\vec{p}, \nu') &= -\bar{v}(\vec{p}, \nu) v(\vec{p}, \nu') = \delta_{\nu, \nu'} \\ \bar{u}(\vec{p}, \nu) v(\vec{p}, \nu) &= \bar{v}(\vec{p}, \nu) u(\vec{p}, \nu) = 0 \\ \sum_\nu u(\vec{p}, \nu) \bar{u}(\vec{p}, \nu) &= \frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc} \\ \sum_\nu v(\vec{p}, \nu) \bar{v}(\vec{p}, \nu) &= -\frac{-\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc}. \end{aligned}$$

Nous avons alors quatre solutions plutôt que deux comme dans l'équation de Klein-Gordon. A première vue, l'équation de Dirac semble avoir aggravé la situation avec des solutions supplémentaires. Nous verrons par la suite que ces solutions supplémentaires ont une signification physique importante.

La solution générale pour l'équation de Dirac libre est donc

$$\Psi(\vec{x}, t) = \sum_\nu \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[A_{\vec{p}, \nu} u(\vec{p}, \nu) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \cdot x\right) + B_{\vec{p}, \nu} v(\vec{p}, \nu) \exp\left(\frac{i}{\hbar} p \cdot x\right) \right]. \quad (2.21)$$

Equation de continuité

Il est facile d'écrire l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (2.22)$$

où la densité ρ et le courant \vec{j} sont maintenant donnée par

$$\rho = \frac{j^0}{c} = \Psi^+ \Psi \quad (2.23)$$

et

$$\vec{j} = c \bar{\Psi} \vec{\gamma} \Psi \quad (2.24)$$

avec $\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma^0$. Cela démontre un avantage de l'équation de Dirac par rapport à l'équation de Klein-Gordon, la densité ρ est définie positive et peut donc être interprétée comme une

densité de probabilité.

Notons ici que l'équation de continuité peut s'écrire sous la forme covariante $\partial_\mu \mathbf{j}^\mu = 0$, où $\mathbf{j}^0 = c\rho = c\bar{\Psi}\gamma^0\Psi$ et $\mathbf{j}^k = c\bar{\Psi}\gamma^k\Psi$.

2.2.3 Covariance relativiste

Selon le principe de la relativité restreinte, les lois de la nature doivent être invariantes lors d'une transformation d'un référentiel inertiel à un autre. De point de vue mathématique ceci s'incarne dans l'invariance des lois physiques sous la transformation de Lorentz qui conserve la norme des intervalles entre tous les points de l'espace-temps. Une théorie quantique qui répond au principe de la relativité doit être invariante sous une transformation de Lorentz. Dans ce paragraphe, nous montrons la covariance de Lorentz des équations relativistes.

Considérons deux observables, O et O' , dans deux référentiels inertiels différents, qui décrivent le même événement physique (I) avec leurs coordonnées spatio-temporelles particulières, x et x' . La transformation de Lorentz qui lie les coordonnées x de l'événement I pour l'observable O et les coordonnées x' de l'événement I pour l'observable O' s'écrit

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.25)$$

avec

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu. \quad (2.26)$$

Il n'est pas difficile de montrer que le D'Alembertien est un invariant de Lorentz

$$\partial^\mu \partial_\mu = \partial'^\mu \partial'_\mu. \quad (2.27)$$

Ainsi, l'équation de Klein-Gordon est clairement compatible avec la relativité restreinte ; elle prend la même forme dans tous les référentiels inertiels avec

$$\varphi'(x') = \varphi(x = \Lambda^{-1}x'). \quad (2.28)$$

Pour l'équation de Dirac, nous supposons que $\psi(x)$ se transforme suivant la loi

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}x'). \quad (2.29)$$

Si nous imposons la covariance de l'équation de Dirac, nous trouvons que l'opérateur $S(\Lambda)$

s'écrit

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) \quad (2.30)$$

avec

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (2.31)$$

Dans ce cas, une forme bilinéaire $\bar{\psi}(x)M\psi(x)$ se transforme comme

$$\bar{\psi}(x)M\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x')M\psi'(x') = \bar{\psi}(x)M'\psi(x), \quad (2.32)$$

avec

$$M' = \bar{S}(\Lambda)MS(\Lambda) \quad \text{et} \quad \bar{S}(\Lambda) = S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^+(\Lambda) \gamma^0. \quad (2.33)$$

Pour une transformation infinitésimale nous avons

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \quad (2.34)$$

$$S^{-1}(\Lambda) = 1 + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \quad (2.35)$$

et

$$M' = S^{-1}(\Lambda)MS(\Lambda) = \left(1 - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)M\left(1 + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) = M - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}[\sigma^{\mu\nu}, M]. \quad (2.36)$$

Toute matrice M peut s'écrire de façon unique comme une combinaison linéaire des matrices $\mathbb{I}_{(4 \times 4)}$, γ^5 , γ^μ , $\gamma^5\gamma^\mu$ et $\sigma^{\mu\nu}$

$$M = S\mathbb{I}_{(4 \times 4)} + P\gamma^5 + V_\mu\gamma^\mu + A_\mu\gamma^5\gamma^\mu + T_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

Ceci définit cinq formes bilinéaires de base selon leurs transformations de Lorentz

$$\begin{aligned} \text{Scalaire} & : \bar{\psi}(x)\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x) \\ \text{Pseudo-scalaire} & : \bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x')\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) \\ \text{Vecteur} & : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) \\ \text{Pseudo-vecteur} & : \bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\mu\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x')\gamma^5\gamma^\mu\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\nu\psi(x) \\ \text{Tenseur} & : \bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\bar{\psi}(x)\sigma^{\alpha\beta}\psi(x) \end{aligned}$$

Notons que l'invariance relativiste est d'une grande importance en physique. Historiquement,

ce n'est qu'après la formulation d'une théorie quantique entièrement covariante de Lorentz à la fin des années 40, que les effets physiques ont pu être démêlés des divergences insignifiantes, permettant au développement de la théorie de progresser davantage.

2.2.4 Modes de couplage

Pour tenir compte de l'interaction de la particule relativiste avec un potentiel extérieur, nous pouvons considérer plusieurs modes de couplage. Cela dépend de la nature du potentiel et sa transformation de Lorentz.

Couplage minimum

Partons du lagrangien classique d'une particule libre de masse m et de charge e

$$L_{libre} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.38)$$

Pour le cas d'une particule libre, le moment conjugué

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p_x. \quad (2.39)$$

Si cette particule est soumise à l'action d'un champ électromagnétique, un terme d'interaction L_{int} se rajoute à L_{libre}

$$L = L_{libre} + L_{int}. \quad (2.40)$$

Ce terme doit reprendre aux conditions suivantes :

1. Il reproduit la loi de Newton avec la force de Lorentz.
2. Il préserve l'invariance relativiste.
3. Il préserve l'invariance de jauge.

Le lagrangien qui satisfait à ces conditions est donné par

$$L_{int} = -e\phi + e\vec{v} \cdot \vec{A}. \quad (2.41)$$

Là, nous remarquons que le moment conjugué de la particule est différent de sa quantité de

mouvement

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + eA_x = p_x + eA_x. \quad (2.42)$$

A partir de la dernière équation nous en déduisons le principe du couplage minimum qui consiste aux changements $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$ et $\omega \rightarrow \omega - e\phi$ lorsque la particule est soumise à un champ électromagnétique. En écriture covariante ce principe s'écrit

$$\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - eA_\mu. \quad (2.43)$$

L'équation de Klein Gordon prend alors la forme

$$\left[\frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right)^2 - \left(-i\hbar \vec{\nabla} - e\vec{A} \right)^2 - m^2 c^2 \right] = \varphi(\vec{x}, t). \quad (2.44)$$

Qui s'écrit aussi

$$[(i\hbar\partial^\mu - eA^\mu)(i\hbar\partial_\mu - eA_\mu) - m^2c^2] \Psi = 0, \quad (2.45)$$

avec la jauge $A^\mu = (\phi, \vec{A}) \equiv (V^0, V^k)$.

Pour l'équation de Dirac nous avons

$$[\gamma^\mu (i\hbar\partial_\mu - eA_\mu) - mc] \Psi = 0. \quad (2.46)$$

Dans ce cas, le principe de couplage minimum consiste à ajouter le terme d'interaction $eA_0 - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A}$, lorsque la particule est soumise au champ A^μ

$$H_{libre} \rightarrow H_{libre} + eA_0 - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A}. \quad (2.47)$$

Couplage non-minimum

Nous pouvons généraliser le couplage dans l'équation (2.47) en ajoutant à H_{libre} un potentiel général \mathbb{V}

$$H_{libre} \rightarrow H_{libre} + \hat{\beta}\mathbb{V}. \quad (2.48)$$

L'écriture matricielle la plus générale de \mathbb{V} est donnée par

$$\mathbb{V} = V_s + \gamma^5 V_p + e\gamma^\mu A_\mu + \gamma^5 \gamma^\mu V_\mu + \sigma^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (2.49)$$

Dans ce cas, l'équation de Dirac devient

$$[\gamma^\mu (i\hbar\partial_\mu - eA_\mu) - (mc + V_s) - \gamma^5 V_p - \gamma^5 \gamma^\mu V_\mu - \sigma^{\mu\nu} T_{\mu\nu}] \Psi = 0, \quad (2.50)$$

avec la matrice $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$. Les potentiels V_s , V_p , A_μ , V_μ et $T_{\mu\nu}$ sont respectivement, le potentiel scalaire, pseudoscalaire, vecteur, pseudovecteur, tenseur.

Dans les chapitres suivants, nous considérons le cas d'un potentiel scalaire V_s et un potentiel vecteur A_μ , avec $A_\mu = (V_k, 0, 0, 0)$. Les équations relativistes à étudier sont donc : l'équation de Dirac

$$[\gamma^\mu (i\hbar\partial_\mu - eA_\mu) - (mc + V_s)] \Psi = 0, \quad (2.51)$$

et l'équation de Klein Gordon

$$[(i\hbar\partial^\mu - eA^\mu) (i\hbar\partial_\mu - eA_\mu) - (mc + V_s)^2] \Psi = 0. \quad (2.52)$$

Remark 1 *Dans la suite de cette thèse, nous choisissons de travailler dans le système des unités naturelles où $\hbar = c = 1$.*

2.3 Paradoxe de Klein

L'un des problèmes les plus simples à résoudre dans la mécanique quantique non relativiste est celui du mouvement dans une barrière de potentiel définie par

$$V(z) = \begin{cases} eV_0 & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}. \quad (2.53)$$

Si l'énergie ω de l'onde plane incidente à gauche est inférieure à eV_0 , alors l'onde pénètre dans la région à droite, classiquement interdite, uniquement sous la forme d'une exponentielle décroissante $\exp(-\kappa z)$ avec $\kappa^2 = 2m(eV_0 - \omega)$. Par conséquent, plus la différence d'énergie $eV_0 - \omega$ est grande, plus la pénétration est faible. Nous avons dans ce cas $R = 1$ et $T = 0$.

En mécanique quantique relativiste, la solution de l'équation de Dirac en présence de la barrière $V(z)$ est également facile à trouver, mais ce n'est pas sans surprises.

Pour $eV_0 - m < \omega < eV_0$, la solution dans la région à droite est encore une exponentielle décroissante. Cependant, pour $\omega < eV_0 - m$, la solution dans la région à droite est oscillatoire

et proportionnelle à $\exp(iqz)$ avec $q^2 = (\omega - eV_0)^2 - m^2$. De plus nous avons

$$R = \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2 \quad (2.54)$$

et

$$T = \frac{4\gamma}{(1 + \gamma)^2} \quad (2.55)$$

où

$$\gamma = \frac{q}{p} \frac{\omega + m}{\omega - eV_0 + m}, \quad (2.56)$$

et $p^2 = \omega^2 - m^2$.

Nous constatons alors que, pour $\omega + m - eV_0 < 0$, le coefficient R est supérieur à 1 ($R > 1$), et $R - T = 1$, ce qui signifie qu'on a plus des fermions réfléchis que des fermions incidents. Ce résultat, appelé paradoxe de Klein, a été initialement interprété dans le cadre de la théorie de trous de Dirac qui suggère qu'à chaque particule est associée une antiparticule. Selon cette théorie, le vide n'est pas le néant absolu mais une "mer de Dirac" qui contient des particules virtuelles occupant les états d'énergies négatives. En présence d'une barrière du potentiel, les particules virtuelles dans la région ($z > 0$) peuvent se transmettre en particules réelles dans l'autre région par l'effet tunnel en laissant derrière des "trous" qui représentent des antiparticules. C'est alors la création des paires particule-antiparticule au voisinage de la barrière. Bien sûr, cette transition ne peut avoir lieu que pour une barrière supérieure au double de la masse de la particule, $eV_0 > 2m$.

2.4 Théorie quantique des champs

Pour contourner les difficultés mentionnées ci-dessus et trouver une bonne solution au paradoxe de Klein, la théorie quantique relativiste doit être formulée dans un cadre capable de décrire la variation du nombre de particules. Comme nous le verrons, la théorie quantique des champs est la théorie la plus appropriée pour considérer les effets relativistes dans le régime quantique sans aucun paradoxe. Dans cette section, nous montrons comment quantifier un champ de matière libre.

2.4.1 Champ scalaire libre

Nous considérons d'abord la quantification d'un champ scalaire complexe libre. Suivant le schéma général de la quantification canonique, nous partons de la théorie d'un champ scalaire classique régi par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi, \quad (2.57)$$

et nous promouvons les variables dynamiques en opérateurs obéissant à des relations de commutations canoniques. Nous cherchons ensuite une interprétation pour ces opérateurs en trouvant les valeurs propres et les états propres de l'hamiltonien correspondant.

Pour commencer, nous écrivons le champ complexe sous la forme

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [A_p f_p(\vec{r}, t) + B_p^* f_p^*(\vec{r}, t)] \quad (2.58)$$

$$\varphi^*(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [B_p f_p(\vec{r}, t) + A_p^* f_p^*(\vec{r}, t)], \quad (2.59)$$

où $f_p(\vec{r}, t)$ et $f_p^*(\vec{r}, t)$ sont les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation de Klein Gordon

$$(\square + m^2)\varphi(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.60)$$

Comme le champ est libre, les solutions $f_p(\vec{r}, t)$ et $f_p^*(\vec{r}, t)$ sont, évidemment, des ondes planes

$$f_p(\vec{r}, t) = N e^{i(p_0 t - \vec{p} \cdot \vec{r})}, \quad (2.61)$$

où $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ et la constante de normalisation N se détermine à partir de la condition

$$f_p^* \dot{f}_p - \dot{f}_p^* f_p = 2i. \quad (2.62)$$

Les moments conjugués de $\varphi(\vec{r}, t)$ et $\varphi^*(\vec{r}, t)$ sont donnés par

$$\pi_\varphi(\vec{r}, t) = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p_0 [A_p e^{i(p_0 t - \vec{p} \cdot \vec{r})} - B_p^* e^{-i(p_0 t - \vec{p} \cdot \vec{r})}] \quad (2.63)$$

$$\pi_{\varphi^*}(\vec{r}, t) = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p_0 [B_p e^{i(p_0 t - \vec{p} \cdot \vec{r})} - A_p^* e^{-i(p_0 t - \vec{p} \cdot \vec{r})}]. \quad (2.64)$$

La procédure de quantification consiste à remplacer les champs $\varphi(\vec{r}, t)$ et $\varphi^*(\vec{r}, t)$ et leurs

moments conjugués $\pi_\varphi(\vec{r}, t)$ et $\pi_{\varphi^*}(\vec{r}, t)$ par des opérateurs qui vérifient les relations de commutations suivantes

$$[\hat{\varphi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = i\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.65)$$

et

$$[\hat{\varphi}(\vec{r}, t), \hat{\varphi}(\vec{r}', t)] = [\hat{\pi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = 0. \quad (2.66)$$

Dans ce cas, les coefficients A_p, B_p, A_p^* et B_p^* deviennent des opérateurs et les champs $\hat{\varphi}(\vec{r}, t)$ et $\hat{\varphi}^+(\vec{r}, t)$ s'écrivent comme suit

$$\hat{\varphi}(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\hat{a}_p f_p(\vec{r}, t) + \hat{b}_p^+ f_p^*(\vec{r}, t)] \quad (2.67)$$

$$\hat{\varphi}^+(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\hat{b}_p f_p(\vec{r}, t) + \hat{a}_p^+ f_p^*(\vec{r}, t)]. \quad (2.68)$$

Compte tenu des relations de commutation (2.65) et (2.66), nous pouvons montrer que les opérateurs $\hat{a}_p, \hat{a}_p^+, \hat{b}_p$ et \hat{b}_p^+ vérifient les relations de commutation suivantes

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^+] = [\hat{b}_p, \hat{b}_{p'}^+] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.69)$$

et

$$[\hat{a}_p, \hat{b}_{p'}^+] = [\hat{a}_p, \hat{b}_p] = 0. \quad (2.70)$$

Maintenant, nous utilisons la transformation de Legendre

$$H = \int d^3x (\pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_{\varphi^*} \dot{\varphi}^* - \mathcal{L}). \quad (2.71)$$

pour calculer le Hamiltonien du système. Nous obtenons alors

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_0 (\hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \hat{b}_p \hat{b}_p^+). \quad (2.72)$$

Si nous écrivons H sous la forme

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_0 [\hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \hat{b}_p^+ \hat{b}_p + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)] \quad (2.73)$$

et nous choisissons l'état $|0\rangle$ comme étant l'état qui s'annihile par application de \hat{a}_p et \hat{b}_p ,

nous obtenons

$$H |0\rangle = \mathcal{E}_0 |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_0 [(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)]. \quad (2.74)$$

Nous avons alors une fonction delta, évaluée au point zéro, où elle a son pic infini. Pour comprendre d'où vient cette divergence et comment y faire face, considérons une théorie dans une boîte de taille L et nous faisons la limite $L \rightarrow \infty$

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} \Big|_{\vec{p}=0} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{+L/2} d^3x = L^3 = V. \quad (2.75)$$

Ainsi, la divergence $\delta^{(3)}(0)$ survient parce que nous calculons une énergie totale \mathcal{E}_0 dans un volume infini. Nous pouvons alors définir la densité d'énergie ε_0 , en divisant l'énergie totale E_0 par le volume V

$$\varepsilon_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{V} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (2.76)$$

Nous remarquons ici une autre divergence due à l'intégrale sur \vec{p} . Donc, il y a deux divergences différentes qui se cachent derrière l'expression (2.74) et pour les traiter nous pouvons redéfinir l'hamiltonien H en soustrayant le terme qui contient $\delta^{(3)}(0)$ par la définition de la forme normale où tous les opérateurs d'annihilation sont placés à droite

$$H \rightarrow: H := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_0 (\hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \hat{b}_p^+ \hat{b}_p). \quad (2.77)$$

Ceci est plausible car en physique, mise à part la constante cosmologique, nous ne nous intéressons qu'à la différence d'énergies et nous n'avons aucun moyen pour mesurer directement \mathcal{E}_0 .

De la même manière, nous obtenons l'opérateur de charge

$$Q = e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\hat{a}_p^+ \hat{a}_p - \hat{b}_p^+ \hat{b}_p). \quad (2.78)$$

Nous pouvons voir ainsi que H et Q sont diagonaux. De plus nous avons les relations de

commutation suivantes

$$\begin{aligned}
[H, Q] &= 0 & , & & [H, a_p^+] &= p_0 a_p^+ & , & & [Q, b_p] &= e b_p \\
[H, a_p] &= -p_0 a_p & , & & [H, b_p^+] &= p_0 b_p^+ & , & & [Q, a_p^+] &= e a_p^+ \\
[H, b_p] &= -p_0 b_p & , & & [Q, a_p] &= -e a_p & , & & [Q, b_p^+] &= -e b_p^+
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Nous pouvons donc interpréter les opérateurs \hat{a}_p^+ et a_p comme les opérateurs de création et d'annihilation de particules et les opérateurs b_p^+ et b_p comme les opérateurs de création et d'annihilation d'antiparticules.

2.4.2 Champ spinoriel libre

Ayant montré avec un certain détail, comment quantifier le champ complexe libre, passons maintenant au champ de Dirac. En principe, nous suivrons une méthode similaire à celle utilisée dans le champ de Klein Gordon, mais en gardant à l'esprit que le champ de Dirac obéisse à la statistique de Fermi-Dirac. Partons de la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi. \tag{2.80}$$

à partir de laquelle découle l'équation de Dirac

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi = 0. \tag{2.81}$$

Comme nous avons vu, la solution générale de cette équation peut s'écrire

$$\Psi(t, \vec{r}) = \sum_\nu \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [A_{\nu,p} U_{p,\nu}(t, \vec{r}) + B_{\nu,p}^* V_{p,\nu}(t, \vec{r})], \tag{2.82}$$

où les spineurs $U_{p,\nu}(t, \vec{r})$ et $V_{p,\nu}(t, \vec{r})$ sont donnés par

$$U_{p,\nu}(t, \vec{r}) = u(\vec{p}, \nu) \exp(-ipx) \tag{2.83}$$

et

$$V_{p,\nu}(t, \vec{r}) = v(\vec{p}, \nu) \exp(ipx). \tag{2.84}$$

Les moments conjugués associés aux champs $\Psi(t, \vec{r})$ et $\Psi^*(t, \vec{r})$ sont donnés par

$$\Pi(t, \vec{r}) = i\Psi^+(t, \vec{r}) = i \sum_{\nu} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [A_{\nu,p}^* U_{p,\nu}^+(t, \vec{r}) + B_{\nu,p} V_{p,\nu}^+(t, \vec{r})]. \quad (2.85)$$

Ici, il faut souligner que pour s'assurer que le vide n'a que des excitations d'énergie positive, il faut quantifier le champ de Dirac avec des relations d'anticommutation, ce qui a pour conséquence que les particules associées au champ de Dirac obéissent à la statistique de Fermi-Dirac. Nous avons alors la relation d'anticommutation

$$\{\Psi_s(t, \vec{r}), \Psi_{s'}^+(t, \vec{r}')\}_+ = \delta_{s,s'} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.86)$$

En écrivant le champ de Dirac sous la forme

$$\Psi(t, \vec{r}) = \sum_{\nu} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\hat{a}_{p,\nu} U_{p,\nu}(t, \vec{r}) + \hat{b}_{p,\nu}^+ V_{p,\nu}(t, \vec{r})], \quad (2.87)$$

nous pouvons montrer que les opérateurs $\hat{a}_{p,\nu}$, $\hat{a}_{p',\nu'}^+$, $\hat{b}_{p,\nu}$ et $\hat{b}_{p',\nu'}^+$ vérifient les relations d'anticommutation

$$\{\hat{a}_{p,\nu}, \hat{a}_{p',\nu'}^+\}_+ = \{\hat{b}_{p,\nu}, \hat{b}_{p',\nu'}^+\}_+ = (2\pi)^3 \delta_{\nu,\nu'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.88)$$

et

$$\{\hat{a}_{p,\nu}, \hat{b}_{p',\nu'}\}_+ = \{\hat{a}_{p,\nu}, \hat{b}_{p',\nu'}^+\}_+ = 0. \quad (2.89)$$

L'Hamiltonien du système est défini par $H = i \int d^3x \Psi^+ \partial_0 \Psi$, nous arrivons après un calcul explicite à la forme suivante

$$H = \sum_{\nu} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_0 (\hat{a}_{p,\nu}^+ \hat{a}_{p,\nu} + \hat{b}_{p,\nu}^+ \hat{b}_{p,\nu}). \quad (2.90)$$

L'opérateur de charge électrique est définie par $Q = e \int d^3x : \Psi^+ \Psi :$, ce qui nous donne

$$Q = e \sum_{\nu} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\hat{a}_{p,\nu}^+ \hat{a}_{p,\nu} - \hat{b}_{p,\nu}^+ \hat{b}_{p,\nu}). \quad (2.91)$$

2.5 Création de particules

Lorsque le champ scalaire que l'on veut quantifier est en interaction avec un champ électrique extérieur, la résolution du problème par la recherche du spectre de H n'est pas aussi simple que dans le cas du champ libre et parfois le spectre de H n'existe même pas. Si le système du champ complexe est initialement (à $t_i \rightarrow -\infty$) dans son état fondamental (le vide), puis il s'évolue sous l'influence du champ électrique, pendant une durée finie (de $-T$ à $+T$). Après que le champ électrique soit éteint à $t_f \rightarrow +\infty$, l'état du vide de ce système change. En fait, c'est cette instabilité du vide qui rend difficile la quantification du champ complexe et donne lieu à la création des particules.

2.5.1 TQC en présence d'un champ électrique

Pour mettre en évidence les points communs et les différences entre la quantification du champ complexe libre et sa quantification en présence d'un champ électrique, l'exemple le plus illustratif est le champ électrique dépendant du temps $\vec{E}(t)$. La densité lagrangienne d'un champ scalaire complexe en présence du champ $\vec{E}(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{L} = \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} - \left[\vec{\nabla} \varphi - ie \vec{A} \varphi \right]^* \left[\vec{\nabla} \varphi - ie \vec{A} \varphi \right] - m^2 \varphi^* \varphi, \quad (2.92)$$

où $\vec{A}(t)$ est le potentiel vecteur duquel est dérivé le champ électrique \vec{E} , $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(t)$. L'équation du mouvement qui découle de cette densité lagrangienne s'écrit

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\vec{\nabla} - ie \vec{A} \right)^2 + m^2 \right] \varphi = 0. \quad (2.93)$$

Par mesure de simplification, nous considérons un champ électrique dirigé suivant l'axe (OZ). i.e.

$$\vec{A}(t) = (0, 0, A_z(t)) \quad (2.94)$$

Si nous écrivons $\varphi(t, \vec{r})$ sous la forme

$$\varphi(t, \vec{r}) = e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \chi_{\vec{p}}(t) \quad (2.95)$$

nous obtenons pour $\chi_{\vec{p}}(t)$ l'équation suivante

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2(t) \right] \chi(t) = 0, \quad (2.96)$$

avec

$$\omega^2(t) = p_{\perp}^2 + (p_z - eA_z(t))^2 + m^2. \quad (2.97)$$

où $p_{\perp}^2 = p_x^2 + p_y^2$. Notons que si $\chi_{\vec{p}}(t)$ est une solution de l'équation (2.96), alors $\chi_{\vec{p}}^*(t)$ est une solution de la même équation. Nous pouvons voir aussi que si $\varphi(t, \vec{r}) = e^{i\vec{p}\vec{r}}\chi_{\vec{p}}(t)$ est une solution de l'équation (2.93) pour la charge e , la fonction $\varphi^*(t, \vec{r}) = e^{-i\vec{p}\vec{r}}\chi_{\vec{p}}^*(t)$ est une solution pour la charge $(-e)$. Alors, les fonctions $\chi_{\vec{p}}(t)$ et $\chi_{\vec{p}}^*(t)$ sont, respectivement, associées aux états d'énergie positive et d'énergie négative. Dans ce qui suit, nous utilisons la notation $(\chi_{\vec{p}}^+(t), \chi_{\vec{p}}^-(t))$ au lieu de $(\chi_{\vec{p}}(t), \chi_{\vec{p}}^*(t))$. Par conséquent, l'opérateur du champ peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(a_p \chi_{\vec{p}}^+(t) e^{i\vec{p}\vec{r}} + b_p^+ \chi_{\vec{p}}^-(t) e^{-i\vec{p}\vec{r}} \right), \quad (2.98)$$

avec la condition

$$\chi_p^* \dot{\chi}_p - \chi_p \dot{\chi}_p^* = 2i. \quad (2.99)$$

Nous pouvons montrer facilement que les opérateurs \hat{a}_p , \hat{a}_p^+ , \hat{b}_p et \hat{b}_p^+ vérifient les mêmes relations de commutation que dans le cas du champ libre. Cependant, leur interprétation n'est pas complètement évidente. Ca dépend de la définition de l'état du vide. Calculons d'abord le Hamiltonien du champ complexe $H = \int d^3x (\pi_{\varphi} \dot{\varphi} + \pi_{\varphi^*} \dot{\varphi}^* - \mathcal{L})$. Après un calcul simple nous obtenons

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega(t)} \left[E_p(t) (\hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \hat{b}_p^+ \hat{b}_p) + F_p^*(t) \hat{b}_p \hat{a}_p + F_p(t) \hat{a}_p^+ \hat{b}_p^+ \right] \quad (2.100)$$

où

$$E_p(t) = |\dot{\chi}_p(t)|^2 + \omega^2 |\chi_p(t)|^2 \quad (2.101)$$

$$F_p(t) = \dot{\chi}_p^2(t) + \omega^2 \chi_p^2(t). \quad (2.102)$$

Il est bien clair que H n'est pas diagonal, il contient les termes mixtes $\hat{a}_p^+ \hat{b}_p^+$ et $\hat{b}_p \hat{a}_p$.

2.5.2 Interprétation en termes de particules

Comme l'équation (2.96) est de l'ordre deux, elle admet plusieurs ensembles $\{\chi_{\vec{p}}^+(t), \chi_{\vec{p}}^-(t)\}$ de solutions linéairement indépendantes. Donc la décomposition (2.98) n'est pas unique. Ce-

pendant, pour un champ électrique qui s'annule à $\pm\infty$, nous pouvons voir que l'ensembles $\{\chi_{\vec{p},in}^+(t), \chi_{\vec{p},in}^-(t)\}$ qui se comporte à $(-\infty)$ comme

$$\chi_{\vec{p},in}^\epsilon(t) = e^{-i\epsilon\omega_{in}t} \quad (2.103)$$

où $\epsilon = \pm$ et $\omega_{in} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \omega(t)$, diagonalise H à $(-\infty)$. En effet, comme

$$E_p(t \rightarrow -\infty) = \omega_{in} \quad , \quad F_p(t \rightarrow -\infty) = 0, \quad (2.104)$$

le Hamiltonien H devient

$$H_{t \rightarrow -\infty} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{in} \left[\hat{a}_{p,in}^+ \hat{a}_{p,in} + \hat{b}_{p,in}^+ \hat{b}_{p,in} \right]. \quad (2.105)$$

Nous pouvons également, trouver un ensemble $\{\chi_{\vec{p},out}^+(t), \chi_{\vec{p},out}^-(t)\}$ qui se comporte à $(+\infty)$ comme

$$\chi_{\vec{p},out}^\epsilon(t) = e^{-i\epsilon\omega_{out}t} \quad (2.106)$$

où $\omega_{out} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t)$. Dans ce cas, nous obtenons

$$E_p(t \rightarrow +\infty) = \omega_{out} \quad , \quad F_p(t \rightarrow -\infty) = 0, \quad (2.107)$$

et

$$H_{t \rightarrow +\infty} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{out} \left[\hat{a}_{p,out}^+ \hat{a}_{p,out} + \hat{b}_{p,out}^+ \hat{b}_{p,out} \right]. \quad (2.108)$$

Le Hamiltonien H est donc diagonal pour les deux ensembles de solutions $\{\chi_{\vec{p},in}^+(t), \chi_{\vec{p},in}^-(t)\}$ et $\{\chi_{\vec{p},out}^+(t), \chi_{\vec{p},out}^-(t)\}$ avec les deux écritures

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(a_{p,in} \chi_{\vec{p},in}^+(t) e^{i\vec{p}\vec{r}} + b_{p,in}^+ \chi_{\vec{p},in}^-(t) e^{-i\vec{p}\vec{r}} \right) \quad (2.109)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(a_{p,out} \chi_{\vec{p},out}^+(t) e^{i\vec{p}\vec{r}} + b_{p,out}^+ \chi_{\vec{p},out}^-(t) e^{-i\vec{p}\vec{r}} \right). \quad (2.110)$$

Nous avons alors deux états du vide $|0_{in}\rangle$ et $|0_{out}\rangle$, avec $\hat{a}_{p,in} |0_{in}\rangle = \hat{b}_{p,in} |0_{in}\rangle = 0$ et $\hat{a}_{p,out} |0_{out}\rangle = \hat{b}_{p,out} |0_{out}\rangle = 0$, et, par conséquent, deux définitions de particules.

2.5.3 Création de particules à partir du vide

Comme l'ensemble $\{\chi_{\vec{p},out}^+(t), \chi_{\vec{p},out}^-(t)\}$ forme une base pour l'espace des solutions de l'équation (2.96), nous pouvons écrire les éléments du deuxième ensemble $\{\chi_{\vec{p},in}^+(t), \chi_{\vec{p},in}^-(t)\}$ comme combinaisons linéaires des fonctions $\chi_{\vec{p},out}^+(t)$ et $\chi_{\vec{p},out}^-(t)$

$$\chi_{p,in}^+(t) = \alpha_p \chi_{p,out}^+(t) + \beta_p \chi_{p,out}^-(t) \quad (2.111)$$

$$\chi_{p,in}^-(t) = \alpha_p^* \chi_{p,out}^-(t) + \beta_p^* \chi_{p,out}^+(t). \quad (2.112)$$

Cette écriture est dite transformation de Bogoliubov où les coefficients (de Bogoliubov) α_p et β_p vérifient la condition

$$|\alpha_p|^2 - |\beta_p|^2 = 1. \quad (2.113)$$

Cette transformation nous permet d'écrire

$$a_{p,out} = \alpha_p a_{p,in} + \beta_p b_{p,in}^+ \quad (2.114)$$

$$b_{p,out}^+ = \beta_p^* a_{p,in} + \alpha_p^* b_{p,in}^+. \quad (2.115)$$

En utilisant ces deux dernières relations nous arrivons au résultat suivant

$$\langle 0_{in} | \hat{a}_{p,out}^+ \hat{a}_{p,out} | 0_{in} \rangle = \langle 0_{in} | b_{p,out}^+ b_{p,out} | 0_{in} \rangle = |\beta_p|^2, \quad (2.116)$$

ce qui montre que le vide $|0_{in}\rangle$ contient des particules "out". En d'autre terme, le champ électrique perturbe le vide $|0_{in}\rangle$ et produit des paires de particules.

Ce résultat peut être expliqué comme suit : Dans l'espace-temps de Minkowski, les champs quantiques libres ont un état du vide invariant sous le groupe de Poincaré. Ceci, associé à la covariance relativiste, implique que tous les observateurs inertiels s'accordent sur le nombre de particules contenues dans un état quantique. En présence d'un champ électrique dépendant du temps ou de l'espace, l'état du vide n'est plus invariant sous les translations de l'espace-temps et, par conséquent, il n'est plus possible de définir un état qui serait reconnu comme l'état du vide par tous les observateurs.

En outre, en théorie quantique des champs, l'amplitude de transition de l'état $|0_{in}\rangle$ à l'état $a_{p,out}^+ b_{p,out}^+ |0_{out}\rangle$ est donnée par

$$A = \langle 0_{out} | \hat{b}_{p,out} \hat{a}_{p,out} | 0_{in} \rangle . \quad (2.117)$$

Compte tenu des équation (2.114) et (2.115), $b_{p,out}$ peut s'écrire en fonction de $b_{p,in}$ et $a_{p,out}^+$

$$b_{p,out} = \frac{1}{\alpha_p^*} b_{in} + \frac{\beta_p^*}{\alpha_p^*} a_{p,out}^+ \quad (2.118)$$

et l'amplitude A se réduit à

$$A = \left| \frac{\beta_p^*}{\alpha_p^*} \right|^2 \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle . \quad (2.119)$$

La probabilité de création d'une paire dans l'état \vec{p} est alors donné par

$$P_{\vec{p}} = \left| \frac{\beta_p^*}{\alpha_p^*} \right|^2 . \quad (2.120)$$

Notons que pour le champ de Dirac nous pouvons également définir deux états du vide, en considérant les deux décompositions suivantes

$$\Psi(t, \vec{r}) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\hat{a}_{p,s,in} U_{p,s,in}(t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} + \hat{b}_{p,s,in}^+ V_{p,s,in}(t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \right] \quad (2.121)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\hat{a}_{p,s,out} U_{p,s,out}(t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} + \hat{b}_{p,s,out}^+ V_{p,s,out}(t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \right] . \quad (2.122)$$

Dans ce cas, la transformation de Bogoliubov s'écrit

$$U_{p,s,in}(t) = \alpha_{p,s} U_{p,s,out}(t) + \beta_{p,s} V_{p,s,out}(t) \quad (2.123)$$

$$V_{p,s,in}(t) = \alpha_{p,s}^* V_{p,s,out}(t) + \beta_{p,s}^* U_{p,s,out}(t), \quad (2.124)$$

où les coefficients de Bogoliubov satisfont à la condition

$$|\alpha_{p,s}|^2 + |\beta_{p,s}|^2 = 1. \quad (2.125)$$

La probabilité de création d'une paire et le nombre moyen des particules créées se calculent à partir de ces coefficients $\alpha_{p,s}$ et $\beta_{p,s}$ comme dans les équations (2.116) et (2.120).

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné un rappel sur quelques notions utiles pour le développement des travaux de cette thèse. En premier lieu, nous avons exposé les différents concepts de la théorie quantique relativiste. Après avoir souligné les limites de la mécanique quantique relativiste vis-à-vis la création des particules, nous avons montré comment la théorie quantique des champs peut décrire ce phénomène à l'aide des transformations de Bogoliubov qui expriment l'instabilité du vide en présence d'un champ électrique.

Chapitre 3

Paradoxe de Klein en présence d'un potentiel scalaire

3.1 Introduction

La manière la plus simple de voir comment le potentiel scalaire influence la création des particules est d'examiner l'existence du paradoxe de Klein en présence d'une barrière scalaire outre la barrière vectorielle habituelle. C'est ainsi que nous considérons dans ce chapitre, la diffusion d'une particule relativiste par une barrière qui se compose de deux composantes. La première composante est la barrière vectorielle habituelle qui se couple à la particule via sa charge électrique tandis que la deuxième est une barrière scalaire qui se couple à la masse de la particule. Le but est de voir l'effet du potentiel scalaire sur la création de particules au voisinage de la barrière en considérant deux approches ; un calcul direct basé sur la mécanique quantique relativiste et un traitement rigoureux dans le cadre de la théorie quantique des champs.

En premier lieu, nous résolvons l'équation de Dirac avec une combinaison d'un potentiel vecteur et un potentiel scalaire et nous discutons l'apparition du paradoxe de Klein. Ensuite, nous proposons de traiter le problème dans le cadre de la théorie quantique des champs où nous donnons deux ensembles des solutions exactes qui peuvent être interprétées comme des états "in" et "out". Finalement, en utilisant la relation entre ces deux ensembles, nous déterminons la probabilité de création de paires, le nombre moyen de particules créées et la persistance du vide.

3.2 Paradoxe de Klein en présence d'un potentiel scalaire

Considérons une particule de Dirac de masse m soumise à un potentiel généralisé contenant à la fois le potentiel vectoriel habituel et un potentiel scalaire de Lorentz. La dynamique de cette particule est en général régie par l'équation de Dirac stationnaire

$$\omega\Phi = [\boldsymbol{\alpha}p + \boldsymbol{\beta}(m + S(z)) + V(z)]\Phi \quad (3.1)$$

où $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont les matrices de Dirac. Dans un espace à (1+1) dimensions, les matrices $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ peuvent être données par la représentation (2×2)

$$\boldsymbol{\beta} = \sigma_z \quad , \quad \boldsymbol{\alpha} = \sigma_x, \quad (3.2)$$

où σ_x et σ_z sont les matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Maintenant, pour des raisons de simplicité, nous considérons les barrières vectorielle et scalaire suivante

$$V(z) = \frac{V_0}{S_0}S(z) = \begin{cases} V_0 & \text{if } z > 0 \\ 0 & \text{if } z < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Avec cette définition l'espace se divise en deux régions. La première est la région à gauche ($z < 0$), où la particule se comporte comme une particule libre. La deuxième région est à droite de la barrière ($z > 0$). Dans cette région, la particule a une masse effective $m_{eff} = m + S_0$ due au potentiel scalaire.

Suivant la procédure standard, la solution générale de l'équation dans la région à gauche ($z < 0$) est une combinaison des deux ondes incidente et réfléchie

$$\Phi_{\pm}(z) = \sqrt{\frac{\omega + m}{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pm p}{\omega + m} \end{pmatrix} \exp(\pm ipz) \quad (3.5)$$

avec

$$p = \sqrt{\omega^2 - m^2}. \quad (3.6)$$

Dans la région à droite ($z > 0$), nous avons seulement une solution

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{(\omega - V_0) + (m + S_0)}{|\bar{q}|}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\bar{q}}{(\omega - V_0) + (m + S_0)} \end{pmatrix} \exp(i\bar{q}z) \quad (3.7)$$

où

$$\bar{q} = \sqrt{(\omega - V_0)^2 - (m + S_0)^2}. \quad (3.8)$$

Nous pouvons alors écrire la solution générale sous la forme

$$\Phi_I(z) = \sqrt{\frac{\omega + m}{2p}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p}{\omega + m} \end{pmatrix} \exp(ipz) + \bar{r} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-p}{\omega + m} \end{pmatrix} \exp(-ipz) \right] \quad (3.9)$$

$$\Phi_{II}(z) = \bar{t} \sqrt{\frac{\omega - V_0 + m + S_0}{2|\bar{q}|}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\bar{q}}{\omega - V_0 + m + S_0} \end{pmatrix} \exp(i\bar{q}z), \quad (3.10)$$

où \bar{r} et \bar{t} sont, respectivement, les amplitudes de l'onde réfléchie et transmise. Comme dans la mécanique quantique non relativiste, la condition de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée à $z = 0$, nous donne les deux équations qui déterminent les amplitudes \bar{r} et \bar{t}

$$(1 + \bar{r}) = \frac{\bar{t}}{\sqrt{|\gamma_s|}} \quad (3.11)$$

$$(1 - \bar{r}) = \bar{t} \sqrt{|\gamma_s|} \quad (3.12)$$

avec

$$\gamma_s = \frac{|\bar{q}|}{p} \frac{\omega + m}{\omega - V_0 + m + S_0}. \quad (3.13)$$

Nous obtenons alors

$$\bar{t} = \frac{2\sqrt{|\gamma_s|}}{(1 + \gamma_s)} \quad \bar{r} = \frac{1 - \gamma_s}{1 + \gamma_s}. \quad (3.14)$$

Ici, nous distinguons deux situations. La première situation est lorsque $V_0 > 2m + S_0$ et la seconde est quand $2m + S_0 > V_0 > 2m$.

Considérons d'abord le cas avec $V_0 > 2m + S_0$. Dans ce cas, nous avons trois gammes (domaines) distinctes pour l'énergie ω .

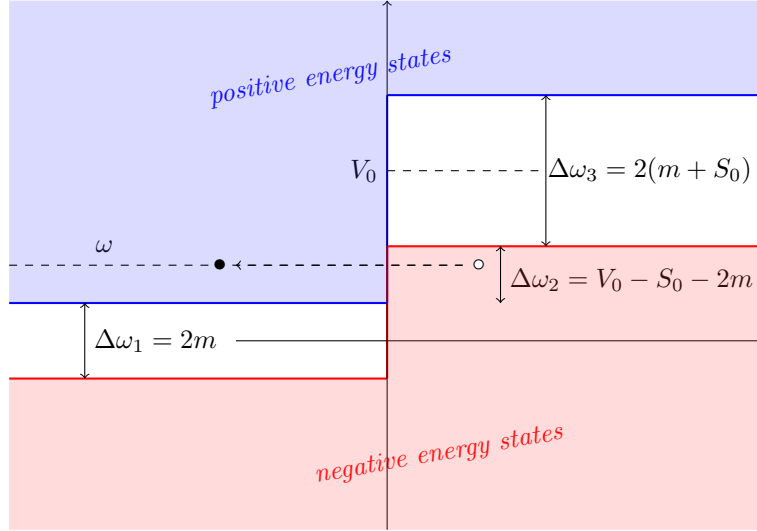


Figure 3.1 – L'écart entre les énergies positives et négatives pour $V_0 - S_0 > 2m$. A gauche des barrières, l'énergie ω se situe dans le domaine des énergies positives. A droite des barrières, ω se situe dans le domaine des énergies négatives. Cela conduit au paradoxe de Klein.

1. Le premier domaine est caractérisé par $\omega > V_0 + m + S_0$. Tant que $\omega > V_0 + m + S_0$, nous avons $\gamma_s > 0$ et

$$R = \left| \frac{\dot{j}_{ref}}{\dot{j}_{inc}} \right| = |\bar{r}|^2 = \left(\frac{1 - \gamma_s}{1 + \gamma_s} \right)^2 \quad (3.15)$$

et

$$T = \left| \frac{\dot{j}_{trans}}{\dot{j}_{inc}} \right| = |\bar{t}|^2 = \frac{4|\gamma_s|}{(1 + \gamma_s)^2}. \quad (3.16)$$

Ici, nous pouvons vérifier que $R < 1$ et

$$R + T = 1. \quad (3.17)$$

2. La deuxième zone pour l'énergie est définie par $V_0 - m - S_0 < \omega < m + S_0 + V_0$. Dans ce cas, le vecteur d'onde \bar{q} à droite des barrières est imaginaire et la solution décroît de façon exponentielle. En particulier, lorsque $\omega - V_0 \ll m$, la solution $\exp(-|\bar{q}|z)$ est localisée dans un intervalle de l'ordre de la longueur d'onde de Compton. Nous avons alors une réflexion complète avec une pénétration exponentielle dans la région classiquement interdite.
3. Le troisième domaine dit la zone de Klein est lorsque $V_0 - m - S_0 > \omega > m$. Ici, d'après (3.8), \bar{q} devient réel et on obtient une onde plane émise oscillante. C'est la première manifestation du paradoxe de Klein. Ce résultat surprenant est dû au fait

que les solutions avec $V_0 - m - S_0 > \omega > m$ sont des solutions d'énergie positive dans la première région et des solutions d'énergie négative dans la deuxième région. Par conséquent, au lieu d'une réflexion complète avec pénétration exponentielle dans la région classiquement interdite, nous avons une transition vers des états d'énergie négative avec $\omega < V_0 - m - S_0$.

Si le potentiel est assez fort, $V_0 > 2m + S_0$, et $\omega < V_0 - S_0 - m$, le paramètre γ_s devient négatif, $\gamma_s < 0$, et le courant réfléchi serait alors supérieur au courant incident. Par conséquent, le flux sortant vers la gauche dépasse le flux entrant et nous avons $R > 1$ et

$$R - T = 1. \quad (3.18)$$

C'est une autre manifestation du paradoxe de Klein [77].

Selon l'interprétation de Feynman, les antiparticules remontent le temps et, la fonction d'onde $\psi \approx \exp(iqz) = \exp[-i(-q)z]$ décrit alors une antiparticule qui se déplace vers la région gauche [102]. Ceci représente une réflexion totale de la particule incidente à la barrière accompagnée par la création des paires particules-antiparticules. On dit que des paires sont créées au voisinage de la barrière.

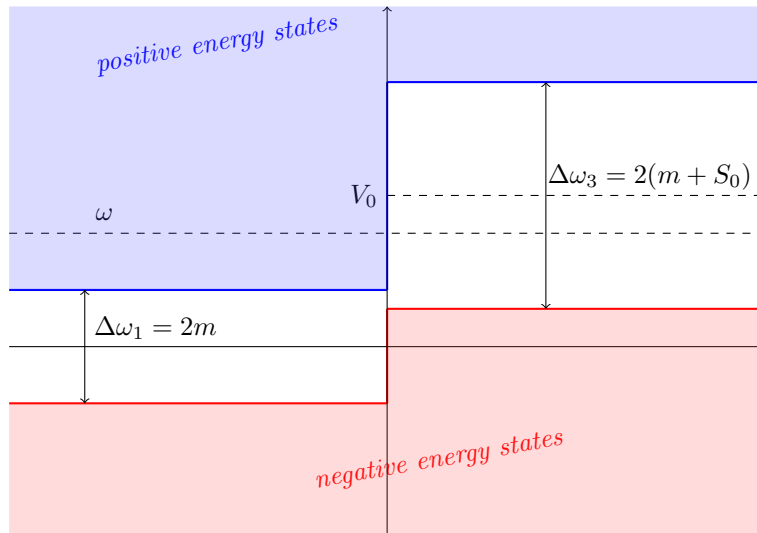


Figure 3.2 – L'écart entre les énergies positives et négatives pour $V_0 - S_0 < 2m$. A gauche des barrières, l'énergie ω se situe dans le domaine des énergies positives. A droite des barrières, ω se situe dans la bande interdite. La solution est alors décroissante en exponentielle.

Notons que dans le cas où $2m + S_0 > V_0 > 2m$, il n'y a pas de chevauchement entre les états d'énergie positive dans la première région et les états d'énergie négative dans la deuxième

région. Dans ce cas, on a soit une réflexion complète avec pénétration exponentielle dans la région interdite, soit une transition d'un état d'énergie positive dans la première région à un état d'énergie positive dans la deuxième région. Par conséquent, même si $V_0 > 2m$, le paradoxe de Klein ne peut y avoir lieu tant que $V_0 < 2m + S_0$.

En traçant les courbes représentant les variations de R en fonction des variables $\frac{\omega}{m}$, $\frac{V_0}{m}$ et $\frac{S_0}{m}$, nous montrons que la barrière scalaire considérée minimise le coefficient de réflexion. Cela est dû au fait que la présence d'une barrière scalaire rétrécit la zone de Klein. Lorsque S_0 dépasse $V_0 - 2m$, le paradoxe de Klein disparaît.

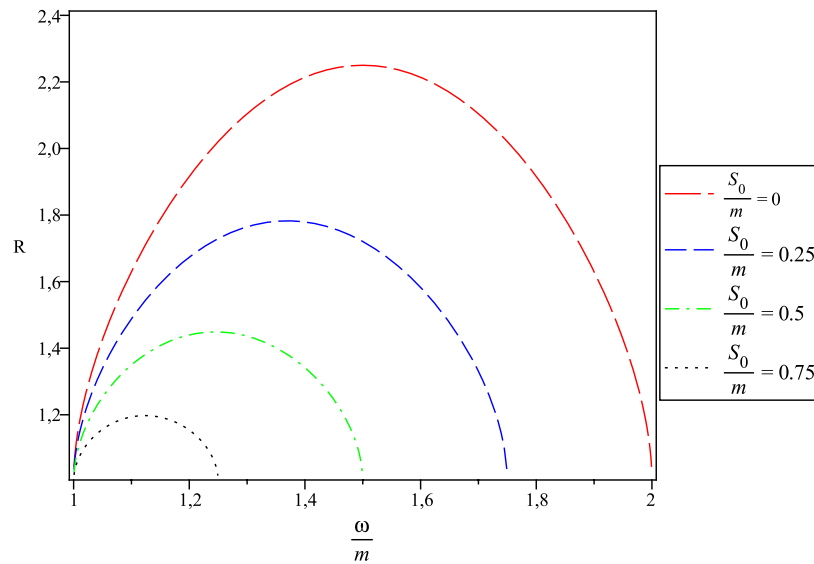


Figure 3.3 – Variations de R en fonction de (ω/m) . V_0 est pris $V_0 = 3m$.

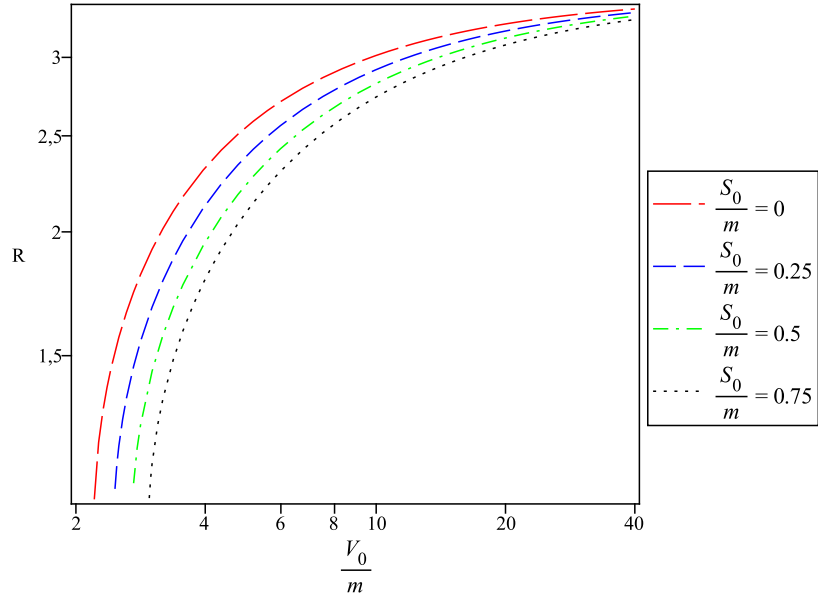


Figure 3.4 – Variations de R en fonction de la variable $\frac{V_0}{m}$. ω est pris $\omega = 1.2m$.

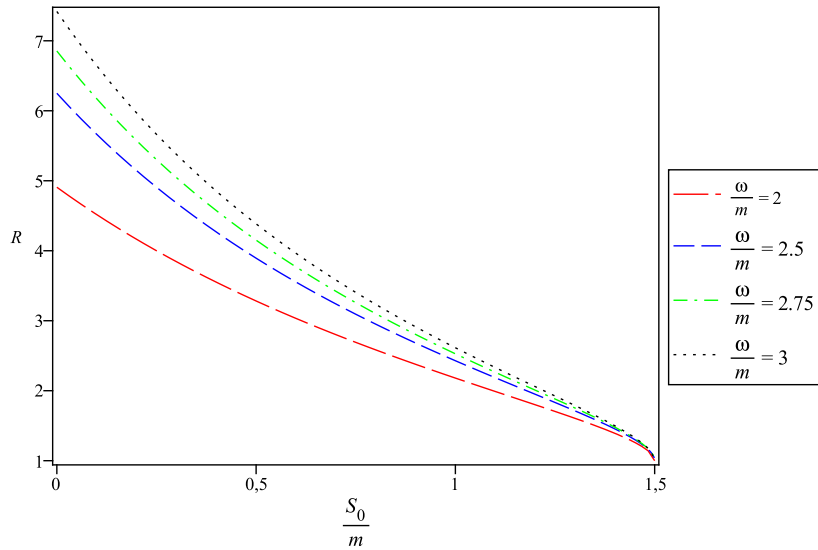


Figure 3.5 – Variations de R en fonction de la variable $\frac{S_0}{m}$. V_0 et ω sont choisis de sorte que $\frac{V_0}{m} - \frac{\omega}{m} = 2.5$.

Dans la section suivante, nous considérons le paradoxe de Klein et la création de particules associée dans le cadre de la théorie quantique des champs.

3.3 Interprétation dans le cadre des champs quantiques

Comme nous l'avons mentionné ci-avant, la théorie quantique des champs en présence d'un champ extérieur est l'approche la mieux adaptée à l'étude des phénomènes associés à la création des particules. Suivant cette approche, nous avons deux définitions différentes des particules ; L'une est valable à $t \rightarrow -\infty$, elle consiste à développer l'opérateur du champ sur la base des états " in " et l'autre qui est valable à $t \rightarrow +\infty$, utilise le développement de l'opérateur du champ sur la base des états "out ". Ces deux définitions différentes sont une conséquence de l'instabilité du vide en présence des champs extérieurs qui impliquent la création des particules. L'étude de ce phénomène nécessite donc la détermination des états " in " et " out " .

Dans la littérature, nous trouvons deux choix différents des états "in" et "out", mais aucun choix n'a été approuvé à l'unanimité. Le premier choix, suggéré par Hansen et Ravndall [78], est accepté par Greiner et ses collaborateurs [79]. Le second qui est dû au Nikishov [80, 81], a été plus ou moins largement utilisé [82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90]. Dans cette section, nous suivons le choix de Nikishov.

3.3.1 Le choix des états "in" et "out"

Nous commençons par la définition des états "in" et "out" du champ en ne considérant que le cas important de la zone de Klein où $V_0 - m - S_0 < \omega < m + S_0 + V_0$. Dans ce cas, les particules "in" et "out" sont situées à gauche de la barrière et les antiparticules "in" et "out" sont situées à droite. Alors, les particules "in" qui se déplacent vers la barrière à gauche sont soumises à une réflexion totale et les antiparticules "in" qui se déplacent vers la barrière à droite sont soumises à une réflexion totale. Par conséquent, nous pouvons construire les états "out" comme suit

$$\psi_{out}^-(z) = N_{in} \begin{cases} u(p) \exp(ipz) & z < 0 \\ \zeta_1 v(\bar{q}) \exp(i\bar{q}z) + \zeta_2 v(-\bar{q}) \exp(-i\bar{q}z) & z > 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

et

$$\psi_{out}^+(z) = N_{in}^* \begin{cases} v(\bar{q}) \exp(i\bar{q}z) & z > 0 \\ \zeta_1^+ u(p) \exp(ipz) + \zeta_2^+ u(-p) \exp(-ipz) & z < 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

où

$$\zeta_1 = \zeta_1^+ = \frac{1 - \gamma_s}{1 + \gamma_s} \quad \zeta_2 = -\zeta_2^+ = -\frac{1 - \gamma_s}{2\sqrt{|\gamma_s|}} \quad (3.21)$$

et les spineurs $u(\pm p)$ et $v(\pm \bar{q})$ sont donnés par

$$u(\pm p) = \sqrt{\frac{\omega + m}{2p}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pm p}{\omega + m} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

et

$$v(\pm \bar{q}) = \sqrt{\frac{(\omega - V_0) + (m + S_0)}{|\bar{q}|}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pm \bar{q}}{(\omega - V_0) + (m + S_0)} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Pour les états "in", nous avons

$$\psi_{in}^-(z) = N_{out} \begin{cases} u(-p) \exp(-ipz) & z < 0 \\ \zeta_2 v(\bar{q}) \exp(i\bar{q}z) + \zeta_1 v(-\bar{q}) \exp(-i\bar{q}z) & z > 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

et

$$\psi_{in}^+(z) = N_{out}^* \begin{cases} v(-\bar{q}) \exp(-i\bar{q}z) & z > 0 \\ \zeta_2^+ u(p) \exp(ipz) + \zeta_1^+ u(-p) \exp(-ipz) & z < 0 \end{cases}. \quad (3.25)$$

Les constantes N_{in} et N_{out} se déterminent suivant les conditions d'orthogonalisation

$$(\psi_{in,p}^+, \psi_{in,p'}^+) = (\psi_{out,p}^+, \psi_{out,p'}^+) = \delta_{p,p'} \quad (3.26)$$

$$(\psi_{in,p}^-, \psi_{in,p'}^-) = (\psi_{out,p}^-, \psi_{out,p'}^-) = \delta_{p,p'} \quad (3.27)$$

et

$$(\psi_{in}^+, \psi_{in}^-) = (\psi_{out}^+, \psi_{out}^-) = 0, \quad (3.28)$$

où p désigne l'ensemble des nombres quantiques conservés (l'énergie dans notre cas) et le produit scalaire des deux états est défini par

$$(\psi^+, \psi^-)_z = \int \bar{\psi}^+ \beta \alpha \psi^- dz. \quad (3.29)$$

Notons que cette définition des états "in" et "out" dans la zone de Klein qui coïncide avec celle proposée par Nikishov est indépendant avec les considérations de la section précédente.

Maintenant, selon le formalisme standard de la matrice S en théorie quantique des champs, l'opérateur de champ admet les deux décompositions suivantes

$$\psi = \sum_p (a_{in,p} \psi_{in,p}^+ + b_{in,p}^+ \psi_{in,p}^-) \quad (3.30)$$

$$= \sum_p (a_{out,p} \psi_{out,p}^+ + b_{out,p}^+ \psi_{out,p}^-) \quad (3.31)$$

où l'opérateur a_{in} (a_{out}) annihile une particule dans l'état "in" ("out") et l'opérateur b_{in}^+ (b_{out}^+) crée une antiparticule dans l'état "in" ("out"). Ces opérateurs vérifient les relations d'anticommutation suivantes

$$[a_{in,p}, a_{in,p'}^+]_+ = [a_{out,p}, a_{out,p'}^+]_+ = \delta_{p,p'} \quad (3.32)$$

$$[b_{in,p}, b_{in,p'}^+]_+ = [b_{out,p}, b_{out,p'}^+]_+ = \delta_{p,p'} \quad (3.33)$$

et tous les anticommutateurs mixtes sont nuls

$$[a, b]_+ = [a, b^+]_+ = 0. \quad (3.34)$$

Avec ces deux définitions de particules, les particules créées observées sont les particules "out" dans le vide "in".

3.3.2 Création des particules

Comme l'ensemble $\{\psi_{out}^+(z), \psi_{out}^-(z)\}$ forme une base pour l'espace de solution de l'équation (3.1), nous pouvons écrire les éléments du deuxième ensemble $\{\psi_{in}^+(z), \psi_{in}^-(z)\}$ comme combinaisons linéaires des fonctions $\psi_{out}^+(z)$ et $\psi_{out}^-(z)$. En effet, à partir de la définition des états "in" et "out", nous pouvons facilement établir les développements

$$\psi_{in}^+(z) = \alpha^* \psi_{out}^+(z) + \beta^* \psi_{out}^-(z) \quad (3.35)$$

$$\psi_{in}^-(z) = \alpha \psi_{out}^-(z) + \beta \psi_{out}^+(z), \quad (3.36)$$

où les coefficients (de Bogoliubov) α et β sont donnés par

$$\alpha = -\frac{1 + \gamma_s}{1 - \gamma_s} \quad (3.37)$$

$$\beta = \frac{2\sqrt{|\gamma_s|}}{1 - \gamma_s}, \quad (3.38)$$

avec la condition

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (3.39)$$

Les équations (3.35) et (3.36) définissent la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" aux états "out" qui peut être écrit sous la forme équivalente suivante

$$\psi_{out}^+(z) = \alpha\psi_{in}^+(z) + \beta\psi_{in}^-(z) \quad (3.40)$$

$$\psi_{out}^-(z) = \alpha^*\psi_{in}^-(z) + \beta^*\psi_{in}^+(z). \quad (3.41)$$

Cette relation entre les états "in" et "out" peut être converti en une relation entre les opérateurs "in" et "out" en utilisant (3.30) et (3.31). Nous avons alors

$$a_{in} = \alpha a_{out} + \beta^* b_{out}^+ \quad (3.42)$$

$$b_{in}^+ = \beta a_{out} + \alpha^* b_{out}^+. \quad (3.43)$$

Nous pouvons également écrire les opérateurs "out" en termes d'opérateurs "in"

$$a_{out} = \alpha a_{in} + \beta^* b_{in}^+ \quad (3.44)$$

$$b_{out}^+ = \beta a_{in} + \alpha^* b_{in}^+. \quad (3.45)$$

Ici, nous remarquons que les coefficients de Bogoliubov obtenus déterminent complètement les processus quantiques en présence d'une barrière scalaire en plus de la barrière vectorielle habituelle. Cette procédure nous permet de calculer toutes les grandeurs physiques de manière simple. Par exemple, pour traiter le processus de création de particules, nous considérons l'amplitude

$$\mathcal{A} = \langle 0_{out} | a_{out} b_{out} | 0_{in} \rangle \quad (3.46)$$

et en tenant compte du fait que

$$b_{out} = \frac{1}{\alpha^*} b_{in} + \frac{\beta^*}{\alpha^*} a_{out}^+ \quad (3.47)$$

nous obtenons

$$\mathcal{A} = -\frac{\beta^*}{\alpha^*} e^{iw}, \quad (3.48)$$

où e^{iw} est l'amplitude de transition vide-vide

$$e^{iw} = \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle. \quad (3.49)$$

La probabilité absolue pour créer des particules au voisinage de la barrière est alors

$$P_{Cr} = |\mathcal{A}|^2 = \left| \frac{\beta^*}{\alpha^*} \right|^2 C_0 = P_{rel} C_0 \quad (3.50)$$

où C_0 est la probabilité de transition vide-vide

$$C_0 = |\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle|^2 \quad (3.51)$$

et P_{rel} la probabilité relative pour créer une paire

$$P_{rel} = \left| \frac{\beta^*}{\alpha^*} \right|^2 = \frac{4|\gamma_s|}{(1+\gamma_s)^2}. \quad (3.52)$$

Suivant le principe d'exclusion de Pauli, une seule paire pourrait être créée dans un état bien défini. nous obtenons

$$C_0 + \left| \frac{\beta^*}{\alpha^*} \right|^2 C_0 = 1, \quad (3.53)$$

ce qui donne, directement, la persistance du vide (la probabilité de transition vide-vide)

$$C_0 = \frac{1}{1 + \left| \frac{\beta^*}{\alpha^*} \right|^2} = |\alpha|^2 = \left(\frac{1+\gamma_s}{1-\gamma_s} \right)^2. \quad (3.54)$$

Nous avons donc

$$P_{Cr} = \left| \frac{\beta^*}{\alpha^*} \right|^2 |\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{4|\gamma_s|}{(1-\gamma_s)^2} = \frac{T}{R}. \quad (3.55)$$

Un autre résultat important du principe de Pauli est que le nombre moyen de particules

créées dans l'état ω est alors

$$\bar{n} = P_{rel} C_0 = |\beta|^2 = \frac{4|\gamma_s|}{(1 - \gamma_s)^2}, \quad (3.56)$$

qui est le même que le nombre moyen de particules "out" dans le vide "in"

$$\bar{n} = \langle 0_{in} | a_{out}^+ a_{out} | 0_{in} \rangle = |\beta|^2. \quad (3.57)$$

La figure (3.6) montre la probabilité absolue P_{Cr} en fonction de la variable $\frac{S_0}{m}$ pour plusieurs valeurs de $\frac{\omega}{m}$ et $\frac{V_0}{m}$ avec $V_0 = \omega + 2m$. Le résultat est comme prévu, la barrière scalaire, telle qu'elle est considérée, minimise la probabilité absolue de création des particules.

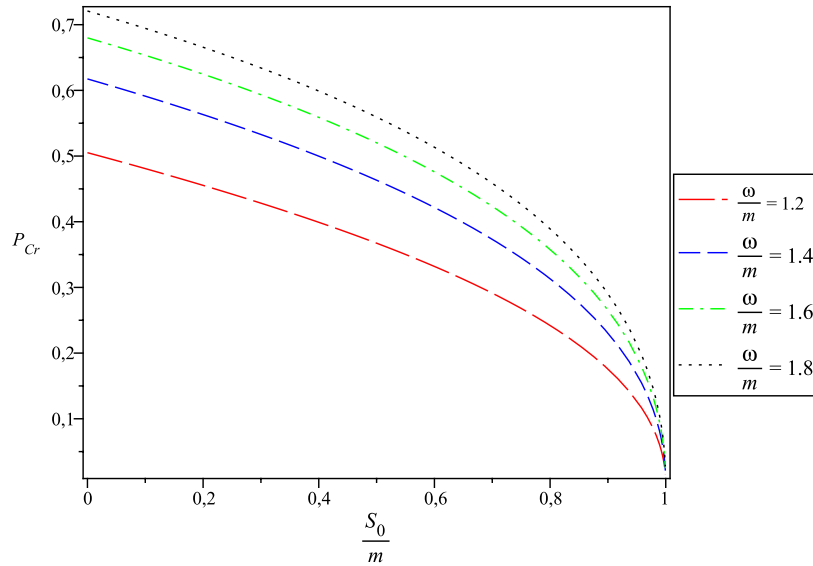


Figure 3.6 – Courbes graphiques représentant P_{Cr} comme une fonction de $\frac{S_0}{m}$.

Dans la figure (3.7), nous traçons la probabilité absolue P_{Cr} en fonction de la variable $\frac{V_0}{m}$ pour plusieurs valeurs de $\frac{S_0}{m}$ et $\omega = 1.5m$. Outre la minimisation de la création de particules, la figure (3.7) montre également que plus V_0 est élevée, plus que l'effet de la barrière scalaire sera négligeable.

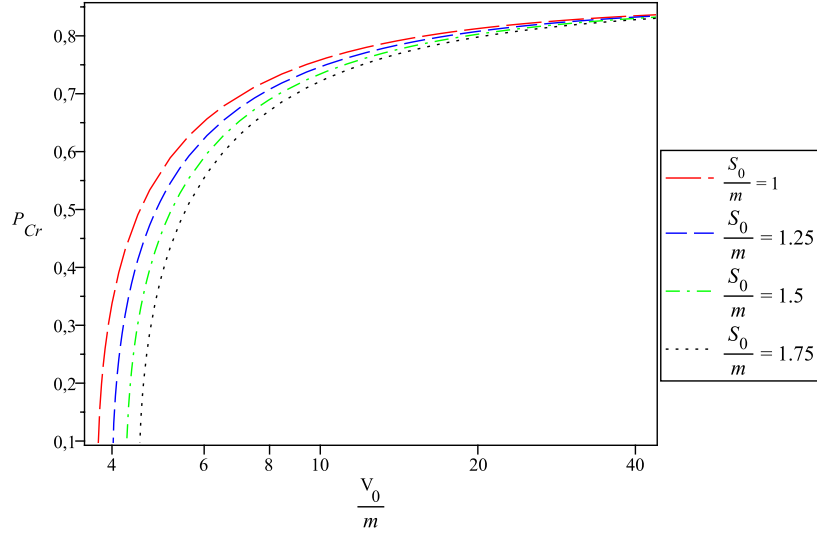


Figure 3.7 – Courbes graphiques représentant P_{Cr} comme une fonction de $\frac{V_0}{m}$.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le paradoxe de Klein en présence d'une barrière scalaire en plus de la barrière vectorielle habituelle. D'abord, nous avons trouvé les solutions exactes de l'équation de Dirac correspondante. Ensuite, nous avons extrait de ces solutions les coefficients de transmission et de réflexion. Nous avons montré ainsi que la présence d'une barrière scalaire réduit la zone de Klein et minimise le coefficient de réflexion. Lorsque S_0 dépasse $V_0 - 2m$, le paradoxe de Klein disparaît.

Afin d'obtenir une bonne interprétation de la création de paires, nous avons traité le problème dans le cadre de la théorie quantique des champs. Nous avons alors pu extraire les coefficients de Bogoliubov et calculer la probabilité de production de paires et le nombre moyen des particules créées. Nous avons montré que le potentiel scalaire diminue la probabilité relative de créer une paire de particules. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que l'écart entre les énergies positives et négatives dans la région ($z > 0$) est de $2m$ alors que cet écart devient $2m + 2S_0$ dans la deuxième région. Cela signifie qu'en présence du potentiel scalaire, la bande interdite à droite de la barrière est plus grande que celle habituelle et donc, le potentiel scalaire réduit la zone de Klein et minimise la création de particules. La création de particules diminue lorsque le potentiel scalaire augmente et s'arrête définitivement lorsque le potentiel scalaire atteint la valeur $V_0 - 2m$. En d'autres termes, en présence d'un potentiel scalaire S_0 , seules les particules de masse m , avec $2m < V_0 - S_0$, peuvent être créées.

Chapitre 4

Création de particules de spin 0 en présence d'un potentiel scalaire de type Sauter

4.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent comment le potentiel scalaire réduit la zone de Klein et minimise ainsi la création des particules. Cependant comme le potentiel scalaire se couple à la masse de particule, il induit une longueur d'onde effective de Compton $\lambda_{eff} = \frac{1}{m+S(z)}$, ce qui, à cause du brusque changement de $S(z)$, entraîne des difficultés dans la localisation de la particule au voisinage de la barrière. Pour montrer que cette conclusion n'est pas liée à la discontinuité du potentiel scalaire nous devons considérer des potentiels qui croissent continuellement, mais pour lesquels l'équation de Klein Gordon admet des solutions analytiques exactes. Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier la création des particules de spin 0 en considérant des potentiels du type Sauter [91] $V(z) = \frac{V_0}{2} (1 + \tanh \frac{z}{2a})$.

La création de particules dans un champ du type Sauter ait fait l'objet de nombreuses études [92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101]. Outre le fait que le potentiel de Sauter admette des solutions analytiques, il révèle quelques caractéristiques intéressantes de l'effet de création de particules. En fait, la probabilité de créer une paire de particules dans un état donné (ω, p_\perp) et le nombre moyen $n(\omega, p_\perp)$ des particules créées en présence du potentiel de Sauter peut dépendre de la constante de couplage e et l'amplitude V_0 de manière analytique ou non selon que la valeur du paramètre a soit petite ou grande.

Pour étudier le processus de création des particules en présence des potentiels du type Sauter, nous considérons deux définitions différentes des états "in" et "out". La transformation de Bogoliubov entre ces états nous permet d'extraire la probabilité de créer une paire de particules dans un état donné et le nombre moyen de particules créées à partir des coefficients de Bogoliubov.

4.2 Equation de Klein Gordon et Comportement des Solutions

Considérons un champ de matière scalaire Φ de masse m et de charge e soumis à un mélange général du potentiel vectoriel habituel $A_\mu = (V_v(z), 0, 0, 0)$ et d'un potentiel scalaire de Lorentz $V_s(z)$. La dynamique de ce système est en général régie par l'équation de Klein Gordon suivante

$$[(\hat{p}^\mu - eA^\mu)(\hat{p}_\mu - eA_\mu) - (m + V_s)^2] \Phi = 0 \quad (4.1)$$

Nous choisissons pour les deux potentiels la forme de Sauter [91] donnée par

$$V_v(z) = \frac{V_0}{2} \left(1 + \tanh \frac{z}{2a} \right) \quad (4.2)$$

et

$$V_s(z) = \frac{S_0}{2} \left(1 + \tanh \frac{z}{2a} \right) \quad (4.3)$$

où V_0 , S_0 et a sont des constantes réelles. Le champ électrique dérivé à partir du potentiel vecteur (4.2) est spatialement confiné et s'étend sur une distance de $2a$.

En écrivant le champ bosonique sous la forme $\Phi(t, x, y, z) = \exp[-i(\omega t - p_x x - p_y y)] \psi(z)$, nous obtenons pour $\psi(z)$ l'équation suivante

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + P_3^2(z) \right] \psi(z) = 0 \quad (4.4)$$

où

$$P_3^2(z) = \left(\omega - \frac{eV_0}{2} - \frac{eV_0}{2} \tanh \frac{z}{2a} \right)^2 - \left(m + \frac{S_0}{2} + \frac{S_0}{2} \tanh \frac{z}{2a} \right)^2 - p_\perp^2. \quad (4.5)$$

Comme l'équation (4.4) est du second ordre, il n'y a que deux solutions indépendantes et

toutes les autres solutions peuvent être exprimées en fonction de ces deux solutions indépendantes. Ici, nous voulons trouver deux ensembles de solutions indépendantes pour que les deux fonctions $\psi_{\pm}(z)$ du premier ensemble se comportent comme des ondes propageant à gauche et à droite lorsque $z \rightarrow -\infty$, et les deux fonctions $\psi^{\pm}(z)$ du deuxième ensemble se comportent comme des ondes propageant à gauche et à droite lorsque $z \rightarrow +\infty$. Pour cela, avant de chercher des solutions exactes pour l'équation (4.4), examinons d'abord leur comportement lorsque $z \rightarrow \pm\infty$. Nous obtenons facilement

$$\psi_{\epsilon}(z) = \exp(i\epsilon p_L z) \quad (4.6)$$

$$\psi^{\epsilon}(z) = \exp(i\epsilon p_R z), \quad (4.7)$$

où p_L et p_R sont donnés par

$$p_L^2 = \lim_{z \rightarrow -\infty} P_3^2(z) = \omega^2 - m^2 - p_{\perp}^2 \quad (4.8)$$

$$p_R^2 = \lim_{z \rightarrow +\infty} P_3^2(z) = (\omega - eV_0)^2 - (m + S_0)^2 - p_{\perp}^2 \quad (4.9)$$

et $\epsilon = \pm 1$. Notons que les comportements dans (4.6) et (4.7) sont les mêmes que les solutions semi-classiques obtenues à partir de l'équation de Hamilton-Jacobi.

Comme l'ensemble $\{\psi^+(z), \psi^-(z)\}$ forme une base pour l'espace de solution de l'équation (4.4), nous pouvons écrire les éléments du second ensemble $\{\psi_+(z), \psi_-(z)\}$ comme combinaisons linéaires des fonctions $\psi^+(z)$ et $\psi^-(z)$

$$\psi_+ = \alpha\psi^+ + \beta\psi^- \quad (4.10)$$

$$\psi_- = \beta^*\psi^+ + \alpha^*\psi^-. \quad (4.11)$$

Il est à noter que les coefficients α et β vérifient la condition

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \quad (4.12)$$

ce qui rend la transformation définie par (4.10) et (4.11) canonique.

4.3 Les états "in" et "out"

La quantification d'un champ de particules chargées dans de tels potentiels dépendant de l'espace n'est pas aussi simple qu'un champ libre à cause de l'instabilité du vide vis-à-vis la production de paires et le paradoxe de Klein associé. Cependant, on peut résoudre ce problème dans le cadre de la seconde théorie quantifiée en imposant des conditions aux limites aux états de particule et d'antiparticule. Par conséquent, la tâche principale est d'interpréter les solutions obtenues en termes des états "in" et "out". Dans cette section, nous discutons des classifications bien connues de ces états.

4.3.1 Le choix de Hansen et Ravndal

Notre compréhension de base de la création des particules, les particules "in" et "out" sont situées à gauche de la barrière et les antiparticules "in" et "out" sont situées à droite. Ensuite, les particules "in" qui se déplacent vers la barrière gauche sont soumises à une réflexion totale et les antiparticules "in" qui se déplacent vers la barrière droite sont également soumises à une réflexion totale. Ensuite, suivant l'interprétation de Feynman, les antiparticules se meuvent dans le sens inverse du temps ce qui implique que pour l'antiparticule on a [102]

$$\tilde{p} = \frac{dz}{d(-t)} = -\frac{dz}{dt} = -p \quad (4.13)$$

et, par conséquent, le champ $\psi_{z \rightarrow +\infty} \simeq \exp(ip_R z)$ décrit une antiparticule qui se déplace vers la région gauche, ce qui explique que $\psi^+(z)$ est un état d'antiparticule "in". C'est le choix de Hansen et Ravndal. Selon Hansen et Ravndal [78], les états "in" et "out" peuvent être classés comme suit

$$\psi_{in}^+(z) = \psi_+(z) \quad (4.14)$$

$$\psi_{out}^+(z) = \psi_-(z) \quad (4.15)$$

$$\psi_{out}^-(z) = \psi^-(z) \quad (4.16)$$

$$\psi_{in}^-(z) = \psi^+(z) \quad (4.17)$$

A partir des développements (4.10) et (4.11), nous pouvons établir la transformation de Bogoliubov entre les états "in" et "out"

$$\psi_{in}^+ = \alpha_H \psi_{out}^+ + \beta_H \psi_{out}^- \quad (4.18)$$

$$\psi_{in}^- = \beta_H^* \psi_{out}^+ + \alpha_H^* \psi_{out}^- \quad (4.19)$$

où α_H et β_H sont les coefficients de Bogoliubov associés au choix de Hansen et Ravndal

$$\alpha_H = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (4.20)$$

$$\beta_H = \frac{1}{\beta} \quad (4.21)$$

Il est facile de montrer que α_H et β_H vérifient la même condition que α et β i.e. $|\alpha_H|^2 - |\beta_H|^2 = 1$.

4.3.2 Le choix de Nikishov

Selon Nikishov [80, 81], la description la plus correcte d'un processus de diffusion se fait au moyen de paquets d'ondes plutôt que d'états purs en considérant un champ électrique localisé dans une région de taille $2a$, c-à-d qui s'annule effectivement lorsque $|z| \gg a$. Ainsi, dans un processus décrit par ψ_+ par exemple, nous pouvons voir à partir de l'équation (4.10) qu'il y a initialement le courant d'antiparticule d'amplitude α se déplaçant de la région des z positifs vers la barrière à $z = 0$ et un courant de particule d'amplitude égale à 1 qui se déplace dans le sens opposé de la région des z négatifs. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, le courant de la particule s'annihile complètement dans la région du champ et il reste le courant de l'antiparticule réfléchi et diminué par la barrière (notons que $|\alpha|^2 > 1$). Donc, il n'y a que le paquet d'onde de l'antiparticule, c'est-à-dire $\psi_+ = \psi_{out}^-$. Par le même raisonnement Nikishov a classé les états "in" et "out" comme suit

$$\psi_{in}^+ = \psi^- \quad (4.22)$$

$$\psi_{out}^+ = \psi^+ \quad (4.23)$$

$$\psi_{in}^- = -\frac{\beta}{\beta^*} \psi_- \quad (4.24)$$

$$\psi_{out}^- = \psi_+ \quad (4.25)$$

Comme dans la sous-section précédente, les développements (4.10) et (4.11) conduisent à la transformation de Bogoliubov suivante

$$\psi_{in}^+ = \alpha_N \psi_{out}^+ + \beta_N \psi_{out}^- \quad (4.26)$$

$$\psi_{in}^- = \beta_N^* \psi_{out}^+ + \alpha_N^* \psi_{out}^- \quad (4.27)$$

où α_N et β_N sont les coefficients de Bogoliubov associés aux états de Nikishov

$$\alpha_N = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (4.28)$$

$$\beta_N = \frac{1}{\beta}. \quad (4.29)$$

Nous observons ici que les deux définitions conceptuellement différentes des états "in" et "out" donnent les mêmes coefficients de Bogoliubov et conduisent donc aux mêmes résultats vis-à-vis le processus de création de particules. En effet, comme nous le montrerons dans la section suivante, la probabilité de création de paires, le nombre moyen de particules créées et la probabilité pour que le vide reste vide peuvent être exprimés en termes de ces coefficients.

4.4 Solutions exactes

Maintenant, pour résoudre l'équation (4.4), nous faisons le changement $z \rightarrow \xi$, où

$$\xi = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \left(\frac{z}{2a} \right) \right). \quad (4.30)$$

L'équation résultante qui prend la forme

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{1-\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\frac{a^2 p_R^2}{\xi} - a^2 (e^2 V_0^2 - S_0^2) + \frac{a^2 p_L^2}{(1-\xi)} \right) \frac{1}{\xi(1-\xi)} \right] \tilde{\varphi}(\xi) = 0 \quad (4.31)$$

est une équation de type Riemann [103]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{1-\eta} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta(1-\eta)} \left(\frac{c_1 c'_1}{\eta} + \frac{c_2 c'_2}{(1-\eta)} - cc' \right) \right] \tilde{\psi}(\eta) = 0 \quad (4.32)$$

où

$$c_1 = -c'_1 = iap_R, \quad (4.33)$$

$$c_2 = -c'_2 = iap_L \quad (4.34)$$

et

$$c = 1 - c' = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tilde{\delta} \quad (4.35)$$

avec

$$\tilde{\delta} = \sqrt{4a^2e^2V_0^2 - 4a^2S_0^2 - 1}. \quad (4.36)$$

Les paramètres c_1, c'_1, c_2, c'_2, c et c' vérifient la condition $c_1 + c'_1 + c_2 + c'_2 + c + c' = 1$.

Suivant [103] nous pouvons trouver pour l'équation (4.32) plusieurs ensembles de solutions qui peuvent s'écrire en termes de fonctions hypergéométriques $F(a_1, a_2, a_3; x)$. Ici, nous voulons trouver deux ensembles de solutions exactes qui peuvent être interprétées comme des ondes propageant à gauche et à droite à $\pm\infty$. En tenant compte des comportements dans (4.6) et (4.7), nous pouvons classer nos deux ensembles comme suit ; Les ondes propageant à gauche et à droite à $-\infty$ sont données par

$$\begin{aligned} \psi_+ = & \frac{1}{\sqrt{2p_L}} (1 - \xi)^{iap_L} \xi^{iap_R} \\ & F\left(iap_+ + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tilde{\delta}, iap_+ + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tilde{\delta}, 1 + 2iap_L; 1 - \xi\right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

et

$$\begin{aligned} \psi_- = & \frac{1}{\sqrt{2p_L}} (1 - \xi)^{-iap_L} \xi^{iap_R} \\ & F\left(iap_- + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tilde{\delta}, iap_- + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tilde{\delta}, 1 - 2iap_L; 1 - \xi\right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

où

$$p_{\pm} = p_R \pm p_L. \quad (4.39)$$

Pour les ondes propageant à gauche et à droite à $+\infty$, nous avons

$$\psi^- = \frac{1}{\sqrt{2p_R}} (1 - \xi)^{iap_L} \xi^{iap_R} \quad (4.40)$$

$$F\left(iap_+ + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tilde{\delta}, iap_+ + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tilde{\delta}, 1 + 2iap_R; \xi\right)$$

et

$$\psi^+ = \frac{1}{\sqrt{2p_R}} (1 - \xi)^{iap_L} \xi^{-iap_R} \quad (4.41)$$

$$F\left(-iap_- + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tilde{\delta}, -iap_- + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tilde{\delta}, 1 - 2iap_R; \xi\right)$$

Les facteurs $(2p_L)^{-1/2}$ and $(2p_R)^{-1/2}$ sont déterminés en utilisant la condition de normalisation suivante

$$\psi_p^* \psi_p' - \psi_p \psi_p'^* = 2i, \quad (4.42)$$

ce qui explique la conservation du courant de Klein Gordon.

En utilisant la relation entre les fonctions hypergéométriques [103]

$$F(a_1, a_2, a_3, x) = AF(a_1, a_2, a_1 + a_2 - a_3 + 1, 1 - x) \quad (4.43)$$

$$+ B(1 - x)^{a_3 - a_1 - a_2} F(a_3 - a_1, a_3 - a_2, a_3 - a_1 - a_2 + 1, 1 - x)$$

où

$$A = \frac{\Gamma(a_3)\Gamma(a_3 - a_1 - a_2)}{\Gamma(a_3 - a_1)\Gamma(a_3 - a_2)} \quad B = \frac{\Gamma(a_3)\Gamma(a_1 + a_2 - a_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \quad (4.44)$$

et la propriété [103]

$$F(a_1, a_2, a_3, x) = (1 - x)^{a_3 - a_1 - a_2} F(a_3 - a_1, a_3 - a_2, a_3, x), \quad (4.45)$$

nous obtenons

$$\psi_+ = \alpha\psi^+ + \beta\psi^- \quad (4.46)$$

$$\psi_- = \beta^*\psi^+ + \alpha^* \psi^- \quad (4.47)$$

où les coefficient α et β sont donnés par

$$\alpha = \sqrt{\frac{p_R}{p_L}} \frac{\Gamma(1 + 2iap_L) \Gamma(2iap_R)}{\Gamma\left(iap_+ + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tilde{\delta}\right) \Gamma\left(iap_+ + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tilde{\delta}\right)} \quad (4.48)$$

et

$$\beta = \sqrt{\frac{p_R}{p_L}} \frac{\Gamma(1 + 2iap_L) \Gamma(-2iap_R)}{\Gamma\left(-iap_- + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tilde{\delta}\right) \Gamma\left(-iap_- + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tilde{\delta}\right)}. \quad (4.49)$$

4.5 Création de particules

Comme nous avons deux ensembles des états de particules et d'antiparticules (c'est-à-dire les états "in" et "out"), l'opérateur de champ peut être écrit en termes de deux types d'opérateurs ; les opérateurs a_{in} et b_{in}^+ et les opérateurs a_{out} et b_{out}^+ . Ceci définit deux états du vide $|0_{out}\rangle$ et $|0_{in}\rangle$. La transformation de Bogoliubov entre les états "in" et "out" peut alors être convertie en une relation entre les opérateurs "in" et "out"

$$a_{out} = \alpha_N a_{in} + \beta_N^* b_{in}^+ \quad (4.50)$$

$$b_{out}^+ = \beta_N a_{in} + \alpha_N^* b_{in}^+. \quad (4.51)$$

Pour le processus de création de particules, la probabilité de créer une paire de particules dans l'état (ω, p_\perp) à partir du vide est alors

$$\mathcal{P}_{\omega, p_\perp} = \left| \frac{\beta_N^*}{\alpha_N^*} \right|^2 \quad (4.52)$$

En utilisant les propriétés suivantes des fonctions Gamma [103]

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad (4.53)$$

$$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \sinh \pi x} \quad (4.54)$$

et

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + ix\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi x} \quad (4.55)$$

nous obtenons

$$\mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}} = \frac{2 \sinh(\pi 2ap_L) \sinh(\pi 2ap_R)}{\cosh(2\pi ap_+) + \cosh(\pi \tilde{\delta})}. \quad (4.56)$$

Soit $\mathcal{C}_{\omega, p_{\perp}}$ la probabilité de ne pas avoir de création de paires dans l'état (ω, p_{\perp}) . La quantité $\mathcal{C}_{\omega, p_{\perp}} (\mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}})^n$ est alors la probabilité de n'avoir que n paires dans l'état (ω, p_{\perp}) . Nous avons

$$\mathcal{C}_{\omega, p_{\perp}} + \mathcal{C}_{\omega, p_{\perp}} \mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}} + \mathcal{C}_{\omega, p_{\perp}} (\mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}})^2 + \mathcal{C}_{\omega, p_{\perp}} (\mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}})^3 + \dots = 1, \quad (4.57)$$

ce qui donne

$$\mathcal{C}_{\omega, p_{\perp}} = 1 - \mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}}. \quad (4.58)$$

Compte tenu du fait que $\left| \frac{\beta_N^*}{\alpha_N^*} \right|^2 + \left| \frac{1}{\alpha_N^*} \right|^2 = 1$, nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\omega, p_{\perp}} &= \left| \frac{1}{\alpha_N^*} \right|^2 \\ &= \frac{\cosh(2\pi ap_-) + \cosh(\pi \tilde{\delta})}{\cosh(2\pi ap_+) + \cosh(\pi \tilde{\delta})}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Nous pouvons également exprimer le nombre moyen de particules créées en termes des coefficients de Bogoliubov. Nous avons par définition

$$n(\omega, p_{\perp}) = 1 \times \mathcal{C}_{\omega, p_{\perp}} \mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}} + 2 \times \mathcal{C}_{\omega, p_{\perp}} (\mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}})^2 + 3 \times \mathcal{C}_{\omega, p_{\perp}} (\mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}})^3 + \dots \quad (4.60)$$

Sachant que

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{1-x}, \quad (4.61)$$

avec $x < 1$, nous obtenons

$$n(\omega, p_{\perp}) = |\beta_N|^2 = \frac{2 \sinh(\pi 2ap_L) \sinh(\pi 2ap_R)}{\cosh(2\pi ap_-) + \cosh(\pi \tilde{\delta})}. \quad (4.62)$$

Illustrons maintenant l'effet du potentiel scalaire sur la création de particules scalaires en considérant quelques graphiques montrant les variations du nombre moyen de particules créées.

En traçant $n(\omega, p_{\perp})$ en fonction de la variable $2\pi a\omega$ pour des différentes valeurs de la barrière scalaire, nous montrons que la barrière scalaire considérée minimise le nombre moyen

de particules créées, cf. figure (4.1). Cette observation inceptive peut s'expliquer par le fait que le potentiel scalaire se couple à la masse de la particule et réduit ainsi la zone de Klein $m < \omega < V - S_0 - m$.

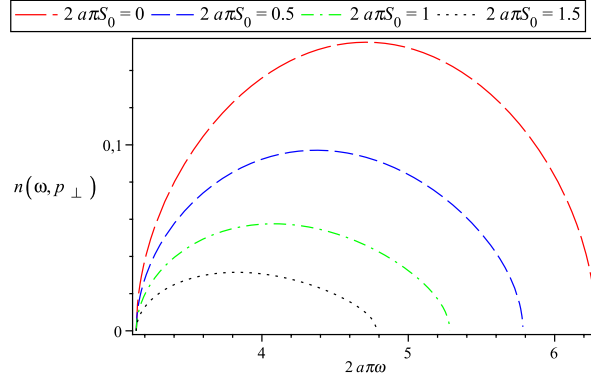


Figure 4.1 – Variations de $n(\omega, p_{\perp})$ en fonction de $2\pi a\omega$. V_0 est choisi de sorte que $2\pi aV_0 = 3$.

La figure (4.2) représente les variations de $n(\omega, p_{\perp})$ par rapport à la variable $2\pi aS_0$ pour des différentes valeurs de $2\pi aV_0$ et, de ce fait, elle montre à nouveau que lorsque S_0 est positif, le potentiel scalaire réduit la création de particules.

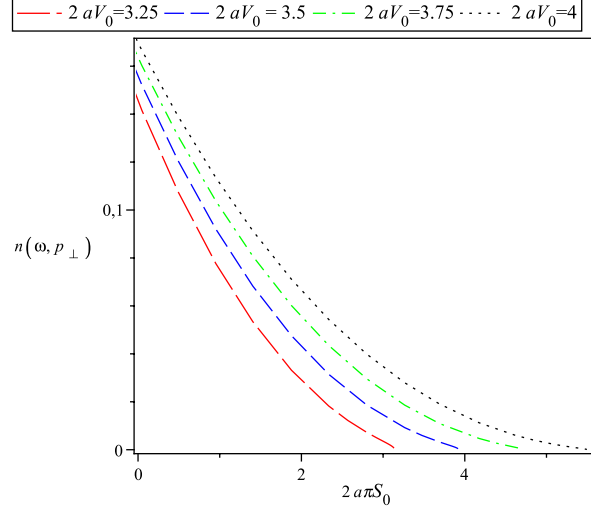


Figure 4.2 – Variations de $n(\omega, p_{\perp})$ en fonction de $2\pi aS_0$. ω est choisie de sorte que $2\pi a\omega = 2.25$.

En tenant compte du fait que l'expression de $n(\omega, p_{\perp})$ est valable même pour les valeurs négatives de S_0 , nous traçons, sur la figure (4.3), le nombre moyen $n(\omega, p_{\perp})$ en fonction de la variable $2\pi aV_0$ pour des différentes valeurs de la barrière scalaire et nous considérons quelques valeurs négatives de S_0 . En conséquence, nous remarquons que pour des valeurs positives de S_0 , $n(\omega, p_{\perp})$ augmente à mesure que V_0 augmente. Cependant, pour certaines

valeurs négatives de S_0 , le nombre moyen $n(\omega, p_\perp)$ atteint un maximum puis il diminue à mesure que V_0 augmente. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que les valeurs négatives du potentiel scalaire agrandissent la zone de Klein qui, dans ce cas, diminue à mesure que V_0 augmente.

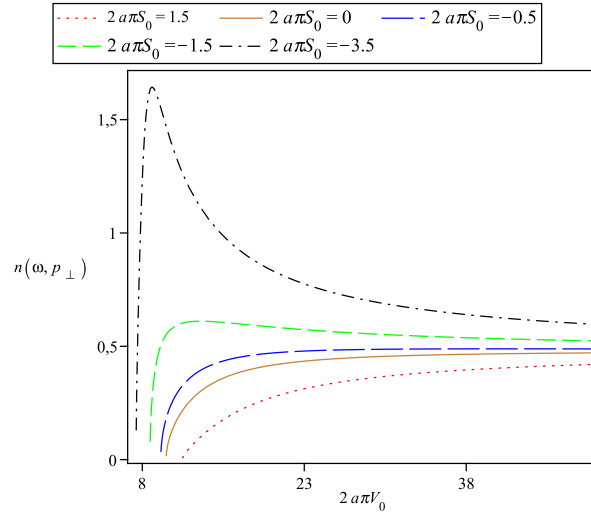


Figure 4.3 – Variations de $n(\omega, p_\perp)$ en fonction de $2\pi aV_0$. ω est choisie de sorte que $2\pi a\omega = 2.25$.

Dans la figure (4.4), nous traçons $n(\omega, p_\perp)$ en fonction des variables $2\pi aS_0$ et nous étendons le domaine de variation de S_0 à quelques valeurs négatives. Ici, nous voyons le plein effet du potentiel scalaire sur la création de particules, le nombre moyen de particules créées atteint une valeur maximale dans la gamme des valeurs négatives de S_0 .

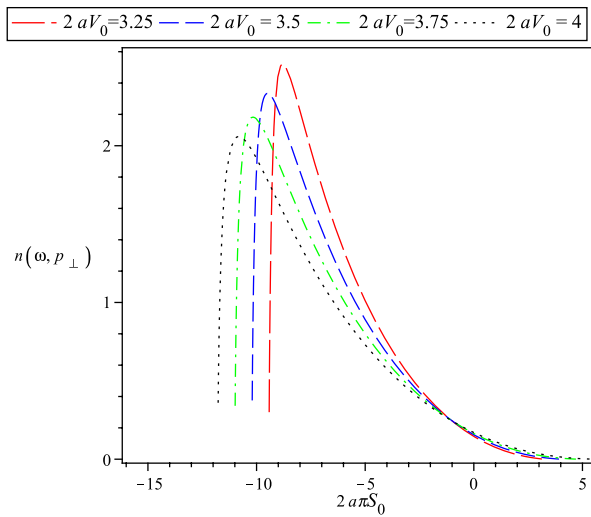


Figure 4.4 – Variations de $n(\omega, p_\perp)$ en fonction de $2\pi aS_0$. ω est choisie de sorte que $2\pi a\omega = 2.25$.

Notons que nous pouvons montrer que la création de particules diminue à mesure que la composante transversale p_{\perp} augmente et que le nombre moyen $n(\omega, p_{\perp})$ prend sa valeur maximale lorsque $p_{\perp} = 0$. Ceci est également dû à la réduction de la zone de Klein.

4.6 La limite $a \gg 1$.

Comme mentionné ci-dessus, la limite $a \gg 1$ reproduit le cas du champ constant si nous redéfinissons les potentiels tels que $V_0/a = 4E = \text{constant}$ et $S_0/a = 4S = \text{constant}$ et nous faisons les décalages $V_v(z) \rightarrow V_v(z) - V_0/2 = 2aE \tanh \frac{z}{2a}$ et $V_s(z) \rightarrow V_s(z) - S_0/2 = 2aS \tanh \frac{z}{2a}$. Il est évident que dans la limite $a \rightarrow \infty$, ces potentiels deviennent linéaires c'est-à-dire $V_v(z) = Ez$ et $V_s(z) = Sz$. Pour obtenir le nombre moyen de particules créées et la probabilité de créer une paire, il suffit de remplacer ω par $\omega + \frac{eV_0}{2}$ et m par $m - \frac{S_0}{2}$ dans les résultats précédents. Avec ces remplacements, p_L et p_R deviennent

$$\tilde{p}_L = \sqrt{(\omega + 2aE)^2 - (m - 2aS)^2 - p_{\perp}^2} \quad (4.63)$$

et

$$\tilde{p}_R = \sqrt{(\omega - 2aE)^2 - (m + 2aS)^2 - p_{\perp}^2}. \quad (4.64)$$

Alors, en utilisant les approximations, pour les grandes valeurs de a ,

$$\tilde{p}_L \simeq 2\sqrt{e^2E^2 - S^2}a + \frac{mS + \omega eE}{\sqrt{e^2E^2 - S^2}} - \frac{(\omega S + meE)^2}{4a\sqrt{(e^2E^2 - S^2)^3}} - \frac{p_{\perp}^2}{4a\sqrt{e^2E^2 - S^2}} \quad (4.65)$$

$$\tilde{p}_R \simeq 2\sqrt{e^2E^2 - S^2}a - \frac{mS + \omega eE}{\sqrt{e^2E^2 - S^2}} - \frac{(\omega S + meE)^2}{4a\sqrt{(e^2E^2 - S^2)^3}} - \frac{p_{\perp}^2}{4a\sqrt{e^2E^2 - S^2}} \quad (4.66)$$

et

$$\tilde{\delta} \simeq 2a^2\sqrt{e^2E^2 - S^2} - \frac{1}{4a^2\sqrt{e^2E^2 - S^2}} \quad (4.67)$$

nous obtenons

$$\mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}} = \frac{\exp \left[-\pi \left(\frac{(meE + \omega S)^2}{(e^2E^2 - S^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p_{\perp}^2}{\sqrt{e^2E^2 - S^2}} \right) \right]}{1 + \exp \left[-\pi \left(\frac{(meE + \omega S)^2}{(e^2E^2 - S^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p_{\perp}^2}{\sqrt{e^2E^2 - S^2}} \right) \right]}. \quad (4.68)$$

La densité des particules créées devient

$$n(\omega, p_{\perp}) = \exp \left(-\pi \left(\frac{(meE + \omega S)^2}{(e^2 E^2 - S^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p_{\perp}^2}{\sqrt{e^2 E^2 - S^2}} \right) \right) \quad (4.69)$$

Notons que la condition $(eV_0)^2 - S_0^2 > 0$ sous laquelle la création de particules est possible, se réduit, dans ce cas, à $e^2 E^2 - S^2 > 0$.

Par ailleurs, comme nous pouvons le voir, la probabilité de créer une paire et le nombre moyen de particules dépendent du champ électrique eE d'une manière non analytique, ce qui rend impossible de trouver un développement en puissances de eE pour $\mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}}$ et $n(\omega, p_{\perp})$. Cela montre la nature non perturbative du problème. Contrairement, les quantités $\mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}}$ et $n(\omega, p_{\perp})$ dépendent du potentiel scalaire S d'une manière analytique et, par conséquent, les corrections dues au potentiel scalaire peuvent être calculées à l'aide d'une série de perturbation.

Quand $S \rightarrow 0$, nous obtenons les résultats bien connus

$$\mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}} = \frac{\exp \left(-\pi \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{eE} \right)}{1 + \exp \left(-\pi \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{eE} \right)} \quad (4.70)$$

et

$$\mathcal{C}_{\omega, p_{\perp}} = \frac{1}{1 + \exp \left(-\pi \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{eE} \right)}, \quad (4.71)$$

qui sont obtenus dans différents travaux correspondant au cas du champ électrique constant (voir par exemple [102]).

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la création de particules scalaires en présence d'un potentiel scalaire en plus du potentiel vectoriel, en considérant la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov. Nous avons donné deux ensembles des solutions exactes pour l'équation de champ de Klein Gordon et nous avons utilisé ces solutions pour calculer la probabilité de création d'une paire et le nombre moyen de particules créées.

La conclusion essentielle de cette étude est que le potentiel scalaire modifie l'écart entre les énergies positives et négatives dans une région de la barrière et change la largeur de la zone de Klein dans laquelle la création de particules est possible. Par conséquent, contrairement aux résultats du chapitre précédent, le potentiel scalaire peut conduire à une amplification de

la création de particules. Nous avons montré que le nombre moyen de particules créées atteint une valeur maximale dans la gamme des valeurs négatives de S_0 . De plus, nous avons montré que, pour des valeurs positives de S_0 , le nombre moyen $n(\omega, p_\perp)$ augmente à mesure que V_0 augmente. Cependant, pour certaines valeurs négatives de S_0 , le nombre moyen $n(\omega, p_\perp)$ atteint un maximum puis il diminue à mesure que V_0 augmente. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que les valeurs négatives du potentiel scalaire agrandissent la zone de Klein qui, dans ce cas, diminue à mesure que V_0 augmente.

A la fin, nous avons étudié la limite $a \gg 1$ qui correspond au champ électrique constant et nous avons montré que la probabilité de créer une paire et le nombre moyen de particules créées dépendent du potentiel scalaire de manière analytique.

Chapitre 5

Effet de Schwinger résonnant en présence d'un potentiel scalaire

5.1 Introduction

Les résultats du chapitre précédent révèlent la possibilité d'amplifier la création de particules par l'ajout d'un potentiel scalaire. Pour mettre en évidence cet effet nous devons calculer le nombre des particules créées par unité de volume et de temps qui représente la quantité que l'on peut mesurer aux laboratoires.

Pour pouvoir effectuer la somme sur tous les états possibles, nous considérons dans ce chapitre la création de particules de spin 0 en présence des potentiels linéaires. En premier lieu, nous résolvons l'équation de Klein Gordon pour une particule chargée en présence d'un champ électrique décrit par la jauge dépendante de la coordonnée z et un potentiel scalaire qui dépend également de z . Ensuite, nous utilisons les solutions obtenues pour calculer la probabilité de créer une paire de particules et le nombre des particules créées. En deuxième étape, nous considérons le même problème mais cette fois-ci, le champ électrique est décrit par la jauge dépendante du temps. Finalement, nous faisons la somme sur tous les états possibles pour calculer le nombre des particules créées par unité de volume et de temps.

5.2 Effet de Schwinger en présence d'un champ électrique homogène

Comme mentionné ci-dessus, ce phénomène a été étudié pour la première fois par Schwinger dans le contexte de l'invariance de jauge et la polarisation du vide. Schwinger a montré que l'amplitude de transition vide-vide peut être exprimée en termes d'une action effective \mathcal{S}_{eff} ,

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = \exp(i\mathcal{S}_{eff}) = \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_{eff}\right), \quad (5.1)$$

où \mathcal{L}_{eff} est le lagrangien effectif de Schwinger. La probabilité de création de paires par unité de temps et par unité de volume peut alors être extraite de la partie imaginaire de ce lagrangien

$$\mathcal{P}_{Creat.} = \frac{1}{VT} [1 - |\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle|^2] \simeq 2Im\mathcal{L}_{eff}. \quad (5.2)$$

En présence d'un champ électrique constant E , la partie imaginaire du lagrangien effectif est exactement calculée [13], dont le résultat est

$$2Im\mathcal{L}_{eff} = \frac{e^2 E^2}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right). \quad (5.3)$$

Alternativement, comme il a été mentionné dans le chapitre précédent, la méthode basée sur la transformation de Bogoliubov donne, pour $A_0 = -Ez$, le nombre moyen des particules créées dans l'état ω, p_x, p_y

$$n(\omega, p_{\perp}) = \exp\left(-\pi \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{eE}\right), \quad (5.4)$$

où $p_{\perp} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ est la composante transversale de \vec{p} par rapport au champ électrique. La première remarque que nous pouvons tirer de ce résultat est que $n(\omega, p_{\perp})$ ne dépend pas de l'énergie ω . Ceci parce que l'écart entre les états d'énergie positive et négative est le même, quelle que soit l'énergie. La deuxième remarque est que le nombre de particules créées par unité de temps et de volume est donné par

$$\frac{d\mathcal{N}}{d^4x} = \frac{e^2 E^2}{8\pi^3} \exp\left(-\pi \frac{m^2}{eE}\right), \quad (5.5)$$

qui n'est rien d'autre que le premier terme de la série de Schwinger.

Dans une image semi-classique, nous pouvons voir que le processus de création de paires comme un problème d'effet tunnel. Comme le montre la figure (5.1), pour créer une paire, un état d'énergie négative dans la région rouge doit traverser la région interdite (la bande blanche) pour devenir une particule à énergie positive dans la région bleue en laissant un trou (qui s'interprète comme une anti particule) dans la région rouge.

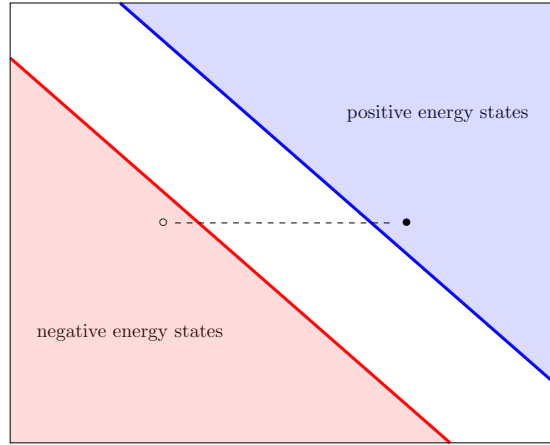


Figure 5.1 – L'écart entre les états d'énergies positive et négative en présence d'un champ électrique.

En présence d'un potentiel scalaire $S = S_0z$, la relation de dispersion classique s'écrit

$$\omega + eEz = \sqrt{p^2 + (m + S_0z)^2}$$

et, par conséquent, les valeurs possibles de l'énergie sont définies par

$$\omega > -eEz + |m + S_0z| \quad (5.6)$$

pour les énergies positives et

$$\omega < -eEz - |m + S_0z| \quad (5.7)$$

pour les énergies négatives. L'écart entre les états d'énergie positive et négative devient donc $2|m + S_0z|$.

Ici, nous distinguons deux situations différentes ; la première est lorsque $eE > S_0$. Dans ce cas, la pénétration de la région des énergies négatives à la région des énergies positives est toujours possible (voir figure (5.2)).

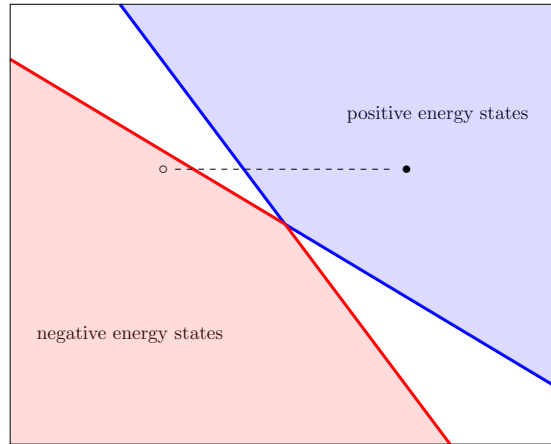


Figure 5.2 – L'écart entre les états d'énergies positive et négative en présence d'un champ électrique et d'un potentiel scalaire avec $eE > S_0$.

La deuxième situation est quand $eE < S_0$. Comme montré dans la figure (5.3), pour $eE < S_0$, un état rempli de la mer de Dirac ne peut pas pénétrer pour devenir un état de particule et par conséquent la création de paires particule-antiparticule ne peut y avoir lieu. Dans ce cas, nous n'avons que des états liés.

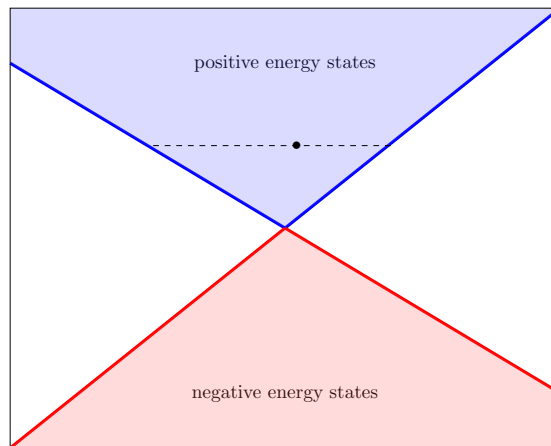


Figure 5.3 – L'écart entre les états d'énergies positive et négative en présence d'un champ électrique et d'un potentiel scalaire avec $eE < S_0$.

5.3 Création de particules en présence d'un potentiel scalaire

Considérons un champ de Klein Gordon $\Psi(x)$ de charge e et de masse m en interaction avec un champ électrique constant et homogène et un potentiel scalaire. L'équation de Klein Gordon qui décrit la dynamique de ce champ s'écrit

$$[(\hat{p}^\mu - eA^\mu)(\hat{p}_\mu - eA_\mu) - (m + S(x))^2] \Psi(x) = 0 \quad (5.8)$$

Un champ électrique constant peut être décrit par deux jauge simples, à savoir la jauge dépendante de la position

$$A_\mu = (-Ez, 0, 0, 0) \quad (5.9)$$

et la jauge dépendante du temps

$$A_\mu = (0, 0, 0, Et). \quad (5.10)$$

En premier lieu, nous considérons la jauge dépendante de la position et le potentiel scalaire

$$S(x) = S_0 z. \quad (5.11)$$

5.3.1 Solutions de l'équation de Klein Gordon

Comme d'habitude, pour résoudre l'équation (5.8), nous écrivons

$$\Psi(t, x, y, z) = \exp[-i(\omega t - p_x x - p_y y)] \Phi(z), \quad (5.12)$$

où ω est l'énergie de la particule. La fonction $\Phi(z)$ est donc une solution de l'équation

$$\left[(\omega + eEz)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (m + S_0 z)^2 - p_\perp^2 \right] \Phi(z) = 0. \quad (5.13)$$

En faisant le changement

$$\xi = \sqrt{2i} (e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{1}{4}} \left(z + \frac{(\omega e E - m S_0)}{(e^2 E^2 - S_0^2)} \right) \quad (5.14)$$

nous obtenons l'équation différentielle bien connue

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \xi^2 + \gamma + \frac{1}{2} \right] \Phi(\xi) = 0 \quad (5.15)$$

où $\tilde{\Phi}(\xi) \equiv \Phi(z)$ et

$$\gamma = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \left(\frac{(meE - \omega S_0)^2 + p_{\perp}^2 (e^2 E^2 - S_0^2)}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (5.16)$$

L'équation (5.15) admet deux ensembles de solutions exactes qui peuvent être écrites en termes des fonctions de Weber (Parabolic Cylinder Functions) [103]

$$\Phi_1(z) = D_{\gamma} \left((1+i) (e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{1}{4}} \left(z + \frac{(\omega e E - m S_0)}{(e^2 E^2 - S_0^2)} \right) \right) \quad (5.17)$$

$$\Phi_2(z) = D_{\gamma} \left(-(1+i) (e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{1}{4}} \left(z + \frac{(\omega e E - m S_0)}{(e^2 E^2 - S_0^2)} \right) \right) \quad (5.18)$$

et

$$\Phi_3(z) = D_{\gamma^*} \left((1-i) (e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{1}{4}} \left(z + \frac{(\omega e E - m S_0)}{(e^2 E^2 - S_0^2)} \right) \right) \quad (5.19)$$

$$\Phi_4(z) = D_{\gamma^*} \left(-(1-i) (e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{1}{4}} \left(z + \frac{(\omega e E - m S_0)}{(e^2 E^2 - S_0^2)} \right) \right) \quad (5.20)$$

5.3.2 Le choix des états "in" et "out" et la création de particules

Ayant obtenu deux ensembles de solutions exactes pour l'équation de Klein Gordon avec les deux potentiels, vectoriel et scalaire, nous devons quantifier le champ scalaire correspondant en sélectionnant les états "in" et "out" afin d'étudier le processus de création des particules. Suivant Nikischov [80, 81], les états "in" et "out" sont donnés par

$$\Phi_{out}^+(z) = D_{\gamma^*} \left((1-i) (e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{1}{4}} \left(z + \frac{(\omega e E - m S_0)}{(e^2 E^2 - S_0^2)} \right) \right) \quad (5.21)$$

$$\Phi_{out}^-(z) = D_{\gamma} \left(-(1+i) (e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{1}{4}} \left(z + \frac{(\omega e E - m S_0)}{(e^2 E^2 - S_0^2)} \right) \right) \quad (5.22)$$

$$\Phi_{in}^+(z) = D_{\gamma} \left((1+i) (e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{1}{4}} \left(z + \frac{(\omega e E - m S_0)}{(e^2 E^2 - S_0^2)} \right) \right) \quad (5.23)$$

et

$$\Phi_{in}^-(z) = D_{\gamma^*} \left(- (1-i) (e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{1}{4}} \left(z + \frac{(\omega e E - m S_0)}{(e^2 E^2 - S_0^2)} \right) \right) \quad (5.24)$$

Maintenant, afin de déterminer la probabilité de créer une paire de particules et le nombre moyen des particules créées, nous utilisons la transformation de Bogoliubov, qui peut être obtenue en tenant compte du fait que $\gamma^* = -\gamma - 1$ et en utilisant les relations fonctionnelles suivantes [103]

$$D_p(x) = \exp(i\pi p) D_p(-x) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} \exp\left(\frac{i\pi(p+1)}{2}\right) D_{-p-1}(-ix) \quad (5.25)$$

et

$$D_p(x) = \exp(-i\pi p) D_p(-x) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} \exp\left(\frac{-i\pi(p+1)}{2}\right) D_{-p-1}(ix) \quad (5.26)$$

La relation entre Φ_{in}^\pm et Φ_{out}^\pm s'écrit

$$\Phi_{in}^+(z) = \alpha \Phi_{out}^+(z) + \beta \Phi_{out}^-(z) \quad (5.27)$$

$$\Phi_{in}^-(z) = \beta^* \Phi_{out}^+(z) + \alpha^* \Phi_{out}^-(z) \quad (5.28)$$

où les coefficients α et β , sont donnés par

$$\alpha = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)} \exp\left(\frac{i\pi(\gamma+1)}{2}\right) \quad (5.29)$$

$$\beta = \exp(i\pi\gamma). \quad (5.30)$$

Notons que ces coefficients remplissent la condition $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.

En utilisant la propriété (4.55), nous obtenons la probabilité de créer une paire à partir du vide dans l'état ω, p_\perp

$$\mathcal{P}_{\omega, p_\perp} = \left| \frac{\beta^*}{\alpha^*} \right|^2 = \frac{\exp\left\{-\pi \left(\frac{(meE - \omega S_0)^2 + p_\perp^2 (e^2 E^2 - S_0^2)}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right)\right\}}{1 + \exp\left\{-\pi \left(\frac{(meE - \omega S_0)^2 + p_\perp^2 (e^2 E^2 - S_0^2)}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right)\right\}}. \quad (5.31)$$

Pour le nombre moyen des particules créées nous avons

$$n_S(\omega, p_\perp) = |\beta|^2 = \exp\left[-\pi \frac{(meE - \omega S_0)^2 + p_\perp^2 (e^2 E^2 - S_0^2)}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}}\right]. \quad (5.32)$$

Nous constatons à travers ces résultats que, contrairement au cas du champ électrique pur, le nombre moyen de particules créées et la probabilité de créer une paire dépendent de l'énergie ω . Ceci est intuitivement raisonnable car la largeur de la région interdite à travers laquelle les particules transmises par l'effet tunnel dépend de l'énergie. Le nombre moyen $n_S(\omega, p_\perp)$ atteint son maximum à l'énergie $\omega = \omega_0 = meE/S_0$ qui minimise l'écart entre les états d'énergie positive et négative.

Il est aussi à noter que lorsque le potentiel scalaire s'annule, nous obtenons les résultats bien connus correspondant au champ électrique constant.

5.4 Approximation semi-classique

Fait intéressant, il existe une approche alternative basée sur l'approximation semi-classique (WKB) pour la dérivation de la probabilité de création d'une paire de particules. L'étude de l'effet tunnel consiste à calculer le coefficient de transmission T qui peut être déterminé à partir de l'équation du type Schrödinger

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + p^2(z) \right] \psi(z) = 0, \quad (5.33)$$

avec

$$p^2(z) = (\omega + eEz)^2 - (m + S_0z)^2 - p_\perp^2. \quad (5.34)$$

En utilisant l'approximation WKB, la probabilité de transition d'un état d'énergie négative à un état d'énergie positive est donnée par le facteur de transmission

$$T = \exp(-2\hat{\Gamma}) \quad (5.35)$$

où $\hat{\Gamma}$ est donné par

$$\hat{\Gamma} = \int_{z_1}^{z_2} |p(z')| dz', \quad (5.36)$$

avec

$$|p(z)| = \sqrt{p_\perp^2 + (m + S_0z)^2 - (\omega + eEz)^2}. \quad (5.37)$$

Les positions z_1 et z_2 sont les points tournants solutions de l'équation $p(z) = 0$. Nous avons

$$z_{1,2} = -\frac{\omega eE - mS_0}{e^2E^2 - S_0^2} \pm \sqrt{\frac{(meE - \omega S_0)^2 + (e^2E^2 - S_0^2)p_\perp^2}{(e^2E^2 - S_0^2)^2}} \quad (5.38)$$

et

$$\hat{\Gamma} = \frac{\pi}{2} \frac{(meE - \omega S_0)^2 + (e^2 E^2 - S_0^2) p_{\perp}^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.39)$$

Par conséquent, le facteur T prend la forme

$$T = \exp \left(-\pi \frac{(meE - \omega S_0)^2 + (e^2 E^2 - S_0^2) p_{\perp}^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (5.40)$$

Le fait que T dépend de l'énergie ω est, comme mentionné ci-dessus, parce que la largeur de la région interdite dépend de l'énergie

$$(\Delta L)_0 = 2 \frac{meE - \omega S_0}{e^2 E^2 - S_0^2}. \quad (5.41)$$

En même temps, cette largeur dépend de la coordonnée z comme suit

$$(\Delta L)_0 = 2 \frac{eE}{e^2 E^2 - S_0^2} (m + S_0 z). \quad (5.42)$$

En comparant les deux expressions, nous constatons que l'énergie est liée à la position z et nous avons $\omega = -eEz$, ce qui nous permet d'écrire le facteur T comme

$$T = \exp \left[-\pi \left(\frac{e^2 E^2 (m + S_0 z)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p_{\perp}^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]. \quad (5.43)$$

Ceci est cohérent avec l'interprétation suivante de la création de particules. Considérons une paire de particules virtuelles à la position z . En présence d'un champ électrique constant, la particule virtuelle et son anti-particule s'écartent l'une de l'autre d'une distance ΔL et elles reçoivent l'énergie $eE(\Delta L)$. Lorsque ΔL dépasse la largeur de la région interdite, la paire devient réelle et les particules continuent à s'écarter.

5.5 La jauge dépendante du temps

Il est intéressant de savoir comment les résultats obtenus sont cohérents avec l'invariance de jauge de l'équation de Klein-Gordon. La possibilité de décrire un champ électrique constant par la jauge choisie dans (5.9), où $A_0 = -eEz$, ou par une jauge dépendante du temps ; $A_z = -eEt$, nous incite à se poser la question de savoir si l'utilisation de la jauge dépendante du temps donne les résultats obtenus déjà en utilisant la jauge dépendante de la position.

Dans le cas d'un champ électrique tout seul, nous savons comment la création de particules dans ces deux jauges est liée l'une à l'autre [104]. Cependant, pour un potentiel scalaire qui n'est pas un champ de jauge, l'invariance de jauge des résultats n'est pas assez claire. La question est donc de savoir si la présence du potentiel scalaire préserverait l'invariance de jauge.

En présence d'un potentiel scalaire $S(z) = S_0z$ et d'un champ électrique décrit par une jauge dépendant du temps, l'équation de Klein Gordon s'écrit

$$[\hat{p}_0^2 - \hat{p}_x^2 - \hat{p}_y^2 - (\hat{p}_z + eEt)^2 - (m + S_0z)^2] \Psi(t, x, y, z) = 0. \quad (5.44)$$

En raison du terme $(\hat{p}_z + eEt)^2$, la séparation des variables pour cette équation n'est pas simple. C'est ainsi que nous écrivons d'abord la fonction d'onde $\Psi(t, x, y, z)$ sous la forme

$$\Psi(t, x, y, z) = \exp i(p_x x + p_y y) \Phi(t, z). \quad (5.45)$$

La fonction $\Phi(t, z)$ est donc une solution à l'équation

$$\hat{O}\Phi(t, z) = 0 \quad (5.46)$$

où l'opérateur \hat{O} est donnée par

$$\hat{O} = [\hat{p}_0^2 - (\hat{p}_z + eEt)^2 - (m + S_0z)^2 - p_\perp^2]. \quad (5.47)$$

Maintenant nous introduisons la fonction auxiliaire $\tilde{\Phi}(t, z)$ définie par

$$\Phi(t, z) = e^{i\frac{\hat{p}_0 \hat{p}_z}{eE}} \tilde{\Phi}(t, z). \quad (5.48)$$

Il est bien clair que $\tilde{\Phi}(t, z)$ est une solution de l'équation

$$\hat{O}'\tilde{\Phi}(t, z) = 0 \quad (5.49)$$

où

$$\hat{O}' = e^{i\lambda \hat{p}_0 \hat{p}_z} [\hat{p}_0^2 - \hat{p}_\perp^2 - (\hat{p}_z + eEt)^2 - (m + S_0z)^2] e^{-i\lambda \hat{p}_0 \hat{p}_z}. \quad (5.50)$$

Compte tenu du fait que

$$e^{i\lambda\hat{p}_0\hat{p}_z} t e^{-i\lambda\hat{p}_0\hat{p}_z} = t - \lambda p_z \quad (5.51)$$

$$e^{i\lambda\hat{p}_0\hat{p}_z} z e^{-i\lambda\hat{p}_0\hat{p}_z} = z + \lambda p_0, \quad (5.52)$$

nous pouvons écrire $\hat{\mathcal{O}}'$ sous la forme

$$\hat{\mathcal{O}}' = \left(1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}\right) \left(\hat{p}_0 - \frac{e^2 E^2 S_0 (m + S_0 z)}{e E (e^2 E^2 - S_0^2)}\right)^2 - \frac{e^2 E^2 (m + S_0 z)^2}{e^2 E^2 - S_0^2} - e^2 E^2 t^2 - p_\perp^2. \quad (5.53)$$

Alors $\tilde{\Phi}(t, z)$ est une solution de l'équation

$$\left[\left(1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}\right) \left(\hat{p}_0 - \frac{e^2 E^2 S_0}{e E (e^2 E^2 - S_0^2)} (m + S_0 z)\right)^2 - \frac{e^2 E^2}{e^2 E^2 - S_0^2} (m + S_0 z)^2 - e^2 E^2 t^2 - p_\perp^2 \right] \tilde{\Phi}(t, z) = 0. \quad (5.54)$$

Afin de résoudre cette équation, nous faisons encore le changement

$$\tilde{\Phi}(t, z) = \exp \left[-i \frac{e^2 E^2 S_0}{e E (e^2 E^2 - S_0^2)} (m + S_0 z) t \right] \bar{\Phi}(t, z). \quad (5.55)$$

La nouvelle fonction $\bar{\Phi}(t, z)$ vérifie alors l'équation

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{(e^2 E^2)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)} t^2 + \frac{(e^2 E^2)^2 (m + S_0 z)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^2} + \frac{e^2 E^2 p_\perp^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)} \right] \bar{\Phi}(t, z) = 0. \quad (5.56)$$

Cette équation peut être mise sous la forme (5.15) en faisant le changement

$$\zeta = \sqrt{2i \frac{e^2 E^2}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}}} t. \quad (5.57)$$

Nous avons alors

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} - \frac{1}{4} \zeta^2 + \gamma' + \frac{1}{2} \right] \chi(t) = 0 \quad (5.58)$$

avec, cette fois-ci,

$$\gamma' = -\frac{i (e^2 E^2) (m + S_0 z)^2 + (e^2 E^2 - S_0^2) p_\perp^2}{2 (e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}. \quad (5.59)$$

Les solutions peuvent donc être classées comme suit

$$\chi_{out}^+(t) = D_{\gamma'} \left((1+i) \sqrt{\frac{e^2 E^2}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}}} t \right) \quad (5.60)$$

$$\chi_{out}^-(t) = D_{-\gamma'-1} \left((1-i) \sqrt{\frac{e^2 E^2}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}}} t \right) \quad (5.61)$$

$$\chi_{in}^+(t) = D_{-\gamma'-1} \left(-(1-i) \sqrt{\frac{e^2 E^2}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}}} t \right) \quad (5.62)$$

$$\chi_{in}^-(t) = D_{\gamma'} \left(-(1+i) \sqrt{\frac{e^2 E^2}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}}} t \right). \quad (5.63)$$

Grâce aux formules (5.25) et (5.26), nous sommes en mesure d'établir la transformation de Bogoliubov qui lie ces solutions. Nous obtenons alors

$$\chi_{in}^+(t) = \alpha \chi_{out}^+(t) + \beta \chi_{out}^-(t) \quad (5.64)$$

où les coefficients de Bogoliubov α et β sont donnés par

$$\alpha = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)} e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma'} \quad (5.65)$$

$$\beta = e^{i\pi(\gamma'+1)}. \quad (5.66)$$

La probabilité de créer une paire de particules dans l'état (p_x, p_y) à la position z est alors

$$P = \frac{\exp \left(-\pi \frac{e^2 E^2 (m+S_0 z)^2 + (e^2 E^2 - S_0^2) p_{\perp}^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{1 + \exp \left(-\pi \frac{e^2 E^2 (m+S_0 z)^2 + (e^2 E^2 - S_0^2) p_{\perp}^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}. \quad (5.67)$$

Le nombre moyen des particules créées dans l'état (p_x, p_y) à la position z est

$$n = \exp \left[-\pi \left(\frac{e^2 E^2 (m + S_0 z)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p_{\perp}^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]. \quad (5.68)$$

Ces résultats sont en accord avec ceux dérivés à partir de la jauge dépendante de la position. Par conséquent, même en présence d'un potentiel scalaire, le processus de création des paires préserve l'invariance de jauge.

5.6 La somme sur tous les états

5.6.1 Le lagrangien effectif

Dans cette section, nous proposons de calculer la partie imaginaire du lagrangien effectif en présence à la fois d'un champ électrique constant et d'un potentiel scalaire linéaire. Pour ce faire, nous écrivons d'abord la probabilité $\mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}}$ sous la forme

$$\mathcal{P}_{\omega, p_{\perp}} = \frac{\sigma}{1 + \sigma} \quad (5.69)$$

où

$$\sigma = \exp \left(-\pi \frac{(meE - \omega S_0)^2 + p_{\perp}^2 (e^2 E^2 - S_0^2)}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (5.70)$$

Dans ce cas la partie imaginaire de l'action effective est

$$2ImS_{eff} = \sum_{\omega, p_{\perp}} \ln(1 + \sigma). \quad (5.71)$$

En développant la quantité $\ln(1+\sigma)$ et en remplaçant la sommation sur $\sum_{\omega, p_{\perp}}$ par $\int dx dy dt \int \frac{dp_x dp_y d\omega}{(2\pi)^3}$, nous obtenons

$$\int d^4x 2ImL_{eff} = \int dx dy dt \int \frac{dp_x dp_y d\omega}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp \left\{ -n\pi \left(\frac{(meE - \omega S_0)^2 + p_{\perp}^2 (e^2 E^2 - S_0^2)}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right\} \quad (5.72)$$

Ici, $\int dx dy dt \int \frac{dp_x dp_y d\omega}{(2\pi)^3}$ est le nombre d'états dans l'espace des phases.

Maintenant, nous effectuons l'intégration sur p_x et p_y et nous remplaçons $d\omega$ par $eEdz$ pour obtenir l'expression finale du Lagrangien effectif de Schwinger

$$2ImL_{eff} = \frac{e^2 E^2}{(2\pi)^3} \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp \left[-n\pi \frac{m^2}{eE} \frac{\left(1 + \frac{S_0}{m} z\right)^2}{\left(1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (5.73)$$

Il est à noter que lorsque la limite $S_0 \rightarrow 0$, nous obtenons le résultat bien connu

$$2ImL_{eff} = \frac{e^2 E^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp \left(-n\pi \frac{m^2}{eE} \right). \quad (5.74)$$

5.6.2 Le nombre total de particules créées

Pour le nombre total des particules créées, nous avons

$$N = \int dN = \int dx dy dt \int \frac{dp_x dp_y d\omega}{(2\pi)^3} n_S(\omega, p_\perp). \quad (5.75)$$

En faisons la substitution $\omega \rightarrow -eEz$ et $d\omega \rightarrow eEdz$,

$$\frac{dN}{dx dy dz dt} = \frac{eE}{(2\pi)^3} \int dp_x dp_y n_S(-eEz, p_\perp). \quad (5.76)$$

Par intégration sur p_x et p_y nous obtenons le nombre de particules créées par unité de volume et de temps

$$\frac{dN}{dV dt} = \frac{e^2 E^2}{(2\pi)^3} \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}} \exp \left[-\pi \frac{m^2}{eE} \frac{(1 + \frac{S_0}{m} z)^2}{\left(1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (5.77)$$

La dernière équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dN}{dV dt} = \Gamma_S \frac{e^2 E^2}{(2\pi)^3} \exp \left(-\pi \frac{m^2}{eE} \right) \quad (5.78)$$

où le facteur d'amplification Γ_S est donné par

$$\Gamma_S = \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}} \exp \left[\pi \frac{m^2}{eE} \left(1 - \frac{(1 + \frac{S_0}{m} z)^2}{\left(1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right) \right]. \quad (5.79)$$

En introduisant les rapports $\rho = \frac{S_0}{eE}$, $r = \frac{m^2}{eE} = \frac{E_c}{E}$ et $\bar{\beta} = \frac{eEz}{m}$, nous pouvons écrire Γ_S sous la forme

$$\Gamma_S = \sqrt{1 - \rho^2} \exp \left[\pi r \left(1 - (1 + \bar{\beta} \rho)^2 (1 - \rho^2)^{-\frac{3}{2}} \right) \right]. \quad (5.80)$$

Les figures (5.4) et (5.5) représentent les variations de Γ_S en fonction de ρ pour $\bar{\beta} = 1$ (la figure (5.4)) et $\bar{\beta} = -1$ (la figure (5.5))

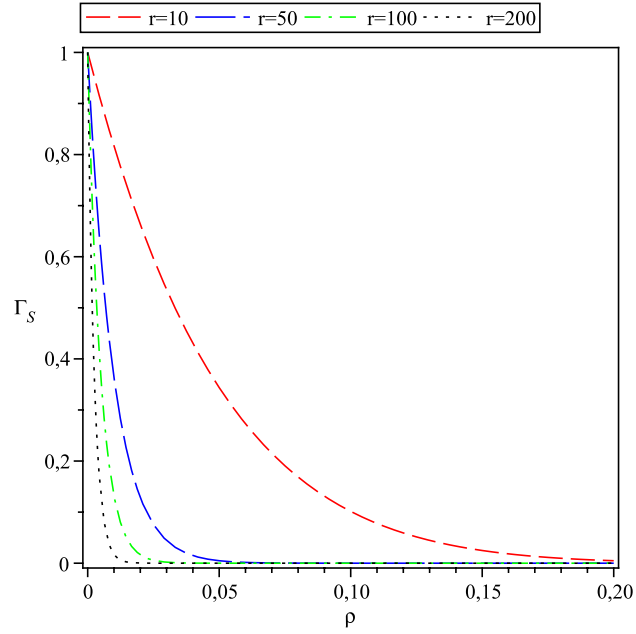


Figure 5.4 – Variations de Γ_S en fonction de la variable ρ , avec $\bar{\beta} = 1$.

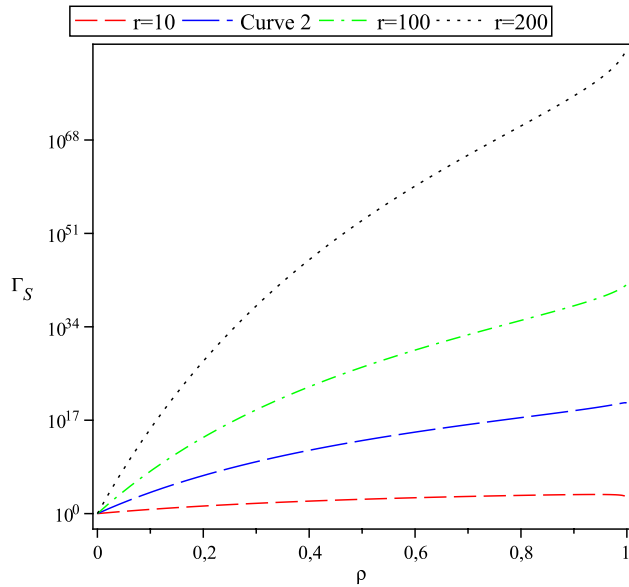


Figure 5.5 – Variations de Γ_S en fonction de la variable ρ , avec $\bar{\beta} = -1$.

Ces figures montrent que le facteur Γ_S dépend fortement du choix de divers paramètres. Pour confirmer ce constat, nous avons représenté les variations de Γ_S en fonction de r pour $\bar{\beta} = 1$ (la figure (5.6)), $\bar{\beta} = -1$ (la figure (5.7)) et $\bar{\beta} = -5$ (la figure (5.8)).

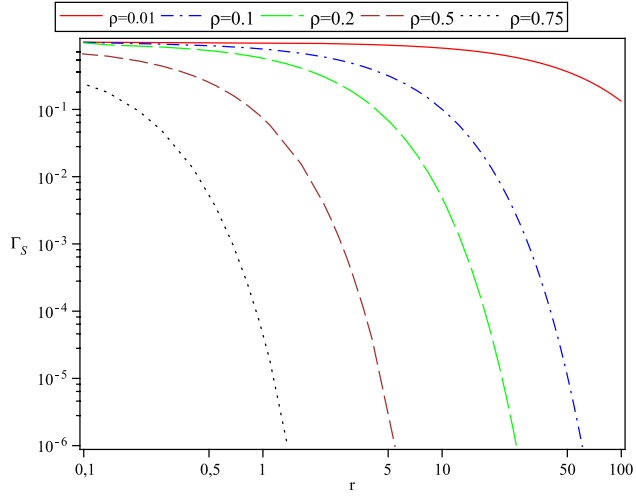


Figure 5.6 – Variations de Γ_S en fonction de la variable r , avec $\bar{\beta} = 1$.

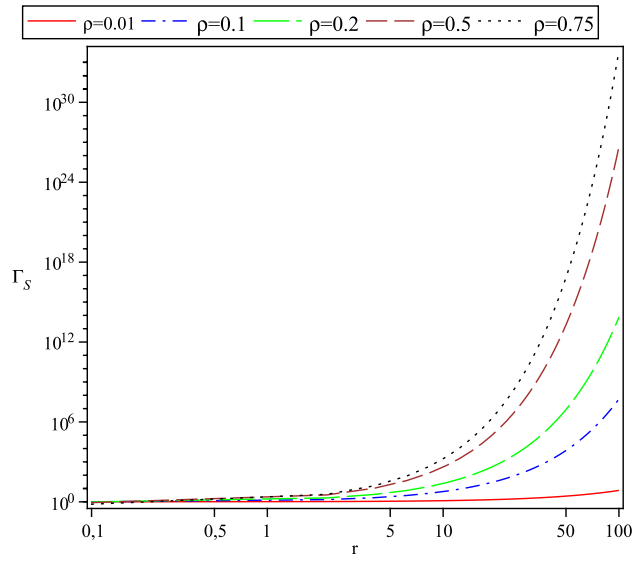


Figure 5.7 – Variations de Γ_S en fonction de la variable r , avec $\bar{\beta} = -1$.

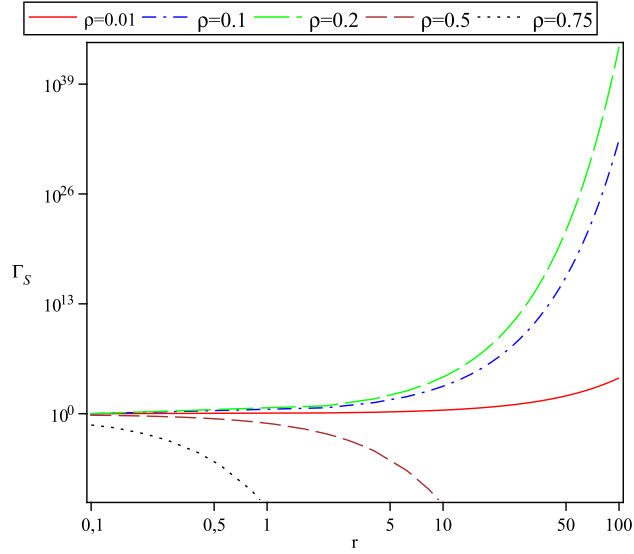


Figure 5.8 – Variations de Γ_S en fonction de la variable r , avec $\bar{\beta} = -5$.

Les figures (5.9), (5.10) et (5.11) représentent les variations de Γ_S en fonction de $\bar{\beta}$ pour $r = 50$ (la figure (5.9)), $r = 100$ (la figure (5.10)) et $r = 500$ (la figure (5.11)).

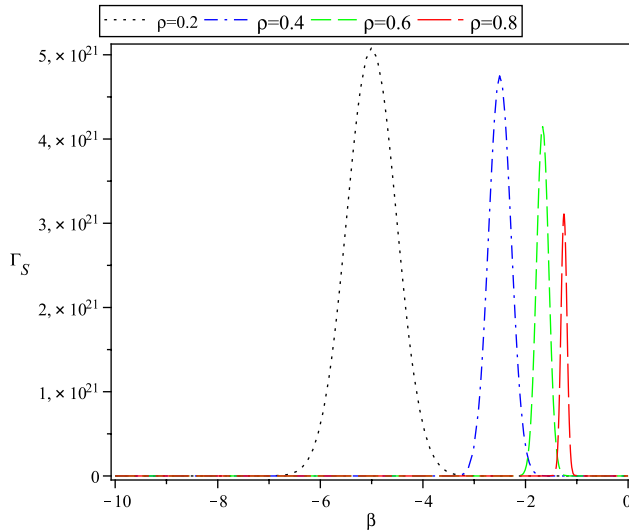


Figure 5.9 – Variations de Γ_S en fonction de la variable $\bar{\beta}$, pour $r = 50$.

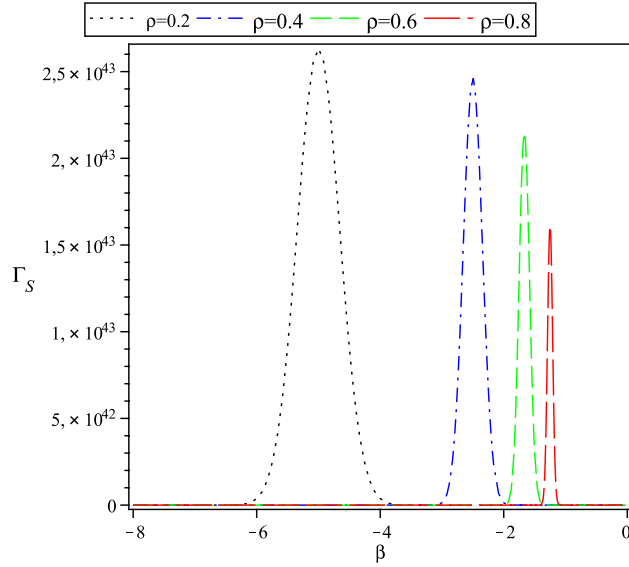


Figure 5.10 – Variations de Γ_S en fonction de la variable $\bar{\beta}$, pour $r = 100$.

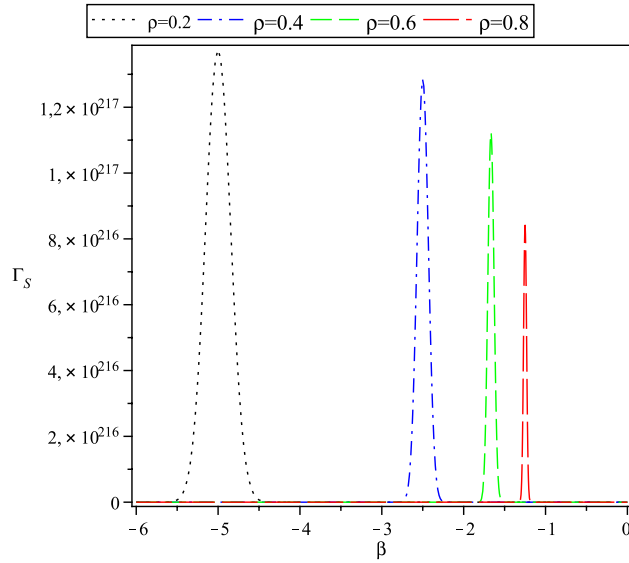


Figure 5.11 – Variations de Γ_S en fonction de la variable $\bar{\beta}$, pour $r = 500$.

Ces figures montrent que le potentiel scalaire peut maximiser davantage la création de particules.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'effet du potentiel scalaire sur la création des particules en considérant des potentiels linéaires. Dans cette étude, nous avons montré que le potentiel

scalaire peut conduire à une amplification importante du nombre des particules créées par unité de volume et par unité de temps.

En outre, nous avons montré la validité du calcul semi classique et l'invariance de jauge.

Chapitre 6

Création des particules de Dirac en présence d'un potentiel scalaire

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons considéré des particules scalaires soumises à l'action d'un champ électrique décrit par un potentiel vectoriel en plus d'un potentiel scalaire où nous avons vu que le potentiel scalaire peut considérablement amplifier la densité des particules créées. Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier des particules de spin $\frac{1}{2}$ qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac au lieu de la statistique de Bose-Einstein. Ainsi, nous commençons d'abord par résoudre l'équation de Dirac correspondante et obtenir des ensembles différents des solutions. Ensuite nous utilisons la transformation de Bogoliubov pour calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées. Nous considérons les potentiels linéaires et les potentiels du type Sauter. Pour le potentiel linéaire nous nous proposons de calculer le lagrangien effectif de Schwinger en faisant la somme sur tous les états possibles.

6.2 Equation de Dirac en présence d'un potentiel scalaire

Considérons une particule de Dirac de masse m et de charge e soumise à la superposition d'un potentiel vecteur $A_\mu = (V_v(z), 0, 0, 0)$ et d'un potentiel scalaire de Lorentz $V_s(z)$. La dynamique de cette particule est décrite par l'équation de Dirac suivante

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - (m + V_s(z))] \Psi = 0 \quad (6.1)$$

où γ^μ sont les matrices (4×4) de Dirac.

Pour résoudre cette équation nous écrivons, d'abord, le spineur Ψ sous la forme

$$\Psi = \exp(-i(\omega t - p_x x - p_y y)) \gamma^0 \gamma^3 \chi(z). \quad (6.2)$$

Le nouveau spineur $\chi(z)$ est alors solution à l'équation

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial z} + \gamma^3 (\omega - eV_v(z)) - (\gamma^1 \gamma^0 \gamma^3 p_x + \gamma^2 \gamma^0 \gamma^3 p_y) - (m + V_s(z)) \gamma^0 \gamma^3 \right] \chi(z) = 0 \quad (6.3)$$

qui peut se mettre sous la forme

$$D_1 \chi = D_2 \chi, \quad (6.4)$$

où les opérateurs D_1 et D_2 sont donnés par

$$D_1 = i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial z} + \gamma^3 (\omega - eV_v(z)) - (m + V_s(z)) \gamma^0 \gamma^3 \quad (6.5)$$

et

$$D_2 = \gamma^1 \gamma^0 \gamma^3 p_x + \gamma^2 \gamma^0 \gamma^3 p_y = i \begin{pmatrix} (\sigma_x p_y - \sigma_y p_x) & 0 \\ 0 & -(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x) \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Ici, σ_x et σ_y sont les matrices de Pauli.

Nous pouvons facilement montrer que $[D_1, D_2] = 0$ et ainsi nous pouvons construire une base propre commune aux opérateurs D_1 et D_2 . De plus nous pouvons voir que $D_2^2 = -(p_x^2 + p_y^2) = -p_\perp^2$, ce qui montre que l'opérateur D_2 a deux valeurs propres; $ivp_\perp = iv\sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ avec $v = \pm 1$. Compte tenu du fait que $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + \epsilon_{ijk} \sigma_k$, l'opérateur D_2 peut s'écrire sous forme matricielle comme suit

$$D_2 = i \begin{pmatrix} (\sigma_x p_y - \sigma_y p_x) & 0 \\ 0 & -(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x) \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Nous avons alors l'équation aux valeurs propres

$$D_2 \chi = ivp_\perp \chi \quad (6.8)$$

qui admet comme solutions les vecteurs

$$\chi(z) = \begin{pmatrix} f(z)\Upsilon_v \\ g(z)\sigma_z\Upsilon_v \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

où Υ_v sont les vecteurs propres de $(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x)$.

Le vecteur $\chi(z)$ est également un vecteur propre à l'opérateur D_1

$$D_1\chi(z) = ivp_\perp\chi(z). \quad (6.10)$$

Maintenant nous introduisons la transformation

$$\tilde{\chi} = U\chi, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^0(1 + \gamma^3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sigma_z \\ \sigma_z & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

avec

$$U^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma^0\gamma^3\gamma^0)\gamma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^0(1 + \gamma^3) = U, \quad (6.12)$$

pour écrire l'équation (6.10) sous la forme

$$\tilde{D}_1\tilde{\chi} = ivp_\perp\tilde{\chi} \quad (6.13)$$

où l'opérateur \tilde{D}_1 est donné par

$$\tilde{D}_1 = UD_1U^+ = i\gamma^0\gamma^3\frac{\partial}{\partial z} - \gamma^3(\omega - eV_v(z)) - \gamma^0(m + V_s(z)). \quad (6.14)$$

Pour des potentiels $V_v(z)$ et $V_s(z)$ arbitraires, l'équation (6.13) n'est, en principe, pas résoluble. C'est ainsi que nous considérons dans ce chapitre le cas où

$$V_s(z) = S_0F(z), \quad V_v(z) = eV_0F(z). \quad (6.15)$$

S_0 et V_0 sont des constantes et $F(z)$ est une fonction arbitraire. Dans ce cas, l'opérateur \tilde{D}_1 s'écrit

$$\tilde{D}_1 = i\gamma^0\gamma^3\frac{\partial}{\partial z} - \omega\gamma^3 - m\gamma^0 + \delta \left(\frac{eV_0}{\delta}\gamma^3 - \frac{S_0}{\delta}\gamma^0 \right) F(z) \quad (6.16)$$

où δ est donné par

$$\delta = \sqrt{e^2V_0^2 - S_0^2}. \quad (6.17)$$

Ici, nous définissons les matrices

$$\tilde{\gamma}^0 = (\cosh \eta) \gamma^0 - (\sinh \eta) \gamma^3 \quad (6.18)$$

$$\tilde{\gamma}^3 = -(\sinh \eta) \gamma^0 + (\cosh \eta) \gamma^3 \quad (6.19)$$

avec $\sinh \eta = \frac{S_0}{\delta}$ et $\cosh \eta = \frac{eV_0}{\delta}$, pour écrire \tilde{D}_1 sous la forme

$$\tilde{D}_1 = i\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^3\frac{\partial}{\partial z} - \tilde{\gamma}^3(\Omega - e\mathcal{V}_0F(z)) - \mathcal{M}\tilde{\gamma}^0, \quad (6.20)$$

où

$$\mathcal{M} = \omega \sinh \eta + m \cosh \eta = \frac{(\omega S_0 + eV_0 m)}{\delta} \quad (6.21)$$

$$\Omega = \omega \cosh \eta + m \sinh \eta = \frac{(\omega eV_0 + m S_0)}{\delta} \quad (6.22)$$

$$e\mathcal{V}_0 = \delta. \quad (6.23)$$

Nous introduisons encore la transformation

$$\tilde{\chi} = \tilde{U}\Phi, \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\eta}{2} & \sigma_z \sinh \frac{\eta}{2} \\ \sigma_z \sinh \frac{\eta}{2} & \cosh \frac{\eta}{2} \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Dans ce cas le nouveau spineur $\Phi(z)$ s'écrit sous la forme

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \Upsilon_v \\ \Phi_2 \sigma_z \Upsilon_v \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

et les fonctions Φ_1 et Φ_2 vérifient le système d'équations

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + i(\Omega - e\mathcal{V}_0F(z)) \right] \Phi_2 = -i[\mathcal{M} + ivp_\perp] \Phi_1 \quad (6.26)$$

et

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} - i(\Omega - e\mathcal{V}_0F(z)) \right] \Phi_1 = i[\mathcal{M} - ivp_\perp] \Phi_2. \quad (6.27)$$

Il est à noter que dans (6.5) le potentiel scalaire se couple à la masse de la particule, tandis que le potentiel vecteur se couple à la charge e . Dans le nouveau système (6.26) et (6.27),

nous pouvons voir qu'un potentiel effectif $\mathcal{V}_0 F(z)$ est couplé à la charge e . Par interaction nous obtenons deux équations différentielles du second ordre découplées

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \delta^2 F^2(z) - 2(\omega e V_0 + m S_0) F(z) + (\omega^2 - m^2 - p_\perp^2) + i \delta F'(z) \right] \Phi_1 = 0 \quad (6.28)$$

et

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \delta^2 F^2(z) - 2(\omega e V_0 + m S_0) F(z) + (\omega^2 - m^2 - p_\perp^2) - i \delta F'(z) \right] \Phi_2 = 0. \quad (6.29)$$

Cette équation admet des solutions analytiques pour différentes forme de la fonction $F(z)$: le potentiel linéaire $F(z) = z$, $F(z) = \exp(-\alpha z)$, le potentiel $F(z) = \frac{\alpha}{z}$, le potentiel de Sauter $F(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\frac{z}{2a})$...etc. Il est à noter ici que chacune des deux équations (6.28) et (6.29) admet deux solutions linéairement indépendantes (ces solutions sont le plus souvent les états d'énergie positive et d'énergie négative) et à chaque solution de la première équation correspond une seule solution de la deuxième équation. Nous devons donc résoudre une seule équation et utiliser ensuite (6.26) et (6.27) pour obtenir les solutions de la deuxième équation.

Nous finissons cette section par la remarque que la transformation \tilde{U} vérifie la propriété

$$\tilde{U}^{-1} = \gamma^0 \tilde{U} + \gamma^0, \quad (6.30)$$

et par conséquent, le produit scalaire (ψ, φ) défini par

$$(\psi, \varphi) = \int d\Sigma_3 \bar{\psi} \gamma^3 \varphi \quad (6.31)$$

est conservé sous cette transformation.

6.3 Potentiels linéaires

Le premier exemple à considérer est le cas des potentiels linéaires

$$V_v(z) = E_0 z \quad (6.32)$$

et

$$V_s(z) = S_0 z. \quad (6.33)$$

6.3.1 Solutions de l'équation de Dirac

Dans ce cas, l'équation (6.28) devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \delta^2 z^2 - 2(\omega e E_0 + m S_0)z + (\omega^2 - m^2 - p_\perp^2) + i\delta \right] \Phi_1 = 0. \quad (6.34)$$

Pour résoudre cette équation nous faisons le changement $z \rightarrow \xi$ avec

$$\xi = (1 + i) \sqrt{\delta} \left(z - \frac{(\omega e E_0 + m S_0)}{\delta^2} \right). \quad (6.35)$$

L'équation résultante prend alors la forme

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \xi^2 + \frac{1}{2} + \hat{\rho} \right] \Phi_1 = 0 \quad (6.36)$$

avec

$$\hat{\rho} = i \frac{(\omega S_0 + m e E_0)^2 + \delta^2 p_\perp^2}{2\delta^3}. \quad (6.37)$$

L'équation (6.36) est similaire à l'équation (5.15) rencontrée dans le cinquième chapitre. Les solutions sont alors les fonctions de Weber $D_{\hat{\rho}}(\xi)$, $D_{-\hat{\rho}-1}(i\xi)$, $D_{\hat{\rho}}(-\xi)$ et $D_{-\hat{\rho}-1}(-i\xi)$. Parmi ces solutions, les états "in" sont, suivant [80, 81],

$$\Phi_{1,in}^+ = D_{\hat{\rho}}(\xi) = D_{\hat{\rho}} \left((1 + i) \sqrt{\delta} \left(z - \frac{(\omega e E_0 + m S_0)}{\delta^2} \right) \right) \quad (6.38)$$

$$\Phi_{1,in}^- = D_{-\hat{\rho}-1}(i\xi) = D_{-\hat{\rho}-1} \left(-(1 - i) \sqrt{\delta} \left(z - \frac{(\omega e E_0 + m S_0)}{\delta^2} \right) \right). \quad (6.39)$$

Les deux autres solutions sont classées comme états "out" comme suit

$$\Phi_{1,out}^+ = D_{-\hat{\rho}-1}(-i\xi) = D_{-\hat{\rho}-1} \left((1 - i) \sqrt{\delta} \left(z - \frac{(\omega e E_0 + m S_0)}{\delta^2} \right) \right) \quad (6.40)$$

$$\Phi_{1,out}^- = D_{\hat{\rho}}(-\xi) = D_{\hat{\rho}} \left(-(1 + i) \sqrt{\delta} \left(z - \frac{(\omega e E_0 + m S_0)}{\delta^2} \right) \right). \quad (6.41)$$

Il nous reste maintenant à calculer la deuxième composante $\Phi_2(z)$ pour chaque état. Pour cela, nous utilisons les relations fonctionnelles [103]

$$\frac{d}{dx} D_p(x) + \frac{1}{2} x D_p(x) = p D_{p-1}(x) \quad (6.42)$$

et

$$\frac{d}{dx}D_p(x) - \frac{1}{2}xD_p(x) = -D_{p+1}(x). \quad (6.43)$$

Nous obtenons alors le résultat

$$\Phi_{2,out}^- = -\lambda\hat{\rho}D_{\hat{\rho}-1}(-\xi) \quad (6.44)$$

$$\Phi_{2,out}^+ = i\lambda D_{-\hat{\rho}}(-i\xi) \quad (6.45)$$

$$\Phi_{2,in}^- = -i\lambda D_{-\hat{\rho}}(i\xi) \quad (6.46)$$

$$\Phi_{2,in}^+ = \lambda\hat{\rho}D_{\hat{\rho}-1}(\xi), \quad (6.47)$$

avec

$$\lambda = (1-i)\sqrt{\delta}\frac{(S_0 + eE_0)}{(\omega S_0 + meE_0) - iv\delta p_\perp}. \quad (6.48)$$

Enfin, la forme explicite des spineurs de Dirac qui représentent les états "in" sont

$$\Psi_{in}^+ = N_2 \left[\begin{array}{c} \sqrt{\frac{eE_0+S_0}{eE_0-S_0}} \left(D_{\hat{\rho}}(\xi) + \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \frac{(\omega S_0+meE_0)+iv\delta p_\perp}{\sqrt{2\delta^3}} D_{\hat{\rho}-1}(\xi) \right) \Upsilon_\nu \\ \left(D_{\hat{\rho}}(\xi) - \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \frac{(\omega S_0+meE_0)+iv\delta p_\perp}{\sqrt{2\delta^3}} D_{\hat{\rho}-1}(\xi) \right) \sigma_z \Upsilon_\nu \end{array} \right] \quad (6.49)$$

et

$$\Psi_{in}^- = N_2^* \left[\begin{array}{c} \sqrt{\frac{eE_0+S_0}{eE_0-S_0}} \left(-D_{-\hat{\rho}}(i\xi) + \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \frac{(\omega S_0+meE_0)-iv\delta p_\perp}{\sqrt{2\delta^3}} D_{-\hat{\rho}-1}(i\xi) \right) \Upsilon_\nu \\ \left(D_{-\hat{\rho}}(i\xi) + \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \frac{(\omega S_0+meE_0)-iv\delta p_\perp}{\sqrt{2\delta^3}} D_{-\hat{\rho}-1}(i\xi) \right) \sigma_z \Upsilon_\nu \end{array} \right]. \quad (6.50)$$

Les spineurs qui représentent les états "out" sont donnés par

$$\Psi_{out}^+ = N_1 \left[\begin{array}{c} \sqrt{\frac{eE_0+S_0}{eE_0-S_0}} \left(-D_{-\hat{\rho}}(-i\xi) - \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \frac{(\omega S_0+meE_0)-iv\delta p_\perp}{\sqrt{2\delta^3}} D_{-\hat{\rho}-1}(-i\xi) \right) \Upsilon_\nu \\ \left(D_{-\hat{\rho}}(-i\xi) - \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \frac{(\omega S_0+meE_0)-iv\delta p_\perp}{\sqrt{2\delta^3}} D_{-\hat{\rho}-1}(-i\xi) \right) \sigma_z \Upsilon_\nu \end{array} \right] \quad (6.51)$$

et

$$\Psi_{out}^- = N_1^* \left[\begin{array}{c} \sqrt{\frac{eE_0+S_0}{eE_0-S_0}} \left(D_{\hat{\rho}}(-\xi) - \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \frac{(\omega S_0+meE_0)+iv\delta p_\perp}{\sqrt{2\delta^3}} D_{\hat{\rho}-1}(-\xi) \right) \Upsilon_\nu \\ \left(D_{\hat{\rho}}(-\xi) + \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \frac{(\omega S_0+meE_0)+iv\delta p_\perp}{\sqrt{2\delta^3}} D_{\hat{\rho}-1}(-\xi) \right) \sigma_z \Upsilon_\nu \end{array} \right]. \quad (6.52)$$

Les constantes N_1 et N_2 sont des constantes de normalisation qui se déterminent à partir du produit scalaire (6.31).

6.3.2 Transformation de Bogoliubov et création des particules

Maintenant pour calculer la probabilité de création d'une paire de particules et le nombre moyen des particules créées nous devons établir la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" avec les états "out". En utilisant les relations (5.25) et (5.26), nous pouvons exprimer les spineurs Ψ_{in}^+ et Ψ_{in}^- en fonction des spineurs Ψ_{out}^+ et Ψ_{out}^-

$$\Psi_{in}^+ = \alpha \Psi_{out}^+ + \beta \Psi_{out}^- \quad (6.53)$$

$$\Psi_{in}^- = \beta^* \Psi_{out}^+ + \alpha^* \Psi_{out}^-, \quad (6.54)$$

avec les coefficients de Bogoliubov

$$\alpha = \frac{N_1}{N_2} \frac{2\sqrt{\pi}\delta^3}{\omega S_0 + meE_0 - iv\delta p_\perp} \frac{1}{\Gamma(-\hat{\rho})} \exp\left\{\frac{i}{2}\pi\left(\hat{\rho} + \frac{3}{2}\right)\right\} \quad (6.55)$$

$$\beta = \frac{N_1}{N_2^*} \exp\{i\pi\hat{\rho}\} \quad (6.56)$$

qui remplissent la condition $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, pour le cas des fermions. Comme dans le cas des particules de spin 0, la transformation de Bogoliubov entre les états "in" et "out" peut être convertie en une relation entre les opérateurs "in" et "out"

$$a_{out} = \alpha a_{in} + \beta^* b_{in}^+ \quad (6.57)$$

$$b_{out}^+ = \beta a_{in} + \alpha^* b_{in}^+. \quad (6.58)$$

Le nombre moyen des particules créées est donc

$$n(\omega, p_\perp, v) = |\beta|^2 = \exp\left[-\pi \frac{(\omega S_0 + meE_0)^2 + \delta^2 p_\perp^2}{\delta^3}\right]. \quad (6.59)$$

Pour la probabilité de créer une paire dans l'état (ω, p_{\perp}, v) nous obtenons

$$\mathcal{P}_{(\omega, p_{\perp}, v)} = \left| \frac{\beta^*}{\alpha^*} \right|^2 = \frac{1}{\exp \left[\pi \frac{(\omega S_0 + meV_0)^2 + \delta^2 p_{\perp}^2}{\delta^3} \right] - 1}. \quad (6.60)$$

Notons ici le signe $(-)$ dans le dénominateur qui met en évidence la statistique de Fermi Dirac. Mais à part ce signe $(-)$, les expressions (6.59) et (6.60) montre une ressemblance aux résultats correspondant au cas du spin 0, notamment dans l'exposant de la fonction exponentielle. Nous remarquons également, que $n(\omega, p_{\perp}, v)$ et $\mathcal{P}_{(\omega, p_{\perp}, v)}$ ne dépendent pas de l'état du spin v comme dans le cas d'un champ électrique seul. La différence par rapport au champ électrique seul est que $n(\omega, p_{\perp}, v)$ et $\mathcal{P}_{(\omega, p_{\perp}, v)}$ dépendent de ω , une conséquence du fait que la largeur de la région interdite à travers laquelle les états d'énergie négative sont transmis, dépend de l'énergie ω .

6.3.3 La somme sur tous les états

Maintenant, nous utilisons les résultats obtenus pour calculer la partie imaginaire de l'action effective de Schwinger. Pour cela, nous écrivons $\mathcal{P}_{(\omega, p_{\perp}, v)}$ sous la forme

$$\mathcal{P}_{(\omega, p_{\perp}, v)} = \frac{\sigma}{1 - \sigma}, \quad (6.61)$$

avec

$$\sigma = \exp \left\{ -\pi \frac{(\omega S_0 + meE_0)^2 + \delta^2 p_{\perp}^2}{\delta^3} \right\}. \quad (6.62)$$

Soit $\mathcal{C}_{(\omega, p_{\perp}, v)}$ la probabilité pour qu'il n'y ait aucune paire dans l'état (ω, p_{\perp}, v) . Alors, le produit $\mathcal{C}_{(\omega, p_{\perp}, v)} \mathcal{P}_{(\omega, p_{\perp}, v)}$ est la probabilité d'avoir une seule paire dans l'état (ω, p_{\perp}, v) . Suivant le principe de Pauli, nous avons

$$\mathcal{C}_{(\omega, p_{\perp}, v)} + \mathcal{C}_{(\omega, p_{\perp}, v)} \mathcal{P}_{(\omega, p_{\perp}, v)} = 1, \quad (6.63)$$

ce qui implique que

$$\mathcal{C}_{(\omega, p_{\perp}, v)} = \frac{1}{1 + \mathcal{P}_{(\omega, p_{\perp}, v)}} = 1 - \sigma. \quad (6.64)$$

L'action effective de Schwinger est dans ce cas

$$2ImS_{eff} = - \sum_{v=\pm 1} \int \frac{dx dy dt dp_x dp_y d\omega}{(2\pi)^3} \ln(1 - \sigma). \quad (6.65)$$

En faisant un développement de Taylor de la fonction $\ln(1 - \sigma)$, nous obtenons

$$2ImS_{eff} = \int dx dy dt \int \frac{dp_x dp_y d\omega}{(2\pi)^3} \sum_{\nu} \sum_{n=1} \frac{1}{n} \exp \left\{ -n\pi \frac{(\omega S_0 + meE_0)^2 + (e^2 E_0^2 - S_0^2) p_{\perp}^2}{\delta^3} \right\}. \quad (6.66)$$

Comme l'intégrant dans le côté droit de l'équation (6.66) ne dépend pas de v , la somme sur v peut simplement être remplacée par le facteur 2. De plus, l'intégrale $\int d\omega$ peut être compensée par l'intégrale $\int eE_0 dz$. Ainsi, après intégration sur p_x et p_y nous obtenons

$$2ImS_{eff} = \int d^4x \frac{2eE_0}{(2\pi)^3} \sqrt{e^2 E_0^2 - S_0^2} \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} \exp \left\{ -n\pi \frac{(m + S_0 z)^2}{eE_0} \left(\frac{eE_0}{\delta} \right)^3 \right\}. \quad (6.67)$$

et, par conséquent,

$$\mathcal{P}_{creat.} = 2Im\mathcal{L}_{eff} = \frac{e^2 E_0^2}{4\pi^3} \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{e^2 E_0^2}} \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} \exp \left\{ -n\pi \frac{(m + S_0 z)^2}{eE_0} \left(\frac{eE_0}{\delta} \right)^3 \right\}. \quad (6.68)$$

La dernière équation comparée à celle obtenue pour les particules de spin 0, nous remarquons le facteur 2 qui dénombre les deux états possibles du spin et le coefficient $\frac{1}{n^2}$ au lieu de $\frac{(-1)^n}{n^2}$, une autre manifestation de la statistique de Fermi-Dirac.

Considérons maintenant le nombre total des particules créées défini par

$$\mathcal{N}_{tot} = \sum_{v=\pm 1} \int \frac{dx dy dt dp_x dp_y d\omega}{(2\pi)^3} n(\omega, p_{\perp}, v). \quad (6.69)$$

Comme dans le cas des particules de spin 0, nous écrivons \mathcal{N}_{tot} sous la forme

$$\mathcal{N}_{tot} = \int \frac{d\mathcal{N}}{d^4x} d^4x, \quad (6.70)$$

où $\frac{d\mathcal{N}}{d^4x}$ est le nombre des particules créées par unité de volume et par unité de temps. En effectuant l'intégration sur p_x et p_y et la somme sur v et en remplaçant $d\omega$ par $eE_0 dz$ nous

obtenons

$$\mathcal{N}_{tot} = \int dt dx dy dz \frac{e^2 E_0^2}{4\pi^3} \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{e^2 E_0^2}} \exp \left[-\pi \frac{m^2}{e E_0} \frac{\left(1 + \frac{S_0}{m} z\right)^2}{\left(1 - \frac{S_0^2}{e^2 E_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (6.71)$$

ce qui nous donne

$$\frac{d\mathcal{N}}{d^4x} = \frac{e^2 E_0^2}{4\pi^3} \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{e^2 E_0^2}} \exp \left[-\pi \frac{m^2}{e E_0} \frac{\left(1 + \frac{S_0}{m} z\right)^2}{\left(1 - \frac{S_0^2}{e^2 E_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (6.72)$$

Notons que dans la limite $S_0 \rightarrow 0$, nous retrouvons la probabilité et le nombre des particules associés au champ électrique seul,

$$\mathcal{P}_{creat.}|_{S_0=0} = \frac{e^2 E_0^2}{4\pi^3} \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} \exp \left[-n\pi \frac{m^2}{e E_0} \right] \quad (6.73)$$

et

$$\left. \frac{d\mathcal{N}}{d^4x} \right|_{S_0=0} = \frac{e^2 E_0^2}{4\pi^3} \exp \left[-\pi \frac{m^2}{e E_0} \right]. \quad (6.74)$$

De plus, le nombre des particule créées par unité de temps et de volume peut être écrit sous la forme

$$\frac{d\mathcal{N}}{d^4x} = \Gamma_S \frac{e^2 E_0^2}{4\pi^3} \exp \left[-\pi \frac{m^2}{e E_0} \right], \quad (6.75)$$

où le facteur γ_S est donné par

$$\Gamma_S = \sqrt{1 - \rho^2} \exp \left\{ \pi \frac{m^2}{e E_0} \left[1 - \frac{\left(1 + \rho \frac{e E_0 z}{m}\right)^2}{(1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \right\} \quad (6.76)$$

avec

$$\rho = \frac{S_0}{e E_0}. \quad (6.77)$$

Notons que le facteur Γ_S obtenu ici pour les particules de spin $\frac{1}{2}$ est le même que celui obtenu dans le cas de bosons. Il produit ainsi les effets discutés au chapitre 5.

6.4 Potentiels de type Sauter

Un autre type de potentiels pour lequel l'équation de Dirac est exactement soluble est le potentiel de Sauter

$$V_v = \frac{V_0}{2} \left(1 + \tanh \frac{z}{2a}\right) \quad (6.78)$$

et

$$V_s = \frac{S_0}{2} \left(1 + \tanh \frac{z}{2a}\right). \quad (6.79)$$

Dans ce cas l'équation (6.28) devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + i \frac{\delta}{4a} \left(1 - \tanh^2 \frac{z}{2a}\right) + \frac{\delta^2}{4} \left(1 + \tanh \frac{z}{2a}\right)^2 - (\omega e V_0 + m S_0) \left(1 + \tanh \frac{z}{2a}\right) + (\omega^2 - m^2 - p_\perp^2) \right] \Phi_1 = 0. \quad (6.80)$$

En faisant le changement $z \rightarrow \xi$, avec

$$\xi = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{z}{2a}\right) \quad (6.81)$$

nous obtenons l'équation

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{1-\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi(1-\xi)} \left(\frac{a^2 p_L^2}{(1-\xi)} - a^2 \delta^2 + ia\delta + \frac{iap_R}{\xi} \right) \right] \Phi_1 = 0 \quad (6.82)$$

qui se ressemble à l'équation de Riemann [103]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{1-\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi(1-\xi)} \left(\frac{c_1 c'_1}{\xi} - c_3 c'_3 + \frac{c_2 c'_2}{(1-\xi)} \right) \right] \Phi_1 = 0, \quad (6.83)$$

où les constantes c_i et c'_i sont donnés par

$$c_1 = -c'_1 = ia\sqrt{\omega^2 - m^2 - p_\perp^2} = iap_L \quad (6.84)$$

$$c_2 = -c'_2 = ia\sqrt{(\omega - eV_0)^2 - (S_0 + m)^2 - p_\perp^2} = iap_R \quad (6.85)$$

$$c_3 = 1 - c'_3 = ia\delta + 1, \quad (6.86)$$

avec la condition $c_1 + c'_1 + c_2 + c'_2 + c_3 + c'_3 = 1$.

6.4.1 Les états "in" et "out"

Suivant [103], nous pouvons trouver pour l'équation (6.84) plusieurs ensembles de solutions qui peuvent être écrites en termes de fonctions hypergéométriques $F(a_1, a_2, a_3; x)$. En tenant compte du comportement des états énergétiques positifs et négatifs à $z \rightarrow \pm\infty$, nous pouvons classer nos deux ensembles comme suit ; pour les états "in" nous avons

$$\Phi_{1,in}^- = (1 - \xi)^{-iap_L} \xi^{iap_R} F(iap_- + ia\delta + 1, iap_- - ia\delta, 1 - 2iap_L; 1 - \xi) \quad (6.87)$$

$$\Phi_{1,in}^+ = (1 - \xi)^{iap_L} \xi^{iap_R} F(iap_+ + ia\delta + 1, iap_+ - ia\delta, 1 + 2iap_R; \xi). \quad (6.88)$$

Les états "out" sont donnés par

$$\Phi_{1,out}^- = (1 - \xi)^{iap_L} \xi^{iap_R} F(iap_+ + ia\delta + 1, iap_+ - ia\delta, 1 + 2iap_L; 1 - \xi) \quad (6.89)$$

$$\Phi_{1,out}^+ = (1 - \xi)^{iap_L} \xi^{-iap_R} F(-iap_- + ia\delta + 1, -iap_- - ia\delta, 1 - 2iap_R; \xi). \quad (6.90)$$

Pour les composantes Φ_2 , nous utilisons les deux propriétés suivantes [103]

$$\left(x(1-x) \frac{\partial}{\partial x} + (c - bx - 1) \right) F(a, b, c, x) = (c - 1) F(a - 1, b, c - 1, x) \quad (6.91)$$

et

$$\begin{aligned} & |(a - b) c F(a, b, c, x) + (b - c) a F(a + 1, b, c + 1, x) =| \\ & (a - c) b F(a, b + 1, c + 1, x) \end{aligned} \quad (6.92)$$

pour obtenir les deux relations fonctionnelles

$$\left(x(1-x) \frac{\partial}{\partial x} - bx + \frac{b(a-c)}{a-b-1} \right) F(a, b, c, x) = \frac{b(a-c)}{a-b-1} F(a-1, b+1, c, x) \quad (6.93)$$

et

$$\left(x(1-x) \frac{\partial}{\partial x} - ax + \frac{a(b-c)}{b-a-1} \right) F(a, b, c, x) = \frac{a(b-c)}{b-a-1} F(a+1, b-1, c, x). \quad (6.94)$$

Les deux dernières équations nous permettent de déterminer pour chaque composante $\Phi_{1,out(in)}^\epsilon$ la composante $\Phi_{2,out(in)}^\epsilon$ à partir de l'équation (6.27). Nous avons alors

$$\begin{aligned} \Phi_{2,out}^- &= -\sqrt{\frac{eV_0 + S_0}{eV_0 - S_0}} \frac{[p_L \delta - (mS_0 + \omega eV_0)]}{(\omega S_0 + eV_0 m - i\nu \delta p_\perp)} (1 - \xi)^{iap_L} \xi^{iap_R} \\ &F(iap_+ + ia\delta, iap_+ - ia\delta + 1, 1 + 2iap_L; 1 - \xi) , \end{aligned} \quad (6.95)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2,out}^+ &= \sqrt{\frac{eV_0 + S_0}{eV_0 - S_0}} \frac{[p_R \delta - (\omega eV_0 + mS_0) + \delta^2]}{(\omega S_0 + eV_0 m - i\nu \delta p_\perp)} (1 - \xi)^{iap_L} \xi^{-iap_R} \\ &F(-iap_- + ia\delta, -iap_- - ia\delta + 1, 1 - 2iap_R; \xi) , \end{aligned} \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2,in}^- &= -\sqrt{\frac{eV_0 + S_0}{eV_0 - S_0}} \frac{[p_L \delta + (\omega eV_0 + mS_0)]}{(\omega S_0 + eV_0 m - i\nu \delta p_\perp)} (1 - \xi)^{-iap_L} \xi^{iap_R} \\ &F(iap_- + ia\delta, iap_- - ia\delta + 1, 1 - 2iap_L; 1 - \xi) , \end{aligned} \quad (6.97)$$

et

$$\begin{aligned} \Phi_{2,in}^+ &= -\sqrt{\frac{eV_0 + S_0}{eV_0 - S_0}} \frac{[p_R \delta + (\omega eV_0 + mS_0) - \delta^2]}{(\omega S_0 + eV_0 m - i\nu \delta p_\perp)} (1 - \xi)^{iap_L} \xi^{iap_R} \\ &F(iap_+ + ia\delta, iap_+ - ia\delta + 1, 1 + 2iap_R; \xi) . \end{aligned} \quad (6.98)$$

Enfin, les spineurs de Dirac normalisés sont les suivants :

1. Le spineur $\Psi_{out}^-(z)$ est

$$\begin{aligned} \Psi_{out}^- &= \frac{1}{\sqrt{p_L}} (1 - \xi)^{iap_L} \xi^{iap_R} \\ &\begin{bmatrix} \kappa \left[\sqrt{\frac{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu \delta p_\perp}{p_L \delta - (\omega eV_0 + mS_0)}} F_1 + \sqrt{\frac{p_L \delta - (\omega eV_0 + mS_0)}{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu \delta p_\perp}} F_2 \right] \Upsilon_v \\ \left[\sqrt{\frac{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu \delta p_\perp}{p_L \delta - (\omega eV_0 + mS_0)}} F_1 - \sqrt{\frac{p_L \delta - (\omega eV_0 + mS_0)}{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu \delta p_\perp}} F_2 \right] \sigma_z \Upsilon_v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.99)$$

avec

$$F_1 = F(iap_+ + ia\delta + 1, iap_+ - ia\delta, 1 + 2iap_L; 1 - \xi) \quad (6.100)$$

$$F_2 = F(iap_+ + ia\delta, iap_+ - ia\delta + 1, 1 + 2iap_L; 1 - \xi) \quad (6.101)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{eV_0 + S_0}{eV_0 - S_0}}. \quad (6.102)$$

2. Le spineur $\Psi_{out}^+(z)$ est

$$\Psi_{out}^+ = \frac{1}{\sqrt{p_R}} (1 - \xi)^{iap_L} \xi^{-iap_R} \begin{bmatrix} \kappa \left[\sqrt{\frac{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu\delta p_\perp}{p_R \delta - (\omega eV_0 + mS_0) + \delta^2}} F_3 + \sqrt{\frac{p_R \delta - (\omega eV_0 + mS_0) + \delta^2}{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu\delta p_\perp}} F_4 \right] \Upsilon_\nu \\ \left[\sqrt{\frac{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu\delta p_\perp}{p_R \delta - (\omega eV_0 + mS_0) + \delta^2}} F_3 - \sqrt{\frac{p_R \delta - (\omega eV_0 + mS_0) + \delta^2}{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu\delta p_\perp}} F_4 \right] \sigma_z \Upsilon_\nu \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

avec

$$F_3 = F(-iap_- + ia\delta + 1, -iap_- - ia\delta, 1 - 2iap_R; \xi) \quad (6.104)$$

$$F_4 = F(-iap_- + ia\delta, -iap_- - ia\delta + 1, 1 - 2iap_R; \xi). \quad (6.105)$$

3. Le spineur $\Psi_{in}^-(z)$ est

$$\Psi_{in}^- = \frac{1}{\sqrt{p_L}} (1 - \xi)^{-iap_L} \xi^{iap_R} \begin{bmatrix} \kappa \left(\sqrt{\frac{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu\delta p_\perp}{p_L \delta + \omega eV_0 + mS_0}} F_5 - \sqrt{\frac{p_L \delta + \omega eV_0 + mS_0}{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu\delta p_\perp}} F_6 \right) \Upsilon_\nu \\ \left(\sqrt{\frac{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu\delta p_\perp}{p_L \delta + (\omega eV_0 + mS_0)}} F_5 + \sqrt{\frac{p_L \delta + \omega eV_0 + mS_0}{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu\delta p_\perp}} F_6 \right) \sigma_z \Upsilon_\nu \end{bmatrix} \quad (6.106)$$

avec

$$F_5 = F(iap_- + ia\delta + 1, iap_- - ia\delta, 1 - 2iap_L; 1 - \xi) \quad (6.107)$$

$$F_6 = F(iap_- + ia\delta, iap_- - ia\delta + 1, 1 - 2iap_L; 1 - \xi). \quad (6.108)$$

4. Le spineur $\Psi_{in}^+(z)$ est

$$\Psi_{in}^+ = \frac{1}{\sqrt{p_R}} (1 - \xi)^{iap_L} \xi^{iap_R} \left[\begin{array}{l} \kappa \left(\sqrt{\frac{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu \delta p_\perp}{p_R \delta + (\omega eV_0 + mS_0) - \delta^2}} F_7 - \sqrt{\frac{p_R \delta + (\omega eV_0 + mS_0) - \delta^2}{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu \delta p_\perp}} F_8 \right) \Upsilon_\nu \\ \left(\sqrt{\frac{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu \delta p_\perp}{p_R \delta + (\omega eV_0 + mS_0) - \delta^2}} F_7 + \sqrt{\frac{p_R \delta + (\omega eV_0 + mS_0) - \delta^2}{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu \delta p_\perp}} F_8 \right) \sigma_z \Upsilon_\nu \end{array} \right] \quad (6.109)$$

avec

$$F_7 = F(iap_+ + ia\delta + 1, iap_+ - ia\delta, 1 + 2iap_R; \xi) \quad (6.110)$$

$$F_8 = F(iap_+ + ia\delta, iap_+ - ia\delta + 1, 1 + 2iap_R; \xi). \quad (6.111)$$

6.4.2 Création de particules

Pour calculer la probabilité de création d'une paire et le nombre moyen des particules créées, nous devons établir la transformation de Bogoliubov qui lie les solutions "in" avec les solutions "out". Pour cela nous utilisons les relations entre les fonctions hypergéométriques (4.43) et (4.45). Nous avons alors la transformation de Bogoliubov

$$\Psi_{in}^+ = \alpha \Psi_{out}^+ + \beta \Psi_{out}^- \quad (6.112)$$

$$\Psi_{in}^- = \beta^* \Psi_{out}^+ + \alpha^* \Psi_{out}^-, \quad (6.113)$$

où les coefficients de Bogoliubov sont donnés par

$$\alpha = -\sqrt{\frac{p_- \delta + (mS_0 + \omega eV_0)}{p_- \delta - (mS_0 + \omega eV_0)}} \frac{\Gamma(2iap_L)}{\Gamma(-2iap_L)} \frac{\Gamma(iap_- - ia\delta) \Gamma(iap_- + 1 + ia\delta)}{\Gamma(iap_+ + ia\delta + 1) \Gamma(iap_+ - ia\delta)} \quad (6.114)$$

et

$$\beta = \sqrt{\frac{p_R}{p_L}} \sqrt{\frac{p_R \delta + (\omega eV_0 + mS_0) - \delta^2}{p_- \delta - (mS_0 + \omega eV_0)}} \frac{\Gamma(iap_- - ia\delta) \Gamma(iap_- + 1 + ia\delta)}{\Gamma(1 + 2iap_R) \Gamma(-2iap_L)} \quad (6.115)$$

avec la condition $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

La probabilité de créer une paire de particules à partir du vide dans l'état (ω, p_\perp, ν) est alors

$$\mathcal{P}_{(\omega, p_\perp, \nu)} = \frac{p_R \delta + (\omega e V_0 + m S_0) - \delta^2}{p_- \delta + m S_0 + \omega e V_0} \frac{p_L + p_R + \delta}{p_L + p_R - \delta} \frac{2 \sinh(2\pi a p_L) \sinh(2\pi a p_R)}{\cosh(2\pi a p_+) - \cosh(2\pi a \delta)}. \quad (6.116)$$

Compte tenu du fait que

$$\frac{p_L + p_R + \delta}{p_L + p_R - \delta} = \frac{p_- \delta + m S_0 + \omega e V_0}{p_R \delta + (\omega e V_0 + m S_0) - \delta^2}, \quad (6.117)$$

la probabilité $\mathcal{P}_{(\omega, p_\perp, \nu)}$ se réduit à

$$\mathcal{P}_{(\omega, p_\perp, \nu)} = \frac{2 \sinh(2\pi a p_L) \sinh(2\pi a p_R)}{\cosh(2\pi a p_+) - \cosh(2\pi a \delta)}. \quad (6.118)$$

Pour le nombre moyen des particules créées, nous avons

$$\begin{aligned} n(\omega, p_\perp, \nu) &= \left(\frac{p_R}{p_L} \right) \frac{p_R \delta + (\omega e V_0 + m S_0) - \delta^2}{p_- \delta - (m S_0 + \omega e V_0)} \left| \frac{\Gamma(i a p_- - i a \delta) \Gamma(i a p_- + 1 + i a \delta)}{\Gamma(1 + 2 i a p_R) \Gamma(-2 i a p_L)} \right|^2 \\ &= \frac{2 \sinh(2\pi a p_L) \sinh(2\pi a p_R)}{\cosh(2\pi a p_-) - \cosh(2\pi a \delta)} \end{aligned} \quad (6.119)$$

Pareillement, la probabilité $\mathcal{C}_{(\omega, p_\perp, \nu)}$ pour qu'il n'y ait aucune paire dans l'état (ω, p_\perp, ν) se calcule à partir des coefficients de Bogoliubov. Le résultat est

$$\mathcal{C}_{(\omega, p_\perp, \nu)} = |\alpha_N|^2 = \frac{\cosh(2\pi a p_+) - \cosh(2\pi a \delta)}{\cosh(2\pi a p_-) - \cosh(2\pi a \delta)}. \quad (6.120)$$

6.4.3 La limite $a \rightarrow 0$

Comme mentionné précédemment, à la limite $a \rightarrow 0$, le potentiel de Sauter devient le potentiel de pas de Heaviside étudié dans le troisième chapitre. Comme $\sinh(2\pi a p) \simeq 2\pi a p$ et $\cosh(2\pi a p) \simeq 1 + \frac{1}{2}(2\pi a p)^2$, nous obtenons la probabilité

$$\mathcal{P}_{(\omega, p_\perp, \nu)} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{2(2\pi a p_L)(2\pi a p_R)}{1 + \frac{1}{2}(2\pi a p_+)^2 - 1 - \frac{1}{2}(2\pi a \delta)^2} = \frac{4 p_L p_R}{(p_L + p_R)^2 - \delta^2}. \quad (6.121)$$

Le nombre moyen des particules créées se réduit à

$$n(\omega, p_{\perp}, v) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{4p_L p_R}{(p_R - p_L)^2 - \delta^2}. \quad (6.122)$$

La probabilité pour qu'aucune paire ne se crée dans l'état (ω, p_{\perp}, v) est, dans ce cas,

$$\mathcal{C}_{(\omega, p_{\perp}, v)} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{(p_L + p_R)^2 - \delta^2}{(p_R - p_L)^2 - \delta^2}. \quad (6.123)$$

Compte tenu du fait que le paramètre γ_s défini dans le troisième chapitre peut s'écrire sous la forme

$$\gamma_s = \frac{p_L p_R}{(\omega - m)(\omega - V_0 + m + S_0)} \quad (6.124)$$

et

$$(1 \pm \gamma_s)^2 = \frac{(p_L \pm p_R)^2 - \delta^2}{(\omega - m)(\omega - V_0 + m + S_0)}, \quad (6.125)$$

nous pouvons voir que les résultats obtenus dans ce cas particulier sont identiques à ceux du troisième chapitre.

6.4.4 La limite $a \rightarrow \infty$

Maintenant pour étudier la limite $a \rightarrow \infty$, nous faisons d'abord les changements

$$V_v(z) \rightarrow V_v(z) - V_0/2 = 2aE_0 \tanh \frac{z}{2a} \quad (6.126)$$

et

$$V_s(z) \rightarrow V_s(z) - S_0/2 = 2aS_0 \tanh \frac{z}{2a}. \quad (6.127)$$

Ensuite, nous utilisons les équations (4.65), (4.66), et (4.67) pour obtenir les résultats suivants

$$\mathcal{P}_{(\omega, p_{\perp}, v)} = \frac{1}{\exp \left[\pi \frac{(\omega S_0 + meE_0)^2 + \delta^2 p_{\perp}^2}{\delta^3} \right] - 1} \quad (6.128)$$

et

$$n(\omega, p_{\perp}, v) = \exp \left[-\pi \frac{(\omega S_0 + meE_0)^2 + \delta^2 p_{\perp}^2}{\delta^3} \right]. \quad (6.129)$$

Ces résultats sont en accord avec les résultats de la section précédente.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre il a été question d'étudier la création à partir du vide des particules de spin $\frac{1}{2}$ qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac, en présence de la superposition d'un potentiel vecteur et potentiel scalaire, en utilisant la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" avec les états "out".

En premier lieu, à l'aide d'une série de transformations, nous avons pu convertir l'équation matricielle de Dirac en deux équations différentielles du second ordre, ce qui rend la solution plus facile par rapport à l'équation d'origine. Ensuite nous avons considéré deux cas exactement solubles, à savoir ; le potentiel linéaire et le potentiel de Sauter.

Pour le potentiel linéaire qui décrit un champ électrique constant et homogène plus un potentiel scalaire, nous avons calculé l'action effective de Schwinger et le nombre de particules créées par unité de temps et de volume en montrant ainsi que le potentiel scalaire peut considérablement amplifier la densité des particules créées donnant lieu à une résonance importante.

Chapitre 7

Inclusion d'un champ magnétique

7.1 Introduction

Il est bien connu en électrodynamique quantique qu'un champ magnétique pur ne peut pas créer de paires particule-antiparticule, mais sa présence en parallèle avec le champ électrique a un effet important sur la création des particules. En effet, en présence d'un champ électrique \vec{E} constant et homogène, et d'un champ magnétique \vec{B} , aussi constant et homogène, la probabilité de créer des particules de spin 0 par unité de temps et de volume est donnée par

$$\mathcal{P}_{BE} = \frac{e^2 EB}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{\sinh\left(n\pi \frac{B}{E}\right)} \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right), \quad (7.1)$$

et la probabilité de créer des fermions de spin $\frac{1}{2}$ par unité de temps et de volume est donnée par

$$\mathcal{P}_{FD} = 2 \frac{e^2 EB}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \coth\left(n\pi \frac{B}{E}\right) \exp\left(-n\pi \frac{m^2}{eE}\right). \quad (7.2)$$

Outre le facteur 2 dans la deuxième équation qui survient de la somme sur les états du spin, nous remarquons que le champ magnétique minimise la création des bosons et amplifie la création des fermions.

L'objectif de ce chapitre est de voir comment le champ magnétique influe sur la création des bosons et des fermions en présence d'un potentiel scalaire.

7.2 Particules de spin 0

L'effet du champ magnétique sur la création des particules de spin 0 a été abordé dans des études antérieures concernant la création de particules en présence d'un champ électromagnétique dans l'espace de Minkowski [105, 106] et dans l'espace de Friedmann-Robertson-Walker [107, 108, 109, 110, 111], où il a été montré que le spectre discret généré par le champ magnétique (les niveaux de Landau) réduit la création de particules scalaires. Ceci est à cause du fait que le niveau fondamental de Landau est supérieur à 0, comme dans le spectre de l'oscillateur harmonique. Dans ce paragraphe, nous essayons de montrer plus en détail la contribution des niveaux de Landau à la création des particules de spin 0 en présence d'un potentiel scalaire en plus du potentiel vecteur habituel. D'abord, nous solutionnons l'équation de Klein Gordon pour des potentiels du type Sauter et nous utilisons les solutions obtenues pour calculer la probabilité de créer une paire et le nombre moyen des particules créées. Ensuite, nous considérons le cas particulier des potentiels linéaires, où nous poussons les calculs jusqu'à l'action effective de Schwinger et le nombre des particules créées par unité de temps et de volume.

7.2.1 Potentiels de Sauter avec un champ magnétique homogène

Comme l'équation de Klein-Gordon reste soluble lorsqu'on ajoute un champ magnétique parallèle au champ électrique, nous pouvons étudier l'effet du champ magnétique sur l'effet de la création de particules de spin 0 en présence de deux potentiels scalaire et vecteur.

Pour insérer un champ magnétique parallèle à l'axe (oz), nous choisissons pour le potentiel vecteur la jauge

$$A_\mu = \frac{V_0}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{z}{2a}\right) \right) \delta_{\mu 0} + By \delta_{\mu 1}, \quad (7.3)$$

ce qui conduit à l'équation de Klein Gordon suivante

$$\left[\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{eV_0}{2} - \frac{eV_0}{2} \tanh \frac{z}{2a} \right)^2 - \left(-i \frac{\partial}{\partial x} + eBy \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(m + \frac{S_0}{2} + \frac{S_0}{2} \tanh \frac{z}{2a} \right)^2 \right] \Phi(t, x, y, z) = 0. \quad (7.4)$$

Pour résoudre cette équation, nous écrivons $\Phi(t, x, y, z)$ sous la forme

$$\Phi(t, x, y, z) = \exp[-i(\omega t - p_x x)] \chi(y) \psi(z) \quad (7.5)$$

où les fonctions $\chi(y)$ et $\psi(z)$ obéissent respectivement aux équations suivantes

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\omega - \frac{eV_0}{2} \left(1 + \tanh \frac{z}{2a} \right) \right)^2 - \left(m + \frac{S_0}{2} \left(1 + \tanh \frac{z}{2a} \right) \right)^2 + A \right] \psi(z) = 0 \quad (7.6)$$

et

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - (eBy + p_x)^2 \right] \chi(y) = A\chi(y), \quad (7.7)$$

où A est une constante résultant de la séparation des variables.

Il est clair qu'en effectuant le changement $y \rightarrow Y - \frac{p_x}{eB}$, l'équation (7.7) devient similaire à l'équation d'onde associée à l'oscillateur harmonique, où la solution est donnée en termes de polynômes d'Hermit $\mathcal{H}_k(x)$

$$\chi(y) = \left(\frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{eB}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{eB}{2} Y^2 \right] \mathcal{H}_k \left[\sqrt{eB} Y \right] \quad (7.8)$$

avec les niveaux de Landau

$$A = eB(2k + 1). \quad (7.9)$$

Ici, k est un entier. Pour la fonction $\Phi(z)$, nous avons

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\omega - \frac{eV_0}{2} \left(1 + \tanh \frac{z}{2a} \right) \right)^2 - \left(m + \frac{S_0}{2} \left(1 + \tanh \frac{z}{2a} \right) \right)^2 + eB(2k + 1) \right] \Phi(z) = 0. \quad (7.10)$$

La dernière équation est similaire à (4.4) avec le changement $p_{\perp}^2 \rightarrow eB(2k + 1)$. Donc, de la même manière que précédemment, on peut obtenir les solutions "in" et "out" et en déduire les coefficients de Bogoliubov à partir desquels nous calculons le nombre moyen de particules créées dans l'état (ω, k) et la probabilité de créer une paire. Le nombre moyen de particules créées est alors

$$n(\omega, k) = \frac{2 \sinh(\pi 2a \tilde{p}_L) \sinh(\pi 2a \tilde{p}_R)}{\cosh(2\pi a \tilde{p}_-) + \cosh(\pi \tilde{\delta})}, \quad (7.11)$$

où \tilde{p}_L et \tilde{p}_R sont donnés par

$$\tilde{p}_L = \sqrt{\omega^2 - m^2 - eB(2k+1)} \quad (7.12)$$

$$\tilde{p}_R = \sqrt{(\omega - eV_0)^2 - (S_0 + m)^2 - eB(2k+1)} \quad (7.13)$$

et

$$\tilde{p}_\pm = \tilde{p}_L \pm \tilde{p}_R \quad (7.14)$$

Pour la probabilité de créer une paire de particules dans l'état (ω, l) , nous avons

$$\mathcal{P}_{\omega,k} = \frac{2 \sinh(2\pi a \tilde{p}_L) \sinh(2\pi a \tilde{p}_R)}{\cosh(2\pi a \tilde{p}_+) + \cosh(\pi \tilde{\delta})}. \quad (7.15)$$

La probabilité de transition vide-vide peut également être calculée. Le résultat est

$$\mathcal{C}_{\omega,k} = \frac{\cosh(2\pi a \tilde{p}_-) + \cosh(\pi \tilde{\delta})}{\cosh(2\pi a \tilde{p}_+) + \cosh(\pi \tilde{\delta})}. \quad (7.16)$$

Ces résultats sont obtenus en effectuant le changement $p_\perp^2 \rightarrow (2k+1)eB$ et, par conséquent, ils montrent que le champ magnétique minimise la création de particules scalaires. De plus, comme la création de particules est possible tant que \tilde{p}_R est réel, le champ magnétique doit remplir la condition

$$eB < (eV_0)^2 - (S_0 + m)^2. \quad (7.17)$$

Un champ magnétique au-delà de cette valeur supprime entièrement la zone de Klein et empêche la création de particules. De plus, les valeurs autorisées pour l'entier k sont 0, 1, 2, 3, ... k_{\max} , avec

$$k_{\max} = \left\lfloor \frac{(eV_0)^2 - (S_0 + m)^2}{2eB} - \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad (7.18)$$

où $\lfloor x \rfloor$ est, dans ce cas, la partie entière de la variable réelle x .

7.2.2 Potentiels linéaires avec un champ magnétique

Pour pouvoir facilement effectuer la somme sur tous les états possibles et calculer ainsi le nombre de particules et la probabilité de création de particules par unité de temps et de volume, nous considérons le cas des potentiels linéaires qui inclut le champ électrique constant et homogène. Ca nous permet de voir l'effet du potentiel scalaire sur la création

des particules à travers les changements qui peuvent être apportées aux expressions (7.1) et (7.2). Comme montré dans les chapitres 4 et 6, les potentiels scalaires peuvent être obtenus à partir des potentiels de Sauter en faisant la limite $a \rightarrow \infty$ avec les changements $V_v(z) \rightarrow V_v(z) - V_0/2 = 2aE \tanh \frac{z}{2a}$ et $V_s(z) \rightarrow V_s(z) - S_0/2 = 2aS \tanh \frac{z}{2a}$. Dans ce cas, \tilde{p}_L et \tilde{p}_R deviennent

$$\tilde{p}_L = \sqrt{(\omega + 2aE)^2 - (m - 2aS)^2 - eB(2k + 1)} \quad (7.19)$$

et

$$\tilde{p}_R = \sqrt{(\omega - 2aE)^2 - (m + 2aE)^2 - eB(2k + 1)}. \quad (7.20)$$

En faisant les développements

$$\tilde{p}_L \simeq 2\sqrt{e^2E^2 - S^2}a + \frac{mS + \omega eE}{\sqrt{e^2E^2 - S^2}} - \frac{(S\omega + emE)^2}{4a\sqrt{(e^2E^2 - S^2)^3}} - \frac{eB(2k + 1)}{4a\sqrt{e^2E^2 - S^2}} \quad (7.21)$$

$$\tilde{p}_R \simeq 2\sqrt{e^2E^2 - S^2}a - \frac{mS + \omega eE}{\sqrt{e^2E^2 - S^2}} - \frac{(\omega S + meE)^2}{4a\sqrt{(e^2E^2 - S^2)^3}} - \frac{eB(2k + 1)}{4a\sqrt{e^2E^2 - S^2}} \quad (7.22)$$

et

$$\tilde{\delta} \simeq 2a^2\sqrt{e^2E^2 - S^2} - \frac{1}{4a^2\sqrt{e^2E^2 - S^2}} \quad (7.23)$$

et en prenant la limite $a \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$\mathcal{P}_{\omega,k} = \frac{\exp \left[-\pi \left(\frac{(\omega S + meE)^2}{(e^2E^2 - S^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{eB(2k+1)}{\sqrt{e^2E^2 - S^2}} \right) \right]}{1 + \exp \left[-\pi \left(\frac{(\omega S + meE)^2}{(e^2E^2 - S^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{eB(2k+1)}{\sqrt{e^2E^2 - S^2}} \right) \right]}. \quad (7.24)$$

La densité des particules créées devient

$$n(\omega, k) = \exp \left[-\pi \left(\frac{(\omega S + meE)^2}{(e^2E^2 - S^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{eB(2k + 1)}{\sqrt{(e^2E^2 - S^2)}} \right) \right]. \quad (7.25)$$

La probabilité de transition vide-vide est

$$\mathcal{C}_{\omega,k} = \frac{1}{1 + \exp \left[-\pi \left(\frac{(\omega S + meE)^2}{(e^2E^2 - S^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{eB(2k+1)}{\sqrt{e^2E^2 - S^2}} \right) \right]}. \quad (7.26)$$

Notons que la condition $(eV_0)^2 - S_0^2 > 0$ dans laquelle la création de particules est possible se réduit, dans ce cas, à $e^2E^2 - S^2 > 0$. Notez que k_{\max} tend vers $+\infty$, à la limite $a \rightarrow \infty$

et, par conséquent, dans la limite du champ électrique constant, toutes les valeurs de k sont permises.

Lorsque $S \rightarrow 0$, on obtient les résultats

$$\mathcal{P}_{\omega,k} = \frac{\exp \left[-\pi \frac{m^2 + eB(2k+1)}{eE} \right]}{1 + \exp \left[-\pi \frac{m^2 + eB(2k+1)}{eE} \right]} \quad (7.27)$$

et

$$n(\omega, k) = \exp \left[-\pi \frac{m^2 + eB(2k+1)}{eE} \right], \quad (7.28)$$

qui sont les mêmes que ceux obtenus dans des différents travaux (voir par exemple [19]).

7.2.3 La somme sur tous les états

Efforçons nous maintenant de calculer la série de Schwinger qui découle de l'équation (7.24) qui s'écrit sous la forme

$$\mathcal{C}_{\omega,k} = \exp [-\ln(1 + \sigma')], \quad (7.29)$$

où

$$\sigma' = \exp \left[-\pi \left(\frac{(\omega S + meE)^2}{(e^2 E^2 - S^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{eB(2k+1)}{\sqrt{(e^2 E^2 - S^2)}} \right) \right].$$

La partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est donc

$$2ImS_{eff} = \sum_{all\ states} \ln(1 + \sigma'). \quad (7.30)$$

En utilisant le développement de Taylor et en remplaçant $\sum_{all\ states}$ par

$$\int \frac{dxdt dp_x d\omega}{(2\pi)^2} \sum_{k=0}^{\infty}$$

nous obtenons

$$2ImS_{eff} = \int \frac{dxdt dp_x d\omega}{(2\pi)^2} \sum_k \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp \left[-n\pi \left(\frac{(\omega S + meE)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{eB(2k+1)}{\sqrt{(e^2 E^2 - S_0^2)}} \right) \right]. \quad (7.31)$$

Compte tenu du fait que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp \left[-n\pi \frac{eB(2k+1)}{\sqrt{(e^2 E^2 - S_0^2)}} \right] = \frac{1}{2 \sinh \left(n\pi \frac{eB}{\sqrt{(e^2 E^2 - S_0^2)}} \right)} \quad (7.32)$$

et que l'intégrale sur p_x peut être remplacée par

$$\begin{aligned} \int dp_x &= eB \int dy \\ \int d\omega &= eE \int dz, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$2ImS_{eff} = \int dV dt \frac{e^2 EB}{8\pi^2} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{\sinh \left(n\pi \frac{eB}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right)} \exp \left[-n\pi \frac{m^2}{eE} \frac{\left(1 + \frac{S_0}{m} z\right)^2}{\left(1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (7.33)$$

La probabilité de créer des particules est

$$\mathcal{P}_{BE} = 2Im\mathcal{L}_{eff} = \frac{e^2 E^2}{(2\pi)^3} \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}} \sum_{n=1} G_n(B) \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp \left[-n\pi \frac{m^2}{eE} \frac{\left(1 + \frac{S_0}{m} z\right)^2}{\left(1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (7.34)$$

où le facteur $G_n(B)$ qui décrit l'effet du champ magnétique est donné par

$$G_n(B) = \frac{n\pi eB}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \left[\sinh \left(\frac{n\pi eB}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right) \right]^{-1}. \quad (7.35)$$

Comme nous avons $x < \sinh x, \forall x \in \mathbb{R}$, nous remarquons que $0 < G_n(B) < 1$. Cela signifie que la présence du champ magnétique minimise la création de particules de spin 0.

Étant donné que le nombre total de la création des particules est défini par

$$\mathcal{N} = \int \frac{dxdt dp_x d\omega}{(2\pi)^2} \sum_{k=1} g_k n(\omega, k) = \int \frac{d\mathcal{N}}{dV dt} dV dt, \quad (7.36)$$

nous pouvons calculer le nombre de particule de spin 0 créées par unité de temps et de volume. Le résultat est

$$\frac{d\mathcal{N}}{dV dt} = \frac{e^2 EB}{(2\pi)^2} \frac{1}{2 \sinh \left(\pi \frac{eB}{\sqrt{(e^2 E^2 - S_0^2)}} \right)} \exp \left[-n\pi \frac{e^2 E^2 (m + S_0 z)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (7.37)$$

ou bien

$$\frac{d\mathcal{N}}{dV dt} = G_1(B) \frac{e^2 E^2}{(2\pi)^3} \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}} \exp \left[-n\pi \frac{e^2 E^2 (m + S_0 z)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (7.38)$$

Notons que lorsque la limite $S_0 \rightarrow 0$, nous obtenons le résultat (7.1) et

$$\frac{d\mathcal{N}}{dV dt} = \frac{e^2 EB}{8\pi^2} \frac{1}{\sinh \left(\pi \frac{B}{E} \right)} \exp \left(-\pi \frac{m^2}{eE} \right). \quad (7.39)$$

qui sont les mêmes que les résultats obtenus dans [106].

Lorsque $B = 0$, nous obtenons les résultats (5.73) et (5.77) obtenus au chapitre 5.

7.3 Particules de spin 1/2

7.3.1 Equation de Dirac

Considérons maintenant un fermion de masse m et de charge e en présence de la combinaison d'un champ électrique, un champ magnétique et un potentiel scalaire. Comme dans le cas précédent nous choisissons pour le champ électromagnétique la jauge $A_\mu(z) = (V_0 F(z), By, 0, 0)$. L'équation de Dirac correspondante prend la forme

$$\left[\gamma^0 \left(i \frac{\partial}{\partial t} - eV_0 F(z) \right) + \gamma^1 \left(i \frac{\partial}{\partial x} + eBy \right) + i\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - (m + S_0 F(z)) \right] \Psi = 0. \quad (7.40)$$

En premier lieu nous écrivons Ψ sous la forme

$$\Psi = \exp(-i(\omega t - p_x x) \gamma^0 \gamma^3) \chi(y, z), \quad (7.41)$$

pour obtenir pour $\chi(y, z)$ l'équation

$$\hat{D}_1 \chi = \hat{D}_2 \chi \quad (7.42)$$

où les opérateurs linéaires \hat{D}_1 et \hat{D}_2 sont donnés par

$$\hat{D}_1 = i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial z} + \gamma^3 (\omega - eV_v) - (m + V_s) \gamma^0 \gamma^3 \quad (7.43)$$

et

$$\hat{D}_2 = \gamma^0 \gamma^3 \left(-i\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} - \gamma^1 (p_x + eBy) \right). \quad (7.44)$$

Il est bien claire que $[\hat{D}_1, \hat{D}_2] = 0$. Ainsi nous pouvons trouver une base propre commune aux opérateurs \hat{D}_1 et \hat{D}_2 . En utilisant la propriété des matrices de Pauli $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + \epsilon_{ijk} \sigma_k$, nous pouvons écrire l'opérateur \hat{D}_2 sous la forme

$$D_2 = \begin{pmatrix} \hat{\pi} & 0 \\ 0 & -\hat{\pi} \end{pmatrix}, \quad (7.45)$$

où l'opérateur $\hat{\pi}$ est

$$\hat{\pi} = \sigma_x \frac{\partial}{\partial y} + i\sigma_y (p_x + eBy). \quad (7.46)$$

Il n'est pas difficile de montrer que les vecteurs propres communs aux opérateurs \hat{D}_1 et \hat{D}_2 sont donnés par

$$\chi(y, z) = \begin{pmatrix} f(z) \Upsilon_\nu(y) \\ g(z) \sigma_z \Upsilon_\nu(y) \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

où $f(z)$ et $g(z)$ sont deux fonctions numériques et $\Upsilon_\nu(y)$ est un vecteur propre de l'opérateur $\hat{\pi}$

$$\hat{\pi} \Upsilon_\nu(y) = \lambda \Upsilon_\nu(y). \quad (7.48)$$

De plus nous pouvons voir que

$$\hat{\pi}^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (p_x + eBy)^2 - eB\sigma_z \quad (7.49)$$

et que si $\Theta(y)$ est un vecteur propre de $\hat{\pi}^2$, il vient

$$\hat{\pi}^2\Theta(y) = \lambda^2\Theta(y), \quad (7.50)$$

ou encore

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + e^2 B^2 Y^2 + eB\sigma_z \right] \Theta(y) = -\lambda^2\Theta(y). \quad (7.51)$$

La dernière équation est similaire à l'équation de Pauli-Schrödinger pour un oscillateur harmonique de masse $M_{OH} = \frac{1}{2}$ et de pulsation $\omega_{OH} = 2eB$, dont la solution est de la forme

$$\Theta_{k,s}(y) = u_s \sqrt{\frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}}} (eB)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{eB}{2} Y^2\right] H_k\left(\sqrt{\frac{eB}{2}} Y\right) \quad (7.52)$$

où u_s , avec $s = \pm 1$, sont les deux vecteurs propres à σ_z

$$\sigma_z u_s = s u_s. \quad (7.53)$$

Les vecteurs u_{+1} et u_{-1} sont donnés par

$$u_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.54)$$

Les valeurs propres λ^2 sont donc

$$\lambda^2 = -(2k + 1 + s) eB, \quad (7.55)$$

où k est un entier positif. Ici, comme $s = \pm 1$, nous pouvons voir que ces valeurs propres qui peuvent s'écrire

$$\lambda^2 = -2keB, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

sont, à l'exception de la valeur 0, deux fois dégénérées. A chaque valeur propre $\lambda^2 = -2(k+1)eB$, correspondent les deux vecteurs propres $\Theta_{k,s=+1}(y)$ et $\Theta_{k+1,s=-1}(y)$. Les vecteurs propres de l'opérateur $\hat{\pi}$ sont donc une combinaison linéaire de $\Theta_{k,s=+1}(y)$ et $\Theta_{k+1,s=-1}(y)$. En écrivant

$\hat{\pi}$ sous la forme matricielle

$$\hat{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial Y} + eBY \\ \frac{\partial}{\partial Y} - eBY & 0 \end{pmatrix} \quad (7.56)$$

et en tenant en compte que les solutions de l'oscillateur harmonique vérifient les deux relations

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial Y} - eBY \right) G_k(Y) &= -\sqrt{2eB(k+1)} G_{k+1}(Y) \\ \left(\frac{\partial}{\partial Y} + eBY \right) G_k(Y) &= \sqrt{2eBk} G_{k-1}(Y). \end{aligned}$$

Nous pouvons montrer que les vecteurs propres de l'opérateur $\hat{\pi}$ sont

$$\Upsilon_{k,\nu}(y) = \begin{pmatrix} G_k(Y) \\ i\nu G_{k+1}(Y) \end{pmatrix}, \quad (7.57)$$

où chaque vecteur $\Upsilon_{k,\nu}(y)$ correspond à la valeur propre

$$\lambda = i\nu\sqrt{2eB(k+1)}. \quad (7.58)$$

En somme, le vecteur

$$\chi(y, z) = \begin{pmatrix} f(z)\Upsilon_{k-1,\nu}(y) \\ g(z)\sigma_z\Upsilon_{k-1,\nu}(y) \end{pmatrix} \quad (7.59)$$

est un vecteur propre à l'opérateur \hat{D}_2 , associé à la valeur propre $i\nu\sqrt{2eBk}$. Le fait que $\chi(y, z)$ est également vecteur propre à l'opérateur \hat{D}_1 nous donne l'équation

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial z} + \gamma^3(\omega - eV_0F(z)) - (m + S_0F(z))\gamma^0\gamma^3 \right] \chi(y, z) = -i\nu\sqrt{2eBk}\chi(y, z). \quad (7.60)$$

A ce niveau nous introduisons les mêmes transformations utilisées dans le chapitre précédent pour transformer le spineur $\chi(y, z)$ en

$$\Phi(z, y) = \begin{pmatrix} \Phi_1(z)\Upsilon_{k,\nu}(y) \\ \Phi_2(z)\sigma_z\Upsilon_{k,\nu}(y) \end{pmatrix}. \quad (7.61)$$

Ainsi, les deux fonction $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ vérifient les deux équations couplées

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + i(\Omega - e\mathcal{V}_0 F(z)) \right] \Phi_2 = -i \left[\mathcal{M} + i\nu\sqrt{2eBk} \right] \Phi_1 \quad (7.62)$$

et

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} - i(\Omega - e\mathcal{V}_0 F(z)) \right] \Phi_1 = i \left[\mathcal{M} - i\nu\sqrt{2eBk} \right] \Phi_2. \quad (7.63)$$

Par interaction nous obtenons deux équations différentielles du second ordre découplées

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \delta^2 F^2(z) - 2(\omega eV_0 + mS_0)F(z) + \omega^2 - m^2 - 2eBk + i\delta F'(z) \right] \Phi_1 = 0 \quad (7.64)$$

et

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \delta^2 F^2(z) - 2(\omega eV_0 + mS_0)F(z) + \omega^2 - m^2 - 2eBk - i\delta F'(z) \right] \Phi_2 = 0. \quad (7.65)$$

Comme mentionné auparavant, chacune de deux équations (7.64) et (7.65) admet deux solutions linéairement indépendantes et chaque solution de la première équation correspond à une seule solution de la deuxième équation. Nous devons donc résoudre une seule équation et utiliser ensuite, les équations (7.62) et (7.63) pour obtenir les solutions de la deuxième équation.

7.3.2 Potentiels de type Sauter

Pour des potentiels de type Sauter nous avons

$$F(z) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{z}{2a} \right). \quad (7.66)$$

Dans ce cas, l'équation (7.64) devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + i\frac{\delta}{4a} \left(1 - \tanh^2 \frac{z}{2a} \right) + \frac{\delta^2}{4} \left(1 + \tanh \frac{z}{2a} \right)^2 - (\omega eV_0 + mS_0) \left(1 + \tanh \frac{z}{2a} \right) + \omega^2 - m^2 - 2eBk \right] \Phi_1 = 0. \quad (7.67)$$

Comme dans le chapitre précédent, nous faisons pour résoudre cette équation le changement $\xi = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{z}{2a} \right)$ de sorte que l'équation résultante soit similaire à (6.82) avec le remplacement de p_{\perp}^2 par $2eBk$. En suivant les mêmes étapes que dans la section 6.4.1 du chapitre

précédent, nous obtenons aisément les états "in" et "out".

Pour les états "out" nous avons

$$\chi_{out}^- = \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}_L}} (1 - \xi)^{ia\tilde{p}_L} \xi^{ia\tilde{p}_R} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{eV_0 + S_0}{eV_0 - S_0}} [\tilde{F}_1(\xi) + \tilde{F}_2(\xi)] \Upsilon_v(y) \\ [\tilde{F}_1(\xi) - \tilde{F}_2(\xi)] \sigma_z \Upsilon_v(y) \end{pmatrix} \quad (7.68)$$

$$\chi_{out}^+ = \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}_R}} (1 - \xi)^{ia\tilde{p}_L} \xi^{-ia\tilde{p}_R} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{eV_0 + S_0}{eV_0 - S_0}} [\tilde{F}_3(\xi) + \tilde{F}_4(\xi)] \Upsilon_v \\ [\tilde{F}_3(\xi) - \tilde{F}_4(\xi)] \sigma_z \Upsilon_v \end{pmatrix}, \quad (7.69)$$

où les fonctions $\tilde{F}_1(\xi)$, $\tilde{F}_2(\xi)$, $\tilde{F}_3(\xi)$ et $\tilde{F}_4(\xi)$ sont données par

$$\tilde{F}_1(\xi) = \sqrt{\frac{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu\delta\sqrt{2eBk}}{\tilde{p}_L\delta - (\omega eV_0 + mS_0)}} \\ F(ia\tilde{p}_+ + ia\delta + 1, ia\tilde{p}_+ - ia\delta, 1 + 2ia\tilde{p}_L; 1 - \xi)$$

$$\tilde{F}_2(\xi) = \sqrt{\frac{\tilde{p}_L\delta - (\omega eV_0 + mS_0)}{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu\delta\sqrt{2eBk}}} \\ F(ia\tilde{p}_+ + ia\delta, ia\tilde{p}_+ - ia\delta + 1, 1 + 2ia\tilde{p}_L; 1 - \xi)$$

$$\tilde{F}_3(\xi) = \sqrt{\frac{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu\delta\sqrt{2eBk}}{\tilde{p}_R\delta - (\omega eV_0 + mS_0) + \delta^2}} \\ F(-ia\tilde{p}_- + ia\delta + 1, -ia\tilde{p}_- - ia\delta, 1 - 2ia\tilde{p}_R; \xi)$$

et

$$\tilde{F}_4(\xi) = \sqrt{\frac{\tilde{p}_R\delta - (\omega eV_0 + mS_0) + \delta^2}{\omega S_0 + eV_0 m - i\nu\delta\sqrt{2eBk}}} \\ F(-ia\tilde{p}_- + ia\delta, -ia\tilde{p}_- - ia\delta + 1, 1 - 2ia\tilde{p}_R; \xi).$$

Les états "in" sont donnés par

$$\chi_{in}^- = \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}_L}} (1 - \xi)^{-ia\tilde{p}_L} \xi^{ia\tilde{p}_R} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(eV_0 + S_0)}{(eV_0 - S_0)}} [\tilde{F}_5(\xi) - \tilde{F}_6(\xi)] \Upsilon_v \\ [\tilde{F}_5(\xi) + \tilde{F}_6(\xi)] \sigma_z \Upsilon_v \end{pmatrix} \quad (7.70)$$

$$\chi_{in}^+ = \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}_R}} (1 - \xi)^{ia\tilde{p}_L} \xi^{ia\tilde{p}_R} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{eV_0 + S_0}{eV_0 - S_0}} [\tilde{F}_7(\xi) - \tilde{F}_8(\xi)] \Upsilon_v \\ [\tilde{F}_7(\xi) + \tilde{F}_8(\xi)] \sigma_z \Upsilon_v \end{pmatrix}, \quad (7.71)$$

où

$$\tilde{F}_5(\xi) = \sqrt{\frac{\omega S_0 + eV_0 m - iv\delta\sqrt{2eBk}}{\tilde{p}_L \delta + (\omega eV_0 + mS_0)}} F(ia\tilde{p}_- + ia\delta + 1, ia\tilde{p}_- - ia\delta, 1 - 2ia\tilde{p}_L; 1 - \xi),$$

$$\tilde{F}_6(\xi) = \sqrt{\frac{\tilde{p}_L \delta + (\omega eV_0 + mS_0)}{\omega S_0 + eV_0 m - iv\delta\sqrt{2eBk}}} F(ia\tilde{p}_- + ia\delta, ia\tilde{p}_- - ia\delta + 1, 1 - 2ia\tilde{p}_L; 1 - \xi),$$

$$\tilde{F}_7(\xi) = \sqrt{\frac{\omega S_0 + eV_0 m - iv\delta\sqrt{2eBk}}{\tilde{p}_R \delta + (\omega eV_0 + mS_0) - \delta^2}} F(ia\tilde{p}_+ + ia\delta + 1, ia\tilde{p}_+ - ia\delta, 1 + 2ia\tilde{p}_R; \xi),$$

et

$$\tilde{F}_8(\xi) = \sqrt{\frac{\tilde{p}_R \delta + (\omega eV_0 + mS_0) - \delta^2}{\omega S_0 + eV_0 m - iv\delta\sqrt{2eBk}}} F(ia\tilde{p}_+ + ia\delta, ia\tilde{p}_+ - ia\delta + 1, 1 + 2ia\tilde{p}_R; \xi),$$

$$\tilde{p}_L = \sqrt{\omega^2 - m^2 - 2eBk} \quad (7.72)$$

$$\tilde{p}_R = \sqrt{(\omega - eV_0)^2 - (S_0 + m)^2 - 2eBk}. \quad (7.73)$$

Maintenant nous pouvons établir la transformation de Bogliubov en écrivant χ_{out}^+ et χ_{out}^- en

termes de χ_{in}^+ et χ_{in}^- . Nous avons alors

$$\chi_{in}^+ = \alpha\chi_{out}^+ + \beta\chi_{out}^- \quad (7.74)$$

$$\chi_{in}^- = \beta^*\chi_{out}^+ + \alpha^*\chi_{out}^-, \quad (7.75)$$

où les coefficients de Bogoliubov sont donnés par

$$\alpha = -\sqrt{\frac{\tilde{p}_-\delta + (mS_0 + \omega eV_0)}{\tilde{p}_-\delta - (mS_0 + \omega eV_0)}} \frac{\Gamma(2ia\tilde{p}_L)}{\Gamma(-2ia\tilde{p}_L)} \frac{\Gamma(ia\tilde{p}_- - ia\delta)\Gamma(ia\tilde{p}_- + 1 + ia\delta)}{\Gamma(ia\tilde{p}_+ + ia\delta + 1)\Gamma(ia\tilde{p}_+ - ia\delta)} \quad (7.76)$$

et

$$\beta = \sqrt{\frac{\tilde{p}_R}{\tilde{p}_L}} \sqrt{\frac{\tilde{p}_R\delta + (\omega eV_0 + mS_0) - \delta^2}{\tilde{p}_-\delta - (mS_0 + \omega eV_0)}} \frac{\Gamma(ia\tilde{p}_- - ia\delta)\Gamma(ia\tilde{p}_- + 1 + ia\delta)}{\Gamma(1 + 2ia\tilde{p}_R)\Gamma(-2ia\tilde{p}_L)} \quad (7.77)$$

Nous obtenons, alors, pour la probabilité de création d'une paire de particules de spin $\frac{1}{2}$ l'expression suivante

$$\mathcal{P}_{\omega,k} = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^2 = \frac{2 \sinh(2\pi a\tilde{p}_L) \sinh(2\pi a\tilde{p}_R)}{\cosh(2\pi a\tilde{p}_+) - \cosh(2\pi a\delta)}. \quad (7.78)$$

Le nombre moyen des particules créées est

$$n(\omega, k) = |\beta|^2 = \frac{2 \sinh(2\pi a\tilde{p}_L) \sinh(2\pi a\tilde{p}_R)}{\cosh(2\pi a\tilde{p}_-) - \cosh(2\pi a\delta)}. \quad (7.79)$$

Nous pouvons également calculer la probabilité pour que le vide reste vide. Le résultat est

$$\mathcal{C}_{\omega,k} = |\alpha|^2 = \frac{\cosh(2\pi a\tilde{p}_+) - \cosh(2\pi a\delta)}{\cosh(2\pi a\tilde{p}_-) - \cosh(2\pi a\delta)}. \quad (7.80)$$

7.3.3 Potentiels linéaires

Pour étudier le cas des potentiels linéaires, il suffit de prendre la limite des expressions (7.78), (7.79) et (7.80), lorsque $a \rightarrow \infty$. Nous obtenons pour la probabilité de création d'une paire dans l'état (ω, k) ,

$$\mathcal{P}_{\omega,k} = \frac{\exp \left[-\pi \left(\frac{(\omega S_0 + m e E)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2e B k}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right) \right]}{1 - \exp \left[-\pi \left(\frac{(\omega S_0 + m e E)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2e B k}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right) \right]}. \quad (7.81)$$

Le nombre de particules créés se réduit à

$$n(\omega, k) = \exp \left[-\pi \left(\frac{(\omega S_0 + m e E)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2e B k}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right) \right]. \quad (7.82)$$

Pour la probabilité de transition vide-vide, nous avons

$$\mathcal{C}_{\omega,k} = \frac{1}{1 + \exp \left[-\pi \left(\frac{(\omega S_0 + m e E)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2e B n}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right) \right]}. \quad (7.83)$$

7.3.4 Somme sur tous les états

Maintenant, pour calculer la probabilité de créer de paires par unité de volume et de temps et le nombre des particules créées par unité de volume et de temps, nous faisons la somme sur tous les états possibles.

Commençons d'abord par le calcul de l'action effective de Schwinger. Pour cela nous écrivons (7.83) sous la forme

$$\mathcal{C}_{\omega,k} = \exp[\ln(1 - \sigma'')], \quad (7.84)$$

où

$$\sigma'' = \exp \left[-\pi \left(\frac{(\omega S + m e E)^2}{(e^2 E^2 - S^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2e B k}{\sqrt{(e^2 E^2 - S^2)}} \right) \right].$$

La partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est donc

$$2ImS_{eff} = \int \frac{dx dt dp_x d\omega}{(2\pi)^2} \sum_{k=1} g_k \ln(1 - \sigma''),$$

où $g_k = 2(1 - \delta_{0k})$ est le degré de dégénérescence des niveaux de Landau ($g_k = 0$ pour $k = 0$ et $g_k = 2$ pour $k > 0$). Comme dans les chapitres précédents, nous développons $\ln(1 - \sigma'')$,

pour exprimer $2ImS_{eff}$ comme une série

$$2ImS_{eff} = \int \frac{dxdt dp_x d\omega}{(2\pi)^2} \sum_{k=1} g_k \sum_{n=1} \frac{1}{n} \exp \left[-n\pi \left(\frac{(\omega S_0 + m\epsilon E)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2eBk}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right) \right]. \quad (7.85)$$

En remplaçant dp_x et $d\omega$ par $eBdy$ et $eEdz$, respectivement, nous obtenons

$$2ImS_{eff} = \int dV dt \sum_{k=0} g_k \sum_{n=1} \frac{1}{n} \exp \left[-n\pi \left(\frac{e^2 E^2 (m + S_0 z)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2eBk}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right) \right], \quad (7.86)$$

d'où nous extrayons la partie imaginaire du lagrangien effectif de Schwinger qui s'interprète comme la probabilité de création de particule par unité de volume et de temps

$$2Im\mathcal{L}_{eff} = \frac{e^2 EB}{(2\pi)^2} \sum_{n=1} \frac{1}{n} \exp \left[-n\pi \frac{e^2 E^2 (m + S_0 z)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \sum_{k=0} g_k \exp \left(-\frac{2n\pi eB}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} k \right), \quad (7.87)$$

Pour la somme sur k , nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=0} g_k \exp \left(-\frac{2n\pi eB}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} k \right) &= 1 + 2 \sum_{k=1} \exp \left(-\frac{2n\pi eB}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} k \right) \\ &= 1 + 2 \frac{\exp \left(-\frac{2n\pi eB}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right)}{1 - \exp \left(-\frac{2n\pi eB}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right)} \\ &= \frac{1}{\tanh \left(\frac{n\pi eB}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right)}. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors le résultat

$$\mathcal{P} = \frac{e^2 EB}{(2\pi)^2} \sum_{n=1} \frac{1}{n} \exp \left[-n\pi \frac{e^2 E^2 (m + S_0 z)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \coth \left(\frac{n\pi eB}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right), \quad (7.88)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{P} = \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}} \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} K_n(B) \exp \left[-n\pi \frac{e^2 E^2 (m + S_0 z)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (7.89)$$

où

$$K_n(B) = \frac{n\pi e B}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \coth \left(\frac{n\pi e B}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right) \quad (7.90)$$

Compte tenu du fait que $\tanh x \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$, nous pouvons voir que $K_n(B)$ est toujours supérieur à 1, ce qui montre que le champ magnétique amplifie la création de particules.

Il est à noter que lorsque $S_0 \rightarrow 0$, nous obtenons l'équation (7.2) et lorsque $B \rightarrow 0$, nous obtenons l'équation (6.68).

Pour le nombre de particules créées par unité de temps et de volume nous obtenons

$$\frac{d\mathcal{N}}{dV dt} = \frac{e^2 EB}{(2\pi)^2} \exp \left[-\pi \frac{e^2 E^2 (m + S_0 z)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \coth \left(\pi \frac{eB}{\sqrt{e^2 E^2 - S_0^2}} \right) \quad (7.91)$$

$$= K_1(B) \times \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{e^2 E^2}} \exp \left[-\pi \frac{e^2 E^2 (m + S_0 z)^2}{(e^2 E^2 - S_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (7.92)$$

Notons que pour $S_0 = 0$, nous obtenons le résultat

$$\left. \frac{d\mathcal{N}}{dV dt} \right|_{S_0=0} = \frac{e^2 EB}{(2\pi)^2} \exp \left(-\pi \frac{m^2}{eE} \right) \coth \left(\pi \frac{B}{eE} \right) \quad (7.93)$$

qui coïncide avec les résultats obtenus par d'autres auteurs (voir par exemple [105]).

Les figures (7.1) et (7.2) représentent respectivement les variations de $G_1(B)$ et $K_1(B)$ en fonction de $\frac{S_0}{E}$. Elles montrent que le potentiel scalaire améliore l'effet du champ magnétique sur la création de particules de spin $\frac{1}{2}$. Pour les particules de spin 0, le potentiel scalaire minimise $G_1(B)$, en minimisant ainsi la création de particules.

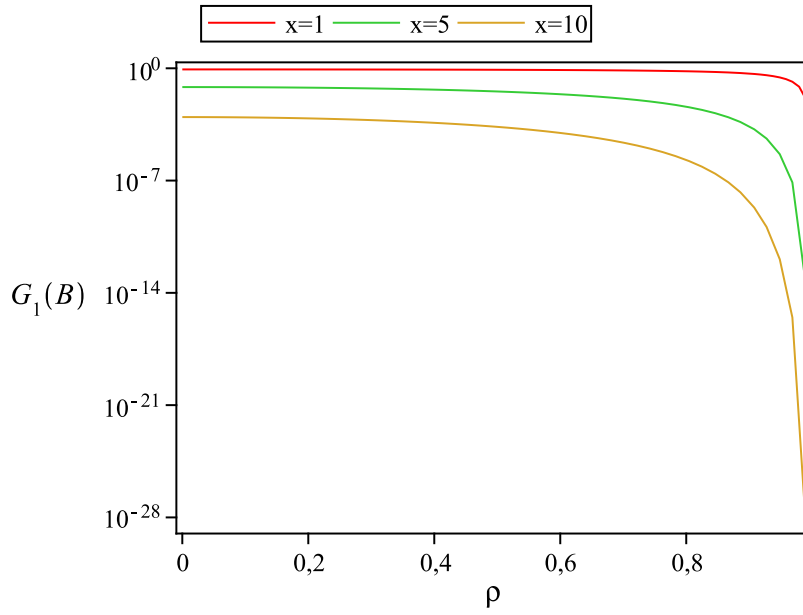


Figure 7.1 – Variations de $G_1(B)$ en fonction de $\frac{S_0}{E}$. La variable x est définie par $x = \pi \frac{B}{E}$.

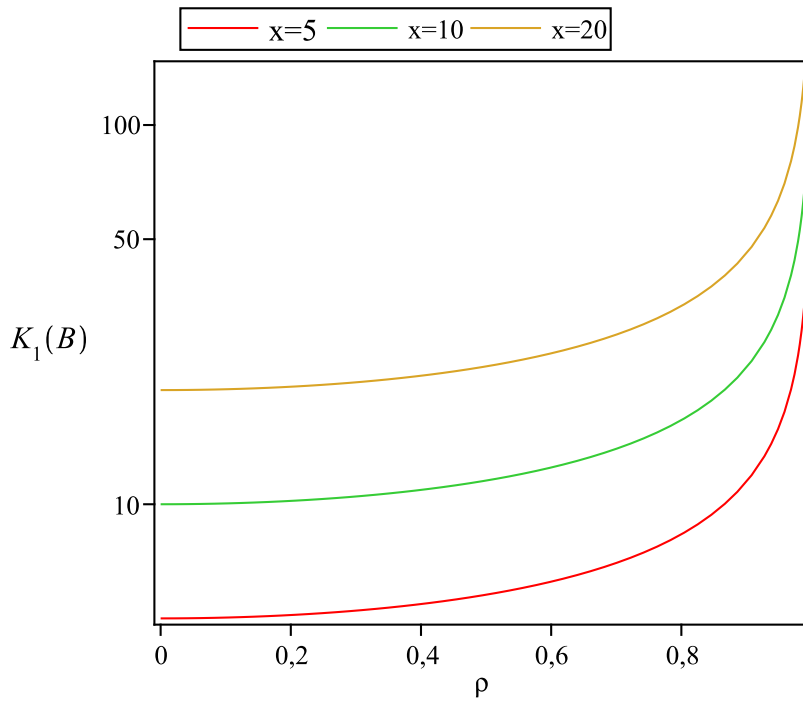


Figure 7.2 – Variations de $K_1(B)$ en fonction de $\frac{S_0}{E}$. La variable x est définie par $x = \pi \frac{B}{E}$.

7.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la création des particules sous l'effet d'un champ électrique, décrit par un potentiel vecteur, en présence d'un champ magnétique homogène et d'un potentiel scalaire. Pour cela il a fallu d'abord résoudre les équations de Klein Gordon et de Dirac. La résolution de l'équation de Klein Gordon avec des potentiels du type Sauter était directe et sans difficulté. Pour l'équation de Dirac nous avons effectué une série de transformations pour obtenir les solutions d'énergies positives et d'énergies négatives. Ensuite, nous avons utilisé ces solutions pour calculer la probabilité de création d'une paire dans un état donné et le nombre moyen de particules créées. En considérant enfin le cas des potentiels linéaires, nous avons pu sommer sur tous les états possibles en obtenant ainsi le lagrangien effectif de Schwinger et le nombre des particules créées par unité de temps et de volume. Le résultat essentiel de cette étude est que même en présence du potentiel scalaire, le champ magnétique minimise la création de bosons et amplifie la création des fermions.

Chapitre 8

Conclusion générale

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction (chapitre 1), toutes les tentatives d'observation de la création de particules par un champ électrique en laboratoire ont échoué en raison de la nécessité d'une intensité qui dépasse les capacités technologiques actuelles. L'objet de cette thèse prend part des études qui recherchent les facteurs susceptibles d'amplifier la création de particules afin de rendre possible sa réalisation expérimentale. Le principe sur lequel nous nous sommes appuyés est de minimiser la barrière à travers laquelle les particules créées sont transmises par effet tunnel. C'est dans ce contexte que nous avons proposé de coupler un potentiel scalaire à la masse de la particule.

En premier lieu nous avons rappelé dans le deuxième chapitre, les notions nécessaires pour accomplir les objectifs de cette thèse. Les équations relativistes, le potentiel scalaire, la création des particules et la théorie quantique des champs en présence d'un potentiel scalaire sont introduites suivant le développement historique de la théorie quantique relativiste. En outre nous avons montré comment la théorie quantique des champs s'est imposée pour décrire les phénomènes quantiques dans le domaine relativiste. Après avoir souligné les limites de la mécanique quantique relativiste vis-à-vis la création des particules, nous avons montré comment la théorie quantique des champs peut décrire ce phénomène à l'aide des transformations de Bogoliubov qui expriment l'instabilité du vide en présence d'un champ électrique.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressés au paradoxe de Klein en présence d'une barrière scalaire en plus de la barrière vectorielle habituelle et sa résolution à travers la création des particules. D'abord, nous avons montré que la présence d'une barrière scalaire réduit la zone de Klein et minimise le coefficient de réflexion. Lorsque S_0 dépasse $V_0 - 2m$, le

paradoxe de Klein disparaît. Nous avons montré que la création de particules diminue lorsque le potentiel scalaire augmente et s'arrête définitivement lorsque le potentiel scalaire atteint la valeur $V_0 - 2m$. En d'autres termes, en présence d'un potentiel scalaire S_0 , seules les particules de masse m , avec $2m < V_0 - S_0$, peuvent être créées. Cela signifie qu'en présence du potentiel scalaire, la bande interdite à droite de la barrière est plus grande que celle habituelle et donc, le potentiel scalaire réduit la zone de Klein et minimise la création de particules.

Dans le quatrième chapitre, nous avons étudié la création de particules scalaires en présence des potentiels du type Sauter suivant la méthode des transformations de Bogoliubov qui nous a permis de calculer la probabilité de création d'une paire et le nombre moyen de particules créées. Le résultat essentiel de cette étude est que, pour des valeurs positives de S_0 , le nombre moyen $n(\omega, p_\perp)$ augmente à mesure que V_0 augmente. Cependant, pour certaines valeurs négatives de S_0 , le nombre moyen $n(\omega, p_\perp)$ atteint un maximum puis il diminue à mesure que V_0 augmente. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que les valeurs négatives du potentiel scalaire agrandissent la zone de Klein qui, dans ce cas, diminue à mesure que V_0 augmente. Par conséquent, le potentiel scalaire peut conduire à une création de particules raisonnable.

C'est ainsi que nous avons considéré dans le cinquième chapitre l'étude de l'effet du potentiel scalaire sur la création des particules en considérant des potentiels linéaires, où nous nous sommes intéressés au nombre des particules créées par unité de volume et par unité de temps qui est lié directement aux mesures expérimentales. Nous avons montré que l'introduction du potentiel scalaire peut considérablement amplifier la création des particules. Par ailleurs, nous avons montré la validité du calcul semi classique dans le calcul de la probabilité de création des particules et la persistance des résultats obtenus par rapport aux transformations de jauge.

Dans le sixième chapitre, nous avons étudié la création à partir du vide des particules de spin $\frac{1}{2}$ qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac, en présence de la superposition d'un potentiel vecteur et potentiel scalaire. En premier lieu, à l'aide d'une série de transformations, nous avons pu convertir l'équation matricielle de Dirac en deux équations différentielles du second ordre, ce qui rend la solution plus facile par rapport à l'équation d'origine. Ensuite nous avons considéré deux cas exactement solubles, à savoir ; le potentiel linéaire et le potentiel de Sauter. Pour le potentiel linéaire qui décrit un champ électrique constant et homogène plus un potentiel scalaire, nous avons calculé l'action effective de Schwinger et le nombre de particules créées par unité de temps et de volume en montrant ainsi que le potentiel scalaire

peut considérablement amplifier la densité des particules créées.

Dans le septième chapitre, nous nous sommes intéressés à l'effet du potentiel scalaire sur la création des particules sous l'action combinée d'un champ électrique et d'un champ magnétique homogène. En premier lieu nous avons considéré la création de particules de spin 0 en présence de potentiels de Sauter, où nous avons pu calculer la probabilité de créer une paire dans un état donné, le nombre moyen des particules créées et la probabilité pour qu'il n'y ait aucune paire dans cet état. En prenant la limite des potentiels linéaires, nous avons obtenu les résultats associés aux champs constants et homogènes, pour lesquels nous avons pu sommer sur tous les états en obtenant ainsi le lagrangien effectif de Schwinger et le nombre des particules créées par unité de temps et de volume. Dans la deuxième partie, nous avons réitéré les mêmes calculs mais pour les particules de Dirac. Les résultats de ce chapitre montrent que même en présence du potentiel scalaire le champ magnétique minimise la création de bosons et amplifie la création des fermions.

Notons enfin, que dans cette thèse, nous avons considéré seulement le cas exactement soluble où le potentiel scalaire est proportionnel au potentiel vecteur. Pour le cas où le potentiel scalaire n'a pas la même allure que celle du potentiel vecteur, nous pouvons traiter les corrections dues au potentiel scalaire à l'aide d'une série de perturbation. Ceci est possible puisque, comme nous l'avons vu, la probabilité de créer une paire dans un état donné et le nombre moyen des particules créées dépendent du potentiel scalaire S d'une manière analytique.

En outre, comme la condition dans laquelle la création de particules est possible est $(eV_0)^2 - S_0^2 > 0$, nous pouvons voir que dans le cas des symétries de spin et de pseudospin où les magnitudes des potentiels scalaire et vectoriel sont égales [112, 113, 114], la zone de Klein s'annule par le potentiel scalaire et par conséquent, la création de particules par le mécanisme considéré dans cette thèse est alors impossible.

En conclusion, nous avons montré dans cette thèse que le potentiel scalaire qui se couple à la masse de la particule, modifie l'écart entre les énergies positives et les énergies négatives et, par conséquent, il modifie la zone de Klein, où la création de particules est possible. De ce fait, le potentiel scalaire pourrait être parmi les facteurs contribuant à l'amplification de l'effet de Schwinger.

Bibliographie

- [1] E. Bresin and C. Itzykson, Quantum Field Theory, Dover Publications (2012)
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Avalon Publishing (1995)
- [3] V. P. Nair, Quantum Field Theory : A Modern Perspective, Springer-Verlag New York (2005)
- [4] B. Ydri, A Modern Course in Quantum Field Theory, IOP Publishing, Bristol (2019)
- [5] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio, Phys. Rev. Lett. 109, 111807 (2012).
- [6] S. Laporta, Phys. Lett. B772, (2017) 232–238 (2018)
- [7] T. Aoyama, T. Kinoshita, M. Nio, Phys. Rev. D 97, 036001 (2018)
- [8] S. Volkov, Phys. Rev. D 100 (2019) 096004
- [9] B. Odom, D. Hanneke, B. D’Urso, and G. Gabrielse Phys. Rev. Lett. 97,(2006) 030801
- [10] D. Hanneke, S. Fogwell Hoogerheide, and G. Gabrielse, Phys. Rev. A 83, 052122 (2011).
- [11] R. Bouchendira et al., Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 080801.
- [12] R. H. Parker, C Yu, W. Zhong, B. Estey and H. Müller, Science 360, 191 (2018)
- [13] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [14] R. Ruffini, G. Vereshchagin, S-S. Xue, Phys. Rep. **487** (2010)
- [15] M. Planck, Verh. D. Physik. Ges. Berlin 2 (1900) 202
- [16] M. Planck, Ann der Phys. 37, (1912) 642
- [17] O. Klein, Z. Phys. 53, 157 (1929).
- [18] A. Calogeracos, N. Dombey, Contemp. Phys. 40, 313 (1999).
- [19] E.S. Fradkin, D.M. Gitman and S.M. Shvartsman, Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum (Springer-Verlag, Berlin 1991)

- [20] S. Haouat and R. Chekireb, *Mod. Phys. Lett. A.* **26**, 2639 (2011)
- [21] S. Haouat and R. Chekireb, *Int. J. Theor. Phys.* **51**, 1704 (2012)
- [22] S. Haouat and R. Chekireb. *Int. J. Mod. Phys. A* **30**, 1550081 (2015).
- [23] G. Dunne, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **223**, 1055 (2014)
- [24] R. Schuetzhold, H. Gies, G. Dunne, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 130404 (2008)
- [25] A. Di Piazza, E. Lotstedt, A. I. Milstein, C.H. Keitel, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 170403 (2009).
- [26] M. J. A. Jansen and C. Müller, *Phys. Rev. A* **88**, 052125 (2013)
- [27] G. Torgrimsson, C. Schneider, J. Oertel and R. Schutzhold, *J. HEP* 06, 043 (2017)
- [28] I. A. Aleksandrov, G. Plunien, V. M. Shabaev, *Phys. Rev. D* 97, 116001 (2018)
- [29] I. Sitiwaldi, B. S. Xie, *Phys. Lett. B* 777, 406 (2018)
- [30] G. Torgrimsson, C. Schneider, and R. Schutzhold, *Phys. Rev. D* 97, 096004 (2018)
- [31] G Torgrimsson, *Phys. Rev. D* 99, 096002 (2019)
- [32] S. Biswas, A. Shaw and P. Misra ; *Gen. Rel. Grav.* **34**, 665 (2002)
- [33] S. Biswas and I. Chowdhury ; *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 937 (2006)
- [34] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper and E. Mottola, *Phys. Rev. Lett.* 67, 2427 (1991).
- [35] D. B. Blaschke, A. V. Prozorkevich, G. Roepke, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, D. S. Shkirmanov, S. A. Smolyansky, *Eur. Phys. J. D* **55**, 341 (2009)
- [36] C. K. Dumlu, *Phys. Rev. D* **79**, 065027 (2009)
- [37] G. Dunne and C. Schubert, *Phys. Rev. D* **72**, 105004 (2005)
- [38] G. Dunne, Q. Wang, H. Gies, and C. Schubert, *Phys. Rev. D* **73**, 065028 (2006)
- [39] S. P. Kim and D. N. Page, *Phys.Rev. D* **65**, 105002 (2002)
- [40] S. P. Kim and D. N. Page, *Phys. Rev. D* **73**, 065020 (2006).
- [41] G. Dunne and T. M. Hall, *Phys. Lett. B* **419**, 322 (1998)
- [42] G. Dunne, *From Fields to Strings : Circumnavigating Theoretical Physics*, pp. 445-522 (2005)
- [43] S. Haouat and L. Chetouani, *Phys. Scr.* **75**, 759 (2007).
- [44] S. P. Kim, H. K. Lee, Y. Yoon, *Phys.Rev. D* **78**, 105013 (2008)

- [45] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov, Sov. J. Nucl. Phys. **11**, 596(1970) .
- [46] A. I. Nikishov, Sov. Phys. JETP , Vol **30** N 4 (1970) .
- [47] A. I. Nikishov, Nucl. Phys. B 21, 346 (1970).
- [48] A.I. Nikishov, Proc. P.N. Lebedev Phys. Inst. 111, 153 (Nauka, Moscow 1979).
- [49] F. Domingue-Adame . Physics Letters A 136, 175 (1989).
- [50] Y. Zheng, T. L`u, J. Liu and W. Su. Semiconductors Science and Techniques 12, 1235 (1997).
- [51] C. Y.Chen, D. S.Sun and F. L.Lu. Physics Letters A 330, 424(2004).
- [52] Y. F. Diao, L. Z. Yi and C. S. Jia. Physics Letters A 332, 157(2004).
- [53] O Panella, S Biondini and A Arda, J. Phys. A : Math. Theor. 43 325302 (2010)
- [54] X. Chen, C. F. Li and Y. Ban. Physics Letters A 354, 161(2006).
- [55] A. D. Alhaidari, H.Bahlouli and A. Al-Hasan. Physics Letters A Volume 349 (2006).
- [56] A. Arda, R. Sever . Int. J. Theor. Phys. 48, 945 (2009).
- [57] A. Soyulu1, O.Bayrak and I.Boztosun. Chin. Phys. Lett. Vol. 25, No. 8 , 2754 (2008).
- [58] C. S. Jia, T. Chen and L. G. Cui. Phys. Lett. A 373,1621(2009).
- [59] A. D. Alhaidari, Found.Phys. 40 (2010).
- [60] H Liang, J Meng, SG Zhou - Physics Reports, 570, (2015)
- [61] R. L. L. Vitória and H. Belich, Eur. Phys. J. C 78, 999 (2018)
- [62] E. V. B. Leite, R. L. L. Vitoria and H. Belich, Mod. Phys. Lett. A 34, 1950319 (2019)
- [63] BC Lütfüođlu, J Lipovský, J Kříž, Eur. Phys. J. Plus, 133, 17 (2018)
- [64] O Aydođdu, A Arda, R Sever, J. Math. Phys, 53, 102111 (2012)
- [65] W. M. Castilho and A. S. de Castro, Eur. Phys. J. Plus **131**, 94 (2016)
- [66] W. M. Castilho and A. S. de Castro, Annals Phys. **340**, 1 (2014)
- [67] M. Merad. International Journal of Theoretical Physics, Vol. 46, No. 8 (2007).
- [68] A. Leviatan, Phys. Lett. B 425, 1 (1998).
- [69] R. Lisboa et al., Phys. Rev. C 69, 024319 (2004).
- [70] J. N. Ginocchio, A relativistic symmetry in nuclei. Phys. Rep. 315, 231 (1999)
- [71] S. Shen, H. Liang, J. Meng, P. Ring and S. Zhang, Phys. Lett. B 781 (2018) 227–231

- [72] ϕ . Gron, IL Nuovo Cimento B91, 57 (1986)
- [73] J. M. Overduin, P. S. Wesson, Phys. Rep. 283, 303 (1997)
- [74] O. von Roos and H. Mavromatis, Phys. Rev. B 31, 2294 (1985)
- [75] K. Young, Phys. Rev. B, 39, 13434 (1989)
- [76] B. R. Holstein, Topics in Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Redwood (1992)
- [77] F. Schwabl, Advanced Quantum Mechanics (Springer-Verlag Berlin Heidelberg , Berlin, 2008)
- [78] A. Hansen and F. Ravndal, Phys. Scr. **23**, 1036 (1981).
- [79] W. Greiner, B. Muller and J. Rafelski, Quantum Electrodynamics of Strong Fields(Springer-Verlag, Berlin, 1985).
- [80] A. I. Nikishov, Problems of atomic science and technology, Special issue dedicated to the 90-birthday anniversary of A. I. Akhieser, Kharkov, Ukraine, p.103 (2001).
- [81] A. I. Nikishov, Phys. Atom. Nucl. **67**, 1478 (2004).
- [82] S. Haouat and L. Chetouani, Eur. Phys. J. C **41**, 297 (2005)
- [83] S. Haouat and Kh. Nouicer, Phys. Rev. D 89, 105030 (2013).
- [84] S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, A. A. Shishmarev, Phys. Rev. D **93**, 105040 (2016)
- [85] S. P. Gavrilov and D. M. Gitman, Int. J. Mod. Phys. A **31**, 1641031 (2016).
- [86] D.M. Gitman and S.P. Gavrilov, Russian J Phys. **59**, 1723 (2016)
- [87] S.P. Gavrilov and D.M. Gitman, Phys. Rev. D **93**, 045033 (2016)
- [88] S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, A. A. Shishmarev, Phys. Rev. D **96**, 096020 (2017)
- [89] S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, A. A. Shishmarev, Phys. Rev. D 99, 116014 (2019).
- [90] T. C. Adorno, S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, Eur. Phys. J. C 80, 88 (2020)
- [91] F. Sauter, Z. Phys. **73**, 547 (1931).
- [92] A. I. Nikishov, Nucl. Phys. B **21**, 346 (1970).
- [93] M. S. Marinov, V. S. Popov, Fortschritte der Physik **25**, 373 (1977)
- [94] M. F. Linder, A. Lorke, and R. Schützhold, Phys. Rev. B 97, 035203 (2018)
- [95] L. Chetouani, M. Merad, T. Boudjedaa, A. Lecheheb, Int. J. Theor. Phys. **43**, 1147 (2004)

- [96] M. Merad, *Int. J. Theor. Phys.* **46**, 2105 (2007)
- [97] H. Kleinert, R. Ruffini, S-S Xue, *Phys. Rev. D* **78**, 025011 (2008)
- [98] A. Chervyakov and H. Kleinert, *Phys.Rev. D* **80**, 065010 (2009)
- [99] S. P. Kim, H. K. Lee, Y. Yoon, *Phys. Rev. D* **82**, 025015 (2010)
- [100] A. Chervyakov and H. Kleinert, *Phys. Part. Nucl.* **49**, 374 (2018)
- [101] K. Rajeev, S. Chakraborty and T. Padmanabhan, *Eur. Phys. J. C* **78**, 836 (2018).
- [102] B. R. Holstein, *Am. J. Phys.* **66**, 507 (1998).
- [103] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York 1979)
- [104] T. Padmanabhan, *Pramana J. Phys.* **37**, 179 (1991)
- [105] Q. G. Lin, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **25**, 17 (1999)
- [106] N. Tanji, *Annals Phys.* **324**, 1691 (2009)
- [107] G. Schäfer and H. Dehne, *J. Phys. A : Math. Gen.* **13**, 517 (1980)
- [108] S. Haouat and R. Chekireb. *Eur. Phys. J. C* **72**, 2034 (2012).
- [109] A. Sogut, K. Havare. *Nuclear Physics B90* (2015).
- [110] E. Bavarsad, S. P. Kim, C. Stahl, S. S. Xue, *Phys. Rev. D* **97**, 025 (2018)
- [111] M. Achour, L. Khodja and S. Zaim, *Int. J. Mod. Phys. A* **34** (16) (2019).
- [112] J. N. Ginocchio, *Phys. Rev. Lett.* **78**, **436** (1997)
- [113] J. N. Ginocchio and A. Leviatan, *Phys. Lett. B* **425**, **1** (1998)
- [114] J. N. Ginocchio and A. Leviatan, *Phys. Rev. Lett.* **87**, **072502** (2001)