

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L 'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



N° d'ordre :.....

Série :.....

**Université Mohammed Seddik
BENYAHIA - Jijel**
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Électrotechnique

Thèse Présentée
Pour l'obtention du Diplôme de Doctorat LMD
Spécialité :
Conception et modélisation des dispositifs électromagnétiques

Par :

Asma AZZOUZA

Thème :

**Etude et développement de modèles électromagnétiques
pour les systèmes à aimants permanents et à matériaux
supraconducteurs**

Soutenue le : **21/ 04 / 2019** , Devant le Jury composé de :

Mr. MEKIDECHE Mohamed Rachid	Professeur	Université de Jijel	Président
Mr. ALLAG Hicham	Professeur	Université de Jijel	Rapporteur
Mr. HACIB Tarik	Professeur	Université de Jijel	Examineur
Mr. MEHASNI Rabia	Professeur	Université de Constantine I	Examineur
Mr. CHERIET Ahmed	Professeur	Université de Biskra	Examineur

DEDICACES

A l'esprit de mon cher grand-père, à ma grand-mère, à mes chers parents, à mes frères et sœurs

Remerciements

Ce travail de recherche s'est déroulé au laboratoire L2EI (Laboratoire Électrotechnique et d'électronique industrielle de Jijel), sous la direction du Monsieur le professeur **Hicham ALLAG**, directeur du L2EI.

Tout d'abord je tiens à remercier chaleureusement Monsieur **Hicham ALLAG**, Professeur à l'Université Mohamed Seddik Benyahia de Jijel et directeur du laboratoire (L2EI) pour la confiance qu'il m'a accordé en m'encadrant durant mon master et en m'accueillant comme doctorant et membre permanent au sein du même laboratoire, je tiens à lui exprimer aussi mes sincères remerciement pour le respect et les conseils qu'il m'a toujours apportés.

Je remercie chaleureusement messieurs, **Jean-Paul YONNET**, **Pascal TIXADOR**, directeurs de recherche CNRS pour leur aide et leurs conseils réguliers.

Je tiens à remercier spécialement Monsieur **Omar TEKOUK** pour son soutien durant toute la période de thèse.

Je remercie les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et accepté de juger mon travail: Monsieur **Mohamed Rachid MEKIDECHE**, Professeur à l'Université Mohamed Seddik Benyahia de Jijel, rapporteur et président du jury, Monsieur **HACIB Tarik**, Professeur à l'Université Mohamed Seddik Benyahia de Jijel, examinateur, Monsieur **MEHASNI Rabia**, Professeur à l'Université Frères Mentouri de Constantine I, examinateur et Monsieur **CHERIET Ahmed** Professeur à l'Université de Biskra, examinateur

Je remercie aussi tous mes collègues de travail au sein de la Faculté des Sciences et de la Technologie de l'Université Mohamed Seddik Benyahia de Jijel, ainsi que tous mes amis.

Je remercie évidemment toute ma famille, merci pour votre soutien et les moments de joie que vous m'avez procurés.

SOMMAIRE GENERAL

Sommaire Général

Introduction Générale	3
<i>Chapitre I : Les matériaux supraconducteurs et les aimants permanents</i>	6
I.1 Introduction	8
I.2 Supraconductivité.....	8
I.2.1 Découverte de la supraconductivité	8
I.2.2 Grandeurs critiques	8
I.2.3 Principales caractéristiques remarquables des matériaux supraconducteurs	9
I.2.3.1 Résistivité nulle.....	9
I.2.3.2 Effet Meissner	10
I.2.4 Classification des supraconducteurs.....	11
I.2.4.1 Supraconducteurs de type I.....	12
I.2.4.2 Supraconducteurs de type II.....	12
I.2.5 L'état mixte des supraconducteurs de type II.....	12
I.2.6 Matériaux supraconducteur	14
I.2.6.1 Matériaux à basse température critique.....	14
I.2.6.2 Matériaux à haute température critique.....	16
I.2.7 Applications des supraconducteurs	19
I.2.7.1 Imagerie par Résonance Magnétique (IRM).....	20

I.2.7.2	Stockage de l'énergie magnétique (SMES)	21
I.2.7.3	Câbles supraconducteurs	21
I.2.7.4	Machines supraconductrices	22
I.2.7.5	Aimants permanents supraconducteurs.....	23
I.2.7.6	Sustentation magnétique	23
I.3	Aimants permanents	24
I.3.1	Histoire des aimants	24
I.3.2	Caractéristiques générale des matériaux magnétiques	25
I.3.3	Propriétés magnétiques des matériaux magnétiques.....	26
I.3.4	Principaux types des aimants permanents.....	28
I.3.5	Application des aimants permanents.....	30
I.4	Conclusion.....	30
<i>Chapitre II : Calcul tridimensionnel des grandeurs électromagnétiques issues des aimants permanents</i>		31
II.1	Introduction	33
II.2	Equations de Maxwell.....	33
II.2.1	Moment magnétique	34
II.2.2	Polarisation magnétique.....	35
II.2.3	Calcul de l'induction magnétique \vec{B} créé par le volume aimanté (représentations ampérienne)	36

II.2.3.1	Calcul de \vec{B} en un point extérieur	36
II.2.4	Calcul de champ magnétique créé par le volume aimanté (représentation coulombienne)	37
II.2.5	Calcul de \vec{H} à l'intérieur de la matière	38
II.3	Calcul du potentiel vecteur, champ et induction magnétique créés par un aimant permanent de forme parallélépipédique	39
II.3.1	Cas où l'aimantation est orientée suivant la direction Oz	39
II.3.1.1	Calcul du potentiel vecteur où la direction du courant est suivant la direction Ox et Oy	39
II.3.1.2	Calcul du champ et induction magnétique	42
II.3.2	Exemple de calcul de l'induction magnétique d'un aimant permanent où polarisation de l'aimant est suivant Oz.....	43
II.3.3	Cas où l'aimantation est orientée suivant la direction Ox ou Oy	47
II.3.3.1	Suivant Ox.....	47
II.3.3.2	Suivant Oy.....	49
II.4	Conclusion.....	49
Chapitre III : Équations électromagnétiques décrivant le comportement des supraconducteurs		50
III.1	Introduction	52
III.2	Modèles mathématiques existants pour les supraconducteurs	52
III.2.1	Modèle de l'état critique	52

III.2.1.1	Modèle de Bean (cas particulier du Modèle de l'état critique).....	53
III.2.2	Modèle de la loi en puissance	53
III.2.3	Dépendance en champ magnétique de J_c	55
III.2.3.1	Modèle de KIM	55
III.2.3.2	Modèle exponentiel.....	56
III.3	Méthodes et techniques d'aimantation	56
III.3.1	Refroidissement sous champ (Field Cooling (FC))	56
III.3.2	Refroidissement hors champ (Zero Field Cooling (ZFC))	57
III.4	Modélisation d'une plaque mince supraconductrice par le modèle de Bean	59
III.4.1	Principe de modèle de Bean	60
III.4.2	Calcul de l'aimantation d'une plaque mince supraconductrice par le modèle de Bean	63
III.4.2.1	La première aimantation	63
III.4.2.2	Cas où le champ appliqué augmente.....	65
III.4.2.3	Cas où le champ appliqué diminue	66
III.4.3	Observation de l'aimantation pour une période complète du champ appliqué ..	67
III.4.4	Influence du champ magnétique sur la densité de courant critique.....	69
III.4.4.1	Modèle de Kim.....	69
III.4.4.2	Modèle Exponentiel	71
III.4.5	Modèle d'hystérésis dynamique	73
III.5	Conclusion.....	75

<i>Chapitre IV : Calcul analytique en 3D des forces d'interactions entre les aimants permanents et les supraconducteurs</i>	76
IV.1 Introduction	78
IV.2 Calcul des forces d'interactions entre les aimants permanents et les supraconducteurs HTC	78
IV.2.1 Cas où l'aimant permanent et la pénétration de la densité de courant dans la pastille supraconductrice HTC est suivant O_x	79
IV.2.2 Cas où l'aimant permanent et la pénétration de la densité de courant dans la pastille supraconductrice HTC est suivant O_y	82
IV.2.3 Les composantes de la force totale	85
IV.3 Application et calcul de force globale d'interaction verticale entre l'aimant et la pastille supraconductrice (expérience de lévitation magnétique).....	86
IV.3.1 Résultats obtenus par voie numérique	87
IV.3.2 Résultats obtenus par voie analytique.....	89
IV.3.3 Influences paramétriques importantes	92
IV.3.3.1 Effet de la dépendance de la densité de courant critique sur le champ magnétique interne (de pénétration) de la pastille supraconductrice HTC	92
IV.4 Application et calcul de force globale d'interaction latérale entre l'aimant et la pastille supraconductrice	94
IV.5 Couplage mécanique	98
IV.5.1 Système étudié (formulation du système mécanique)	98
IV.6 Conclusion.....	101

Conclusion Générale.....	104
Annexe A	108
Annexe B	111
Références	119

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Avec la découverte des supraconducteurs et le besoin d'augmenter toujours leurs températures critiques, les applications qui contiennent ces matériaux sont devenues de plus en plus réalisables et envahissantes [Hull.99]. Actuellement, on trouve les supraconducteurs dans l'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM), le stockage de l'énergie magnétique (SMES) (Superconducting Magnetic Energy Storage), les câbles supraconducteurs d'énergie, les moteurs couples pour la propulsion navale (moteurs supraconducteurs), le tokamak Tore Supraconducteur, la lévitation magnétique et beaucoup d'autres applications notamment en spatiale et en militaire qui nécessitent des champs magnétiques élevés.

Ces nombreuses applications et d'autres, utilisent différemment les propriétés des supraconducteurs qui sont vraiment abondantes. Le supraconducteur peut être préparé comme un aimant permanent en saisissant une quantité de courant à l'intérieur. Il est dans certains cas, un diamagnétique parfait qui repoussent les champs magnétique extérieurs. Pour des types bien spécifiques, on retrouve le diamagnétisme décrit par Meissner et un autre phénomène de piégeage de champs magnétique causé par des impuretés volontaires réalisées par les fabricants.

Le but de cette thèse est de pouvoir calculer et de prédire le comportement des supraconducteurs dans des applications contenant mutuellement les supraconducteurs et les aimants permanents terres rares à aimantations rigides. Le choix s'est atterri sur la fameuse application de base de lévitation magnétique entre seulement une pastille supraconductrice et un aimant permanent de forme parallélépipédique.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres dont le premier raconte l'histoire de la supraconductivité. Dans cette partie, on commence par décrire les premières apparitions, la spécification de ces matériaux en termes de températures, des champs électriques et magnétiques. La place des supraconducteurs dans l'industrie moderne est bel et bien rappelée

en évoquant ses différents domaines d'utilisation. Les aimants permanents à leur tour ont trouvé leur place dans ce chapitre. L'accent est mis sur les terres rares qui développent une bonne quantité d'énergie et qui sont réputés par la rigidité de l'aimantation. Ces derniers sont les seules à pouvoir supporter des champs inverses importants, d'où le couplage avec des supraconducteurs est parfaitement souhaitable contrairement aux autres types d'aimants permanents plus anciens.

A cause de la rigidité de l'aimantation, les modèles intégrales peuvent être appliqués plus facilement que les autres. Comme conséquence, en deuxième chapitre, l'approche intégrale est énoncée à partir des équations de Maxwell. Montrant qu'il existe deux types de considérations, nous avons pris l'approche dite ampérienne afin de pouvoir calculer les interactions entre les courants par l'énergie ou les inductances mutuelles. Les aimants choisis de formes parallélépipédiques sont remplacés par des bobines fines de mêmes dimensions.

Le troisième chapitre est dédié aux différents modèles capables de prédire le comportement non-linéaire des matériaux supraconducteurs. Dans la littérature, les développements sont faits pour un nombre très limité de cas, caractérisant souvent la première aimantation. Dans ce volet, nous avons développé des expressions mathématiques issues des calculs des intégrales pour des pénétrations de courants dépendantes des champs magnétiques appliqués. Cet aspect de calcul original, suivi de techniques de programmation très poussées permet de suivre les changements de direction des champs magnétiques appliqués. De cette manière, nous pouvons observer même les cycles mineurs de l'aimantation quel que soit l'aspect aléatoire de la variation des champs magnétiques. Il est intéressant aussi dans cette partie, de constater que le supraconducteur se comporte comme une superposition de plusieurs bobines épaisses et dont les largeurs sont variables et identiques aux distances de pénétration des courants induits.

Toujours avec l'approche ampérienne où l'aimant est considéré comme une bobine fine à courant linéique constant équivalent à la polarisation de l'aimant. Nous cherchons dans le chapitre quatre à calculer les grandeurs d'interactions (Energie, inductances mutuelles et forces) avec les modèles de bobines dynamiques et épaisses représentant la pastille

supraconductrice. Les calculs sont faits en se basant sur les intégrales de Green entre les formes plates de la bobine fine de l'aimant et le volume conducteur parallélépipédique des bobines dynamiques parcouru par le courant critique du supraconducteur et dont les dimensions sont issues du champ exercé par l'aimant lui-même. Tous les développements sont exprimés en détails et consolidés par des résultats issus de l'expérience de lévitation.

Le travail est achevé par une conclusion générale et des perspectives et des annexes démontrant la publication dans le journal IEEE Transaction on Magnetics.

CHAPITRE I

I.1 Introduction

Le magnétisme et les aimants permanents ont été aperçus depuis bien longtemps mais la découverte de la supraconductivité nous est venue un peu plus tardivement. Actuellement, le progrès et l'envahissement des supraconducteurs dans l'industrie sont surprenants (conducteurs, limiteurs de courant, lévitation...etc.). Dans notre travail, on s'intéresse à l'interaction électromagnétique des supraconducteurs avec les aimants permanents. Pour ces raisons, dans ce chapitre nous allons survoler à la fois les matériaux supraconducteurs et les aimants permanents en évoquant leurs caractéristiques théoriques, leurs domaines d'utilisation et de fabrication.

I.2 Supraconductivité

I.2.1 Découverte de la supraconductivité

La supraconductivité a été mise en évidence pour la première fois en 1911 par Heike Kamerlingh Onnes dans son laboratoire de l'université de Leiden. Cette découverte a été possible grâce au succès de la liquéfaction de l'hélium en 1908 permettant l'étude des matériaux à des températures inférieures à $-268,95^{\circ}\text{C}$. Le premier matériau ayant montré un comportement supraconducteur est le mercure à $-268,95^{\circ}\text{C}$.

Depuis cette découverte, la recherche de nouveaux matériaux supraconducteurs a fasciné les chercheurs pour trouver ou fabriquer des fils supraconducteurs à des températures toujours plus élevées. Cette recherche s'est accrue depuis 1986 avec la découverte des matériaux supraconducteurs dits à « haute température critique » (SHTC). Ces matériaux possèdent des propriétés supraconductrices à des températures supérieures à $-253,15^{\circ}\text{C}$ et pouvant aller jusqu'à $-139,15^{\circ}\text{C}$ à pression ambiante pour l' $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$. Ce supraconducteur atteint une température critique de 164K sous très forte pression (31GPa) [Gao.94a], [Gao.94b].

I.2.2 Grandeurs critiques

L'état supraconducteur est géré par trois paramètres fondamentaux, appelées grandeurs critiques. Ces grandeurs sont la température critique T_c , champ magnétique critique H_c et la densité de courant critique J_c .

Les grandeurs critiques T_c , $B_c = \mu_0 H_c$ et J_c sont interdépendantes et forment une surface, dite surface critique dans l'espace (T, B, J) . La surface critique délimite l'état non dissipatif de l'état dissipatif et non l'état supraconducteur de l'état normal, à cause notamment des

définitions de la densité de courant critique et du champ d'irréversibilité. Lorsque le courant critique est dépassé, des vortex se déplacent, mais le matériau est toujours considéré dans l'état supraconducteur bien qu'il dissipe de l'énergie. La surface critique peut être modifiée par les contraintes mécaniques ou les déformations [Tixador.D2701].

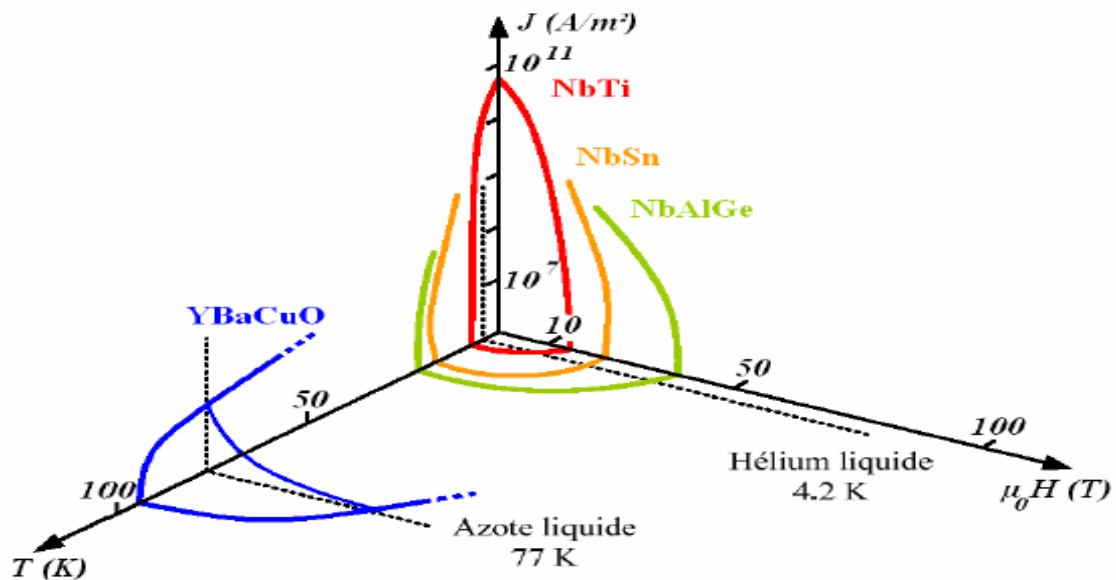


Figure I.1 Surface critique des matériaux supraconducteurs

I.2.3 Principales caractéristiques remarquables des matériaux supraconducteurs

Les propriétés fondamentales des matériaux supraconducteurs sont donc :

- une résistivité nulle.
- expulsion des lignes d'induction (Effet Meissner).

I.2.3.1 Résistivité nulle

La première signature remarquable des matériaux supraconducteurs est leur résistance électrique nulle mise en évidence dans l'expérience de Kamerlingh Onnes.

C'est le phénomène le plus connu : en dessous d'une certaine température, appelée température critique, la résistivité d'un supraconducteur s'annule très brutalement (Figure I.2), du moins elle devient non mesurable. L'intervalle de température sur lequel la résistivité disparaît peut être extrêmement réduit, seulement quelques milli kelvins pour certains matériaux. Des expériences très précises donnent des valeurs de résistivité inférieures à 10^{-25} Ωm [Tixador.03].

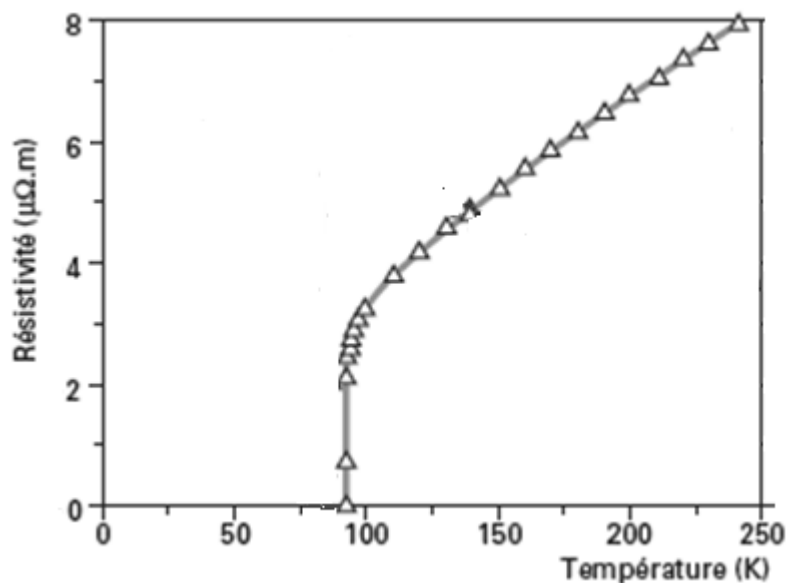


Figure I.2 Résistivité d'un échantillon d'YBaCuO (A. Sulpice, CNRS-CRTBT)

I.2.3.2 Effet Meissner

La deuxième signature des matériaux supraconducteurs est leur capacité à expulser un champ magnétique extérieur appliqué H_a (de faible amplitude), quand ils sont refroidis en dessous de leur T_c . De la même façon, si l'on refroidit un supraconducteur, puis on l'applique un faible champ magnétique, les lignes de flux ne pénètrent pas dans le matériau. Le champ magnétique B à l'intérieur du matériau est donc nul. Cette caractéristique appelée effet Meissner. Meissner et Ochsenfeld [Meissner.33] ont montré qu'un supraconducteur exclut tout champ magnétique appliqué inférieur au champ critique relatif au supraconducteur, comme le montre la Figure I.3. Dans ce cas, un supraconducteur est donc un matériau parfaitement diamagnétique, puisqu'il maintient un état où le champ est totalement nul. Des études plus détaillées ont montré que, pour un champ magnétique faible, celui-ci décroît progressivement à la surface du supraconducteur sur une profondeur de l'ordre de 10^{-5} cm. Lorsqu'on applique un champ H , un courant permanent apparaît à la surface du supraconducteur de façon à écranter le champ [Lévy.97].

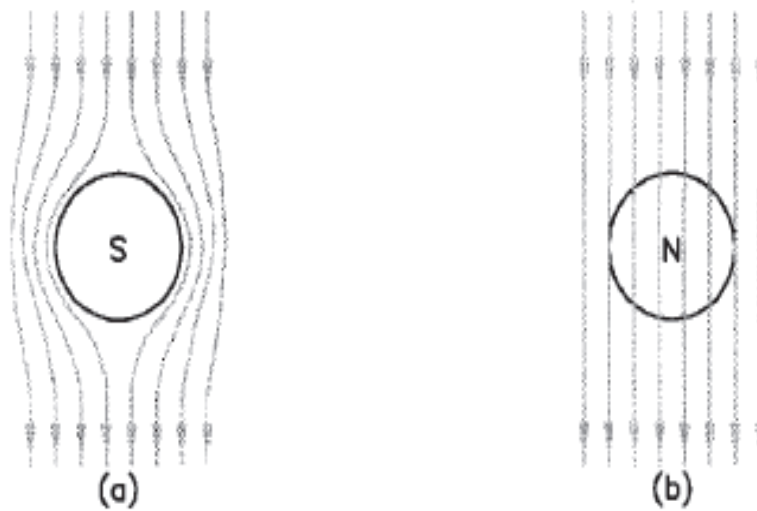


Figure I.3 Lignes de champ autour d'un supraconducteur. (a) Lorsque $H < H_c$ le système est parfaitement diamagnétique et (b) quand $H > H_c$ le système redevient normal.

I.2.4 Classification des supraconducteurs

Les supraconducteurs présentent, principalement deux comportements qui définissent deux types de supraconductivité.

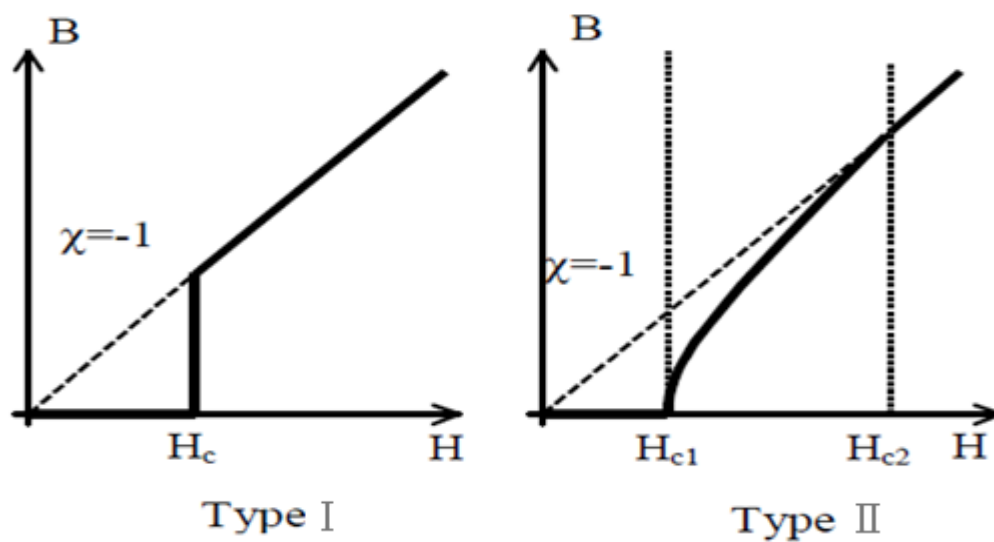


Figure I.4 Induction magnétique en fonction du champ magnétique, des supraconducteurs idéaux de types I et II

I.2.4.1 supraconducteurs de type I

Les supraconducteurs sont appelés supraconducteurs du type I lorsqu'ils nécessitent une température extrêmement basse pour devenir supraconducteurs et ils ne comportent que les deux états, supraconducteur et normal [Tixador.95]. Ce type de supraconducteur est caractérisé par un seul champ critique H_c et leur diamagnétisme est parfait. Lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique extérieur appliqué $H < H_c$, l'induction magnétique B à l'intérieur du matériau est quasiment nulle et l'aimantation $M = -H$. Si $T > T_c$ ou si $H > H_c$ alors le matériau retrouve l'état normal.

I.2.4.2 supraconducteurs de type II

Ces supraconducteurs possèdent deux champs magnétiques critiques H_{c1} et H_{c2} avec le second qui est nettement plus élevé que le premier. Ils sont considérés comme supraconducteurs lorsque nous leur appliquons un champ magnétique $H < H_{c2}$. L'induction magnétique critique, qui est égale à $B_{c2} = \mu_0 \cdot H_{c2}$ (dès que $H \gg H_{c1}$), peut atteindre plusieurs Teslas dans les oxydes supraconducteurs c'est la raison pour laquelle ces derniers sont les plus utilisés dans la pratique. En dessous de H_{c1} , le comportement est analogue à celui des supraconducteurs de type I, l'induction magnétique est quasiment nulle (Figure I.4). Pour des champs compris entre les deux valeurs critiques, le diamagnétisme n'est pas parfait et l'écrantage est partiel. Le supraconducteur se trouve dans l'état mixte [Tixador.95], [Tixador.D2701]. Bien que supraconducteur, le matériau est pénétré par le champ magnétique externe. Il apparaît que la répartition n'est pas homogène. L'induction magnétique pénètre partiellement par un ensemble de tubes appelés vortex (parallèle au champ magnétique) qui laissent passer chacun un quantum de flux. La profondeur de pénétration du flux magnétique augmente jusqu'à atteindre la valeur critique B_{c2} . Au-delà de la seconde valeur critique H_{c2} , le flux magnétique est grand et le matériau revient à l'état normal.

I.2.5 L'état mixte des supraconducteurs de type II

L'état mixte, également appelé phase de Shubnikov, est une caractéristique intrinsèque des supraconducteurs de type-II qui existe lorsqu'un champ magnétique $H_{c1} < H < H_{c2}$ est appliqué. L'existence de cet état mixte s'explique par le fait que le matériau essaie toujours d'être dans un état d'enthalpie libre minimale.

A. Abrikosov avait prévu que le flux magnétique pouvait pénétrer un supraconducteur sous forme de tubes de flux, appelés aussi fluxons, chacun d'entre eux possédant un quantum de flux Φ_0 . Les fluxons ne sont pas indépendants, ils se repoussent et forment un réseau triangulaire, portant le nom de réseau d'Abrikosov. Le pas de ce réseau, trouvé expérimentalement, est :

$$\text{Pour } B_{c1} < B < B_{c2} \quad a = \left(\frac{2\phi_0}{\sqrt{3}B} \right)^{1/2} \quad (\text{I.1})$$

Une modification du champ magnétique appliqué entraîne systématiquement une modification de la densité du réseau. Pour chaque tube, il existe un vortex de supra courants qui maintient le flux à l'intérieur. Ces supra courants protègent les régions supraconductrices environnantes du flux et assurent ainsi le diamagnétisme dans les régions supraconductrices.

Sur la Figure I.5, le réseau de vortex (a), la densité d'électrons supraconducteurs n_s (b) et l'induction magnétique B à l'intérieur du supraconducteur (c) sont schématiquement représentés pour un supraconducteur dans l'état mixte [Berger.06].

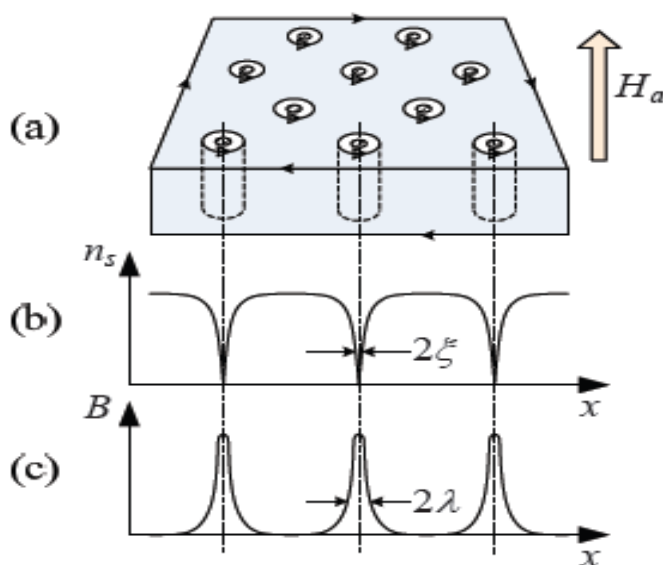


Figure I.5 Illustration du réseau de vortex, de la longueur de cohérence ξ et de l'épaisseur de pénétration de London λ pour un supraconducteur dans l'état mixte

I.2.6 Matériaux supraconducteur

I.2.6.1 Matériaux à basse température critique

Les matériaux à basse température critique sont généralement utilisés comme des fils ou des brins véhiculant des courants forts à savoir :

I.2.6.1.1 Alliage métallique de niobium et de titane (NbTi)

Le Niobium-Titane (NbTi) est un supraconducteur de type II, à basse température critique. Il a été découvert en 1961 par une équipe du laboratoire de Pittsburgh en Pennsylvanie [Hulm.91]. Le NbTi présente une température critique de 9,2 K. Il est par conséquent généralement refroidi par de l'hélium liquide dont la température d'ébullition est de 4,2 K. La première utilisation massive de conducteurs à base de NbTi eut lieu au Tevatron, construit au Laboratoire National Enrico Fermi (« Fermi National Accelerator Laboratory », dit FNAL ou Fermilab), près de Chicago, et qui fonctionne sans problème particulier depuis 1983 [EDW 85]. Son faible coût, sa facilité de fabrication et ses bonnes performances en font le matériau supraconducteur le plus utilisé actuellement. Il est capable, à 4,2 K, de transporter des densités de courant de plus de 4 000 A/mm² à 4 T (Figure I.6) [Tixador.D2703].

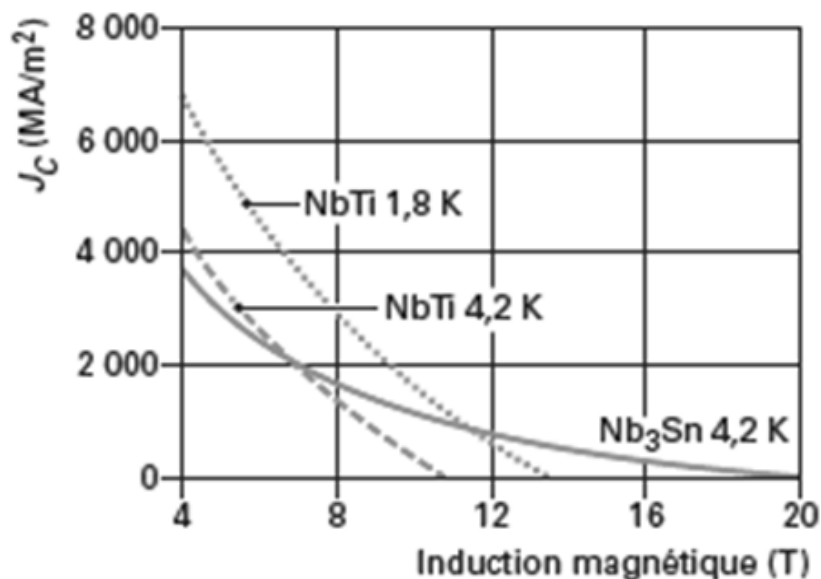


Figure I.6 Caractéristiques critiques « typiques » du NbTi et du Nb₃Sn

Il est actuellement utilisé dans les bobines de champ des IRM (Imagerie par Résonance Magnétique), en particulier pour l'imagerie médicale « corps entier », qui réclament des

inductions magnétiques de 0,5 à 4 T. Dans le domaine de la recherche, il est employé dans les accélérateurs de particules, afin de produire les fortes inductions magnétiques nécessaires pour dévier les faisceaux de particules. Toujours dans les accélérateurs, il est utilisé dans les cavités accélératrices supraconductrices, afin d'améliorer leur rendement. Il est aussi présent dans le projet de réacteur par fusion nucléaire ITER.

I.2.6.1.2 Composé intermétallique de niobium et d'étain (Nb_3Sn)

Le niobium étain (Nb_3Sn) est un supraconducteur de type II à basse température critique. Il a été découvert en 1958 avant le NbTi (1962) et ses propriétés critiques intrinsèques (T_c et H_{c2}) sont meilleures pour la température critique T_c de 18K, pour l'induction magnétique critique B_{c2} à 0K est 25,5T. Cependant le Nb_3Sn n'a pas connu le même développement technologique que le NbTi car c'est un composé intermétallique extrêmement fragile : des déformations de 0,1 % seulement peuvent le rompre.

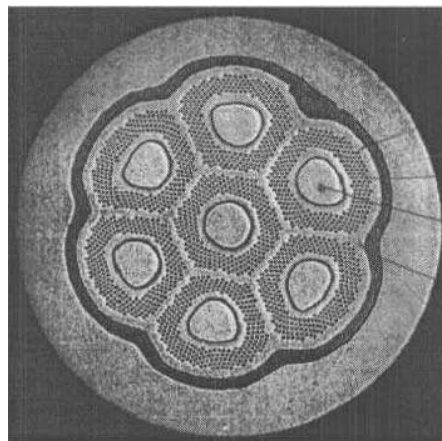


Figure I.7 Brin de Nb_3Sn ($\phi_e = 0,765$ mm, 2 856 filaments de $3,9$ μm de diamètre)

Si le Nb_3Sn reste délicat à utiliser par rapport au NbTi, il présente de bien meilleures propriétés de transport sous fortes inductions magnétiques, au-delà de 7 T à 4,2 K et 11,5 T à 1,8 K. Par ailleurs sa température critique plus élevée (18 K au lieu de 9,5 K pour le NbTi) entraîne une meilleure stabilité. Il est réservé aux aimants créant une induction magnétique élevée, supérieure à 11 T, mais ne convient plus au-delà de 20 T environ [Tixador.D2703].

I.2.6.2 Matériaux à haute température critique

Les supraconducteurs à haute température critique sont des composés intermétalliques, donc très fragiles mécaniquement comme le Nb_3Sn .

I.2.6.2.1 Conducteurs YBaCuO (conducteurs déposés)

L'YBaCuO est un supraconducteur de type II à haute température critique ($T_c = 93 \text{ K}$). Il est classé, avec le BiSCCO, des supraconducteurs à haute température critique les plus utilisés. Sa température critique élevée lui permet d'être refroidi à l'azote liquide, à 77 K . Leur structure est de type pérovskite. Ce sont des oxydes de cuivre ou cuprates formés de n plans CuO_2 , séparés par des atomes d'yttrium (ou une autre terre rare) ou de calcium (Figure I.8) et intercalés entre deux blocs identiques d'extrémité qui contiennent des métaux ou des terres rares et de l'oxygène [Tixador.D2703].

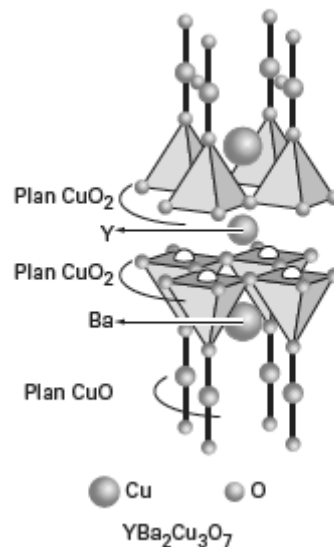


Figure I.8 Structure de supraconducteurs à haute température critique

Il peut s'exposer sous la forme d'une céramique massive ou, être déposé sous forme de ruban, afin d'être utilisé pour fabriquer des bobinages. À 77 K , sa densité de courant critique est environ 340 A/mm^2 . Cependant, à cette température, il ne supporte pas bien le champ magnétique. Une induction de 50 mT suffit pour diviser par deux la valeur de J_c . Par contre, lorsqu'il est refroidi à la température de l'hélium liquide, ses propriétés sont remarquables. A une induction supérieure à 17 T , il devient meilleur que le Nb_3Sn . Il est ainsi utilisé dans

certaines applications à très forts champs magnétiques. Son comportement magnétique est anisotrope car le cristal est orienté suivant une certaine direction [Leclerc.13].

L'YBaCuO est très difficile à fabriquer, un matériau onéreux et peu disponible.

Le principe des conducteurs déposés est de faire croître, éventuellement à travers une couche tampon, une couche d'YBaCuO (d'une épaisseur de l'ordre du micro-mètre) sur un support très bien texturé pour une croissance épitaxiale. Deux techniques principales existent :

- La technique RABiTS (Rolling Assisted Bi-axially Textured Substrates).
- La technique IBAD (Ion Beam Assisted Deposition).

De plus, il est relativement fragile et des précautions doivent être prises lors de la réalisation des bobinages. La Figure I.9 montre la constitution d'un ruban YBaCuO.

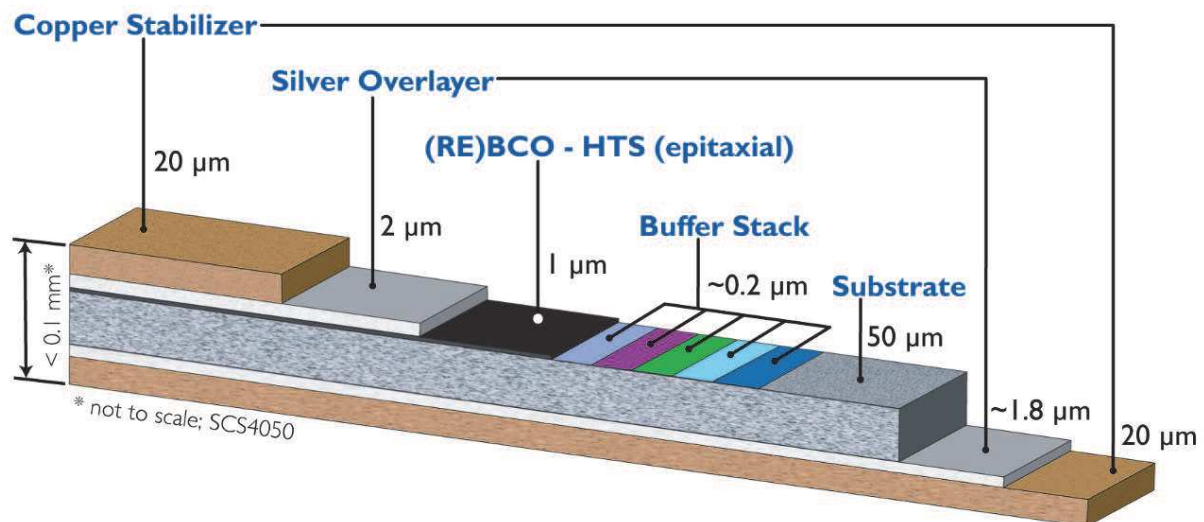


Figure I.9 Composition d'un ruban YBaCuO

D'après la Figure I.9 la couche supraconductrice ne fait qu'1 µm d'épaisseur. Ce ruban est constitué de plusieurs couches. Sa fabrication est complexe. Les couches de cuivre permettent d'améliorer la stabilité thermique du ruban [Leclerc.13].

I.2.6.2.2 Conducteur PIT BiSrCaCuO

Le BiSCCO est un supraconducteur de type II à haute température critique. Deux variantes principales existent : le BiSCCO 2212 ($T_c = 95$ K) et le BiSCCO 2223 ($T_c = 108$ K). Les chiffres montrent la proportion d'atomes respectivement de Bismuth, Strontium, Calcium et Cuivre. Les meilleures performances actuelles est le BiSCCO 2223. On peut le trouver sous forme massive ou sous forme de ruban ou fils. Sa haute température critique lui permet d'être

refroidi à l'azote liquide à 77 K. Le fabricant Sumitomo a développé une technique de fabrication des rubans BiSCCO très performante, à tel point qu'il a appelé son produit DI-BSCCO pour Dynamically Innovative BiSCCO. Les densités de courant obtenues peuvent rivaliser, à la température de l'azote liquide avec celles de l'YBaCuO. A titre d'exemple, le ruban vendu par Sumitomo peut atteindre une densité de courant de 200 A/mm². En comparaison, le ruban YBaCuO fabriqué par Superpower peut atteindre une densité de courant de 340 A/mm². Tout identiquement l'YBaCuO, à 77 K, le ruban BiSCCO est anisotrope et voit ses propriétés rapidement dégradées par l'induction magnétique [Leclerc.13].

I.2.6.2.3 Conducteur MgB₂

La supraconductivité dans l'alliage magnésium bore MgB₂ n'a été découverte que très récemment en 2001 même si c'est un matériau élaboré depuis 1953, peu onéreux et largement utilisé comme réactif en chimie [Tixador.D2703]. Le MgB₂ est un supraconducteur un peu particulier. Il possède une température critique de 39 K. Au dessus de 25 K la théorie de Bardeen Cooper Schrieffer (BCS) n'explique pas la supraconductivité. Cependant, en ajoutant à cette théorie la notion de supraconductivité multibande, celle du MgB₂ peut être expliquée [Tropeano.11]. Les paires d'électrons supraconducteurs s'assemblent dans le MgB₂ dans deux bandes d'énergie différentes. Ceci produit des paires de Cooper ayant des propriétés différentes. Certaines se comportent comme celles de la supraconductivité de type I, d'autres comme celles de la supraconductivité de type II. C'est pourquoi le MgB₂ est souvent qualifié entre les deux types de supraconducteur. La limite entre la supraconductivité à basse et haute température est généralement fixée à 30 K. Le MgB₂ fait donc partie des supraconducteurs à haute température critique. Le MgB₂ peut se présenter sous la forme d'un matériau massif. Il peut aussi être emprisonné dans une matrice métallique et mis sous la forme d'un fil ou d'un ruban. Le MgB₂ présente l'avantage d'être très bon marché. La matrice utilisée lors de la fabrication des conducteurs est généralement un métal peu onéreux. Un autre avantage est sa température critique relativement haute en comparaison des supraconducteurs à basse température critique. Il est donc plus facile à refroidir et nécessite une puissance cryogénique plus faible. C'est un bon compromis en termes de performances et de prix car il offre des propriétés électriques et magnétiques intéressantes. La Figure I.10 illustre la caractéristique d'un fil MgB₂ capable de transporter 234 A/mm² à 25 K et 3T [Leclerc.13].

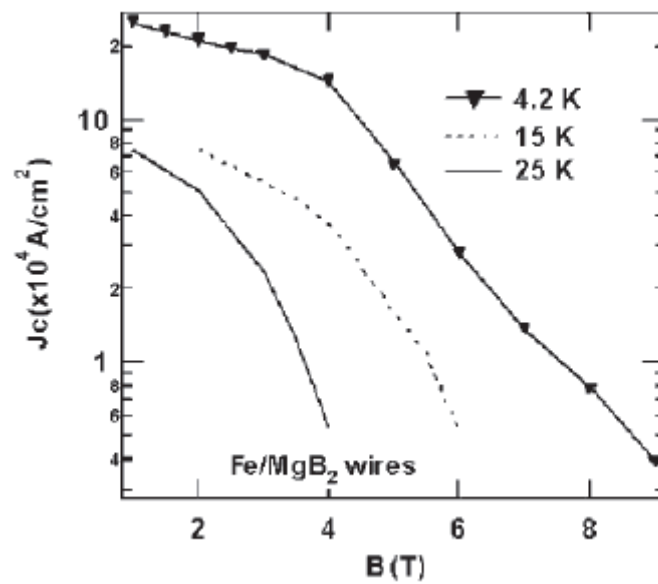


Figure I.10 Densité de courant critique en fonction de l'induction magnétique pour un fil MgB₂ à différentes températures

I.2.7 Applications des supraconducteurs

En effet, les conducteurs classiques actuellement utilisés sont limités par leurs échauffements dus aux pertes par effet Joule. Les circuits magnétiques classiques ont aussi deux principales limitations, le premier est l'induction magnétique qui est limitée à 2T à cause des propriétés physiques des matériaux utilisées dans la fabrication des circuits magnétiques. La deuxième, est le poids et la taille qu'il faut minimiser. Dans les machines électriques classiques, le couple est une grandeur importante, celui-ci est directement lié au courant qui est fortement limitée par l'effet Joule. Pour leurs propriétés exceptionnelles, les matériaux supraconducteurs sont utilisés dans quelques domaines comme la fusion nucléaire, l'imagerie médicale, le train à lévitation magnétique et le stockage d'énergie électrique. Ces matériaux permettent le transport de courant avec des pertes négligeables en courant continu, et inférieures aux conducteurs classiques en courant alternatif suivant la valeur utile de l'induction magnétique générée par les matériaux supraconducteurs.

Nous présentons ci-dessous quelques applications majeures des matériaux supraconducteurs SHTC. Cependant, nous rappelons que nous sommes intéressés dans le cadre du travail de cette thèse par les applications de la lévitation magnétique.

I.2.7.1 Imagerie par Résonance Magnétique (IRM)

Le champ magnétique produit est utilisé dans les imageurs médicaux (Figure I.11) pour polariser le noyau de certains atomes, comme le proton d'hydrogène. Celui-ci, excité par un champ radiofréquence, permet de reconstituer des images tridimensionnelles de grande qualité, en particulier pour les tissus mous du corps humain.



Figure I.11 Imageur médical supraconducteur

Cette Imagerie par Résonance Magnétique (IRM), non invasive, est une aide précieuse au diagnostic médical. Le volume aimanté est important pour faire de l'imagerie du corps humain et le rapport signal sur bruit croît avec la valeur de l'induction. Ces deux caractéristiques font que plus de 90 % des imageurs médicaux « corps humain » utilisent des bobinages supraconducteurs pour le champ de polarisation, d'environ 1 T. Plus de 10 000 imageurs supraconducteurs fonctionnent à travers le monde avec une fiabilité remarquable. C'est un marché toujours en extension.

L'exploitation des données des noyaux polarisés conduit à d'autres informations comme la nature, la composition chimique et la structure des échantillons analysés. Ces techniques sont en plein développement dans les industries chimiques et pharmaceutiques.

Les chercheurs en biomédical utilisent la spectroscopie pour analyser en trois dimensions la structure des protéines pour le génome humain. Si le volume nécessaire peut être réduit (analyse de petits échantillons), l'induction nécessaire est considérable. En effet, l'induction requise est proportionnelle à la fréquence qui détermine la finesse d'exploration : pour 1 GHz, l'induction est de 23,5 T. Les appareils commerciaux atteignent des fréquences de 800 MHz. Les développements sont importants pour des appareils 900 et 1 000 MHz. Les bobines

supraconductrices sont constituées de NbTi dans les zones où l'induction est réduite (inférieure à 10 T environ) et des conducteurs Nb₃Sn pour les régions à fort champ. Les développements actuels portent sur des inserts supraconducteurs à haute température critique (Bi₂Sr₂CaCu₂O) mais utilisés à très basse température (inférieur à 5 K) pour les zones à champ maximal [Tixador.D2703].

I.2.7.2 Stockage de l'énergie magnétique (SMES)

Une bobine supraconductrice court-circuitée peut servir pour stocker de l'énergie magnétique. Ce dispositif est le SMES (*Superconducting Magnetic Energy Storage*). C'est l'un des rares moyens de stoker directement l'électricité. Son rendement est excellent, supérieur à 95 %, coût cryogénique compris. Si l'énergie stockée ramenée au volume n'est pas extrêmement élevée (environ 20 MJ/m³), elle est libérable très rapidement et les puissances volumiques peuvent être considérables. Les SMES sont principalement utilisés pour :

- stoker de l'énergie pour des alimentations non-interruptibles pour des charges sensibles aux perturbations.
- stabiliser des réseaux électriques par transferts contrôlés d'énergie entre la bobine et le réseau et augmenter ainsi des capacités des systèmes existants, repoussant les limites de stabilité et améliorant la qualité ; le SMES est alors un FACTS (*Flexible Alternative Current Transmission System*) particulier.
- fournir une énergie impulsionnelle très rapide (physique fondamentale, armement, lanceur électromagnétique, formage magnétique,...).

Plusieurs SMES sont en service. Ils utilisent tous des bobines en NbTi. Les énergies stockées sont de quelques mégajoules avec des puissances de l'ordre du mégawatt.

I.2.7.3 Câbles supraconducteurs

Les câbles supraconducteurs d'énergie sont particulièrement intéressants pour le « *retrofit* ». C'est le remplacement d'un câble conventionnel par un câble supraconducteur d'une capacité en puissance nettement supérieure, nécessaire pour le développement de certains réseaux. Dans ce cas, l'absence presque totale de génie civil contrebalance le coût élevé du câble supraconducteur, sans compter les difficiles problèmes d'expropriation parfois.

Plusieurs démonstrateurs d'envergure ont prouvé la faisabilité technique des câbles supraconducteurs et apportent un retour d'expérience :

- au Japon un câble de 114 MVA sur 100 mètres fonctionne avec succès depuis juin 2001.

— une sous-station à Copenhague (Danemark) a été équipée d'un câble supraconducteur de 30 m d'une puissance de 104 MVA (30 kV, 2 000 A). En deux années, il a transporté 226 GWh pour 50 000 utilisateurs et a subi un défaut sans dégradation (6 000 A pendant 142 ms). La première réalisation commerciale concerne le projet de Long Island. C'est une liaison supraconductrice de 600 MVA-138 kV de 610 mètres, elle est installée dans un conduit souterrain existant entre deux sous-stations.

Le conducteur utilise des rubans PIT Bi-2223 d'ASC. Tout le système de réfrigération (azote liquide) est fait par Air Liquide et l'enveloppe cryogénique par Nexans [Tixador.D2703].

I.2.7.4 Machines supraconductrices

Une autre application concerne les moteurs couples pour la propulsion navale. Les navires s'électrifient de plus en plus pour tendre vers le navire tout électrique. La chaîne de propulsion électrique reste plus lourde que celle conventionnelle d'où la recherche de moteurs de propulsion, légers et performants. Seule la supraconductivité permet de réduire significativement le poids, d'un facteur 3 pour des machines de plusieurs dizaines de mégawatts à 100 voire 200 tr/min.

L'U.S. Navy a lancé un programme très ambitieux. Une étape importante a été franchie avec les essais réussis d'un moteur de 5 MW à 230 tr/min en 2003. Cette taille est déjà représentative et correspond à un certain marché. L'étape suivante est un moteur de 36,5 MW à 120 tr/min.

Le tokamak Tore Supra (Figure I.12), à Cadarache en Provence, a ouvert avec brio la voie en 1998 des machines supraconductrices avec son système toroïdal constitué de 18 bobines en NbTi refroidi par un bain d'hélium superfluide à 1,8 K et pression atmosphérique (« bain Claudet ») produisant en continu 4,2 T sur le plasma [Tixador.D2704].

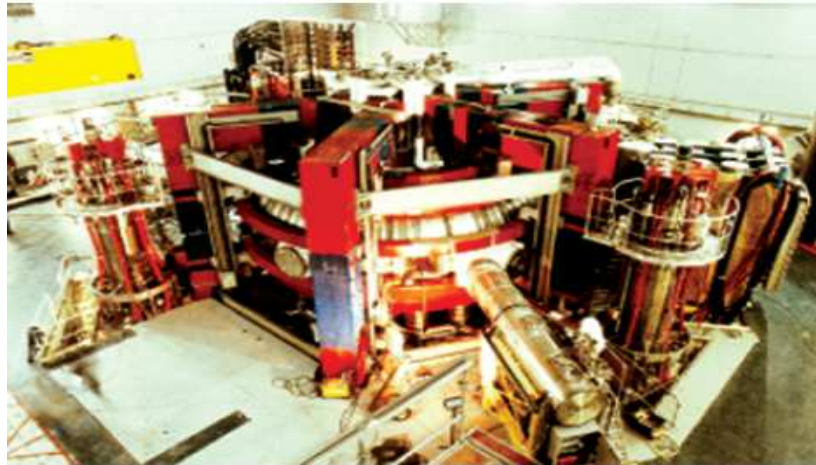


Figure I.12 Tore supraconducteur : premier tokamak à système toroïdal supraconducteur

I.2.7.5 Aimants permanents supraconducteurs

La propriété remarquable des matériaux supraconducteurs de pouvoir piéger un champ magnétique, permet de concevoir des aimants permanents supraconducteurs.

Les aimants permanents supraconducteurs présentent l'avantage de pouvoir fournir des valeurs de champ magnétique beaucoup plus importantes par rapport à celle fournit par les aimants permanents conventionnels, surtout à basses température. Des valeurs de champ piégé de 9 T à 40 K et de 12.5 T à 22 K ont été obtenues pour un aimant $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ (Y123) [Gruss.01] et plus récemment la valeur de 17 T à 29 K pour un disque de 2,65 cm de diamètre [Tomita.03]. Cette propriété des supraconductrices hautes températures critique SHTC peut être exploitée comme source de champ à la place des aimants permanents conventionnels qui sont limités en valeurs de champ. La réalisation des moteurs supraconducteurs avec des SHTC massifs comme pôles magnétiques dans une machine tournante à entrefer axial à l'université des sciences et de technologies marines de Tokyo en fait un exemple [Miki.06], [Alloui.12].

I.2.7.6 Sustentation magnétique

Les supraconducteurs de type II peuvent être utilisés pour réaliser la sustentation magnétique d'objets de masse éventuellement très élevée. L'une des applications la plus importante et la plus prometteuse dans ce domaine est la réalisation des trains à lévitation magnétique (Magnetic levitation) Maglev [Teranishi.02].



Figure I.13 Shanghai Transrapid basé sur la lévitation magnétique

Le Maglev est équipé des boucles de matériaux supraconducteurs qui lui permettent de léviter sous l'action des aimants placés sur la voie. Le train ne touche donc pas les rails : il reste suspendu à quelques centimètres du sol. Ce dispositif présente de nombreux avantages [Song.06], la plupart étant liés à l'absence de contact avec le sol : grande vitesse où bien très grande vitesse (le train expérimental Japonais Yamanashi a pu atteindre la vitesse de 580 Km/h), sécurité (car le train ne peut, dans aucun cas, quitter son rail), véhicule peu bruyant (en raison de l'absence de bruits de frottement et de roulement), consommation d'énergie réduite grâce aux supraconducteurs et enfin une maintenance réduite [Allag.10].

I.3 Aimants permanents

I.3.1 Histoire des aimants

L'histoire des aimants commence avec les premières découvertes de pierres avec des propriétés magnétiques aussi appelées aimants, à partir de 1845 ce type de pierre a été appelé magnétite aurait été utilisée à cette époque pour la fabrication de boussoles rudimentaires guidant les voyageurs dans les déserts [Robert.87]. Il s'agit d'un fer noir plus minéral combiné à l'oxygène ou hydroxyde de fer, qui se développe de façon naturelle par l'activité volcanique et possède des propriétés magnétiques. Les premiers aimants artificiels en fer apparaissent en Europe vers le XII^e siècle, et peu d'amélioration ont été réalisés dans ce domaine jusqu'aux années 1930. Les matériaux utilisés étaient alors des aciers durs martensitiques au chrome, au tungstène ou au cobalt, caractérisés par la traditionnelle forme

en U. Les améliorations technologiques réalisées au cours des quatre-vingts dernières années ont complètement révolutionné les possibilités des aimants permanents. De nouveaux types ont été découverts, synthétisés et industrialisés, avec des performances telles que les applications ont pu se multiplier dans de nombreux domaines. Aujourd'hui, on trouve des aimants dans des domaines aussi divers que la santé, les moteurs électriques qui sont, de fait, des moteurs magnétiques, les télécommunications, etc. [Leprince.D2100], [Allag.10], [Colin.94].

I.3.2 Caractéristiques générale des matériaux magnétiques

Les matériaux que l'on utilise pour leurs propriétés magnétiques peuvent se classer en deux grandes familles les matériaux magnétiques durs et les matériaux magnétiques doux.

On appelle *matériaux magnétiques durs* ceux dans lesquels le champ coercitif H_c est élevé. La surface de leur cycle d'hystérésis principal est importante (Figure I.14), comme celle des aimants permanents.

On appelle *matériaux magnétiques doux* ceux dans lesquels le champ coercitif H_c est petit. La surface de leur cycle d'hystérésis principal est faible (Figure I.14), et qui peut donc s'aimanter facilement sous l'action d'une excitation extérieure [Robert.87].

En effet, quand un matériau est placé dans un champ électromagnétique extérieur H , il se crée une induction magnétique B propre au matériau qui est due à la polarisation des domaines, petites régions dans lesquelles les dipôles magnétiques s'orientent localement. Lorsque l'on supprime le champ extérieur, il reste une polarisation permanente dans le cas des matériaux magnétiques durs, appelée *rémanence*, alors qu'il n'y en a pratiquement pas dans les matériaux magnétiques doux [Leprince.D2100].

Le diagramme $B-H$, appelé aussi courbe d'aimantation ou cycle d'hystérésis est la courbe de réponse de matériaux magnétiques. La simplicité de l'équation $B=\mu H$ n'est qu'apparente. En fait, cette relation n'est pas linéaire puisque la perméabilité μ dépend de H , d'où la nécessité d'une représentation de la fonction $B(H)$ [Robert.87]. La Figure I.14 montre la forme de ces courbes dans les deux cas des matériaux magnétiques évoqués.

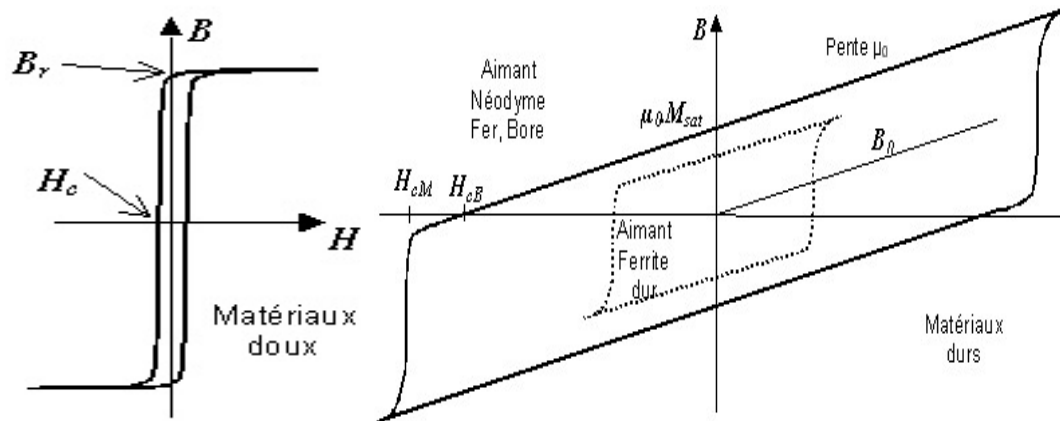


Figure I.14 Cycles d'hystérésis des matériaux doux et durs

Il existe maintenant une grande variété de matériaux pour aimants permanents dont les propriétés et les applications sont très diverses. Ce sont soit des matériaux céramiques soit des matériaux métalliques, qui sont caractérisés par leurs principales propriétés magnétiques, l'induction rémanente B_r et le champ coercitif H_c , et qui ont de plus des caractéristiques mécaniques ou physico-chimiques qui influent largement sur les domaines d'applications [Leprince. D2100].

I.3.3 Propriétés magnétiques des matériaux magnétiques

Les aimants sont principalement caractérisés par leurs cycles d'hystérésis et plus particulièrement par le deuxième quadrant de ce cycle appelé *courbe de désaimantation* d'où on peut tirer les propriétés suivantes:

- L'induction rémanente B_r , l'induction qui subsiste dans un matériau magnétique après saturation, mesurée dans un circuit magnétique fermé.
- Le champ coercitif de l'induction H_{cB} qui est le champ démagnétisant annulant l'induction ; plus sa valeur est élevée et plus l'aimant est stable.
- Le produit énergétique $(BH)_{max}$, indique la qualité magnétique. Plus le produit est élevé, plus l'énergie est stockée dans un matériau magnétique. En effet, le meilleur usage du matériau magnétique est obtenu quand l'aimant travaille à BH maximum.
- les valeurs H_m et B_m du point de fonctionnement optimal correspondant à $(BH)_{max}$.

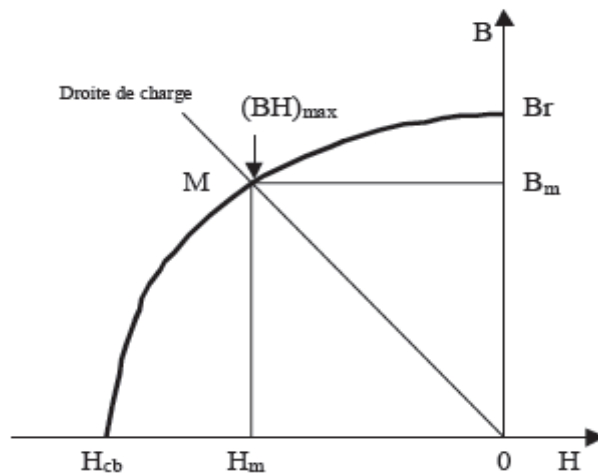
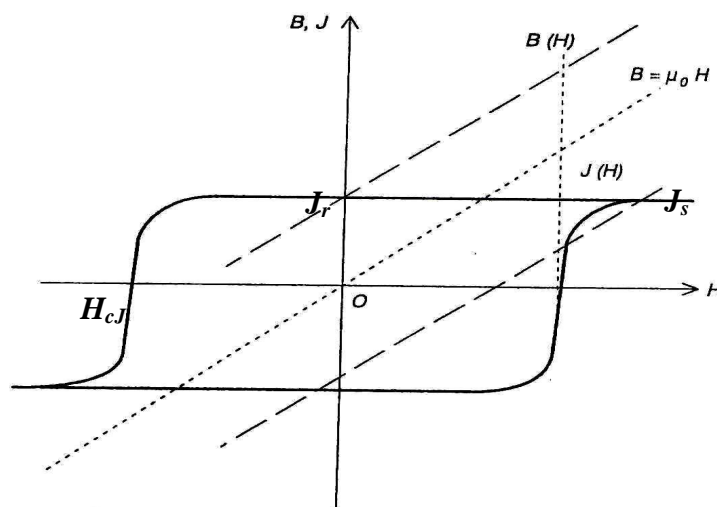


Figure I.15 Courbe de désaimantation

On peut classer les différents types d'aimant en fonction de leur champ coercitif de l'aimantation H_{cJ} et de leur produit énergétique $(BH)_{\max}$, qui sont avec la rémanence B_r les paramètres principaux pour l'utilisateur et qui déterminent son choix.

Figure I.16 Cycle d'hystérésis $J(H)$ et $B(H)$ en fonction de H

La caractéristique magnétique d'un aimant est représentée par les cycles d'hystérésis $J(H)$ et $B(H)$ (Figure I.16), obtenus quand on applique à l'aimant un champ magnétique H .

H : Champ magnétique, en ampères par mètre (A/m).

J : Polarisation magnétique, en teslas (T).

B : Induction magnétique, en teslas (T).

La constante μ_0 représente la perméabilité du vide vaut $\mu_0 = 4 \times \pi \times 10^{-7}$ H / m.

La perméabilité apparente de l'aimant est pratiquement égale à celle de l'air.

Il faut aussi noter que l'on utilise quelquefois l'aimantation M (en A/m) au lieu de la polarisation J pour caractériser l'aimant.

Les points caractéristiques du cycle $J(H)$ sont présentés sur la Figure I.16, où :

- J_s est la *polarisation à saturation*, obtenue quand un champ magnétique H important est appliqué dans la direction de l'aimantation.
- J_r est la *polarisation rémanente*, qui persiste quand le champ magnétique H devient nul.
- H_{cJ} est le *champ coercitif de la polarisation*, qui indique la valeur du champ magnétique appliqué en sens inverse de la polarisation J pour laquelle celle-ci est globalement nulle. En pratique la polarisation s'est retournée dans la moitié du volume de l'aimant [Allag.10].

I.3.4 Principaux types des aimants permanents

Les **AlNiCo** sont des alliages les plus largement utilisés comme matériaux magnétiques durs à base de fer, d'aluminium et de nickel, avec des additions de cobalt, cuivre ou de titane. Ils peuvent être isotropes ou anisotropes.

Pour les isotropes $Br \approx 0.7$ T, H_{cJ} de 50 à 80 A/m et $(BH)_{\max}$ de 12 à 18 KJ/m³. Le titane augmente la trempabilité, le niobium la coercivité.

Les **ferrites** sont des composés d'oxyde de fer, de baryum et de strontium. Ils sont obtenus par frittage et peuvent être isotropes ou anisotropes. Suivant la composition et le mode de fabrication, on obtient les propriétés suivantes : Br de 0.2 à 0.4 T, H_{cJ} de 140 à 300 A/m et $(BH)_{\max}$ de 10 à 40 KJ/m³. Ces aimants possèdent des performances modestes mais se sont imposés dans de très nombreuses applications en raison de leur faible prix de revient et d'une rigidité magnétique élevée permettant de les utiliser dans les machines. En raison de la faible valeur d'aimantation rémanente, il faut cependant recourir à des structures complexes de machines, à concentration de flux, pour atteindre des couples massiques et volumiques élevés.

Les **terres rares** tels que les **Samarium-Cobalt** sont beaucoup plus performants et autorisent une température de fonctionnement élevée (jusqu'à 300°C), mais ils sont très coûteux en

raison notamment de la présence du cobalt dans leur composition. De plus, le cobalt est interdit dans le domaine automobile pour des raisons de normes environnementales. L'induction rémanente de ce type d'aimant est de l'ordre de 0,9 T, et $(BH)_{\max}$ vaut environ entre 160 jusqu'à 280 kJ/m³.

Malgré le développement des Nd-Fe-B dont le coût est plus réduit, les aimants samarium-cobalt sont toujours utilisés. Ils occupent des créneaux que les aimants Nd-Fe-B n'arrivent pas à atteindre [Trémolet.00] .

Les **Néodyme-Fer-Bore** (Nd-Fe-B) ont des performances supérieures aux Samarium Cobalt et sont beaucoup moins coûteux mais leur tenue à la température est moins bonne (jusqu'à 160°C). Les aimants Nd-Fe-B frittés possèdent de sérieux atouts : tout d'abord leur aimantation très élevée dépasse 1,4 T pour les nuances les plus performantes, leur produit $(BH)_{\max}$ franchit les 400 kJ/m³.

L'inconvénient majeur des aimants Nd-Fe-B, et qu'ils sont assez sensibles à la corrosion. Une protection de surface après usinage est nécessaire, dont la nature dépendra de la température de fonctionnement [Trémolet.00] .

La Figure I.17 suivante présente les courbes de désaimantation des principaux types d'aimants permanents.

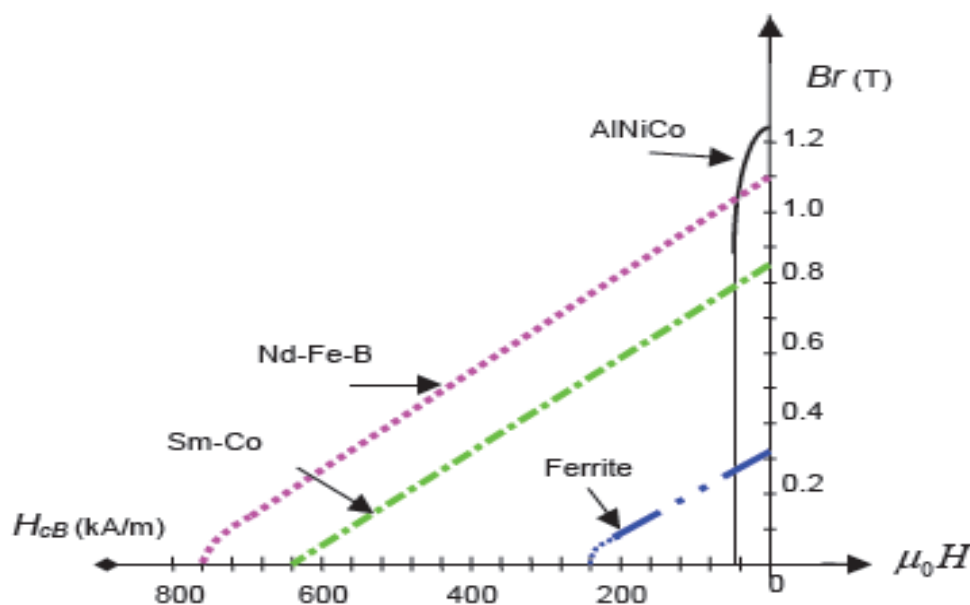


Figure I.17 Courbes de désaimantation des principaux types d'aimants

I.3.5 Application des aimants permanents

Les aimants sont très utilisés pour la lévitation aux suspensions passives à base d'aimants permanents (Théorème d'Earnshaw), la lévitation magnétique entre un aimant permanent et un supraconducteur.

Les aimants Nd-Fe-B sont utilisées dans la réalisation des actionneur de tête de lecture pour disque dur, haut-parleur, moteur à courant continu, moteur synchrone, accouplement magnétique, capteurs (ABS) ,moteur d'entraînement de disque dur, moteur pas à pas. À température de fonctionnement élevé les aimants en samarium cobalt sont utilisés dans la conception des moteurs d'asservissement, accouplements magnétiques, l'existence de champ magnétique en l'absence de courant est mise à profit pour la réalisation de capteurs, par exemple des capteurs de proximité, la RMN (Résonance Magnétique Nucléaire) et donc l'IRM, valves cardiaques, micromoteurs,.....etc.

Les aimants sont aussi utilisés dans la conception de sources dipolaires afin de produire des plasmas micro-onde. Il faut cependant que celui-ci permette de vérifier les conditions de couplage RCE (Résonance Cyclotronique Electronique) soit 0,0875 Tesla pour un champ électrique tournant de 2,45 GHz, ils sont utilisés comme transducteurs d'une forme d'énergie en une autre forme d'énergie sans perdre leur propre énergie.

I.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons décrit quelques comportements remarquables des supraconducteurs à l'échelle macroscopique. Nous constatons que les propriétés uniques des supraconducteurs ont rendu leur utilisation très répandue dans les domaines industriels avancés et les technologies de pointe. Parmi les applications, nous sommes toujours intéressés par les dispositifs contenant à la fois des supraconducteurs et des aimants permanents. Evoquant aussi l'intérêt des aimants permanents dans ce même chapitre, nous permettra de comprendre et de mettre les bases théoriques permettant de bien poser le problème et de développer les modèles adéquats.

CHAPITRE II

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons les aimants permanents comme sources de champ magnétique. La fonction principale d'un aimant permanent est de créer un champ magnétique extérieur. En termes d'équivalence, l'aimant possède des pôles permettant de repousser et de recevoir le champ magnétique.

Pour comprendre le fonctionnement de matières aimantées dont les aimants permanents font partie, nous sommes obligé d'abord de passer par les fameuses équations de Maxwell et les notions des moments magnétiques.

II.2 Equations de Maxwell

Tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier au sein des dispositifs électrotechniques sont gérés par les équations de Maxwell et les équations caractéristiques du milieu à étudier. C'est James Clerk Maxwell (1831-1879) qui a réuni sous forme d'équation, les résultats accumulés depuis un siècle par Coulomb, Ampère, Faraday, Gauss, Weber et bien d'autres.

Ces équations de Maxwell sont exprimées ainsi :

Sous forme différentielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\text{div}(\vec{D}) = \rho \quad (\text{II.4})$$

Sous forme intégrale :

$$\oint_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{II.5})$$

$$\oint_{(c)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} + \iint_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{II.6})$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \rho \cdot dv \quad (\text{II.8})$$

Avec :

\vec{H} : Champ magnétique (A/m)

\vec{B} : Induction magnétique (T)

\vec{E} : Champ électrique (V/m)

\vec{J} : Densité de courant électrique ($\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$)

\vec{D} : Induction électrique ($\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$)

ρ : Densité de la charge électrique ($\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$)

L'équation de conservation de charge est donnée par :

$$\text{div}(\vec{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.9})$$

Le terme $\partial \vec{D} / \partial t$ dans l'équation (II.2) exprime la densité des courants de déplacement. Pour le cas des basses fréquences, ce terme peut être négligé. Avec cette hypothèse, l'équation de conservation est déduite par :

$$\text{div}(\vec{J}) = 0 \quad (\text{II.10})$$

On outre les équations de Maxwell, on a besoin des équations qui caractérisent les milieux :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{a}); \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{b}); \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{c}) \quad (\text{II.11})$$

Avec :

σ : Conductivité du milieu (en $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$).

μ : Perméabilité magnétique du milieu (en Hm^{-1}).

ϵ : Permittivité diélectrique du milieu (en Fm^{-1}).

II.2.1 Moment magnétique

Considérons une distribution de courants confinée au voisinage de l'origine des coordonnées O, à l'intérieur d'un volume fini (v'). Le potentiel vecteur est donné par :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (\text{II.12})$$

Où le vecteur $\vec{\mathcal{M}}$, appelé moment magnétique.

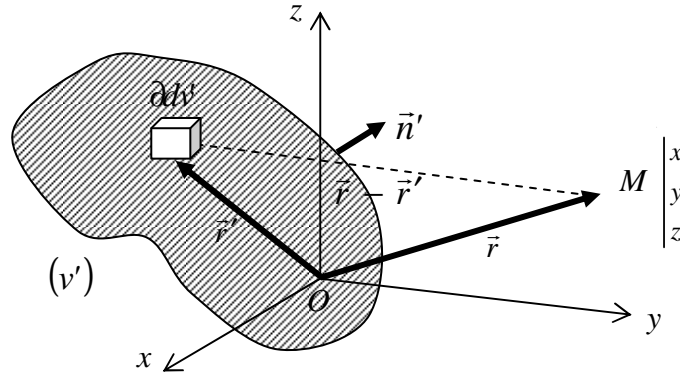


Figure II.1 Notations utilisées pour le calcul du potentiel vecteur dû à un volume aimanté

II.2.2 Polarisation magnétique

L'observation montre, que certains matériaux aimantés sont constitués par une population de moments magnétiques élémentaires, tant au niveau des forces subies quand on les plonge dans un champ externe que des champs d'induction qu'ils génèrent dans leur environnement. Il est donc naturel de leur associer une distribution de moments magnétiques que l'on caractérise par la polarisation magnétique définie en tout point P du matériau par la relation :

$$\vec{J}(\vec{r}') = \frac{\mu_0 d\vec{\mathcal{M}}(P)}{dv} \quad (\text{II.13})$$

De manière équivalente, on définit l'aimantation du matériau qui constitue donc la densité volumique de moment dipolaire par :

$$\vec{M} = \frac{\vec{J}}{\mu_0} \quad (\text{II.14})$$

L'aimantation s'exprime en A/m.

II.2.3 Calcul de l'induction magnétique \vec{B} créé par le volume aimanté (représentations ampérienne)

II.2.3.1 Calcul de \vec{B} en un point extérieur

Le champ \vec{B} est généralement issu des matériaux véhiculant des courants électriques ou des matériaux aimanté. Dans les premières, l'observation des effets associés à une circulation de courant permet de définir le champ d'induction magnétique \vec{B} qui lui est associé [D2080].

Une propriété importante est que \vec{B} est à flux conservatif, ou encore à divergence nulle. Il en résulte que \vec{B} dérive d'un potentiel vecteur \vec{A} , propriété que l'on écrit sous la forme :

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) \quad (\text{II.15})$$

Pour calculer le champ \vec{B} en un point extérieur, d'un volume aimanté (v'), dont l'aimantation $\vec{J}(\vec{r}')$, on remarque que la dimension caractéristique du volume définissant le moment élémentaire étant de l'ordre de quelques mailles atomiques, un point extérieur au matériau est dans une situation éloignée. On peut donc aller à l'expression (II.12) appliquée à la distribution (II.13) pour calculer \vec{A} . On obtient :

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (\text{II.16})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[\iint_{s'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' + \iiint_{v'} \frac{\vec{rot}(\vec{J})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right] \quad (\text{II.17})$$

On obtient alors \vec{B} à l'aide de l'équation (II.15). En fait, il est plus économique de recourir à la représentation ampérienne du matériau. Quelques manipulations d'analyse vectorielle appliquées à la relation (II.16) permettent d'établir que la distribution des moments élémentaires est équivalente pour le calcul de l'induction à deux distributions de courants « macroscopiques » \vec{j}^* et K^* données par :

\vec{j}^* est une densité volumique de courant définie en tout point intérieur au matériau donnée par :

$$\vec{j}^* = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{J})/\mu_0 \quad (\text{II.18})$$

K^* est une densité surfacique de courant définie en tout point de l'interface donnée par :

$$\vec{K}^* = (\vec{J} \times \vec{n})/\mu_0 \quad (\text{II.19})$$

\vec{n} désignant le vecteur normal à la surface au point considéré et orienté vers l'extérieur du matériau.

II.2.4 Calcul de champ magnétique créé par le volume aimanté (représentation coulombienne)

A partir de la notion de moment magnétique, le dipôle magnétique, fait de deux charges magnétiques opposées $-q$ et $+q$, situées en deux points respectifs A et B est donné par la relation :

$$\mu_0 \vec{\mathcal{M}} = q \overrightarrow{AB} \quad (\text{II.20})$$

La charge magnétique, n'a pas d'existence réelle : c'est par le jeu d'une équivalence formelle qu'elle a été introduite. Celle-ci n'est d'ailleurs pas définie de manière unique puisque c'est le produit $q \overrightarrow{AB}$ qui est relié au moment magnétique.

Enfin, on ne rencontrera jamais une charge isolée, une charge $+q$ étant toujours associée à une charge $-q$ au sein d'un dipôle. On verra que, à une échelle macroscopique, le matériau aimanté peut être décrit par une distribution de charges magnétiques quelconques. Il est donc utile de connaître les formules de base exprimant le champ généré par une charge élémentaire.

On définit alors une nouvelle grandeur, le champ d'excitation \vec{H} .

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (\text{II.21})$$

Au champ est associé le potentiel scalaire V suivant

$$\vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \quad (\text{II.22})$$

L'expression de potentiel scalaire V est donnée par :

$$V = \frac{1}{4\pi\mu_0} \iiint_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (\text{II.23})$$

On obtient alors \vec{H} à l'aide de l'équation (II.22) pour calculer le champ \vec{H} en un point extérieur. En fait, comme pour \vec{B} , il existe une représentation plus performante, il s'agit cette fois de la représentation coulombienne du matériau. On établit ainsi que la distribution des moments élémentaires est équivalente à la superposition de deux distributions « macroscopiques » de charges volumiques et surfacique données par :

Une répartition volumique de pôles avec une densité définie en tout point intérieur au matériau :

$$\rho^* = -\text{div}(\vec{J}) \quad (\text{II.24})$$

Une répartition surfacique de pôles avec une densité est définie en tout point de l'interface :

$$\sigma^* = (\vec{J} \cdot \vec{n}') \quad (\text{II.25})$$

II.2.5 Calcul de \vec{H} à l'intérieur de la matière

La situation d'un point intérieur est bien différente, car certains moments situés à proximité immédiate du point où on calcule le champ ne vérifient plus cette hypothèse. Une conséquence très importante est que vis-à-vis de ces contributions, la représentation du moment par une spire ou par un dipôle n'est plus équivalente, et les représentations ampérienne et coulombienne du matériau aimanté ne le seront donc pas non plus.

On montre cependant que le potentiel scalaire donné par (II.23) et son gradient restent définis à l'intérieur de la matière aimantée appliquées aux distributions de charges des équations (II.24), (II.25) pour définir \vec{H} .

On obtient alors que, à l'intérieur de la matière aimantée, champ d'induction, champ d'excitation et polarisation sont liés par la loi :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} \quad (\text{II.26})$$

Contrairement à ce qui se passait à l'extérieur du matériau, \vec{B} et \vec{H} ne sont plus colinéaires.

Dans ce qui suit on va s'intéresser uniquement au calcul des grandeurs électromagnétiques à l'extérieur des aimants à aimantations rigides. Pour bien expliquer la méthode, on va prendre comme exemple un aimant parallélépipédique dont l'aimantation est axiale Figure II.2.a. Ce dernier peut être remplacé par une distribution de charges sur la surface de ses pôles (Figure II.2.b), où par une bobine très fine (Figure II.2.c).

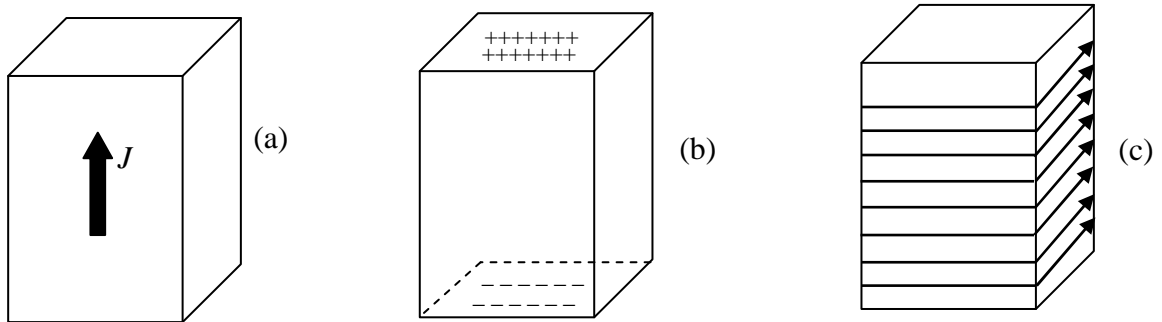


Figure II.2 Equivalence entre l'aimantation (a), la distribution de charges (b) et la répartition de courants ampériens(c)

Ces modèles, avec les considérations des aimantations rigides, conviennent parfaitement aux aimants terres rares.

II.3 Calcul du potentiel vecteur, champ et induction magnétique créés par un aimant permanent de forme parallélépipédique

II.3.1 Cas où l'aimantation est orientée suivant la direction Oz

On considère l'exemple de la Figure II.3, l'aimant permanent est de forme cubique avec une aimantation constante orientée selon l'axe z et remplacé par une bobine très fine (approche ampérienne). La bobine fine est constituée de quatre cotés, deux orientée suivant x et les deux autres sont suivant y . Les dimensions de l'aimant sont $(2a \times 2b \times 2c)$.

II.3.1.1 Calcul du potentiel vecteur où la direction du courant est suivant la direction Ox et Oy

Nous allons montrer les étapes de calcul du potentiel vecteur \vec{A} suivant la direction Ox en un point M de coordonnées (x, y, z) . La figure ci-dessous illustre bien le principe de calcul tridimensionnel de potentiel vecteur où la direction de courant est suivant Ox par l'approche ampérienne.

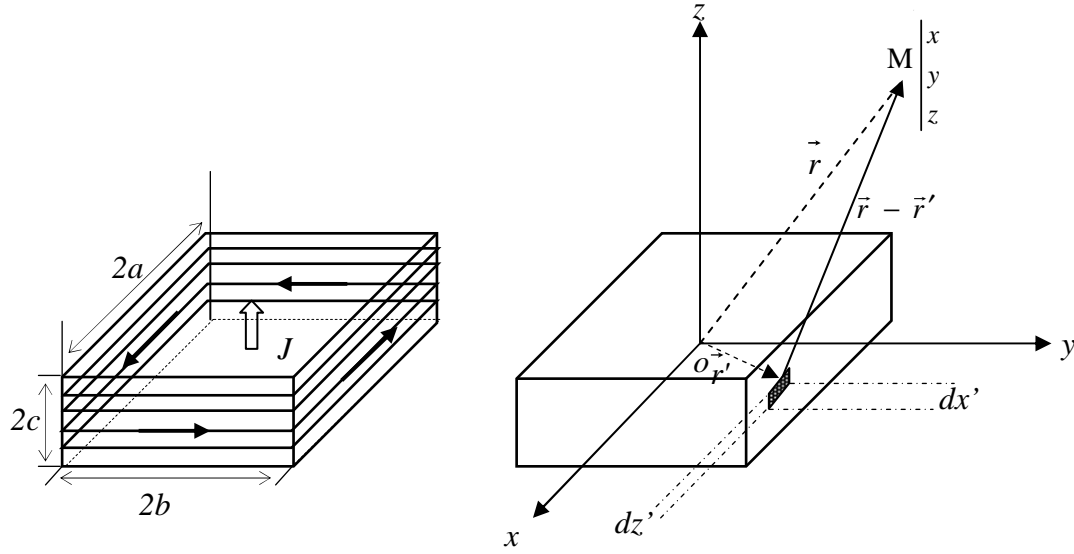


Figure II.3 Principe de calcul tridimensionnel par l'approche ampérienne, avec la direction du courant suivant Ox

Le courant \vec{I} équivalent fictif est donné par :

$$\vec{I} = \left(\frac{\vec{J} \cdot 2c}{\mu_0} \right) \quad (\text{II.27})$$

Le potentiel vecteur \vec{A} est donné par :

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \left[\iint \frac{\vec{J} \wedge \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \right] \quad (\text{II.28})$$

Le potentiel vecteur \vec{A} suivant la direction Ox est donné par :

$$A_x = \frac{J}{4\pi} \int_{-c}^c dz' \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{|\vec{r} - \vec{r}'|}} dx' \quad (\text{II.29})$$

En l'exprimant en coordonnées cartésienne, il devient équivalent à:

$$A_x = \frac{J}{4\pi} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \int_{-c}^c dz' \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (-b(-1)^j)^2 + (z-z')^2}} dx' \quad (\text{II.30})$$

Après intégration, nous aurons :

$$A_x = \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} \phi_x(U, V, W) \quad (\text{II.31})$$

La fonction ϕ_x est donné par :

$$\phi_x(U, V, W, r) = -W \cdot \ln(r - U) - U \cdot \ln(r - W) - V \cdot \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{UW}{rV}\right) \quad (\text{II.32})$$

Avec :

$$\begin{aligned} U &= x - (-1)^i a \\ V &= y - (-1)^j b \\ W &= z - (-1)^k c \\ \text{et } r &= \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Maintenant, pour le calcul du potentiel vecteur où la direction de courant est suivant Oy , on va procéder de la même manière avec une simple permutation.

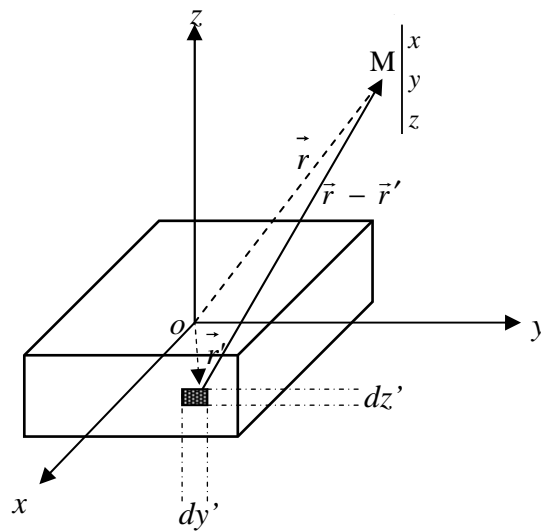


Figure II.4 Principe de calcul tridimensionnel par l'approche ampérienne avec la direction de courant est suivant Oy

Le potentiel vecteur \vec{A} avec la direction de courant est suivant Oy est donné par :

$$A_y = \frac{J}{4\pi} \int_{-c}^c dz' \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{|\vec{r} - \vec{r}'|}} dy' \quad (\text{II.34})$$

En l'exprimant en coordonnées cartésienne, il devient équivalent à:

$$A_y = \frac{J}{4\pi} \sum_{i=0}^1 (-1)^i \int_{-c}^c dz' \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(-a(-1)^i)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dy' \quad (\text{II.35})$$

Après intégration, nous aurons :

$$A_y = \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} \phi_y(U, V, W) \quad (\text{II.36})$$

La fonction ϕ_y est donné par :

$$\phi_y(U, V, W, r) = -W \cdot \ln(r - V) - V \cdot \ln(r - W) - U \cdot \text{tg}^{-1} \left(\frac{VW}{rU} \right) \quad (\text{II.37})$$

Avec :

$$\begin{aligned} U &= x - (-1)^i a \\ V &= y - (-1)^j b \\ W &= z - (-1)^k c \\ \text{et } r &= \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

II.3.1.2 Calcul du champ et induction magnétique

D'après le potentiel vecteur nous pouvons calculer l'expression de l'induction magnétique et du champ magnétique à partir :

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{II.39})$$

Après développement du rotationnel, les composantes sont obtenues respectivement :

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} (\ln(r - V)) \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} -(\ln(r - U)) \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} \left(-\text{tg}^{-1} \left(\frac{VW}{rU} \right) + \text{tg}^{-1} \left(\frac{UW}{rV} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Toutes les grandeurs de l'induction et du champ magnétiques sont calculées dans le vide. Le champ magnétique est alors exprimé par (II.11.a).

De (II.40) les composantes de H sont :

$$\begin{aligned}
 H_x &= \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} (\ln(r-V)) \\
 H_y &= \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} -(\ln(r-U)) \\
 H_z &= \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} \left(-tg^{-1}\left(\frac{VW}{rU}\right) + tg^{-1}\left(\frac{UW}{rV}\right) \right)
 \end{aligned} \tag{II.41}$$

II.3.2 Exemple de calcul de l'induction magnétique d'un aimant permanent où polarisation de l'aimant est suivant Oz

Il est intéressant de voir la répartition de l'induction magnétique en proximité de l'aimant permanent. Pour cela la surface de calcul est choisie dans le plan XY au-dessus d'un aimant, de dimensions respectives (0.04 x 0.04 x 0.03 m³), polarisé de 1T dans la direction z, Figure II.5.

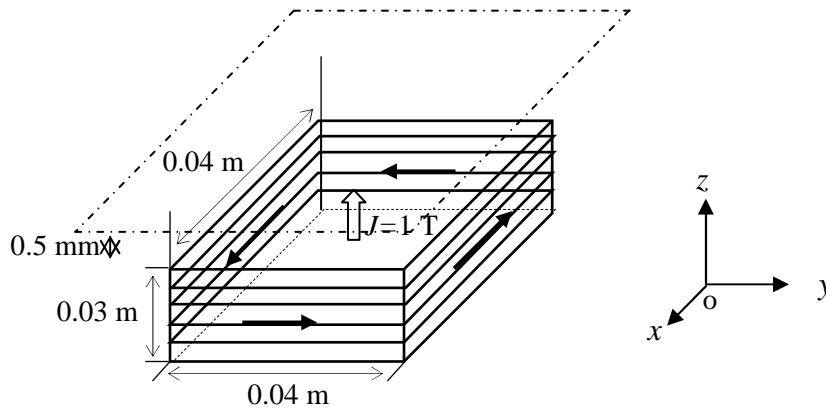
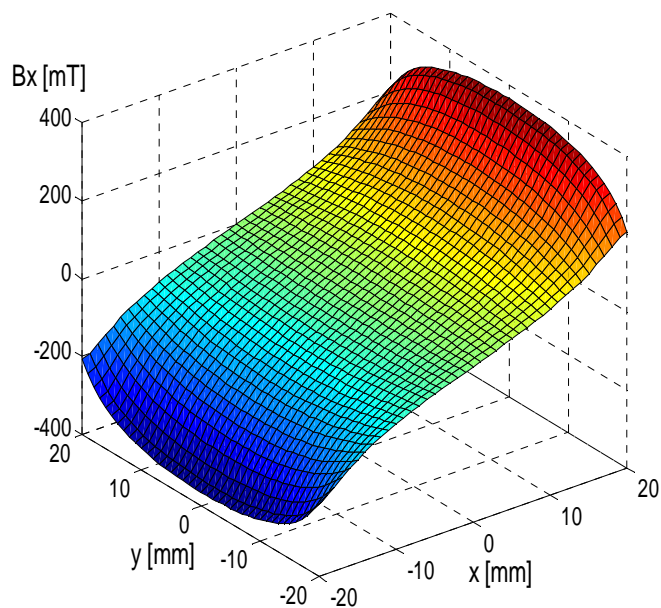
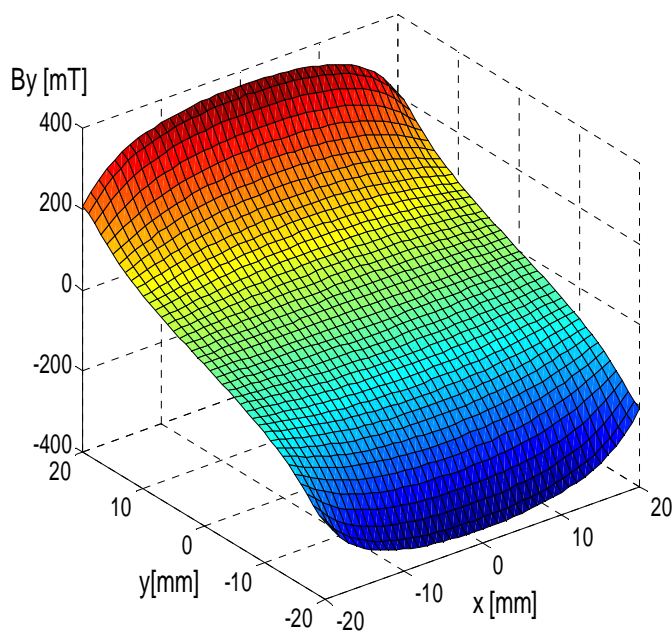


Figure II.5 Aimant avec une polarisation est suivant Oz

Les Figure II.6, Figure II.7, représente la répartition des composantes B_x et B_y de l'induction magnétique. A cause de la symétrie, nous obtenons la même répartition mais chacune est orientée vers son axe de calcul. La valeur maximale est de l'ordre de 0,4 T, toujours inférieure à la polarisation J.

Figure II.6 La composante de l'induction magnétique B_x Figure II.7 La composante de l'induction magnétique B_y

Quant à la composante B_z , elle est toujours recherchée mesurée ou calculée dans la majorité des travaux scientifique tant pour les aimants permanents ou pour les pastilles supraconducteurs. C'est pour cette raison qu'on a trouvé avec quoi comparer, il s'agit des

résultats de mesure réalisés à LGEP par [Fou.00]. La composante B_z , à cause de la colinéarité avec la direction de l'aimantation, présente une configuration plate est significative qui épouse la forme de la surface extérieure concernée de l'aimant, Figure II.8.

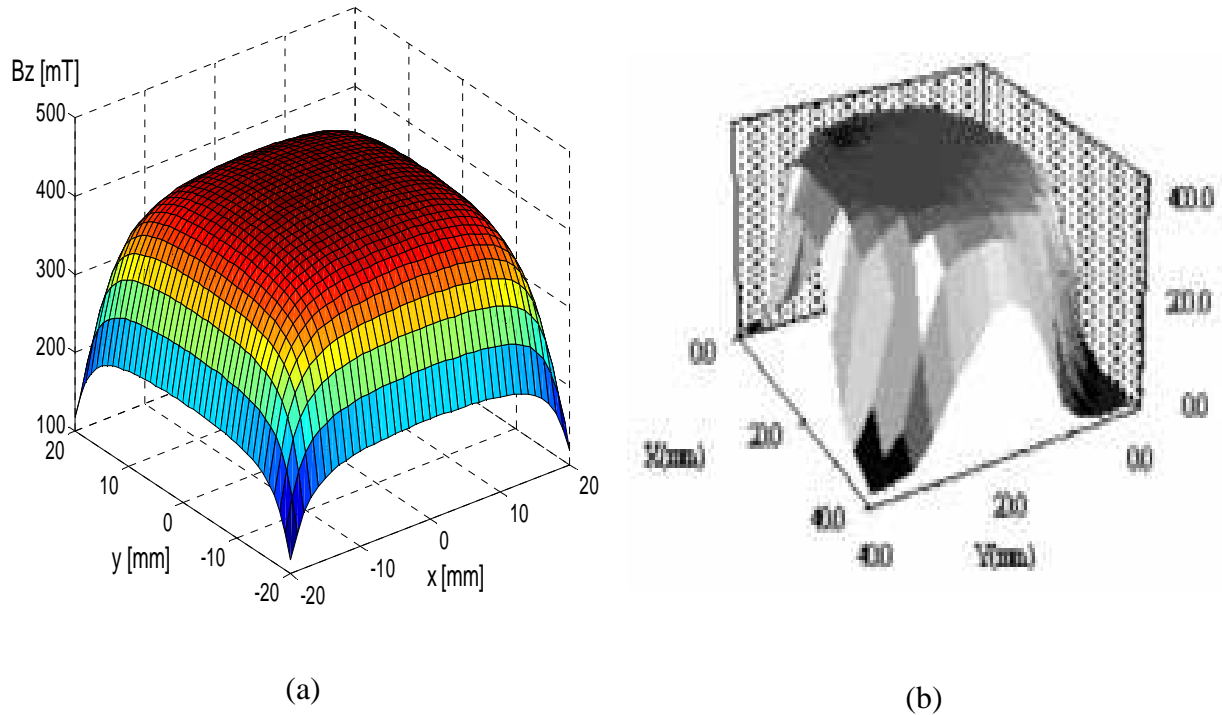


Figure II.8 L'induction magnétique B_z à 0.5mm au dessus de l'aimant (a) résultat calculé (b) résultat mesuré [Fou.00]

Dans les prochains chapitres de modélisation de l'interaction du champ magnétique de l'aimant permanent avec les pastilles supraconductrices, nous avons besoin de savoir l'évolution du champ ou de l'induction dans l'axe de symétrie de l'aimant. Pour le faire, on prend un aimant de dimension $(10 \times 10 \times 10 \text{ mm}^3)$ d'aimantation de 1Tesla orienté toujours suivant la direction Oz. Puis, on calcule à chaque point de la ligne de symétrie allant de 3 mm à 40 mm au-dessus de l'aimant en question Figure II.9. Les résultats sont comparés avec ceux du logiciel Flux 3D.

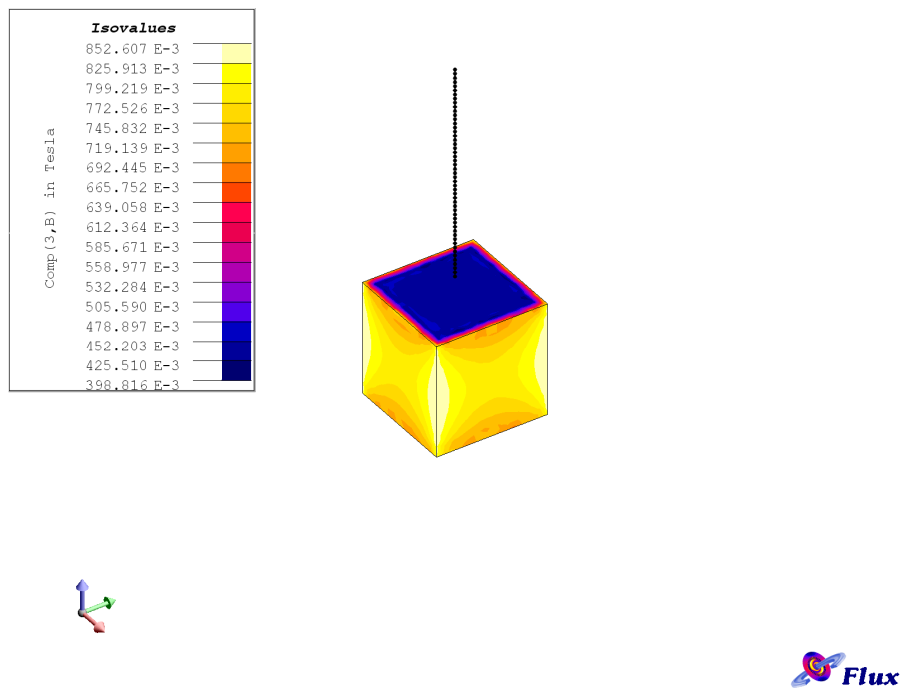


Figure II.9 La composante B_z dans l'aimant

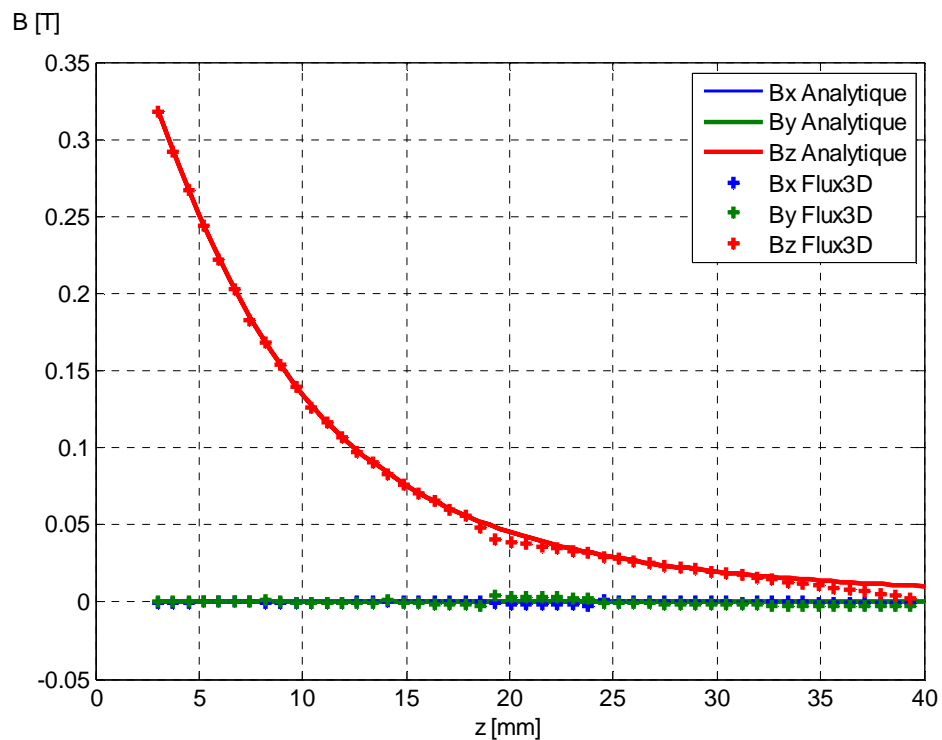


Figure II.10 Les composantes de l'induction magnétique calculées analytiquement et numériquement à chaque point suivant la direction Oz

De la Figure II.10, on remarque de toute évidence que la composante B_z est intense en s'approchant de l'aimant et diminue en s'éloignant. Les composantes B_x et B_y sont toujours nulles à cause de la symétrie.

Si on essaye de voir la variation de l'induction de façon horizontale suivant l'axe x , on apercevra l'apparition de la composante B_x depuis le centre, d'où elle représente une fonction impaire. La composante B_z diminue en s'éloignant du centre et la composante B_y reste nulle à cause de la symétrie qui est toujours respectée Figure II.11.

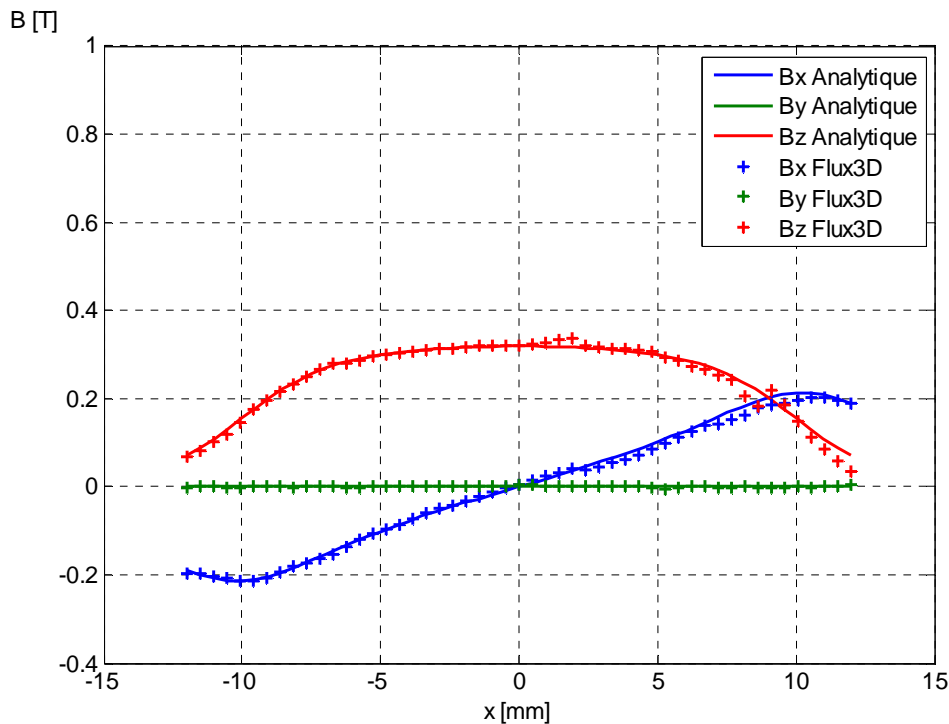


Figure II.11 Les composantes de l'induction magnétique calculées analytiquement et numériquement à chaque point suivant la direction Ox

II.3.3 Cas où l'aimantation est orientée suivant la direction Ox ou Oy

II.3.3.1 Suivant Ox

L'aimant permanent est toujours modélisé par l'approche ampérienne, mais cette fois son aimantation est orientée suivant l'axe Ox.

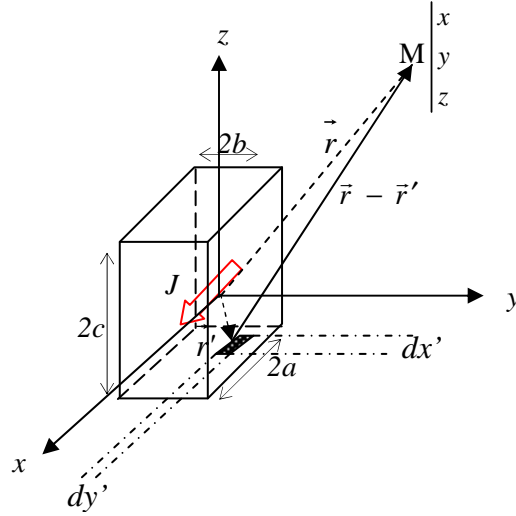
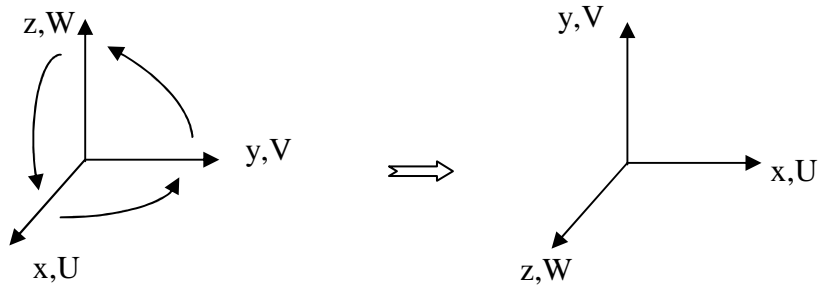


Figure II.12 Présentation de l'aimant permanent où l'aimantation est orientée suivant la direction Ox et la direction de courant est suivant Oy

Nous pourrions obtenir les composantes de l'induction en permutant les variables d'équations comme suit :



En comparant avec les équations (II.41), nous aurons :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} \left(-tg^{-1} \left(\frac{UW}{rV} \right) + tg^{-1} \left(\frac{UV}{rW} \right) \right)$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} (\ln(r - W)) \tag{II.42}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} (-\ln(r - V))$$

II.3.3.2 Suivant Oy

Idem que pour l'orientation suivant Ox, la direction suivant Oy conduit aux expressions d'induction suivantes :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} (-\ln(r-W))$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} \left(-tg^{-1}\left(\frac{UV}{rW}\right) + tg^{-1}\left(\frac{VW}{rU}\right) \right) \quad (\text{II.43})$$

$$B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} (\ln(r-U))$$

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, il était important de modéliser analytiquement les aimants parallélépipédiques dont la polarisation est considérée complètement rigide. Ces formes sont choisies, puisqu' ils sont très utilisés en pratique et notamment en lévitation magnétique (qui est l'application principale de cette thèse). En modélisation analytique par les approches intégrales (coulombienne ou ampérienne), ces configurations cubiques sont les plus simples et les seules à pouvoir déterminer les grandeurs allant des potentiels magnétiques jusqu'aux énergies d'interactions [Allag.10], [Yonnet.80], [Yonnet.08]. Nous avons adoptés, dans ce chapitre et nous l'adopterons dans les suivants, l'aspect ampérien en démontrant les résultats des champs et des inductions issus par les aimants permanents. Une quantité des résultats est validée par voie numérique utilisant Flux3D. Dans le prochain chapitre, il sera le tour de la modélisation des supraconducteurs.

CHAPITRE III

III.1 Introduction

Il est connu que les supraconducteurs se comportent de façon très dynamique et la moindre variation électromagnétique peut engendrer des changements d'état de ces matériaux. Au niveau de la modélisation, le comportement des supraconducteurs est considéré comme non-linéaire. Pour ces raisons, la majorité des modèles connus en littérature sont des modèles dynamiques et qui tiennent compte de plusieurs paramètres à la fois, ce qui rend leur implémentation toujours délicate et difficile. Dans la suite de ce chapitre, nous allons survoler les modèles existant et discuter la possibilité de les coupler avec l'approche ampérienne proposée dans le chapitre précédent.

III.2 Modèles mathématiques existants pour les supraconducteurs

Plusieurs modèles existent pour décrire le comportement des supraconducteur de type HTC. Dans la plupart d'entre eux, on trouve les relations qui lient les densités de courant, l'induction magnétique et le champ électrique. Dans certains plus complets, la variation de la température est incluse aussi. On peut citer les modèles comme suit :

III.2.1 Modèle de l'état critique

Le modèle de l'état critique a été proposé par Charles Bean en 1962 [Bean.62]. Il stipule, qu'à des températures données, l'amplitude de la densité de courant locale macroscopique est égale, soit à zéro, soit à la densité de courant critique, fonction uniquement de l'induction magnétique locale.

$$J = J_c \left(|B| \right) \frac{E}{|E|} \quad (\text{III.1})$$

D'un autre point de vue, on traduit ces expressions par les équations de Maxwell ainsi :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \pm \mu_0 \vec{J}_c \quad \text{ou} \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0} \quad (\text{III.2})$$

III.2.1.1 Modèle de Bean (cas particulier du Modèle de l'état critique)

Le modèle de Bean consiste à considérer J_c constant et non dépendant de l'induction magnétique.

$$J = \pm J_c \quad \text{ou} \quad J = 0 \quad (\text{III.3})$$

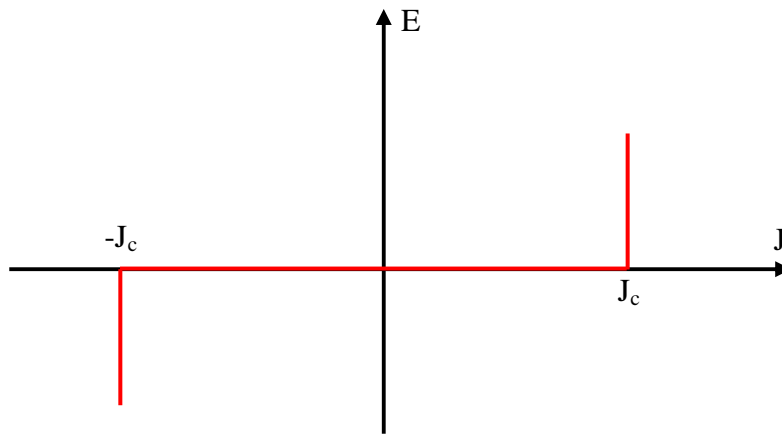


Figure III.1 Caractéristique $E(J)$ basée sur le Modèle de Bean

III.2.2 Modèle de la loi en puissance

C'est un modèle qui caractérise d'une belle façon le comportement des supraconducteurs à HTC autour de J_c . Les paramètres de variation de cette loi sont la densité de courant critique J_c , le champ électrique critique E_c et l'exposant n . Avec ce modèle, on peut faire varier les courbes $E(J)$ de sorte qu'on peut avoir le comportement d'un conducteur ordinaire pour $n = 1$ (loi de comportement linéaire) jusqu'à avoir une courbe raide comme dans le modèle de l'état critique pour un $n > 100$.

Le champ électrique est exprimé ainsi :

$$E = E_c \left(\frac{J}{J_c} \right)^n \frac{J}{|J|} \quad (\text{III.4})$$

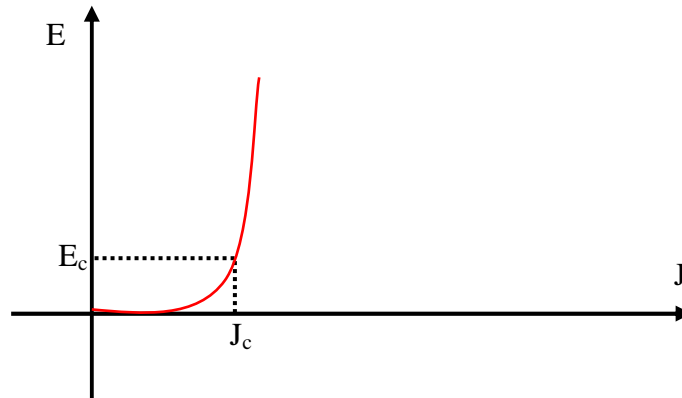


Figure III.2 Caractéristique $E(J)$ basée sur le Modèle de la loi en puissance Modèle de Flux Flow et Flux Creep

La caractéristique du champ électrique E en fonction de la densité de courant J , est présentée sur la Figure III.2. Pour les faibles valeurs de E avec $J \leq J_c$ la courbe $E(J)$ est de forme exponentielle, c'est la zone de « Thermally Activated Flux Creep „TAFC“ » correspondant aux déplacements des vortex, bloqués par les défauts du matériau (impuretés,...), dus à l'activation thermique. Dans cette région, le champ électrique est défini par [Tsuchimoto.99] :

$$E = 2\rho_c J_c \sinh\left(\frac{U_0 J}{K_B T J_c}\right) \exp\left(-\frac{U_0}{K_B T}\right) \quad (\text{III.5})$$

Avec :

ρ_c : Résistivité de régime flux creep [$\Omega \cdot \text{m}$],

U_0 : Potentiel de pénétration [eV],

K_B : Constante de Boltzmann,

J_c : Densité de courant critique [$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$]

Pour des valeurs élevées de E avec $J > J_c$, c'est la zone de « Thermally Activated Flux Flow „TAFF“ » correspondant aux déplacements libres des vortex. La densité de courant critique est donc celle qui va arracher les vortex des défauts provoquant un passage à l'état de « flux flow ». Dans cette région, le champ électrique est défini par [Tsuchimoto.99] :

$$E = \rho_c J_c + \rho_f J_c \left(\frac{J}{J_B} - 1 \right) \quad (\text{III.6})$$

Avec :

ρ_f : Résistivité de régime flux flow [$\Omega \cdot \text{m}$].

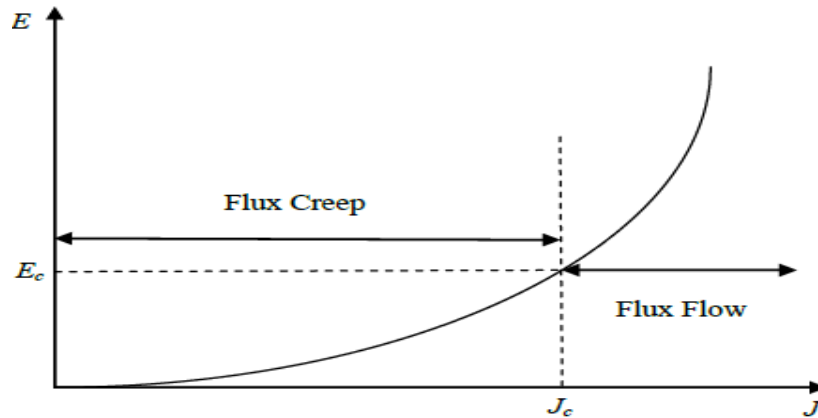


Figure III.3 La caractéristique du champ électrique E en fonction de la densité de courant J

La densité de courant critique est définie comme étant la limite entre le régime de flux creep et le régime de flux flow. Cette limite étant très floue, la densité critique de courant est généralement déterminée par la valeur d'un champ électrique critique E_c .

III.2.3 Dépendance en champ magnétique de J_c

III.2.3.1 Modèle de KIM

Le modèle de Bean ainsi que la loi en puissance considèrent le matériau supraconducteur isotrope et isotherme. Ils ne tiennent pas compte de l'échauffement éventuel du conducteur sous l'effet des pertes qui entraînerait une diminution du courant critique. Dans le modèle de Bean, la densité de courant critique est supposée constante quelque soit le champ magnétique extérieur. Dans la réalité la densité de courant dépend fortement de son orientation par rapport au champ et de l'induction magnétique B . Une expression de $J_c(B)$ dans le cas isotrope a été donnée par Kim [Kim.62] :

$$J_c(B) = \frac{J_{c0} B_0}{|B| + B_0} \quad (\text{III.7})$$

Où B est l'amplitude de l'induction magnétique, B_0 est une constante et J_{c0} est la densité de courant critique sous champ nul.

C'est le modèle le plus utilisé pour la modélisation de la dépendance de la densité de courant critique avec l'induction magnétique [Klutsch.03], [Tekeda.94] et [Levillain.95].

III.2.3.2 Modèle exponentiel

Un autre modèle utilisé en développements numériques est le modèle de dépendance $J_c(B)$ suivant [Nakashima.94] :

$$J_c(B) = J_{c0} \exp\left(-\frac{|B|}{B_0}\right) \quad (\text{III.8})$$

L'équation (III.8) a été obtenue par plusieurs fonctions d'essai. La densité de courant critique calculée à l'aide de cette équation (III.8) s'accordait bien avec les données expérimentales de J_c transportées dans un fils Nb-25%Zr. Le modèle exponentiel est développé de façon indépendante pour interpréter l'aimantation de l'alliage supraconducteur Ti-Nb par Karasik et al [Karasik.71]. La relation exponentielle de J_c est appliquée à SHTC et a produit un accord tout à fait raisonnable entre les résultats théoriques et expérimentaux [Chaddah.89], [Chen.90], [Malik.94].

III.3 Méthodes et techniques d'aimantation

Les méthodes d'aimantation sont basées sur une variation du champ magnétique appliqué sur une pastille supraconductrice. Cette variation crée des courants induits à l'intérieur de cette pastille supraconductrice. On distingue deux manières fondamentales :

III.3.1 Refroidissement sous champ (Field Cooling (FC))

Dans cette technique, la pastille supraconductrice est refroidie sous champ magnétique constant. Ensuite, ce champ magnétique diminue très lentement afin d'avoir un champ piégé dans la pastille quand le champ externe s'annule [Valle.07], [Koshelev.95]. Dans la Figure

III.4 nous présentons les différentes étapes pour aimanter une pastille supraconductrice par FC où nous distinguons trois zones :

- Zone 1, un champ externe est appliqué sur une pastille ‘‘chaude’’, la pastille n’est pas supraconductrice.
- Zone 2, nous refroidissons la pastille à une température moindre à sa température critique, la pastille devient supraconductrice avec la même valeur de champ appliqué.
- Zone 3, nous diminuons la valeur du champ appliqué jusqu’à l’annulation de ce champ. Le temps de cette diminution peut atteindre quelques heures [Tomita.03].

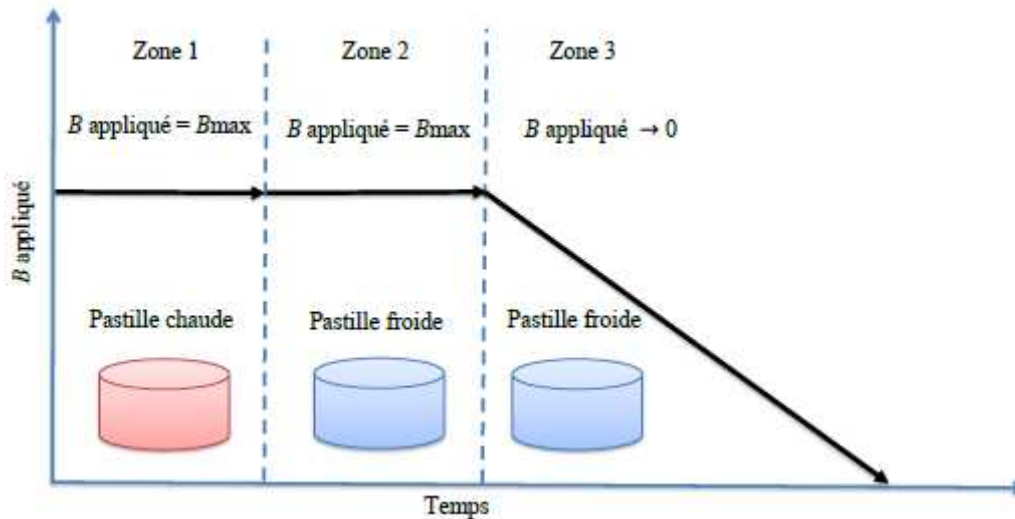


Figure III.4 Processus d’aimantation d’un supraconducteur par Field Cooling

III.3.2 Refroidissement hors champ (Zero Field Cooling (ZFC))

Cette méthode est similaire à la méthode FC sauf que la pastille supraconductrice est tout d’abord refroidie puis le champ magnétique est appliqué [Ainslie.15], [Yeshurun.88]. La Figure III.5 représente les étapes suivies pour aimanter une pastille supraconductrice par la méthode ZFC où nous distinguons trois zones :

- Zone 1, nous refroidissons la pastille supraconductrice sans champ magnétique appliqué.
- Zone 2, nous augmentons le champ magnétique appliqué sur la pastille froide jusqu’à arriver à sa valeur maximale.

- Zone 3, nous diminuons lentement le champ appliqué jusqu'à atteindre le zéro.

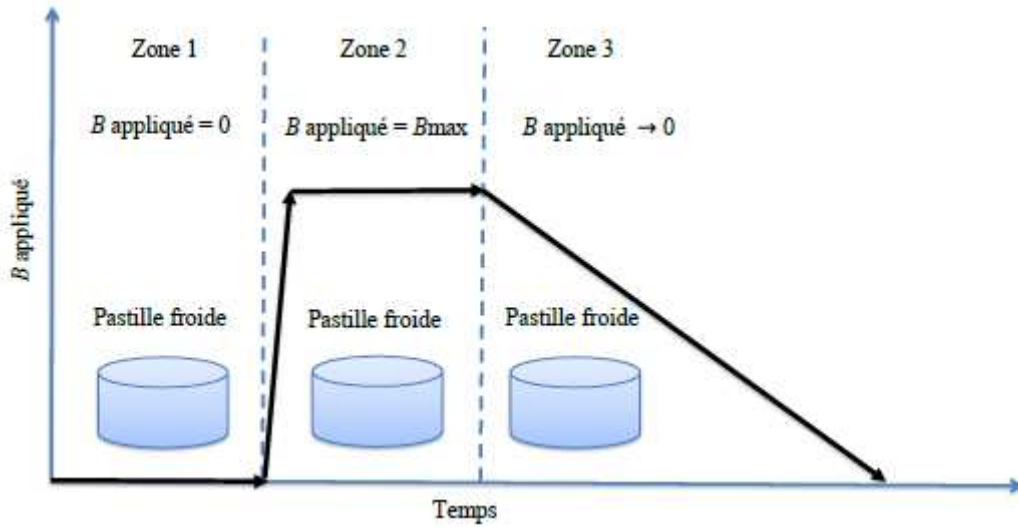


Figure III.5 Processus d'aimantation d'un supraconducteur par Zero Field Cooling

Le champ piégé en utilisant cette méthode est inférieur à celui dans le FC (d'environ deux fois) pour la même valeur du champ appliqué [Chen.06], car il existe des courants $+J_c$ et $-J_c$ dans le matériau.

La Figure III.6 montre une comparaison basée sur le modèle de Bean entre les deux méthodes FC et ZFC [Ainslie.15].

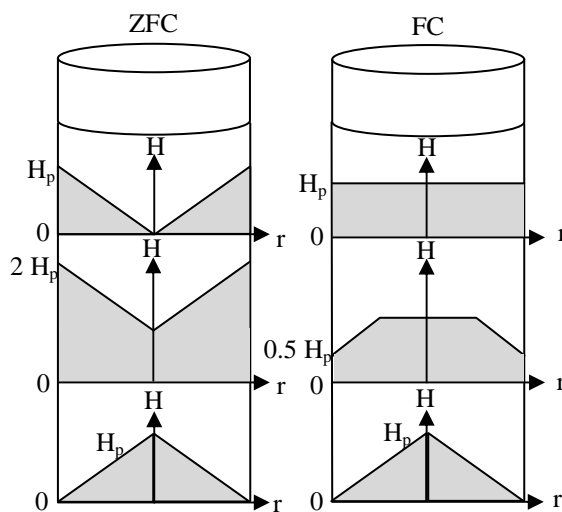


Figure III.6 Comparaison entre ZFC et FC

III.4 Modélisation d'une plaque mince supraconductrice par le modèle de Bean

L'objectif est de fournir un aspect dynamique pour le modèle de Bean, afin de décrire le comportement non-linéaire de supraconducteurs HTC. Avant de tenter quoique ce soit, nous devons énoncer les principales hypothèses, comme suit :

- La pénétration du champ magnétique dans le matériau consiste en une atténuation linéaire depuis le bord vers le centre et non exponentielle comme le prévoient les équations de London.
- Il existe une densité de courant critique J_c (densité de courant critique de Bean) telle qu'en tout point x du matériau et en tout instant t la densité de courant $J(x, t)$ vaut:
 - 0 si $\partial H(x)/\partial t$ a toujours été nul.
 - $-J_c$ si la dernière valeur de $\partial H(x)/\partial t$ est positive.
 - $+J_c$ si la dernière valeur de $\partial H(x)/\partial t$ est négative.

Selon cette hypothèse, $J(x, t)$ n'est pas reliée à la valeur instantanée de $\partial H(x)/\partial t$ seulement, mais bien à la dernière valeur non nulle (si elle existe), autrement dit, à l'histoire antérieure de l'échantillon, ce qui permettra de rendre compte des effets d'hystérésis.

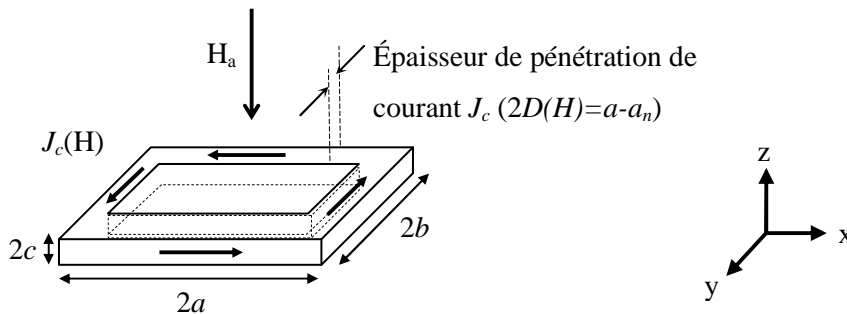


Figure III.7 Géométrie de la plaque considérée

Considérons alors une plaque mince supraconductrice homogène placée dans un champ uniforme parallèle à son axe. Ce champ est dans la direction Oz. Dans la suite on va expliquer comment ce champ pénètre dans la plaque.

L'application de ce champ va certainement provoquer l'apparition des courants de surface à écranter le champ appliqué. Selon la seconde hypothèse du modèle de Bean, la densité de courant vaudra dans ce cas $-J_c$, soit une valeur constante dans toute la zone où le champ pénètre. Appliquons la quatrième loi de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{H}) = \overrightarrow{J}_c \quad (\text{III.9})$$

En coordonnées cartésiennes, nous aurons :

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ J_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ J_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Les principaux paramètres d'aimantation pour différentes géométries dans l'état critique avec J_c constant ont été présentés par [Navau.13]. En particulier dans notre cas, pour une plaque mince supraconductrice.

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_0 &\cong \frac{2b}{\left(\frac{c}{2}\right)} \arctan \left[1 - 0.7223 \left(\frac{a}{b}\right)^{-0.945} + 0.3522 \left(\frac{a}{b}\right)^{-2.57} - 0.141 \left(\frac{a}{b}\right)^{-3.66} \right] \\ M_{sat} &= \frac{J_c b}{6} \left(3 - \frac{b}{a} \right) \\ H_p &= M_{sat} \cdot \chi_0 \end{aligned} \right. \quad (\text{III.11})$$

Avec

χ_0 susceptibilité magnétique

M_{sat} aimantation à saturation

H_p champ de pénétration

III.4.1 Principe de modèle de Bean

À l'état initial, considérant le matériau dans un état désaimanté ($H=0$, $M=0$). Si on applique un champ magnétique H_a croissant inférieur à H_{max} , on décrit une partie de la courbe de première aimantation. Les Figures III.8 ci-dessous, présentent la répartition des courants dans la plaque supraconductrice soumise à ce même champ magnétique.

Lorsque le champ H_a commence à augmenter, des courants sont induits en sens inverse à partir de l'extérieur de la plaque permettant d'écranter le champ magnétique à l'intérieur de la plaque (Figure III.8 (a)). Cet effet est comparable à l'effet de peau dans un conducteur conventionnel, à la différence que ces courants pénètrent d'avantage quand le champ accroît et ne sont pas amortis par la résistivité du matériau et persistent toujours même pour une variation nulle ($\partial H_a / \partial t = 0$).

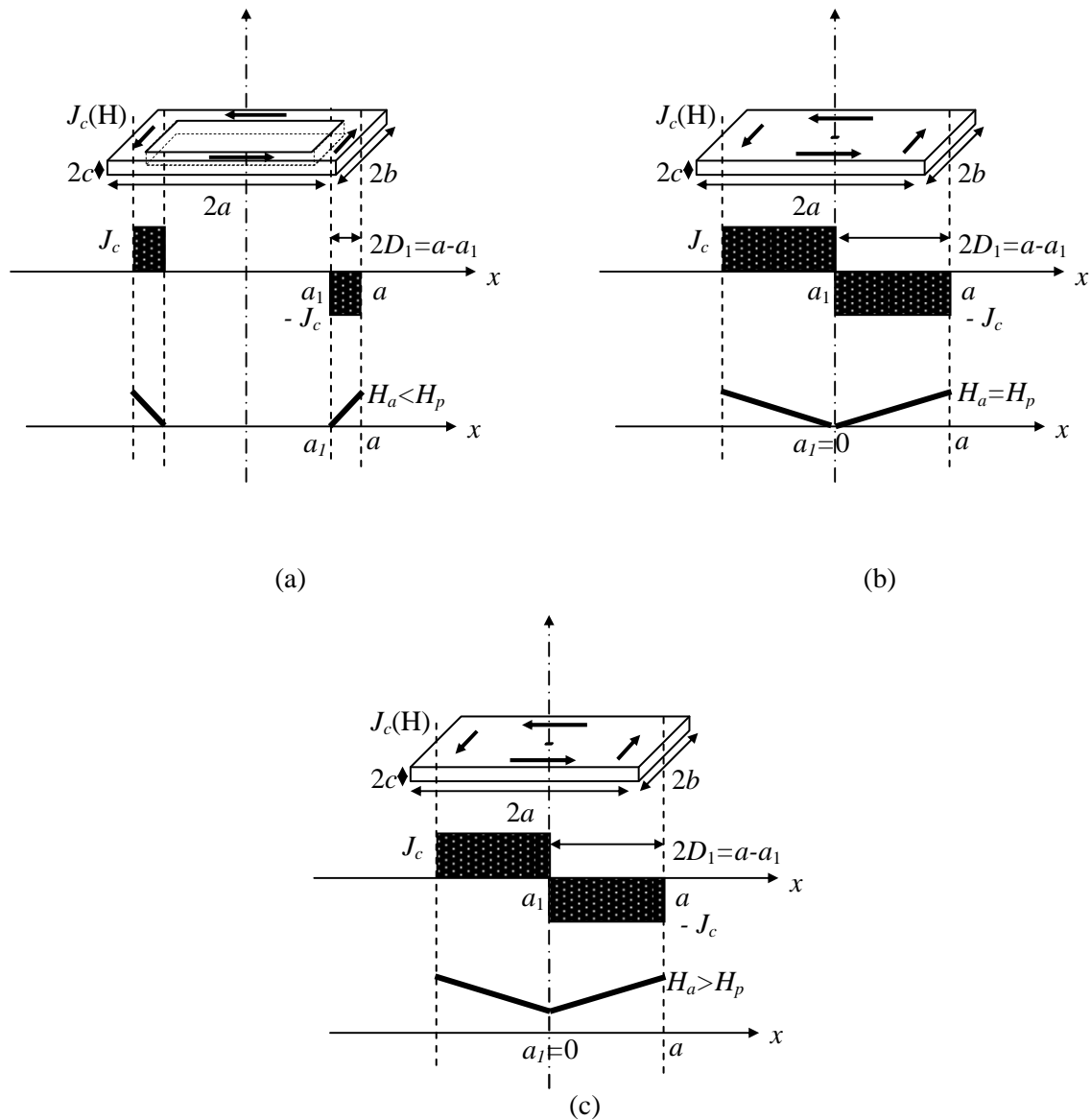


Figure III.8 Répartition des courants dans une plaque supraconductrice soumise à un champ magnétique externe H_a croissant

Au moment où H_a est égale à H_p la pénétration des courants est complète (Figure III.8 (b)). Lorsque H_a est supérieur à H_p les densités de courant restent inchangées et égales aux densités de courant critique J_c .

Si le champ appliqué reste toujours dans le même sens, la plaque saturée sera toujours parcourue par les mêmes courants. Mais si le champ change de direction, de nouveaux courants apparaissent de l'extrémité effaçant les courants existants. Un exemple de faible changement de variation du champ est illustré en Figure III.9.

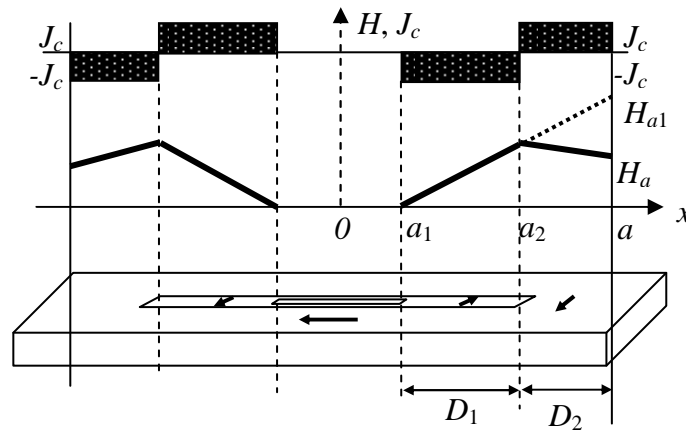


Figure III.9 Répartition des courants dans une plaque supraconductrice soumise à des champs magnétiques variables en valeurs et en direction

Si le champ magnétique appliqué continue à changer de direction, un ensemble de boucles de courants apparaissent débutant de l'extérieur Figure III.10.

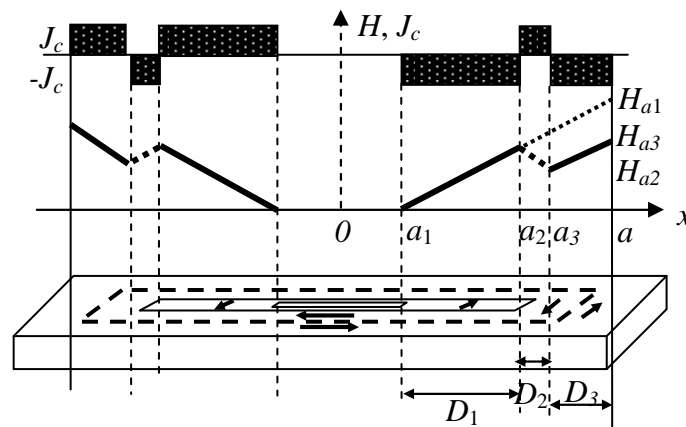


Figure III.10 Répartition des courants dans une plaque supraconductrice soumise à plusieurs valeur du champ magnétique

De la Figure III.10, nous pouvons localiser les pénétrations des courants à chaque changement de situation du champ magnétique.

- Cas du champ appliqué croissant

$$a_{2ni-1} = \frac{2H_p + (-1)^{2ni-2} H_{a_{2ni-2}} + (-1)^{2ni-1} H_{a_{2ni-1}}}{2J_c} \quad ni = 1..N \quad (\text{III.12})$$

- Cas du champ appliqué décroissant

$$a_{2ni} = \frac{2H_p + (-1)^{2ni+1} H_{a_{2ni-1}} + (-1)^{2ni} H_{a_{2ni}}}{2J_c} \quad ni = 1..N \quad (\text{III.13})$$

D_{ni} est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{2ni} = \frac{|a_{2ni} - a_{2ni-1}|}{2} \\ D_{2ni-1} = \frac{|a_{2ni-1} - a_{2ni-2}|}{2} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} a_1 = -\frac{H_{a1}}{J_c} + \frac{H_p}{J_c} \\ D_1 = \frac{a - a_1}{2} \end{array} \right. \quad ni = 1..N \quad (\text{III.14})$$

Avec

H_p champ de pénétration

J_c densité de courant critique

$H_{a(n)}$ champ appliqué à l'instant

$H_{a(n-1)}$ champ appliqué précédemment

III.4.2 Calcul de l'aimantation d'une plaque mince supraconductrice par le modèle de Bean

III.4.2.1 La première aimantation

D'après le modèle de Bean l'aimantation est définie comme le champ magnétique moyen à travers le supraconducteur, soit :

$$M = \frac{1}{a} \int \frac{B}{\mu_0} dx - H_a \quad (\text{III.15})$$

- Cas du champ appliqué croissant

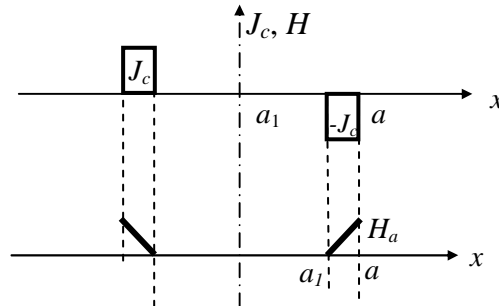


Figure III.11 La première aimantation lorsque le champ appliqué est croissant

L'aimantation est donnée par

$$M = \frac{1}{a} \int_{a_1}^a (J_c \cdot x - H_p + H_a) dx - H_a \tag{III.16}$$

Après intégration, nous aurons

$$M(H_a) = \frac{H_a^2}{2H_p} - H_a \tag{III.17}$$

- Cas du champ appliqué décroissant

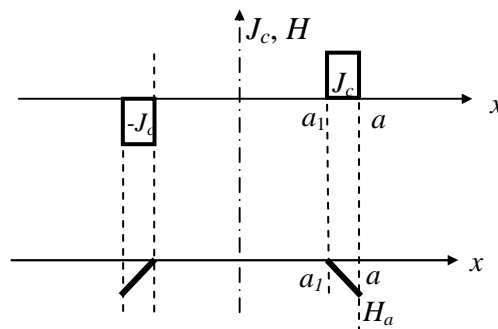


Figure III.12 La première aimantation lorsque le champ appliqué est en croissance

L'aimantation est exprimée par

$$M = \frac{1}{a} \int_{a_1}^a (-J_c \cdot x + H_p + H_a) dx - H_a \quad (\text{III.18})$$

L'expression finale après intégration est

$$M(H_a) = -\frac{H_a^2}{2H_p} - H_a \quad (\text{III.19})$$

III.4.2.2 Cas où le champ appliqué augmente

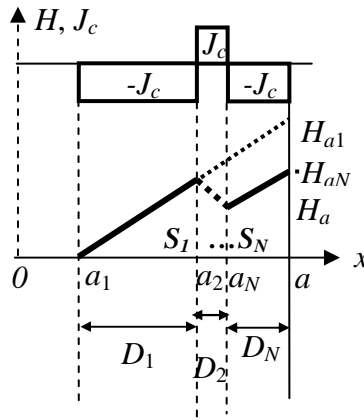


Figure III.13 Champ appliqué croissant

L'aimantation est donnée par

$$M = \frac{1}{a} \left(\int_{a_N}^a (J_c \cdot x - H_p + H_a) dx + S_N \right) - H_a \quad (\text{III.20})$$

Avec

$$S_N = \sum_{n=1}^N S_n = \sum_{n=1}^N \frac{(a_n - a_{n-1})(H_{a(n)} - H_{a(n-1)})}{2} \quad a_n = a_{2k} \quad (\text{III.21})$$

S_N est la somme des trapézoïdes séparées par des lignes discontinues à chaque changement de variation du champ appliqué.

Après toutes intégrations nous aurons :

$$M(H_a) = \frac{3H_a^2 - H_{aN}^2 - 2H_a \cdot H_{aN}}{8H_p} + \frac{S_N}{a} - H_a \quad (\text{III.22})$$

III.4.2.3 Cas où le champ appliqué diminue

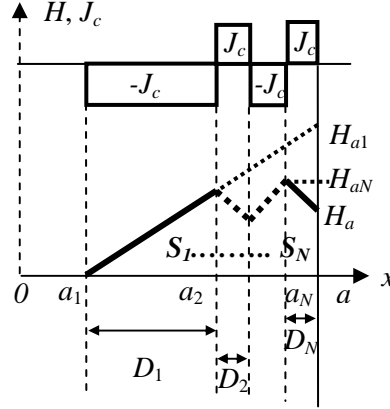


Figure III.14 Champ appliqué à une phase de diminution

L'aimantation dans ce cas est donnée par

$$M = \frac{1}{a} \left(\int_{a_N}^a (-J_c \cdot x + H_p + H_a) dx + S_N \right) - H_a \quad (\text{III.23})$$

Avec

$$S_N = \sum_{n=1}^N S_n = \sum_{n=1}^N \frac{(a_n - a_{n-1})(H_{a(n)} - H_{a(n-1)})}{2} \quad a_n = a_{2k} \quad (\text{III.24})$$

L'expression finale sera donnée par

$$M(H_a) = \frac{-3H_a^2 + H_{aN}^2 + 2H_a \cdot H_{aN}}{8H_p} + \frac{S_N}{a} - H_a \quad (\text{III.25})$$

Il faut noter que, l'une des principales propriétés de ce modèle est la prise en compte de l'histoire du comportement du matériau à chaque changement de direction du champ magnétique. Il en résulte, la régénération de nouveaux courants progressant à partir des extrémités et provoquant un effacement des plus anciens causés par les variations antécédentes du champ magnétique appliqué.

III.4.3 Observation de l'aimantation pour une période complète du champ appliqué

Il est intéressant de voir la variation de l'aimantation dans une plaque supraconductrice. Pour ce faire, nous avons choisi une plaque de forme carrée qui peut être soumise à un champ sinusoïdal variable en fonction du temps. Les dimensions et les principaux paramètres d'aimantation pour une géométrie de forme carrée ont été présentés par [Navau.13] Tableau III.1.

Champ appliqué		Pastille supraconductrice	
H_{max}	3 MA/m	2a	1mm
		2b	1mm
		2c	1mm
f	50 Hz	Densité de courant critique J_c	1 MA/m ²
		Susceptibilité magnétique χ_0	1,8188
		Aimantation de saturation M_{sat}	0,33 MA/m
		champ de pénétration H_p	0,6063 MA/m

Tableau III.1 Paramètres du champ appliqué et de la pastille supraconductrice HTC

D'après le modèle de Bean la courbe d'aimantation est présentée dans la Figure III.15.

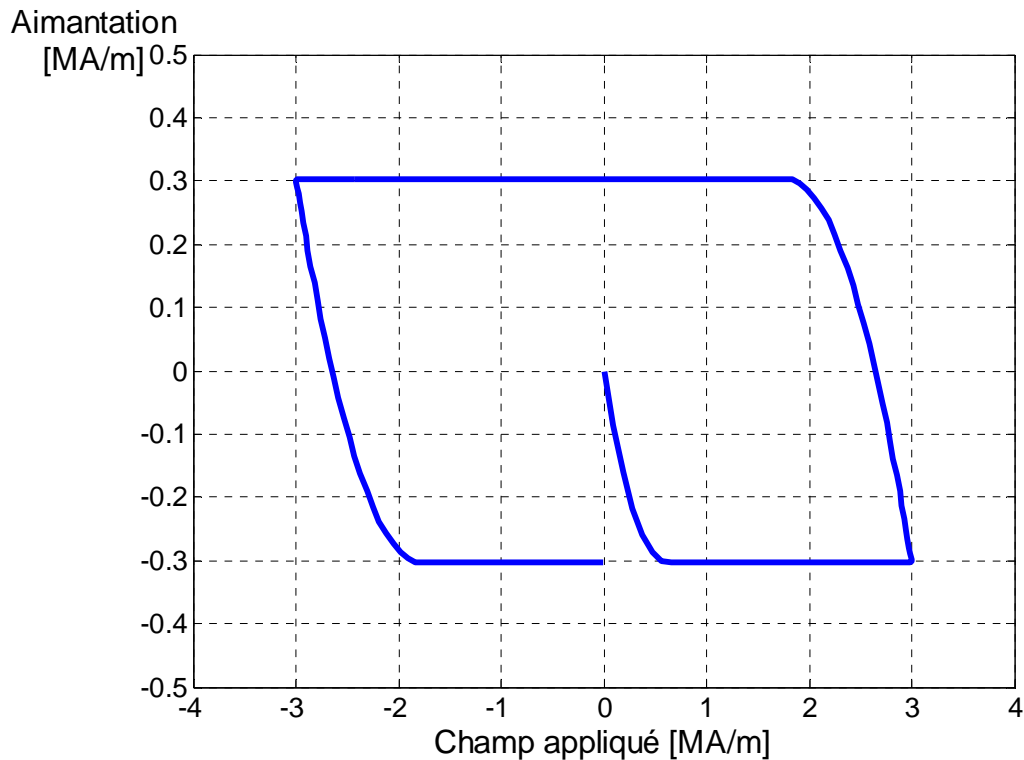


Figure III.15 Courbe d'aimantation en fonction du champ appliqué

Lorsque le champ appliqué croît, des courants induits d'écrantage se développent donc à travers une section à la périphérie de la pastille supraconductrice. Cette section augmente avec le champ extérieur appliqué jusqu'à ce que les courants atteignent l'axe et occupent par conséquent la section totale de la pastille supraconductrice. Le champ pour lequel cela se produit est appelé champ de pénétration (Figure III.15). Au-delà du champ de pénétration, les courants d'écrantage n'évoluent plus et l'aimantation de la pastille supraconductrice est négative et reste constante. En revanche dès que le champ extérieur appliqué diminue, des courants de piégeage, en sens inverse des courants d'écrantage précédemment établis, se développent à partir de la surface extérieure. Ces courants de piégeage augmentent lorsque le champ extérieur diminue jusqu'à occuper la surface globale de la pastille supraconductrice. Pour des champs inférieurs, en particulier lorsque le champ est supprimé, cette répartition n'évolue plus. L'aimantation rémanente d'un supraconducteur peut être visualisée par le champ appliqué.

III.4.4 Influence du champ magnétique sur la densité de courant critique

L'hypothèse d'une densité de courant critique J_c constante a été longuement utilisée pour le calcul des pertes AC dans les supraconducteurs de type-II et dans plusieurs modèles numériques. Pour les supraconducteurs HTC, la diminution de J_c avec B est significative même pour des valeurs modérées de champ magnétique, et c'est une propriété importante de ces matériaux.

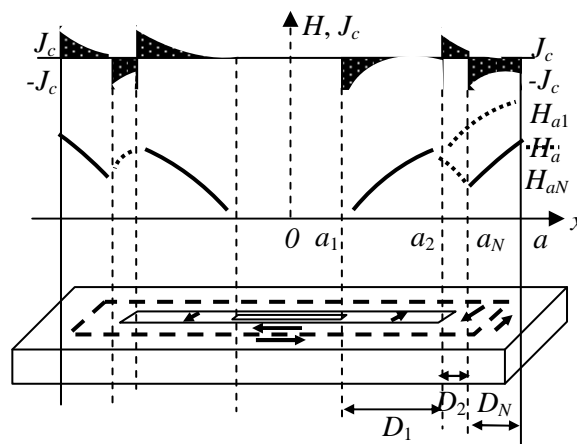


Figure III.16 Distribution du champ magnétique et de la densité de courant dans une plaque supraconductrice, lorsque la densité de courant critique est une fonction du champ

D'ailleurs, les supraconducteurs HTC possèdent une anisotropie intrinsèque, qui résulte d'une dégradation différente de J_c selon que le champ appliqué est parallèle ou perpendiculaire [Berger.06]. Les configurations de la densité de courant et du champ magnétique dans une plaque supraconductrice soumise à un champ prennent alors la forme indiquée à la Figure III.17.

III.4.4.1 Modèle de Kim

Il semble donc nécessaire d'introduire des modèles qui décrivent la dépendance expérimentale de J_c avec le champ magnétique sous différentes directions. Dans notre cas, on utilise le modèle de Kim (Equation (III.7)). Les dimensions et les paramètres de la plaque supraconductrice sont présentés précédemment, avec $J_{c0} = 1 \text{ MA/m}^2$ et $H_0 = 1 \text{ MA/m}$. D'après le modèle de Kim la courbe d'aimantation est illustrée dans la Figure III.17.

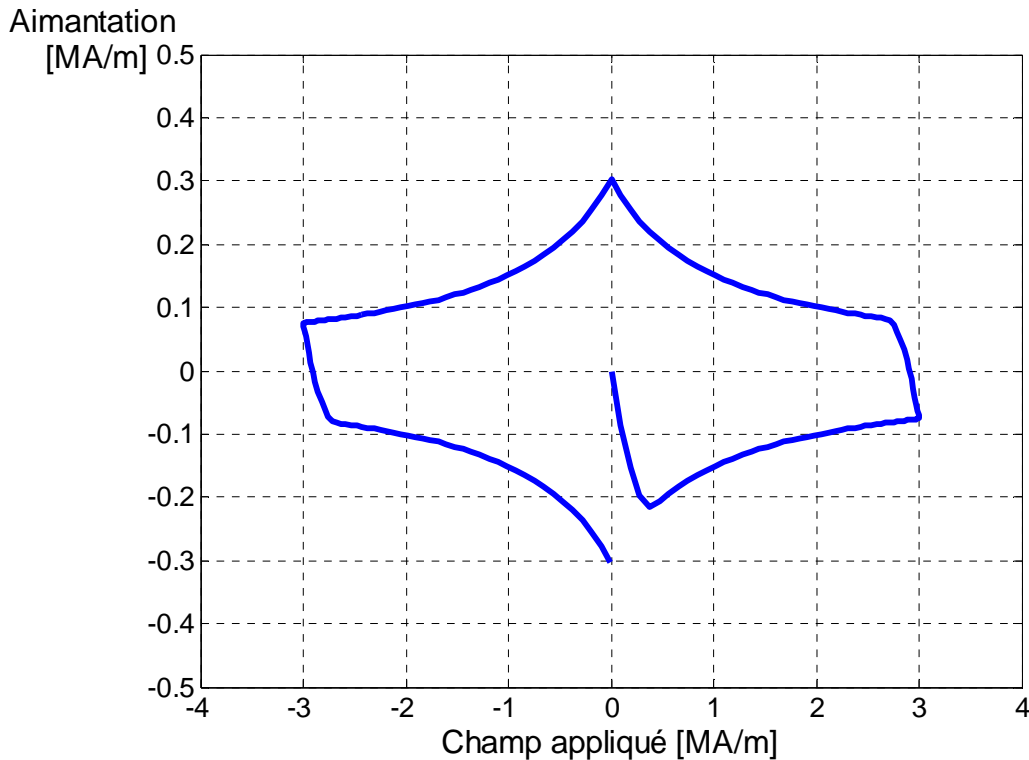
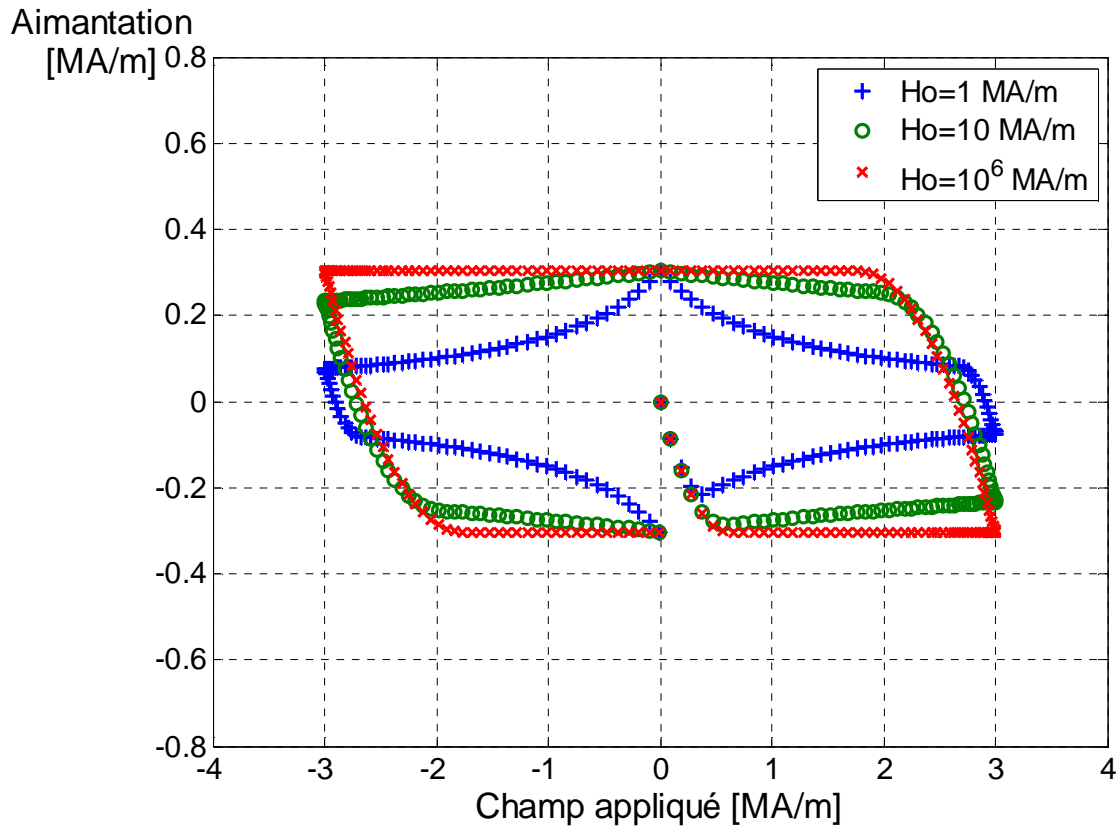


Figure III.17 Courbe d'aimantation en fonction du champ appliqué par le modèle de Kim

La courbe d'aimantation par le modèle de Kim est analogue à la courbe de la Figure III.17. Cependant l'aimantation diminue quand le champ augmente au-delà du champ de pénétration et elle augmente quand le champ appliqué s'annule. Ces deux phénomènes sont dus à l'influence du champ magnétique sur la valeur de la densité de courant critique qui avait été négligée (modèle de Bean). La densité de courant critique décroît avec le champ appliqué.

Lorsqu'on augmente la valeur de champ appliqué, l'aimantation tend vers zéro, car le champ interne se rapproche de celui appliqué et la valeur de la densité de courant critique diminue jusqu'à zéro.

Dans la Figure III.18, nous avons utilisé différentes valeurs de paramètre H_0 où nous avons remarqué que l'augmentation de la valeur de H_0 rend la courbe d'aimantation proche de celle issue par le modèle de Bean.

Figure III.18 Courbe d'aimantation pour différents valeurs de H_0

III.4.4.2 Modèle Exponentiel

Le second modèle décrivant la dépendance en champ de J_c est le modèle exponentiel (Equation (III.8)). Nous montrons sur la Figure III.19, la courbe d'aimantation pour le cas d'une plaque supraconductrice HTC utilisant le modèle exponentiel.

Ce modèle est très utilisé et caractérise le matériau d'une très bonne manière.

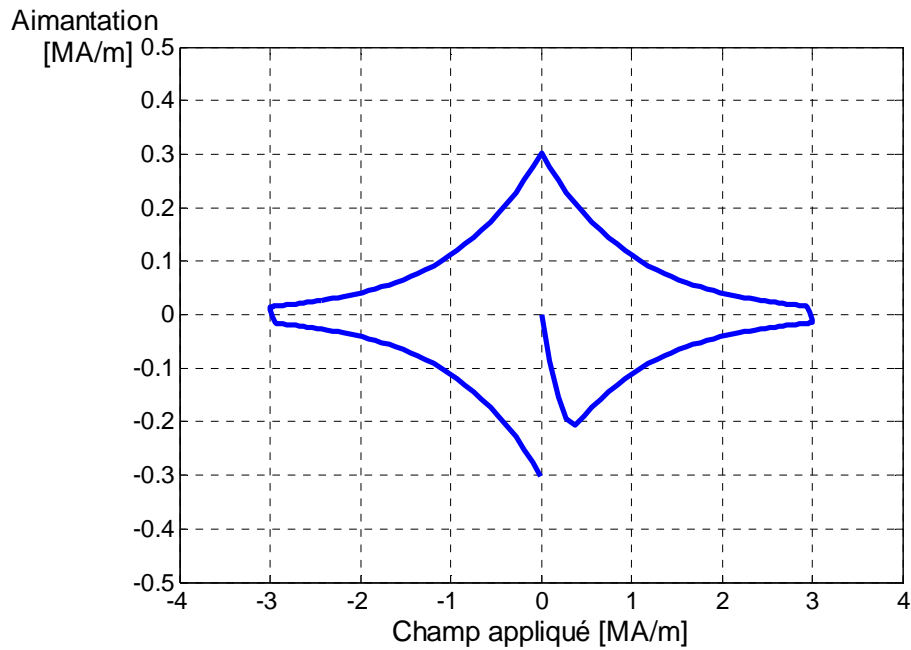
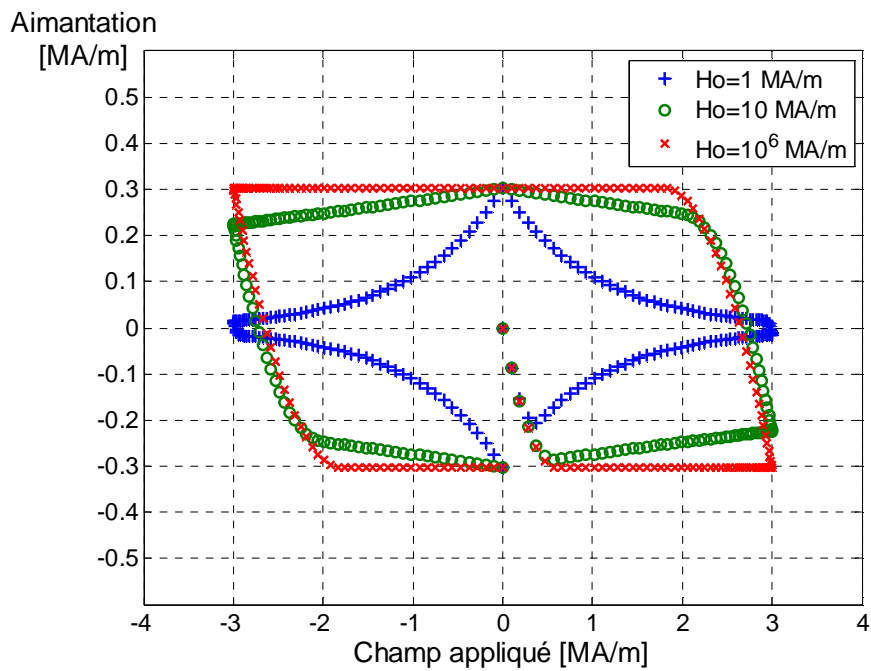


Figure III.19 Courbe d'aimantation en fonction du champ appliqué par le modèle exponentiel

Pareil à celui de Kim, en augmentant H_0 nous rapprochant les formes d'aimantation issues par le modèle de Bean Figure III.20.

Figure III.20 Courbe d'aimantation pour différentes valeurs de H_0

III.4.5 Modèle d'hystérésis dynamique

Un modèle d'hystérésis est dit dynamique, s'il suit et considère parfaitement les changements causés par la grandeur d'entrée. Dans notre cas, la succession des intégrations et les changements d'état causé par le changement de direction du champ appliqué sont bel et bien introduites dans nos algorithmes lors de la programmation. L'une des manières pour vérifier cela est l'observation des cycles mineurs pour des variations amorties des champs magnétiques appliqués.

Dans la Figure III.21, le champ présenté et celui dont l'expression mathématique est

$$H_a(t) = H_{max} \sin(\omega \cdot t) \cdot \exp(-20 \cdot t) \quad (\text{III.26})$$

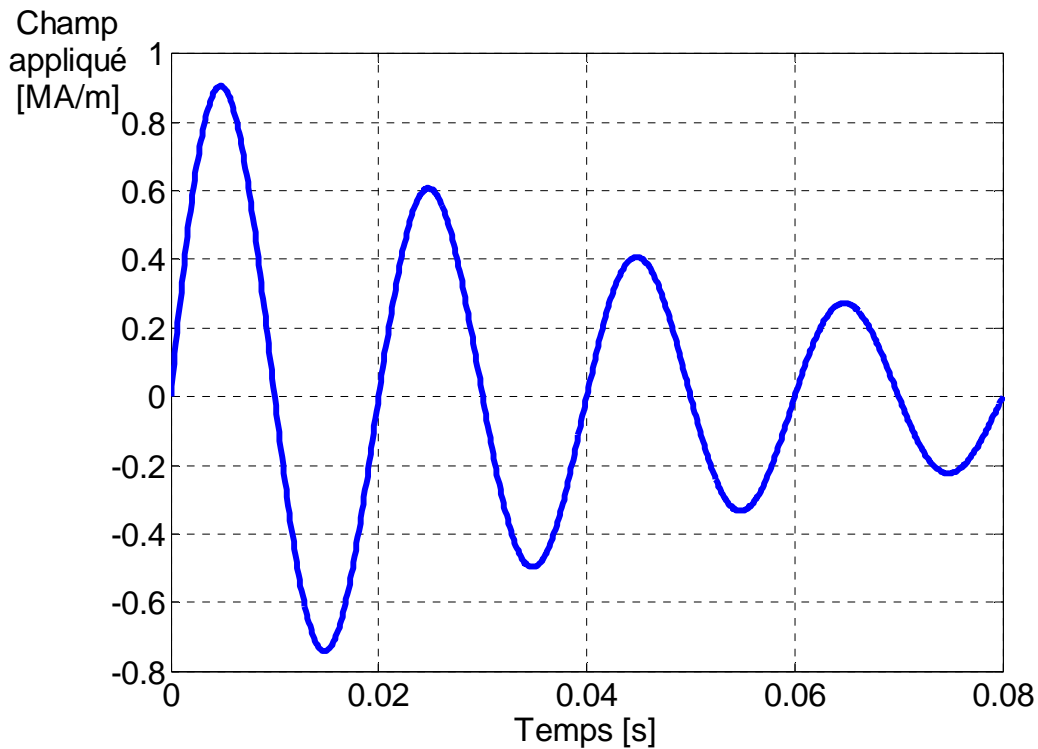


Figure III.21 Champ oscillatoire variable en fonction de temps

D'après la Figure III.22, les cycles mineurs sont parfaitement considérés et illustrent bien la variation du champ oscillatoire décroissant en allant des cycles de grandes tailles à ceux de plus petites tailles.

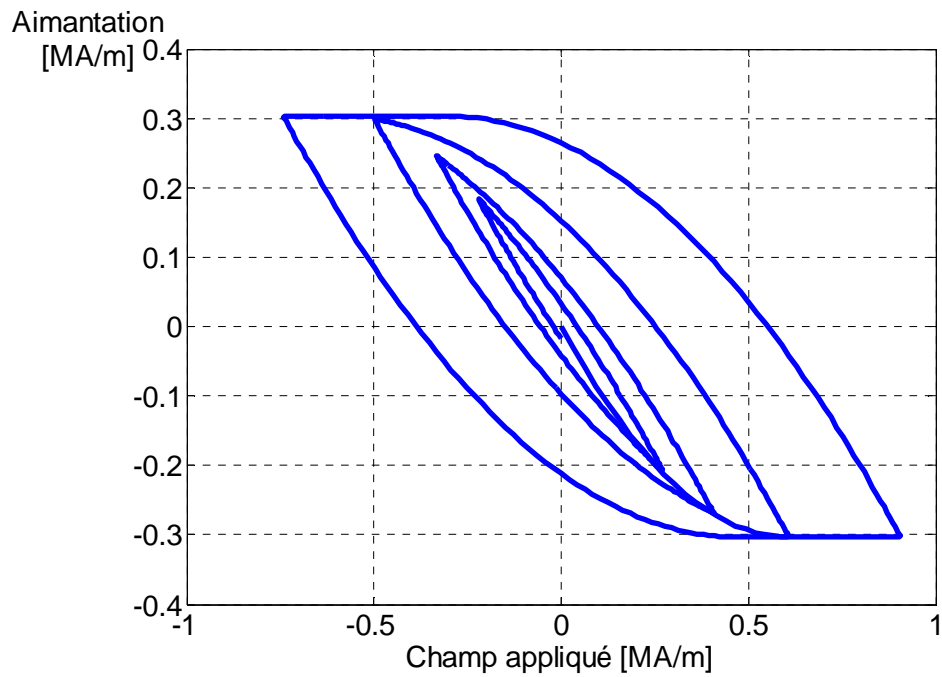


Figure III.22 Présentation de cycle majeur et des cycles mineurs par le modèle de Bean

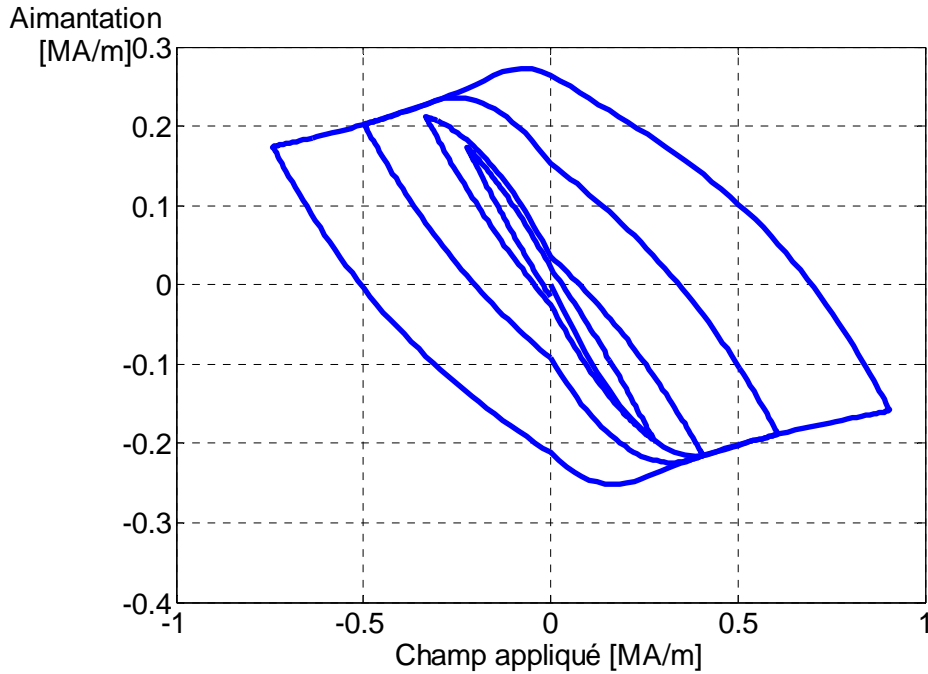


Figure III.23 Présentation de cycle majeur et des cycles mineurs par le modèle de Kim

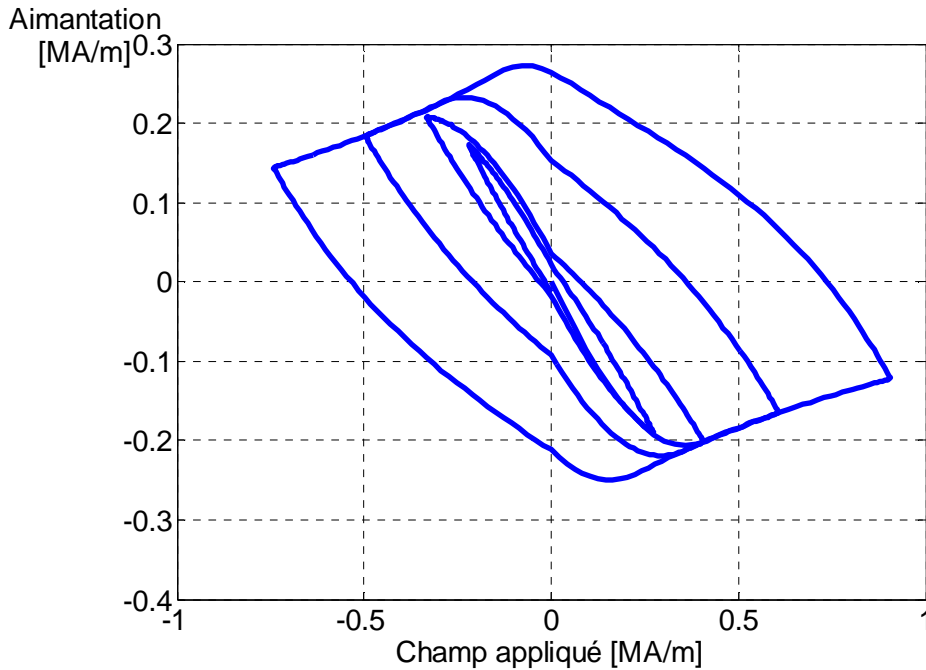


Figure III.24 Présentation de cycle majeur et des cycles mineurs par le modèle Exponentiel

En introduisant aussi les effets des modèles de Kim et d'Exponentiel, les cycles mineurs sont toujours apparents (Figure III. 23-24).

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la réaction des supraconducteurs soumis à des champs magnétiques externes par des modèles existants en littérature. La plupart de ces modèles traitent le cas de la première aimantation. Nous avons développé des calculs des intégrales en tenant en compte chaque changement de direction du champ magnétique appliqué. Pour la stratégie prise en programmation, il faut détecter les dites changements et prendre en considération l'historique des courants induits existants (parmi les courants, il y'a ceux qui sont totalement effacés et ceux qui continuent à exister, tout dépend du champ appliqué).

Dans une lévitation magnétique (aimant permanent supraconducteur), le champ appliqué par l'aimant est oscillatoire décroissant en fonction du temps jusqu'à la stabilité c'est pour cette raison que nous avons simulé un tel champ qui provoque toujours des cycles mineurs.

Dans le prochain chapitre, on s'intéressera au calcul des forces d'interaction qui seront développées par l'approche intégrale.

CHAPITRE IV

IV.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, les aimants permanents ont été modélisés par l'approche ampérienne comme étant des bobines fines à densités de courant constantes, équivalente à des polarisations supposées fixes. Aussi par le modèle de Bean et les modifications apportées par Kim et le modèle exponentiel, le supraconducteur soumis à des champs variables, pourra être assimilé à une superposition de bobines de tailles et de largeurs dynamiques.

Le but principal est de pouvoir calculer les forces d'interactions entre la bobine fine qui représente l'aimant et l'ensemble de bobines improbables représentant les supraconducteurs. On dit improbable, parce que les pénétrations en courant dépendent du champ appliqué qui est celui de l'aimant permanent. L'application la plus adéquate et qui colle avec cette étude, est la célèbre expérience de lévitation magnétique entre l'aimant et la pastille supraconductrice.

IV.2 Calcul des forces d'interactions entre les aimants permanents et les supraconducteurs HTC

Les composantes de force vont être calculées entre un aimant permanent et une pastille supraconductrice HTC de forme parallélépipédique Figure IV.1. Les dimensions de l'aimant permanent sont $2A_{PM} \times 2B_{PM} \times 2C_{PM}$ et sa polarisation est J . Pour la pastille supraconductrice, les dimensions sont $2L_x \times 2L_y \times 2C$ et sa densité de courant critique est J_c . Entre le centre de l'aimant et le centre du haut de la pastille, on désigne respectivement les distances (α, β, γ) . Le côté $2A_{PM}$ est parallèle au côté $2L_x$. La hauteur de la pastille supraconductrice est discrétisée en élément dh_{sc} dans laquelle est défini le rapport entre la hauteur de la pastille supraconductrice HTC et le nombre de spires verticalement superposées N_{sc} .

$$dh_{sc} = \frac{h_{sc}}{N_{sc}} \quad (IV.1)$$

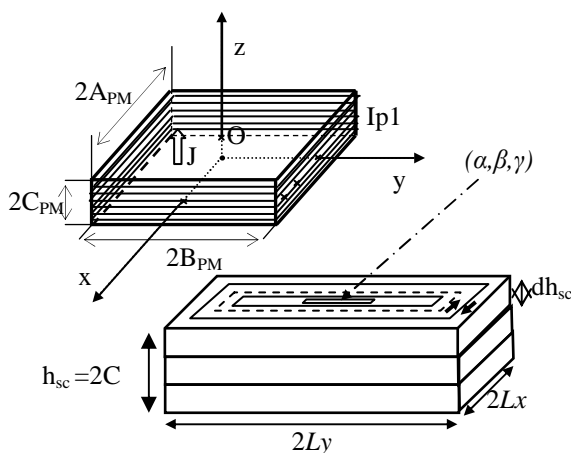


Figure IV.1 Système à étudier (l'aimant permanent et la pastille supraconductrice HTC)

Pour le reste de notre développement, nous prenons $N_{sc}=1$ mais, il est possible d'utiliser le principe de superposition pour un nombre considérable d'éléments ($N_{sc}>1$).

IV.2.1 Cas où l'aimant permanent et la pénétration de la densité de courant dans la pastille supraconductrice HTC est suivant Ox

Pour le couplage entre l'aimant permanent et la pastille supraconductrice HTC et le calcul de la force d'interaction entre eux, nous commençons par utiliser un cas spécifique tel qu'il est représenté sur la Figure IV.2. La partie de la pastille supraconductrice HTC transporte un courant uniforme suivant la direction Ox.

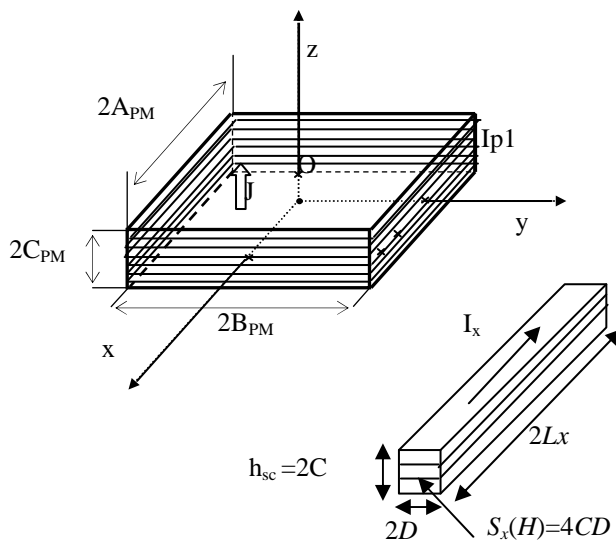


Figure IV.2 Aimant permanent et le courant de la pastille supraconductrice HTC suivant Ox

En appliquant les mêmes considérations pour le calcul de force d'interaction [Aissaoui.13], nous ne prenons que les circulations des courants parallèles. Pour les perpendiculaires, leurs mutuelles sont nulles [Grover.62], [Hoer.65], [Ruehli. 72].

Le calcul par voie intégrale, nous conduit à cinq intégrations, trois pour le volume de la pastille supraconductrice HTC (dX, dY et dZ) et deux pour les faces qui sont parallèles à la bobine de l'aimant permanent (dx dz).

L'inductance mutuelle du système précédent est exprimée :

$$M_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(2C_{PM}) \cdot (S_x(H))} \left[\int_{-C}^C \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-C_{PM}}^{C_{PM}} \int_{-A_{PM}}^{A_{PM}} \frac{1}{r} dx dz dX dY dZ \right]_{y=-B_{PM}}^{y=B_{PM}} \quad (IV.2)$$

$$M_x = \frac{\mu_0}{4\pi(2C_{PM})S_x(H)} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q} \cdot \psi_x(U, V, W, r) \quad (IV.3)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \psi_x(U, V, W, r) = & \left(-\frac{1}{4}U^2W^2 + \frac{1}{24}U^4 + \frac{1}{24}W^4 \right) \ln(r+V) + \frac{UV(3 \cdot W^2 - V^2)}{6} \ln(r-U) \\ & + \frac{WV(3 \cdot U^2 - V^2)}{6} \ln(r-W) + \frac{UW^3}{6} \cdot \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{VU}{rW}\right) + \frac{WU^3}{6} \cdot \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{VW}{rU}\right) + \frac{UWV^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{UW}{rV}\right) \\ & - \frac{V \cdot r}{24} (2 \cdot V^2 - 3 \cdot U^2 - 3 \cdot W^2) \end{aligned} \quad (IV.4)$$

L'énergie d'interaction est issue par la multiplication de la mutuelle par les courants de l'aimant et du supraconducteur :

$$E_x = I_{pl} \cdot I_x \cdot M_x = \left(\frac{J \cdot 2C_{PM}}{\mu_0} \right) \cdot (I_x) \cdot M_x \quad (IV.5)$$

Les composantes de la force exercée sont obtenues à partir :

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= -\operatorname{grad} E_x \\ \vec{F}_1 &= F_{x1} \vec{i} + F_{y1} \vec{j} + F_{z1} \vec{k} \end{aligned} \quad (IV.6)$$

La force F_{x1} est définie :

$$F_{x1} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{I_{p1} \mu_0 I_x}{4\pi(2C_{PM}) \cdot (S_x(H))} \left[\int_{-C}^C \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-C_{PM}}^{C_{PM}} \int_{-A_{PM}}^{A_{PM}} \frac{1}{r} dx dz dX dY dZ \right]_{y=-B_{PM}}^{y=B_{PM}} \right) \quad (IV.7)$$

Les résultats obtenus après les cinq intégrations :

$$F_{x1} = \frac{I_{p1} \mu_0 I_x}{4\pi(2C_{PM}) S_x(H)} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q} \cdot \psi_{x1}(U_1, V_1, W_1, r_1) \quad (IV.8)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \psi_{x1}(U_1, V_1, W_1, r_1) = & -\frac{V_1 (V_1^2 - 3W_1^2)}{6} \ln(U_1 + r_1) - \frac{U_1 (U_1^2 - 3W_1^2)}{6} \ln(V_1 + r_1) \\ & - U_1 V_1 W_1 \ln(-W_1 + r_1) - \frac{W_1}{6} \left(3V_1^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{U_1 W_1}{V_1 r_1} \right) \right. \\ & \left. + 3U_1^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{V_1 W_1}{U_1 r_1} \right) + W_1^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{U_1 V_1}{W_1 r_1} \right) \right) - \frac{U_1 V_1 r_1}{3} \end{aligned} \quad (IV.9)$$

La composante de la force F_{y1} est :

$$F_{y1} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{I_{p1} \mu_0 I_x}{4\pi(2C_{PM}) \cdot (S_x(H))} \left[\int_{-C}^C \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-C_{PM}}^{C_{PM}} \int_{-A_{PM}}^{A_{PM}} \frac{1}{r} dx dz dX dY dZ \right]_{y=-B_{PM}}^{y=B_{PM}} \right) \quad (IV.10)$$

Le résultat est :

$$F_{y1} = \frac{I_{p1} \mu_0 I_x}{4\pi(2C_{PM}) S_x(H)} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q} \cdot \psi_{y1}(U_1, V_1, W_1, r_1) \quad (IV.11)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \psi_{y1}(U_1, V_1, W_1, r_1) = & -\frac{W_1 (U_1^2 - V_1^2)}{2} \ln(r_1 - W_1) - \frac{U_1 (W_1^2 - V_1^2)}{2} \ln(r_1 - U_1) \\ & - U_1 V_1 W_1 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{U_1 W_1}{V_1 r_1} \right) - \frac{r_1}{6} (W_1^2 + U_1^2 - 2V_1^2) \end{aligned} \quad (IV.12)$$

Idem pour la composante de la force F_{z1} qui est donnée par :

$$F_{z1} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I_{p1} \mu_0 I_x}{4\pi(2C_{PM}) \cdot (S_x(H))} \left[\int_{-C}^C \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-C_{PM}}^{C_{PM}} \int_{-A_{PM}}^{A_{PM}} \frac{1}{r} dx dz dX dY dZ \right]_{y=-B_{PM}}^{y=B_{PM}} \right) \quad (IV.13)$$

Après calcul, nous aurons :

$$F_{z1} = \frac{I_p \mu_0 I_x}{4\pi(2C_{PM})S_x(H)} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q} \cdot \psi_{z1}(U_1, V_1, W_1, r_1) \quad (\text{IV.14})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \psi_{z1}(U_1, V_1, W_1, r_1) = & -\frac{V_1(V_1^2 - 3U_1^2)}{6} \ln(W_1 + r_1) - \frac{W_1(W_1^2 - 3U_1^2)}{6} \ln(V_1 + r_1) \\ & - U_1 V_1 W_1 \ln(-U_1 + r_1) - \frac{U_1}{6} \left(3V_1^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{U_1 W_1}{V_1 r_1} \right) \right. \\ & \left. + 3W_1^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{V_1 U_1}{W_1 r_1} \right) + U_1^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{W_1 V_1}{U_1 r_1} \right) \right) - \frac{V_1 W_1 r_1}{3} \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Les variables U_1 , V_1 et W_1 sont exprimés :

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha + (-1)^j (Lx - D_{ni}) - (-1)^i A_{PM} \\ V_1 &= \beta + (-1)^n (Ly - D_{ni}) + (-1)^l D_{ni} - (-1)^k B_{PM} \\ W_1 &= W_2 = \gamma + (-1)^q C - (-1)^p C_{PM} \\ \text{et } r_1 &= \sqrt{U_1^2 + V_1^2 + W_1^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

D_{ni} est défini à partir du modèle de Bean à chaque changement de position de l'aimant permanent (voir chapitre III, Equation III.14). n c'est le nombre de coté de la pastille dont le maximum est 2.

IV.2.2 Cas où l'aimant permanent et la pénétration de la densité de courant dans la pastille supraconductrice HTC est suivant Oy

Le système utilisé est le même dans la Figure IV.2, mais cette fois-ci la pastille supraconductrice HTC véhicule un courant uniforme suivant la direction Oy.

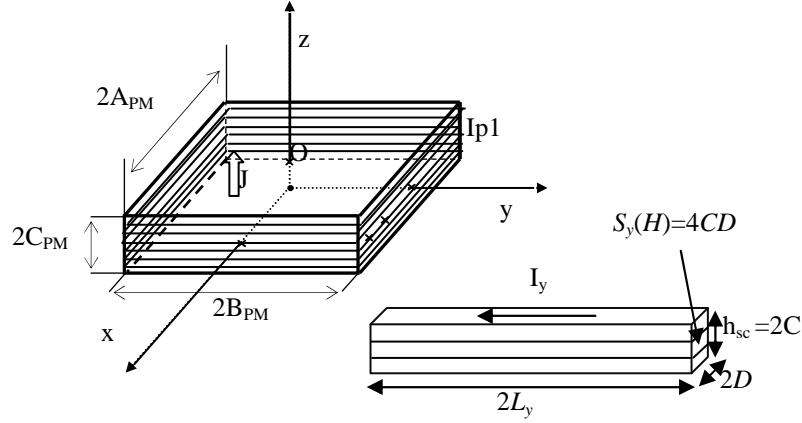


Figure IV.3 Aimant permanent et le courant de la pastille supraconductrice HTC suivant Oy

Comme dans le cas où l'aimant permanent et la pénétration de la densité de courant dans la pastille supraconductrice HTC était suivant l'axe Ox, nous négligeons toutes les faces de la bobine d'aimant qui sont perpendiculaires au courant circulant dans la pastille supraconductrice HTC car l'inductance mutuelle est évidemment nulle.

L'inductance mutuelle M_y sera donc donnée par :

$$M_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(2C_{PM}) \cdot (S_y(H))} \left[\int_{-C}^C \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-C_{PM}}^{C_{PM}} \int_{-B_{PM}}^{B_{PM}} \frac{1}{r} dydzdXdYdZ \right]_{x=-A_{PM}}^{x=A_{PM}} \quad (\text{IV.17})$$

$$M_y = \frac{\mu_0}{4\pi(2C_{PM})S_x(H)} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q} \cdot \psi_y(U, V, W, r) \quad (\text{IV.18})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \psi_y(U, V, W, r) = & \left(-\frac{1}{4}V^2W^2 + \frac{1}{24}V^4 + \frac{1}{24}W^4 \right) \ln(r+U) + \frac{UV(3 \cdot W^2 - U^2)}{6} \ln(r-V) \\ & + \frac{WV(3 \cdot V^2 - U^2)}{6} \ln(r-W) + \frac{VW^3}{6} \cdot \text{tg}^{-1}\left(\frac{VU}{rW}\right) + \frac{WV^3}{6} \cdot \text{tg}^{-1}\left(\frac{UW}{rV}\right) + \frac{VWU^2}{2} \cdot \text{tg}^{-1}\left(\frac{VW}{rU}\right) \\ & - \frac{U \cdot r}{24} (2 \cdot U^2 - 3 \cdot V^2 - 3 \cdot W^2) \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

L'énergie d'interaction est toujours exprimée ainsi :

$$E_y = I_{p1} \cdot I_y \cdot M_y = \left(\frac{J \cdot 2C_{PM}}{\mu_0} \right) \cdot (I_y) \cdot M_y \quad (IV.20)$$

Les composantes de la force exercée sont obtenues à partir :

$$\vec{F}_2 = -gradE_y \quad (IV.21)$$

$$\vec{F}_2 = F_{x2}\vec{i} + F_{y2}\vec{j} + F_{z2}\vec{k}$$

La première composante F_{x2} est obtenue ainsi :

$$F_{x2} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{I_{p1}\mu_0 I_y}{4\pi(2C_{PM}) \cdot (S_y(H))} \left[\int_{-C}^C \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-C_{PM}}^{C_{PM}} \int_{-B_{PM}}^{B_{PM}} \frac{1}{r} dydzdXdYdZ \right]_{x=-A_{PM}}^{x=A_{PM}} \right) \quad (IV.22)$$

Tous calculs faits :

$$F_{x2} = \frac{I_{p1}\mu_0 I_y}{4\pi(2C_{PM}) S_y(H)} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q} \cdot \psi_{x2}(U_2, V_2, W_2, r_2) \quad (IV.23)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \psi_{x2}(U_2, V_2, W_2, r_2) = & -\frac{W_2 (V_2^2 - U_2^2)}{2} \ln(r_2 - W_2) - \frac{V_2 (W_2^2 - U_2^2)}{2} \ln(r_2 - V_2) \\ & - U_2 V_2 W_2 t g^{-1} \left(\frac{V_2 W_2}{U_2 r_2} \right) - \frac{r_2}{6} (W_2^2 + V_2^2 - 2U_2^2) \end{aligned} \quad (IV.24)$$

La composante F_{y2} est donnée :

$$F_{y2} = \frac{\partial E_{yT}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{I_{p1}\mu_0 I_y}{4\pi(2C_{PM}) \cdot (S_y(H))} \left[\int_{-C}^C \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-C_{PM}}^{C_{PM}} \int_{-B_{PM}}^{B_{PM}} \frac{1}{r} dydzdXdYdZ \right]_{x=-A_{PM}}^{x=A_{PM}} \right) \quad (IV.25)$$

Les résultats obtenus sont :

$$F_{y2} = \frac{I_{p1}\mu_0 I_y}{4\pi(2C_{PM}) S_y(H)} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q} \cdot \psi_{y2}(U_2, V_2, W_2, r_2) \quad (IV.26)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\Psi_{y2}(U_2, V_2, W_2, r_2) = & -\frac{V_2 (V_2^2 - 3W_2^2)}{6} \ln(U_2 + r_2) - \frac{U_2 (U_2^2 - 3W_2^2)}{6} \ln(V_2 + r_2) \\
& - U_2 V_2 W_2 \ln(-W_2 + r_2) - \frac{W_2}{6} \left(3V_2^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{U_2 W_2}{V_2 r_2} \right) \right. \\
& \left. + 3U_2^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{V_2 W_2}{U_2 r_2} \right) + W_2^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{U_2 V_2}{W_2 r_2} \right) \right) - \frac{V_2 U_2 r_2}{3}
\end{aligned} \quad (IV.27)$$

Finalement, la composante de force F_{z2} est donnée par :

$$F_{z2} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I_{p1} \mu_0 I_y}{4\pi (2C_{PM}) \cdot (S_y(H))} \left[\int_{-C}^C \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-C_{PM}}^{C_{PM}} \int_{-B_{PM}}^{B_{PM}} \frac{1}{r} dy dz dX dY dZ \right] \right) \quad (IV.28)$$

On aura :

$$F_{z2} = \frac{I_{p1} \mu_0 I_y}{4\pi (2C_{PM}) S_y(H)} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q} \cdot \Psi_{z2}(U_2, V_2, W_2, r_2) \quad (IV.29)$$

Avec

$$\begin{aligned}
\Psi_{z2}(U_2, V_2, W_2, r_2) = & -\frac{U_2 (U_2^2 - 3V_2^2)}{6} \ln(W_2 + r_2) - \frac{W_2 (W_2^2 - 3V_2^2)}{6} \ln(U_2 + r_2) \\
& - U_2 V_2 W_2 \ln(-V_2 + r_2) - \frac{V_2}{6} \left(3U_2^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{V_2 W_2}{U_2 r_2} \right) \right. \\
& \left. + 3W_2^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{V_2 U_2}{W_2 r_2} \right) + V_2^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{U_2 W_2}{V_2 r_2} \right) \right) - \frac{U_2 W_2 r_2}{3}
\end{aligned} \quad (IV.30)$$

Les variables U_2 , V_2 et W_2 seront exprimés :

$$\begin{aligned}
U_2 &= \alpha + (-1)^n (Lx - D_{ni}) + (-1)^j D_{ni} - (-1)^i A_{PM} \\
V_2 &= \beta + (-1)^l (Ly - D_{ni}) - (-1)^k B_{PM} \\
W_2 &= \gamma + (-1)^q C - (-1)^p C_{PM} \\
\text{et } r_2 &= \sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2}
\end{aligned} \quad (IV.31)$$

IV.2.3 Les composantes de la force totale

La force totale est considérée pour les quatre segments deux à deux par rapport à l'axe Ox et Oy et dont les courants sont opposés, nous pouvons paramétrer tout cela avec (n) qui

représente le nombre de segments parallèles de la bobine supraconductrice. Le $(-1)^n$ désigne le sens opposé du courant pour les parallèles toujours.

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{n=0}^1 (-1)^n \cdot (F_{x1} + F_{x2}) \\ F_y &= \sum_{n=0}^1 (-1)^n \cdot (F_{y1} + F_{y2}) \\ F_z &= \sum_{n=0}^1 (-1)^n \cdot (F_{z1} + F_{z2}) \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Les expressions finales des composantes de la force totales, sont :

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{I_p \mu_0 I_c}{4\pi(2C_{PM})(S_x(H) + S_y(H))} \sum_{n=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q+n} (\Psi_{x1} + \Psi_{x2}) \\ F_y &= \frac{I_p \mu_0 I_c}{4\pi(2C_{PM})(S_x(H) + S_y(H))} \sum_{n=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q+n} (\Psi_{y1} + \Psi_{y2}) \\ F_z &= \frac{I_p \mu_0 I_c}{4\pi(2C_{PM})(S_x(H) + S_y(H))} \sum_{n=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q+n} (\Psi_{z1} + \Psi_{z2}) \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Avec Ψ_{x1} Ψ_{y1} Ψ_{z1} Ψ_{x2} Ψ_{y2} Ψ_{z2} sont ceux des équations ((IV.9), (IV.12), (IV.15), (IV.24), (IV.27), (IV.30)).

IV.3 Application et calcul de force globale d'interaction verticale entre l'aimant et la pastille supraconductrice (expérience de lévitation magnétique)

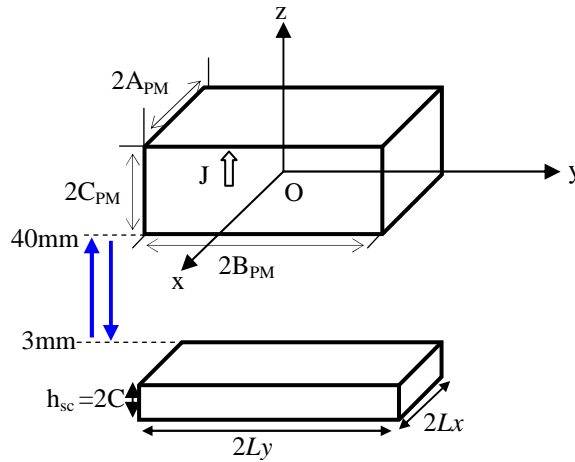


Figure IV.4 Prototype de lévitation

L'expérience consiste à refroidir la pastille supraconductrice HTC en l'absence du champ magnétique, puis progressivement on approche l'aimant de haut en bas de façon à garder la symétrie de l'ensemble. Ce chemin de mouvement vertical commence à partir d'une distance maximale de 40 mm à une distance minimale de 3 mm.

Les paramètres, tels qu'ils sont notés dans notre modèle, de l'aimant permanent et de la pastille supraconducteurs HTC sont présentés au Tableau IV.1.

Aimant permanent		Pastille supraconductrice		
Aimantation J	1.1 T	Densité de courant critique J_c	$90 \times 10^6 \text{ A/m}^2$	
$2A_{PM}$	19.4970 mm	$2L_x$	18.6108 mm	
$2B_{PM}$	19.4970 mm	$2L_y$	18.6108 mm	
$2C_{PM}$	20 mm	2C	10 mm	

Tableau IV.1 Paramètres de l'aimant permanent et de la pastille supraconductrice HTC

IV.3.1 Résultats obtenu par voie numérique

Afin de valider les résultats, nous avons choisi de créer le prototype de lévitation dans le logiciel d'analyse en éléments finis Flux3D, où l'aspect électromagnétique des aimants permanents et des supraconducteurs sont déjà intégrés. La simulation consiste à faire bouger verticalement l'aimant de la distance la plus lointaine (40 mm) jusqu'à la plus proche (3 mm). Les résultats des iso-valeurs de l'induction magnétique et des densités de courants induits sur l'aimant et la pastille, nous sont très utiles surtout aux zones proches.

La Figure IV.5 représente la répartition de l'induction magnétique (la composante B_z) dans l'aimant permanent et le champ appliqué au-dessous de la pastille supraconductrice HTC.

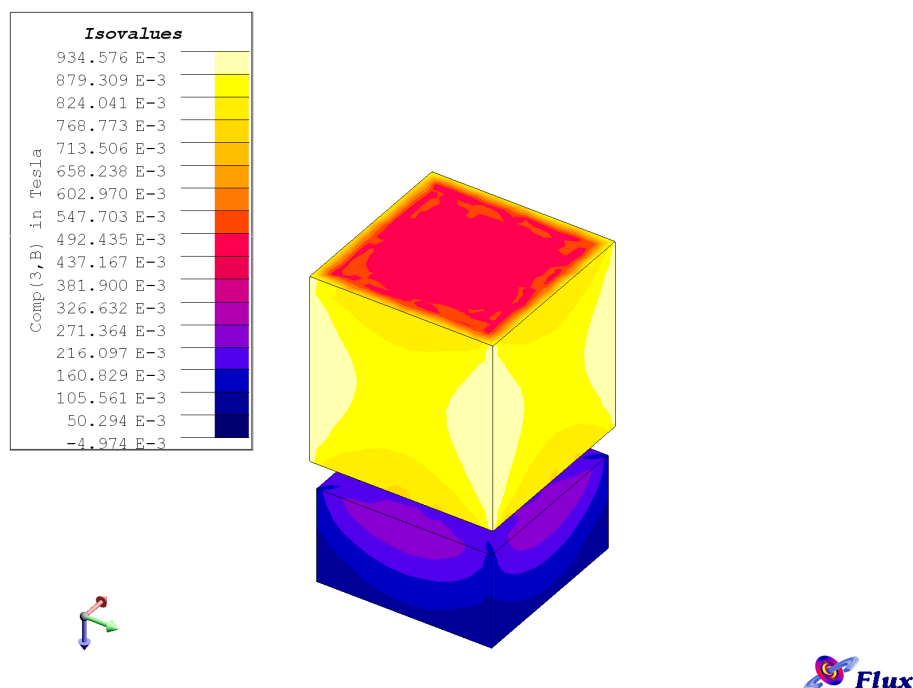


Figure IV.5 Répartition de l'induction magnétique (la composante B_z) dans l'aimant permanent et la pastille supraconductrice

La Figure IV.6 représente la répartition de la densité de courant critique (la composante J_y) dans la pastille supraconductrice HTC. Nous remarquons bien que la densité de courant critique est répartie au bord de la pastille supraconductrice dans la direction de l'axe Oy (axe présenté en vert) avec une absence suivant la direction Ox . Ce qui consolide notre approche de ne tenir que les effets parallèles dans le calcul des mutuelles. En plus, les densités dans les deux côtés sont opposées cela est dû à l'évidence dont les supraconducteurs obéissent (boucles de courants apparaissent en présence du champ appliqué). De la même manière, on aurait pu présenter les densités de courant J_x qui, par analogie, vont être le miroir des courants J_y mais suivant l'axe Ox .

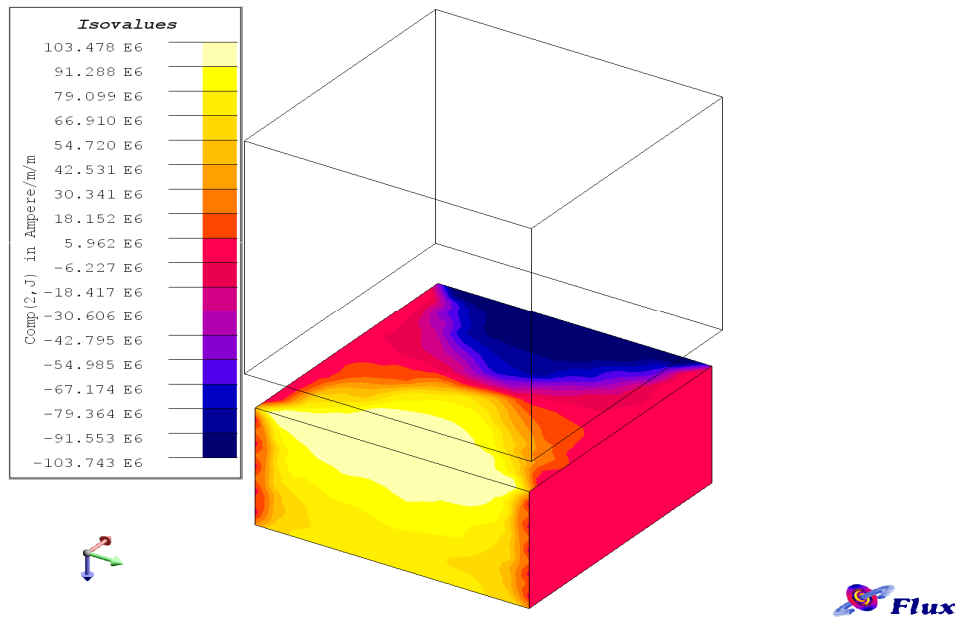


Figure IV.6 Répartition de la densité de courant (la composante J_y) dans la pastille supraconductrice

IV.3.2 Résultats obtenu par voie analytique

Dans la procédure analytique, le champ magnétique appliqué est celui de l'aimant permanent exercé au centre de la pastille. Pour débiter le problème de façon simple nous ne considérons que la composante H_z (l'aimant est toujours situé de manière symétrique au-dessus de la pastille). La pénétration de la densité du courant critique est J_y correspondant à l'axe Ox est égale à la densité de courant critique modélisé par le modèle de Bean J_c , la même chose pour la densité de courant J_x .

Par l'emploi de la quatrième loi de Maxwell (loi d'Ampère) en coordonnée cartésienne, on aura :

$$\vec{J} = \text{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

$$J_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} = J_c$$

$$J_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} = J_c \quad (\text{IV.35})$$

$$J_z = 0$$

Le H_z est la composante du champ magnétique produit par l'aimant permanent. Il a déjà été défini au chapitre II, (Equation II.41) :

$$H_z = \frac{J}{4\pi\mu_0} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j+k} \left(-tg^{-1}\left(\frac{VW}{rU}\right) + tg^{-1}\left(\frac{UW}{rV}\right) \right) \quad (\text{IV.36})$$

Avec

$$\begin{aligned} U &= x - (-1)^i A_{PM} \\ V &= y - (-1)^j B_{PM} \\ W &= z - (-1)^k C_{PM} \\ \text{et } r &= \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Le chemin de parcours vertical de simulation déjà réalisé, est représenté ici par (x=0 mm, y=0 mm et z= 40 mm à 3 mm puis de 3 mm à 40 mm). Nous pouvons comparer le champ appliqué par notre modèle et celui de flux3D. Il est évident que si on retourne par le même itinéraire, la courbe de l'allée sera superposée avec celle du retour. Mais ce qui nous encourage, c'est aussi la concordance des résultats trouvés analytiquement et ceux réalisés par voie numérique Figure IV.7.

Le calcul de la force verticale F_z de façon analytique, est fait à l'aide du modèle de l'équation (IV.33) associé au modèle de Bean qui nous fournit les pénétrations D_{ni} à l'aide du champ H_z appliqué au centre de la pastille. Toute la dynamique, est mise sous forme de programme dans l'environnement Matlab. La force aussi, est calculée par le biais du logiciel Flux pour le même déplacement vertical choisi auparavant.

Toute la différence et l'intérêt de la lévitation réside dans le changement du comportement du supraconducteurs. De la distance la plus loin 40 mm, le champ appliqué est de faible valeur et les courants induits dans la pastille SHTC sont presque ou totalement nulles. Lorsque on fait rapprocher l'aimant, le champ augmente et les courants apparaissent des coté externes de la pastille SHTC en essayant d'annuler la cause de leur existence (Loi de Lenz). Arrivant à la position minimale (3 mm), La pénétration devienne maximale ainsi que la force de poussée. Etonnamment maintenant, puisque c'est une seule caractéristique des supraconducteurs,

lorsque le champ magnétique diminue en faisant retourner l'aimant à la position initiale lointaine. Des courants seront créés de façon inverse commençant toujours des cotés provoquant un effet attractif, tandis que les anciens courants existent et qui essaient toujours de repousser l'aimant. Cela va forcément nous conduire à d'autres valeurs de forces résultantes différentes de l'itinéraire d'allée (ce comportement est connu en domaine microscopique par le nom du piégeage magnétique par effets de vortex). Tous ce qu'on vient d'expliquer est bien apparent après confrontation des résultats analytique et ceux de Flux3D, Figure IV.8.

Le plus grand avantage est la rapidité de notre modèle analytique. Pour la présente simulation, nous aurons une rapidité d'environ 30 fois et un espace de stockage très réduit Tableau IV.2.

	Matlab	Flux3D
Temps	1 min	30 min
Mémoire	0.99 Mo	454 Mo

Tableau IV.2 Comparaison de temps du calcul et la mémoire entre Matlab et Flux3D

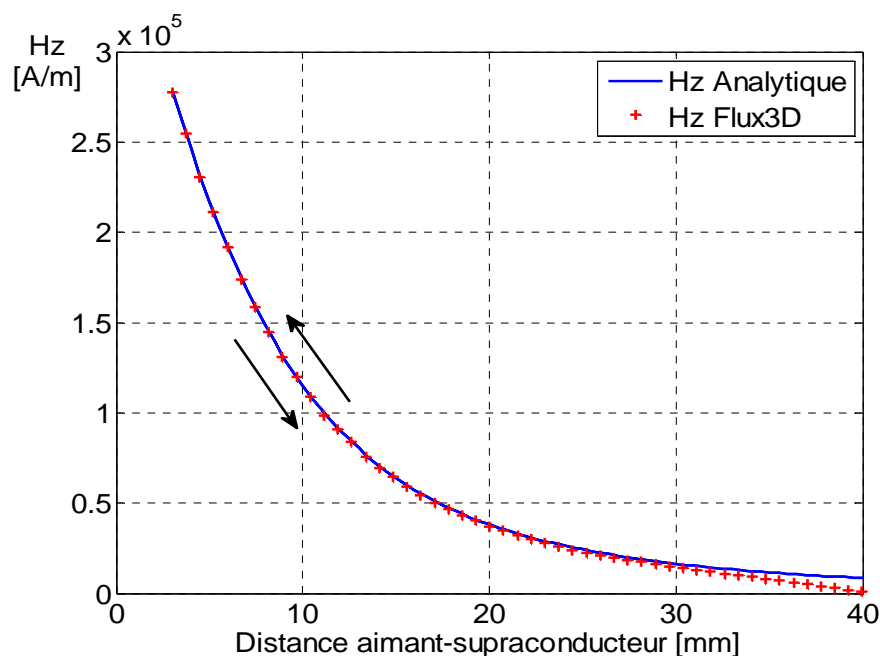


Figure IV.7 La composante du champ magnétique H_z appliquée au dessus de la pastille supraconductrice en fonction de la distance aimant-supra

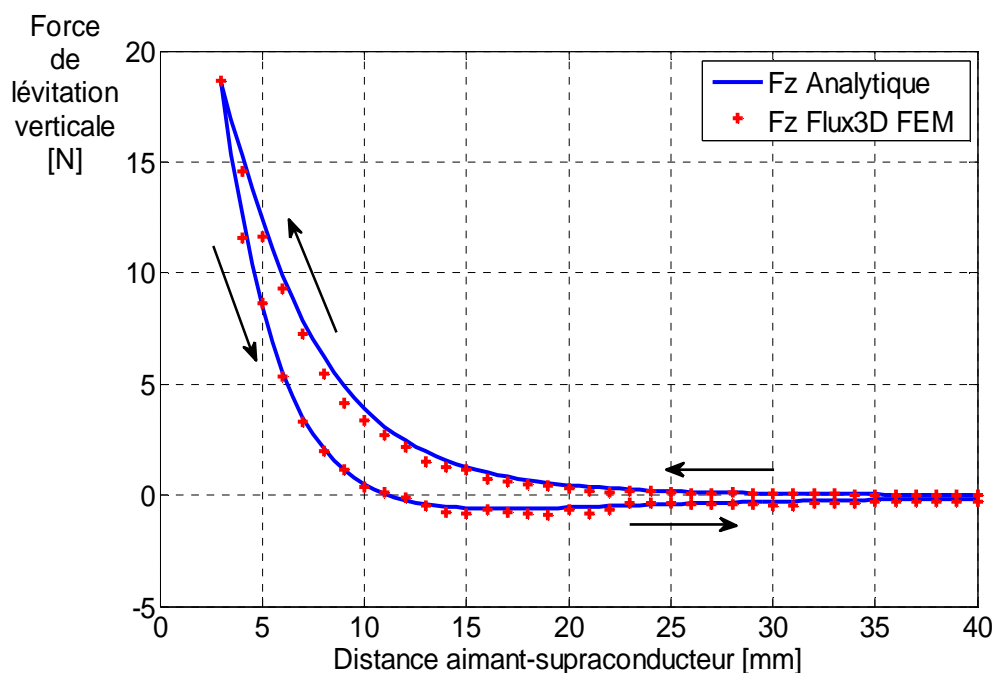


Figure IV.8 Force verticale exercée entre l'aimant permanent et la pastille supraconductrice HTC en fonction de l'écart aimant-supra

IV.3.3 Influences paramétriques importantes

IV.3.3.1 Effet de la dépendance de la densité de courant critique sur le champ magnétique interne (de pénétration) de la pastille supraconductrice HTC

Afin d'étudier l'effet de la dépendance de la densité de courant critique sur le champ magnétique de pénétration le long de la pastille supraconductrice HTC, nous utiliserons les mêmes valeurs des paramètres rencontrés dans des expériences typiques de Navau [Navau.98] pour des pastilles cylindriques. Puisque nous essayons de les comparer à nos formes parallélépipédiques, on est obligé de garder les mêmes quantités volumiques. Il est clair, que pour cette hypothèse précise, les différences entre les valeurs de forces vont apparaître. Mais ce qui nous préoccupe est d'observer beaucoup plus les formes des courbes fournies. On procède donc comme suit :

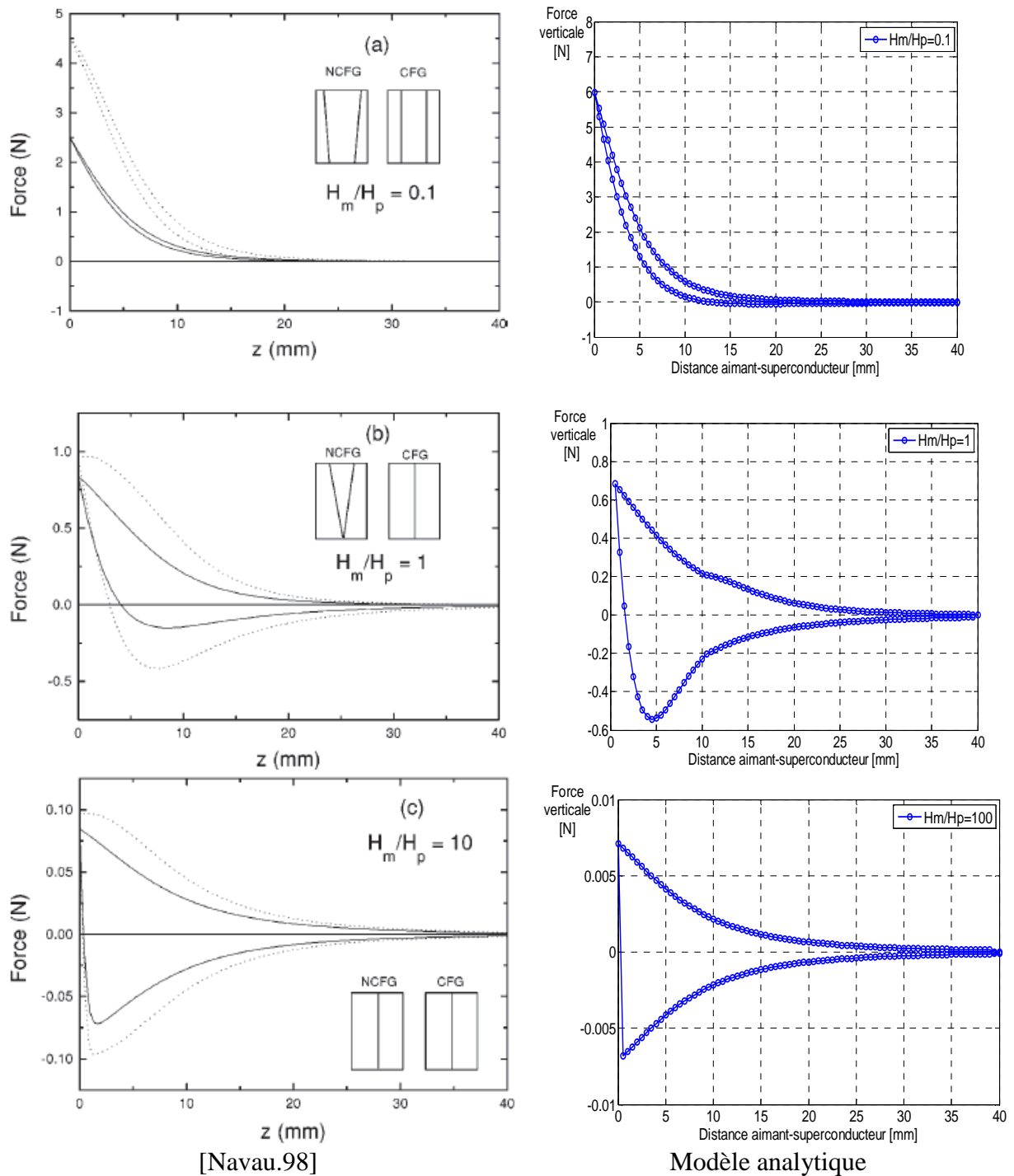


Figure IV.9 Force de lévitation magnétique en fonction de l'écart aimant supraconducteur utilisé le gradient de champ n'est pas constant (NCFG) (ligne continue), gradient de champ est constant (CFG) (ligne pointille) pour $H_m/H_p=0.1$ et $H_m/H_p=1$, $H_m/H_p=100$

Conformément au volume de la pastille cylindrique et de l'aimant permanent de Navau, nous prendrons comme dimensions :

Aimant permanent		Pastille supraconductrice	
Aimantation J	0.5 T	Champ maximal H_m	170×10^3 A/m
$2A_{PM}$	21.2694 mm	$2L_x$	10.6347 mm
$2B_{PM}$	21.2694 mm	$2L_y$	10.6347 mm
$2C_{PM}$	20 mm	$2C$	10 mm

Tableau IV.3 Paramètres de l'aimant permanent et de la pastille supraconductrice HTC

Le chemin du mouvement commence à partir de la distance maximale 40 mm jusqu'à la distance minimale 0^{-10} mm.

Lorsque le champ maximal est inférieur au champ de pénétration la force attractive est presque égale à la force répulsive il y a une petite hystérésis (Figure IV.9(a)). Si le courant critique est suffisamment élevé (Figure IV.9(b)), la force serait presque non-hystérétique et devrait avoir une grande valeur. D'un autre côté, lorsque le taux de champ de pénétration maximum est élevé, la force attractive serait presque symétriquement opposée à la force répulsive (Figure IV.9 (c)). Nous avons remarqué qu'il y a un très grand rapprochement entre notre résultat et ceux obtenus expérimentalement.

IV.4 Application et calcul de force globale d'interaction latérale entre l'aimant et la pastille supraconductrice

Le système choisit est exactement le même que ceux de la Figure IV.1. On fait déplacer l'aimant permanent suivant la direction Ox. Le champ magnétique appliqué dans le cas de calcul de force d'interaction latérale est la composante H_z .

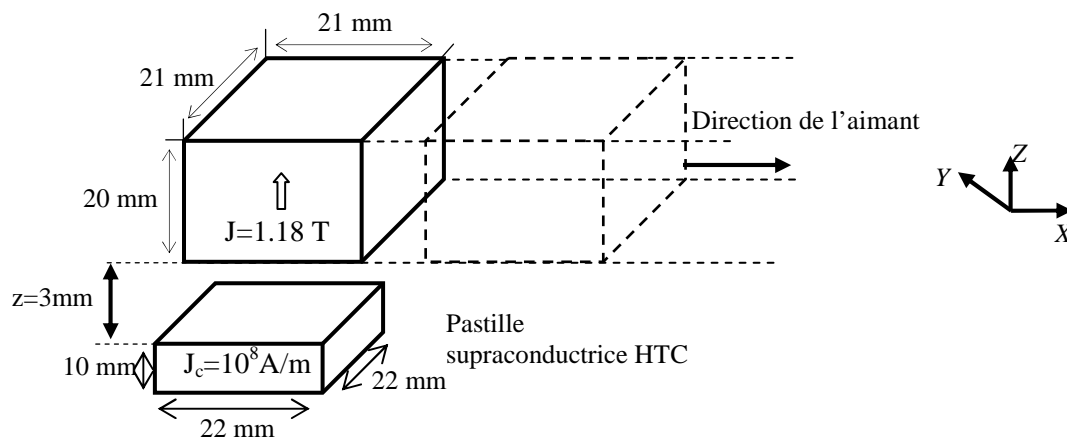


Figure IV.10 Système d'un aimant permanent et une pastille supraconductrice HTC

Nous avons comparé notre résultat avec logiciel Flux3D, pour des paramètres exacts et des formes parallélépipédiques. Il est intéressant d'observer la variation des forces entre l'aimant et la pastille supraconductrice HTC. La simulation consiste à faire déplacer latéralement l'aimant de $x = -12\text{mm}$ à $x = 12\text{ mm}$, ($z = 3\text{ mm}$ distance minimale).

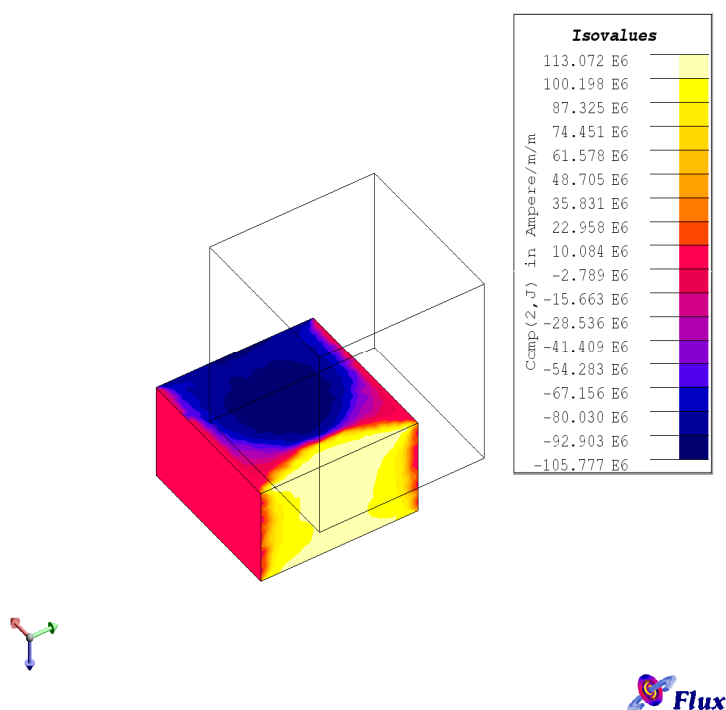


Figure IV.11 Répartition de la densité de courant (composante J_y) dans la pastille supraconductrice lors déplacement latéral

La Figure IV.11 illustre la répartition de la densité de courant critique (la composante J_y) dans la pastille SHTC. Nous avons vu, quand l'aimant et la pastille supraconductrice HTC sont en face, les densités dans les deux côtés sont opposées d'une façon symétrique. Maintenant, lors de déplacements de l'aimant la partie négative de la densité de courant critique est répartie d'une façon importance ce qui entraîne une diminution de la partie positive de la densité de courant critique.

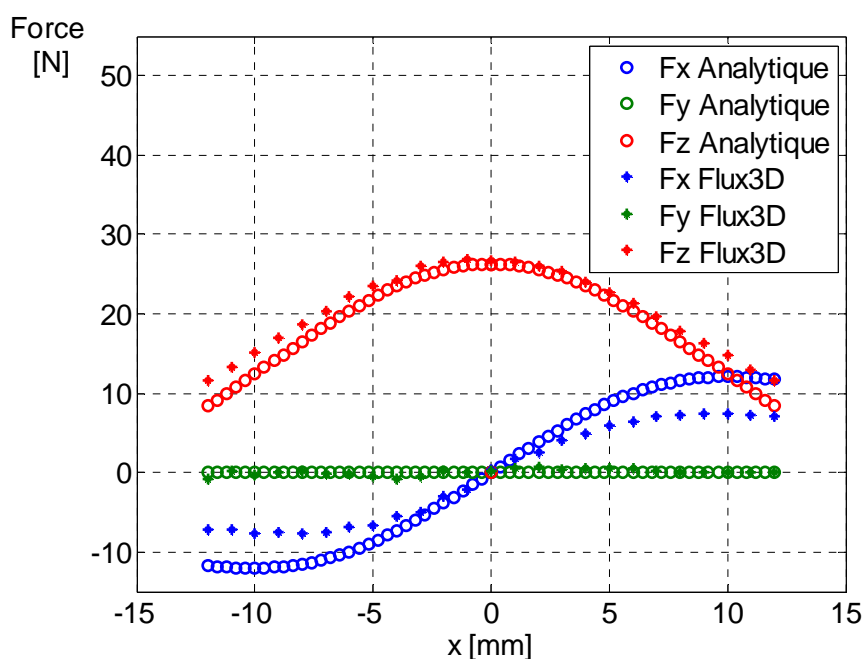


Figure IV.12 Les composantes de force latérale F_x , F_y et verticale F_z , calculées analytiquement et numériquement (Flux3D)

Pour les composantes de forces Figure IV.12 on remarque que les valeurs se rapprochent si l'aimant est situé au centre et s'éloignent en éloignant l'aimant. On pense que cette différence est due à la considération unique de la composante H_z . Alors que lorsque l'aimant s'éloigne latéralement suivant x , toute la configuration perd la symétrie et le champ appliqué sera représenté par ses deux composant H_x et H_z en appliquant la loi d'ampère :

$$\vec{J} = \text{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (\text{IV.38})$$

Avec

$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\
 J_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\
 J_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{IV.39}$$

Les expressions finale de la densité de courant critique en coordonné cartésienne sont :

$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_c - \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (1)^{i+j+k} \left(\frac{-W_k}{(U_i - r)r} \right) \\
 J_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{J}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (1)^{i+j+k} \left(\frac{-W_k}{(V_j - r)r} \right) - J_c \\
 J_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{IV.40}$$

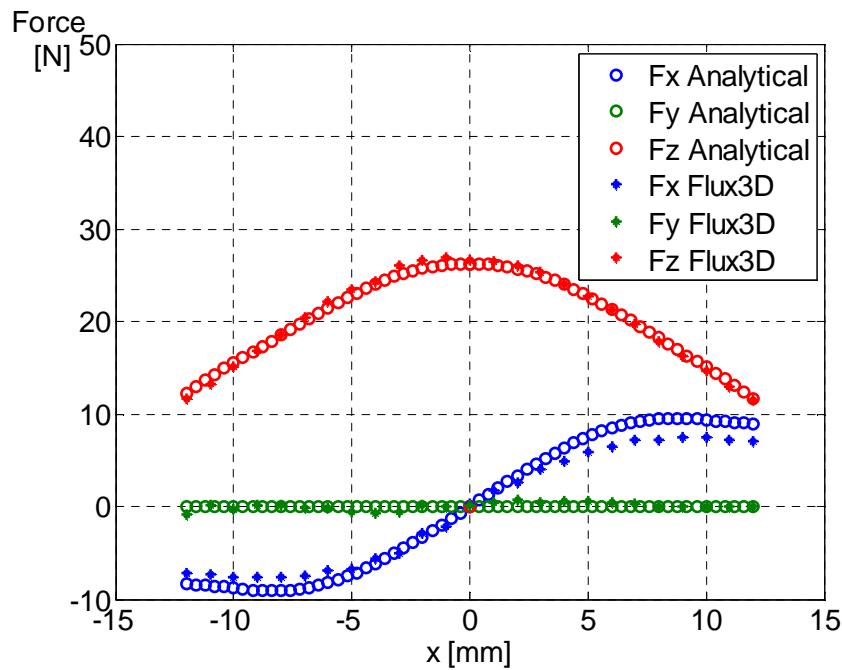


Figure IV.13 Les composantes de forces, calculées analytiquement et numériquement (Flux 3D)

Après introductions des expressions de courants issues des différentes composantes de champ appliqué. L'erreur entre le calcul des forces par la voie analytique et numérique est devenue moins significative.

IV.5 Couplage mécanique

Toute la première partie, les chemins suivis par l'aimant sont totalement contrôlés. Mais pour se rapprocher de la réalité il faut laisser l'aimant libre au dessus du supraconducteur et introduire le comportement mécanique à travers les lois de Newton.

IV.5.1 Système étudié (formulation du système mécanique)

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad (\text{IV.41})$$

La considération du mouvement vertical conduit à :

$$F_z - mg = m \ddot{z} \quad (\text{IV.42})$$

Avec m est la masse de l'aimant.

F_z est la force due à l'interaction entre l'aimant et la pastille supraconductrice.

g est l'accélération gravitationnelle et z est la position du centre de l'aimant par rapport à celui de la pastille supraconductrice HTC.

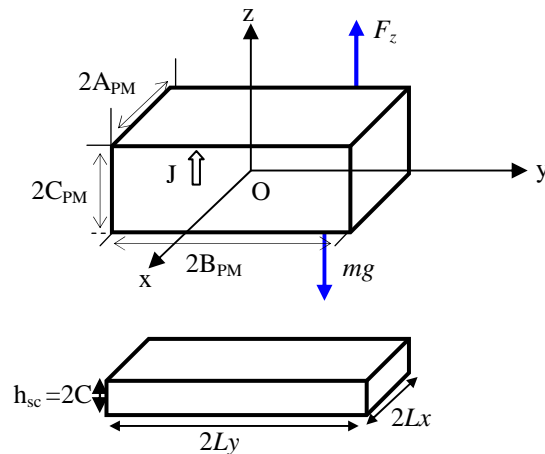


Figure IV.14 Système à étudié

Pour la résolution de l'équation différentielle, nous utilisons la méthode d'Euler. La méthode d'Euler est une méthode numérique itérative qui permet d'obtenir une solution approchée

d'une équation différentielle à partir des conditions initiales. On peut alors écrire, en considérant un intervalle de temps dt suffisamment petit :

$$v(t+1) = v(t) - \frac{dt}{m}(F_z - mg) \quad (\text{IV.43})$$

$$z(t+1) = z(t) + dt \cdot v(t+1) \quad (\text{IV.44})$$

Avec v est la vitesse de l'aimant.

En considérant tous les paramètres de modélisation dans le Tableau IV.4 :

Aimant permanent		Pastille supraconductrice	
Aimantation J	1.1 T	Densité de courant critique J_c	50 A/mm ²
Masse	250 g		
$2A_{PM}$	10 mm	$2L_x$	10 mm
$2B_{PM}$	10 mm	$2L_y$	10 mm
$2C_{PM}$	10 mm	2C	10 mm

Tableau IV.4 Paramètres de l'aimant permanent et de la pastille supraconductrice HTC

À l'instant $t=0$ s, l'aimant est maintenu à une distance initiale $z_0 = 8$ mm, l'aimant est lâché pour suivre librement sa trajectoire suivant la direction Oz. La Figure IV.15 représente le mouvement de l'aimant oscillatoire. Nous remarquons qu'après une période transitoire l'aimant se stabilise à une position finale $z_f = 1$ mm.

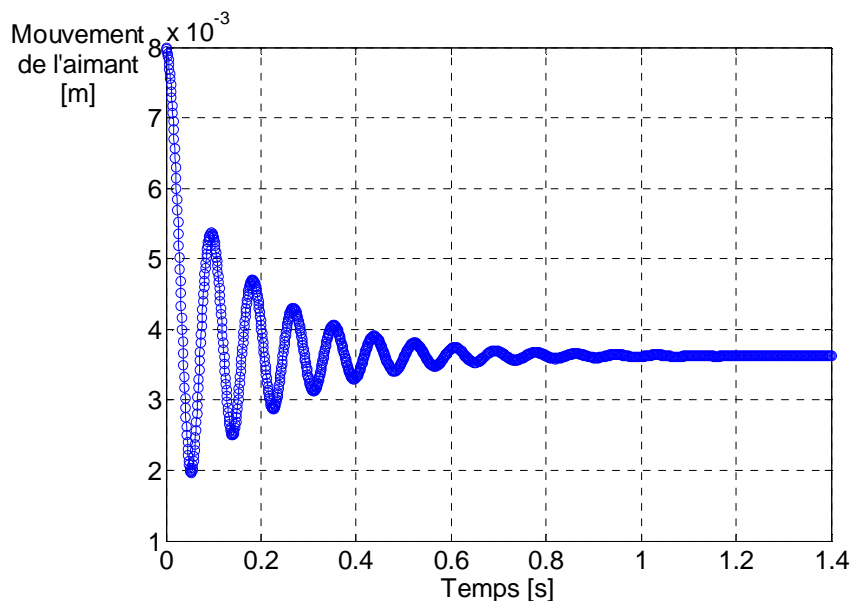


Figure IV.15 Mouvement de l'aimant permanent en fonction du temps

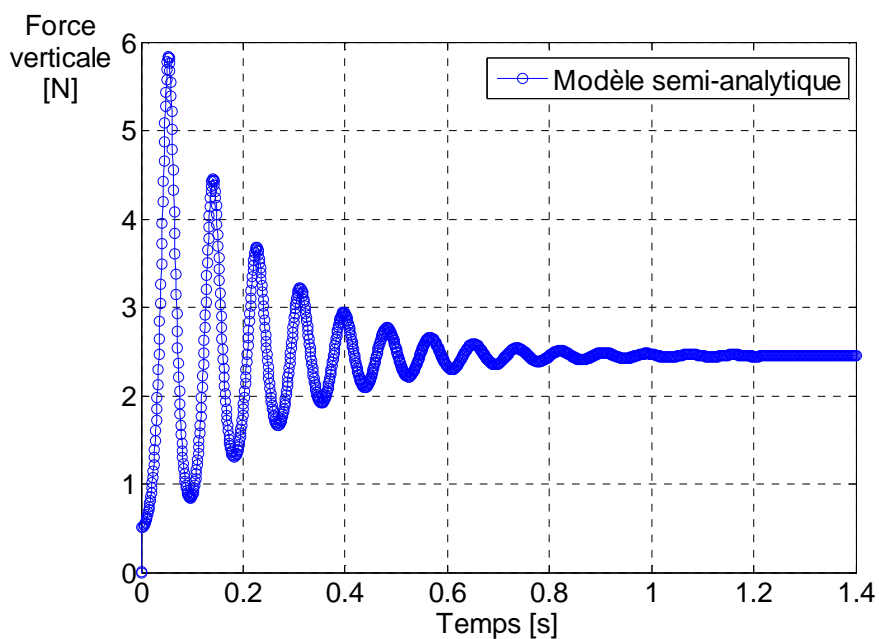


Figure IV.16 Force d'interaction verticale entre l'aimant et la pastille supraconductrice en fonction du temps

D'après la Figure IV.16 qui représente la force d'interaction verticale entre l'aimant et le supraconducteur en fonction du temps. À l'instant $t = 0$ s, tant que la force répulsive aimant-supraconducteur est inférieure au poids ($F_z < mg = 2.5$ N) l'aimant commence à tomber.

À l'instant $t = 0.025$ s, la force répulsive est égale au poids, mais l'aimant ne se stabilise pas à cause d'une très grande quantité d'énergie cinétique. Il va alors se ralentir pour retourner vers le sens inverse. Enfin à partir de $t = 0.8$ s, l'aimant se stabilise quand la force magnétique tend vers la force de la pesanteur. Le phénomène d'oscillations amorties ne peut s'expliquer que par l'existence d'un phénomène dissipatif. Ce phénomène est en relation directe avec les cycles décrits par la force.

Il est intéressant de voir ce qui se passe pour l'aspect purement magnétique. On peut le constater en observant les cycles d'hystérésis à travers les forces.

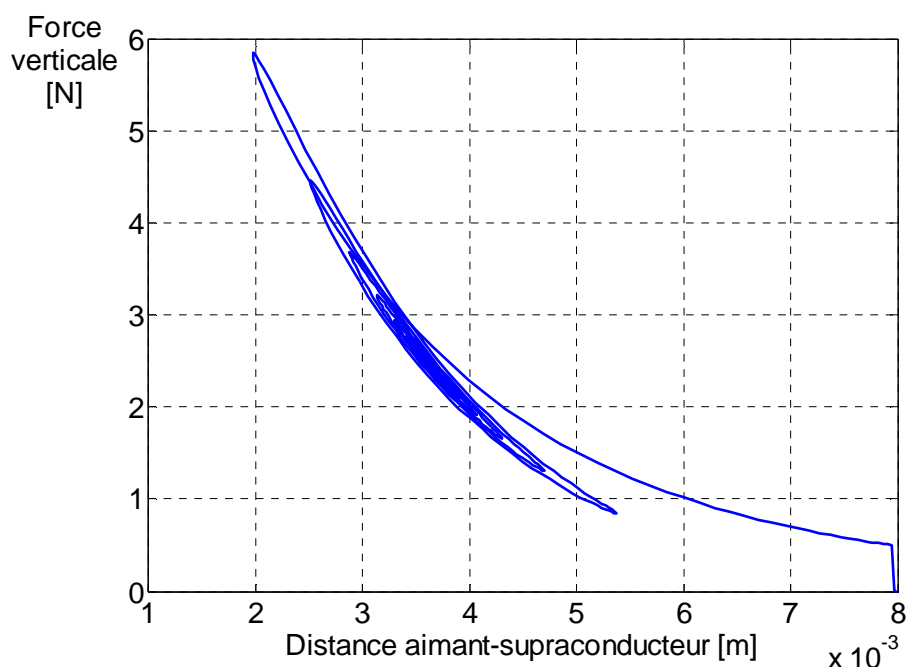


Figure IV.17 Force verticale en fonction de la distance aimant-supra (Représentation de cycles mineurs)

IV.6 Conclusion

Les grandeurs électromagnétiques et les forces de lévitation verticale et latérale sont calculées par moyen analytique et validées numériquement. L'avantage incontournable est la rapidité et la précision du modèle analytique qui est rendu valable pour les aspects non-linéaires des supraconducteurs. Le comportement mécanique de l'ensemble supra-aimant est réalisé par nos soins avec une très grande rapidité. Contrairement à l'aspect numérique lorsqu'on a voulu le faire sous le logiciel Flux 3D où l'espace mémoire est un vrai souci.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Ce travail, présente une contribution originale dans le domaine de calcul analytique par le biais des équations de Green (issues des formes intégrales des équations de Maxwell). Le défi surmonté dans cette thèse est de pouvoir réussir les calculs pour des structures conductrices dont les dimensions sont variables. Il était plus facile de les faire entre deux conducteurs ordinaires de formes de parallélépipèdes où dans la théorie on trouve les travaux de Hoer et Love [Hoer.65] qui s'appuyèrent sur les approches de Newman.

Nous pouvons classer l'apport scientifique en deux parties. L'une, concerne la mise en valeur des modèles de l'état critique traduit par Bean. Dans cette partie, nous n'avons pas eu suffisamment d'informations pour ce modèle que dans la majorité des cas il est expliqué pour une forme standard de l'aimantation cycle majeur et dont les pénétrations des courants sont considérées de façon linéaire. La pastille supraconductrice est souvent soumise à des champs non uniformes et aléatoires ce qui rend les modèles de l'état critique, tels qu'ils sont, invalides. Nous avons mis beaucoup de temps et d'efforts pour pouvoir insérer les calculs des intégrales dépendant des pénétrations de courants improbables. Dans certains cas, les changements de directions du champ magnétique appliqué peuvent provoquer un effacement total de certains courants créés auparavant. Sauf qu'avec de bonnes techniques de programmation que nous avons pu suivre les changements des directions du champ magnétique appliqué et recevoir les cycles mineur de l'aimantation.

Ce modèle dynamique, nous a aidés à prédire le comportement du matériau supraconducteur comme étant une succession de bobines dont le nombre et la taille dépendent carrément du champ appliqué est des pénétrations des courants induits. Cette idée est propre à nous, et le but est de pouvoir calculer les interactions de toutes ces bobines avec la bobine fine qui

caractérise l'aimant par l'approche ampérienne. Le choix des parallélépipèdes est justifié comme étant une forme simple où les calculs analytiques pourront être maîtrisés et aussi parce que les exemples de lévitation aimant-supra qui ont des formes cubiques sont très connus en littérature.

Grace à notre contribution originale, nous avons pu calculer les forces d'interactions pour différentes positions des aimants et des supraconducteurs. La majorité des résultats sont confrontés à ceux issus par le logiciel Flux 3D et à l'expérimentation fournie par [Navau.98]. La rapidité est de loin l'atout principal de nos modèles même au niveau du couplage mécanique où les méthodes numériques souffrent énormément.

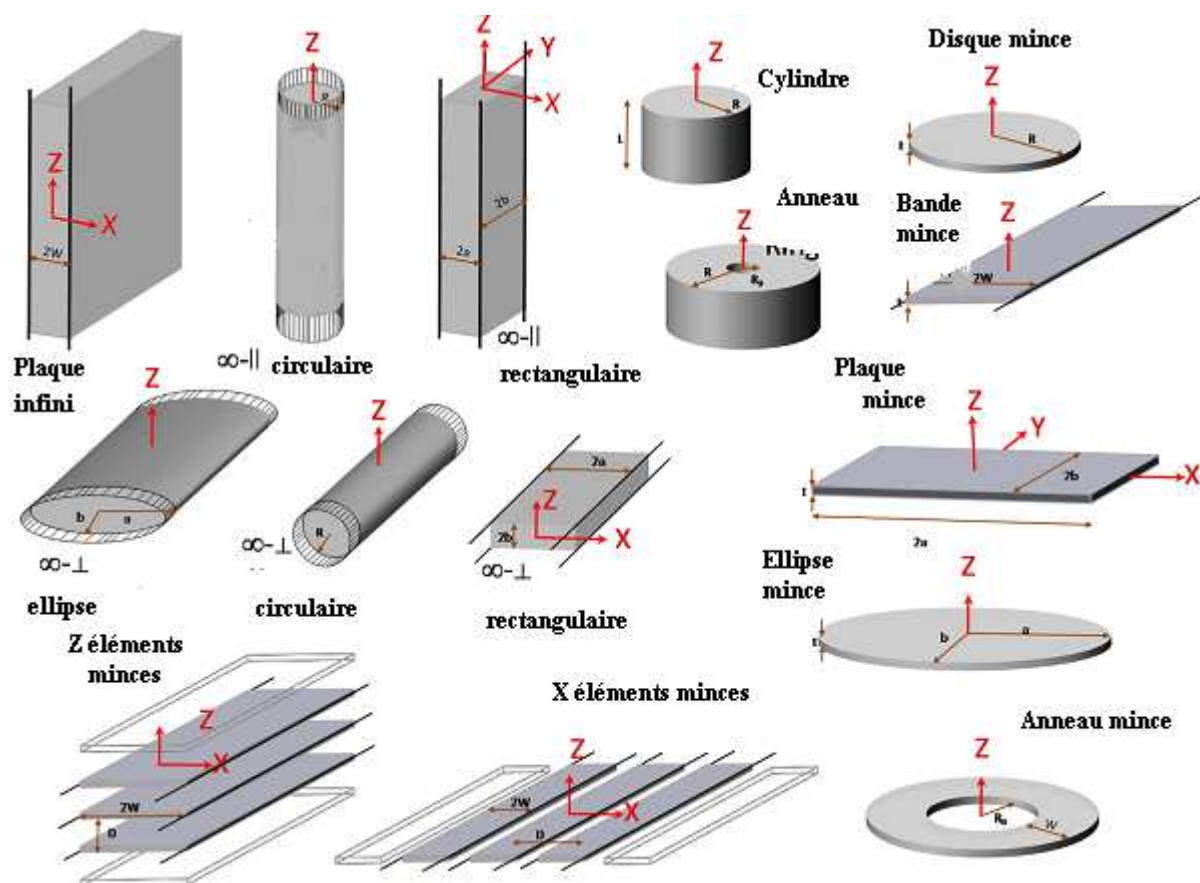
Comme perspectives, nous souhaitons étendre ces calculs pour des formes cylindriques et essayer de les faire pour un nombre élevé d'aimants permanents.

ANNEXES

Annexe A

Configuration de la pastille supraconductrice

Schéma de certaines des géométries dont nous avons discuté dans le chapitre III. Le champ appliqué, uniforme, est considéré comme ayant uniquement une composante z. Symboles $\infty-\parallel$ et $\infty-\perp$ indique des cylindres infinis dans les champs parallèles et perpendiculaires, respectivement ; le nom qui les accompagne indique la section du cylindre infini. Les paramètres géométriques utilisés la figure suivante sont définis dans le tableau ci-dessous.



Principaux paramètres d'aimantation pour supraconducteur de différentes géométries dans l'état critique avec J_c constante. Certaines définitions utilisées dans le tableau sont: $S(x) = (1/2x) [\cos^{-1}(1/\cosh x) + (\sinh x / \cosh^2 x)]$. $E(k)$ est l'intégrale elliptique complète du second type pour l'argument $k^2 = 1 - (b/a)$. $\gamma = R/L$. $\Delta = R_{int}/R$ pour les anneaux fins. Les symboles ∞_{\parallel} et ∞_{\perp} indiquent des échantillons infiniment longs dans des champs appliqués parallèlement et perpendiculairement. Le nom après le symbole indique la section transversale de l'échantillon (voir figure ci-dessus). Lorsque le symbole "≈" commence l'équation, l'expression est approximée en ajustant quelques résultats numériques. (*) Indique que le champ est réellement l'infini, et nous écrivons le champ de pénétration significative. Lorsque certains résultats sont disponibles, mais pas assez simples pour les écrire explicitement dans le tableau, des références sont données. D'autres cas pour nombre fini de plusieurs bandes sont considérées dans [Fabbricatore.00] et [Pardo.03], [Navau.13].

géométrie	χ_0	H_p	M_{sat}	$M_{ini}(H_a < H_p)$
Plaque infini	1	$J_c W$	$\frac{J_c W}{2}$	$-H_a + \frac{H_a^2}{2 J_c W}$
∞_{\parallel} circulaire	1	$J_c R$	$\frac{J_c R}{3}$	$-H_a + \frac{H_a^2}{J_c R} + \frac{H_a^3}{3 J_c^2 R^2}$
∞_{\parallel} rectangulaire ($a > b$)	1	$J_c b$	$J_c b \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{6a} \right)$	$-H_a + \frac{H_a^2}{J_c R} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - \frac{H_a^3}{3 J_c^2 ab}$
Disques minces	$\frac{8R}{3\pi t}$	(*) $J_c t/2$	$\frac{J_c R}{3}$	$-\frac{8R}{3\pi \cdot t} H_a S[H_a/(J_c t/2)]$
Bande mince	$\frac{\pi W}{2t}$	(*) $\frac{J_c t}{\pi}$	$\frac{J_c W}{2}$	$\cong M_{sat} \tanh(H_a/H_p)$
Ellipse mince ($a > b$)	$\frac{4b}{3tE(k)}$	$\frac{J_c t E(k) \cos(b\pi/2a)}{\pi [1 - (b/a)^2]}$	$\frac{4 J_c b \cos(b\pi/2a)}{3\pi [1 - (b/a)^2]}$	$\cong M_{sat} \tanh(H_a/H_p)$
Rectangles minces ($b > a$)	$\cong \frac{2b}{t} \arctan \left[1 - 0.7223 (a/b)^{-0.945} + 0.3522 (a/b)^{-2.57} - 0.141 (a/b)^{-3.60} \right]$	(*) $M_{sat} \cdot \chi_0$	$\frac{J_c b}{6} \left(3 - \frac{b}{a} \right)$	$\cong M_{sat} \tanh(H_a/H_p)$

Carrés minces		$(*) M_{sat} \cdot \chi_0$	$\frac{J_c a}{3}$	$\cong M_{sat} \tanh (H_a / H_p)$
$\infty \perp$ rectangulair e	$\cong 1 + \frac{a\pi}{4b} +$ $\frac{0.64 a}{b} \tanh \left[0.64 \frac{b}{a} \ln \left(1.7 + \frac{1.2 a}{b} \right) \right]$	$\frac{J_c b}{\pi} \left[\frac{2a}{b} \arctan \frac{b}{a} + \ln \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \right]$	$\frac{J_c a}{2}$	numérique
$\infty \perp$ circulaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{2 J_c R}{\pi}$		
Cylindres finis	$\cong 1 + \frac{8R}{3\pi L} +$ $\frac{R}{L} \tanh \left[1.27 \frac{L}{2R} \ln \left(1 + \frac{2R}{L} \right) \right]$	$\frac{J_c L}{2} \ln \left[\frac{2R}{L} + \left(1 + \frac{4R^2}{L^2} \right)^{1/2} \right]$	$\frac{J_c R}{3}$	numérique
Anneaux finis		$\cong J_c R \frac{\gamma}{2} \frac{1-\delta}{1+\delta} \ln \left[\frac{2(1+\delta)}{\gamma} + \sqrt{1 + \left(\frac{2(1+\delta)}{\gamma} \right)^2} \right]$	$\frac{J_c R}{3} \left(1 + \frac{\delta^2}{1+\delta} \right)$	numérique
X-éléments minces	$-\frac{D^2}{\pi W t} \ln \left[\cos \left(\frac{\pi W}{D} \right) \right]$	$(*) \frac{J_c t}{\pi}$	$\frac{J_c W}{2}$	$\frac{D^2}{2\pi W t} \int_0^{H_a} \ln \left(1 - \frac{\sin^2(\pi W/D)}{\cosh^2(\pi H'/J_c t)} \right) dH'$
Z-éléments minces	$\frac{D^2}{\pi W t} \ln \left[\cosh \left(\frac{\pi W}{D} \right) \right]$	$(*) \frac{J_c t}{\pi}$	$\frac{J_c W}{2}$	$-\frac{D^2}{2\pi W t} \int_0^{H_a} \ln \left(1 + \frac{\sinh^2(\pi W/D)}{\cosh^2(H'/J_c t)} \right) dH'$

Annexe B

3-D New Calculation Principle of Levitation Force Between Permanent Magnet and Hard Type-II Superconductor Using Integral Approach

A. Azzouza¹, H. Allag¹, J.-P. Yonnet², and P. Tixador²

¹L2EI Laboratory, University of Jijel, Jijel 18000, Algeria

²G2E Lab, CNRS, Grenoble-INP, Université Grenoble Alpes, 38031 Grenoble, France

A new contribution is given for the calculation of interaction forces between the permanent magnet (PM) and a hard type-II superconductor (SC) used as a classical levitation system. The forces and also mutual inductances are developed via Green's functions using an Amperian model, assuming a cuboidal thin coil for PM and a superposition of closed loops of rectangular cross section of the SC. In the superconductor, the critical current (J_c) is known, but the variable penetration thickness of J_c is given from external magnetic fields by Bean's critical-state models. All the analytical results are obtained with a dynamic representation of all penetration thicknesses of J_c depending on applied external magnetic field variations. The most important parts are the original mathematical process of considering current penetration in superconductors and the new analytical development of vertical forces between PM and SC, realized after several analytical integral calculations. The results have been evaluated for vertical displacements of a PM above the SC, proving the accuracy of our analytical model compared with those realized by Flux3D finite-element method software.

Index Terms—Bean's critical states models (BCSMs), hard type-II superconductor (SC), levitation force, permanent magnet (PM).

I. INTRODUCTION

IN MAGNETIC levitation applications, previous studies considered the stability between permanent magnets (PMs) and superconductors (SCs) were closely related to the Meissner effect of the type-I SCs, proving that by supposing Earnshaw theorem [2]. This partial stability concerns the repulsion cases, or for an entirely stable levitation, the attraction must act when the two bodies recede. This attractive situation can be assured by only type-II SC, which can be penetrated by magnetic fields. This phenomenon is known by flux pinning, and it is desirable in high-temperature ceramic SCs to prevent "flux creeps," which can create a pseudoresistance and depress both critical current density and critical field. In this way, several authors [3], [4] concentrated their studies for vertical or lateral direction levitation considering the SCs as either zero-field cooled (ZFC) or field cooled (FC) [3], [5]. For example, Del Valle *et al.* [4]—considering the cases of (ZFC) and (FC)—have applied theoretical developments based on an energy minimization procedure. Yang and Zheng [5] have used a modified frozen-image principle to present the flux pinning effect and its influence on vertical and lateral forces (the SCs were considered as mirrors and PMs were modeled as equivalent dipoles). The problem of the dipoles is the inaccuracy in near distance calculations. Other works are realized by numerical ways, introducing more properties and phenomena using generally finite-element method (FEM), but they suffer from the important time costs and convergence

problems. In our proposed model of calculating force components, the precision and the fastness are really guaranteed after developing all final expressions from Green's functions integrals, considering thin coils for PMs and superposing thick coils depending on applying magnetic fields for SCs.

II. HARD SUPERCONDUCTOR MODELING

For a type-II SC, the critical-state model (CSM) is largely used for describing the magnetization process [6], [8]. Macroscopically, the principle is the existence of critical SC current density loop J_c that depends on external magnetic fields H [6], [11]. In the case of Bean's CSMs (BCSMs), J_c is entirely constant.

In this paper, we first consider a thin homogeneous hard type-II superconductor rectangular shape with, respectively ($2a$, $2b$) sides in the XY plane. The applied external magnetic field H is considered parallel to the normal of the thin rectangle area (H_z component) (Fig. 1). The variation of the magnetic field induces currents as a consequence of Ampere's law

$$J_c = \text{rot}(H). \quad (1)$$

From Fig. 1, the considered current component J_y is given

$$J_y = -\frac{\partial H}{\partial x} = -J_c. \quad (2)$$

When J_c is constant, H can be expressed as

$$H = J_c \cdot (a - a_1). \quad (3)$$

The penetration of the current from the side to the center of the thin rectangle is defined as

$$D_1 = \frac{H}{2J_c} = \frac{a - a_1}{2}. \quad (4)$$

Manuscript received March 8, 2017; revised May 15, 2017 and May 17, 2017; accepted May 17, 2017. Date of publication May 25, 2017; date of current version October 24, 2017. Corresponding author: J.-P. Yonnet (e-mail: jean-paul.yonnet@grenoble-inp.fr).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TMAG.2017.2708323

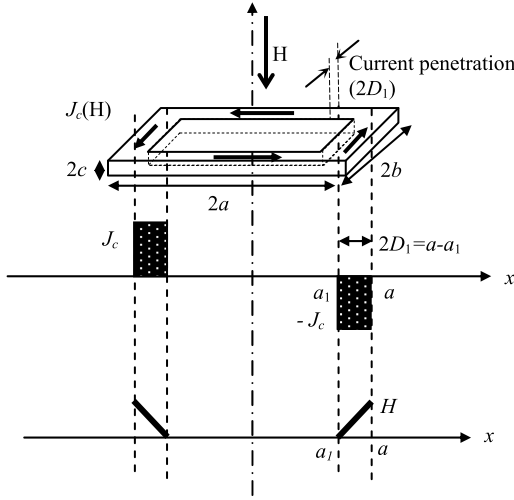


Fig. 1. SC thin rectangle exposed to an external magnetic field (first magnetization).

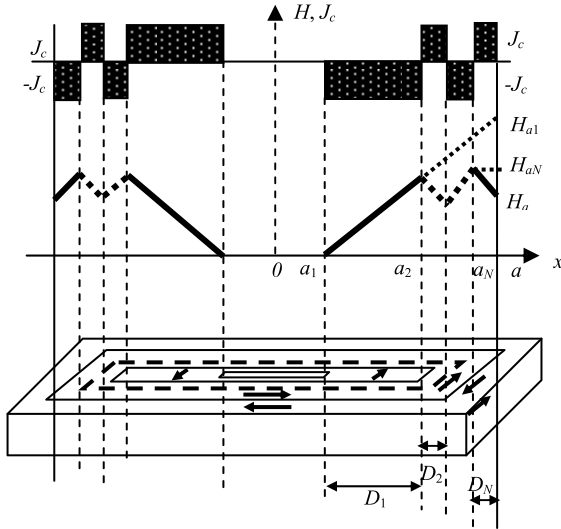


Fig. 2. SC thin rectangle exposed to an external changing magnetic field (several magnetization loops).

The value of \$H\$ at \$H_p\$ (magnetic field for a totally penetration [7]), which corresponds to \$a_1 = 0\$, is

$$H_p = J_c \cdot a. \quad (5)$$

If the magnetic field changes its direction continually at the respective values (\$H_{a1}, H_{a2} \dots H_{aN}\$), the currents would be induced in the opposite directions from the sides to the center of the SC and their penetrations depend on magnetic field variations (Fig. 2). This situation creates several changes in currents at exactly (\$a_1\$ and \$a_2\$ to \$a_N\$) distances. For us, this dynamic compartment can be modeled as a juxtaposition of several massive loops at different lateral thicknesses depending on the applied magnetic field \$H\$ and the memorized changing directions at earlier iterations.

From (3), the value of \$a_1\$ will be given as

$$a_1 = \frac{H_p - H_{a1}}{J_c}; \quad H_{a1} \leq H_p \quad (6)$$

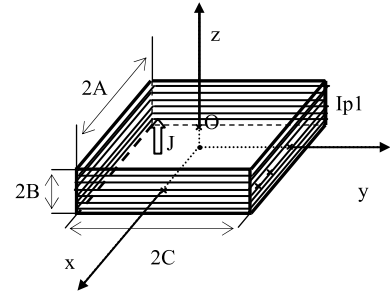


Fig. 3. Representation of cuboidal magnet by an Amperian model.

$$a_1 = 0; \quad H_{a1} \geq H_p. \quad (7)$$

We can determinate the values of (\$a_2\$ to \$a_N\$) from the intersection of decreasing and increasing lines formed by the variation of applied external magnetic field \$H\$ at the corresponding points of change (\$H_{a1}, H_{a2} \dots H_{aN}\$) (Fig. 2). We can obtain two new general expressions of the changing distances as even and odd values

$$a_{2ni} = \frac{2H_p + (-1)^{2ni+1} H_{a_{2ni-1}} + (-1)^{2ni} H_{a_{2ni}}}{2J_c} \quad ni = 1 \dots N \quad (8)$$

$$a_{2ni-1} = \frac{2H_p + (-1)^{2ni-2} H_{a_{2ni-2}} + (-1)^{2ni-1} H_{a_{2ni-1}}}{2J_c} \quad ni = 2 \dots N. \quad (9)$$

Consequently, the corresponding penetration thicknesses \$D_{ni}\$ of the SC current coils (Fig. 2) can be given

$$\begin{cases} D_{2ni} = \frac{|a_{2ni} - a_{2ni-1}|}{2} \\ D_{2ni-1} = \frac{|a_{2ni-1} - a_{2ni-2}|}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{H_{a1}}{J_c} + \frac{H_p}{J_c} \\ D_1 = \frac{a - a_1}{2} \end{cases} \quad ni = 1 \dots N. \quad (10)$$

Until now, we have presented the penetration of current density \$J_y\$ corresponding to the \$x\$-axis. Subsequently, \$J_x\$ will also be defined respecting to (\$y\$-axis) and (\$b_1\$ to \$b_N\$) distances).

III. PERMANENT MAGNET MODELING

The PMs with rigid polarization are modeled by an Amperian approach (very fine coil carrying a fictitious current density [12]). The magnetization \$J\$ is supposed to be rigid and uniform in each magnet. The dimensions of the magnet are (\$2A \times 2B \times 2C\$), and its polarization is \$J\$. Its center is \$O\$, the origin of the axes \$O_{xyz}\$. The fictitious equivalent current \$I_p\$ is given

$$I_p = \left(\frac{J \cdot 2C}{\mu_0} \right). \quad (11)$$

We can calculate the magnetic field in the vacuum at any position (\$x, y, z\$), from a thin coil of Fig. 3. The result is given

$$H = \frac{I_p \mu_0}{4\pi(2C)} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (1)^{i+j+k} \varepsilon(U_i, V_j, W_k). \quad (12)$$

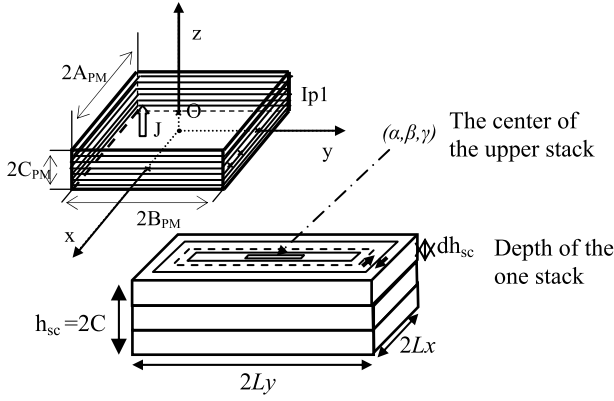


Fig. 4. System of PM and SC.

These components are, respectively

$$H_x = \frac{I_p \mu_0}{4\pi(2C)} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (1)^{i+j+k} (\ln(r - V_j)) \quad (13)$$

$$H_y = \frac{I_p \mu_0}{4\pi(2C)} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (1)^{i+j+k} (\ln(r - U_i)) \quad (14)$$

$$H_z = \frac{I_p \mu_0}{4\pi(2C)} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (1)^{i+j+k} \left(t g^{-1} \left(\frac{U_i \cdot V_j}{r \cdot W_k} \right) \right). \quad (15)$$

With

$$\begin{aligned} U_i &= x - (-1)^i A \\ V_j &= y - (-1)^j B \\ W_k &= z - (-1)^k C \\ r &= \sqrt{U_i^2 + V_j^2 + W_k^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

IV. FORCE COMPONENTS CALCULATION

The force components will be calculated between parallelepipedic PM and SC. Their edges are, respectively, parallel (see Fig. 4). For the SC, the dimensions are $(2Lx \times 2Ly \times 2C)$, its critical current density is J_c , and the coordinates of its center O' are $(\alpha, \beta, \text{ and } \gamma)$. The side $2a$ is parallel to the side $2Lx$.

The magnetic field H , in this case, is the H_z component from the magnet obtained from (15). The point of calculation is located in the upper loop at, respectively $(\alpha, \beta, \text{ and } \gamma)$ and for the other loops, we must add the elementary depth (dh_{sc}), which is defined as a ratio between the total high (h_{sc}) of the SC and the number of proposed current loops (N_{sc}) (z stacks), as

$$h_{sc} = 2C \quad (17)$$

$$dh_{sc} = \frac{h_{sc}}{N_{sc}}. \quad (18)$$

For the rest of the development, we take that $N_{SC} = 1$, but we can use the superposition principle for a considerable number of stacks ($N_{SC} > 1$).

The force components are obtained from

$$\vec{F} = -gr \vec{a} dE \quad (19)$$

where E is the total interaction energy.

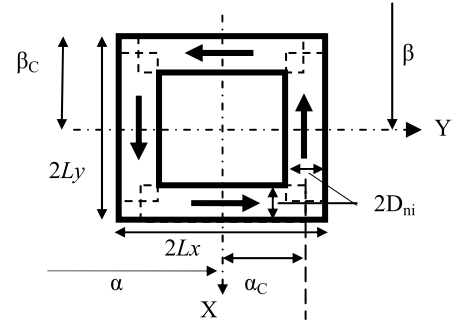


Fig. 5. 2-D representation of the rectangular coil.

The total interaction energy is given by considering all the parallel circulation of currents and for all loops. See also the inductance calculation, energy, and forces in [13], [14]

$$E_T = \sum_{n=0}^1 (-1)^n [E_{xT} + E_{yT}]. \quad (20)$$

For the force component, F_z in the z -direction is

$$F_z = F_{z1} + F_{z2} = \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=0}^1 (-1)^n [E_{xT} + E_{yT}]. \quad (21)$$

The parameter n shows the number of conductor elements in each direction (X and Y). The dimensions of each conductor are depending on $(Lx, Ly, \text{ and } D_{ni})$ and also the center position (α_C and β_C), as presented in Fig. 5.

For the x sides

$$\begin{aligned} A &= (Lx - D) & B &= D \\ \beta_C &= (Ly - D) & \alpha_C &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

And for y sides

$$\begin{aligned} A &= D & B &= (Ly - D) \\ \beta_C &= 0 & \alpha_C &= (Lx - D). \end{aligned} \quad (23)$$

The force component in the z -direction is given

$$\begin{aligned} F_{z1} &= \frac{\partial E_{xT}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I_p \mu_0 J_c}{4\pi(2C_{PM}) S_c(H)} g_1 \right) \\ g_1 &= \left[\int_{-C}^C \int_{-B}^B \int_{-A}^A \int_{-C_{PM}}^{C_{PM}} \int_{-A_{PM}}^{A_{PM}} \frac{1}{r} dx dz dX dY dZ \right]_{y=B_{PM}}^{y=-B_{PM}}. \end{aligned} \quad (24)$$

And

$$\begin{aligned} F_{z2} &= \frac{\partial E_{yT}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I_p \mu_0 J_c}{4\pi(2C_{PM}) S_c(H)} g_2 \right) \\ g_2 &= \left[\int_{-C}^C \int_{-B}^B \int_{-A}^A \int_{-C_{PM}}^{C_{PM}} \int_{-B_{PM}}^{B_{PM}} \frac{1}{r} dy dz dX dY dZ \right]_{x=A_{PM}}^{x=-A_{PM}}. \end{aligned} \quad (25)$$

TABLE I
PM AND SC PARAMETERS FOR FIG. 4

PM	SC		Vertical Distance	
J	1.1T	J_c	90	10^6 A/m ²
$2A_{PM}$	19.47mm	2Lx	18.585mm	min
$2B_{PM}$	19.47mm	2Ly	18.585mm	
$2C_{PM}$	20mm	2C	10mm	
		H_p	5	10^7 A/m

After all calculations, we obtain the final expression as

$$F_z = \frac{I_p \mu_0 J_c}{4\pi(2C_{PM})S_c(H)} f(n, i, j, k, l, p, q)$$

$$f = \sum_{n=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+p+q+n} \times (\Psi_{z1} + \Psi_{z2}) \quad (26)$$

$$\Psi_{z1} = -\frac{V_1(V_1^2 - 3U_1^2)}{6} \ln(W_1 + r_1) - \frac{W_1(W_1^2 - 3U_1^2)}{6} \ln(V_1 + r_1) - U_1 V_1 W_1 \ln(-U_1 + r_1) - \frac{U_1}{6} \left(3V_1^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{U_1 W_1}{V_1 r_1} \right) + 3W_1^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{V_1 U_1}{W_1 r_1} \right) + U_1^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{W_1 V_1}{U_1 r_1} \right) \right) - \frac{V_1 W_1 r_1}{3} \quad (27)$$

$$\Psi_{z2} = -\frac{U_2(U_2^2 - 3V_2^2)}{6} \ln(W_2 + r_2) - \frac{W_2(W_2^2 - 3V_2^2)}{6} \ln(U_2 + r_2) - U_2 V_2 W_2 \ln(-V_2 + r_2) - \frac{V_2}{6} \left(3U_2^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{V_2 W_2}{U_2 r_2} \right) + 3W_2^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{V_2 U_2}{W_2 r_2} \right) + V_2^2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{U_2 W_2}{V_2 r_2} \right) \right) - \frac{U_2 W_2 r_2}{3} \quad (28)$$

With

$$U_1 = \alpha + (-1)^j (Lx - D_{ni}) - (-1)^i A_{PM}$$

$$U_2 = \alpha + (-1)^n (Lx - D_{ni}) + (-1)^j D_{ni} - (-1)^i A_{PM}$$

$$V_1 = \beta + (-1)^n (Ly - D_{ni}) + (-1)^l D_{ni} - (-1)^k B_{PM}$$

$$V_2 = \beta + (-1)^l (Ly - D_{ni}) - (-1)^k B_{PM}$$

$$W_1 = W_2 = \gamma + (-1)^q C - (-1)^p C_{PM}$$

$$r_1 = \sqrt{U_1^2 + V_1^2 + W_1^2}$$

$$r_2 = \sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2} \quad (29)$$

The parameter γ is depending on dh_{sc} of the SC stacks. The larger D_{ni} is identified from the BCSM model at each PM position (10).

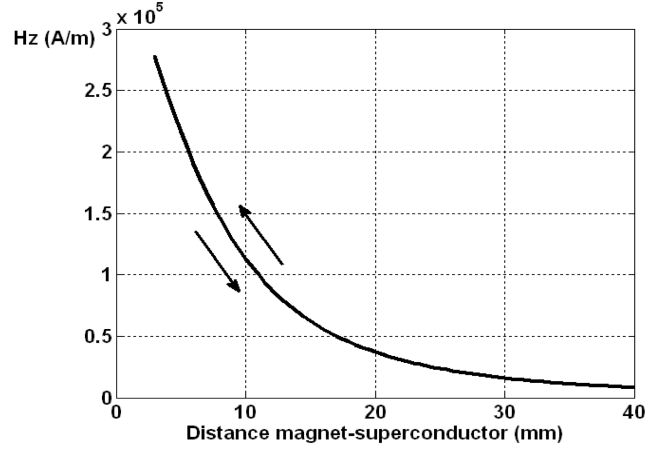


Fig. 6. Magnetic field H_z from PM applied to the SC as a function of the PM-SC distance.

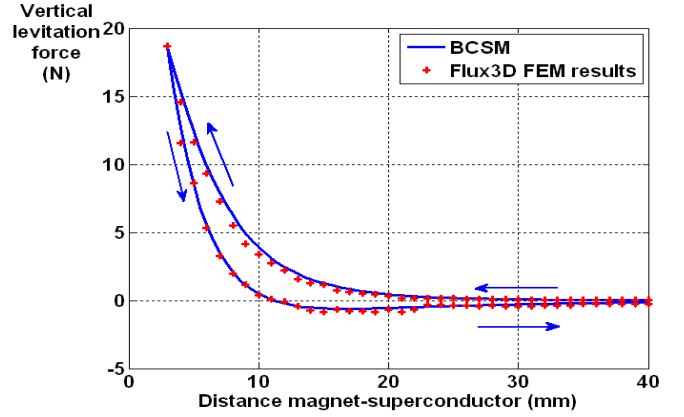


Fig. 7. Levitation force as a function of the PM-SC distance.

V. MODEL VALIDATION

To validate our calculation of vertical forces as mentioned earlier, we choose the parameters equal to those in [1] and [15]. The summary of parameters is presented in Table I.

The first result concerns the representation of magnetic field H_z from PM applied to the SC as a function of displacement (Fig. 6).

The way of motion starts from the maximum distance (40 mm) to the minimum one (3 mm) and inversely it returns to the maximum value. At the same time, the vertical force component F_z was calculated by BCSM (Fig. 7). The result presents good agreement with those realized in Flux3D software, but the fastness is largely guaranteed: 9 s in favor of the BCSM model compared with 29 min for 3-D FEM.

Generally, the comportment of levitation force can be explained by high-temperature SC magnetic hysteretic effects. When the PM moves gradually toward the SC, the applied magnetic flux density increases and begins penetrate into the SC body. The trapped flux will be pinned inside. When the PM arrives at the lowest position and begin move back to the initial position, the applied magnetic flux density decreases progressively and inverse currents will be induced. As a result,

some trapped magnetic flux escapes from their pinning center. Macroscopically, the trapped magnetic flux density decreased and shows some hysteretic effects of the levitation force, which may even be negative.

VI. CONCLUSION

A totally new contribution for the superconducting levitation force is given by developing a vertical force calculation using Green's function between a thin PM coil consideration and a superposition of thick coils of varying thickness, representing a hard type-II SC. The dynamic effect is modeled by considering the variation change of applied magnetic field H , which affects the penetration of induced critical current. The variation is issued using the BCSMs. The levitation force is compared with Flux3D, proving the fastness and good accuracy of the analytical model. With a large number of dimensional and physical parameters, these developments present a rich code for optimization processes. In addition, the same steps can be applied for other forms, such as cylindrical shapes for PM or SC or both.

REFERENCES

- [1] J. R. Hull and A. Cansiz, "Vertical and lateral forces between a permanent magnet and a high-temperature superconductor," *J. Appl. Phys.*, vol. 86, no. 11, pp. 6396–6404, Dec. 1999.
- [2] E. H. Brandt, "Friction in levitated superconductors," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 53, no. 16, pp. 1554–1556, 1988.
- [3] C. Navau and A. Sanchez, "Magnetic properties of finite superconducting cylinders. II. Nonuniform applied field and levitation force," *Phys. Rev. B, Condens. Matter*, vol. 64, no. 21, p. 214507, 2001.
- [4] N. Del-Valle, A. Sanchez, C. Navau, and D.-X. Chen, "Lateral-displacement influence on the levitation force in a superconducting system with translational symmetry," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 92, no. 4, p. 042505, 2008.
- [5] Y. Yang and X. J. Zheng, "Method for solution of the interaction between superconductor and permanent magnet," *J. Appl. Phys.*, vol. 101, no. 11, p. 113922, 2007.
- [6] C. Navau, N. Del-Valle, and A. Sanchez, "Macroscopic modeling of magnetization and levitation of hard type-II superconductors: The critical-state model," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 23, no. 1, p. 8201023, Feb. 2013.
- [7] C. P. Bean, "Magnetization of high-field superconductors," *Rev. Modern Phys.*, vol. 36, no. 1, pp. 31–39, 1964.
- [8] C. Navau and A. Sanchez, "Current and field penetration in a superconductor in the field of a permanent magnet," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 9, no. 2, pp. 1610–1613, Jun. 1999.
- [9] E. Brandt, "Electric field in superconductors with rectangular cross section," *Phys. Rev. B, Condens. Matter*, vol. 52, no. 21, pp. 15442–15457, Dec. 1995.
- [10] D.-X. Chen, C. Navau, N. Del-Valle, and A. Sanchez, "Analytic expressions for critical-state AC susceptibility of rectangular superconducting films in perpendicular magnetic field," *Phys. C, Supercond.*, vol. 470, no. 1, pp. 89–94, Jan. 2010.
- [11] E. H. Brandt, "Square and rectangular thin superconductors in a transverse magnetic field," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, no. 15, pp. 3025–3028, Apr. 1995.
- [12] R. Ravaut, G. Lemarquand, S. Babic, V. Lemarquand, and C. Akyel, "Cylindrical magnets and coils: Fields, forces, and inductances," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 9, pp. 3585–3590, Sep. 2010.
- [13] H. Allag and J.-P. Yonnet, "3-D analytical calculation of the torque and force exerted between two cuboidal magnets," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 10, pp. 3969–3972, Oct. 2009.
- [14] M. Aissaoui, H. Allag, and J.-P. Yonnet, "Mutual inductance and interaction calculation between conductor or coil of rectangular cross section and parallelepiped permanent magnet," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 11, Nov. 2014, Art. no. 7027704.
- [15] S. H. T. Fou, A. Erraud, and F. Bouillault, "Numerical Modeling of the association of magnet and HTS superconductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1197–1200, Jul. 2000.

REFERENCES

Références bibliographiques

Par ordre alphabétique

- [Ainslie.15] M-D. AINSLIE, H. FUJISHIRO, "Modelling of bulk superconductor magnetization", *Supercond Sci Technol*, vol. 28, 2015.
- [Aissaoui.13] M. AISSAOUI, H. ALLAG and J. P. YONNET "Mutual inductance and interaction calculation between conductor or coil of rectangular cross section and parallelepiped permanent magnet", *IEEE Trans. Magnetism*, vol. 50, n° 11, November. 2014.
- [Akoun.84] G. AKOUN, J-P. YONNET, "3D analytical calculation of the forces exerted between two cuboidal magnets", *IEEE Trans. Magnetism*, MAG 20, n° 5, p. 1962-1964, September. 1984.
- [Allag.08] H. ALLAG, J-P. YONNET, "3D analytical calculation of interactions between perpendiculary magnetized magnets", *European Magnetic Sensors and Actuators Conference*, June, 29th july 2nd 2008.Caen, France.
- [Allag.09] H. ALLAG, J-P. YONNET, M. FASSENET and M. E. D. LATRECHE, "3D analytical calculation of interactions between perpendiculary magnetized magnets—Application to any magnetization direction", *Sensors Lett*, vol. 7, n° 3, p. 1–6, June. 2009.
- [Allag.10] H. ALLAG, "modèles et calcul des systèmes de suspension magnétique passive- développements et calculs analytiques en 2D et 3D des interactions entre les aimants permanents-", *Thèse de doctorat de l'université de Grenoble*, 2010.
- [Alloui.12] L. ALLOUI, "Modélisation tridimensionnelle des matériaux supraconducteurs", *Thèse de doctorat de l'université de paris sud*, 2012.
- [Arkadiev.47] V. ARKADIEV, "A floating magnet", *Nature*, vol. 160, p. 330, 1947.
- [Azzouza.17] A. AZZOUZA, H. ALLAG, J-P YONNET and P. TIXADOR, "3D New Calculation Principle of Levitation Force Between Permanent Magnet and Hard Type-II Superconductor Using Integral Approach", *IEEE Trans. Magnetism*, vol. 53, n° 11, November. 2017.

-
- [Bean.62] C-P. Bean, "Magnetization of hard superconductors", *Physical Review Letters*, vol. 8, n° 6, p. 250-253, March. 1962.
- [Bednorz.86] J-G. BEDNORZ and K-A. MULLER, "Possible high T_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system", *Zeitschrift fur Physik BCondensed Matter*, vol. 64, n° 2, p. 189–193, 1986.
- [Berger.06] K. BERGER, "Etude des phénomènes couplés magnétothermiques dans les supraconducteurs à haute température", *Thèse de doctorat de l'université de Henri Poincare, Nancy I*, 2006.
- [Bergr.07] K. BERGER , J. LEVEQUE, D. NETTER, B. DOUINE and A. REZZOUG, " Influence of temperature and/or field dependences of the E-J power law on trapped magnetic field in bulk YBaCuO", *IEEE Transaction on Applied Superconductivity*, vol. 17, n° 2, p. 3028-3031, June. 2007.
- [Bossavit.94] A. BOSSAVIT, "Numerical modeling of superconductors in three dimen: A model and a finite element method", *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 30, n° 5, p. 3363–3366, 1994.
- [Braeck.02] S. BRAECK and all, "Superconducting trapped-field magnets: temperature and field distributions during pulsed-field activation", *Journal of Applied Physics*, vol. 92, n° 10, p. 6235-6240, November. 2002.
- [Brandt.88] E-H. BRANDT, "Friction in levitated superconductors", *Appl. Phys. Lett.*, vol. 53, n° 16, p. 1554–1556, 1988.
- [Brandt.89] E. H. BRANDT, "Levitation in physics", *Science*, vol. 243, p.349-355, 1989.
- [Braun.90] M. BRAUN, P. BUSZKA, T. MOTYLEWSKI, W. PRZYDROZNY, and C. SLIWA, "Vibration frequency and height of a magnet levitating over a type-II superconductor", *Physica C, Superconductivity*, vol. 171, n° 5-6, p. 537-542, 1990.
- [Chaddah.89] P. CHADDAH, K-V. BHAGWAT, G. RAVIKUMAR, "Magnetisation hysteresis and critical current density", *Physica C, Superconductivity*, vol. 159, n° 5, p. 570-576, 1989.
- [Chen.90] D-X. CHEN, A. SANCHEZ, J. NOGUES, AND J. S. MUOZ, "Bean's, Kim's, and exponential critical-state models for high- T_c superconductors", *Phys. Rev. B*, vol. 41, p.9510, May 1990.
- [Chen.06] L. CHEN, Y-S. CHA, H. CLAUS, H. ZHENG, B-W. VEAL, F-Z. PENG, "Optimization of Pulsed-Current Profile for Magnetizing

-
- High Bulk YBCO Superconductors", *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 34, pp. 1702–1708, 2006.
- [Chunyong.09] H. CHUNYONG, H. YANG, L. LIANG and G. ZHENGXIANG, "Trapped field and related properties in a superconducting-disk magnetized by pulse field", *IEEE Transaction on Applied Superconductivity*, vol. 14, n° 4, p.2025-2030, December. 2009.
- [Colin.94] J-C. COLIN, "Synthèse et caractérisation d'aimants à précurseur moléculaire", *Thèse de l'université de Paris XI Orsay*, 1994.
- [Davis.88] L-C. DAVIS, E-M. LOGOTHETIS, and R-E. SOLTIS, "Stability of magnets levitated above superconductors", *Journal of Applied Physics*, vol. 64, n° 8, p. 4212-4218, October. 1988.
- [Davis.90] R-L. DAVIS, "Spinning vortices in type ii superconductors", *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 5, n° 12, p. 955-963, 1990.
- [Del-Valle.08] N. DEL-VALLE, A. SANCHEZ, C. NAVAU, and D.-X. CHEN, "Lateral displacement influence on the levitation force in a superconducting system with translational symmetry", *Appl. Phys. Lett.*, vol. 92, n° 4, p. 042505, 2008.
- [Durand.68] E. DURAND, "Magnétostatique", *Editions Masson et Cie*, 1968, Paris.
- [Fabbricatore.00] P. FABBRICATORE, S. FARINON, S. INNOCENTI, and F. GÖMÖRY, "Magnetic flux shielding in superconducting strip arrays", *Phys. Rev. B, Condens. Matter*, vol. 61, n° 9, pp. 6413–6421, Mar. 2000.
- [Feynman.79] R. FEYNMAN, "Electromagnétisme 1", *InterEditions*, 1979, Paris.
- [Filatov.96] A-V. FILATOV, S-F. KONOVALOV, "Low-hysteresis interaction of a hard type II superconductor with a permanent magnet", *Physica C*, vol. 271, n° 3–4, p. 225–229, 1996.
- [Filatov.98] A-V. FILATOV, O-L. POLUSCHENKO, SUNG-CHUL SHIN, "A new approach to the design of passive magnetic bearings using high temperature superconductors", *Cryogenics*, vol. 38, n° 6, p. 595–600, 1998.
- [Fou.00] S. HO TAM FOU, A. ERRAUD, and F. BOUILLAULT, "Numerical modeling of the association of magnet and HTS superconductors", *IEEE Trans. Magntics*, vol. 36, n° 4, p. 1197-1200, July. 2000.

- [Funk.05] D. FUNK, K. GETSLA'S, "Senior Project Magnetic Levitation Train", *Final Report, Electrical & Computing Engineering, Bradley University*, 2005.
- [Gao.94 a] L. GAO, Y. XUE, F. CHEN, Q. XIONG, R. MENG, D. RAMIREZ, C. CHU, J. EGGERT and H. MAO, "Superconductivity up to 164K in $\text{HgBa}_2\text{Ca}_{m-1}\text{Cu}_m\text{O}_{2m+2+\delta}$ ($m=1, 2,$ and 3) under quasihydrostatic pressures", *Phys. Rev. B*, vol. 50, n° 6, p. 4260-4263, August. 1994.
- [Gao.94 b] L. GAO, Y-Y. XUE, F. CHEN, Q. XIONG, R-L. MENG, D. RAMERIZ, C-W. CHU, J. EGGERT and H-K. MAO, "Universal enhancement of T_c under high pressure in $\text{HgBa}_2\text{Ca}_{m-1}\text{Cu}_m\text{O}_{2m+2+\delta}$ ", *Physica C: Superconductivity*, vol. 235–240, Part 2, p. 1493–1494, December. 1994.
- [Geoffroy.D2080] O. GEOFFROY, " Physique des matériaux magnétiques", *Techniques de l'Ingénieur*, D2080.
- [Grover.62] F. Grover, "Inductance Calculations: Working Formulas and Tables", Dover, New York, 1962.
- [Gruss.01] S. GRUSS, G. FUCHS, G. KRABBES, P. VERGES, G. STOVER, K-H. MULLER, J. FINK, L. SCHULTZ, "Superconducting bulk magnets: very high trapped fields and cracking", *Appl. Phys. Lett*, 79, p. 3131-3133, 2001.
- [Halbach.85] K. HALBACH, "Applications of permanent magnets in accelerators and electron storage rings", *Journal of Applied Physics*, vol. 57, p. 3605, 1985.
- [Ham.06] C. Ham, W. Ko, Q. Han, "Analysis and optimization of a Maglev system based on the Halbach magnet arrays", *Journal of Applied Physics*, vol. 99, n° 8, 2006.
- [Hoer.65] C. Hoer and C. Love, "Exact Inductance Equations for Rectangular Conductors With Applications to More Complicated Geometries", *JOURNAL OF RESEARCH of the National Bureau of Standards-C. Engineering and Instrumentation*, vol. 69C, n° 2, April-June 1965.
- [Hull.99] J-R. HULL, A. CANSIZ, "Vertical and lateral forces between a permanent magnet and a high-temperature superconductor", *Journal of Applied Physics*, vol. 86, n° 11, p. 6396-6404, December. 1999.
- [Hull.00] J-R. HULL, "Superconducting bearings", *Superconductor*

-
- Science and Technology*, vol. 13, n° 2, p. R1-R15, 2000.
- [Hulm.91] J. Hulm, R. Blaugher, "Superconducting Solid Solution Alloys of the Transition Elements", *Physical Review*, vol. 123, n° 5, p. 1569-1580, September. 1961.
- [Jayawant.81] B-V. JAYAWANT, "Electromagnetic suspension and levitation", *Edward Arnold*, London, 1981.
- [Karasik.71] V-R. Karasik, N-G. VASIL'EV, V-G. ERSHOV, "Magnetization of Superconducting Alloy Ti22 at.% Nb", *JETP*, 32,433, 1971.
- [Khene.14] M-L. KHENE, L. ALLOUI, S-M. MIMOUNE, F. BOUILLAULT and M. FELIACHI, "3D analysis of applied field effect on trapped magnetic field during pulsed field magnetization of bulk superconductor", *EPJ. App. Phys*, vol. 66, n° 1, p. 10601-9, April. 2014.
- [Kim.62] Y-B. KIM, C-F. HEMPSTEAD, A-R. STRNAD, "Critical persistent currents in hard superconductors", *Phys. Rev. Lett*, vol. 9, n° 7, p. 306-309, October. 1962.
- [Klutsch.03] I. KLUTSCH, G. MEUNIER, P. LABIE, C. GUERIN and P. TIXADOR, "Modélisation des supraconducteurs en axisymétrique", *Conférence Matériau Génie Electrique (MGE) 2-3 April 2003*, Grenoble.
- [Koshelev.95] A-E. KOSHELEV, A-I. LARKIN, "Paramagnetic moment in field-cooled superconducting plates: Paramagnetic Meissner effect", *Phys Rev B*, 1995.
- [Landau.67] L. LANDAU, E. LIFCHITZ, "Théorie classique des champs", *Editions Mir*, 1967, Moscou.
- [Leclerc.13] J. LECLERC, "Méthodes et outils de caractérisation électrique et magnétique des supraconducteurs", *Thèse de doctorat de l'université de Lorraine, Nancy I*, 2013.
- [Leprince.D2100] F. LEPRINCE-RINGUET, " Aimants permanents ; Matériaux et Applications ", *Techniques de l'Ingénieur*, traité Génie électrique D2100.
- [Levillain.95] C.LEVILLAIN, P. MANUEL and P-G. THÉRON, "Current induction profiles and hysteretic losses in High- Tc superconducting tapes", *IEEE Transactions on applied superconductivity*, vol. 5, n° 2, p. 705-708, June. 1995.

-
- [Lévy.97] L-P LEVY, "Magnétisme et supraconductivité", *CNRS Editions*, 1997.
- [Malik.94] S-K, MALIK, S-S, SHAH, "Physical and Material Properties of High Temperature Superconductors", *Nova Science*, New York, 1994.
- [Meissner.33] W. Meissner et R. Ochsenfeld, " Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit ", *Naturwissenschaften*, vol. 21, n° 44, p. 787-788, Novembre. 1933.
- [Miki.06] M. MIKI et al, "Development of a synchronous motor with a Gd-Ba-Cu-O bulk superconductors as pole-field magnets for propulsion system", *Supercond. Sci. Technol.* vol. 19, n° 7, S494-S499, 2006.
- [Moon.90] F-C. MOON, P-Z. CHANG, H. HOJAJI, A. BARKATT and A-N. THORPE, "Levitation forces, relaxation and magnetic stiffness of melt-quenched $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$ ", *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 29, n° 7, p. 1257-1258, April. 1990.
- [Moon.04] F-C. MOON, "Superconducting Levitation, Applications to Bearings and Magnetic Transportation", WILEY-VCH Verlag GmbH & Co, KGaA, Weinheim, Germany, 2004.
- [Nakashima.94] H. NAKASHIMA, "The superconducting magnet for the Maglev transport system", *IEEE Trans. On Magnetics*, vol. 30, n° 4, p.1572-1578, July. 1994.
- [Navau.98] C. NAVAU and A. SANCHEZ, "Magnetic levitation of superconductors in the critical state ", *Physical Review B*, vol. 58, n° 2, p. 963-970, July. 1998.
- [Navau.01] C. NAVAU and A. SANCHEZ, "Magnetic properties of finite superconducting cylinders. II. Nonuniform applied field and levitation force", *Phys. Rev. B, Condens. Matter*, vol. 64, n° 21, p. 214507, 2001.
- [Navau.13] C. NAVAU, N. DEL-VALLE, and A. SANCHEZ, "Macroscopic modeling of magnetization and levitation of hard type-II superconductors: the critical-state model", *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 23, n° 1, p. 8201023- 8201023, February, 2013.
- [Pardo.03] E. PARDO, A. SANCHEZ, AND C. NAVAU, "Magnetic properties of arrays of superconducting strips in a perpendicular field", *Phys. Rev. B, Condens. Matter*, vol. 67, n° 10, pp. 104517-

- 1-104517-8, Mar. 2003.
- [Post.98] POST, F. RICHARD, "Inductrack Demonstration Model", Report UCRL-ID-129664, February 3, 1998.
- [Post.03] POST, F. RICHARD, "Inductrack Magnet Configuration", U.S. Patent n° 6,633,217 B2, October 14, 2003.
- [Richard.98] F. RICHARD, POST, "Magnetic Levitation for Moving Objects", *U.S. Patent* n° 5,722,326 March 3, 1998
- [Robert.87] P. Robert, "Matériaux de l'électrotechnique", *Dunod*, 1987.
- [Ruehli. 72] A-E Ruehli, "Inductance calculation in a complex integrated circuit environment", *IBM Journal of research and development*, vol. 16, n° 5, p.470-481, Sep, 1972.
- [Saint-James.69] D. SAINT-JAMES, G. SARMA, and E-J. THOMAS, "Type II Superconductivity", *Pergamon Press*, New York, 1969.
- [Shin.98] S. SHIN, A-V. FILATOV, "High-temperature superconducting magnetic bearing", *US Patent* 5 789 837, August 4, 1998.
- [Shin.01] S. SHIN, A-V. FILATOV, "High-temperature superconducting magnetic bearing", Germany Patent. 19641438, February 22, 2001.
- [Sinha.87] P-K.SINHA, "Electromagnetic Suspension, Dynamics and Control", *Peter-Peregrinus Ltd*, London, United Kingdom, 1987.
- [Song.06] H. SONG, J. WANG, S. WANG, C. DENG, Y. ZENG, "Studies of YBCO electromagnetic properties for high temperature superconductor Maglev technology", *New Topics in superconductivity research*, p. 107-156, Nova Science Publishers: New York, 2006.
- [Tekeda.94] N. TAKEDA, M.UESAKA and K.MIYA, "Computation and experiments on the static and dynamic characteristics of high Tc superconducting levitation", *Cryogenics*, vol. 34, n° 9, p. 745-752, 1994.
- [Teranishi.02] Y. TERANISHI, H. UEDA, M. TSUDA and A. ISHIYAMA "Static and dynamic characteristics in levitating X-Y transporter using HTS bulks", *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 12, n° 1, p. 911- 914, August, 2002.
- [Tinkham.96] M. TINKHAM, "Introduction to Superconductivity". *McGraw-Hill, Inc*, New York, 2nd edition, 1996.

-
- [Tixador.95] P. TIXADOR, "Les supraconducteurs", *Hermès Collection Matériaux*, Paris, 1995, 203 p.
- [Tixador.03] P. TIXADOR, "Matériaux Supraconducteurs". *Lavoisier, Hermès Sciences Publication*, Paris, 2003.
- [Tixador.D2701] P. TIXADOR, Y.BRUNET, " Supraconducteurs ; Bases théoriques", *Techniques de l'Ingénieur*, traité Génie électrique D2701.
- [Tixador.D2703] P. TIXADOR, Y.BRUNET, "Supraconducteurs. Environnement et applications", *Techniques de l'Ingénieur*, traité Génie électrique D2703.
- [Tixador.D2704] P. TIXADOR, Y.BRUNET, "Principales applications des supraconducteurs", *Techniques de l'Ingénieur*, traité Génie électrique D2704.
- [Tomita.03] M. TOMITA, M. MURAKAMI, "High-temperature superconductor bulk magnets that cant rap magnetic fields of over 17 Tesla at 29 K", *Nature*, vol. 421, pp. 517-520, 2003.
- [Trémolet.00] É. TREMOLET. LACHEISSERIE, L. NÉEL, "Magnétisme. / I, Fondements", *Editions EDP Sciences*, 2000.
- [Tropeano.11] M. TROPEANO, "MgB₂: a two-gap superconductor for practical application", *ESAS Summer School, Turku, Finland*, 2011.
- [Tsuchimoto.99] M. TSUCHIMOTO, K. MORIKAWA, "Macroscopic numerical evaluation of heat generation in a bulk high T_c superconductor during pulsed field magnetization", *IEEE Transaction on Applied superconductivity*, vol. 9, n° 1, p. 66-70, March 1999.
- [Valle.07] N-D. Valle, A. Sanchez, E. Pardo, C. Navau, and D-X. Chen, "Enhanced stability by field cooling in superconducting levitation with translational symmetry", *Appl. Phys. Lett.*, vol. 91, 2007.
- [Weinberger.94] B-R. WEINBERGER, "Further studies of magnetic levitation using high temperature superconductors", *Applied Superconductivity*, vol. 2, n° 7-8, p. 511-521, July. 1994.
- [Wu.87] M-K. WU, J-R. ASHBURN, C-J. TORNG, P-H. HOR, R-L. MENG, L. GAO, Z-J. HUANG, Y-Q. WANG and C-W. CHU, "Superconductivity at 93 K in a new mixed-phase Y-Ba-Cu-O compound system at ambient pressure", *Physical Review Letters*, vol. 58, n° 9, p. 908-910, 1987.

- [Yang.89] Z-J. YANG, T-H. JOHANSEN, H. BRATSBERG and G. HELGESEN, "Vibrations of a magnet levitated over a flat superconductor", *Physica C, Superconductivity*, vol. 160, n° 5-6, p. 461-465, 1989.
- [Yang.07] Y. YANG and X-J. ZHENG, "Method for solution of the interaction between superconductor and permanent magnet", *J. Appl. Phys.*, vol. 101, n° 11, p. 113922, 2007.
- [Yang.08] Y. YANG, "Vertical and lateral forces when a permanent magnet above a superconductor traverses in arbitrary directions", *Superconducting Sciences and Technology*, vol. 21, p. 5, 2008.
- [Yeshurun.88] Y. YESHURUN, A-P. MALOZEMOFF, "Giant Flux Creep and Irreversibility in an Y-Ba-Cu-O Crystal: An Alternative to the Superconducting-Glass Model", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, 1988.
- [Yonnet.80] J-P.YONNET, "Etude des paliers magnétiques passifs", *Thèse de doctorat d'état Es-Sciences*, Grenoble, 1980.
- [Yonnet.08] J-P.YONNET, H. ALLAG, and M- E-H. LATRECHE, "2D and 3D analytical calculations of magnet interactions", in *Proc. Mmde Conf.*, Bucharest, June 15–16, 2008.

Résumé

Une nouvelle contribution est présentée dans le domaine de calcul des forces d'interaction entre un aimant permanent et un supraconducteur de type II utilisant un système de lévitation classique. Les forces et les inductances mutuelles sont développées par les équations de Green en utilisant une approche ampérienne, en supposant une bobine mince pour l'aimant permanent de forme parallélépipédique et une superposition de boucles fermées de section rectangulaire du supraconducteur. Dans le supraconducteur, la densité de courant critique (J_c) est connue, l'épaisseur de pénétration variable de J_c est donnée par le modèle de l'état critique de Bean. Les parties les plus importantes sont les formulations mathématiques originales de considération de la pénétration de courant dans les supraconducteurs et les nouveaux développements analytiques des forces verticales et latérales entre l'aimant permanent et le supraconducteur après plusieurs calculs intégraux analytiques. Les résultats prouvent la rapidité et la bonne précision de notre modèle analytique.

Mots-clés : Aimant permanent, force de lévitation, modèle de l'état critique, supraconducteur de type II.

STUDY AND DEVELOPMENT OF ELECTROMAGNETIC MODELS FOR PERMANENT MAGNET AND SUPERCONDUCTING MATERIALS SYSTEMS

Abstract

A new contribution is given for the calculation of interaction forces between the permanent magnet and a hard type-II superconductor used as a classical levitation system. The forces and also mutual inductances are developed via Green's functions using an Amperian model, assuming a parallelepiped thin coil for permanent magnet and a superposition of closed loops of rectangular cross section of the superconductor. In the superconductor, the variable penetration thickness of critical current J_c is given from external magnetic fields by Bean's critical-state models. The most important parts are the original mathematical process of considering current penetration in superconductors and the new analytical development of vertical and lateral forces between permanent magnet and superconductor, realized after several analytical integral calculations. The results prove fastness and good accuracy of our analytical model.

Keywords: Bean's critical states models, hard type-II superconductor, levitation force, permanent magnet.

ملخص

نتج من جراء رفض الموصلات الفائقة للمجالات المغناطيسية و تمغنطها المعاكس ظاهرة الطفو. لذلك قدمنا مساهمة جديدة لحساب قوى التفاعل بين المغناطيس الدائم وموصل فائق. يتم تطوير القوى عبر وظائف جرين باستخدام نموذج أمبيرري ، بافتراض ملف رقيق ذي مغزل متوازي لمغناطيس دائم وتراكب حلقات مغلقة من المقطع العرضي المستطيل للموصل الفائق. في الموصل الفائق، يُعرف التيار الحرج، ولكن سمك الاختراق المتغير لتيار الحرج - يتم إعطاؤه من الحقول المغناطيسية الخارجية بواسطة نماذج الحالة الحرجة. الأجزاء الأكثر أهمية هي العملية الرياضية الأصلية للنظر في الاختراق الحالي في الموصلات الفائقة والتطور التحليلي الجديد للقوى الأفقية والعمودية بين المغناطيس الدائم والموصل الفائق، الذي يتحقق بعد عدة حسابات تكاملية تحليلية. تثبت النتائج دقة نموذجنا التحليلي.