REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE UNIVERSITÉ DE
JIJEL FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES DEPARTEMENT
DE PHYSIQUE

N d'ordre : Série :

Thèse de Doctorat en Sciences
Filière : Physique
Spécialité: Physique théorique
Pour obtenir le cadre de Docteur en Physique

Thème

Algèbres non commutatives et intégrale de chemin

Khiari Leila

Soutenu publiquement, le 03/03/2020 devant le jury composé de :

Mr: K. Nouicer	Prof.	Université de Jijel	Président
Mr: T. Boudjedaa	Prof.	Université de Jijel	Encadreur
Mr: A. Makhlouf	Prof.	Université de Mulhouse	Co-Encadreur
Mr: M. Maamache	Prof.	Université de Sétif	Examinateur
Mr: N. Belaloui	Prof.	Université de Constantine 1	Examinateur
Mr: T. Meftah	Prof.	Univesité d'Ouargla	Invité

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE JIJEL FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre : Série :

Thèse de Doctorat en Sciences
Filière : Physique
Spécialité: Physique théorique

Thème

Algèbres non commutatives et intégrale de chemin

Khiari Leila

Soutenu publiquement, le 03/03/2020 devant le jury composé de :

Mr. K. Nouicer	Prof.	Université de Jijel	Président
Mr. T. Boudjedaa	Prof.	Université de Jijel	Encadreur
Mr. A. Makhlouf	Prof.	Université de Mulhouse	Co-Encadreur
Mr. M. Maamache	Prof.	Université de Sétif	Examinateur
Mr. N. Belaloui	Prof.	Université de Constantine 1	Examinateur
Mr. T. Meftah	Prof.	Univesité de Ouargla	Invité

Dédicaces

A ma très chère mère
à mon beau père et ma belle mère
à l'esprit de mon père
à l'esprit de ma soeur Souad
à l'esprit de mon frère Adel
à mon mari
à mes fils
à tous mes frères et soeurs
à tous mes professeurs
Leila

Remerciements

Je remercier *Mr. Boudjedaa Tahar*, Professeur à l'Université de Jijel, pour avoir accepté de diriger ma thèse, pour sa patience inimbrolable, ses conseils et pour tous ses efforts tout au long de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Je remercie aussi *Mr. Abdenacer Makhlouf* ,qui m'a accueillie dans le laboratoire de Mulhouse et d'avoir accepter de juger ce travail. Ainsi que ses précieux conseils. Mes remerciements vont au *Mr M. T. Meftah*, professeur à l'université d'Ouargla pour le soutien illimité et l'assistance importante qu'il m'a apportée pendant la réalisation de la thèse.

Un Grand merci à *Mr. K. Nouicer* professeur à l'université de Jijel pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury. Mes vifs remerciements vont également à *Mr. M. Maamache*, Professeur à l'Université de Setif, ainsi que Mr. N. Belaloui, Professeur à l'Université de Constantine, d'avoir accepté d'être examinateurs dans cette honorable jury. Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance et mon respect, à mesenseig nants de la post-graduation de physique théorique.

Je remercie vivement tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse, même par un petit sourire d'encouragement et specialement l'esprit de *Mr. Mahamed Benbitour*.

Leila

Table des matières

1 Introduction générale **1**

2 Fondements de la physique non commutative et structure algébrique **9**

2.1 Introduction: 9

2.2 Fondements de la physique non commutative : 10

2.3 Déformation des structures algèbriques 19

2.3.1 Déformations associatives et cohomologie de Hochshild 21

2.3.2 Déformation des algèbres de Lie et cohomologie de Chevalley 22

2.3.3 Espace des Phases déformé (Crochet de Poisson déformé) : 23

2.4 Principe d'action classique: 24

2.4.1 Mécanique classique habituelle: 25

2.4.2 Mécanique classique déformé (non commutative): 26

2.4.3 Mécanique quantique non commutative 28

2.5 Principe d'action en mécanique quantique 33

2.6 Transformation canoniquen dans l'espace des phases déformées 33

3 Intégrale de chemins **43**

3.1 Introduction 43

3.2 Formalisme de Feynman dans l'espace des phases commutatif 46

3.3 Formalisme de Feynman dans l'espace des phases non commutatif 51

3.3.1 Conclusion 60

3.4 Physique satistique non-commutative: 61

3.4.1 Rappels sur fonction de Partition ordinaire: 62

3.4.2 Fonction de Partition de l'oscillateur harmonique couplés dans un système déformé 64

3.4.3 Fonction de partition de l'oscillateur harmonique couplés dans le cas limite ($\theta = \sigma = 0$) 67
3.4.4 Conclusion: 68

4 Phase de Berry **71**
4.1 Introduction: 71
4.1.1 **Théorème adiabatique:** 71
4.1.2 **Solution de l'équation de SchrÖdinger:** 72
4.1.3 **Propagateur de Feynman**: 74
4.2 Technique Euclidienne: 75
4.2.1 **L'oscillateur harmonique couplés en fonction du temps dans l'espace des phases commutative:** 79
4.3 Phase de Berry dans l'espace des phases non-commutative: 86
4.3.1 **L'oscillateur harmonique couplés en fonction du temps dans l'espace des phases non-commutative:** 87
4.4 Conclusion: 93

5 Conclusion **97**

ملخص

في هذه الأطروحة ، قدمنا نظرية التشوه في مسار تكامل، وبإعتبار حالة تشوه صغير وغير ذي قيمة. لقد طبقنا بناء مسار التكامل في فضاء المرحلة غير التبديلية. استخدمنا الإحداثيات المختلطة لفضاء الطور، كما تتجلى اللا محلية في حد التفاعل الخاص بها. في المساحة غير التبادلية ، تمت كتابة أقواس بواسون باستخدام شكل مبسط مشوه .$J_{(\vartheta.\sigma)}$. لقد قمنا بإشتقاق الحركة على الفضاء غير التبادلي ، والذي يحتوي على جزء حركي مشوه. استخدمنا تحويلًا قانونيًا خطيًا استنادًا إلى معلمات $(\vartheta.\sigma)$ لتحويل هذا الجزء الحركي إلى الجزء المعتاد. هذا التحول القانوني الناجم عن حد جديد يعتمد على $(\vartheta.\sigma)$ تضاف إلى الهاميلتون. بعد ذلك ، استبدلنا الإجراء بشكله الجديد في المُنشر ، من حيث الإحداثيات المختلطة لفضاء الطور.

طبقنا هذه الطريقة لحالة الهزاز التوافقي المزدوج. اعتبرنا الهزازات التوافقية ذات البعدين. ثم قمنا بحساب الحد الإضافي في نظام هاميلتون في هذه الحالة. في حالة الحد $\vartheta = \sigma = 0$ ، نستعيد الهزاز التوافقي المعتاد.

لقد قمنا بإشتقاق دالة التقسيم $Z_{\vartheta,\sigma}$ ، لهزاز توافقي مزدوج غير التبادلي على بعدين. من خلالها قمنا بحساب الطاقة الداخلية الحرة للنظام والسعة الحرارية كدالة لدرجة الحرارة في حالة غير تبديلية. التطبيقات المحققة دقيقة من الناحية التحليلية، كما يتم استرداد حالات الحدود بشكل جيد.

بعد ذلك ، قدمنا معالجة بديلةً لمشكلة الهزاز التوافقي المزدوج في بعدين مع الكتلة والتردد المرتبطين بالزمن، في حالتين الأولى في فضاء الطور التبادلي والأخرى في فضاء الطور غير التبادلية. وأخيرا ، وجدنا أطوار بيري في كلتا الحالتين.

Abstract

In this thesis, we introduced the deformation theory in Feynman's path integral and consider the case of a small and trivial deformation. We have applied the construction of the path integral in non-commutative phase space. We used the mixed coordinates of the phase space, and the non-locality is also manifested in its interaction term. In non-commutative space the Poisson brackets have been written using a deformed simplistic form J (θ.σ). We derived an action on the non-commutative space, which contain a deformed kinetic part. We used a linear canonical transformation depending on (θ.σ) parameters to transform this kinetic part as the usual one. This canonical transformation, induced a new term depending on (θ.σ) added to the Hamiltonian. We have them replaced the action by its new form in the propagator, in terms of mixed coordinates of the phase space.

We applied this method to the case of the coupled harmonic oscillator. We considered two dimensional coupled harmonic oscillators. We then calculate the additional term in the Hamiltonian of the system in this case. In the limit case $\theta = \sigma = 0$, we recover the usual coupled harmonic oscillator.

We derived the partition function $Z_{\theta,\sigma}$ of a non-commutative coupled harmonic oscillator in two dimensions. From which we calculated the free internal energy of the system, and the heat capacity as a function of temperature in the case non-commutative. The performed applications are analytically exact and the limit cases are well recovered.

After, we have presented an alternative treatment for the problem of the coupled harmonic oscillator in two dimensions with time-dependent mass and frequency, in two cases the first one in commutative phase space and other in non-commutative phase space. Finally, we found Berry's phases in the both cases.

Résumé

Dans notre thèse, nous allons introduire la théorie de la déformation en l'intégrale de chemin de Feynman, et de considérer le cas des déformations triviales et petites. Nous avons appliqué la construction de l'intégrale de chemin dans l'espace de phase non commutative. Nous avons utilisé les coordonnées mixtes de l'espace de phase, et de la non-localité se manifeste aussi dans son terme d'interaction. Dans l'espace non commutative les crochets de Poisson ont été écrits en utilisant une forme symplectique déformée J (θ.σ).

Nous avons établi une action sur l'espace non commutative, qui contient des pièces cinétiques déformées. Nous avons utilisé une transformation canonique linéaire en fonction des paramètres de (θ.σ) pour transformer ces pièces cinétiques que celle d'habitude. Cette transformation canonique, induite un nouveau terme en fonction de (θ.σ) ajouté à l'hamiltonien. Ensuite nous avons remplacé l'action par son nouveau formulaire dans le propagateur, en termes des coordonnées mixtes de l'espace des phases.

Nous avons appliqué cette méthode pour le cas de l'oscillateur harmonique couplé. Nous avons considéré oscillateurs harmoniques couplés de deux dimensions. Et calculer ensuite le terme supplémentaire dans l'hamiltonien du système dans ce cas. Dans le cas limite θ = σ = 0, nous récupérons l'oscillateur harmonique couplé habitude.

Nous avons calculé la fonction de partition $Z_{\theta,\sigma}$ d'un oscillateur harmonique non commutatif couplé à deux dimensions. À partir de laquelle nous avons calculé l'énergie interne libre du système, et la capacité de chaleur en fonction de la température dans le cas de non commutative. Les applications réalisées sont analytiquement exactes et les cas-limites sont bien récupérés

Après nous avons présenté une alternative de traitement pour le problème de l'oscillateur harmonique couplé en deux dimensions avec la masse et de la fréquence en fonction du temps. Finalement nous avons trouvé les phases du Berry dans les deux cas, commutative et non commutative.

1

Introduction générale

Les deux théories qui forment l'essentiel du savoir humain sur l'espace-temps sont la Relativité Générale et le Modele standard. La relativité générale décrit l'espace-temps dans son aspect à grande échelles et pour cela elle se base sur la géométrie différentielle lisse de Riemann. L'espace temps est alors modèlisé comme une variété différentiable courbe munie d'une métrique $g_{\mu\nu}$ dont les composantes sont liées aux champs gravitationnels. Le lien entre la géométrie de l'espace-temps et le champ de gravitation est décrit par l'action de Hilbert-Einstein S_E. En principe, cette action prend en compte tous les détails sur l'espace-temps à grande échelle, en incorporant la distribution de la matière et à petite échelle en incorporant les champs introduits par le modèle standard.

Par ailleurs, pour passer de la théorie classique à une théorie quantique plusieurs méthodes sont envisageables selon le contexte. L'un des formalismes mathématiques qui décrit cette transition, en utilisant des concepts classiques tels que la trajectoire, est l'intégrale de chemins de Feynman. Ce dernier a introduit son approche en tenant compte de la multiplicité des possibilités proposées à l'évolution. Feynman postule que l'amplitude de la transition quantique est une somme sur tous les chemins possibles dans l'espace temps physique. Cette amplitude est dite "*propagateur*" puisqu'elle permet, à l'image de l'idée de Huygens, aux ondes de probabilité de se propager d'un point à un autre en passant par tous les points intermédiaires. Le noyau responsable de cette propagation est le propagateur de Feynman. Ce formalisme a été établi pour la première fois en mécanique quantique non relativiste. Son extension à la relativité et aux particules dotées de spin pose encore quelques problèmes. Par exemple, suivant les principes de la relativité les points de l'espace-temps sont séparés par un cône de lumière et la propagation physiquement acceptable doit en principe être interdite pour des régions acausales d'espace-temps. Autrement dit, en sommant sur tous

les chemins se situant dans cet espace-temps, devons-nous ne pas considérer les chemins se trouvant dans ces régions acausales, et traiter le spin son caractère discret, comment alors représenter cette entité si importante en physique via le concept continu de la trajectoire. En conclusion, la transition du régime classique au régime quantique est possible et est simple par les intégrales de Feynman, qui donnent à toute configuration des champs une amplitude de probabilité $e^{\frac{i}{\hbar}S}$. Il s'avère que cette théorie est très performante pour la quantification des champs introduits par le modèle standard, même si parfois on a recours à d'autres techniques perturbatifs comme la renormalisation. Cependant, quand on manipule les champs gravitationnels $g_{\mu\nu}$, cette technique perturbative devient défaillante, mais cet échec est en fait pas très surprenant. En effet, les objets élémentaires et les notions de base de la théorie quantique des champs est sont basés sur la géométrie de Minkowski, alors si on traite de la même manière les champs gravitationels on aura une théorie quantique des champs $g_{\mu\nu}$ sur l'espace plat de Minkowski, ce qui serait très étrange d'un point de vue géométrique. De plus, même sur le plan technique la renormalisation et l'unitarisation sont en échec lors de la quantification des champs gravitationnels.

Afin de surmonter l'obstruction à la quantification des champs gravitationnels, une idée nouvelle a vu le jour, c'est la géométrie non commutative proposée par Alain Connes. La géométrie non commutative, d'Alain connes, est davantage un outil facilitant l'étude de la théorie des champs quantiques, elle est encore un outil mathématique valide et utile. La géométrie non commutative est pour les mathématiciens surprenants par son aspect qu'elle permet de rassembler des concepts apparemment sans relation au sein d'une structure commune. En géométrie non commutative, il possible de fusionner de nombreux cas trop éloignés pour les géométries classiques et dont le nom-commutativité est le lien caché. D'autre part, d'un point de vue physique l'espace quantique est fondamentalement tâché par l'incertitude. L'espace engendré par le modèle de Connes assure que cette incertitude est suffisante pour engendrer la totalité du modèle classique décrivant les interactions entre particules élémentaires.

En effet, d'après un théorème dû à Gelfand, il est possible de reconstruire un espace à partir des fonctions sur cet espace, ou en d'autres termes l'algèbre C^*des fonctions. Cet espace satisfait à certains axiomes comme la commutativité : la multiplication des fonctions est commutative. Alors, suivant l'idée d'Hamilton, si on supprime la commutativité de cette liste d'axiomes on obtient alors un espace non commutatif. En effet, l'idée de remplacer un espace géométrique par une algèbre fut concrétisée aussitôt en mathématiques par la géométrie algébrique où les points correspondent aux idéaux maximaux d'algèbres de

polynômes. Les travaux de Gelfand et Naimark dans les années 1940 firent un pas de plus en établissant un pont entre la topologie et les algèbres: ils montrèrent que les C^*-algèbres fournissent une théorie des espaces topologiques non commutatifs dans le sens où la catégorie des C^*-algèbres commutatives est équivalente à la catégorie des espaces topologiques. Ce lien permit alors de développer des techniques analogues en topologie et en algèbre d'opérateurs et un certain nombre de notions géométriques trouvèrent leurs équivalents algébriques.

Enfin, le terme de "géométrie non commutative" (GNC) fut introduit par Alain Connes dans les années 1980 comme étant un programme visant à généraliser différents concepts empruntés à la géométrie ordinaire en des concepts équivalents pour des algèbres non commutatives et en particulier les concepts venant de la géométrie différentielle. La géométrie non commutative représente aujourd'hui un ensemble de techniques sur les algèbres d'opérateurs permettant de traiter des problèmes mathématiques très variés.

Du point de vue de la physique, la géométrie non commutative constitue un cadre mathématique dans lequel un certain nombre de concepts physiques peuvent être exprimés et parfois unifiés. La remarque effectuée par P.A.M.Dirac sur l'analogie entre commutateur en mécanique quantique et crochet de Poisson en mécanique Hamiltonienne peut par exemple être concrétisée par l'introduction d'une structure symplectique non commutative Ainsi, il fut montré par Michel Dubois-Violette [1] que le commutateur en mécanique quantique peut se comprendre dans ce cadre comme un crochet de Poisson. En 1985, M. Dubois-Violette, Richard Kerner et John Madore montrèrent [1], [2], [4], [5], que les théories de jauge formulées sur l'algèbre des fonctions à valeurs matricielles possèdent de manière naturelle un mécanisme de brisure de symétrie de jauge analogue à celui proposé par Higgs. Ils utilisèrent pour cela le calcul différentiel basé sur les dérivations. Ce modèle fut ensuite généralisé par Robert Coquereaux [6] et A. Connes et J. Lott à d'autres types de calculs différentiels. En particuliers, il fut montré qu'il est possible d'exprimer le Lagrangien du modèle standard dans un cadre totalement algébrique en utilisant un calcul différentiel construit à partir d'un triplet spectral composé d'un opérateur de Dirac, d'un espace d'Hilbert et d'une algèbre. Cette approche permet également d'incorporer les spineurs et la notion de métrique de manière naturelle [7] et de formuler un principe de moindre action [8]. Il a également été fait usage des techniques de la géométrie non commutative par Jean Bellissard afin de décrire certains systèmes des physiques statistiques telles que les quasi-cristaux ou encore l'effet Hall quantique. Enfin, il fut mis en évidence par Dirk Kreimer et Alain Connes que la structure du groupe de renormalisation perturbatif peut se comprendre en termes d'algèbres de Hopf (généralisation de la notion de groupe en géométrie non commutative).

La Mécanique Quantique sur un espace Non Commutatif (MQNC) a, dans un premier temps, été proposée par Heisenberg dans les années 30 puis développées par Snyder à la fin des années 40, dans l'espoir que les propriétés de non-localisabilité induite par la non commutativité des coordonnées d'espace permettraient de résoudre le problème des divergences à courte distance (ultra-violette) de la théorie des champs. Mais les succès de la renormalisation rendirent cette piste caduque et elle fut abandonnée. Des découvertes nouvelles justifient le regain d'intérêt pour la théorie des champs sur un espace non commutatif et, en particulier, pour la mécanique quantique sur un espace non commutatif. Par exemple, l'étude des systèmes exactement solubles de la MQNC devrait permettre une meilleure compréhension de la théorie des champs sur l'espace non commutatif.

La non commutativité en physique intervient pour la première fois en mécanique quantique qui vient généraliser la mécanique classique. Les algèbres commutatives des observables sont remplacées par des algèbres non commutatives et on parle alors d'opérateurs qui dans le cas fini sont dits matrices. L'espace d'évolution dit espace des phases perd ses propriétés de localisation à cause de l'incertitude d'Heisenberg. La trajectoire n'a plus un sens précis et cède sa place à une dualité entre la position et l'impulsion (variables de l'espace des phases). Cette dualité est mise en exergue avec le formalisme de l'intégrale de chemin de Feynman qui est une manière très subtile de quantification échafaudant un lien intime entre la mécanique classique et la mécanique quantique. Cette intégrale de chemin exprimée dans l'espace des phases fait intervenir la structure de l'algèbre de Poisson.

Avec les développements de la quantification dans le cadre de l'unification des forces fondamentales, la physique moderne a recouru à une généralisation de la notion de localisation passant de la particule à la notion de corde. La théorie des cordes incite alors à généraliser la structure de l'algèbre de Poisson en la déformant encore, ce qui est équivalent à imposer une non-commutativité au sein des variables positions et au sein des variables impulsions ; on dit que la dualité est généralisée.

L'objet de cette thèse est d'étudier cette généralisation utilisant le formalisme de Feynman de l'intégrale de chemin. Les systèmes étudiés sont, pour un besoin de simplification et de démarche, les systèmes à Hamiltoniens quadratiques dans cet espace des phases non commutatif. Les déformations introduites sont pour l'instant triviales ou petites.

D'autre part, la théorie des intégrales de chemins de Feynman rencontre des difficultés substantielles quand on l'utilise sur un espace non commutatif. C'est-à-dire qu'il est en principe dénué de sens de parler de trajectoire dans un espace-temps non commutatif.

L'un des propos majeurs de ma thèse est une formulation des intégrales de parcours non pas sur l'espace des coordonnées non commutatives, mais sur l'espace des phases non commutative (mixe espace), de cette manière nous contournons le problème de sommer sur des trajectoires sur un espace non commutative. En effet, nous considérons un espace-temps à $(2+1)$-dimensions, mais notre considération peut être facilement généralisée. Alors, afin de relier notre travail au formalisme canonique, nous avons eu recours à une base complète d'opérateurs qui commutent, nous prenons comme espace de configuration l'espace (x_1, p_2), d'opérateurs qui commutent ainsi nous aurons évité la non- commutativité. Physiquement la base que nous utilisons, représente des états dont la position sur le premier axe est bien définie et le moment le long du second axe bien définie aussi.

D'autre part, dans un travail ultérieur, (mémoire de magister), nous avons appliqué la technique des intégrales de chemins dans l'espace ce même espace des phases non commutatif, qui est une déformation de l'espace des phases ordinaires par deux paramètres θ et σ. Le calcul que nous avons fait pour le cas d'un système libre et pour l'oscillateur harmonique, s'est avéré tres compliqué. Alors, dans un travail que nous avons publié nous nous somme servis d'une application matricielle, notée A dans la thèse, rendant l'espace commutative. Cette technique est semblable au *boop* $shift$, mais elle semble plus pratique pour les systèmes que nous considérons. En effet, cette matrice transfère, en quelque sorte, la déformation du côté cinétique au terme du potentiel. Après cela, nous avons fait dans ce même travail ultérieur une extension directe à la méthode semi-classique et nous avons abouti à la conclusion que ces deux techniques donnent exactement le même résultat que celui du cas commutatif.

La thèse est organisée comme suit. Dans le premier chapitre nous allons présenter brièvement un rappel sur la géométrie non commutative. Au cours du deuxième chapitre, je ferai un petit rappel sur le passage de la mécanique classique vers la mécanique quantique, c'est-à-dire la quantification. Je donnerai les définitions de la variété symplectique et la variété de Poisson est aussi des définitions de la quantification canonique, la quantification géométrique et la quantification de déformation formelle (le produit star de Weyl et Wigner avec des exemples). Ensuite, j'introduis la notion de déformations formelle (déformation associative et déformations des algèbres de Lie, crochet de Poisson sur un espace des phases déformé). Enfin, la transformation canonique dans l'espace des phases non commutatif.

Au troisième chapitre, je présenterai un rappelé sur mon mémoire de magister avec deux applications sur l'oscillateur harmonique dans l'espace des phases non commutatif, par deux façons l'une avec un calcul direct et l'autre semi-classique. A la fin de ce chapitre

deux applications seront exposées l'une traitant l'oscillateur harmonique couplé dans le cas commutatif et l'autre dans le cas non commutatif et je vérifierai le cas limite $\theta = \sigma = 0$.

Au quatrième chapitre, j'expose une introduction sur la phase de Berry et je ferai deux applications, l'une dans le cas commutatif et l'autre dans le cas non commutatif. Enfin, le dernier chapitre sera consacré à la conclusion.

Bibliographie

[1] M. Dubois-Violette et T. Masson. "Basic cohomology of associative algebras", J. Pure Applied Algebras 114 (1996) 39–50.

[2] M. Dubois-Violette et T. Masson. "On the first order operators in bimodules", Lett. Math. Phys. 37 (1996) 467–474.

[3] M. Dubois-Violette et P. W. Michor. "Connections on central bimodules", J. Geom. Phys. 20 (1996) 218–232.

[4] M. Dubois-Violette et T. Masson. "SU(n)-connections and noncommutative differential geometry", J. Geom. Phys. 25 (1998) 104.

[5] M. Dubois-Violette, J. Madore et R. Kerner. "Classical bosons in a noncommutative geometry", Class. Quant. Grav. 6 (1989) 1709.

[6] A. Connes et J. Lott. "Particle models and noncommutative geometry (expanded version)", Nucl. Phys. Proc. Suppl. 18B (1991) 29–47.

[7] A. Connes. "Essay on physics and noncommutative geometry", The interface of mathematics and particles physics (1990).

[8] A. Connes. Géométrie non commutative. InterEditions, 1990.

[9] A. Connes. Noncommutative Geometry. Academic Press, 1994.

[10] M. Dubois-Violette. " Non-commutative differential geometry, quantum mechanics and gauge Theory". Dans C. Bartocci, U. Bruzzo et R. Cianci, éditeurs, Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, volume 375 de Lecture Notes in Physics, Rapallo, 1990. Springer-Verlag.

[11] A. Connes, M. R. Douglas, A. Schwarz, JHEP 9802 (1998) 033.

[12] V. G. Kupriyanov 1308.1350V1 [hep-th] 6 Aug (2013)

[13] Dionysions Mylonas, Peter shupp and Richard J. Szabo 1402.7306V1 [hep-th] 28 Feb (2014)

[14] Slimane Zain and Yazid Delenda 1212.0208V1 [math-ph] 2 Dec (2012)

[15] Sunandan Gangopadhyaya and Frederik G Scholtz 1309.3144V2 [hep-th] 8 Jan (2014)

[16] Salvatore Galluccio, Fedele Lizzi and Patrizia Vitale 0810.2095V1 [hep-th] 12 Oct (2008)

[17] C. Duval, P. Horvathy, Phys. Lett. B **479**, 284 (2000) [hep-th/0002233]; J. Phys. A 34, 10097 (2001) [hepth/0106089]; P. Horvathy, Ann. Phys. 299, 128 (2002) [hep-th/0201007]

[18] V.P. Nair, A.P. Polychronakos, Phys. Lett. B **505**, 267 (2001) [hep-th/0011172]

[19] L. Jonke, S. Meljanac, Eur. Phys. J. C **29**, 433 (2003) [hep-th/0210042]; I. Dadic, L. Jonke, S. Meljanac, hepth/0301066

2

Fondements de la physique non commutative et structure algébrique

2.1 Introduction:

La physique classique est fondamentalement commutative, c'est à dire, que l'algèbres de ses observables est commutative. Ceci est le résultat de la non influence de la mesure physique sur les systèmes étudiés qui sont en général de taille macroscopique. Dans le cas des systèmes microscopiques l'influence de cette mesure ne peut être négligée ou compensée. Ceci nous contraint alors de changer d'algèbre des observables pour tenir compte en théorie de ces influences. Les physiciens modernes ont choisi la non commutativité de l'algèbre des observables comme élément de base et nous pouvons prétendre que cette non commutativité est fondamentale en physique moderne. C'est par son biais que les infinis sont en général éliminés. Par exemple, au début du siècle, il a été impossible aux physiciens de régulariser l'infini classique intervenant dans la théorie du corps noir qu'au prix de l'hypothèse hardie de Planck dite hypothèse de quantification (quantum de Planck). Cette dernière est équivalente à la non commutativité des matrices d'Heisenberg introduites pour décrire la dynamique quantique.

Dans ce chapitre, je vais présenter brièvement quelques méthodes de passage de la commutativité à la non commutativité:

1) la méthode qui fait passer de la mécanique classique à la mécanique quantique, dite quantification canonique

2) la méthode qui nous fait passer de la mécanique classique à la mécanique classique non-commutative, dite déformation de l'espace des phases

3) la méthode qui fait passer de la mécanique quantique à la mécanique quantique non-commutative, dite quantification canonique dans l'espace des phases déformé.

Nous présentons aussi le cadre générale de la **déformation formelle** d'une algèbre associative et précisément, nous travaillons sur l'algèbre de Poisson. et nous avons utilisé le crochet de Poisson induit par le structure symplectique. Ce dernier est introduit par Poisson en 1809, et joue un rôle fondamental en mécanique analytique et en physique.

Introduit la déformation formel sur un système classique, et dans cette cas nous présentons premièrement un petit rappel sur un systèmes Hamiltonien habituel et cet dernière joue un rôle très important en mécanique et physique, car beaucoup de phénomènes naturels peuvent se modeler avec des systèmes hamiltoniens, on a montré la forme symplectique canonique $\Lambda = \sum_{i=0}^{n} dp_i \Lambda dq_i$ et après nous trouvons l'équation de Hamilton, où l'on travaille toujours directement avec le hamiltonien d'un système analytique habituel c'est à dire **non déformé**.

Après avoir établi les équation canonique de Hamilton d'un système **non déformé**, qui sont différentielles couplées du premier ordre en temps pour le variable d'état, nous abordons, dans la suite, une système classique déformé avec une nouvelle forme symplectique est $\Lambda^{déf} = \sum_{i=0}^{n} dp_i \Lambda dq_i$. Nous écrivons cette forme comme une série formelle de Λ_0 et nous étudions les **déformation formelles** de l'algèbre de Poisson envisagée l'identité.

L'espace des phases(p, q) est du point de vue mathématique, le véritable espace approprié à la description de l'évolution d'un système de points, contrairement à l'espace des variables positions.

2.2 Fondements de la physique non commutative :

En des termes très vagues, le problème résolu par Kontsévich consiste en un passage de structures **commutatives** à des structures **non commutatives**, où les premières ont leurs origines historiques en mécanique hamiltonienne et les dernières en mécanique quantique. Dans cette section, nous d´écrivons brièvement les structures **commutatives** pertinentes. Elles sont associées à des systèmes hamiltoniens classiques.

En mécanique classique, on utilise, pour représenter un système, un espace des phases qui est une variétè symplectique $(\mathcal{M}, \Lambda)$. Un état du système est représenté par un point z de l'espace des phases. Une observable est une fonction f , à valeurs réelles, définie sur l'espace des phases. La valeur prise par l'observable f lorsque l'état du système est le point z est tout simplement $f(z)$. L'évolution de l'état du système au cours du temps obéit à

une équation différentielle, l'équation de Hamilton, entièrement déterminée par la donnée d'une observable particulière H, le *hamiltonien* classique ou *énergie* du système. Plus précisément, à toute fonction différentiable f définie sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \Lambda)$, on peut associer un champ de vecteurs X_f appelé *champ de vecteurs hamiltonien* associé à f, défini comme l'unique champ de vecteurs tel que $i(X_f)\Lambda = -df$.

Définition 2.2.1 *Une structure symplectique sur une variété différentiable $\mathcal{M}$ est la structure déterminée sur cette variété par la donnée d'une forme différentielle antisymétrique Λ, de degré 2, **non** dégénérée et fermée. On dit alors que $(\mathcal{M}, \Lambda)$ est une variété symplectique.*

Propriétés élémentaires sur la variété symplectique

1. Soit $(\mathcal{M},*)$ une variété symplectique. Pour tout point z de $\mathcal{M}$, l'espace vectoriel tangent en z, $T_z\mathcal{M}$, muni de la forme bilinéare $\Lambda(z)$, est un espace vectoriel symplectique.

2. L'espace $\mathbb{R}^{2n}$ formé des coordonnées $(z^1, ..., z^{2n})$, muni de la $2-forme$

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} dz^{n+i} \wedge dz^i \tag{2.2.1}$$

est une *variété symplectique*

3. Plus généralement, un espace vectoriel symplectique $(\mathcal{M},*)$ peut être considéré comme une variété symplectique, Λ étant considérée comme une $2-forme$ différentielle sur $\mathcal{M}$; en effet, à toute base de $\mathcal{M}$ correspond une carte, dans laquelle $\mathcal{M}$ a des composantes constantes, ce qui prouve que $d\Lambda$=0.

L'expression locale de X_f dans un système de coordonnées locales de Darboux $(z^1, ..., z^{2n})$ est

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial z^{n+i}}\frac{\partial}{\partial z^i} - \frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial z^{n+i}} \tag{2.2.2}$$

L'´equation différentielle déterminée par X_f, appelée équation de Hamilton pour la fonction f , s'écrit donc

$$\frac{dz^i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z^{n+i}} \tag{2.2.3}$$

$$\frac{dz^{n+i}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z^i}. \tag{2.2.4}$$

Soient f et g deux fonctions différentiables définies sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \Lambda)$, X_f et X_g les champs de vecteurs hamiltonien associés.

Soit $f \in C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ une observable classique, et $t \to z(t) = (x^i(t), p_i(t))$ une solution de l'équation de Hamilton. La dérivée par rapport au temps de la valeur $f(z(t))$ de l'observable f, lorsque l'état $z(t)$ du système varie en obéissant à l'équation différentielle de Hamilton, est

$$\frac{df(z(t))}{dt} = \langle df, X_H \rangle (z(t)) = \{H, f\}(z(t)) \tag{2.2.5}$$

où nous avons noté $\{H, f\}$ le crochet de Poisson des observables H et$f$

Définition 2.2.2 *On appelle crochet de Poisson sur un espace vectoriel V, toute application $\{.,.\} : V \times V \to V$ vérifiant:*

1. $\{,\}$ est bilinéaire.
2. $\{,\}$ est antisymétrique i.e $\forall (f,g) \in F(V)^2$, $\{f,g\} = -\{g,f\}$.
3. $\{.,.\}$ est bidérivation, i.e vérifiant l'identité de Leibnizen chacun de ses arguments:

$$\forall (f,g,h) \in \mathcal{A}^3 : \begin{cases} \{h, fg\} = \{h,f\} g + f \{h,g\} \\ \{hf, g\} = \{h,g\} f + \{h,f\} g \end{cases} \tag{2.2.6}$$

4. l'identité de Jacobi

$$\forall (f,g,h) \in \mathcal{A}^3 : \{\{f,g\}, h\} + \{\{g,h\}, f\} + \{\{h,f\}, g\} = 0 \tag{2.2.7}$$

Remarque 2.2.1 *(1), (2) et (4) définissent le crochet de Lie sur $\mathcal{A}$.*

le crochet historique donné par Poisson était défini sur $C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ par

$$\{H(z(t)), f(z(t))\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x^i}. \tag{2.2.8}$$

où $(p_1, ..., p_n; x_1, ..., x_{2n})$ est un système de coordonnées linéaire sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Définition 2.2.3 *Soient $\mathcal{A}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\cdot$ et $\{\cdot,\cdot\}$ deux applications bilinéaires sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est une algèbre de Poisson si:*

1. $\cdot$ est associatif et **commutatif**.
2. $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de *Lie*.
3. $\cdot$ et $\{\cdot,\cdot\}$ sont liés par l'identité de Leibniz :

$$\forall f, g, h \in A, \{f \cdot g, h\} = f \cdot \{g, h\} + \{f, g\} \cdot h. \tag{2.2.9}$$

Remarque 2.2.2 *Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel. On note $\cdot$ le produit usuel de deux fonctions, et $\{\cdot,\cdot\}$ un crochet de Poisson sur $\mathcal{V}$. Alors $(F(\mathcal{V}), \cdot, \{\cdot,\cdot\})$ est une algèbre de Poisson. Une variété munie d'un crochet de Poisson est appelée variété de Poisson.*

En mécanique hamiltonienne, les systèmes physiques sont décrits par des algèbres **commutatives**, à savoir des algèbres de fonctions régulières sur des variétés de Poisson.

Soient $(\mathcal{M}, \{.,.\})$ une variété de **Poisson** et $N = C^{\infty}(\mathcal{M})$. Le crochet de Poisson fait de N une algèbre de Lie. La règle de Leibniz implique, pour toute fonction lisse f sur $\mathcal{M}$, que l'application linéaire $g \longmapsto \{f, g\}$ est une dérivation de N. A chaque fonction f correspond donc un champ de vecteurs H_f, appelé l'Hamiltonien de f: $H_f(g) = \{f, g\}$. De l'identité de Jacobi, on déduit également que

$$[H_f, H_g] = H_{\{f,g\}} \tag{2.2.10}$$

autrement dit l'application $f \longmapsto H_f$ est un homomorphisme d'algèbres de *Lie* de $(N, \{.,.\})$ dans l'algèbre de *Lie* des champs des vecteurs hamiltoniens. Enfin, compte tenu des propriétés (1) et (2) de la définition, il existe un unique $2-$tenseur contravariant antisymétrique, noté Λ, tel que

$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg) \tag{2.2.11}$$

Ainsi, $\Lambda(z)$ est appelé tenseur de Poisson de la variété de Poisson $\mathcal{M}$ ou encore bivecteur de Poisson, et en coordonnées locales, on a

$$\{f, g\}(z) = \sum_{ij} \Lambda_{ij}(z) \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j} \qquad o\grave{u} \quad \Lambda_{ij}(z) = \{z_i, z_j\} \tag{2.2.12}$$

Dans le cas d'un système à N dimensions, la base $\mathcal{A}_0 = \{p_i, x_i\}$ de l'espace des phases vérfie les relations suivantes

$$\{x_i, x_j\} = 0 \qquad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij} \qquad \{p_i, p_j\} = 0, \qquad i, j = 1...N \tag{2.2.13}$$

Dans l'écriture unifiée des variables de l'espace des phases: $z(t) = (x^i(t), p_i(t))$, $i = 1, \cdots N$ et $a = 1, \cdots 2N$ on aura

$$\{z_a, z_b\} = \Lambda_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.14}$$

En utilisant(2.2.14), il est possible de reécrire (2.2.12) dans le cas multidimensionnel comme suit:

$$\{g(z(t)), f(z(t))\} = (\nabla_z g)\,\Lambda\,(\nabla_z f)\,. \tag{2.2.15}$$

On considère maintenant un système dynamique décrit par le Hamiltonien $H(z)$. Le système hamiltonien ainsi défini sur la variété symplectique précédente admet comme équation du mouvement :

$$\dot{z}^i(t) = \{z, H(\vec{z})\} = \Lambda^{i,j}\partial_j H(\vec{z})\,. \tag{2.2.16}$$

En mécanique quantique, à l'opposé, les systèmes physiques sont décrits par des algèbres **non commutatives**, à savoir des algèbres d'opèrateurs (ce sont les observables) sur des espaces de $\mathcal{H}ilbert$, dont les rayons représentent les états du système. La description quantique fournit toujours des prédictions plus précises de résultats d'expériences physiques. Néanmoins pour des systèmes à une échelle macroscopique, la description classique reste une très bonne approximation de la description quantique. On obtient une mesure quantitative pour la qualité de l'approximation en exprimant la constante de Planck dans un système d'unités caractéristiques de l'échelle du système: plus la constante de Planck apparaît petite, plus la description classique s'approchera de la description quantique. En des termes imprécis, on dit souvent que la mécanique classique est la limite de la mécanique quantique quand la constante de Planck tend vers zéro. Ainsi, au moins du point de vue philosophique, le passage de la description quantique à la description classique est immédiat. L'opération inverse, qui consiste donc à produire une description quantique à partir de la description classique, est naturellement beaucoup moins évidente. troix approches ont été prédominantes:

1. La quantification canonique
2. La quantification géométrique,
3. La quantification par déformation.

Nous commençons par la quantification canonique:

Quantification Canonique

En mécanique classique l'état d'un système physique est spécifié une fois qu'ils ont spécifié les valeurs prises par les variables dynamiques qui sont les coordonnées et les moments . La structure canonique (aussi connu comme la structure symplectique) de la mécanique classique consiste à Les crochets de Poisson entre ces variables. Toutes les transformations qui

laissent invariantes crochets de Poisson, sont autorisés comme transformations canoniques de la mécanique classique.

Dans la mécanique quantique des variables dynamiques sont remplacés par des agents opérateurs dans un espace de Hilbert des états quantiques. Dans la quantification canonique de crochets de Poisson sont remplacés par interrupteurs, . Cela donne immédiatement principe d'incertitude de la mécanique quantique, le livre de Dirac détaille cette règle.

$$\{f, g\} \to \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{f}, \hat{g}\right] \tag{2.2.17}$$

On pourrait interpréter cette proposition comme disant que nous devrions rechercher une "carte de quantification", O cartographiant une fonction f sur l'espace des phases classique à un opérateur O_f sur l'espace quantique de Hilbert tel que

$$O_{\{f,g\}} = \frac{1}{i\hbar}\left[O_f, O_g\right] \tag{2.2.18}$$

Dans l'espace de $\mathcal{H}ilbert$ on a la représentation suivante $O_{x_i} = x_i$ et $O_{p_i} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}$. Ces opérateurs forment l'algèbre de Heisenberg suivante:

$$[x_i, x_j] = 0, \qquad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [p_i, p_j] = 0. \tag{2.2.19}$$

Estimant que la quantification canonique manquait de rigueur, les mathématiciens ont proposé pour la quantification diverses constructions, à leurs yeux plus satisfaisantes. Disons quelques mots de deux de ces constructions, la *quantification géométrique* et la *quantification par déformation*.

Quantification Géométrique

La quantification géométrique vise à construire explicitement un espace de $\mathcal{H}ilbert$, et une algèbre d'opérateurs sur cet espace: à toute observable classique $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, on associe une observable quantique $\hat{f} \in C$ vérifiant certaines hypothèses. Elle s'appuie fortement sur les symétries d'un **Espace des phases** donné. En fait, dans sa forme principale, elle s'applique aux espaces des phasess qui sont des orbites coadjointes d'un groupe de *Lie*. Son avatar purement mathématique est la méthode des orbites en théorie des représentations des groupes de Lie. Dans ce domaine, la quantification géométrique a connu de nombreux succès. D'un autre côté, la quantification géométrique n'a pas élucidé la théorie des champs quantique et on n'a pas réussi à l'appliquer à la relativité générale pour obtenir une théorie adéquate de la gravité quantique. Le problème vient du fait que la quantification géométrique ne permet que la quantification d'un nombre assez petit d'observables classiques.

Quantification par déformation

La quantification par déformation a été proposé par F. Bayen, M. Felato, C. Fronsdal, Lichnerowicz et D. Sternhnimer en 1978 dans l'article fondateur [1]: au lieu de construire une algèbre d'opérateurs sur un espace de $\mathcal{H}ilbert$, il s'agit d'obtenir une **déformation formelle** de la multiplication de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, donnée par l'algèbre des série formelle $\mathcal{F}(\mathcal{M})[[\hbar]]$, munie du star-produit associatif mais (**non commutative**).

Une **déformation formelle** de l'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{C}^{\infty}(M)$, ou de façon équivalente une * star-produit, est défini comme une carte

$$* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}[\lambda] \tag{2.2.20}$$

$$(f, g) \to \sum_{k=0}^{\infty} C_k(f, g)\lambda^k \tag{2.2.21}$$

satisfaisant à:

1. associativité formelle, c'est à dire pour tout $p \geq 0$,

$$\sum_{p=k+l=0}^{\infty} C_k(C_l(f, g), h) - \sum_{p=k+l=0}^{\infty} C_k(f, C_l(g, h)) = 0 \tag{2.2.22}$$

2. $C_0(f, g) = fg$,

3. $\frac{1}{2}(C_1(f, g) - C_1(g, f)) = \{f, g\}$ où $\{,\}$ est crochet de Poisson,

4. chaque carte $C_k : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ doit être un opérateur bidifférentiel.

Une **déformation formelle** du crochet de Poisson est une carte antisymétrique,

$$[,] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}[\lambda] \tag{2.2.23}$$

$$(f, g) \to \sum_{k=0}^{\infty} T_k(f, g)\lambda^k \tag{2.2.24}$$

satisfaisant à;

1. La forme de l'identité de Jacobi, c'est à dire pour tout $p \geq 0$,

$$\sum_{p=k+l=0}^{\infty} T_k(T_l(f, g), h) = 0 \tag{2.2.25}$$

où la somme extérieure est prise sur les permutations cycliques de l'ensemble $\{f, g, h\}$.

2. $T_0(f,g) = \{f,g\}$ où $\{,\}$ est le crochet de Poisson,

3. chaque carte $C_k : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ doit être un opérateur bidifférentiel. Les applications C_k et T_k sont des opérateurs bidifférentiels. Lors de l'interprétation physique de ces formules on donne au paramètre λ la valeur $i\hbar$ où $\hbar$ est la constante de Planck.

Soit α est constante de structure de Poisson. De façon plus spécifique,

$$\alpha = \sum \frac{1}{2}\alpha_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i} \times \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad où,\ \alpha^{ij} = -\alpha^{ji} \in \mathbb{R} \tag{2.2.26}$$

Le Moyal * $star - produit$ est alors donnée par :

$$f * g = \left(\exp\left(\sum -\frac{i}{\hbar}\sum \frac{1}{2}\alpha_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i} \times \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) \tag{2.2.27}$$

Telle que la $(f * g)$ s'etend en une multiplication associative sur l'espace $C^\infty(\mathcal{M})[[\lambda^n]]$ des série formelle en λ. La **déformation formelle** $*$ est un $star - produit$ si en outre tous les C_n sont des opérateurs bidifférentiels (c'est à dire qu'ils sont donnés localement par des produits de fonctions régulières par des dérivées partielles itérées des deux arguments). Une quantification formelle ou quantification par déformation d'une variété de Poisson donnée $\mathcal{M}$ est alors un star-produit tel que, quand λ tend vers *zéro*, le crochet de l'algebre de Lie sous-jacente à l'algèbre associative déformée tend vers le crochet de Poisson des fonctions. Concrètement, cette derniére condition signifie que l'on a

$$C_1(f,g) - C_1(g,f) = \{f,g\}. \tag{2.2.28}$$

L'associativité de $*$ se traduit par les égalités

$$\sum_{j+k=n} C_j(f, C_k(g,h)) = \sum_{j+k=n} C_j(C_k(f,g), h) \tag{2.2.29}$$

pour tout $n \geq 0$. Dans un star-produit, on peut imaginer le paramètre de déformation λ comme proportionnel à la constante de Planck de façon que le comportement du star-produit quand λ tend vers *zéro* reflète l'idée que la description classique est la limite, quand la constante de Planck tend vers *zéro*, de la description quantique.

Star-produit: Le formalisme du star-produit initié par $Weyl$ et $Wigner$ pour permettre une description de la mécanique quantique en termes d'espace des phases [2], s'articule non pas autour d'opérateurs **non commutants**, comme dans l'approche opératorielle, mais autour de la déformation du produit entre les variables de l'espace des phases. Cette procédure de quantification est d'ailleurs appelée "**quantification par déformation**". Nous allons voir comment ce formalisme peut être utilisé dans le cadre de MQNC

Soit $\vec{z} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace des phases. Les relations de commutation

$$\left[\vec{z}^{i}, \vec{z}^{j}\right] = i\Lambda^{i,j} \tag{2.2.30}$$

Le règle du produit **non-commutatif** (appelée star-produit) entre les variables de l'espace des phases est:

$$z^i * z^j - z^j * z^i = \left[\vec{z}^{i}, \vec{z}^{j}\right]_* = i\Lambda^{i,j} \tag{2.2.31}$$

Dans le cadre de ce formalisme les états quantiques sont décrits par des fonctions dans l'espace des phases appelées fonctions de $Wigner$. La correspondance entre les fonctions de l'espace des phases et la représentation opératorielle est assurée par la correspondance de $Weyl$. Il s'écrit comme:

$$f\left(\vec{z}\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^2} \int dz d\xi a\left(z\right) e^{i\xi(\hat{z}-z)} \tag{2.2.32}$$

On va maintenant définir le star-produit entre deux fonction de l'espace des phases peut être obtenu à partir de celui des opérateur grâce à la correspondance de $Weyl$. Il peut

$$f\left(\vec{z}\right) * g\left(\vec{z}\right) = e^{\frac{i}{2}\Lambda^{i,j}\frac{\partial}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial z^j}} f\left(z\right) g\left(z\right) \tag{2.2.33}$$

Par exemple, nous prenons la déformation au niveau des état des configuration c'est-à-dire le commutateur entre les x_i qui égal θ à:

$$\left[x^i, x^j\right] = x^i * x^j - x^j * x^i = i\theta^{ij}, \tag{2.2.34}$$

le $*$-produit entre les fonction de $\vec{x}$, en utilisant le produit (2.2.33). On peut écrire (2.2.33) en série de θ:

$$f\left(x\right) * g\left(x\right) = fg + \frac{\theta^{i,j}}{2}\partial_i f \partial_j g + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \theta^{i,j}\theta^{k,l}\partial_i\partial_k f \partial_j\partial_l g + ... \tag{2.2.35}$$

On peut écrire le produit star de deux fonctions au premiére ordre de θ

$$f\left(x\right) * g\left(x\right) = \left. fg + \frac{\theta^{i,j}}{2}\partial_i f \partial_j g + O\left(\theta^2\right)\right| + ... \tag{2.2.36}$$

Les propriétés des star-produits

$$\int \left(f * g\right)\left(x\right) d^n x = \int \left(g * f\right)\left(x\right) d^n x = \int \left(f.g\right)\left(x\right) d^n x \tag{2.2.37}$$

$$\int \left(f * g * h\right)\left(x\right) d^n x = \int \left(f.\left(g * h\right)\right)\left(x\right) d^n x = \int \left(\left(f * g\right).h\right)\left(x\right) d^n x \tag{2.2.38}$$

$$\int \left(f * g * h\right)\left(x\right) d^n x = \int \left(g * h * f\right)\left(x\right) d^n x = \int \left(h * f * g\right)\left(x\right) d^n x \tag{2.2.39}$$

En mécanique quantique, comme nous l'avons dit, les crochet de Poisson de fonctions sont remplacés par les commutateurs des opérateurs sur l' espace de $\mathcal{H}ilbert$: en théorie des champs classique et quantique, l' **Espace des Phases** joue un rôle important. Afin d'exprimer l'**Espace des Phases** déformé en terme de **déformation formelle**, on rappelle les déformations des structure algèbrique.

2.3 Déformation des structures algèbriques

Dans cette section, on introduit les notions essentielles qui sont attachées à une variété de Poisson $\mathcal{M}$ et on rappelle les théorie cohomologique associées au problème des déformations de la structure de Poisson de $\mathcal{M}$, et de l'algèbre associative et de Lie des fonctions lisses sur $\mathcal{M}$.

Généralité:

La cohomologie est une structure algèbrique associeé à une variété donnée et qui en donne des invariants. Elle est déterminée par la donnée des cochaines et d'un opérateur cobord. La cohomologie des algèbres associatives est la cohomologie de Hochshild [3]. cette cohomologie s'etend naturellement aux algèbres de Hopf. La cohomologie des algèbres de Lie est la cohomologie de Chevalley-Eilenberg [4].

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{V}$ définie par la multiplication μ. Pour tout entier $p \geq 1$ une p-cochaines de Hochschild est une application linéaire de $\mathcal{V}^{\otimes p}$ dans $\mathcal{V}$. On note par $C^p(\mathcal{A}.\mathcal{A})$ l'espace des p-cochaine. On appelle cobord de Hochshild les appilcations:

$$\begin{array}{cc} & C^p(\mathcal{A}.\mathcal{A}) \to C^{p+1}(\mathcal{A}.\mathcal{A}) \\ \delta^p: & \varphi \to \delta^p\varphi \end{array} \tag{2.3.1}$$

qui sont définies pour tout $(x_1, ..., x_{p+1}) \in \mathcal{V}^{\otimes(p+1)}$ par $\delta^p\varphi(x_1, ..., x_{p+1}) = \mu(x_1, \varphi(x_1, ..., x_{p+1}))+ \sum_{i=1}^{p}(-1)^i \varphi(x_1, ..., \mu(x_i, x_{i+1}), ..., x_p)+(-1)^{p+1}\varphi(x_1, ..., \mu(x_i, x_{i+1}), ..., x_p)$ Elles vérfient $\delta^{p+1}\circ\delta^p = 0$. Le noyau de δ^p dans $C^p(\mathcal{A}.\mathcal{A})$ est les groupe des p-cocycles:

$$Z^p = Ker\delta^p = \left\{\varphi : \mathcal{V}^{\otimes p} \to \mathcal{V}/\delta^p\varphi = 0\right\} \tag{2.3.2}$$

et l'image de δ^{p-1} dans $\Omega^p(\mathcal{V})$ est le groupe des p-cobords, nul pour $p = 0$: $B^p(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\,\delta^{p-1}$=$\{\varphi : \mathcal{V}^{\otimes p} \to \mathcal{V}/\delta^p\varphi = \delta^{p-1}f,\ f \in C^{p-1}(\mathcal{A}.\mathcal{A})\}$. On a donc $B^p(\mathcal{A},\mathcal{A}) \subset Z^p(\mathcal{A},\mathcal{A})$. L'espace

$$H^p(\mathcal{A},\mathcal{A}) = Z^p(\mathcal{A},\mathcal{A})/B^p(\mathcal{A},\mathcal{A})$$

est le groupe de cohomolgie de Hochshild de l'algèbre $\mathcal{A}$ à coefficients dans $\mathcal{A}$.

La Cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algebre de Lie N est définie de la manière suivante: les i-cochaines C de N sont les applications i-linéaires de N^i dans N, les 0-cochaines s'identifient à des éléments de N. Le cobord de la i-cochaine C est la $(i+1)$-cochaine ∂C définie par [5]

$$\begin{aligned}\partial C\left(u_0,...,u_i\right) &= \frac{1}{i!}\varepsilon_{0...i}^{\lambda_0...\lambda_i}\left\{u_{\lambda_0},C\left(u_{\lambda_0},...,u_{\lambda_i}\right)\right\} \\ &- \frac{1}{2\left(i-1\right)!}\varepsilon_{0...i}^{\lambda_0...\lambda_i}C\left(\left\{u_{\lambda_0},u_{\lambda_1}\right\},u_{\lambda_2},...,u_{\lambda_i}\right)\end{aligned}$$

où $u_{\lambda_i}\in N$. L'espace des 1-cocycles de N est, par définition, l'espace des dérivations de N, celui des 1-cocycles exacts est celui des dérivations intérieures de N.

Une i-cochaine C est dite locale si, pour tout élément u_1 de N tel que $u_1|_U$=0 sur un domaine U de W, on a $C\left(u_1,...,u_i\right)|_U=0$; si C est locale, ∂C est locale.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Poisson. On désigne par $\chi^p\left(\mathcal{A}\right)$ le $\mathcal{A}-$module des dérivations antisymétriques de $\mathcal{A}$.

On considère le complexe

$$\chi^0\left(\mathcal{A}\right)\overset{\delta^0}{\rightarrow}\chi^1\left(\mathcal{A}\right)\overset{\delta^{(1)}}{\rightarrow}\chi^2\left(\mathcal{A}\right)\overset{\delta^{(2)}}{\rightarrow}\chi^3\left(\mathcal{A}\right)\overset{\delta^{(3)}}{\rightarrow}\chi^4\left(\mathcal{A}\right)\overset{\delta^{(4)}}{\rightarrow}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \tag{2.3.3}$$

avec l'opérateur de cobord de Poisson $\delta^{(p)}$ défini par:

$$\begin{aligned}\delta^{(p)}A\left(F_0,..,F_p\right) &= \sum_{j=0}^{p}\left(-1\right)^j\left\{F_j,A\left(F_0,...,\hat{F}_j,...,F_p\right)\right\} \\ &+ \sum_{0\leq j\leq jp}^{p}\left(-1\right)^{i+j}Q\left(\left\{F_i,F_j\right\},F_0,...,\hat{F}_i...,\hat{F}_j,...,F_p\right)\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

L'espace de cohomologie de Poisson de dgré p est donné par la formule

$$HP^p\left(\mathcal{A}\right)=Ker\delta^{(p)}/\operatorname{Im}\delta^{(p-1)}. \tag{2.3.5}$$

La différentielle de Poisson est fournie peut par le crochet de Schouten: c'est l'application $[.,.]_S$ définie par

$$\begin{aligned}\chi^p\left(\mathcal{A}\right)\times\chi^q\left(\mathcal{A}\right)&\rightarrow\chi^{p+q+1}\left(\mathcal{A}\right)\\ \left(P,Q\right)&\mapsto\left[P,Q\right]_S,\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

où

$$\begin{aligned}\left[P,Q\right]_S\left(F_1,..,F_{p+q+1}\right) &= \sum_{\sigma\in\vartheta_{q,p-1}}\varepsilon\left(\sigma\right)P\left(Q\left(F_{\sigma(1)},..,F_{\sigma(q)}\right),F_{\sigma(q+1)},..,F_{\sigma(p+q+1)}\right) \\ &- \left(-1\right)^{(p-1)(q-1)}\sum_{\sigma\in\vartheta_{p,q-1}}\varepsilon\left(\sigma\right)P\left(Q\left(F_{\sigma(1)},..,F_{\sigma(p)}\right),F_{\sigma(p+1)},..,F_{\sigma(p+q-1)}\right),\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

et où $\vartheta_{p,q-1}$ représente l'ensemble des permutations $(p, q-1)$ −shuffles de l'ensemble $[[1, p+q-1]]$ (on pose $S_{p,1}\grave{a}S_{-1,q} = 0$) .

On a alors $\delta^{(p)}(Q) = -[Q, \{.,.\}]_S$ pour tout $Q \in \chi^p(\mathcal{A})$.

2.3.1 Déformations associatives et cohomologie de Hochshild

- Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{A}_0 = (V, \mu_0)$ une algèbre associative. On appelle **déformation formelle** d'une algèbre $\mathcal{A}_0$ une multiplication μ de $\mathbb{K}[[t]]$ sur le $\mathbb{K}[[t]]$-module $\mathbb{V}$, où $\mathbb{K}[[t]]$ est l'anneau des série formelle à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ceci revient à se donner $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaire $\mu_t : V[[t]] \times V[[t]] \to V[[t]]$ et définies par

$$\mu_t = \sum_{i\geq 0} \mu_i t^i, = \mu_0 + t\mu_1 + t^2\mu_2 + ... + t^n\mu_n + .. \tag{2.3.8}$$

où $\mu_{i=0,1,2,...} : V \times V \to V$, sont des applications bilinéaires vérifiant:

$$\forall\ x, y, z \in V \quad \mu_t(x, \mu_t(y, z)) - \mu_t(\mu_t(x, y), z) = 0. \tag{2.3.9}$$

La k^{ieme} équation s'écrit:

$$\delta_{\mu_k =} \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i \circ \mu_{k-i}$$

Le système peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k} \mu_i(x, \mu_{k-i}(y, z)) - \mu_i(\mu_{k-i}(x, y), z) = 0. \qquad k = 0, 1, 2, ... \end{cases} \tag{2.3.10}$$

L'équation suivante pour $k = 0$ correspond à l'associativité de μ_0 et celle pour $k = 1$ s'écrit

$$\mu_1(x, \mu_0(y, z)) - \mu_1(\mu_0(x, y), z) + \mu_0(x, \mu_1(y, z)) - \mu_0(\mu_1(x, y), z) = 0$$

Elle traduit le fait que μ_1 pour la *cohomologie* de *Hochschild*. Et le plus général si $k = p$ et supposons que μ_p est le premier coefficient **non** nul après μ_0 dans la déformation μ_t,alors μ_p l'infinitésimal dans la déformation μ_t.

La multiplication $\mu(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)(\mu_1(x, y) - \mu_1(y, x))$ définit une structure de Poisson sur l'espace vectoriel où $\mu_n \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{A})$.

- Deux déformations $(\mathcal{A}[[t]], \mu)$ $(\mathcal{A}[[t]], \mu')$ sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme formel

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 t + ... + \varphi_n t^n + ... \tag{2.3.11}$$

avec $\varphi_0 = id_{\mathcal{A}}$ ($Identité\ sur\ \mathcal{A}$) et $\varphi_n \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ tel que

$$\mu'(a,b) = \varphi_t^{-1}(\mu(\varphi(a),\varphi(b))) \qquad \forall a,b \in \mathcal{A}$$

Une déformation de $\mathcal{A}$ est appelée *triviale* si elle est équivalente à $(\mathcal{A}[[t]],\mu_0)$. Une algèbre associative $\mathcal{A}$ est dite rigide si toute déformation de $\mathcal{A}$ est triviale.

Il y a un lien entre **déformation formelle** et cohomologie de Hochshild dans le cas *algèbre associative*, cohomologie de Chevalley-Eilenberg dans le cas d'une *algèbre* de *Lie*.

Maintenant, on suppose que $\mathcal{M}$ est munie d'une structure de Poisson Λ et on considère la structure d'algèbre de Lie induite par Λ sur $N = C^\infty(\mathcal{M})$.

2.3.2 Déformation des algèbres de Lie et cohomologie de Chevalley

- Une application bilinéaire de $N \times N$ dans $N[[\lambda]]$ définie par la série formelle

$$\{f,g\}_\lambda = \{f,g\} + \sum_{r\geq 1} \lambda^r C_r(f,g) \tag{2.3.12}$$

où les C_r sont des applications bilin'aires alternées de $N \times N$ dans N et une **déformation formelle** de l'algèbre de Lie $(N,\{,\})$ si son extension naturele en une application bilinéaire de $N[[\lambda]] \times N[[\lambda]]$ satisfait formellement l'identité de Jacobi:

$$\{\{f,g\}_\lambda,h\}_\lambda + \{\{g,h\}_\lambda,f\}_\lambda + \{\{h,f\}_\lambda,g\}_\lambda = 0 \tag{2.3.13}$$

- Deux **déformation formelle** $\{,\}_\lambda$ et $\{,\}'_\lambda$ de l'algèbre de Lie N sont dites équivalentes s'il existe une série formelle

$$T = Id + \sum_{s\geq 1} \lambda^s T^s \tag{2.3.14}$$

où les T_s sont à nouveau des endomorphisme de N satisfaisant formellement à:

$$T\left(\{f,g\}'_\lambda\right) = \{Tf,Tg\}_\lambda \tag{2.3.15}$$

L'identité de Jacobi et la cohomologie de Chevalley sont les homologues pour les **déformation formelle** des algèbres de Lie de la condition d'associative et de la cohomologie de Hochschild pour les déformations formelles associatives.

2.3.3 Espace des Phases déformé (Crochet de Poisson déformé) :

Dans ce cas la déformation s'introduit d'une manière un peu différente que dans la mécanique quatinque. On modifie le produit de Poisson en gardant la base $\mathcal{A}_0$ toujours constituées de nombres habituels. C'est à dire, le crochet de Poisson est maintenant défini par la même formule (2.2.15), mais la matrice symplectique est modifiée $\Lambda_{ij}^{(0)} \rightarrow \Lambda_{ij}^{déf}$. Le crochet de Poisson est donné de manière générale sous la forme

$$\left\{g\left(z\right), f\left(z\right)\right\}_{déf} = \left(\nabla_z g\right) \Lambda^{déf} \left(\nabla_z f\right). \tag{2.3.16}$$

en particulier

$$\left\{z_i, z_j\right\}_{déf} = \Lambda_{i,j}^{déf} \tag{2.3.17}$$

Nous pouvons réécrire (2.3.16) comme série formelle en λ:

$$\left\{f, g\right\}_{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{i,j=1}^{2n} \Lambda_{ij}^{déf}\left(z\right) \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j} \tag{2.3.18}$$

réécriré les equations (2.3.16) et (2.3.17) comme série formelle à l'ordre n respectivement:

$$\left\{f, g\right\}_{\lambda} = \left\{f, g\right\}_0 + \lambda \left\{f, g\right\}_1 + \lambda^2 \left\{f, g\right\}_2 + ... + \lambda^n \left\{f, g\right\}_n \tag{2.3.19}$$

$$\Lambda_{ij}^{déf}\left(z\right) = \Lambda_{ij}^{(0)}\left(z\right) + \lambda \Lambda_{ij}^{(1)}\left(z\right) + \lambda^2 \Lambda_{ij}^{(2)}\left(z\right) + ... + \lambda^n \Lambda_{ij}^{(n)}\left(z\right) \tag{2.3.20}$$

où $\Lambda_{ij}^{(0)}\left(z\right) = \left\{f, g\right\}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice symplectique d'une système non déformé c'est à dire dans l'**Espace des Phases** habituel La matrice Λ est appelée matrice de Poisson. Elle est antisymétrique, non dégénérée et en général elle peut dépendre de z. Les identités de Jacobi pour le crochet donne:

$$\Lambda_{\mu\nu}\left(z\right) \frac{\partial \Lambda_{\alpha\beta}\left(z\right)}{\partial z_\mu} + \Lambda_{\mu\beta}\left(z\right) \frac{\partial \Lambda_{\nu\alpha}\left(z\right)}{\partial z_\mu} + \Lambda_{\mu\alpha}\left(z\right) \frac{\partial \Lambda_{\mu\beta}\left(z\right)}{\partial z_\mu} = 0 \tag{2.3.21}$$

La propriétes du crochet de Poisson déformé:

une structure de Poisson sur une variété différentiel $\mathcal{M}$ est définie par la donnée d'une application de fonction $C^\infty(\mathcal{M}, R) \times C^\infty(\mathcal{M}, R)$ dans $C^\infty(\mathcal{M}, R)$, notée $(g, f)_{déf} \rightarrowtail \left\{g, f\right\}_{déf}$, vérifiant les propriétes suivantes:

1. cette application est bilinéire, antisymétrique

$$\left\{g, f\right\}_{\lambda} = - \left\{f, g\right\}_{\lambda} \tag{2.3.22}$$

et vérifie l'identité de Jaccobie

$$\left\{\left\{f, g\right\}_{\lambda}, h\right\}_{\lambda} + \left\{\left\{g, h\right\}_{\lambda}, f\right\}_{\lambda} + \left\{\left\{h, f\right\}_{\lambda}, g\right\}_{\lambda} = 0 \tag{2.3.23}$$

2. Elle vérifie la compatiblité

$$\{f, gh\}_\lambda = \{f, g\}_\lambda h + g \{f, h\}_\lambda . \tag{2.3.24}$$

On considère maintenant un système hamiltonien défini sur la variété symplectique précédente, le crochet de Poisson dans l' **Espace des Phases non commutative** dans le cas de $N = 2$ qui va nous intéresser ultérieurement est:

$$\{x_i, p_i\} = \Lambda_{\theta\sigma}(x_i, p_i) = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3.25}$$

où θ est une paramètres des déformations (**non commutativité**). Il n'est pas diffcile de s'assurer que le cas **commtatif** s'obtient en prenant la limite $\theta = 0$. Les crochets de Poisson dans ce cas defini par

$$\{x_i, x_j\}_\theta = \Theta_{ij}, \qquad \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \text{et } \{x_i, p_j\} = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, ..., N \tag{2.3.26}$$

avec Θ et une matrice antisymétrique à deux dimension est:

$$\Theta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3.27}$$

Cet matrice contiennent en général de paramètre indiquant une **non commutativé** totale à la Poisson de l' **Espace des Phases** déformé. Nous savons que le crochet déformé de l'équation (2.3.27) est on peut écrire en série de θ :

$$\{x_i, x_j\}_\theta = \delta_{ij} + \frac{\theta^{i,j}}{2}\partial_i f \partial_j g + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \theta^{i,j}\theta^{k,l}\partial_i\partial_k f \partial_j\partial_l g + ... \tag{2.3.28}$$

cette déformation est vérfiée l'antisymmétrique et l'identité de Jaccobi, c'est à dire est vérifiée les condition de l'algèbre de Poisson.

2.4 Principe d'action classique:

Le principe d'action joue un rôle primordial en mécanique classique. Par son biais on peut facilement généraliser les théories. Son contenu stipule que l'existence d'une fonctionnelle scalaire dite action du système suffit à elle seule la détermination de l'évolution physique suivant un principe variationnel. Par ailleurs, dans notre thèse nous sommes intéressés par la méthode de quantification de Feynman laquelle utilise cette action. Il serait alors préferable d'étendre ce principe d'action au cas de l'espace des phases **non commutatif**.

2.4.1 Mécanique classique habituelle:

Le principe de moindre action sur une trajectoire donnée s'écrit mathématiquement sous la forme suivant: $\delta S = 0$, avec S est l'action classique entre t_1 et t_2, en supposant quecette quantité différentiable en fonction des $x_i(t)$ sur la trajectoire effectivement suivie par le système mécanique entre t_1 et t_2, l'action est définie par

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x.\dot{x}) \tag{2.4.1}$$

$L(x.\dot{x})$ étant le Lagrangien du système. Pour une variation arbitraire δx on a

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta S}{\delta x(t)} \delta x(t) \tag{2.4.2}$$

pour $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, donne les dites équations de mouvement de Lagrange:

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{2.4.3}$$

Ce même principe peut s'exprimer dans l'espace des phases. On introduit une autre variable définie par $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, où p est le moments conjugué de la coordonnée x.On peut alors construire une fonction dite hamiltonienne, déduite du Lagrangien précédent par la transformation de Legendre :

$$H = p\dot{x} - L \tag{2.4.4}$$

Un calcul variationnel direct montre qu'on obtient les équations d'Hamilton suivantes:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} \tag{2.4.5}$$

au bien en utilisant la notation unifée:

$$\dot{z} = \Lambda \nabla_z H(z) \tag{2.4.6}$$

L'évolution d'une grandeur physique quelconque $F(z)$ sera alors donnée par

$$\frac{dF}{dt} = \{F(z), H(z)\} \tag{2.4.7}$$

L'action s'écrira aussi comme

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2} z \Lambda^{-1} \dot{z} - H(z)\right) \tag{2.4.8}$$

Les équations classiques (2.4.5) s'obtiennent alors comme $\delta_z S = 0$.

2.4.2 Mécanique classique déformé (non commutative):

Ce même principe d'action se génaralise au cas de l'espace des phases **non commtatif** en faisant le remplaçement:

$$\Lambda \rightarrow \Lambda^{déf} \tag{2.4.9}$$

Autrement dit,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2} z \left(\Lambda^{déf} \right)^{-1} \dot{z} - H(z) \right) \tag{2.4.10}$$

Les équations de mouvement deviennent

$$\dot{z} = \Lambda^{déf} \nabla_z H(z) \tag{2.4.11}$$

où $H(z)$ a exactement la forme que dans le cas **commtatif** puisqu'on ne change pas de base $\mathcal{A}_0$ mais juste on déforme les crochets de Poisson. L'évolution des observables est donnée par,

$$\frac{dF}{dt} = \{F(z), H(z)\}_{déf} \tag{2.4.12}$$

En utilisant (2.4.11), l'expression (2.4.12) peut être écrite sous une forme comme série formelle en introduisant le crochet de Poisson de deux fonctions $z = z(x, p, t)$ et $H = H(x, p, t)$ des coordonnées et impulsions généralisées et du temps dans l'**Espace des Phases** déformé, défini par

$$\{z, H\}_{déf} = \{z, H\}_0 + \lambda \{z, H\}_1 + \lambda^2 \{z, H\}_2 + ... + \lambda^n \{z, H\}_n \tag{2.4.13}$$

$$= \left(\Lambda_0 + \lambda \Lambda_1 + \lambda^2 \Lambda_2 + ... + \lambda^n \Lambda_n \right) \nabla_z H(z) \tag{2.4.14}$$

Donc les équation canonique de Hamilton dans l'**Espace des Phases** déformé deviennt alors:

$$\dot{z} = \left(\Lambda_0 + \lambda \Lambda_1 + \lambda^2 \Lambda_2 + ... + \lambda^n \Lambda_n \right) \nabla_z H(z) \tag{2.4.15}$$

On considère des déformations infinitésimales à l'ordre λ de l'équation (2.4.15) est

$$\frac{dz}{dt} = (\Lambda_0 + \lambda \Lambda_1) \frac{\partial H}{\partial z} \tag{2.4.16}$$

Considérons un système à 4 coordonnées $(x_i(t), p_i(t))$, définissant dans ce cas un point dans l'espace des phases déformé. Cet espace des phases est naturellement muni de la forme

symplectique, définie par

$$dx_i \wedge dp_i = \Lambda^{déf} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & -1 & -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \rightarrow \left(\Lambda^{déf}\right)^{-1} = \frac{1}{1-\theta\sigma} \begin{pmatrix} 0 & \sigma & -1 & 0 \\ -\sigma & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.17}$$

Supposons de plus que les systèmes sont soumises à une force qui dérive de l'énergie potentielle $V(x_1, x_2)$. L'Hamiltonien s'écrit alors

$$H\left(x_1, x_2, p_1, p_2\right) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + V(x_1, x_2) \tag{2.4.18}$$

Les équations canoniques conduisent alors à

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & -1 & -\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} \end{pmatrix} \tag{2.4.19}$$

ou bien explicitement:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} + \theta \frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{p_1}{m} + \theta \frac{\partial V\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2} \tag{2.4.20}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} - \theta \frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{p_2}{m} + \theta \frac{\partial V\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1} \tag{2.4.21}$$

$$\dot{p}_1 = \sigma \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial x_1} = \sigma \frac{p_2}{m} + \frac{\partial V\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1} \tag{2.4.22}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\sigma = -\sigma \frac{p_1}{m} - \frac{\partial V\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2} \tag{2.4.23}$$

dans cas de deux l'oscillateurs harmoniques independants et identitique le potentieles est $V\left(x_1, x_2\right) = \frac{m\omega^2}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$, donc les dérinères équations deviennents alors

$$\dot{x}_1 = \frac{p_1}{m} + \theta m\omega^2 x_2 \tag{2.4.24}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{p_2}{m} + \theta m\omega^2 x_1 \tag{2.4.25}$$

$$\dot{p}_1 = \sigma \frac{p_2}{m} + m\omega^2 x_1 \tag{2.4.26}$$

$$\dot{p}_2 = -\sigma \frac{p_1}{m} - m\omega^2 x_2 \tag{2.4.27}$$

Remarquons que là encore la théorie est déterministe et en principe l'évolution du système est complétement déterminée à partir des conditions initiales. L'état du système est

donné par le vecteur z vérifiant une équation différentielle du type (2.4.12). Il n'y a pas lieu de remplacer ce vecteur par un opérateur. Ceci est la tâche de la mécanique quantique **non commutative**. Ses composantes sont alors indépendantes.

2.4.3 Mécanique quantique non commutative

Pour aborder le cas de la mécanique quantique **non commutative**, nous allons suivre l'exemple de la quantification canonique, ie, changer la base **commutative** $\mathcal{A}_0$ par la base **non commuative** $\mathcal{A}_\hbar$ en remplaçant les simples c-nombres $\{x_i, p_i\}$ par des opérateurs agissant en général sur un espace qu'on admettra de $\mathcal{H}ilbert$ (cette question sort du cadre de notre thèse) via

$$\{f, g\}_{déf} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}\left[O_f, O_g\right]_{déf} \tag{2.4.28}$$

où O_f, et O_g (observables quantiques) dénotent les opérateurs associés à f et g (observables classiques) et $[.,.]$ le commutateur de Heisenberg.

La notion de mécanique quantique sur l'espace des configurations, **non commtatif**, ou plus simplement mécanique quantique **non commutative**, se réfère à une mécanique quantique dont l'algèbre des coordonnées et des impulsions est non canonique. En toute généralité on a :

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\Theta_{ij}, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\Sigma_{ij} \qquad , [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \qquad , \text{avec } i, j = 1, ..., d \tag{2.4.29}$$

où Θ et Σ sont respectivement paramètre la **non commutativité** des positions et des impulsions et sont toutes deux des matrices antisymétriques constantes. La **non commutativité** des impulsions peut être interprétée comme la présence d'un champ magnétique, Σ_{ij} est alors simplement la partie spatiale du champ électromagnétique. On constate en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que la **non commutativité** sur les positions mène aux relations d'incertitude :

$$\Delta\hat{x}_i \Delta\hat{x}_j \geq 2|\Theta_{ij}|. \tag{2.4.30}$$

Ces inégalités impliquent que, dans ce cadre là, une particule ne peut pas être localisée à l'intérieur d'un certain volume défini par les composantes de Θ. On voit alors que l'espace devient en quelque sorte "flou" ou muni d'une structure cellulaire. Ce volume caractéristique introduit naturellement une échelle minimale de longueur, c'est cette propriété qui a poussé Heisenberg à proposer la $MQNC$ comme une solution aux divergences ultraviolettes. La

non commutativité engendre également des difficultés pour la construction de *l'intégrale de chemins*. En effet, puisque les différentes composantes du vecteur position ne sont pas simultanément définies, il est impossible de dé- finir une base de vecteurs propres de l'opérateur position, ce qui invalide la méthode standard pour la construction de *l'intégrale de chemins*. La solution peut être, par exemple un système à 4 dimensions (x_1, x_2, p_1, p_2), de considérer des bases du type $|x_1, p_2\rangle$ ou $|x_2, p_1\rangle$ comme [10], ou une approche en termes *d'états cohérents* [14].

En mécanique quantique ordinaire, les relations de commutation canoniques dans l'**Espace des Phases** prennent la forme:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \qquad , [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \qquad , \text{avec } i, j = 1, ..., d \tag{2.4.31}$$

Considérons le cas d'une particule chargée électriquement (de charge) se propageant dans un espace tridimensionnel soumis à un champ magnétique constant décrit par un potentiel vecteur $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = rot\vec{A}$. Le hamiltonien d'un tel système est donné par

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \tag{2.4.32}$$

c'est-à-dire que l'on modifie l'impulsion canonique usuelle $\vec{p}$ en définissant une impulsion $\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$. Or, étant données les relations (2.4.31), les composantes de cette impulsion $\vec{\Pi}$ ne commutent plus entre elles,

$$[\Pi_i, \Pi_j] = -i\hbar\frac{e}{c}B_{ij}, \qquad avec \qquad B_{ij} = \partial A_i - \partial A_j \tag{2.4.33}$$

Dans le cas où le champ magnétique est constant suivant $\vec{e}_3$, $\vec{B} = B\vec{e}_3$, on peut utiliser les jauges suivantes pour le potentiel vecteur $\vec{A} = (A_1, A_2, 0)$: Jauge symétrique $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{x} \wedge \vec{B}$ et Jauge de Landau $\vec{A} = (0, Bx_1, 0)$: ou $\vec{A} = (-Bx_1, 0, 0)$. Le hamiltonien du système prend la forme $H = \frac{1}{2m}\left(\Pi_1^2 + \Pi_2^2\right)$, où nous avons omis le terme $\frac{1}{2m}\vec{p}_3^2$ décrivant le mouvement libre le long de la direction x_3. On a la relation de commutation $[\Pi_1, \Pi_2] = -i\hbar\frac{e}{c}B\mathbb{I}$. Or, si l'on définit un nouvel opérateur $x = \frac{c}{2e}\Pi_1$, la relation de commutation et le hamiltonien deviennent

$$[x, \Pi_2] = i\hbar\mathbb{I} \tag{2.4.34}$$

et

$$H = \frac{1}{2m}\Pi_2^2 + \frac{1}{2}\omega_B^2 x^2 \tag{2.4.35}$$

autrement dit, les opérateurs x et Π_2 sont des variables canoniquement conjuguées pour lesquelles le hamiltonien prend la forme de l'oscillateur harmonique de pulsation ω_B. Grâce

à cette remarque, on en déduit directement le spectre d'énergie

$$E_n = \hbar \frac{|eB|}{mc} \left(n + \frac{1}{2} \right) \qquad n = 0, 1, ..., \tag{2.4.36}$$

Le hamiltonien du système de Landau (c'est-à-dire une particule dans un plan soumis à un champ magnétique externe constant perpendiculaire au plan), peut s'écrire sous la forme d'un hamiltonien pour une particule libre dans un espace où les opérateurs de moment ne commutent plus entre eux.

Dans cette exemple, on se restreint au cas où la dimension d'espace est $d = 2$. Par conséquent, les matrices antisymétriques Θ_{ij} et B_{ij} sont proportionnelles au tenseur antisymétrique ε_{ij} (normalisé par $\varepsilon_{12} = 1$), $\Theta_{ij} = \varepsilon_{ij}$ et $B_{ij} = \varepsilon_{ij} B$ et l'algèbre des commutateurs (2.4.29) se réécrit donc comme:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\varepsilon_{ij}\Theta, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\varepsilon_{ij} B \qquad , [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}\mathbb{I} + i\left(1 - \delta_{ij}\right) C_{ij}\mathbb{I}. \tag{2.4.37}$$

Par ailleurs $(C_{ij})_{ij\in\{1,2\}}$, est une matrice 2×2 à coefficients diagonaux nuls qu'on note par la suite $C = \begin{pmatrix} 0 & \phi_1 \\ -\phi_2 & 0 \end{pmatrix}$. Comme souligné plus haut, on assimilera les coefficients Θ, B, Φ_1 et Φ_2 à des constantes réelles afin de simplifier l'approche. Nous allons commencer par regarder des cas particuliers de l'algèbre bidimensionnelle.

Cas 2.4.1 $\Theta = \phi_1 = \phi_2 = 0$

Cette situation correspond au système de Landau évoqué précédemment. L'algèbre (2.4.37) se réécrit donc

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\varepsilon_{ij}\sigma \qquad , [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}\mathbb{I} \tag{2.4.38}$$

Différentes représentations sont données par différents choix de jauge $\left(A_1\left(\vec{x}\right), A_2\left(\vec{x}\right)\right)$ satisfaisant $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ et sont toutes de la forme

$$\hat{x}_i = x \qquad \text{et} \qquad \hat{p}_i = \Pi_i = p_i - A_i\left(\vec{x}\right). \tag{2.4.39}$$

Si l'on définit de nouveaux opérateurs

$$\hat{q}_i = \sigma \hat{x}_i - \varepsilon_{ij}\hat{p}_j \qquad (i, j \in \{1, 2\}) \tag{2.4.40}$$

l'algèbre (2.4.38) se transforme en une algèbre où les opérateurs $\hat{q}_i$ et $\hat{p}$ sont découplés,

$$[\hat{q}_1, \hat{q}_2] = -i\varepsilon_{ij}\sigma, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\varepsilon_{ij}\sigma, \qquad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}\mathbb{I}. \tag{2.4.41}$$

On arrive ainsi à deux algèbres sensiblement identiques. De manière plus générale, si l'on définit un changement d'opérateurs $\hat{x} \rightarrow \hat{q}$ de la forme $\hat{q} = \alpha\hat{x}_1 + \beta\hat{p}_2$ et $\hat{q} = \gamma\hat{x}_2 + \delta\hat{p}_1$, alors la condition (pour i et j quelconques) équivaut à une algèbre du type (2.4.41) dans laquelle $[\hat{q}_1, \hat{q}_2]$.

Cas 2.4.2 $\sigma = \phi_1 = \phi_2 = 0$

La situation est analogue au cas précédent, les rôles de $\hat{x}$ et $\hat{p}$ étant simplement inversés. C'est l'algèbre la plus fréquemment rencontrée dans la littérature,

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = -i\varepsilon\theta_{ij}, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \qquad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}\mathbb{I}. \tag{2.4.42}$$

On peut définir la représentation

$$\hat{p}_i = \hat{p} \qquad et \qquad \hat{x}_i = x - \tilde{A}_i\left(\vec{p}\right) \tag{2.4.43}$$

où les fonctions $\tilde{A}_i\left(\vec{p}\right)$ satisfont $\frac{\partial\tilde{A}_1}{\partial p_2} - \frac{\partial\tilde{A}_2}{\partial p_1} = \theta$. Le vecteur $\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)$ joue en quelque sorte le rôle de « potentiel vecteur » et θ le rôle d'un champ magnétique. Par analogie avec le cas précédent, on peut ainsi définir plusieurs « choix de jauge» pour $\widehat{x}$. De même, nous pouvons découpler cette algèbre en redéfinissant les opérateurs d'impulsion suivant la combinaison linéaire $\hat{k}_i = \theta\hat{p}_i - \varepsilon_{ij}\hat{x}_j$ afin d'arriver aux relations de commutation

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = -i\theta, \qquad [\hat{k}_1, \hat{k}_2] = -i\theta \qquad , [\hat{x}_i, \hat{k}_j] = 0 \tag{2.4.44}$$

Par conséquent, si l'on construit une algèbre à partir de deux copies commutantes de l'algèbre (et faisant intervenir respectivement θ et $-\theta$), le changement $\hat{k} \rightarrow \hat{p}$ nous permet d'aboutir à une algèbre de la forme (2.4.42). Les représentations 2.4.42 peuvent être construites à partir de là et, comme évoqué dans [**?**], la théorie des champs **non commutative** dans la limite d'une seule particule conduit naturellement à une algèbre du type de (2.4.44).

Cas 2.4.3 $\phi_1 = \phi_2 = 0$

c'est le cas qui m'intéresse dans notre travail, Si l'on combine les deux exemples précédents, on aboutit à l'algèbre

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = -i\varepsilon_{ij}\theta, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\varepsilon_{ij}\sigma, \qquad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}\mathbb{I}. \tag{2.4.45}$$

Donc on peut donner la réalisation,

$$\hat{x}_1 = x \qquad \text{et} \qquad \hat{p}_1 = p_1 + \sigma \not{x}_2 \tag{2.4.46}$$

$$\hat{x}_2 = x_2 + \theta p_1 \qquad \text{et} \qquad \hat{p}_2 = p_2 \tag{2.4.47}$$

qui correspond en quelque sorte à un choix de jauge de Landau pour $\overrightarrow{\hat{x}}$. Mais on peut aussi choisir une jauge symétrique en utilisant la représentation donnée en [16], [14] pour $\theta \neq 0$

$$\hat{x}_1 = ax_1 - \frac{\theta}{2a}p_2 \qquad \text{et} \qquad \hat{p}_1 = cp_1 + d \not{x}_2 \tag{2.4.48}$$

$$\hat{x}_2 = ax_2 + \frac{\theta}{2a}p_1 \qquad \text{et} \qquad \hat{p}_2 = p_2 - dx_1 \tag{2.4.49}$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ $\quad c = \frac{1}{2a}\left(1 \pm \sqrt{\kappa}\right)$ et $d = \frac{1}{2a}\left(1 \mp \sqrt{\kappa}\right)$. Ici, $\kappa = 1 - \sigma\theta$ est un paramètre qui reviendra souvent par la suite. Les expressions 2.4.48 et 2.4.49 sont inversibles à condition que le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial\left(\vec{x}, \vec{p}\right)}{\partial\left(\overrightarrow{\hat{x}}, \overrightarrow{\hat{p}}\right)} = \kappa \tag{2.4.50}$$

ne s'annule pas. Cela interdit d'avoir $\sigma = \frac{1}{\theta}$. Ce cas singulier [84, 91] est un cas particulier sur lequel nous reviendrons ultérieurement et pour lequel la limite **commutative** n'existe pas $(\theta, \sigma) \rightarrow 0$. Le choix de jauge symétrique (2.4.48) et (2.4.49) possède une propriété intéressante si l'on regarde les rotations. En mécanique quantique, le générateur infinitésimal des rotations est l'opérateur de moment cinétique $L = \varepsilon_{jk}x_j p_k = x_1 p_2 - x_2 p_1$ avec les relations de commutation

$$[L, x_i] = i\varepsilon_{ij}x_j, \qquad [L, p_i] = i\varepsilon_{ij}p_j \qquad avec \qquad i, j = 1, 2. \tag{2.4.51}$$

Si l'on se sert des relations (2.4.48) et (2.4.49) pour réécrire les opérateurs $\vec{x}$ et $\vec{p}$ en termes de $\widehat{\vec{x}}$ et $\widehat{\vec{p}}$, l'opérateur de moment cinétique prend la forme

$$L = \frac{1}{\kappa}\left(\varepsilon_{ij}\widehat{\vec{x}}_i\widehat{\vec{p}}_j + \frac{\sigma}{2}\widehat{\vec{x}}^2 + \frac{\theta}{2}\widehat{\vec{p}}^2\right) \tag{2.4.52}$$

qui se trouve correspondre au générateur infinitésimal des rotations dans le plan **non commtatif**,

$$[L, \hat{x}_i] = i\varepsilon_{ij}\hat{x}_j, \qquad [L, \hat{p}_i] = i\varepsilon_{ij}\hat{p}_j \qquad avec \qquad i, j = 1, 2. \tag{2.4.53}$$

Par conséquent, si le hamiltonien ordinaire $H\left(\vec{x}, \vec{p}\right)$ est invariant sous les rotations ($[L, H] = 0$), le hamiltonien dans espace **non commtatif** $\hat{H}\left(\widehat{\vec{x}}, \widehat{\vec{p}}\right)$ est obtenu à partir des définitions

(2.4.48) et (2.4.49) le sera également $\left(\left[L, \hat{H}\right] = 0\right)$. L'algèbre (2.4.45) peut aussi être découplée de manière analogue aux deux cas précédents en effectuant (*pour* $\theta \neq 0$) le changement [**?**], [18]

$$k_i = p_j - \frac{1}{\theta}\varepsilon_{ij}x_j \tag{2.4.54}$$

On obtient alors deux algèbres découplées mais de forme similaire,

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = -i\theta, \qquad [\hat{k}_1, \hat{k}_2] = -i\frac{\kappa}{\theta} \qquad , [\hat{x}_i, \hat{k}_j] = 0 \tag{2.4.55}$$

Ainsi, si $\kappa = 0$, c'est-à-dire $\sigma = \frac{1}{\theta}$, les $\hat{k}_i$ commutent avec tous les générateurs de l'algèbre. D'après le *lemme* de *Schur*, cela entraîne qu'ils sont proportionnels à l'identité $\hat{k}_i = \lambda_i \mathbb{I}$, pour un certain $\lambda_i \in R$. En conséquence de quoi, il ne reste plus qu'un seul commutateur **non** trivial, à savoir

$$[\hat{x}_1, \hat{\Pi}] = 0 \qquad \text{où} \qquad \hat{\Pi} = \frac{1}{\theta}\hat{x}_2 \tag{2.4.56}$$

L'algèbre se réduit donc à celle d'un système mécanique unidimensionnel. Enfin, le cas particulier $\sigma = -\theta$ a également été étudié et une représentation possible est décrite dans [15].

2.5 Principe d'action en mécanique quantique

Le principe d'action s'étend aussi au cas de la mécanique quantique mais d'une manière un peu subtile.C'est .Dirac le premier qui a pu faire le lien entre les transformations canonique de la mécanique classique et les transformations unitaires de la mécanique quantique. Ce lien génial a été à l'origine de l'élaboration de l'intégrale de chemins de Feynman dite principe d'action de l'évolution quantique. Ce principe stipule que toute l'évolution quantique est donnée au moyen d'une amplitude de transition laquelle est formulée comme étant une somme sur toutes les possibilités de transition (dans l'espace-temps la possibilité est un chemin). Ce principe contient en lui l'étrange principe de superposition, principe fondamental de la mécanique quantique. L'action classique étant la phase de cette transition pour un temps infinitésimal.

2.6 Transformation canoniquen dans l'espace des phases déformées

Les equations canoniques du mouvement (2.2.16) dans l'espace déformée peuvent aussi être déduites directement d'un principe variationnel, appelé principe d'Hamilton modifié.

Nous savons que l'action d'un système mécanique dans l'espace des phases déformé peut s'exprimer comme suit:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \xi \left(\Lambda^{déf} \right)^{-1} \dot{\xi} - H\left(\xi\right) \right) dt \tag{2.6.1}$$

Le principe d'Hamilton modifié, caractérisé par l'exigence que la variation de l'intégrale suivante soit nulle, c'est-à-dire :

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} \xi \left(\Lambda^{déf} \right)^{-1} \dot{\xi} - H\left(\xi\right) \right) dt = 0 \tag{2.6.2}$$

En notons que les variables ξ_i etant à présent considérées comme indépendantes, il y a lieu d'écrire un système d'équation d'Euler-Lagrange pour chacune d'entre elles, c'est-à-dire:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \xi \left(\Lambda^{déf} \right)^{-1} \dot{\xi} - H\left(\xi\right) \right)}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \xi \left(\Lambda^{déf} \right)^{-1} \dot{\xi} - H\left(\xi\right) \right)}{\partial \xi} \tag{2.6.3}$$

ou bien:

$$\dot{\xi} = \Lambda^{déf} \frac{\partial H\left(\xi\right)}{\partial \xi} \tag{2.6.4}$$

L'équation (2.6.4) est bien identique à l'équation canonique (2.2.16).

La transformation canonique est fournie par la notion de « fonction génératrice ». Elle repose sur le fait que la transformation canonique qui transforme les variables dynamiques $\xi(q_i, p_i; t) \rightarrow \eta(Q_i, P_i; t)$ doit notamment conserver la structure des équations de mouvement comme crochets de Poisson avec le hamiltonien. Ce qui ne signifie pas forcément que l'on conserve le hamiltonien. En revanche la trajectoire qui rend l'action stationnaire doit être la même, qu'elle soit paramétrisée par les ancienne ou les nouvelles variables, ce qui conduit à écrire:

$$\delta S = \delta \int \left(\frac{1}{2} \xi \left(\Lambda^{déf} \right)^{-1} \dot{\xi} - \mathcal{H}\left(\xi\right) \right) dt = \delta \int \left(\frac{1}{2} \eta \left(\Lambda^{déf} \right)^{-1} \dot{\eta} - \mathcal{H}'\left(\eta\right) \right) dt = 0 \tag{2.6.5}$$

où $\Lambda^{déf}$ est la matrice symplectique dans l'espace des phases déformé, et où l'équation (2.6.5) est sous entendu que $\mathcal{H}$ est fonction des anciennes variable et du temps, et $\mathcal{H}'$ des nouvelles variables et du temps. Une condition suffisante l'existence d'une fonction F dont la différentielle soit donnée par:

$$\left(\sum_{i,j} \frac{1}{2} \xi_i \left(\Lambda^{déf} \right)^{-1} \dot{\xi}_j - \mathcal{H}\left(\xi\right) \right) dt = \left(\sum_{i,j} \frac{1}{2} \eta_i \left(\Lambda^{déf} \right)^{-1} \dot{\eta}_j - \mathcal{H}'\left(\eta\right) \right) dt = dF^{déf} \tag{2.6.6}$$

en sorte que la différence des deux variations soit de la forme $\int \frac{dF^{déf}}{dt} = 0$. La fonction $F = F\left(\xi(q_i, p_i); \eta(Q_i, P_i)\right)$ est alors appelée « générateur » de cette famille des transformations canoniques .

Il y a 4 classes de fonctions génératrices intéressantes mêlant les deux jeux de coordonnées; $F_1(q,Q,t)$, $F_2(q,P,t)$, $F_3(p,Q,t)$ et $F_4(p,P,t)$. Le choix dépend des circonstances. A n degrés de liberté, le nombre de fonctions génératrices mêlant les anciennes et les nouvelles coordonnées est évidement beaucoup plus élévé, mais la méthode qui suit reste toujours la même.

Théorème 2.6.1 *Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux variétés symplectique (ou présymplectique) de même dimension n et de même rang; soit X, X' des points de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ respectivement. Il existe alors un transformation trivial F, de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{V}'$, telle que $F(X) = X'$, où $F(X)$ est un isomporphisme.*

Définition 2.6.1 *La transformation canonique est une transformation de contact satisfaisant la condition* 2.6.5. *On appelle F la fonction génératrice de la transformation canonique, définie sur l'espace des phases du système. L'importance de la fonction génératrice réside dans le fait que sa connaissance détermine complètement la transformation canonique. Ceci n'est pas évident de la contrainte canonique.*

Exemple 2.6.1 *Soit un système à deux dimensions dans l'espace des phases $(x_1, x_2; p_1, p_2)$ déformé sont décrits par l'algèbre suivantes*

$$\{p_i, x_j\} = \delta_{ij}; \qquad \{x_i, x_j\} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \qquad et \qquad \{p_i, p_j\} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6.7}$$

l'expression de l'action classique dans l'espace des phases non commutatif comme ci-dessus prond alors la forme suivante

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^{2} \left(p_i \left(\Lambda^{déf} \right)^{-1} \dot{q}_i - \mathcal{H}(p,q) \right) \right) \tag{2.6.8}$$

où $\left(\Lambda^{déf} \right)^{-1} = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} -\sigma & -1 \\ 1 & \theta \end{pmatrix}$, $\kappa = 1 - \theta\sigma$ *et* $p = (x_2, p_1)$, $q = (x_1, p_2)$. *Le passage* $(p,q) \to (P,Q)$, *où les nouvelles variables (P,Q) sont décrit par le même crochet de Poisson,*

$$\{P_i, Q_j\} = \delta_{ij}; \qquad \{Q_i, Q_j\} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \qquad et \qquad \{P_i, P_j\} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6.9}$$

et l'action est

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^{2} P_i \left(\Lambda^{déf} \right)^{-1} \dot{Q}_i - \mathcal{H}'(P,Q) \right) \tag{2.6.10}$$

où $P = (X_2, P_1)$ *et* $Q = (X_1, P_2)$, *la relation la plus générale entre ces deux intégrands s'écrira sous la forme suivante (le principe de moindre action)* :

$$\sum_{i=1}^{2} p_i \left(\Lambda^{déf}\right)^{-1} \dot{q}_i - \mathcal{H}(p,q) = \sum_{i=1}^{2} P_i \left(\Lambda^{déf}\right)^{-1} \dot{Q}_i - \mathcal{H}'(P,Q) + \frac{dF}{dt} \tag{2.6.11}$$

où la fonction $F = F(q, Q; t)$, *En effet, le terme additionnel* $\frac{dF}{dt}$ *ne contribue a la variation de l'intégrale d'action qu'aux extrémités de l'intervalle temporel, c'est-a-dire en* t_1 *et* t_2. *Cette contribution s'annule puisque* F *est une fonction de* (q, p, t) *ou* (Q, P, t) *ou d'un mélange quelconque de ces coordonnées de l'espace des phases, qui, dans le contexte du principe de Hamilton (modifie), ont toutes une variation nulle en* t_1 *et* t_2. *Legendre de cette fonction alors est:*

$$\frac{dF(q,Q;t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{2.6.12}$$

ensuite

$$\begin{aligned} p_i &= \Lambda^{déf}\frac{\partial F}{\partial q_i} \\ &= \mathbb{I}\frac{\partial F}{\partial q_i} + \Lambda^{(1)}\frac{\partial F}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

et

$$\begin{aligned} P_i &= \Lambda^{déf}\frac{\partial F}{\partial Q_i} \\ &= \mathbb{I}\frac{\partial F}{\partial Q_i} + \Lambda^{(1)}\frac{\partial F}{\partial Q_i} \end{aligned} \tag{2.6.14}$$

où $\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}$, $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\left(\mathcal{H}(p,q;t) - \mathcal{H}'(P,Q;t)\right)$$

Théorème 2.6.2 *Une transformation* $(p, q) \to (P, Q)$ *qui préserve les crochets de Poisson est une transformation canonique*

$$\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q} \tag{2.6.15}$$

a partir de (2.6.7) .

Théorème 2.6.3 (*de Liouville*): *L'évolution de l'espace des phases* $\{p_i, q_i\}$ *donne une représentation géométrique particulièrement utile en mécanique. Un point de l'espace des phases correspond à un état du système. Lorsque le système évolue, ce point se déplace dans l'espace des phases. On définit l'élément de volume dans l'espace des phases à* $2n$ *dimension par*

$$dV = dq_1...dq_n dp_1...dp_n \tag{2.6.16}$$

peut être considéré comme un élément infinitésimal de volume V *s'écrit* $V = \int ... \int dq_1...dq_n dp_1...dp_n$ *, nous affirmons que ce volume est invariant par rapport aux transformation canonique.*

$$\int ... \int dq_1...dq_n dp_1...dp_n = \int ... \int dQ_1...dQ_n dP_1...dP_n \tag{2.6.17}$$

En effet, dans le changement de variables, on a

$$\int ... \int dQ_1...dQ_n dP_1...dP_n = \int ... \int |\mathtt{J}|\, dq_1...dq_n dp_1...dp_n \tag{2.6.18}$$

où J est le jacobien de la transformation, déterminant formé avec toutes les dérivées partielles des nouvelles variables par rapport aux anciennes:

$$|\mathtt{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \tag{2.6.19}$$

que nous noterons

$$\mathtt{J} = \frac{\partial (Q_1...Q_n, P_1...P_n)}{\partial (q_1...q_n, p_1...p_n)} \tag{2.6.20}$$

Si l'on considère le cas simple d'un seul couple de variable canonique conjuguée $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, le jacobien n'est autre que le crochet de Poisson

$$\mathtt{J} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \{Q, P\} = 1 \tag{2.6.21}$$

La transformation étant canonique, elle est engendrée par une fonction par exemple $F_2(q, P, t)$ telle que $p_i = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_i}$ et $Q_i = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P_i}$. On a donc immédiatement:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_i}\right) = \left(\frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_j \partial P_i}\right) \tag{2.6.22}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j}\left(\frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i}\right) = \left(\frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial P_j \partial q_i}\right) \tag{2.6.23}$$

On peut donner un exemple dans le cas de déformation trivial.

Exemple 2.6.2 *Nous considérons un système à deux dimension dans l'espace des phases noncommutatif qui vérifie les propriétés algèbre déformée comme suivantes*

$$\{q_1, q_2\} = \theta; \quad \{p_1, p_2\} = \sigma \quad et \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

où θ *et* σ *sont les paramètres de la déformation. Notons maintenant* $X = (q_1, q_2; p_1, p_2)$ *, la forme symplectique de cette algèbre est*

$$\{X_i, X_j\} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & -1 & -\sigma & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6.24}$$

on peut écrire 2.6.24 *comme une série formelle de* $\mathbb{I}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ *où* ,

$$\Lambda^{déf} = \mathbb{I}^{(0)} + \lambda\Lambda^{(1)} \tag{2.6.25}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} \tag{2.6.26}$$

où Θ *et* Σ *sont* $n \times n$ *des matrices antisymétrique,*

Maintenant, on peut définir des nouvelles variables $Q = Q(q_i, p_i; \lambda)$, $P = P(q_i, p_i, \lambda)$ qui vérifie l'algèbre de Poisson non déformé.

Par le principe de moindre action et comme le paragraphe ci-dessus **??** on a,

$$\begin{aligned} &\delta \int \Big(\frac{1}{(1-\theta\sigma)} \{-dq_1 (p_1 - \sigma q_2) - dq_2 (p_2 + \sigma q_1) \\ &+ dp_1 (q_1 + \theta p_2) + dp_2 (q_2 - \theta p_1)\} - \mathcal{H} dt) \\ &= \delta \int \Big(\frac{1}{(1-\theta\sigma)} \{-dQ_1 (P_1 - \sigma Q_2) - dQ_2 (P_2 + \sigma Q_1) \qquad (2.6.27) \\ &+ dP_1 (Q_1 + \theta P_2) + dP_2 (Q_2 - \theta P_1)\} - \mathcal{H}' dt) , \qquad (2.6.28) \end{aligned}$$

la transformation canonique est caractérisée par sa fonction F qu'on s'appelle Fonction génératrice de la transformation, comme nous l'avons dit plus tôt, Dans cet exemple, nous pouvons écrire la dérivation complète de cette fonction comme suit

$$\begin{aligned} dF = &\frac{\partial F}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial F}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} dp_2 \\ &+ \frac{\partial F}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial F}{\partial Q_2} dQ_2 + \frac{\partial F}{\partial P_1} dP_1 + \frac{\partial F}{\partial P_2} dP_2 + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.6.29}$$

Nous remarquons les fonctions génératrices qui correspondent à ces transformations qui sont

$$\begin{aligned} dF &= dF_2\left(q_1, q_2; P_1, P_2\right) + dF_3\left(p_1, p_2; Q_1, Q_2\right) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_2}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial F_2}{\partial P_2}dP_2 + \frac{\partial F_2}{\partial P_1}dP_1 + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial F_3}{\partial Q_1}dQ_1 + \frac{\partial F_3}{\partial Q_2}dQ_1 + \frac{\partial F_3}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial F_3}{\partial p_2}dp_2 + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.6.30}$$

alors les équations canoniques sont

$$\frac{\left(p_1 - \sigma q_2\right)}{\kappa} = \frac{\partial F_2}{\partial q_1} \tag{2.6.31}$$

$$\frac{\left(p_2 + \sigma q_1\right)}{\kappa} = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \tag{2.6.32}$$

$$-\frac{\left(Q_1 + \theta P_2\right)}{\kappa} = \frac{\partial F_2}{\partial P_1} \tag{2.6.33}$$

$$-\frac{\left(Q_2 - \theta P_1\right)}{\kappa} = \frac{\partial F_2}{\partial P_2} \tag{2.6.34}$$

et

$$\frac{\left(P_1 - \sigma Q_2\right)}{\kappa} = \frac{\partial F_3}{\partial Q_1} \tag{2.6.35}$$

$$\frac{\left(P_2 + \sigma Q_1\right)}{\kappa} = \frac{\partial F_3}{\partial Q_2} \tag{2.6.36}$$

$$\frac{-\left(q_1 + \theta p_2\right)}{\kappa} = \frac{\partial F_3}{\partial p_1} \tag{2.6.37}$$

$$\frac{-\left(q_2 - \theta p_1\right)}{\kappa} = \frac{\partial F_3}{\partial p_2} \tag{2.6.38}$$

avec

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \mathcal{H} - \mathcal{H}' \tag{2.6.39}$$

La jacobien est

$$|\mathtt{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \frac{\partial P_2}{\partial q_1} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \frac{\partial P_1}{\partial q_2} & \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \frac{\partial P_2}{\partial p_1} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} & \frac{\partial P_1}{\partial p_2} & \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \end{vmatrix} \tag{2.6.40}$$

ou

$$|\mathtt{J}| = \begin{vmatrix} -\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_1 \partial P_1} - \theta\frac{\partial^2 F_3}{\partial q_1 \partial Q_2} & -\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_1 \partial P_2} + \theta\frac{\partial^2 F_3}{\partial q_1 \partial Q_1} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial q_1 \partial Q_1} - \sigma\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_1 \partial P_2} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial q_1 \partial Q_2} + \sigma\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_1 \partial P_1} \\ -\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_2 \partial P_1} - \theta\frac{\partial^2 F_3}{\partial q_2 \partial Q_2} & -\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_2 \partial P_2} + \theta\frac{\partial^2 F_3}{\partial q_2 \partial Q_1} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial q_2 \partial Q_1} - \sigma\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_2 \partial P_2} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial q_2 \partial Q_2} + \sigma\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_2 \partial P_1} \\ -\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_1 \partial P_1} - \theta\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_1 \partial Q_2} & -\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_1 \partial P_2} + \theta\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_1 \partial Q_1} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial p_1 \partial Q_1} - \sigma\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_1 \partial P_2} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial p_1 \partial Q_2} + \sigma\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_1 \partial P_1} \\ -\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_2 \partial P_1} - \theta\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_2 \partial Q_2} & -\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_2 \partial P_2} + \theta\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_2 \partial Q_1} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial p_2 \partial Q_1} - \sigma\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_2 \partial P_2} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial p_2 \partial Q_2} + \sigma\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_2 \partial P_1} \end{vmatrix} \tag{2.6.41}$$

donc on peut mettre les deux fonctions génératrices F_2 et F_3 sous la forme suivante

$$F_2 = \sum_{i,j=1,2} q_i P_j = \frac{1}{\kappa} \left(q_i \left(p_i \mp \sigma q_j \right) - \left(Q_j \pm \theta P_i \right) P_j \right), \tag{2.6.42}$$

$$F_3 = \sum_{i,j=1,2} p_i Q_j = \frac{1}{\kappa} \left(\left(P_i \mp \sigma Q_j \right) Q_i + p_i \left(q_i \pm \theta p_j \right) \right). \tag{2.6.43}$$

avec les nouvelles coordonnées

$$P_i \left(p, q \right) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \left(p_i \mp \sigma q_j \right), \tag{2.6.44}$$

$$Q_i \left(p, q \right) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \left(q_i \pm \theta p_j \right). \tag{2.6.45}$$

et les anciennes coordonnées

$$q_i \left(P, Q \right) = -\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \left(Q_i \pm \theta P_j \right), \tag{2.6.46}$$

$$p_i \left(P, Q \right) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \left(P_i \mp \sigma Q_j \right). \tag{2.6.47}$$

Comme conclusion de ce chapitre, nous avons présenté brièvement quelques méthodes de passage de la commutativité à la non commutativité et nous avons présenté aussi le cadre générale de la déformation formelle d'une algèbre associative et précisément, nous avons travaillé sur l'algèbre de Poisson. et nous avons utilisé le crochet de Poisson induit par le structure symplectique. nous avons Introduit la déformation formel sur un système classique, et dans cette cas nous avons présenté premièrement un petit rappel sur un système Hamiltonien habituel, on a montré la forme symplectique canonique $\Lambda = \sum_{i=0}^{n} dp_i \Lambda dq_i$ puis après nous avons trouvé l'équation de Hamilton ordinaire. Nous avons établi les équations canonique de Hamilton d'un système non déformé, ensuite, nous avons étudié, le système classique déformé avec une nouvelle forme symplectique $\Lambda^{déf} = \sum_{i=0}^{n} dp_i \Lambda dq_i$ et nous avons écrit cette forme comme série formelle de Λ_0 et nous avons étudié les déformations formelles de l'algèbre de Poisson envisagée. Enfin nous avons étudié aussi la transformation canonique dans le cas déformé, où on a trouvé les fonctions génératrices F_1, F_2, F_3 et F_4 dans le cas déformé avec des exemples.

Bibliographie

[1] F. Bayen, M. Flato, Fronsdal, C., Lichnerowicz, A. and D. Sternheimer, "Deformation Theory and Quantization I-II", Ann. Phys. (NY), (1978), 111, 61-110, 111-151

[2] K. Zahos. Cosmas , B. Fairlie. David , Thomas L. Curtright, "Quantum Mechanics In Phase Space", World Scientific Series in 20th Century Physics, 34

[3] A. Makhlouf Sur les algèbres associatives rigides Thése Mulhouse (1990).

[4] A. Makhlouf The irreducible components of the nilpotent associative algebras Revista Mathematica de la universidad Complutence de Madrid Vol 6 n.1, (1993).

[5] M. Gerstenhaber, "On the deformation of rings and algebras," Annals of Mathematics, vol. 79,pp. 59–103, 1964.

[6] M. Gerstenhaber: The cohomology structure of an associative ring.Ann.of Math. 78 (1963), 267-288 .

[7] M. Gerstenhaber, S. D. Shack : Relative Hochschild cohomology,rigid algebras, and the Bockstein, J. of Pure and Appl. Alg. 43 (1986),53-74.

[8] A. Nijenhuis and R.W. Richardson Jr., "Cohomology and deformations in graded Lie algebras,"Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 72, pp. 1–29, 1966.

[9] A. Makhlouf and Goze M. Classification of rigid algebras in low dimensions. Coll. Travaux en cours (M. Goze ed.) edition Hermann (1996).

[10] A. Makhlouf Algèbre associative et calcul formel , Theoretical Computer Science 187 (1997), 123-145.

[11] M. Bordemann, A. Makhlouf, T.Petit. Déformation par quantification et rigidité des algèbres enveloppantes, Journal of Algebra, vol. 285, pp 623-648 (2005).

[12] A. Makhlouf. Comparison of deformations and geometric study of varieties of associative algebras, International Journal of Mathematics and Mathematical Science (2007).

[13] C .S. Acatrinei 2007 J. Phys. A: Math. Theor. **40** F929-F933.

[14] Anais Smailagic and Euro Spallucci, « Noncommutative 3D harmonic oscillator », J. Phys. A35 (2002), hep-th/0205242.

[15] Agapitos Hatzinikitas and Ioannis Smyrnakis,« The noncommutative harmonic oscillator in more than one dimensions », J. Math. Phys. 43 (2002), hep-th/0103074.

[16] Anais Smailagic and Euro Spallucci, « Isotropic representation of the noncommutative 2D harmonic oscillator », Phys. Rev. D65 (2002), hep-th/0108216.

[17] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, and J. C. Rojas, « The Landau problem and noncommutative quantum mechanics », Mod. Phys. Lett. A16 (2001), hep-th/0104224.

[18] Stefano Bellucci, Armen Nersessian, and Corneliu Sochichiu, « Two phases of the non-commutative quantum mechanics », Phys. Lett. B522 (2001), hep-th/0106138.

[19] M. Bordemann, African Journal Of Mathematical Physics Volume 2, 21-61 (2005).

[20] G. Veneziano, Europhys. Lett. 2, 199 (1986); M. Maggiore, Phys. Lett. B304, 63 (1993).

[21] H. Weyl. Quanten mechanik und Gruppen theorie. Z. Physik, 46, 1 (1927).

[22] L. Mezincescu, Star product in quantum mechanics (2000). arXiv: hep-th/0007046.

[23] M. Kuranishi, On deformations of compact complex structures, Proc. International Congress Math. (Stockholm 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djarsholm (1963), 357-359.nics (2000). arXiv: hep-th/0007046.

[24] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas, Int. J. Mod. Phys. A17, 2555 (1999) hep-th/0106125.

3

Intégrale de chemins

3.1 Introduction

L'intégrale de chemin est un objet mathématique qui peut être considré et comme une géneralisation a un nombre infini de variables, representées par des chemins, des intégrales ordinaires. Elle partage les propriétés algébriques des intégrales ordinaires, mais presénte des propriétés nouvelles du point de vue de 1'analyse.

L'intégrale de chemin est un outil puissant pour 1'étude de la quantique mécanique, car elle met en correspondance de fagon tres explicite les mecaniques classique et quantique. Les quantites physiques s'obtiennent en moyennant sur tous les chemins possibles, mais dans la limite semi-classique $\hbar \to 0$ les chemins dominant 1'intégrale se trouvent dans un voisinage du chemin classique. Ainsi 1'intégrale de chemin permet-elle une compréhension intuitive et un calcul simple des effets semi-classiques tant du point de vue de la diffusion que des proprietes spectrales ou de 1'effet tunnel. De plus la formulation de la mécanique quantique basee sur 1'intégrale de chemin, si elle peut paraitre plus compliquée du point de vue mathematique, puisqu'elle se substitue à un formalisme d'equations aux derivées partielles, est bien adaptée à 1'étude des systèmes a un nombre grand de dégrés de liberté ou un formalisme de type equation de Schrodinger est beaucoup moins utile. Elle permet ainsi une transition aisée entre la mecanique quantique a un petit nombre de particules et la theorie quantique des champs ou la mecanique statistique.

Brève historique: Le concept d'intégrale de chemin semble avoir été introduit par Wiener, dans le but de décrire les propriètes statistiques du mouvement brownien, a la suite des travaux d'Einstein. Le mouvement brownien peut être considéré comme la limite continue d'une marche au hasard markovienne en

temps discrèt. Le mouvement au temps t (t entier) est déterminé par la probabilite $P(x\prime - x)$ d'aller du point x au point $x\prime$. En conséquence, partant du point x_0 la probabilite $P_n(x_n, x_o)$ d'atteindre le poin x_n au temps n est donnée par $P_n(x_n, x_o) = \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} P(x_n - x_{n-1}) P(x_2 - x_1) P(x_1 - x_0)$. L'ensemble des intégrations sur les variables x_i peut s'interpréter comme une somme pondérée sur tous les chemins $\{x_i\}$ qui vont de x_0 à x_n dans un temps qui ne prend que des valeurs entiéres $0, 1, ..., n$. Asymptotiquement cependant, pour $n \to \infty$, la nature discrète du temps ne joue plus de rôle. Par ailleurs, comme consequence du théoreme de la limite centrale de la théorie des probabilites, la distribution $P(x\prime - x)$ peut alors être remplacée par une distribution gaussienne de la forme $e^{-(x-x')^2/2D}$. Ce processus limite conduit a une intégrate de chemin: les propriétés statistiques du mouvement brownien s'expriment en termes de sommes sur tous les chemins possibles fonctions d'un temps continu et obéissant à une loi de probabilité gaussienne.

Si les travaux de Wiener sont bien connus, un article plus oublie de Wentzel de la même période dans le cadre de 1'optique quantique introduit les notions de somme sur des chemins avec une phase d'intérférence entre des chemins qui ne satisfont pas aux equations du mouvement classique, et 1'intérprétation de la somme comme une probabilité d'amplitude de transition.

Dirac écrire la prémière expression de 1'opérateur d'evolution quantique qui ressemble a un intégrale de chemin, mais il en reste à une version approchée en terme d'intervalles de temps discrets. Neanmoins sa remarque est trés importante du point de vue de la physique relativiste, puisqu'il montre ainsi que les éléments de matrice de 1'opérateur d'évolution dans un intervalle de temps δt court peuvent être calcules en terme du lagrangien, et donc de fagon covariante, sous la forme $e^{iL\delta t/\hbar}$.

Bien entendu, 1'histoire moderne de 1'intégrale de chémin commence avec les articles de Feynman qui formule 1'évolution quantique en terme de sommes sur un ensemble de trajectoires ponderees par $e^{iS/\hbar}$, ou S est la valeur de 1'action classique (intégrale du lagrangien) correspondant a la trajectoire. II intreprète en particulier les équations du mouvement classique comme résultant de 1'application de la méthode de la phase stationnaire à 1'intégrale de chemin. Lorsque, pour un système physique les valeurs de Fraction sont grandes par rapport à

$\hbar$, seuls les chemins proches du chemin classique contribuent. Cependant, malgré 1'intéret conceptuel de cette reformulation de 1'evolution quantique et de son utilite pour 1'étude de la limite semi-classique, l'intégrale de chemin doit son importance dans la physique moderne à sa généralisation a des systèmes à un nombre trés grand de dégrés de liberté, comme la théorie quantique des champs. En particulier, la quantification des théories de jauge non-abéliennes par Faddeev et Popov (1967) et DeWitt aurait été presque impossible dans la formulation usuelle de la théorie quantique en termes d'opérateurs et d'équations de champs quantiques.

De même, 1'intégrale de chemin a mis en évidence les relations mathématiques profondes entre la théorie quantique des champs et la mécanique statistique des transitions des phases, qui auraient été très difficiles a percevoir autrement. Ces relations ont joue un rôle essentiel dans notre comprehension des phenomenes critiques depuis Wilson.

Du point de vue mathematique, 1'intégrale de chémin liée a 1'évolution quantique est souvent difficile a définir parce que $e^{-iS/\hbar}$ est de module unite pour tout chemin et done la contribution variable des chemins est un phenomene d'interférence. Kac remarqua que si 1'on remplagait 1'opérateur d'évolution $e^{-itH/\hbar}$ par 1'operateur statistique $e^{-\beta H}$(et done 1'équation de Schrodinger par une équation de type diffusion ou de la chaleur), on obtenait une intégrale de chemin avec une mesure positive, généralisant 1'intégrale de Wiener, bien plus facile a definir rigoureusement. Une strategic qui a ensuite été poursuivie par de nombreux auteurs a été de définir 1'intégrale de chemin correspondant a 1'evolution quantique par prolongement analytique

sur la variable de temps.

Dans le domaine de la physique, plusieurs généralisations de 1'intégrale de chemin initiale se sont revelees utiles. L'integrale sur des chemins complexes associée a la réprésentation holomorphe de la mécanique quantique permet de discuter les propriétes des systèmes de bosons dans le formalisme dit grand canonique. L'intégrale sur des chemins grassmanniens permet de traiter les systèmes de fermions par un formalisme tout a fait parallèle. L'intégrale sur les chemins dans 1'espace des phases a permis plus tard de retrouver simplement

les régies d'intégration pour des chemins appartenant a des varietes courbes comme par exemple des spheres.

Le but ici, on se propose de construire une intégrale de chemins dans un espace des phases non commutatif et de l'appliquer aux cas de l'oscillateur harmonique couplée. On introduira cette non commutativité via des concepts trés adaptés à notre calcul. Au début, nous proposons la construction du propagateur de Feynman dans l'espace des phases commutatif et nous exposerons le calcul du propagateur de l'oscillateur harmonique couplée dans l'espace mixte. puis, on étendra cette même construction à espace des phases non commutatif. Le calcul explicite et exact est exposé en détail dans l'exemple précédent.

3.2 Formalisme de Feynman dans l'espace des phases commutatif

L'intégrale de chemin de Feynman est une autre manière de voir la mécanique quantique. Certes elle est équivalente à la mécanique des ondes de Schrodinger et à la mécanique des matrices de Heisenberg mais elle nous offre une manière trés simple et originale de voir les phénomènes quantiques en plus elle nous rapproche de plus en plus de la mécanique classique. En 1942 Feynman élabore ce nouveau formalisme de la mécanique quantique dite "intégrale de chemins de Feynman" où il a postulé que :

Pour une particule se propageant d'un point spatio-temporel a à un autre b, l'amplitude de probabilité de l'événement est donnée par

$$K(a,b) = \sum_{tous\ les\ chemins} \Phi(a,b) \tag{3.2.1}$$

où $\Phi[q(t)]$ est l'amplitude associée au chemin $q(t)$ pour évaluer cette amplitude. Feynman utilise une remarque de Dirac dans laquelle il montre un bieu intime entre cette amplitude et l'action "classique" relative au chemin $q(t)$ pour une courte propagation. Cette amplitude de transition peut aussi être écrite comme étant l'élément de matrice de l'opérateur d'évolution $\hat{U}(T) = exp[-iHT]$ $(\hbar = 1)$

$$\langle q_b t_b | q_a t_a \rangle = \langle q_b | \hat{U}(t_b, t_a) | q_a \rangle \qquad t_b \succ t_a \tag{3.2.2}$$

Suivant le principe de l'etat intermédiaire, l'amplitude se factorise comme:

$$\begin{aligned}\langle q_b t_b \,|q_a t_a\rangle &= \langle q_b|\, \hat{U}(t_b,t_N)\hat{U}(t_N,t_{N-1})\hat{U}(t_b,t_a)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\hat{U}(t_n,t_{n-1})\cdot\cdot\cdot\hat{U}(t_2,t_1)\hat{U}(t_1,t_a)\,|q_a\rangle \\ &= \prod_{n=1}^{N+1}\langle q_n t_n \,|q_{n-1}t_{n-1}\rangle \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

où nous avons identifié $q_b = q_{N+1}$, $q_a = q_0$; $t_b = T$, $t_a = 0$.

En subdivisant la durée T en $(N+1)$ intervalles égeaux $(N+1)\epsilon = T$ nous pouvons écrire cet opérateur sous la forme suivante: $exp[-iHT] = exp\left[-i\frac{HT}{N+1}\right]^{N+1}$

Pour un Hamiltonien de la forme suivante

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{3.2.4}$$

et suivant la formule de Trotter:

$$exp\left[-iHT\right] = \left[exp\left[-i\frac{p^2}{2m}\frac{T}{N+1}\right]exp\left[-iV(q)\frac{T}{N+1}\right]\right]^{N+1} + O\left(\left(\frac{T}{N+1}\right)^2\right) \tag{3.2.5}$$

Ce qui laisse écrire en introduisant la relation de fermeture $\int dq_k\,|q_k\rangle\, q_k = 1$ à chaque instant t_k

$$\begin{aligned}\langle q_b|\,\hat{U}(T)\,|q_a\rangle &= \lim_{N\to\infty}\langle q_b|\left[e^{\left[-i\frac{p^2}{2m}\frac{T}{N+1}-i\frac{p^2}{2m}\frac{T}{N+1}\right]}e^{\left[-iV(q)\frac{T}{N+1}\right]}\right]^{N+1}|q_a\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N}dq_k\,\langle q_k|\left[e^{\left[-i\frac{p^2}{2m}\frac{T}{N+1}\right]}e^{\left[-iV(q)\frac{T}{N+1}\right]}\right]^{N+1}|q_{k-1}\rangle \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Maintenant évaluons l'élément de matrice infinitésimal:

$$\begin{aligned}e^{\left[-i\frac{T}{N+1}V(q_{k-1})\right]}\langle q_k|\left[e^{\left[-i\frac{p^2}{2m}\frac{T}{N+1}\right]}\right]^{N+1}|q_{k-1}\rangle &= \int e^{-i\left(\frac{p^2}{2m}\frac{T}{N+1}+\frac{T}{N+1}V(q_{k-1})\right)}\langle q_k|\,|p_k\rangle\langle p_k|\,|q_{k-1}\rangle\,dp_k \\ &= \int\frac{dp_k}{2\pi}e^{\left[ip_k(q_k-q_{k-1})-i\left(\frac{p^2}{2m}\frac{T}{N+1}+\frac{T}{N+1}V(q_{k-1})\right)\right]} \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Comme on le voit il est aussi possible d'intervertir les opérateur énergie cinétique et énergie potentiel dans cette élément infinitésimal. Ceci nous donne $V(q_k)$ à la place $V(q_{k-1})$. En fait, on peut toujours choisir n'importe quel point $q_k \in [q_{k-1}, q_k]$ (Principe de démocratie des points de l'intervalle≡principe d'incertitude)

Le resultat devient alors:

$$K(q_b,q_a;T) = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N}dq_k\prod_{k=1}^{N+1}\frac{dq_k}{2\pi\hbar}\exp\left[i\sum_{k=1}^{N+1}\left\{p_k(q_k-q_{k-1})-\epsilon\left(\frac{p^2}{2m}+V(\overline{q}_k)\right)\right\}\right] \tag{3.2.8}$$

Cette expression est dite forme Hamiltonienne de l'intégrale de chemins et comme on le remarque elle est écrite en fonction des variables de l'espace des phases (d'une manière non équivalente entre q et p)

L'intégration sur le p_k s'effectue facilement (forme gaussienne). Son resultat donne ce qu'on appelle la forme Lagrangienne du propagateur

$$K\left(q_b, q_a; T\right) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{k=1}^{N} dq_k \exp^{\left[i\sum_{k=1}^{N+1}\left\{\frac{m}{2\epsilon}(q_k - q_{k-1})^2 - \epsilon V(\overline{q}_k)\right\}\right]} \tag{3.2.9}$$

Sachant que dans notre cas on va s'intéresser à un espace des phases non commutatif, il serait préférable de reécrire ce propagateur sous une forme adéquate à l'E.C.O.C. qui va être utilisée. Dans un premier temps on sait que dans l'espace des impulsions on a

$$K\left(p_b, p_a; T\right) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{k=1}^{N} dp_k \prod_{k=1}^{N+1} \frac{dq_k}{2\pi} \exp^{\left[i\sum_{k=1}^{N+1}\left\{-q_k(p_k - p_{k-1}) - \epsilon\left(\frac{p_k^2}{2m} + V(\overline{q}_k)\right)\right\}\right]} \tag{3.2.10}$$

Dans le cas d'un espace des phases à 4 dimensions on peut par exemple utiliser une représentation mixte, c'est à dire $X = (q_1, p_2)$ et $P = (q_2, p_1)$. En fait, X et P sont les quatre composantes de l'espace des phases. Il n'est diffcile de s'assurer que

$$K\left(X_f, X_i; T\right) = \lim_{N\to\infty} \int DXDP \exp^{\int dt\left\{PM\dot{X} - \frac{1}{2m}(PJP + XJX - V(X,P))\right\}} \tag{3.2.11}$$

tels que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.12}$$

Pour les besoins des calculs à venir (cas non commutatif), nous allons d'abord recalculer le propagateur de l'oscillateur harmonique couplé dans cette représentation mixte.

Exemple 3.2.1 ***Oscillateur harmonique couplé dans l'espace des phases mixte commutatif***

On considère un système constitué de deux oscillateurs couplés à deux dimension, indépendants et identiques. L'énergie potentielle du système est:

$$V(x_1, x_2) = \frac{m\boldsymbol{\omega}^2}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \lambda x_1 x_2, \tag{3.2.13}$$

l'hamiltonien de cette système dans l'espace des phases non commutatif prend la forme suivante,

$$\begin{aligned} H\left(x_1, x_2; p_1, p_2\right) \simeq & \frac{1}{2\mu_1}p_1^2 + \frac{1}{2\mu_2}x_2^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 p_2^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 x_1^2 \\ & + bp_1 x_2 + \lambda x_1 x_2, \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

avec

$$\mu_1 = m, \qquad \mu_2 = \frac{m}{m^2\omega^2} \tag{3.2.15}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}, \qquad \omega_1 = \omega\sqrt{m}. \tag{3.2.16}$$

Maintenant, nous utilisons les coordonnées de Feynman, en peut réécrire l'hamiltonien (3.3.35) sous la forme matricielle:

$$H(Q,P) = \frac{1}{2}\left(PMP + Q\Omega^2 Q\right) + PGQ, \tag{3.2.17}$$

où M, Ω et G sont des matrices 2×2, $Q^T = (x_1, p_2)$ et $P^T = (x_2, p_1)$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} \end{pmatrix}, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 \\ 0 & \omega\sqrt{m} \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.18}$$

Nous faisons le changement de variable $P \to JP$ pour simplifier la forme de propagateur

$$K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) = \int DQDP \exp i \int \left(P\dot{Q} - \frac{1}{2}\left(P\left(JMJ^{-1}\right)P + Q\Omega^2 Q + 2P\left(JG\right)Q\right)\right). \tag{3.2.19}$$

Pour simplifier (3.2.19), nous diagonaliser la matrice (JMJ^{-1}) en introduisant de nouvelles variables $\left(\bar{P}, \bar{Q}\right)$:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{4}} & \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{4}} \\ -\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{4}} & \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{pmatrix}, \tag{3.2.20}$$

et

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{4}} & \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{4}} \\ -\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{4}} & \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2.21}$$

Donc, le propagateur avec les nouvelles variables est,

$$K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) = \int D\bar{Q}D\bar{P} \exp i \int \left(\bar{P}\dot{\bar{Q}} - \frac{1}{2}\left(\bar{P}^T\overline{\mu}\bar{P} + \bar{Q}\varpi\bar{Q} + 2\bar{P}\Lambda\bar{Q}\right)\right), \tag{3.2.22}$$

avec

$$\overline{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_2\mu_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu_2\mu_1}} \end{pmatrix}, \qquad \varpi = \frac{1}{2m}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \begin{pmatrix} 1+\omega^2\frac{\mu_2}{\mu_1} & 1-\omega^2\frac{\mu_2}{\mu_1} \\ 1-\omega^2\frac{\mu_2}{\mu_1} & 1+\omega^2\frac{\mu_2}{\mu_1} \end{pmatrix} \tag{3.2.23}$$

et

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} & \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \\ \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} & \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \end{pmatrix} \tag{3.2.24}$$

Afin de simplifier les calcul, nous pouvons éliminer la matrice $\overline{\mu}$. En utilisant la transformation canonique suivante $\left(\bar{P},\bar{Q}\right)\rightarrow\left(\Pi,X\right)$,

$$\bar{P}=\frac{1}{\sqrt{\overline{\mu}}}\Pi \tag{3.2.25}$$

$$\bar{Q}=\sqrt{\overline{\mu}}X \tag{3.2.26}$$

le propagateur est

$$K_{\theta\sigma}(Q^i,Q^f,T)=\int D\Pi DX\exp i\int dt\left(\Pi\dot{X}-\frac{1}{2}\left(\Pi\Pi+X\overline{\varpi}X+2\Pi\overline{\Lambda}X\right)\right) \tag{3.2.27}$$

où

$$\overline{\varpi}=\left(\frac{1}{2m\mu_2}\right)\begin{pmatrix}\frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2+1 & 1-\frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2\\ 1-\frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2 & \frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2+1\end{pmatrix} \tag{3.2.28}$$

et

$$\overline{\Lambda}=\frac{1}{2}\lambda\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} \tag{3.2.29}$$

Le propagateur (3.2.27) inclut un terme d'interaction, nous pouvons simplifier cette dernière en modifiant le moment conjugué

$$\Pi\rightarrow\Pi-\overline{\Lambda}X \tag{3.2.30}$$

Qui nous obtenons:

$$K(Q^i,Q^f,T)=\int D\Pi DX\exp i\int dt\left(\Pi\dot{X}-X\overline{\Lambda}^T\dot{X}-\frac{1}{2}\left(\Pi\Pi+X\left(\overline{\varpi}-\overline{\Lambda}^T\overline{\Lambda}\right)X\right)\right). \tag{3.2.31}$$

on obtient une intégrale gaussienne sur Π et dont le résultat est:

$$K(Q^i,Q^f,T)=2\pi\int DX\exp\frac{i}{2}\int dt\left(\dot{X}\dot{X}-2X\overline{\Lambda}^T\dot{X}-X\left(\overline{\varpi}-\overline{\Lambda}^T\overline{\Lambda}\right)X\right) \tag{3.2.32}$$

Ensuite, nous utilisons l'intégration par parties pour $\left(2X\overline{\Lambda}^T\dot{X}\right)$, et nous obtenons nouvelle propagateur:

$$K_{\theta\sigma}(Q^i,Q^f,T)=2\pi\int DXe^{-\frac{i}{2}\left[X\left(\overline{\Lambda}^T+\Lambda\right)X\right]_0^T}\exp\frac{i}{2}\int dt\left(\dot{X}\dot{X}-X\Omega X\right) \tag{3.2.33}$$

où $\mathbf{\Omega}$ sont des matrices définie par:

$$\mathbf{\Omega}=\begin{pmatrix}\mathbf{\Omega}_1 & \mathbf{\Omega}_3\\ \mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{\Omega}_2\end{pmatrix} \tag{3.2.34}$$

ainsi

$$\mathbf{\Omega}_1 = \left(\frac{1}{2m\mu_2}\right)\left(\frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right) \tag{3.2.35}$$

$$\mathbf{\Omega}_2 = \left(\frac{1}{2m\mu_2}\right)\left(\frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right) \tag{3.2.36}$$

et

$$\mathbf{\Omega}_3 = \left(\frac{1}{m\mu_2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2 - \left(\frac{1}{2}\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right) \tag{3.2.37}$$

L'intégrale de chemin prend la forme linéaire explicitement en fonction de $X = (X_1, X_2)$,

$$K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) = \int DX \exp e^{-\frac{i}{2}\left[X\left(\overline{\Lambda}^T + \Lambda\right)X\right]_0^T} \int \left(\frac{\dot{X}_1^2}{2} + \frac{\dot{X}_2^2}{2} - \frac{\mathbf{\Omega}_1^2 X_1^2}{2} - \frac{\mathbf{\Omega}_2^2 X_2^2}{2} - \mathbf{\Omega}_3 X_1 X_2\right) \tag{3.2.38}$$

Enfin, nous obtenons le propagteur de l'oscillateur harmonique couplé, sous la forme compacte comme [13]:

$$\begin{aligned} K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) = \frac{1}{2\pi i}&\left[\frac{\bar{\Omega}_1\bar{\Omega}_2}{\sin\bar{\Omega}_1 T \sin\bar{\Omega}_2 T}\right]^{\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{i}{2}\left[X\left(\overline{\Lambda}^T + \Lambda\right)X\right]_0^T} \\ &\times \exp\left\{\frac{i\bar{\Omega}_1}{4\sin\bar{\Omega}_1 T}\cos\bar{\Omega}_1 T\left[X^f\eta X^f + X^i\eta X^i - 2X^i\eta X^f\right]\right\} \\ &\times \exp\left\{\frac{i\bar{\Omega}_2}{4\sin\bar{\Omega}_2 T}\cos\bar{\Omega}_2 T\left[X^f\eta X^f + X^i\eta X^i - 2X^i\eta X^f\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

3.3 Formalisme de Feynman dans l'espace des phases non commutatif

Depuis les travaux de Heisenberg et l'introduction de l'algèbre non-commutatif algebra dans la physique, cette non commutativité n'a cessé d'envahir la physique théorique ainsi que d'autres disciplines des mathématiques de la théorie des mesures à la géométrie [1, 2, 3].

Il est remarquable que le schéma d'unification de la gravité avec la mécanique quantique renforce ce fait et les arguments en faveur de la non-commutativité de l'espace-temps sont de plus en plus nécessaires pour contrôler les divergences gênantes. Du point de vue théorique, de nombreux travaux ont été tentées dans l'espoir de donner un aspect concret à cet espace-temps non-commutatif [4, 5, 6]. Leur domaine d'application s'étend de la théorie quantique des champs à la mécanique quantique [7]. En introduisant le produit Moyal dans l'espace des fonctions ordinaires, la théorie des champs non-commutative a été construite [8, 9]. Cela

se manifeste par des phénomènes non locaux, qui ont des effets considérables en physique des hautes énergies et il a été montré que des divergences infrarouges et ultraviolets sont en fait connectés. En mécanique quantique, nous pouvons atteindre cet objectif en imposant la non-commutativité dans les relations d'incertitude généralisées ou de manière équivalente [10, 11, 12]

$$[x_i, x_j] = i\boldsymbol{\Theta}_{ij}, \qquad [p_i, p_j] = i\boldsymbol{\Sigma}_{ij}, \qquad [x_i, p_j] = i\delta_{ij}. \tag{3.3.1}$$

où $\boldsymbol{\Theta}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$ sont des matrices antisymmetrique telles que $\boldsymbol{\Theta}_{12} = \theta$ et $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \sigma$. A ces relations de commutation correspondent les crochets de Poisson déformés dans l'espace des phases classique

$$\{x_i, x_j\} = \boldsymbol{\Theta}_{ij} \qquad \{p_i, p_j\} = \boldsymbol{\Sigma}_{ij} \qquad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij} \tag{3.3.2}$$

Il est vrai que l'interprétation physique de cette non - commutativité est discutable et controversée spécialement pour décrire les phénomènes quantiques utilisant les intégrales de chemin parce que nous perdons complètement l'opérateur de position, et le propagateur devient confus. Dans le cas de deux dimensions d'espace non-commutative la situation est remédiable . Nous pouvons utiliser des outils mathématiques appropriés tel l'espace des phasse ou états cohérents. Ce dernier a été utilisé pour calculer les intégrales de chemin et il semble que son action est non local. À notre avis , la formulation par les états cohérents est la meilleur. La formule (3.3.1) devient

$$\{F(\xi), G(\xi)\} = \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \mathbf{J}_{ij}(\theta, \sigma) \frac{\partial G}{\partial \xi_j} \qquad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{3.3.3}$$

où $\xi = (x_1, x_2, p_1, p_2)$ et

$$\mathbf{J}(\theta, \sigma) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Theta} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \boldsymbol{\Sigma} \end{pmatrix}.$$

Si $H(\xi)$ est le Hamiltonien, alors,

$$\dot{\xi}_i = \{\xi_i, H(\xi)\} = \mathbf{J}_{ij}(\theta, \sigma) \nabla_\xi H \qquad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{3.3.4}$$

ou bien de manière équivalente,

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \{x_i, H(x, p)\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \boldsymbol{\Theta}_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l}. \\ \dot{p}_i = \{x_i, H(x, p)\} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} + \boldsymbol{\Sigma}_{il} \frac{\partial H}{\partial p_l}. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Notre but dans cette section est de généraliser la construction de Feynman précédente au cas de l'espace des phases non commutatif. Comme on l'a déjà mentionné précédemment on modifie l'algébre de Heisenberg en introduisant les paramètres de déformation. Pour

reusir la construction de Feynman, il nous faut un E.C.O.C. de mesure. Autrement dit, le propagateur ne prendra de sens que dans un espace mixte en q et p. N'oublions pas que le propagateur une amplitude de transition d'état vers un autre est un nombre complexe qui prédit les résultats de la physique quantique.

La base commutative A_0 est remplacée par la base non commutative $A_\hbar$ suivant la méthode canonique($\hbar = 1$)

$$\{f, g\}_{nc} \to [O_f, O_g] \tag{3.3.6}$$

Dans notre cas $N = 2$ on choisit pour E.C.O.C. l'ensemble des opérateurs $O_{q_1} = q_1$, $O_{p_2} = p_2$ et par conséquent on a pour

$O_{p_1} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q_1} = -\frac{\sigma}{i}\frac{\partial}{\partial p_1}$, $O_{q_2} = -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial p_2} = \frac{\theta}{i}\frac{\partial}{\partial q_1}$ où θ et σ sont les paramètres de la non commutativité.

Comme on l'a déjà dit, ces opérateurs génèrent l'algèbre de Heisenberg modifiée suivante:

$$[q_1, q_2] = i\theta, \qquad [q_i, q_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [p_1, p_2] = i\sigma \tag{3.3.7}$$

Dans le but de conserver l'esprit de la construction de Feynman introduisons les notations suivantes : $X = (q_1, p_2)$ $P = (q_2, p_1)$. Les relations des commutations précédentes deviennent alors

$$[X, P_j] = i\left(\Lambda^{-1}_{\theta,\sigma}\right)_{ij} \tag{3.3.8}$$

avec

$$\Lambda_{\theta,\sigma} = \frac{1}{1-\theta\sigma}\begin{pmatrix} -\sigma & -1 \\ 1 & \theta \end{pmatrix} \tag{3.3.9}$$

A ce niveau introduisons une base de l'E.C.O.C sur laquelle cette rélisation de l'algèbre est vérifiée. Soit $\{|X_1, X_2\rangle = |X_i\rangle\}$ un ensemble complet de vecteurs propres de l'E.C.O.C.

Les composantes de P seront alors représentées par:

$$P_1\Psi(X_1, X_2) = -\frac{1}{i}\partial_{X_2}\Psi(X_1, X_2) = \frac{\theta}{i}\partial_{X_1}\Psi(X_1, X_2) \tag{3.3.10}$$

$$P_2\Psi(X_1, X_2) = -\frac{1}{i}\partial_{X_1}\Psi(X_1, X_2) = -\frac{\sigma}{i}\partial_{X_2}\Psi(X_1, X_2) \tag{3.3.11}$$

où $\Psi(X_1, X_2)$ est un état de l'espace de Hilbert.

Par ailleurs on peut toujours unifier ces deux écritures dans

$$P\Psi(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{i}(\partial_{X_1} - \sigma\partial_{X_2}) \\ \frac{1}{i}(\theta\partial_{X_1} - \partial_{X_2}) \end{pmatrix}\Psi(X) \tag{3.3.12}$$

Pour construire le propagateur de Feynman, suivons exactement la même démarche que précédemment. Introduisons l'opérateur d'évolution suivant

$$K(X_f, X_i; T) = \langle X_f| e^{-iHT} |X_i\rangle \tag{3.3.13}$$

où H est le Hamiltonien du système. Remarquons d'abord que

$$e^{i\beta P_2}\left|X\right\rangle = \left|X_1 - \beta, X_2\right\rangle = \left|X_1, \beta\sigma + X_2\right\rangle \tag{3.3.14}$$

$$e^{i\gamma P_1}\left|X\right\rangle = \left|X_1, \gamma + X_2\right\rangle = \left|X_1 - \theta\gamma, X_2\right\rangle \tag{3.3.15}$$

et par conséquent la projection de l'état définissant X sur celui de P est

$$\left\langle X\right|\left.P\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\exp\left(iP\Lambda_{\theta,\sigma}X\right) \tag{3.3.16}$$

Maintenant, nous sommes en mesure d'entamer la construction et pour plus de simplicité nous nous intéressons au cas de l'Hamiltonien de la forme

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + V\left(x_1, x_2\right) \tag{3.3.17}$$

Subdivisons alors le temps comme d'habitude et insérons les relations de fermeture suivantes

$$\int dX_1^{(n)} \int dX_2^{(n)} \left|X_1^{(n)}, X_2^{(n)}\right\rangle \left\langle X_1^{(n)}, X_2^{(n)}\right| \qquad (n) = 1, 2 \cdot \cdots \cdot N \tag{3.3.18}$$

et

$$\int dP_1^{(k)} \int dP_2^{(k)} \left|P_1^{(k)}, P_2^{(k)}\right\rangle \left\langle P_1^{(k)}, P_2^{(k)}\right| \qquad (k) = 1, 2 \cdot \cdots \cdot N+1 \tag{3.3.19}$$

L'expression du propagateur de Feynman dans l'espace des phases non commutatif prend alors la forme suivante

$$K\left(X_f, X_i; T\right) = \int DXDP \exp\left[i\int\left[P\Lambda_{\theta,\sigma}\dot{Q} - H\right]dt\right] \tag{3.3.20}$$

où $\Lambda_{\theta,\sigma}$ est donné par (3.3.9), avec $Q^T = (x_1, p_2)$ et $P^T = (x_2, p_1)$,

Pour simplifier l'équation (3.3.20), nous pouvons utiliser, la transformation canonique linéaire au niveau du crochet de Poisson,

$$\left\{F\left(\xi\right), G\left(\xi\right)\right\} = \frac{\partial F}{\partial \xi_i}\left(J_{\theta,\sigma}\right)_{ij}\frac{\partial G}{\partial \xi_j} \qquad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{3.3.21}$$

où $\xi = (x_1, x_2, p_1, p_2)$ et

$$J_{\theta,\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Theta} & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbf{\Sigma} \end{pmatrix}. \tag{3.3.22}$$

Soit $H\left(\xi\right)$ l'Hamiltonien, les équations des mouvements correspondances sont,

$$\dot{\xi}_i = \left\{\xi_i, H\left(\xi\right)\right\} = J_{\theta,\sigma}\nabla_\xi H \qquad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{3.3.23}$$

$$S_{\theta\sigma} = \int dt\left(\xi J_{\theta,\sigma}^{-1}\dot{\xi} - H\left(\xi\right)\right) \tag{3.3.24}$$

telle que $J_{\theta,\sigma}^{-1}$ est la matrice symplectique. Pour simplifier la forme symplectique (3.3.23), nous pouvons utiliser, la transformation canonique linéaire $\xi = A(\theta,\sigma)\,\eta$, où $A(\theta,\sigma)$ satisfait à

$$A^T(\theta,\sigma)\,J_{\theta,\sigma}^{-1}A(\theta,\sigma) = J_{0,0}^{-1}. \tag{3.3.25}$$

la matrice $A(\theta,\sigma)$ peut prendre la forme suivante

$$A(\theta,\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 0 \\ 0 & \sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3.26}$$

Le crochet de Poisson (3.3.21) devenue,

$$\{\eta_i,\eta_j\} = J_{ij}(0,0) \qquad i,j = 1,2,3,4 \tag{3.3.27}$$

où $\eta = (\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2,\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2)$ sont cootdonnées commutatif. réécrit laction classique on a

$$S_{\theta\sigma}(A\eta) = \int dt\left(\eta J_{0,0}^{-1}\dot{\eta} - H(A\eta)\right). \tag{3.3.28}$$

Nous allons réécrire la formalisme de l'intégrale de chemin dans l'espace des phases non-commutative mixte en termes de la matrice "A". Dans les sections suivantes, nous allons fournir une application: l'oscillateur harmonique couplé dans l'espace des phases non-commutative,

Apppliquons la transformation (3.3.25), nous trouvons le propagateur

$$K_{\theta\sigma}(Q^i,Q^f,T) = \int DQD\mathcal{P}\exp i\int\left[PJ_{0,0}^{-1}\dot{Q} - H_{\theta\sigma}\left(Q,\bar{A}\mathcal{P}\right)\right]dt, \tag{3.3.29}$$

où

$$J_{\mathbf{0,0}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \sigma & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3.30}$$

Comme θ et σ sont très petits, nous pouvons utiliser l'expansion de Taylor de l'hamiltonien. Afin de simplifier le calcul, nous développons $\bar{A} = 1+\beta$, avec $\beta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$, on a,

$$H_{\theta\sigma}\left(Q,\bar{A}\mathcal{P}\right) = H(Q,\mathcal{P}) + H_\beta(Q,\mathcal{P}), \tag{3.3.31}$$

telle que $H_\beta(Q,\mathcal{P})$ est une petite perturbation ajouté à l'hamiltonien de telle sorte que

$$H_\beta(Q,P) \simeq (\beta P)^T\frac{\partial H(Q,P)}{\partial P} + \sum_{ij}\frac{1}{2!}(\beta P)_i^T(\beta P)_j\frac{\partial^2 H(Q,P)}{\partial P_i\partial P_j}, \tag{3.3.32}$$

La formalisme de Feynman pour un potentiel général dans l'espace des phases non commutative est donner par,

$$K_{\theta\sigma}(Q^i,Q^f,T)=\int DQDP\exp i\int dt\left(\mathcal{P}J^{-1}\dot{Q}-H(Q,P)-H_\beta(Q,P)\right). \tag{3.3.33}$$

Nous récupérons commutativité à l'aide de la transformation comme mentionné précédemment. Nous avons remarqué que, au niveau de l'action, il y a une fonction supplémentaire des paramètres de déformation. C'est le résultat de la non-commutativité. On a présenté un exemple détaillé de c'est travaillée où le formalisme est appliqué à l'oscillateur harmonique couplé et le résultat lui est validé par le passage à la limite commutative $\theta=\sigma=0$

Exemple 3.3.1 ***l'oscillateur harmonique couplé à deux dimension dans l'espace des phases non commutatif***

Il est très instructif à ce stade de résoudre le problème de l'oscillateur harmonique couplé à deux dimension dans l'espace des phases non commutative. On considère un système constitué a *deux* oscillateurs couplés à deux dimension, indépendantes et identiques. Le potentiel du système est:

$$V(x_1,x_2)=\frac{m\boldsymbol{\omega}^2}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)+\lambda x_1x_2, \tag{3.3.34}$$

nous utilisons les equations (3.3.31) et (3.3.32), l'hamiltonien de cette système dans l'espace des phases non commutatif prend la forme suivante,

$$\begin{aligned}H_{\theta\sigma}\left(x_1,x_2;p_1,p_2\right)\simeq&\frac{1}{2\mu_1}p_1^2+\frac{1}{2\mu_2}x_2^2+\frac{1}{2}\omega_2^2p_2^2+\frac{1}{2}\omega_1^2x_1^2\\&+gp_1x_2+\lambda x_1x_2+\theta\lambda p_1x_1,\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

où

$$\mu_1=\frac{m}{1+m^2\theta^2\omega^2},\qquad \mu_2=\frac{m}{\sigma^2+m^2\omega^2} \tag{3.3.36}$$

$$\omega_2=\frac{1}{\sqrt{m}},\qquad \omega_1=\omega\sqrt{m},\qquad g=\frac{\sigma}{m}+\theta m\omega^2. \tag{3.3.37}$$

Maintenant, nous utilisons les coordonnées de Feynman, en peut réécrire l'hamiltonien (3.3.35) sous la forme matricielle:

$$H_{\theta\sigma}(Q,P)=\frac{1}{2}\left(PMP+Q\Omega^2Q\right)+PGQ, \tag{3.3.38}$$

où M, Ω et G sont des matrices 2×2, $Q^T=(x_1,p_2)$ et $P^T=(x_2,p_1)$

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{\mu_1} & g\\ g & \frac{1}{\mu_2}\end{pmatrix},\qquad \Omega=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{m}} & 0\\ 0 & \omega\sqrt{m}\end{pmatrix},\qquad G=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ \theta\lambda & 0\end{pmatrix}, \tag{3.3.39}$$

Nous faisons un changement de variable suivante $P\rightarrow JP$ pour simplifier la forme de propagateur

$$K_{\theta\sigma}(Q^i,Q^f,T)=\int DQDP\exp\{i\int(P\dot{Q}-\frac{1}{2}(P(JMJ^{-1})P+Q\Omega^2Q+2P(JG)Q))dt\}. \tag{3.3.40}$$

Pour simplifier (3.3.40), nous diagonaliser la matrice (JMJ^{-1}) en introduisant de nouvelles variables $\left(\bar{P},\bar{Q}\right)$, comme suit,

$$\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{4}} & \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{4}}\\ -\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{4}} & \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{4}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{P}_1\\ \bar{P}_2\end{pmatrix}, \tag{3.3.41}$$

et

$$\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{4}} & \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{4}}\\ -\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{4}} & \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{4}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{Q}_1\\ \bar{Q}_2\end{pmatrix}. \tag{3.3.42}$$

Donc, le propagateur avec les nouvelles variables est,

$$K_{\theta\sigma}(Q^i,Q^f,T)=\int D\bar{Q}D\bar{P}\exp i\int\left(\bar{P}\dot{\bar{Q}}-\frac{1}{2}\left(\bar{P}^T\overline{\mu}\bar{P}+\bar{Q}\varpi\bar{Q}+2\bar{P}\Lambda\bar{Q}\right)\right), \tag{3.3.43}$$

avec

$$\overline{\mu}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\mu_2\mu_1}}+g & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu_2\mu_1}}-g\end{pmatrix},\quad \varpi=\frac{1}{2m}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\begin{pmatrix}1+\omega^2\frac{\mu_2}{\mu_1} & 1-\omega^2\frac{\mu_2}{\mu_1}\\ 1-\omega^2\frac{\mu_2}{\mu_1} & 1+\omega^2\frac{\mu_2}{\mu_1}\end{pmatrix} \tag{3.3.44}$$

et

$$\Lambda=\frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}\theta+\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} & \theta+\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\\ \theta-\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} & \theta-\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\end{pmatrix} \tag{3.3.45}$$

Afin de simplifier les calcul, nous pouvons éliminer la matrice $\overline{\mu}$. en utilisant la transformation canonique suivante $\left(\bar{P},\bar{Q}\right)\rightarrow(\Pi,X)$,

$$\bar{P}=\frac{1}{\sqrt{\overline{\mu}}}\Pi,\quad \bar{Q}=\sqrt{\overline{\mu}}X. \tag{3.3.46}$$

Le nouveau propagateur est

$$K_{\theta\sigma}(Q^i,Q^f,T)=\int D\Pi DX\exp\{i\int dt\left(\Pi\dot{X}-\frac{1}{2}\left(\Pi\Pi+X\overline{\varpi}X+2\Pi\overline{\Lambda}X\right)\right)\}, \tag{3.3.47}$$

où

$$\overline{\varpi} = \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{\mu_1\mu_2} - g^2}}{2m} \sqrt{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)} \right) \begin{pmatrix} \kappa\left(\frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2 + 1\right) & \left(1 - \frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2\right) \\ \left(1 - \frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2\right) & \kappa^{-1}\left(\frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2 + 1\right) \end{pmatrix} \tag{3.3.48}$$

et

$$\overline{\Lambda} = \frac{1}{2}\lambda \begin{pmatrix} \theta + \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} & \kappa^{-1}\left(\theta + \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\right) \\ \kappa\left(\theta - \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\right) & \theta - \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \end{pmatrix} \tag{3.3.49}$$

avec $\kappa = \frac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}+g}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}-g}}$, $(\theta = \sigma = 0 \rightarrow \kappa = 1)$

Le propagateur (3.3.47) inclut un terme d'interaction, nous pouvons simplifier cette dernière en modifiant le moment conjugué

$$\Pi \rightarrow \Pi - \overline{\Lambda} X, \tag{3.3.50}$$

Qui nous obtenons:

$$K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) = \int D\Pi DX \exp\{i \int dt \left(\Pi\dot{X} - X\overline{\Lambda}^T\dot{X} - \frac{1}{2}\left(\Pi\Pi + X\left(\overline{\varpi} - \overline{\Lambda}^T\overline{\Lambda}\right)X\right)\right)\}. \tag{3.3.51}$$

on obtient une intégral gaussien sur Π et dont le résultat suivante:

$$K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) = 2\pi \int DX \exp\{\frac{i}{2}\int dt(\dot{X}\dot{X} - 2X\overline{\Lambda}^T\dot{X} - X(\overline{\varpi} - \overline{\Lambda}^T\overline{\Lambda})X)\}. \tag{3.3.52}$$

Ensuite, nous utilisons une autre transformation pour diagonalisant la matrice $\overline{\Lambda}$ comme suit,

$$X = U^T\mathcal{Q} \tag{3.3.53}$$

et nous obtenons nouvelle propagateur:

$$K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) = 2\pi \int D\mathcal{Q} e^{-i[\mathcal{Q}\Delta\mathcal{Q}]_0^T} \exp\{i \int dt \left(\dot{\mathcal{Q}}\dot{\mathcal{Q}} - \mathcal{Q}\mathbf{\Omega}\mathcal{Q}\right)\}, \tag{3.3.54}$$

où Δ et $\mathbf{\Omega}$ sont des matrices définie par:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \theta\lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega}_1 & \mathbf{\Omega}_3 \\ \mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{\Omega}_2 \end{pmatrix} \tag{3.3.55}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_1 = {} & (\kappa a - \kappa^2 b^2 - c^2)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\theta}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}) \\ & + (\frac{a}{\kappa} - b^2 - \frac{c^2}{\kappa^2})(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}) + 2\kappa b^2 + \frac{2c^2}{\kappa} + \frac{\sqrt{\frac{1}{\mu_1\mu_2} - g^2}}{m}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}(\frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2 - 1), \end{aligned} \tag{3.3.56}$$

$$\mathbf{\Omega}_2 = (\kappa a - \kappa^2 b^2 - c^2)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}) + (\frac{a}{\kappa} - b^2 - \frac{c^2}{\kappa^2})(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\theta}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}) - 2\kappa b^2 - \frac{2c^2}{\kappa} - \frac{\sqrt{\frac{1}{\mu_1\mu_2} - g^2}}{m}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}(\frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2 - 1)) \quad (3.3.57)$$

et

$$\mathbf{\Omega}_3 = (\kappa a - \kappa^2 b^2 - c^2)(\kappa(\frac{1}{2\theta}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} - \frac{1}{2}) - \frac{(\frac{1}{2\theta}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} + \frac{1}{2})}{\kappa}) + (\frac{a}{\kappa} - b^2 - \frac{c^2}{\kappa^2})(\kappa(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}) + \frac{(\frac{1}{2\theta}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} + \frac{1}{2})}{\kappa}) + (2\kappa b^2 + \frac{2c^2}{\kappa} + \frac{\sqrt{\frac{1}{\mu_1\mu_2} - g^2}}{m}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}(\frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2 - 1))(\frac{\kappa(\frac{1}{2\theta}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} - \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2\theta}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} + \frac{1}{2})} + \kappa(\frac{1}{2\theta}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} + \frac{1}{2})), \quad (3.3.58)$$

avec

$$a = \frac{\sqrt{\frac{1}{\mu_1\mu_2} - g^2}}{2m}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}(\frac{\omega^2}{\mu_1}\mu_2 + 1), \quad (3.3.59)$$

$$b = \frac{1}{2}\lambda(\theta - \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}), \quad (3.3.60)$$

$$c = \frac{1}{2}\lambda(\theta + \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}). \quad (3.3.61)$$

L'intégrale de chemin prend la forme linéaire explicitement $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$, ,

$$K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) = \int D\mathcal{Q} \times e^{-\frac{i(\mathcal{Q}\Delta\mathcal{Q})}{2}}[\exp \int \left(\frac{\dot{\mathcal{Q}}_1^2}{2} + \frac{\dot{\mathcal{Q}}_2^2}{2} - \frac{\mathbf{\Omega}_1^2\mathcal{Q}_1^2}{2} - \frac{\mathbf{\Omega}_2^2\mathcal{Q}_2^2}{2} - \mathbf{\Omega}_3\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2\right) dt], \quad (3.3.62)$$

Enfin, nous obtenons le propagteur de l'oscillateur harmonique couplé, sous la forme compacte comme [13]:

$$\begin{aligned} K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\bar{\Omega}_1\bar{\Omega}_2}{\sin\bar{\Omega}_1 T \sin\bar{\Omega}_2 T}\right]^{\frac{1}{2}} \times \exp\frac{i\,(\mathcal{Q}\Delta\mathcal{Q})_0^T}{2} \\ \times \exp\left\{\frac{i\bar{\Omega}_1}{4\sin\bar{\Omega}_1 T}\cos\bar{\Omega}_1 T\left[\mathcal{Q}^f\eta\mathcal{Q}^f + \mathcal{Q}^i\eta\mathcal{Q}^i - 2\mathcal{Q}^i\eta\mathcal{Q}^f\right]\right\} \\ \times \exp\left\{\frac{i\bar{\Omega}_2}{4\sin\bar{\Omega}_2 T}\cos\bar{\Omega}_2 T\left[\mathcal{Q}^f\eta\mathcal{Q}^f + \mathcal{Q}^i\eta\mathcal{Q}^i - 2\mathcal{Q}^i\eta\mathcal{Q}^f\right]\right\} \end{aligned} \quad (3.3.63)$$

avec $\bar{\Omega}_1^2 = \sqrt{\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{\Omega}_2} + \boldsymbol{\Omega}_3, \quad \bar{\Omega}_2^2 = \sqrt{\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{\Omega}_2} - \boldsymbol{\Omega}_3,$

$$Q = \frac{\sqrt[4]{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} - g}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \kappa + 1 & \kappa\frac{\left(\theta - \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\right)}{\left(\theta + \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\right)} - \kappa^2 \\ (1-\kappa)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) & \kappa^2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \kappa\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\frac{\left(\theta - \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\right)}{\left(\theta + \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\right)} \end{pmatrix} \mathcal{Q} \tag{3.3.64}$$

et

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \ \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 & \mathcal{Q}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.3.65}$$

Lorsque l'hamiltonien $H_{\theta\sigma}$ admet un ensemble complet de fonctions propres Ψ_n correspondante à des valeurs propres E_n la formule de l'expansion est:

$$K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) = \sum_{n_1,n_2} \Psi_{n_1,n_2}\left(Q_1^i, Q_2^i\right) \Psi_n^*\left(Q_1^f, Q_2^f\right) \exp\left[-iE_{n_1,n_2}T\right] \tag{3.3.66}$$

et la fonction d'onde sont

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1,n_2} = &\sqrt{\frac{\sqrt{\bar{\Omega}_{1\bar{\Omega}2}}}{\pi 2^{n_1+n_2} n_1! n_2!}} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\bar{\Omega}_1\left(Q_1 - Q_2\right)^2 + \bar{\Omega}_2\left(Q_1 + Q_2\right)^2\right)\right] \\ &\times H_{n_1}\left(\sqrt{\frac{\bar{\Omega}_1}{2}}\left(Q_1 - Q_2\right)\right) H_{n_2}\left(\sqrt{\frac{\bar{\Omega}_2}{2}}\left(Q_1 + Q_2\right)\right) \end{aligned} \tag{3.3.67}$$

et le spectre d'énergie est donnée par

$$E_{n_1,n_2} = \hbar\bar{\Omega}_1\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\bar{\Omega}_2\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \tag{3.3.68}$$

Dans le cas limite $\theta = \sigma = 0$, nous obtenons

$$\bar{\Omega}_{1,2}^2 = \omega^2 \pm \frac{\lambda}{m} \tag{3.3.69}$$

le propagateur dans le cas limite sont:

$$K_{00}(Q^f, Q^i; T) = \frac{m\boldsymbol{\omega}}{2i\pi \sin \boldsymbol{\omega}T} \exp\left\{\frac{im\boldsymbol{\omega}}{2\sin \boldsymbol{\omega}T}\cos \boldsymbol{\omega}T\left[Q^fQ^f + Q^iQ^i\right] - 2Q^iQ^f\right\} \tag{3.3.70}$$

3.3.1 Conclusion

Nous avons appliqué la construction de l'intégrale de chemin dans l'espace des phases non-commutative. Nous avons utilisé les coordonnées mixtes de l'espace des phases, et de la non-localité se manifeste aussi dans son terme d'interaction. Dans l'espace non-commutative les crochets de Poisson ont été écrits la forme symplectique déformée $J(\theta, \sigma)$. Nous avons

établi une action sur l'espace non commutative, qui contiennent une déformation sur la partie cinétiques. Nous avons utilisé une transformation canonique linéaire en fonction des paramètres (θ, σ) de transformer cette dérenier comme une habitude. Cette transformation canonique, induit un nouveau terme en fonction de (θ, σ) ajouté à hamiltonien. Cette transformation canonique, induit un nouveau terme en fonction de (θ, σ) ajouté à hamiltonien. Nous avons ensuite remplacé l'action par sa nouvelle forme dans le propagateur, en termes de coordonnées mixtes de l'espace des phases. Nous avons appliqué cette methode pour le cas de l'oscillateur harmonique couplé.

Nous avons considéré oscillateurs harmoniques couplés à deux dimensions. Nous avons ensuite calculer le terme supplémentaire dans l'hamiltonien du système dans ce cas. Dans le cas limite $\theta = \sigma = 0$, nous récupérons l'oscillateur harmoni couplé habitude.

3.4 Physique satistique non-commutative:

Parmi les différents domaines de la physique, l'étude des propriétés de la matière condensée apparaît comme l'une des sciences les plus complexes compte tenu du grand nombre d'atomes et de molécules interagissant entre eux. La première conséquence de cette complexité est l'émergence d'une multitude de transitions des phases prenant naissance dans les milieux condensés. Parmi les transitions les plus connues, on citera les problèmes du ferromagnétisme, de la ferroélectricité, des liquides super-fluides, de la supraconductivité, des transitions ordre-désordre dans les alliages ou encore de la transition de localisation d'Anderson. L'existence de telles transitions est le fruit du comportement collectif de la matière engendré par les interactions entre l'ensemble des particules qui la constituent. D'un point de vue théorie, la prise en compte de ce caractère collectif n'a été possible que grâce à l'élaboration de nouvelles méthodes d'analyses qui constituent de nos jours éssentiel de la Physique Statistique moderne.

Parmi ces méthodes, la théorie des intégrales de chemin de Feynman permet d'établir un lien entre la théorie statistique d'un système classique de dimension D et la mécanique quantique d'un système de dimension réduite $D - 1$. En particulier, elle s'applique très bien à toute une classe de problèmes relevant de la thermodynamique classique des systèmes unidimensionnels contenant un nombre infini de degrés de liberté. Dans ce contexte, elle permet une analyse quasi-exacte de la thermodynamique en se ramenant à l'étude des propriétés quantiques d'un unique système ponctuel.

3.4.1 Rappels sur fonction de Partition ordinaire:

- **Fonction de partition en mécanique classique:**

Considérons un ensemble classique de N particules distribuées sur les sites d'un réseau de dimension euclidienne $D = 1$. Chaque particule possède une masse m et son mouvement escaractérisé par la coordonnée x_n et l'impulsion p_n. L'Hamiltonien classique de cet ensemble de particules est de la forme :

$$H\left(p_n, x_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n^2}{2m} + V\left(x_n\right) \tag{3.4.1}$$

En supposant les particules en équilibre thermodynamique avec un réservoir d'énergie de température T_c, la fonction de partition canonique est définie par:

$$Z_n = \int \prod_n \frac{dx_n dp_n}{\hbar} \exp\left[-\beta_n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n^2}{2m} + V\left(x_n\right)\right] \tag{3.4.2}$$

où $\beta_c = 1/kT$. Dans le cas des système classique, les dgrés de liberté d'implusion peuvent être complètement intégrés. Donc en intégrant sur les impulsions, on peut calculer facilement la partie cinétique de la fonction de partition. Ceci n'est pas le cas pour la partie potentielle et on obtient finalement:

$$Z_n = \left(\frac{2\pi m}{\hbar^2 \beta_c}\right)^{\frac{n}{2}} \int \prod_n dx_n \exp\left[-\beta_n \sum_{n=0}^{\infty} V\left(x_n\right)\right] \tag{3.4.3}$$

De manière générale, il est impossible de calculer exactement cette fonction de partition, sauf dans le cas où le potentiel $V(x)$ présente une forme quadratique. Seule l'utilisation de méthodes d'approximations (théories des perturbations) ou de simulations numériques permet de mener les calculs à leur terme. Cependant, nous allons montrer que dans le cas du potentiel considéré ici, la fonction de partition peut être déterminée exactement en réalisant une dualité avec un problème de mécanique quantique.

- **Fonction de Partition en mécanique quantique:**

En mécanique quantique l'opérateur Hamiltonien d'une particule quantique de masse m placée dans un potentiel $W(x)$ est défini par:

$$H\left(p_n, x_n\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V\left(\hat{x}\right) \tag{3.4.4}$$

où $\hat{p}$ et $\hat{x}$ désignent respectivement l'opérateur impulsion et l'opérateur position.

En supposant cette particule en équilibre thermodynamique avec un réservoir d'énergie de température T_q, sa fonction de partition canonique est définie par:

$$Z = Tr\left[e^{-\beta\hat{H}}\right] \tag{3.4.5}$$

où $\beta = 1/kT_q$ et où Tr désigne une trace habituellement exprimée dans la base des états propres de l'Hamiltonien H. Cependant, l'opération de Trace étant indépendante du choix de base, un choix judicieux consiste à utiliser la représentation coordonnée $|x\rangle$ formée par les kets propres de l'opérateur position [14],[15]. Dans ces conditions, la fonction de partition devient:

$$Z = \int dx \, \langle x| \, e^{-\beta\hat{H}} \, |x\rangle \tag{3.4.6}$$

Pour évaluer cette fonction de partition, nous allons découper le paramètre β en N intervalles identiques et infiniment petits: $\beta = N\varepsilon$. Puisque l'opérateur $\hat{H}$ commute avec lui même, on peut réaliser la factorisation suivante $e^{-\beta\hat{H}} = e^{-\varepsilon\hat{H}}e^{-\varepsilon\hat{H}}e^{-\varepsilon\hat{H}}....$

Dès lors, en écrivant $\hat{H}$ sous la forme précédente dans l'expression de Z et en introduisant $(N-1)$ fois la relation de fermeture en représentation coordonnée entre chaque opérateur $exp(-\varepsilon H)$, on obtient l'expression suivante de la fonction de partition:

$$Z = \int dx_1 dx_2 dx_3 ... dx_N \, \langle x_1| \, e^{-\varepsilon\hat{H}} \, |x_2\rangle \, \langle x_2| \, e^{-\varepsilon\hat{H}} \, |x_3\rangle \, ... \, \langle x_N| \, e^{-\varepsilon\hat{H}} \, |x_1\rangle \tag{3.4.7}$$

L'étape suivante consiste à développer les différents éléments de matrice en utilisant la limite $\varepsilon \to 0$, c'est à dire $N \to \infty$. Ainsi, en considérant un élément de matrice particulier, on a tout d'abord

$$\langle x_n| \, e^{-\varepsilon\hat{H}} \, |x_{n+1}\rangle = \int dp_n \, \langle x_n| \, |p_n\rangle \, \langle p_n| \, e^{-\varepsilon\hat{H}} \, |x_{n+1}\rangle \tag{3.4.8}$$

où nous avons utilisé la relation de fermeture dans la représentation en impulsion $|p\rangle$. On montre alors, dans la limite $\varepsilon \to 0$, que:

$$\langle p_n| \, e^{-\varepsilon\hat{H}} \, |x_{n+1}\rangle = e^{-\varepsilon\frac{p_n^2}{2m} - \varepsilon W(x_{n+1})} \, \langle p_n| \, |x_{n+1}\rangle \tag{3.4.9}$$

D'où, en utilisant l'expression du produit des représentations coordonnée et impulsion:

$$\langle x_n| \, e^{-\varepsilon\hat{H}} \, |x_{n+1}\rangle = \int dp_n e^{\frac{i}{\hbar}p_n(x_n - x_{n+1})} e^{-\varepsilon\frac{p_n^2}{2m} - \varepsilon W(x_{n+1})} \tag{3.4.10}$$

On obtient une intégrale gaussienne sur p_n dont le résultat est

$$\langle x_n| \, e^{-\varepsilon\hat{H}} \, |x_{n+1}\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi\varepsilon\hbar^2}} \exp\left[\frac{m\left(x_n - x_{n+1}\right)^2}{2\varepsilon\hbar^2} - \varepsilon W\left(x_{n+1}\right)\right] \tag{3.4.11}$$

Finalement, la fonction de partition Z de la particule quantique se met sous la forme:

$$Z = \left(\frac{m}{2\pi\varepsilon\hbar^2}\right)^{\frac{N}{2}} \int dx_1 dx_2 ... dx_n \exp\left[\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{m\left(x_n - x_{n+1}\right)^2}{2\varepsilon\hbar^2} - \varepsilon W\left(x_n\right)\right]\right] \tag{3.4.12}$$

Nous remarquons d'après les calculs précédents, on voit apparaître une correspondance entre la fonction de partition classique d'un ensemble unidimensionnel de part, et la fonction de partition quantique d'une unique particule,

- **Fonction de Partition et L'integral de chemin:**

On rappelle la définition de la fonction de Partition:

$$Z = \sum e^{-\beta\hat{H}} \tag{3.4.13}$$

Ceci peut se réécrire toute simplement l'equation (3.4.6) comme suivant

$$Z = \int dx \left\langle x\right| e^{-\beta\hat{H}} \left|x\right\rangle \tag{3.4.14}$$

$$= \int dx \left\langle x\right| e^{\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\left(-\beta\hat{H}\right)} \left|x\right\rangle . \tag{3.4.15}$$

On reconnaît alors

$$Z = \int dx K\left(x, -i\beta\hbar; x, 0\right), \tag{3.4.16}$$

l'equation (3.4.16) est bien un propagateur en temps imaginaire.

On rappelle que le propagateur en temps imaginaire est le propagateur euclidien tel que

$$K_E\left(x_f, \tau_f; x_i, \tau_i\right) = K\left(x_f, -i\tau_f; x_i, -i\tau_i\right) \tag{3.4.17}$$

On a donc au final

$$Z = \int dx \int Dx_1 \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_0^{\beta\hbar} \mathcal{L}\left(x_1, \tau\right) d\tau\right) \tag{3.4.18}$$

3.4.2 Fonction de Partition de l'oscillateur harmonique couplés dans un système déformé

La fonction de partition $Z(\beta)$ joue un rôle important dans la thermodynamique, comme déjà discuté dans la référence du [16] dans le cas de l'espace non-commutative. Dans cette section, nous tirons la fonction de partition d'un oscillateur harmonique non commutative couplé à deux dimensions. Pour un système dans l'espace des phases noncommutative l'equation

(3.4.16) peut être définieen terme de propagateur dependent de paramètre de déformation comme suit,

$$Z_{\theta\sigma}(\beta\ ) = \int dQ K_{\theta\sigma}(Q,Q;\beta). \tag{3.4.19}$$

Nous pouvons observer l'équivalence

$$Z_{\theta\sigma}(\beta\ ) = \int dQ K_{\theta\sigma}(Q,i\beta\ ) = \int_{\{Q(0)=Q(\beta)\}} D\left[Q\right] \exp\left(-S_{\theta\sigma}\right) \tag{3.4.20}$$

Le résultat de la section précédente (3.3.63), après le changement $T = i\beta$ a la forme

$$\begin{aligned} K_{\theta\sigma}(Q;i\beta) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\Omega_1\Omega_2}{\sinh\Omega_1\beta\sinh\Omega_2\beta}\right]^{\frac{1}{2}} \times \exp\frac{-i\left[Q\Delta Q\right]_0^T}{2} \\ \times \exp\left\{\left[Q^f\eta Q^f + Q^i\eta Q^i - \frac{1}{2}Q^i\bar{\eta}Q^f\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

avec η et $\bar{\eta}$ sont 2×2 matrices:

$$\eta = \begin{pmatrix} i\Omega_1\coth\beta\Omega_1 + i\Omega_2\coth\beta\Omega_2 & i\Omega_2\coth\beta\Omega_2 - i\Omega_1\coth\beta\Omega_1 \\ i\Omega_2\coth\beta\Omega_2 - i\Omega_1\coth\beta\Omega_1 & i\Omega_1\coth\beta\Omega_1 + i\Omega_2\coth\beta\Omega_2 \end{pmatrix}, \tag{3.4.22}$$

et

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{i\Omega_1}{\sinh\beta\Omega_1} + \frac{i\Omega_2}{\sinh\beta\Omega_2} & \frac{i\Omega_2}{\sinh\beta\Omega_2} - \frac{i\Omega_1}{\sinh\beta\Omega_1} \\ \frac{i\Omega_2}{\sinh\beta\Omega_2} - \frac{i\Omega_1}{\sinh\beta\Omega_1} & \frac{i\Omega_1}{\sinh\beta\Omega_1} + \frac{i\Omega_2}{\sinh\beta\Omega_2} \end{pmatrix} \quad . \tag{3.4.23}$$

Nous vérifions maintenant que $K_{\theta\sigma}(i\beta)$ conduit à la fonction de partition bon pour l'oscillateur harmonique couplé. En utilisant l'équation (3.3.63), nous obtenons

$$Z_{\theta\sigma}\left(\beta\right) = \frac{1}{2i\pi}\left[\frac{\Omega_1\Omega_2}{\sinh\Omega_1\beta\sinh\Omega_2\beta}\right]^{\frac{1}{2}} \int dQ \exp\left(-Q\left[\bar{\eta}+\Delta-\eta\right]Q\right) \tag{3.4.24}$$

$$Z_{\theta\sigma}\left(\beta\right) = \frac{1}{\sqrt{\det\left[\bar{\eta}+\Delta-\eta\right]}}\left[\frac{\Omega_1\Omega_2}{\sinh\Omega_1\beta\sinh\Omega_2\beta}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.4.25}$$

Nous allons calculer l'énergie libre, l'énergie interne du système, et la capacité de chaleur en fonction de la température dans le cas où l'espace non commutative $\theta \neq \sigma \neq 0$. Nous commençons par l'énergie libre

L'énergie libre:

The free energy is defined by,

$$F_{\theta,\sigma} = -\beta^{-1}\log Z_{\theta\sigma}\left(\beta\right). \tag{3.4.26}$$

Nous avons besoin de la fonction de partition, (3.4.25),

$$\begin{aligned} F_{\theta,\sigma} &= -\beta^{-1}\log\frac{1}{\sqrt{\det\left[\bar{\eta}+\Delta-\eta\right]}}\left[\frac{\Omega_1\Omega_2}{\sinh\Omega_1\beta\sinh\Omega_2\beta}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\beta^{-1}}{2}\log\left(\det\left[\bar{\eta}+\Delta-\eta\right]\right)-\frac{\beta^{-1}}{2}\log\Omega_1\Omega_2 \\ &- \frac{\beta^{-1}}{2}\log\frac{e^{-\Omega_1\beta}}{(1-e^{-2\Omega_1\beta})}-\frac{\beta^{-1}}{2}\log\frac{e^{-\Omega_2\beta}}{(1-e^{-2\Omega_2\beta})}. \end{aligned} \tag{3.4.27}$$

Nous trouvons, l'énergie libre dans le cas non commutative,

$$\begin{aligned} F_{\theta,\sigma} &= \frac{\beta^{-1}}{2}\log\left(\det\left[\bar{\eta}+\Delta-\eta\right]\right)-\frac{\beta^{-1}}{2}\log\Omega_1\Omega_2 \\ &+ \frac{\Omega_1}{2}+\log\frac{1}{(1-e^{-2\Omega_1\beta})}+\frac{\Omega_2}{2}+\log\frac{1}{(1-e^{-2\Omega_2\beta})} \end{aligned} \tag{3.4.28}$$

L'énergie interne:

Dans les ensembles canoniques l'énergie interne est donnée par

$$U_{\theta,\sigma} = \frac{d}{d\beta}\left(\log Z_{\theta,\sigma}\right). \tag{3.4.29}$$

En prenant la dérivée par rapport au β nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta}\left(\log Z_{\theta,\sigma}\right) &= \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\Omega_1\beta}{2}+\frac{1}{2}\log\left(1-e^{-2\Omega_1\beta}\right)+\frac{\Omega_2\beta}{2}+\frac{1}{2}\log\left(1-e^{-2\Omega_2\beta}\right)\right) \\ &= \frac{\Omega_1}{2}+\frac{\Omega_1}{(e^{2\Omega_1\beta}-1)}+\frac{\Omega_2}{2}+\frac{\Omega_2}{(e^{2\Omega_2\beta}-1)}. \end{aligned} \tag{3.4.30}$$

on obtient alors l'énergie interne

$$U_{\theta,\sigma} = \Omega_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\left(e^{\frac{2\Omega_1}{T}}-1\right)}\right)+\Omega_2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\left(e^{\frac{2\Omega_2}{T}}-1\right)}\right). \tag{3.4.31}$$

C'est la formule de Planck pour l'énergie des oscillateurs harmoniques couplés. A des températures très basses ($T\ll\Omega_1$) et ($T\ll\Omega_2$), nous avons l'état fondamental

$$U_{\theta,\sigma} \simeq \frac{1}{2}\left(\Omega_1+\Omega_2\right), \tag{3.4.32}$$

et à haute température, on obtient les statistiques Stefan Boltzmann classiques

$$U_{\theta,\sigma} \simeq T.$$

chaleur spécifique:

Maintenant, nous procédons à trouver la chaleur spécifique, rappelons que ce est tout simplement la dérivée de l'énergie interne par rapport à la température T (à volume V constant)

$$C_{V_{\theta,\sigma}} = \frac{\partial U_{\theta,\sigma}}{\partial T} \tag{3.4.33}$$

En utilisant l'équation (3.4.31), on obtient la chaleur spécifique dans l'espace non commutative:

$$\begin{aligned} C_{V_{\theta,\sigma}} &= \frac{\partial}{\partial T}\left(\Omega_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{(e^{2\Omega_1\beta}-1)}\right)+\Omega_2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{(e^{2\Omega_2\beta}-1)}\right)\right) \\ &= k_\beta \frac{\left(\frac{2\Omega_1}{T}\right)^2 e^{\frac{-2\Omega_1}{k_\beta T}}}{2\left(e^{2\Omega_1\beta}-1\right)^2} + k_\beta \frac{\left(\frac{2\Omega_2}{T}\right)^2 e^{\frac{-2\Omega_2}{k_\beta T}}}{2\left(e^{2\Omega_2\beta}-1\right)^2} \end{aligned} \tag{3.4.34}$$

3.4.3 Fonction de partition de l'oscillateur harmonique couplés dans le cas limite ($\theta = \sigma = 0$)

Mettez $\theta = \sigma = 0$ nous avons $\bar{\mathbb{G}}^d = 0$ et $\Omega_{1,2}^2 = \omega^2 \pm \frac{\lambda}{m}$ puis,

$$\det\left[\bar{\eta}-\eta\right] = \frac{16\Omega_1\Omega_2}{\sinh\beta\Omega_1\sinh\beta\Omega_2}\left(\sinh^2\frac{\beta\Omega_1}{2}\sinh^2\frac{\beta\Omega_2}{2}\right) \tag{3.4.35}$$

ce qui donne:

$$Z_{0,0}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{16\Omega_1\Omega_2}{\sinh\beta\Omega_1\sinh\beta\Omega_2}\left(\sinh^2\frac{\beta\Omega_1}{2}\sinh^2\frac{\beta\Omega_2}{2}\right)}}\left[\frac{\Omega_1\Omega_2}{\sinh\Omega_1\beta\sinh\Omega_2\beta}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.4.36}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{16\left(\sinh^2\beta\Omega_1\sinh^2\beta\Omega_2\right)}} \tag{3.4.37}$$

$$Z_{0,0}(\beta) = \frac{1}{2\sinh\frac{\beta\Omega_1}{2}}\frac{1}{2\sinh\frac{\beta\Omega_2}{2}} \tag{3.4.38}$$

L'énergie libre:

L'énergie libre dans l'ensemble canonique est donnée par:

$$F_{0,0} = -\beta^{-1}\log Z_{0,0}(\beta). \tag{3.4.39}$$

ou

$$F_{0,0} = -\beta^{-1}\left(\left(\frac{\Omega_1\beta}{2}\right)-\log\frac{1}{2\left(1-e^{-\Omega_1\beta}\right)}+\left(\frac{\Omega_2\beta}{2}\right)-\log\frac{1}{2\left(1-e^{-\Omega_2\beta}\right)}\right) \tag{3.4.40}$$

L'énergie interne:

Nous trouvons l'énergie interne ensemble canonique,

$$U_{0,0} = -\frac{d}{d\beta}\left(\log Z_{0,0}\left(\beta\right)\right), \tag{3.4.41}$$

ou

$$U_{0,0} = \frac{\Omega_1}{2}\left(1+\frac{1}{(e^{\Omega_1\beta}-1)}\right) - \frac{\Omega_2}{2}\left(1+\frac{1}{(e^{\Omega_2\beta}-1)}\right). \tag{3.4.42}$$

Chaleur spécifique:

Maintenant nous avons mis $\theta = \sigma = 0$ dans (3.4.34) il se ensuit

$$C_{V_{0,0}} = k_\beta \frac{\left(\frac{\Omega_1}{T}\right)^2 e^{\frac{-\Omega_1}{k_\beta T}}}{\left(e^{\Omega_1\beta}-1\right)^2} + k_\beta \frac{\left(\frac{\Omega_2}{T}\right)^2 e^{\frac{-\Omega_2}{k_\beta T}}}{\left(e^{\Omega_2\beta}-1\right)^2}. \tag{3.4.43}$$

En d'autre part la chaleur spécifique est

$$\begin{aligned} C_{V_{0,0}} &= \frac{\partial U_{0,0}}{\partial T} \\ &= \frac{\partial}{\partial T}\frac{\Omega_1}{2}\left(1+\frac{1}{(e^{\Omega_1\beta}-1)}\right) - \frac{\partial}{\partial T}\frac{\Omega_2}{2}\left(1+\frac{1}{(e^{\Omega_2\beta}-1)}\right) \\ &= k_\beta \frac{\left(\frac{\Omega_1}{T}\right)^2 e^{-\frac{\Omega_1}{k_\beta T}}}{\left(e^{\Omega_1\beta}-1\right)^2} + k_\beta \frac{\left(\frac{\Omega_2}{T}\right)^2 e^{-\frac{\Omega_2}{k_\beta T}}}{\left(e^{\Omega_2\beta}-1\right)^2} \end{aligned} \tag{3.4.44}$$

3.4.4 Conclusion:

Nous avons calculé la fonction de partition $Z_{\theta,\sigma}$ d'un oscillateur harmonique couplé à deux dimensions dans l'espace non-commutative. À partir de laquelle nous avons calculé l'énergie interne libre du système, et la capacité de chaleur en fonction de la température dans le cas de non-commutative. Les applications réalisée sont analytiquement exacte et les cas limites sont bien récupérées.

Bibliographie

[1] M. Dubois-Violette. " Non-commutative differential geometry, quantum mechanics and gauge Theory". Dans C. Bartocci, U. Bruzzo et R. Cianci, éditeurs, Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, volume 375 de Lecture Notes in Physics, Rapallo, 1990. Springer-Verlag.

[2] Anais Smailagic and Euro spallucci J.Phy. A: Math. Gen. 36 (2003) L467-L471

[3] A. Connes, M. R. Douglas, A. Schwarz, JHEP 9802 (1998) 033.

[4] V. G. Kupriyanov 1308.1350V1 [hep-th] 6 Aug (2013)

[5] Dionysions Mylonas, Peter shupp and Richard J. Szabo 1402.7306V1 [hep-th] 28 Feb (2014)

[6] Slimane Zain and Yazid Delenda 1212.0208V1 [math-ph] 2 Dec (2012)

[7] Sunandan Gangopadhyaya and Frederik G Scholtz 1309.3144V2 [hep-th] 8 Jan (2014)

[8] Salvatore Galluccio, Fedele Lizzi and Patrizia Vitale 0810.2095V1 [hep-th] 12 Oct (2008)

[9] C. Duval, P. Horvathy, Phys. Lett. B **479**, 284 (2000) [hep-th/0002233]; J. Phys. A 34, 10097 (2001) [hepth/0106089]; P. Horvathy, Ann. Phys. 299, 128 (2002) [hep-th/0201007].

[10] C. S. Acatrinei 2007 J. Phys. A: Math. Theor. **40** F929-F933

[11] C .S. Acatrinei 2004 J. Phys. A: Math. Gen. **37** 1225

[12] Branko dragovish and Zoran Rakic ISSN 0081-5438, proceedings of the Steklov Institue of Mathematic, 2009, Vol. 265, pp. 82-91.

[13] C. Grosche, F.Steiner. Handbook of Feynman Path Integral.

[14]

[15] D.C.Khandekar, S V Lawande K.V Bhagwat. Path-Integral Methods and their Application.

[16] T.V. Fityo, Statistical physics in deformed space with minimal length

[17] V.P. Nair, A.P. Polychronakos, Phys. Lett. B **505**, 267 (2001) [hep-th/0011172]

[18] L. Jonke, S. Meljanac, Eur. Phys. J. C **29**, 433 (2003) [hep-th/0210042]; I. Dadic, L. Jonke, S. Meljanac, hepth/0301066

[19] A. TILBI, Intégrale de Chemin Semi-Classique et Théorie de de Broglie-Bohm, thése doctorat en sciences physique, (2007).

[20] S. Bellucci, Phys. Rev D **67**, 105014 (2003) [hepth/0301227]

[21] M.R. Douglas, N.A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73**, 977 (2001) [hep-th/0106048]

[22] P.K. Ghosh, Eur. Phys. J. C 42, 355–363 (2005).

[23] A Anderson and S.B Anderson, Phase Space Path Integration of Integrable Quantum Systems Annals of physics 199. 155-186 (1990).

[24] A.Smailagic,E. Spallucci,Phys.Rev.D 65,107701(2002)

[25] H. Weyl. The Classical Groups. New Jersey: Princeton University Press,1946.

[26] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M.M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, hetp-th/0012175.

4

Phase de Berry

4.1 Introduction:

Il y avait des études intensives sur la *phase* du *Berry* [1][2]. Cependant, en ce qui concerne le formalisme de l'intégrale de chemin, il manque encore une considération générale et systématique. Dans ce chapitre, nous souhaitons proposer une méthode générale et systématique pour obtenir la phase du Berry sous l'intégrale du chemin. Afin de séparer une partie géométrique de l'exposant, nous adoptons une "*technique euclidienne*" sur le formalisme de l'intégrale de chemin[3][4], qui ne parle que d'un simple changement de variable $t \rightarrow it$ (passage à l'imaginaire ou temps euclidien), cette technique euclidienne, rend la partie dynamique réelle mais la partie géométrique reste intacte. Ainsi, nous pouvons identifier la partie géométrique comme la partie imaginaire de l'exposant [5][6][7][8][9][10][11][12][14][15][16][16, 24][16].

Ensuite, nous présenterons deux applications de l'extraction de « *phase de Berry*» de l'oscillateur harmonique à deux dimensions couplées avec la fréquence $\omega(t)$ et la masse $m(t)$ sont des fonctions données arbitraires du temps dans le cas commutative et le cas noncommutative dans l'espace des phases mixte. Le traitement est basé sur l'utilisation de certaines transformations dépendant du temps.

4.1.1 Théorème adiabatique:

Soit un hamiltonien dépendant du temps $H(t) = \hat{H}(t/T)$, ou plus précisément un hamiltonien fonction d'un paramètre $X(t)$. Ce paramètre évolue lentement dans le temps et de façon continue; la durée T caractérise une évolution adiabatique ayant lieu lorsque T tend

vers l'infini. Nous notons par la suite des valeurs propres $E_n(t)$ instantanées de l'hamiltonien , et les vecteurs propres $|\Psi_n(t)\rangle$ instantanés,

$$H\left(\vec{X}(t)\right)|\Psi_n(t)\rangle = E_n(t)\,|\Psi_n(0)\rangle \tag{4.1.1}$$

$$|\Psi_n(t)\rangle\langle\Psi_n(t)| = \mathbf{1} \tag{4.1.2}$$

$$\langle\Psi_n(t)|\,\Psi_m(t)\rangle = \delta_{n,m}. \tag{4.1.3}$$

Les solution $|\Psi(t)\rangle$ de l'équation de Schrödinger dependante du temps vérifient:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H\left(\vec{X}(t)\right)|\Psi(t)\rangle. \tag{4.1.4}$$

L'opérateur d'évolution $U(t)$ du système, vérifiant la condition initiale $U(0)=1$ et relie l'état du système $|\Psi(t)\rangle$ au temps t à l'état initial $|\Psi(0)\rangle$ par la relation

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)\,|\Psi(0)\rangle \tag{4.1.5}$$

réécrivons l'équation (4.1.4) en terme de l'opérateur d'évolution:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t) = H\left(\vec{X}(t)\right)U(t), \qquad U(0)=1 \tag{4.1.6}$$

où $|\Psi(t)\rangle$ et $|\Psi(0)\rangle$ sont vecteurs propres de $H(t)$ et $H(0)$.

4.1.2 Solution de l'équation de Schrödinger:

La solution de l'équation de Schrodinger (4.1.6) est donnée par :

$$\begin{aligned} U(T) &= \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{i}{\hbar}H\left(X\left(t_{N-1}\right)\right)\Delta t\right)\left(1-\frac{i}{\hbar}H\left(X\left(t_{N-2}\right)\right)\Delta t\right) \\ &\quad\times ...\times\left(1-\frac{i}{\hbar}H\left(X\left(t_1\right)\right)\Delta t\right)\left(1-\frac{i}{\hbar}H\left(X\left(t_0\right)\right)\Delta t\right) \\ &= \mathbf{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H\left(X(t)\right)dt\right), \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

où : $\Delta t = \frac{T}{N}$, $t_k = k\Delta t$ $(k=0,...,N)$, avec $t_0=0$, $t_N=T$. Si nous insérerions (4.1.2) dans (4.1.7) successivement et utilisant:

$$\left\langle n\left(\vec{X}(t)\right)\right|\,m\left(\vec{X}(t-\Delta t)\right)\right\rangle \approx \delta_{n,m}\left(1-\Delta t\left\langle n\left(\vec{X}(t)\right)\right|\frac{\partial}{\partial t}\left|n\left(\vec{X}(t)\right)\right\rangle\right), \tag{4.1.8}$$

Nous faisons une transformation unitaire dépendante du temps afin de diagonaliser l'Hamiltonien, de sorte que:

$$V^{+}(t)\,H(t)\,V(t) = H^{V}(t), \tag{4.1.9}$$

où $H^V(t)$ est donnée par:

$$H^V(t) = \sum_n E_n(t) \left|n\left(X(0)\right)\right\rangle \left\langle n\left(X(0)\right)\right|. \tag{4.1.10}$$

Ici et dans la suite, nous écrivons $(H(t)$ et $(E_n(t))$ au lieu de $H\left(X(t)\right)$ et $E_n\left(X(t)\right)$. La substitution de (4.1.9) (en terme de $VH^V(t)V^+ = H(t)$) dans (4.1.1) et l'utilisation de (4.1.10), donnent:

$$V^+(t)\left|n\left(X(t)\right)\right\rangle = e^{-i\gamma_n(t)}\left|n\left(X(t)\right)\right\rangle, \tag{4.1.11}$$

où γ_n est une phase quelconque. Puisqu'il y'a un caractère arbitraire dans la définition de γ_n, nous imposons la condition suivante:

$$\left\langle n\left(X(0)\right)\right| V^+(t)\dot{V}(t)\left|n\left(X(0)\right)\right\rangle = 0 \tag{4.1.12}$$

Maintenant, En insérant (4.1.2) (avec $t = 0$) dans (4.1.7) successivement et utilisant de l'équation (4.1.9), nous trouvons:

$$\begin{aligned} U(T) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\{n_k\}_{k=0,..,N}} & V(t_N)\left|n_N(0)\right\rangle\left\langle n_N(0)\right| \\ & \times \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta t\left\{H^V\left((t_{N-1})\right) - i\hbar V^+(t_{N-1})\dot{V}(t_{N-1})\right\}\right)\left|n_{N-1}(0)\right\rangle\left\langle n_{N-1}(0)\right| \\ & \times ... \times \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta t\left\{H^V\left((t_0)\right) - i\hbar V^+(t_0)\dot{V}(t_0)\right\}\right)\left|n_0(0)\right\rangle\left\langle n_0(0)\right| \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

qui peut être réécrit, par l'utilisation de la condition (4.1.12), sous la forme **:**

$$\begin{aligned} U(T) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\{n_k\}_{k=0,..,N}} & V(t_N)\left|n_N(0)\right\rangle\left\langle n_N(0)\right|\left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta t H^V(t_{N-1})\right)\left|n_{N-1}(0)\right\rangle \\ & \left\langle n_{N-1}(0)\right| \times ... \times \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta t H^V(t_0)\right)\left|n_0(0)\right\rangle\left\langle n_0(0)\right|\left\{1 + O\left(\frac{1}{T}\right)\right\} \\ = & \sum_n \exp\left(\int_0^T dt\left(-\frac{i}{\hbar}E_n\left(X(t)\right) - i\gamma_n(T)\right)\right)\left|n_0(T)\right\rangle\left\langle n_0(0)\right|\left\{1 + O\left(\frac{1}{T}\right)\right\} \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

où nous avons utilisé (4.1.9) et (4.1.10) pour obtenir le résultat final. Notons que contrairement à (4.1.8), l'état reste au même niveau d'énergie tout le temps à cause de l'approximation adiabatique: s'il y a un changement $\left|n\left(\vec{X}(0)\right)\right\rangle$ vers $\left|m\left(\vec{X}(0)\right)\right\rangle$, à $t = t_m$, cette contribution est négligeable.

$$\int_0^T dt_m \left\langle m(0)\right| V^+(t_m)\dot{V}(t_m)\left|n(0)\right\rangle \times \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_m}^T dt\left(E_m(t) - E_n(t)\right)\right] \approx O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{4.1.15}$$

qui nous conduit à la fonction d'onde

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle &= U(t)|\Psi(0)\rangle \\ &= \sum_n \exp\left(\int_0^T dt\left(-\frac{i}{\hbar}E_n(X(t)) - i\gamma_n(T)\right)\right)|n_0(T)\rangle\langle n_0(0)|\left\{1+O\left(\frac{1}{T}\right)\right\}|\Psi(0)\rangle\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

avec

$$\gamma_n(T) = i\int_0^t dt'\langle n(X(t'))|\frac{\partial}{\partial t'}|n(X(t'))\rangle. \tag{4.1.17}$$

Cette phase, $\gamma_n(T)$ est appelée phase géométrique et pour certains T, telle que $X(T) = X(0)$ et $|n(X(T))\rangle = |n(X(0))\rangle$, n'est rien d'autre que la phase de Berry [18][19][20]. La phase de Berry ne dépend que du chemin C parcouru et pas de la durée T de ce parcours. Pourvu que ce temps soit suffisamment long pour assurer la validité de l'approximation adiabatique. C'est dans ce sens que la phase de Berry $\gamma_n(C)$ est d'origine purement géométrique par opposition à la phase dynamique.

On voit ceci par un simple changement de variables :

$$\frac{d}{dt} = \frac{dX}{dt}\frac{\partial}{\partial X} \tag{4.1.18}$$

$$d\vec{X} = \frac{d\vec{X}}{dt}dt \tag{4.1.19}$$

donc

$$\gamma_n(C) = i\int_{X(0)}^{X(t)} dX^a\langle n(X)|\frac{\partial}{\partial X^a}|n(X)\rangle. \tag{4.1.20}$$

4.1.3 Propagateur de Feynman:

Dans cette section [1], nous proposons une méthode pour trouver la phase de Berry à partir de la formule de l'intégrale de chemin. Comme nous l'avons vu dans la section précédente où $K(x,x';T) = \langle x|U(T)|x'\rangle$, donc le noyau de Feynman est donné par:

$$\begin{aligned}K(x,x';T) = &\sum_n \Psi_n(x;X(T))\,\Psi_n^*(x';X(0))\exp\left(\int_0^T -\frac{1}{\hbar}\left(E_n(X(t)) + i\gamma_n(T)\right)dt\right) \\ &\times\left\{1+O\left(\frac{1}{T}\right)\right\},\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

alors que le côté gauche du (4.1.21) est exprimé en terme de l'intégrale de chemin:

$$K\left(x,x';T\right)=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{i=1}^{N}\frac{dp\left(i\right)}{2\pi\hbar}\prod_{j=1}^{N-1}dx\left(j\right)$$
$$\times\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}\left\{p\left(k\right)\Delta x\left(k\right)-\Delta tH\left(p\left(k\right),\bar{x}\left(k\right);X\left(k\right)\right)\right\}\right)\Bigg|_{x_N=x,x_0=x'},\quad(4.1.22)$$

telle que $\Delta t=\frac{T}{N}$ et

$$\Delta x\left(k\right)=x\left(k\right)-x\left(k-1\right)\quad(4.1.23)$$
$$\bar{x}\left(k\right)=\frac{\left(x\left(k\right)-x\left(k-1\right)\right)}{2}\quad(4.1.24)$$

En mettant $\Delta s=\frac{\Delta t}{T}$ et $\Delta t\to 0$ $\left(N\to\infty\right)$, l'équation (4.1.22) devient:

$$K\left(x,x';T\right)=\int DxDp\exp\left(\frac{iT}{\hbar}\int_0^1 ds\left\{\frac{1}{T}p\frac{dx}{dt}-H\left(x,p;X\left(s\right)\right)\right\}\right),\quad(4.1.25)$$

D'après (4.1.25), nous pouvons voir que l'approximation adiabatique, $\frac{1}{T}-$exponentiel avec $T\to\infty$, est presque équivalent à l'approximation WKB, $\hbar-$expansion avec $\hbar\to 0$. Il est célèbre que la méthode d'approximation WKB est facilement effectuée comme la méthode du point celle sous l'intégrale de chemin. Ainsi il pourrait être convaincu que la méthode intégrale de chemin est la plus appropriée pour exécuter l'approximation adiabatique. Cependant, il est encore difficile d'extraire la phase du Berry de l'exposant, parce que dans (4.1.21), il y a une partie dynamique, $\int_0^T E_n\left(X\left(t\right)\right)dt$, ainsi qu'une partie géométrique dans l'exposant.

Dans la section suivante, nous discutons une «*technique euclidienne*» dans le formalisme de l'intégrale de chemin.

4.2 Technique Euclidienne:

La méthode de l'intégrale de chemin est plus forte lorsqu'elle est exprimée dans le modèle "euclidien". On peut extraire des informations sur " l'état fondamental" de la formule à partir de l'intégrale de chemin Euclidien, bien que cela dépend de l'espace de représentation. Afin de préciser notre point de vue, nous allons commencer par l'hamiltonien.

$$\hat{H}=H\left(\hat{P},\hat{X}\right)+h\left(\hat{x},\hat{p};\hat{X}\right),\quad(4.2.1)$$

où $\left(P,X\right)=\left(P_1,...,P_N,...,X_1,...,X_N\right)$; $N\geq 2$; dont les masses (M's génériquement) sont beaucoup plus lourdes que celle de $\left(p,x\right)$. Ici et dans ce qui suit, le symbole caret est utilisé

pour spécifier l'opérateur quantique. x se déplace beaucoup plus rapide que X en raison de sa masse plus légère, il est donc appelé variable rapide. Les X sont des variables lentes. En ce qui concerne le noyau de Feynman, cela peut être vu comme:

$$\begin{aligned} K\left(X,x;X',x';t\right) &= \langle X,x|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\right)|x',X'\rangle \\ &= \int DPDXDpDx\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt\left\{P\dot{X}+p\dot{x}-H\left(P,X\right)-h\left(p,x;X_c\right)\right\}\right) \\ &\simeq K_{WKB,M\to\infty}\left(X,X';t\right)\times K_{X_c}\left(x;x';t\right) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

où la troisième ligne est le résultat de la masse lourde, puisque $M\to\infty$ nous permet d'effectuer exactement l'approximation de WKB avec le système (P,X). Le noyau résultant est donné par

$$K_{X_c}\left(x;x';T\right)=\int DpDx\exp\left(\frac{iT}{\hbar}\int_0^t ds\left\{\frac{1}{T}p\frac{dx}{ds}-h\left(p,x;X_c\right)\right\}\right)\Big|_{X_c(T)=X_c(0)=X_0} \tag{4.2.3}$$

telle que X_c désigne la solution classique du système $(P;X)$ avec les conditions limites $X_c\left(t\right)=X;\ X_c\left(0\right)=X'$. L'hamiltonien effectif, $h\left(p,x;X_c\right)$, dépende du temps grâce à $X_c(t)$. Nous avons introduit un temps réduit $s=\frac{t}{T}$ afin de spécifier l'adiabatique $\frac{1}{T}$ en (**??**).

Si le mouvement classique est périodique et de période T, $X_c(T)=X_c(0)$, nous pouvons effectuer une expansion adiabatique par rapport au système (p,x), étant donné que T est généralement considéré comme étant beaucoup plus grand que l'échelle du temps pour un système de (p,x), en raison de la masse lourde. En général, $h\left(p,x;X_c\right)$ est donné par :

$$h\left(p,x;X_c\right)=h_0\left(p,x;X\right)+V\left(p,x;X_c\right) \tag{4.2.4}$$

tel que

$$h\left(p,x;X\right)=\frac{1}{2}\left\{Z\left(s\right)\hat{p}^2+Y\left(s\right)\left(\hat{p}\hat{x}+\hat{x}\hat{p}\right)+W\left(s\right)\hat{x}^2\right\} \tag{4.2.5}$$

avec des paramètres $X=(W(s),Y(s),Z(s))$ qui sont des fonctions de X_c. Avec cette forme, il est facile d'estimer le noyau

$$\begin{aligned} K_{X_c}\left(x;x';T\right)=\int DpDx\exp\Bigg(\frac{iT}{\hbar}\int_0^t ds\Bigg\{&\frac{1}{T}p\frac{dx}{ds}\\ &-\frac{1}{2}\left\{Z\left(s\right)\hat{p}^2+Y\left(s\right)\left(\hat{p}\hat{x}+\hat{x}\hat{p}\right)+W\left(s\right)\hat{x}^2\right\}\Bigg\}\Bigg)\Bigg|_{X_c(T)=X_c(0)=X_0} \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

introduirons d'abord une source J , [21], et la notation de vecteurs tel que :

$$J = \begin{pmatrix} J_p(s) \\ J_x(s) \end{pmatrix}, \qquad \Phi(s) = \begin{pmatrix} p(s) \\ x(s) \end{pmatrix}, \tag{4.2.7}$$

en tenant compte de $\frac{\delta}{\delta J} \longleftrightarrow \Phi$, l'équation (**??**) devient :

$$K_{X_c} = \exp\left[-\frac{1}{g}\int_0^1 dsV\left(g\frac{\delta}{\delta J}\right)\right] \int D\Phi\left[\frac{1}{g}\int_0^1 -\frac{1}{2}\Phi A\Phi^{-1} + J\Phi\right]\Big|_{\substack{J=0 \\ X_c(0)=X_c(T)=X_c}} \tag{4.2.8}$$

avec

$$g = -i\frac{1}{\hbar}, \qquad A^{-1}(s,s') = \delta(s,s')\begin{pmatrix} Z(s) & Y(s) - \frac{1}{T}\frac{d}{ds} \\ Y(s) + \frac{1}{T}\frac{d}{ds} & W(s) \end{pmatrix} \tag{4.2.9}$$

l'intégrale dans (4.2.8) est une intégration gaussienne sur Φ que l'on calcule explicitement:

$$K_{X_c} = \frac{\Psi(x,x')}{\sqrt{\det A^{-1}}}\exp\left[-\frac{1}{g}\int_0^1 dsV\left(g\frac{\delta}{\delta J}\right)\right] \left[\frac{1}{g}\int_0^1 -\frac{1}{2}J(s)A(s,s')J^{-1}(s)\right]\Big|_{\substack{J=0 \\ X_c(0)=X_c(T)=X_c}} \tag{4.2.10}$$

où $A(s,s')$ est une fonction de Green, définie par:

$$\int_0^1 ds' A^{-1}(s,s')A(s,s") = \delta(s-s") \tag{4.2.11}$$

et $\Psi(x,x')$ désigne la partie de la fonction d'onde (qui n'est pas pertinente à la phase de Berry). En insérant l'identité:

$$\exp\left(\frac{1}{g}\int_0^1 dsJ(s)\varphi(s)\right)\Big|_{\varphi=0} = 1, \tag{4.2.12}$$

ou peut réécrire le J-dérivé dans (4.2.10) à la φ-dérivé donnant :

$$K_{X_c} = \frac{\Psi(x,x')}{\sqrt{\det A^{-1}}}\exp\left[-\frac{1}{g}\int_0^1 dsV\left(g\frac{\delta}{\delta J}\right)\right] \left[\frac{g}{2}\int_0^1 dsds'\frac{\delta}{\delta\varphi(s)}A(s,s')\frac{\delta}{\delta\varphi(s')}\right]\Big|_{\varphi=0} \tag{4.2.13}$$

Il est presque évident que l'hamiltonien quadratique (4.2.5), appelé maintenant oscillateur harmonique généralisé [2][3], est fondamental dans l'étude de la phase du Berry.

La tâche suivante est pour sélectionner la phase du Berry à partir de $\sqrt{\det A^{-1}}$. Tout d'abord rappelons l'expression (4.1.20); c'est à dire que si $t \to it$, la phase géométrique n'a pas changé. La méthode deremplacement $t \to it$ (passage à l'imaginaire ou temps euclidien) sous l'intégrale de chemin est bien connue sous le nom de Technique Euclidienne, [4][17]. Le point de départ est le noyau de Feynman:

$$\tilde{K}(x, x'; T) = \langle x| \exp\left(-\frac{T}{\hbar} H(\hat{x}, \hat{p})\right) |x'\rangle \tag{4.2.14}$$

Pour simplifier, nous avons supposé l'hamiltonien indépendant du temps, en prenant $T \to \infty$, il devient (4.2.14) :

$$\begin{aligned} \tilde{K}(x, x'; T) &= \lim_{T\to\infty} \langle x| n\rangle \exp\left(-\frac{T}{\hbar} E_n\right) \langle n |x'\rangle \\ &= e^{-\frac{T}{\hbar} E_0} \langle x| 0\rangle \langle 0 |x'\rangle \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

où $|n\rangle' s$ sont les états propres de $H(\hat{x}, \hat{p})$; $H(\hat{x}, \hat{p}) |n\rangle = E_n |n\rangle$, E_0 est l'énergie de l'état fondamental. Ainsi, l'expression intégrale du chemin (4.2.15) contient l'information de l'énergie de l'état fondamental ainsi que celle de la fonction d'onde associée $\Psi_0(x) = \langle x| 0\rangle$ [2].

Selon ceux-ci nous considérons :

$$-\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} |\Psi(\tau)\rangle = H(\hat{x}, \hat{p}; X(\tau)) |\Psi(\tau)\rangle \tag{4.2.16}$$

Ici, $X(\tau)$ est supposé être la même fonction précédente; ce qui nous permet d'utiliser toutes les relations (4.1.1) et (4.1.2), même dans ce cas.

En suivant la même procédure (4.1.21), nous obtenons l'opérateur d'évolution temporelle euclidienne $\tilde{U}(T)$:

$$\tilde{U}(T) = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\hbar} \Delta t H(t_{N-1})\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{\hbar} \Delta t H(t_0)\right) \tag{4.2.17}$$

et le noyau Euclidien :

$$\tilde{K}(x, x'; T) = \langle x| \tilde{U}(T) |x'\rangle \tag{4.2.18}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_n \Psi_n(x; X(T)) \Psi_n^*(x'; X(0)) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(t)\, dt + i\gamma_n(T)\right) \\ &\times \left\{1 + O\left(\frac{1}{T}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

alors que (4.2.19) est exprimé par l'intégrale de chemins:

$$K_{X_c}(x; x'; T) = \int DpDx \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_0^t ds \left\{ip\frac{dx}{dT} - H(\hat{x}, \hat{p}; X)\right\}\right)\Big|_{X_c(T)=X_c(0)=X_0} \tag{4.2.20}$$

Par conséquent (4.2.19) doit devenir, en prenant $T \to \infty$, comme :

$$\tilde{K}(x, x'; T) \underset{T\to\infty}{\sim} \sum_n \Psi_0(x; X(T)) \Psi_0^*(x'; X(0)) \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_0^T E_0(t)\, dt + i\gamma_0(T)\right) \quad (4.2.21)$$

Notons qu'il n'existe qu'une seule quantité imaginaire, dans l'exposant de (4.2.21), qui n'est qu'une phase géométrique.

D'où la proposition de '*Kashiwa*' dans son article [1] avec trois étapes pour obtenir la phase du Berry et se présentent comme suit :

1. Considérez le noyau Euclidien pour l'hamiltonien donné: $t \to -it$ tout en gardant les variables externes inchangées.

2. Vérifiez la limite maximum " $T \to \infty$" du noyau.

3. Trouver la partie imaginaire de $O(1)$ à partir de l'exposant du propagateur.

Ces procédures nous apportent toutes les informations sur l'état fondamental, y compris la phase du Berry. Une fois que nous avons trouvé toutes les informations pour l'état fondamental, alors commencer avec un nouveau noyau obtenu en soustrayant (4.2.21) du noyau d'origine, (4.2.20), et suivre la même procédure que la procédure ci-dessus. Nous obtenons ensuite les informations sur le premier niveau excité et ainsi de suite.

Dans la suite, nous allons calculer la phase de Berry de l'oscillateur harmonique à deux dimensions dans le cas commutatif.

4.2.1 L'oscillateur harmonique couplés en fonction du temps dans l'espace des phases commutative:

Nous commençons avec l'oscillateur harmonique couplé a deux dimensions dans l'espace des phases commutative, l'hamiltonien de ce système est :

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2; p_1, p_2) = &\frac{1}{2m(t)}\left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2\right) + \frac{m(t)\,\omega(t)}{2}\left(\hat{x}_2^2 + \hat{x}_1^2\right) + \frac{\lambda_1(t)}{2}\left(\hat{p}_1\hat{x}_1 + \hat{x}_1\hat{p}_1\right) \quad (4.2.22)\\ &+ \frac{\lambda_2(t)}{2}\left(\hat{p}_2\hat{x}_2 + \hat{x}_2\hat{p}_2\right), \end{aligned}$$

où x et p sont conjugués canoniquement et $m(t)$, $\omega(t)$ sont, respectivement, la masse et la fréquence associées à l'oscillateur harmonique généralisé, qui sont des fonctions réelles arbitraire en temps.

L'évolution de la mécanique quantique du système peut être décrite par le propagateur dans un espace des phases mixte de l'intégrale de chemin de Feynman comme suit :

$$K(Q^f,Q^i;t)=\int DQDP \exp\int\left(\left(PJ_{0,0}^{-1}\dot{Q}-\frac{1}{2}PM\left(t\right)P-\frac{1}{2}QW\left(t\right)Q-P\lambda\left(t\right)Q\right)dt. \tag{4.2.23}$$

où $Q^T=(x_1,p_2)$ et $P^T=(x_2,p_1)$, avec les matrices $M\left(t\right)$ et $W\left(t\right)$ sont la masse et la fréquence et sont fonction dépendants du temps, respectivement, étaient $M(\mathrm{t})W(\mathrm{t})-\lambda^T(\mathrm{t})\lambda(\mathrm{t})\rangle 0$, $M(\mathrm{t})\rangle 0$.

$$M\left(t\right)=\begin{pmatrix}\mu_1\left(t\right)&0\\0&\mu_2\left(t\right)\end{pmatrix},\qquad W\left(t\right)=\begin{pmatrix}\omega_1^2\left(t\right)&0\\0&\omega_2^2\left(t\right)\end{pmatrix},\qquad \lambda\left(t\right)=\begin{pmatrix}0&\lambda_2\left(t\right)\\\lambda_1\left(t\right)&0\end{pmatrix}, \tag{4.2.24}$$

$$\mu_1\left(t\right)=m\left(t\right)\omega^2\left(t\right),\qquad \mu_2\left(t\right)=\frac{1}{m\left(t\right)} \tag{4.2.25}$$

$$\omega_1\left(t\right)=\omega\left(t\right)\sqrt{m\left(t\right)},\qquad \omega_2\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{m\left(t\right)}}. \tag{4.2.26}$$

Le but de cet exemple est le calcul de la phase du Berry de l'oscillateur harmonique couplé à deux dimensions dans le cas de l'espace des phases mixte commutative sous le formalisme de l'intégrale de chemin euclidien,nous suivons les étapes de [1], pour cela, nous pouvons écrire directement correspondant le noyau de propagation correspondant et en mettant $s=t/T$, l'equation (4.2.23) sous la forme d'une matrice:

$$K(Q^f,Q^i;T)=\int DQDP \exp(T)\int\left(\left(\frac{i}{T}PJ^{-1}\dot{Q}-\frac{1}{2}PM\left(s\right)P-\frac{1}{2}QW\left(s\right)Q-P\lambda\left(s\right)Q\right)ds. \tag{4.2.27}$$

Maintenant, nous faisons le changement de variable $P\rightarrow JP$ ci-dessous pour avoir la forme d'une matrice:

$$K(Q^i,Q^f,T)=\int DQDP\exp\left(T\right)\int\left(\frac{i}{T}P\dot{Q}-\frac{1}{2}P\left(JMJ^{-1}\right)P-\frac{1}{2}QW\left(s\right)Q-P\left(J\lambda\left(s\right)\right)Q\right)ds. \tag{4.2.28}$$

Eliminons la matrice (JMJ^{-1}) et le couplage $P\left(J\lambda\left(s\right)\right)Q$, pour simplifier le lagrangien, et prenons le nouvel espace des phases par la transformation canonique $(Q,P)\rightarrow(X,\Pi)$ [31, 32, 29] selon,

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_2(s)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu_1(s)}} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_1(s) & 0 \\ 0 & \beta_2(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right] \tag{4.2.29}$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_2(s)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_1(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.30}$$

où les fonctions $\beta(s)$ peuvent être facilement choisies de faire la séparation des variables, les équations de la mécanique classique, sont :

$$P_j = \frac{\partial}{\partial Q_j} F_2(Q_1, Q_2; \Pi_1, \Pi_2, t) \quad ; \quad X_j = \frac{\partial}{\partial \Pi_j} F_2(Q_1, Q_2; \Pi_1, \Pi_2, t), \qquad j = 1, 2 \tag{4.2.31}$$

et

$$H = \mathcal{H} + \frac{\partial}{\partial t} F_2(Q_1, Q_2; \Pi_1, \Pi_2, t) \tag{4.2.32}$$

la propagateur (4.2.28) prond la nouvelle forme

$$K(Q^f, Q^i; T) = \int D\Pi DX \exp \frac{i\left[X(\beta(s))X\right]_0^T}{2} \times \exp(T) \int ds \left[\frac{i}{T} \Pi \dot{X} - \frac{1}{2} \left(\Pi\Pi + X\Omega(s) X \right) \right], \tag{4.2.33}$$

tels que

$$\Omega(s) = \begin{pmatrix} \mu_2\omega_1^2 - \beta_1^2 + \frac{i}{T}\mu_2 \frac{d}{ds}\left(\frac{\beta_1}{\mu_2}\right) & 0 \\ 0 & \mu_1\omega_2^2 - \beta_2^2 + \frac{i}{T}\mu_1 \frac{d}{ds}\left(\frac{\beta_2}{\mu_1}\right) \end{pmatrix}, \tag{4.2.34}$$

et

$$\beta_1(s) = \lambda_1(s) - \frac{i}{2T} \frac{\dot{\mu}_2(s)}{\mu_2(s)}, \tag{4.2.35}$$

$$\beta_2(s) = -\lambda_2(s) - \frac{i}{2T} \frac{\dot{\mu}_2(s)}{\mu_2(s)}. \tag{4.2.36}$$

L'intégration sur l'implusion Π, est facilement réalisée pour donner

$$K(Q_j^f, Q_j^i; T) = \int DX \exp \frac{i\left[X(\beta(s))X\right]_0^T}{2} \times \exp\left\{ T \int \left(-\frac{1}{2T^2} \dot{X}\dot{X} - \frac{1}{2} (\Omega_1^c)^2(s) X_1^2 - \frac{1}{2} (\Omega_2^c)^2(s) X_2^2 \right) ds \right\}, \tag{4.2.37}$$

C'est le propagateur correspondant à deux l'oscillateurs harmoniques présentant la fréquence en fonction du temps $\Omega_1(s)$ et $\Omega_2(s)$, et ayant des masses qui sont égaux à l'unité:

$$\Omega_j^2(s) = \mathbf{w}_j^2(s) - \frac{1}{T} \tilde{w}_j(s); \quad j = 1, 2 \tag{4.2.38}$$

avec

$$\mathbf{w}_1(s) = \left(\mu_2\omega_1^2 - \beta_1^2 + \beta_1(s)\,\lambda_1(s)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.2.39}$$
$$\mathbf{w}_2(s) = \left(\mu_1\omega_2^2 - \beta_2^2 - \beta_2(s)\,\lambda_2(s)\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\tilde{w}_1(s) = i\mu_2\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta_1}{\mu_2}\right) \tag{4.2.40}$$

$$\tilde{w}_2(s) = i\mu_1\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta_2}{\mu_1}\right) \tag{4.2.41}$$

nous proposons la formule de Van Vleck-Pauli

$$K(Q_f, Q_i; s) = \sqrt{\det\left(\frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2 S}{\partial X_f \partial X_i}\right)}\exp\left(iS\left(X_f, X_i; T\right)\right), \tag{4.2.42}$$

Le lagrangien est donnée par

$$L = \frac{-1}{2T^2}\left(\frac{dX_j}{ds}\right)\left(\frac{dX_j}{ds}\right) - \frac{1}{2}\Omega_j^2(s)X_j^2 \tag{4.2.43}$$

les équations du mouvement sont

$$\left(\frac{d^2X_1}{ds^2}\right) - T^2\Omega_1^2(s)X_1 = 0 \tag{4.2.44}$$
$$\left(\frac{d^2X_2}{ds^2}\right) - T^2\Omega_2^2(s)X_2 = 0 \tag{4.2.45}$$

La condition aux limite est

$$X_{(j)c}(0) = Q^i_{(j)}, \quad X_{(j)c}(T) = Q^f_{(j)}; \qquad (j) = 1, 2 \tag{4.2.46}$$

tel que $X(s) = X_c(s) + \xi(s)$, nous trouvons le propagateu

$$K(Q_f, Q_i; T) = \sqrt{\det\left(\frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2 S}{\partial X_f \partial X_i}\right)}\exp\left(-S\left(X_f, X_i; T\right)\right), \tag{4.2.47}$$

où

$$S\left(X_f, X_i; T\right) = \Phi(X_f, X_i)\exp\frac{1}{2T}\left[X_c\frac{dX_c}{ds}\right]_0^T, \tag{4.2.48}$$

nous mettons les deux ansatz pour (4.2.44) et (4.2.45)

$$X_{1c} = e^{T\int_0^s d\sigma\rho^{(1)}(\sigma)}c_1; \qquad \rho^{(1)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho_n^{(1)}(s)\left(\frac{1}{T}\right)^n \tag{4.2.49}$$

$$X_{2c} = e^{T\int_0^s d\sigma\rho^{(2)}(\sigma)}c_2; \qquad \rho^{(2)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho_n^{(2)}(s)\left(\frac{1}{T}\right)^n \tag{4.2.50}$$

ou

$$\rho^{(j)}(s) = \left(\rho_0^{(j)}\right) + \left(\rho_1^{(j)}\right)\left(\frac{1}{T}\right) + \left(\rho_2^{(j)}\right)\left(\frac{1}{T}\right)^2 + ...; \quad j = 1, 2 \tag{4.2.51}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes

$$\begin{cases} T^2\left(\rho^{(1)}(s)\right)^2 - T^2\Omega_1^2(s) + T\dot{\rho}^{(1)}(s) = 0 \\ T^2\left(\rho^{(2)}(s)\right)^2 - T^2\Omega_2^2(s) + T\dot{\rho}^{(2)}(s) = 0 \end{cases} \tag{4.2.52}$$

alors, nous pouvons utiliser (4.2.51)

$$\begin{cases} T^2\left(\rho_0^{(1)}\right)^2 + T\dot{\rho}_0^{(1)} + \left(\rho_1^{(1)}\right)^2 - T^2\mathbf{w}_1^2 - T\tilde{w}_1 = 0 \\ T^2\left(\rho_0^{(2)}\right)^2 + T\dot{\rho}_0^{(2)} + \left(\rho_1^{(2)}\right)^2 - T^2\mathbf{w}_2^2 - T\tilde{w}_2 = 0 \end{cases} \tag{4.2.53}$$

qui devient, pour $\mathrm{O}(T^2)$

$$\begin{cases} (\rho_0^{(1)})^2 - \mathbf{w}_1^2 = 0 \\ (\rho_0^{(2)})^2 - \mathbf{w}_2^2 = 0 \end{cases} \tag{4.2.54}$$

et pour $\mathrm{O}(T)$

$$\begin{cases} 2(\rho_0^{(1)})\left(\rho_1^{(1)}\right) + \dot{\rho}_0^{(1)} - \tilde{w}_1 = 0 \\ 2(\rho_0^{(2)})\left(\rho_1^{(2)}\right) + \dot{\rho}_0^{(2)} - \tilde{w}_2 = 0 \end{cases}; \tag{4.2.55}$$

Dans le cas présent, nous avons seulement besoin $O(T^2)$ et $O(T)$ qui se trouvent comme,

$$\begin{cases} \rho_0^{(1)} = \pm\mathbf{w}_1 \\ \rho_0^{(2)} = \pm\mathbf{w}_2 \end{cases} \tag{4.2.56}$$

$$\begin{cases} \rho_1^{(1)} = \frac{-\dot{\rho}_0^{(1)} + \tilde{w}_1}{2(\rho_0^{(1)})} \\ \rho_1^{(2)} = \frac{-\dot{\rho}_0^{(2)} + \tilde{w}_2}{2(\rho_0^{(2)})} \end{cases} \tag{4.2.57}$$

En tenant compte la condition limite (4.2.46) nous obtenons enfin

$$\begin{aligned} X_{1c}(s) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{w}_1(s)}\sinh\Theta_1(T)} \Big\{ & \sqrt{\mathbf{w}_1(T)}X_1^f \sinh\Theta_1(s) \\ & + \sqrt{\mathbf{w}_1(0)}X_1^i \sinh\bar{\Theta}_1(s) \Big\} \end{aligned} \tag{4.2.58}$$

$$\begin{aligned} X_{2c}(s) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{w}_2(s)}\sinh\Theta_2(T)} \Big\{ & \sqrt{\mathbf{w}_2(T)}X_2^f \sinh\Theta_2(s) \\ & + \sqrt{\mathbf{w}_2(0)}X_2^i \sinh\bar{\Theta}_2(s) \Big\} \end{aligned} \tag{4.2.59}$$

où

$$\begin{cases} \Theta_1(s) = T\int_0^s d\sigma \left(\mathbf{w}_1(\sigma) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\tilde{w}_1(\sigma)}{\mathbf{w}_1(\sigma)}\right)\right) \\ \Theta_2(s) = T\int_0^s d\sigma \left(\mathbf{w}_2(\sigma) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\tilde{w}_2(\sigma)}{\mathbf{w}_2(\sigma)}\right)\right) \end{cases} \tag{4.2.60}$$

et $\bar{\Theta}_j(s) = \Theta_j(T) - \Theta_j(s)$. A partir de (4.2.48), on trouve donc

$$\frac{1}{2T}\left[X_1\frac{dX_1}{ds}\right]_0^T = -\frac{\sqrt{\mathbf{w}_1^c(T)\mathbf{w}_1^c(0)}}{2\sinh\Theta_1(T)} \left\{\left(\sqrt{\frac{\mathbf{w}_2^c(T)}{\mathbf{w}_2^c(0)}}\left(X_2^f\right)^2 + \sqrt{\frac{\mathbf{w}_2^c(0)}{\mathbf{w}_2^c(T)}}\left(X_2^i\right)^2\right)\cosh\Theta_2(s) - 2X_2^fX_2^i\right\} \tag{4.2.61}$$

et

$$\frac{1}{2T}\left[X_2\frac{dX_2}{ds}\right]_0^T = -\frac{\sqrt{\mathbf{w}_2^c(T)\mathbf{w}_2^c(0)}}{2\sinh\Theta_2(T)} \left\{\left(\sqrt{\frac{\mathbf{w}_2^c(T)}{\mathbf{w}_2^c(0)}}\left(X_2^f\right)^2 + \sqrt{\frac{\mathbf{w}_2^c(0)}{\mathbf{w}_2^c(T)}}\left(X_2^i\right)^2\right)\cosh\Theta_2(s) - 2X_2^fX_2^i\right\} \tag{4.2.62}$$

où on voit apparaitre le facteur déterminant, $\det\left(\frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2 S}{\partial X^f \partial X^i}\right)$ à

$$\frac{1}{\sqrt{\det\left(\frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2 S}{\partial Q_1^f \partial Q_1^i}\right)}} = \frac{\left(\mathbf{w}_1^c(T)\mathbf{w}_1^c(0)\right)^{\frac{1}{2}}}{2\sinh\Theta_1(T)} \tag{4.2.63}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\det\left(\frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2 S}{\partial Q_2^f \partial Q_2^i}\right)}} = \frac{\left(\mathbf{w}_2^c(T)\mathbf{w}_2^c(0)\right)^{\frac{1}{2}}}{2\sinh\Theta_2(T)} \tag{4.2.64}$$

substituant (4.2.63), (4.2.64) et (4.2.48) avec (4.2.61) (4.2.62) dans (4.2.47), on obtient

$$K(Q^f, Q^i; T) = \prod_{j=1}^{2} K(Q_j^f, Q_j^i; T) \tag{4.2.65}$$

où

$$K(Q_j^f, Q_j^i; T) = \prod_{j=1}^{2} \frac{\left(\mathbf{w}_j^c(T)\mathbf{w}_j^c(0)\right)^{\frac{1}{2}}}{2\sinh\Theta_j(T)} \exp\left(-\frac{\sqrt{\mathbf{w}_j^c(T)\mathbf{w}_j^c(0)}}{2\sinh\Theta_j(T)} \left\{\left(\sqrt{\frac{\mathbf{w}_j^c(T)}{\mathbf{w}_j^c(0)}}\left(X_j^f\right)^2 + \sqrt{\frac{\mathbf{w}_j^c(0)}{\mathbf{w}_j^c(T)}}\left(X_j^i\right)^2\right)\cosh\Theta_j(s) - 2X_j^fX_j^i\right\} - \exp\frac{i\left[X\beta\left(s\right)X\right]_0^T}{2}\right) \tag{4.2.66}$$

maintenant les informations sur l'état grand peuvent être dérivées en mettant T$\rightarrow \infty$

$$K(Q^f,Q^i;T) \underset{T\rightarrow\infty}{\sim} \left(\prod_{j=1}^{2}\left(\mathbf{w}_j^c(T)\mathbf{w}_j^c(0)\right)^{\frac{1}{4}}\right) e^{-\frac{1}{2}\Sigma_{j=1}^{2}\Theta_j(T)} \times \prod_{j=1}^{2}\exp\left\{\left(\left(\mathbf{w}_j^c(T)+i\beta\left(T\right)\right)\left(X_j^f\right)^2+\left(\mathbf{w}_j^c(0)-i\beta\left(0\right)\right)\left(X_j^i\right)^2\right)\right\}.$$

La partie imaginaire de Θ_1(T) et Θ_2(T), (4.2.60) correspond à la phase de Berry et la partie réelle de la dynamique

$$\gamma_1(T)=\frac{1}{4}\int_0^T dt\left(\frac{1}{m\left(t\right)\sqrt{\omega^2\left(t\right)-\lambda_1^2\left(t\right)}}\frac{d}{dt}\left(m\left(t\right)\lambda_1\left(t\right)\right)\right), \tag{4.2.67}$$

$$\gamma_2(T)=\frac{1}{4}\int_0^T dt\left(\frac{m\left(t\right)\omega^2\left(t\right)}{\sqrt{\omega^2\left(t\right)-\lambda_2^2\left(t\right)}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda_2\left(t\right)}{m\left(t\right)\omega^2\left(t\right)}\right)\right). \tag{4.2.68}$$

Le noyau de Feynman pour T$\sim \infty$ est donnée par

$$K(Q^f,Q^i;T) \underset{T\rightarrow\infty}{\sim} \Phi_0\left(Q^f,\mathbf{X}\left(T\right)\right)\Phi_0\left(Q^i,\mathbf{X}\left(0\right)\right)\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_0^T dt\left(E_0\left(\mathbf{X}\left(t\right)\right)+i\gamma_0\left(T\right)\right)\right\}, \tag{4.2.69}$$

la fonction propre de l'état fondamental,

$$\Phi_0\left(Q^f,X\left(T\right)\right)=\prod_{j=1}^{2}\left(\left(\frac{\mathbf{w}_j\left(t\right))}{M_j\left(t\right)}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left\{-\frac{1}{M_j\left(t\right)}\left(\left(\mathbf{w}_j(t)+i\lambda_j\left(t\right)\right)Q_j^2\right)\right\}\right) \tag{4.2.70}$$

et l'énergie de l'état fondamental

$$E_0\left(\mathbf{X}\left(t\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{2}\left(\mathbf{w}_j\left(X(t)\right)\right)^{\frac{1}{4}}\right) \tag{4.2.71}$$

4.3 Phase de Berry dans l'espace des phases non-commutative:

Notre objectif est d'extraire la «phase de berry» dans l'espace des phasess non-commutatif via l'intégrale de chemin comme nous l'avons vu dans la section (4.2). On définit l'algèbre non-commutative sous la forme générale par le relation suivante:

$$[x_i, x_j] = i\mathbf{\Theta}_{ij}, \qquad [p_i, p_j] = i\mathbf{\Sigma}_{ij}, \qquad [x_i, p_j] = i\delta_{ij}., \tag{4.3.1}$$

Alors, nous suivrons les étapes recommandées par "Kashiwa" dans le dernier paragraphe de la section (4.2) , et nous l'appliquerons au noyaut de Feynman, pour un potentiel général, dans l'espace des phases non commutative. Nous rappellerons d'abord le formalisme de Feynman (3.3.33), que nous avons déjà construit dans un espace mixte et non commutatif, dans le chapitre précédent;

$$K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) = \int DQDP \exp\frac{i}{\hbar}\int dt\left(\mathcal{P}J^{-1}\dot{Q} - H_{\theta\sigma}(Q,P)\right), \tag{4.3.2}$$

où l'hamiltonien dans l'espace des phases non commutatif est:

$$H_{\theta\sigma}(Q,P) = H(Q,P) - H_{\beta}(Q,P). \tag{4.3.3}$$

Ensuite on commence par la première étape:

1. Effectuons la transformation $t \rightarrow -it$ (passage au temps imaginaire) pour obtenir les résultats en temps réel, donc l'équation (4.3.2) devient:

$$K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) = \int DQDP \exp\frac{1}{\hbar}\int dt\left(i\mathcal{P}J^{-1}\dot{Q} - H_{\theta\sigma}(Q,P)\right), \tag{4.3.4}$$

2. Afin d'étudier la limite à grand temps de (4.3.4) , on utilise le théoreme adiabatique $T \rightarrow \infty$, nous posons $dt = Tds$, ce qui permet de transformer (4.3.4) en

$$K_{\theta\sigma}(Q^i, Q^f, T) \underset{T\rightarrow\infty}{\simeq} \int DQDP \exp\frac{T}{\hbar}\int ds\left(\frac{i}{T}\mathcal{P}J^{-1}\frac{dQ}{ds} - H_{\theta\sigma}(Q,P)\right), \tag{4.3.5}$$

3. Enfin, on trouve la partie imaginaire à partir de l'exposant du propagateur (4.3.5).

Dans ce qui va suivre, on va utiliser la relation (4.3.5) pour l'oscillateur harmonique à deux dimensions et on va appliquer ces étapes mentionnées ci-dessus et on extrairait la phase de Berry dans le cas de l'espace des phases mixtes et non-commutatif.

4.3.1 L'oscillateur harmonique couplés en fonction du temps dans l'espace des phases non-commutative:

Nous considérons un système de l'oscillateur harmonique couplé où l'hamiltonien $H(t)$ est une fonction explicite du temps, c'est-à-dire la fréquence $\omega(t)$ et la masse $m(t)$ sont des fonctions de temps, et dans l'espace des phases dans cas non commutatif, est décrit par la forme suivante :

$$H(x_1,x_2;p_1,p_2)=\frac{1}{2m(t)}\left(\hat{p}_1^2+\hat{p}_2^2\right)+\frac{m(t)\,\omega(t)}{2}\left(\hat{x}_2^2+\hat{x}_1^2\right)+\frac{\lambda_1(t)}{2}\left(\hat{p}_1\hat{x}_1+\hat{x}_1\hat{p}_1\right)+\frac{\lambda_2(t)}{2}\left(\hat{p}_2\hat{x}_2+\hat{x}_2\hat{p}_2\right), \tag{4.3.6}$$

tel que

$$\begin{aligned}H_{\theta\sigma}(x_1,x_2;p_1,p_2)\simeq&\left(\frac{1}{2m(t)}+\frac{m(t)\,\theta^2\boldsymbol{\omega}^2(t)}{2}\right)p_1^2+\frac{p_2^2}{2m(t)}+\frac{1}{2}m(t)\,\boldsymbol{\omega}^2(t)\,x_1^2\\&+\left(\frac{m(t)\,\boldsymbol{\omega}^2(t)}{2}+\frac{\sigma^2}{2m(t)}\right)x_2^2+\lambda_1(t)\,\sigma x_1x_2+\lambda_2(t)\,\theta p_1p_2\\&+\left(\frac{\sigma}{m(t)}+\theta m(t)\,\boldsymbol{\omega}^2(t)\right)p_1x_2+\lambda_1(t)\,p_1x_1+\lambda_2(t)\,p_2x_2,\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

nous réécrivons (4.3.7) en coordonnées mixtes comme

$$\begin{aligned}H_{\theta\sigma}(Q_1,Q_2;P_1,P_2)\simeq&\left(\frac{m(t)\,\boldsymbol{\omega}^2(t)}{2}+\frac{\sigma^2}{2m(t)}\right)P_1^2+\left(\frac{1}{2m(t)}+\frac{m(t)\,\theta^2\boldsymbol{\omega}^2(t)}{2}\right)P_2^2\\&+\frac{m(t)\,\boldsymbol{\omega}^2(t)}{2}Q_1^2+\frac{1}{2m(t)}Q_2^2+\lambda_1(t)\,\sigma Q_1P_1+\lambda_2\theta P_2Q_2\\&+\left(\frac{\sigma}{m(t)}+\theta m(t)\,\boldsymbol{\omega}^2(t)\right)P_1P_2+\lambda_1(t)\,Q_2P_1+\lambda_2(t)\,Q_1P_2,\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

ou bien sous une forme compacte ,

$$H_{\theta\sigma}(Q,P)=\frac{1}{2}PM(t)P+\frac{1}{2}QW(t)Q+P\lambda(t)Q, \tag{4.3.9}$$

où $Q=(x_1,p_2)$ et $P=(x_2,p_1)$, avec $M(\mathrm{s})W(\mathrm{s})-\lambda^t(\mathrm{s})\lambda(\mathrm{s})\rangle 0$, $M(\mathrm{s})\rangle 0$. et

$$M(t)=\begin{pmatrix}\mu_1(t) & b(t)\\ b(t) & \mu_2(t)\end{pmatrix},\ W(t)=\begin{pmatrix}\omega_1^2(t) & 0\\ 0 & \omega_2^2(t)\end{pmatrix},\quad \text{et } \lambda(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t)\,\sigma & \lambda_2(t)\\ \lambda_1(t) & \lambda_2(t)\,\theta\end{pmatrix} \tag{4.3.10}$$

où

$$\mu_1(t) = \left(m\left(t\right) \boldsymbol{\omega}^2\left(t\right) + \frac{\sigma^2}{m\left(t\right)} \right), \ \mu_2(t) = \left(\frac{1}{m\left(t\right)} + m\left(t\right) \theta^2 \boldsymbol{\omega}^2\left(t\right) \right), \tag{4.3.11}$$

$$b\left(t\right) = \left(\frac{\sigma}{m\left(t\right)} + \theta m\left(t\right) \boldsymbol{\omega}^2\left(t\right) \right), \tag{4.3.12}$$

$$\omega_1\left(t\right) = \sqrt{m\left(t\right)} \boldsymbol{\omega}\left(t\right), \qquad \omega_2\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{m\left(t\right)}}. \tag{4.3.13}$$

Nous avons suggéré de définir $\theta = -\sigma$ et $m^2\left(t\right) \boldsymbol{\omega}^2\left(t\right) = 1$ pour faciliter les calculs. Après cette simplification, la matrice devient:

$$M(t) = \begin{pmatrix} \mu_1(t) = \frac{1}{m(t)}\left(1+\sigma^2\right) & 0 \\ 0 & \mu_2(t) = \frac{1}{m(t)}\left(1+\sigma^2\right) \end{pmatrix} \tag{4.3.14}$$

Comme nous l'avons dit, dans les calculs précédents, réécrivons le propagateur avec un nouveau temps, c'est-à-dire en utilisant l'approximation adiabatique, on met $s = t/T$, et on fait le changement de variable suivant $P \rightarrow JP$,

$$K_{\theta\sigma}(Q^f, Q^i; T) = \int DQDP \exp(T) \int \left((\frac{i}{T} P\dot{Q} - \frac{1}{2}\left(P\left(J^{-1} M(s) J \right) P + QW(s)Q + 2P\left(J^{-1}\lambda(s) \right) Q \right) \right) ds. \tag{4.3.15}$$

Ensuite, en suivant mêmes étapes que nous avons procédé dans l'exemple ci-dessus, nous pouvons utiliser la transformation canonique dépendante du temps $(P, Q) \rightarrow (\Pi, X)$ similaire à celle fournie dans [31] et [32]

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11}\left(s\right) & \beta_{12}\left(s\right) \\ \beta_{21}\left(s\right) & \beta_{22}\left(s\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right), \tag{4.3.16}$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}. \tag{4.3.17}$$

Par conséquent, le nouveau propagateur du système devient

$$K_{\theta\sigma}(Q^f, Q^i; T) = \int DXD\Pi \exp\left[\frac{i\left(X\left(\beta\left(s\right) + \beta^t\left(s\right)\right) X\right)}{2} \right]_0^T \times \exp\left(T\right) \int ds \left((\frac{i}{T}\Pi\dot{X} - \frac{1}{2}\Pi\Pi - \frac{1}{2} X\Omega^{nc}(s) X \right), \tag{4.3.18}$$

avec

$$(\Omega_1^{nc})^2 = \mu\omega_1^2(t) + \lambda_1^2 - \sigma^2\left(\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_2^2\right) - \frac{i}{T}\mu\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta_{11}}{\mu}\right) \tag{4.3.19}$$

$$(\Omega_2^{nc})^2 = \mu\omega_2^2(t) + \lambda_2^2 - \sigma^2\left(\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1^2\right) - \frac{i}{T}\mu\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta_{22}}{\mu}\right) \tag{4.3.20}$$

$$\Omega_3^{nc} = -\frac{i}{T}\mu\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta_{12}}{\mu}\right) - \frac{i}{T}\mu\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta_{21}}{\mu}\right) \tag{4.3.21}$$

et les matrices de $\beta(s)$ sont

$$\beta_{(11)}(s) = \lambda_{(1,2)} - \frac{i}{2T}\frac{\dot{\mu}}{\mu} \tag{4.3.22}$$

$$\beta_{(22)}(s) = -\lambda_{(1,2)} - \frac{i}{2T}\frac{\dot{\mu}}{\mu} \tag{4.3.23}$$

$$\beta_{(12,21)}(s) = -\sigma\lambda_{(2,1)} \tag{4.3.24}$$

dans ce cas, nous avons pris $\dot{\sigma} = 0$, et mettre $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ les relations (4.3.19) , (4.3.20) et (4.3.21) devients:

$$\left(\Omega_{(1,2)}^{nc}\right)^2(s) = \left(\mathbf{w}_{(1,2)}^{nc}\right)^2(s) - \frac{1}{T}\tilde{\omega}_{(1,2)}^{nc}(s) \tag{4.3.25}$$

où

$$\left(\mathbf{w}_{(1,2)}^{nc}\right)^2(s) = \left(\mathbf{w}_{(1,2)}^{c}\right)^2(s) - \frac{3\sigma^2}{2}\lambda^2(s) \tag{4.3.26}$$

et

$$\tilde{\omega}_{(1,2)}^{nc}(s) = -i\mu\frac{d}{ds}\left(\frac{\lambda(s)}{\mu}\right) \tag{4.3.27}$$

ou Ω^c et Ω^{nc} sont fréquence commutative et non commutative.

L'intégration gaussienne sur l'implusion Π, à donne

$$K_{\theta\sigma}(Q^f, Q^i; T) = \sqrt{2\pi}\int DX \exp\left[\frac{i\left(X\left(\beta(s) + \beta^t(s)\right)X\right)}{2}\right]_0^T \exp(T)\int ds\left(\sum_{j=1,2}\left(\frac{-1}{2T^2}\left(\dot{X}^2 - \Omega_j^2(s)X_j^2\right)\right)\right). \tag{4.3.28}$$

La condition aux limites est

$$X_j(0) = X_j^i, \quad X_j(T) = X_j^f(T); \qquad (j) = 1, 2 \tag{4.3.29}$$

Nous proposons la formule Van Vleck-Pauli dans l'espace des phases non commutatif

$$K_{\theta\sigma}(Q_f, Q_i; T) = \sqrt{\det\left(\frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2 S_{\theta\sigma}}{\partial X_f \partial X_i}\right)}\exp\left(-S_{nc}\left(X_f, X_i; T\right)\right), \tag{4.3.30}$$

telle aue

$$S_{\theta\sigma}\left(X_f, X_i; T\right) = \Phi(X_f, X_i) \exp \frac{1}{2T} \left[X \frac{dX}{ds} \right]_0^T, \tag{4.3.31}$$

Afin atteindre ce but, nous avons développé deux ansatz

$$X_1 = e^{T \int_0^s d\sigma \delta^{(1)}(\sigma)} c_1; \qquad \delta^{(1)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(1)}(s) \left(\frac{1}{T}\right)^n \tag{4.3.32}$$

$$X_2 = e^{T \int_0^s d\sigma \delta^{(2)}(\sigma)} c_2; \qquad \delta^{(2)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(2)}(s) \left(\frac{1}{T}\right)^n \tag{4.3.33}$$

où

$$\delta^{(j)}(s) = \left(\delta_0^{(j)}\right) + \left(\delta_1^{(j)}\right) \left(\frac{1}{T}\right) + \left(\delta_2^{(j)}\right) \left(\frac{1}{T}\right)^2 + ...; \quad j = 1, 2 \tag{4.3.34}$$

où c_1 et c_2 sont deux constante

$$\begin{cases} T^2 \left(\delta^{(1)}\right)^2 - T^2 \Omega_1^2 + T \dot{\delta}^{(1)} = 0 \\ T^2 \left(\delta^{(2)}\right)^2 - T^2 \Omega_2^2 + T \dot{\delta}^{(2)} = 0 \end{cases} \tag{4.3.35}$$

alors, nous pouvons utiliser (4.3.34)

$$\begin{cases} T^2 \left(\delta_0^{(1)}\right)^2 + T \dot{\delta}_0^{(1)} + \left(\delta_1^{(1)}\right)^2 - T^2 \left(\mathbf{w}_{(1)}^{nc}\right)^2 - T \left(\left(\mathbf{w}_{(1)}^{c}\right)^2 (\tau) - \frac{3\sigma^2}{2} \lambda^2(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \\ T^2 \left(\delta_0^{(2)}\right)^2 + T \dot{\delta}_0^{(2)} + \left(\delta_1^{(2)}\right)^2 - T^2 \left(\mathbf{w}_{(2)}^{nc}\right)^2 - T \left(\left(\mathbf{w}_{(2)}^{c}\right)^2 (\tau) - \frac{3\sigma^2}{2} \lambda^2(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \end{cases} \tag{4.3.36}$$

qui donnent

$$\begin{cases} (\delta_0^{(1)})^2 - \left(\left(\mathbf{w}_{(1)}^{c}\right)^2 (\tau) - \frac{3\sigma^2}{2} \lambda^2(\tau) \right) = 0 \\ (\delta_0^{(2)})^2 - \left(\left(\mathbf{w}_{(2)}^{c}\right)^2 (\tau) - \frac{3\sigma^2}{2} \lambda^2(\tau) \right) = 0 \end{cases} ; \quad \text{for O}(T^2) \tag{4.3.37}$$

$$\begin{cases} 2(\delta_0^{(1)}) \left(\delta_1^{(1)}\right) + \dot{\delta}_0^{(1)} - \tilde{\omega}_{(1)}^{nc} = 0 \\ 2(\delta_0^{(2)}) \left(\delta_1^{(2)}\right) + \dot{\delta}_0^{(2)} - \tilde{\omega}_{(2)}^{nc} = 0 \end{cases} ; \quad \text{for O}(T) \tag{4.3.38}$$

Dans le cas présente, nous avons seulement besoin $O(T^2)$ et $O(T)$ qui se trouvent comme

$$\begin{cases} \delta_0^{(1)} = \pm \left(\left(\mathbf{w}_{(1)}^{c}\right)^2 (\tau) - \frac{3\sigma^2}{2} \lambda^2(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \\ \delta_0^{(2)} = \pm \left(\left(\mathbf{w}_{(2)}^{c}\right)^2 (\tau) - \frac{3\sigma^2}{2} \lambda^2(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{4.3.39}$$

$$\begin{cases} \delta_1^{(1)} = \frac{-\dot{\delta}_0^{(1)} + \tilde{\omega}_{(1)}^{nc}}{2(\delta_0^{(1)})} \\ \delta_1^{(2)} = \frac{-\dot{\delta}_0^{(2)} + \tilde{\omega}_{(2)}^{nc}}{2(\delta_0^{(2)})} \end{cases} \tag{4.3.40}$$

en utilisant la condition aux limites (4.3.29) nous obtenons enfin

$$X_1(s) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{w}_1^{nc}(s)}\sinh\Theta_1(T)}\Big\{\sqrt{\mathbf{w}_1^{nc}(T)}X_1^f\sinh\Theta_1(s) + \sqrt{\mathbf{w}_1^{nc}(0)}X_1^i\sinh\bar{\Theta}_1(s)\Big\} \tag{4.3.41}$$

$$X_2(s) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{w}_2^{nc}(s)}\sinh\Theta_2(T)}\Big\{\sqrt{\mathbf{w}_2^{nc}(T)}X_2^f\sinh\Theta_2(s) + \sqrt{\mathbf{w}_2^{nc}(0)}X_2^i\sinh\bar{\Theta}_2(s)\Big\} \tag{4.3.42}$$

avec

$$\begin{cases} \Theta_1(s) = T\int_0^s d\tau\left(\mathbf{w}_1^{nc}(\tau) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\tilde{\omega}_{(1)}^{nc}(\tau)}{\mathbf{w}_1^{nc}(\tau)}\right)\right) \\ \Theta_2(s) = T\int_0^s d\tau\left(\mathbf{w}_2^{nc}(\tau) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\tilde{\omega}_{(2)}^{nc}(\tau)}{\mathbf{w}_2^{nc}(\tau)}\right)\right) \end{cases} \tag{4.3.43}$$

et $\bar{\Theta}_j(s) = \Theta_j(T) - \Theta_j(s)$. A partir (4.3.41) et (4.3.42), nous trouvons donc

$$\frac{1}{2T}\left[X_1\frac{dX_1}{ds}\right]_0^T = \frac{\sqrt{\mathbf{w}_1^{nc}(T)\mathbf{w}_1^{nc}(0)}}{2\sinh\Theta_1(T)} \times\left(\left(\sqrt{\frac{\mathbf{w}_1^{nc}(T)}{\mathbf{w}_1^{nc}(0)}}\left(X_1^f\right)^2 + \sqrt{\frac{\mathbf{w}_1^{nc}(0)}{\mathbf{w}_1^{nc}(T)}}\left(X_1^i\right)^2\right)\cosh\Theta_1(s) - 2X_1^fX_1^i\right) \tag{4.3.44}$$

et

$$\frac{1}{2T}\left[X_2\frac{dX_2}{ds}\right]_0^T = \frac{\sqrt{\mathbf{w}_2^{nc}(T)\mathbf{w}_2^{nc}(0)}}{2\sinh\Theta_2(T)} \times\left(\left(\sqrt{\frac{\mathbf{w}_2^{nc}(T)}{\mathbf{w}_2^{nc}(0)}}\left(X_2^f\right)^2 + \sqrt{\frac{\mathbf{w}_2^{nc}(0)}{\mathbf{w}_2^{nc}(T)}}\left(X_2^i\right)^2\right)\cosh\Theta_2(s) - 2X_2^fX_2^i\right) \tag{4.3.45}$$

le determinante $\det\left(\frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2 S_{nc}}{\partial X_1^f\partial X_1^i}\right)$ est défini par

$$\frac{1}{\sqrt{\det\left(\frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2 S_{nc}}{\partial X_1^f\partial X_1^i}\right)}} = \frac{(\mathbf{w}_1^{nc}(T)\mathbf{w}_1^{nc}(0))^{\frac{1}{2}}}{2\sinh\Theta_1(T)} \tag{4.3.46}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\det\left(\frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2 S_{nc}}{\partial X_2^f\partial X_2^i}\right)}} = \frac{(\mathbf{w}_2^{nc}(T)\mathbf{w}_2^{nc}(0))^{\frac{1}{2}}}{2\sinh\Theta_2(T)} \tag{4.3.47}$$

substituant (4.3.46), (4.3.47) et (4.3.44) , (4.3.45) en (4.3.31), on obtient

$$K_{nc}(Q^f, Q^i; T) = \prod_{j=1}^{2} K_{nc}(Q_j^f, Q_j^i; T) \tag{4.3.48}$$

tel que

$$\begin{aligned} K_{\theta\sigma}(Q_j^f, Q_j^i; T) = \frac{\left(\mathbf{w}_j^{nc}(T)\mathbf{w}_j^{nc}(0)\right)^{\frac{1}{2}}}{2\sinh\Theta_j(T)} \exp\Bigg(& -\frac{\sqrt{\mathbf{w}_j^{nc}(T)\mathbf{w}_j^{nc}(0)}}{2\sinh\Theta_j(T)} \\ & \left\{ \left(\sqrt{\frac{\mathbf{w}_j^{nc}(T)}{\mathbf{w}_j^{nc}(0)}} \left(X_j^f\right)^2 + \sqrt{\frac{\mathbf{w}_j^{nc}(0)}{\mathbf{w}_j^{nc}(T)}} \left(X_j^i\right)^2 \right) \cosh\Theta_j(s) - 2X_j^f X_j^i \right\} \\ & - \exp\left[\frac{i\left(X\left(\beta\left(s\right) + \beta^t\left(s\right)\right)X\right)}{2} \right]_0^T \Bigg) \end{aligned} \tag{4.3.49}$$

avec

$$\Theta_{(1,2)}(s) = T\int_0^s d\tau \left(\mathbf{w}_{(1,2)}^{nc}(\tau) - \frac{i}{2T} \frac{\mu(\tau)}{\mathbf{w}_{(1,2)}^{nc}(s)} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\lambda(\tau)}{\mu(\tau)}\right) \right) \tag{4.3.50}$$

maintenant les informations sur l'état fondamental peuvent être dérivées en mettant T$\rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} K_{\theta\sigma}(Q^f, Q^i; T) \underset{T\to\infty}{\sim} & \left(\prod_{j=1}^{2} \left(w_j(T)w_j(0)\right)^{\frac{1}{4}} \right) e^{-\frac{1}{2}\Sigma_{j=1}^{2}\Theta_j(T)} \\ & \times \prod_{j=1}^{2} \exp\left\{ \left(\left(w_j(T) + i\beta\left(T\right)\right)\left(X_j^f\right)^2 + \left(w_j(0) - i\beta\left(0\right)\right)\left(X_j^i\right)^2 \right) \right\} \end{aligned} \tag{4.3.51}$$

la partie imaginaire de Θ_1(T) et Θ_2(T), de l'eq (4.3.50) correspond à la phase de Berry et la partie réelle est la partie dynamique

$$\gamma_{\theta\sigma}^{(1,2)}(s) = \frac{T}{4}\int d\tau \left(\frac{\mu(\tau)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\lambda(\tau)}{\mu(\tau)}\right)}{\sqrt{\left(\mathbf{w}_{(1,2)}^{c}\right)^2(s) - \frac{3\sigma^2}{2}\lambda^2(s)}} \right) \tag{4.3.52}$$

La phase de Berry [18]:

Comme nous l'avons vu dans la section précédente du ce chapitre, que lors d'une évolution adiabatique du système, la fonction d'onde accumule une phase qui est la somme de la phase dynamique $\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n\left(t\right)dt$ et d'une phase géométrique, nommée ainsi car elle dépend de la géométrie de la trajectoire (et pas de la vitesse) parcourue dans l'espace des

paramètres variant lentement au cours du temps. Berry a *précisément déterminé cette phase géométrique dans le cas où le système suit une courbe fermée (une boucle) dans l'espace des paramètres* ($X(T) = X(0)$) [18]. Si nous notons par C cette trajectoire et par X le vecteur formé par l'ensemble des paramètres variant lentement au cours du temps, la phase géométrique s'écrit alors

$$\gamma_n(C) = i \int_{X(0)}^{X(t)} dX^a \langle n(X)| \frac{\partial}{\partial X^a} |n(X)\rangle . \tag{4.3.53}$$

Dans le cas particulier ou seulement deux paramètres varient lentement au cours du temps, *Berry* a montré que la phase (4.3.53), sous la condition du transport parallèle, prend la valeur π si la trajectoire dans l'espace des paramètres encercle une dégénéréscence des valeurs propres du système [18] et elle est nulle si aucune de ces dégénéréscences n'est entourée. Si de plus un seul paramètre varie lentement alors la phase géométrique est nulle. Dans le cas général où plus que deux paramètres varient, la *phase géométrique* peut prendre une *valeur quelconque*.

4.4 Conclusion:

Dans cette section, nous avons présenté une alternative de traitement pour le problème de l'oscillateur harmonique couplé en deux dimensions avec la masse et la fréquence variant en fonction du temps, dans deux cas. Le premier cas concerne l'étude dans l'espace des phases commutative et l'autre dans l'espace des phases non commutative. Le présent traitement est basé sur l'utilisation d'une transformation canonique en fonction du temps, est la méthode de l'intégrale de chemin. Où à chaque transformation canonique nous obtenons la nouvelle masse et la nouvelle fréquence. Finalement nous avons trouvé les phases du Berry dans le cas commutatif et non commutatif.

Bibliographie

[1] T. Kashiwa, , Nima, S. and Sakoda, S. Berry's Phase and Euclidean Path Integral, KUSHU-HET-3 (to appear in Ann. Phys.) (1992).

[2] A. Aharonov and Anandan J 1987 Phys. Rev. Lett. 58 1593.

[3] T. Kashiwa, (1981) Euclidean Path-Integral Representation of the Vector Field. I. Prog. Theor. Phys. 66, 1858-1878.

[4] T. kashiwa, , Nima, S. and Sakoda, S. (1992) Berry's Phase and Euclidean Path Integral, KUSHU-HET-3 (to appear in Ann. Phys.)

[5] H .R. Lewis (1968) J. Math. Phys. 9 1976.

[6] H. R. Lewis (1968) 1967 Phys. Rev. Lett. 18 510.

[7] R .M. Kruskal (1957) Phys. Rev. 106 205.

[8] K .H. Yeon , K. K. Lee , Um C I, George T F and Pandey L N 1993 Phys.Rev. A 48 2716.

[9] K .H. Yeon , D. H. Kim , Um C I, George T F and Pandey L N 1997 Phys.Rev. A 55 4023.

[10] Ji J-YKim, J K, Kim S P and Soh K-S 1995 Phys. Rev. A 52 3352.

[11] M.H. Lee , H-C Kim and Ji J-Y 1997 J. Korean Phys. Soc. 31 560.

[12] H.C. Kim , M-H Lee , Ji J Y and J K Kim 1996 Phys. Rev. A 53 3767.

[13] D.Y. Song 1999 Phys. Rev. A 59 2616.

[14] R.P. Feynman and A.R Hibbs 1965 Quantum Mechanics and Path Integrals (McGraw-Hill Inc: New York) pp 58-60.

[15] D-Y Song 1999 J. Phys. A: Math. Gen. 32 3449.

[16] M. V. Berry 1984 Proc. R. Soc. London Ser. A 392 45.

[17] G. C. Rossi, and Testa, M. (1983) Ground State Wave Function from Euclidean Path Integral. Ann. Phys. 148, 144-167

[18] M.V. Berry , Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. R. Soc. Lond A 392, 45 (1984).

[19] M. V. Berry, (1985) Classical Adiabatic Angles and Quantal Adiabatic Phase. J. Phys. A:Math. Gen. 18, 15-27.

[20] M. Born. and V. Fock. Beweis des adiabatensatzes. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 51 165–180, 1928. 10.1007/BF01343193.

[21] MICHEL LE BELLAC , PHYSIQUE QUANTIQUE 2E EDITION.

[22] M.V. Berry„The adiabatic phase and Pancharatnam's phase for polarized light, J. Mod. Optics, 34(11), 1401-1407 (1987).

[23] JAGMEET SINGH; Adiabatic anholonomy and canonical transformations; Pramana – J. Phys., Vol. 53, No. 5, November 1999.

[24] Shapere, A. and Wilczek, F. (ed.) (1989) Geometric Phases in Physics. World Scientific, Singapore.

[25] M.V. Berry, "Quantum phase corrections from adiabatic iteration," Proc. R. Soc. Lond. A 414 (1987) 31–46.

[26] M.V. Berry, "Anticipations of the geometric phase," Physics Today (1990) 34–40.

[27] L. Desjardins, Optimisation et approximation adiabatique, thése de doctorat en Physique, (2010).

[28] A. TILBI, Intégrale de Chemin Semi-Classique et Théorie de de Broglie-Bohm, thése doctorat en sciences physique, (2007).

[29] J. Jing, J-Y Ma, Y-H Guo, J-F Chen, Eur. Phys. J. C (2008) 56: 591-595

[30] A.Smailagic,E. Spallucci,Phys.Rev.D 65,107701(2002)

[31] F. Benamira, L. Guechi, “Path integral for a pair of time-dependent coupled and driven oscillators,” volume 53.2003 Number 9. pp. 717-820

[32] Salah Menouar, Mustapha Maamache, Jeong Ryeol Choi, "An alternative approach to exact wave functions for timedependent coupled oscillator model of charged particle in variable magnetic field" Annals of Physics 325 (2010) 1708–1719.

[33] V. Fock, Z. Phys. 49, 323 (1928).

[34] C. A. Mead and D. G. Truhlar, J. Chem. Phys. 70, 2284 (1979).

[35] A. Messiah, Quantenmechanik, vol. 2. de Gruyter, Berlin, 1990.

5

Conclusion

Nous avons commencé cette thèse par un bref rappel sur la géométrie non-commutative, nous avons exposé dans le deuxième chapitre les fondements de la physique non-commutative dans le cadre algébrique, nous avons présenté brièvement quelques méthodes de passage de la commutativité à la non-commutativité et nous avons présenté aussi le cadre général de la déformation formelle d'une algèbre associative et précisément, nous avons travaillait sur l'algèbre de Poisson.

Et nous avons utilisé le crochet de Poisson induit par le structure symplectique. Nous avons Introduit la déformation formelle sur un système classique, et dans ce cas nous avons présenté premièrement un bref rappel sur un systèmes Hamiltonien habituel, on a montré la forme symplectique canonique $\Lambda = \sum_{i=0}^{n} dp_i \Lambda dq_i$,et après nous avons trouvé l'équation d'Hamilton ordinaire. Nous avons établi les équations canoniques d'Hamilton d'un système non déformé, ensuite, nous avons étudié, le système classique déformé avec d'une nouvelle forme symplectique est $\Lambda^{déf} = \sum_{i=0}^{n} dp_i \Lambda dq_i$ et nous avons écrit cette forme comme série formelle de Λ_0 et nous avons étudié les déformations formelles de l'algèbre de Poisson envisagée L'identité. Enfin nous avons étudié aussi la transformation canonique dans le cas déformé, où on a trouvé les fonctions génératrices F_1, F_2, F_3 et F_4 dans le cas déformé avec des exemples.

Au troisième Chapitre nous avons appliqué la construction de l'intégrale de chemin dans l'espace des phases non-commutative. Nous avons utilisé les coordonnées mixtes de l'espace des phases, et la non-localité se manifeste aussi dans son terme d'interaction. Dans l'espace non-commutative les crochets de Poisson ont été écrits la forme symplectique déformée $J(\theta, \sigma)$. Nous avons établi une action sur l'espace non-commutative, qui contiennent une déformation sur la partie cinétique. Nous avons utilisé une transformation canonique linéaire

en fonction des paramètres (θ, σ). Cette transformation canonique, induit un nouveau terme en fonction de (θ, σ) ajouté à l'hamiltonien. Nous avons ensuite remplacé l'action par sa nouvelle forme dans le propagateur, en termes de coordonnées mixtes de l'espace des phases. Nous avons appliqué cette mèthode pour le cas de l'oscillateur l'harmonique couplé.

Nous avons considéré deux oscillateurs harmoniques couplés à deux dimensions. Nous avons ensuite calculé le terme supplémentaire dans l'hamiltonien du système dans ce cas. Dans le cas limité $\theta = \sigma = 0$, nous récupérons l'oscillateur harmonique couplé habituel. Nous avons calculé la fonction de partition $Z_{\theta,\sigma}$ d'un oscillateur harmonique couplé à deux dimensions dans l'espace non-commutative. À partir de laquelle nous avons calculé l'énergie libre du système, et la capacité de chaleur en fonction de la température dans le cas non-commutative. Les applications réalisées sont analytiquement exactes et les cas-limites sont bien retrouvés.

Au quatrième chapitre, nous avons présenté une alternative de traitement pour le problème de l'oscillateur harmonique couplé en deux dimensions avec la masse et la fréquence variant en fonction du temps, dans deux cas. Le premier cas concerne l'étude dans l'espace des phases commutative et l'autre dans l'espace des phases non commutative. Le présent traitement est basé sur l'utilisation d'une transformation canonique en fonction du temps, et la méthode de l'intégrale de chemin. A chaque transformation canonique nous obtenons la nouvelle masse et la nouvelle fréquence. Finalement, nous avons trouvé les phases du Berry dans le cas commutatif et non commutatif.

ملخص

في هذه الأطروحة ، قدمنا نظرية التشوه في مسار تكامل، وبإعتبار حالة تشوه صغير وغير ذي قيمة. لقد طبقنا بناء مسار التكامل في فضاء المرحلة غير التبديلية. استخدمنا الإحداثيات المختلطة لفضاء الطور، كما تتجلى اللا محلية في حد التفاعل الخاص بها. في المساحة غير التبادلية ، تمت كتابة أقواس بواسون باستخدام شكل مبسط مشوه .$J(\theta.\sigma)$. لقد قمنا بإشتقاق الحركة على الفضاء غير التبادلي ، والذي يحتوي على جزء حركي مشوه. استخدمنا تحويلًا قانونيًا خطيًا استنادًا إلى معلمات $(\theta.\sigma)$ لتحويل هذا الجزء الحركي إلى الجزء المعتاد. هذا التحول القانوني الناجم عن حد جديد يعتمد على $(\theta.\sigma)$ تضاف إلى الهاميلتون. بعد ذلك ، استبدلنا الإجراء بشكله الجديد في المُنشر ، من حيث الإحداثيات المختلطة لفضاء الطور.

طبقنا هذه الطريقة لحالة الهزاز التوافقي المزدوج. اعتبرنا الهزازات التوافقية ذات البعدين. ثم قمنا بحساب الحد الإضافي في نظام هاميلتون في هذه الحالة. في حالة الحد $\theta = \sigma = 0$ ، نستعيد الهزاز التوافقي المعتاد.

لقد قمنا بإشتقاق دالة التقسيم $Z_{\theta,\sigma}$ ، لهزاز توافقي مزدوج غير التبادلي على بعدين. من خلالها قمنا بحساب الطاقة الداخلية الحرة للنظام والسعة الحرارية كدالة لدرجة الحرارة في حالة غير تبديلية. التطبيقات المحققة دقيقة من الناحية التحليلية، كما يتم استرداد حالات الحدود بشكل جيد.

بعد ذلك ، قدمنا معالجة بديلةً لمشكلة الهزاز التوافقي المزدوج في بعدين مع الكتلة والتردد المرتبطين بالزمن، في حالتين الأولى في فضاء الطور التبادلي والأخرى في فضاء الطور غير التبادلية. وأخيرا ، وجدنا أطوار بيري في كلتا الحالتين.

Abstract

In this thesis, we introduced the deformation theory in Feynman's path integral and consider the case of a small and trivial deformation. We have applied the construction of the path integral in non-commutative phase space. We used the mixed coordinates of the phase space, and the non-locality is also manifested in its interaction term. In non-commutative space the Poisson brackets have been written using a deformed simplistic form $J(\theta.\sigma)$. We derived an action on the non-commutative space, which contain a deformed kinetic part. We used a linear canonical transformation depending on $(\theta.\sigma)$ parameters to transform this kinetic part as the usual one. This canonical transformation, induced a new term depending on $(\theta.\sigma)$ added to the Hamiltonian. We have them replaced the action by its new form in the propagator, in terms of mixed coordinates of the phase space.

We applied this method to the case of the coupled harmonic oscillator. We considered two dimensional coupled harmonic oscillators. We then calculate the additional term in the Hamiltonian of the system in this case. In the limit case $\theta = \sigma = 0$, we recover the usual coupled harmonic oscillator.

We derived the partition function $Z_{\theta,\sigma}$ of a non-commutative coupled harmonic oscillator in two dimensions. From which we calculated the free internal energy of the system, and the heat capacity as a function of temperature in the case non-commutative. The performed applications are analytically exact and the limit cases are well recovered.

After, we have presented an alternative treatment for the problem of the coupled harmonic oscillator in two dimensions with time-dependent mass and frequency, in two cases the first one in commutative phase space and other in non-commutative phase space. Finally, we found Berry's phases in the both cases.

Résumé

Dans notre thèse, nous allons introduire la théorie de la déformation en intégrale de chemin de Feynman, et de considérer le cas des déformations triviales et petites. Nous avons appliqué la construction de l'intégrale de chemin dans l'espace de phase non commutative. Nous avons utilisé les coordonnées mixtes de l'espace de phase, et de la non-localité se manifeste aussi dans son terme d'interaction. Dans l'espace non commutative les crochets de Poisson ont été écrits en utilisant une forme symplectique déformée $J(\theta.\sigma)$..

Nous avons établi une action sur l'espace non commutative, qui contient des pièces cinétiques déformées. Nous avons utilisé une transformation canonique linéaire en fonction des paramètres de $(\theta.\sigma)$ pour transformer ces pièces cinétiques que celle d'habitude. Cette transformation canonique, induite un nouveau terme en fonction de $(\theta.\sigma)$ ajouté à l'hamiltonien. Ensuite nous avons remplacé l'action par son nouveau formulaire dans le propagateur, en termes des coordonnées mixtes de l'espace des phases.

Nous avons appliqué cette méthode pour le cas de l'oscillateur harmonique couplé. Nous avons considéré oscillateurs harmoniques couplés de deux dimensions. Et calculer ensuite le terme supplémentaire dans l'hamiltonien du système dans ce cas. Dans le cas limite $\theta = \sigma = 0$, nous récupérons l'oscillateur harmonique couplé habitude.

Nous avons calculé la fonction de partition $Z_{\theta,\sigma}$ d'un oscillateur harmonique non commutatif couplé à deux dimensions. À partir de laquelle nous avons calculé l'énergie interne libre du système, et la capacité de chaleur en fonction de la température dans le cas de non commutative. Les applications réalisées sont analytiquement exactes et les cas-limites sont bien récupérés

Après nous avons présenté une alternative de traitement pour le problème de l'oscillateur harmonique couplé en deux dimensions avec la masse et de la fréquence en fonction du temps. Finalement nous avons trouvé les phases du Berry dans les deux cas, commutative et non commutative.