MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA- JIJEL

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

Présentée pour l'Obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences

Spécialité: Mathématiques

Option: Algèbre

Thème

Fonctions génératrices de certains produits de nombres et polynômes

Présentée par:

Zerroug Hassina

Devant le Jury

Mr Haddad Tahar	Professeur	Université de Jijel	Président
Mr Boussayoud Ali	M.C.A	Université de Jijel	Directeur de Thèse
Mr Ellaggoune Fateh	Professeur	Université de Guelma	Examinateur
Mr Chaoui Abderrazek	Professeur	Université de Guelma	Examinateur
Mr Boudeliou Ammar	M.C.A	Université de Constantine 1	Examinateur
Mr Chelgham Mourad	M.C.A	Université de Jijel	Examinateur
Mr Kerada Mohamed	Professeur	Université de Jijel	Invité

Soutenue le 30 / 06 / 2022

Remerciements

Je remercie tout d'abord **Allah** le tout puissant pour la volonté et la santé qu'm'a donné tout au long de ces années pour réaliser ce travail.

Je tien à exprimer ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, le maître de conférences **Ali Boussayoud.** Avec sa gentillesse et son expérience, il m'a bien guidé et apporté son soutien tout au long de préparation de la thèse. Je remercie vivement pour tout le temps qu'il m'a consacré, pour ces encouragements et ses conseils activés.

Mes sincères remerciements s'adressent également au professeur **Tahar Haddad**. Je tien à lui exprimer ma gratitude pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Je remercie vivement les professeurs **Fateh Ellaggoune**, **Abderrazek Chaoui** et les maîtres de conférences **Ammar Boudeliou**, **Mourad Chelgham** d'avoir accepté d'être membres de jury.

Je remercie le professeur **Mohamed Kerada** de qui j'ai reçu beaucoup d'encouragements et même des conseils tandis que je préparerais ma thèse.

Je voudrais adresser mes chaleureux remerciements à tous les membres du laboratoire mathématiques et applications des mathématiques de l'université de Jijel.

Je remercie chaleureusement toute ma famille pour leurs soutiens qui m'a été bien utile durant ma thèse.

Merci également à tous mes amies et mes collègues.

H. Zerroug

الملخص

في هذه الأطروحة، نهتم بحساب الدوال المولدة العادية لبعض الأعداد وكثيرات الحدود باستخدام تقنية التوابع التناظرية وهذا من اجل الحصول على دوال مولدة جديدة لجداءات أعدادغوصيان بدوفان وغوصيان بال بدوفان مع يعض الاعداد وايضا مع كثيرات الحدود المركبة بمتغيرين فيبوناتشي ولوكاس، كذلك للحصول على دوال مولدة جديدة لجداءات الدوال التناظرية دو عدة متغيرات مع بعض الأعداد وأيضا كثيرات الحدود المتعامدة لتشيبيشاف بانواعها الأربع.

الكلمات المفتاحية: الدوال المولدة التناظرية، الدوال المولدة، اعداد غوصيان بدوفان وغوصيان بال بدوفان، كثيرات الحدود المركبة بمتغيرين فيبوناتشي و لوكاس، كثيرات الحدود المتعامدة لتشيبيشاف.

Abstract

In this thesis, we looked at calculation of the ordinary generating functions of some numbers and polynomials using the concept of symmetric functions . First, we give new product generating functions of the Gaussian numbers of Padovan, Pell-Padovan with the numbers: k-Fibonacci, k-Pell, k-Jacobsthal and the complex bivariate polynomials of Fibonacci and Lucas. Next, we also find new generating functions of the products of the numbers : k-Lucas, k-Mersenne and symmetric function in several variables as well as Chebychev orthogonal polynomials.

Key Words : Symmetric functions, generating functions, Gaussian padovan and Gaussian pell-padovan numbers, bivariate Fibonacci and Lucas polynomials, Chebychev polynomials.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux calculs des fonctions génératrices ordinaires de certains nombres et polynômes en utilisant le concept des fonctions symétriques. D'abord, nous déterminons des nouvelles fonctions génératrices de produits des nombres Gaussians de Padovan, Pell-Padovan avec les nombres de k-Fibonacci, k-Pell, k-Jacobsthal et les polynômes bivariés complexes de Fibonacci et Lucas. Ensuite, nous trouvons également des nouvelles fonctions génératrices de produits des fonctions symétriques à plusieurs variables avec certains nombres : k-Lucas, k-Mersenne ainsi que des polynômes orthogonaux de Chebychev des quatre types.

Mots clés: Fonctions symétriques, fonctions génératrices, nombres Gaussiens de Padovan et Pell-Padovan, polynômes bivariés complexes de Fibonacci et Lucas, polynômes de chebychev.

Table des matières

Notations

$\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres entiers naturels positifs

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels

$\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes

$\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$: un alphabet

$\partial_{x_i, x_{i+1}} f$: la différence divisée de f

$\delta^k_{e_1 e_2}$: l'opérateur symétrique

$F_{k,n}$: les nombres de k-Fibonacci

$F_{k,-n}$: les nombres de k-Fibonacci d'indice négatif

$L_{k,n}$: les nombres de k-Lucas

$L_{k,-n}$: les nombres de k-Lucas d'indice négatif

$P_{k,n}$: les nombres de k-Pell

$P_{k,-n}$: les nombres de k-Pell d'indice négatif

$J_{k,n}$: les nombres de k-Jacobsthal

$M_{k,n}$: les nombres de k-Mersenne

$M_{k,-n}$: les nombres de k-Mersenne d'indice négatif

$T_n^{(4)}$: les nombres de Tetranacci

GP_n : les nombres Gaussiens de Padovan

GR_n : les nombres Gaussiens de Pell-Padovan

$U_n(x)$: les polynômes de Chebychev de deuxième espèce

$T_n(x)$: les polynômes de Chebychev de premier espèce

$V_n(x)$: les polynômes de Chebychev de troisième espèce

$W_n(x)$: les polynômes de Chebychev de quatrième espèce

$F_n(x)$: les polynômes de Fibonacci

$L_n(x)$: les polynômes de Lucas

$P_n(x)$: les polynômes de Pell

$J_n(x)$: les polynômes de Jacobsthal

$F_n(x, y)$: les polynômes bivaries complexes de Fibonacci

$L_n(x, y)$: les polynômes bivaries complexes de Lucas

Introduction

En mathématique et notamment en analyse et en combinatoire, une fonction génératrice est une série formelle dont les coefficients codent une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres (ou plus généralement de polynômes, etc...) ; on dit que la série est associée à la suite. Ces séries furent introduites par Abrahan de Moivre en 1730, pour obtenir des formules explicites des suites définies par récurrence linéaire. Il existe plusieurs sortes de fonctions génératrices, comme les fonctions génératrices ordinaires, exponentielles, de lambert, de Drichlet, etc. On peut associer à toute suite une fonction génératrice de chaque type, mais la facilité de manipulation de la fonction dépent considérablement de la nature de la suite associée. Ces suites se rencontrent dans des domaines divers : par exemple en analyse combinatoire dans les problèmes de denombrement, en biologie dans le cadre de la dynamique des populations, en informatique dans l'analyse des algorithmes et même en macroéconomie.

Les plus célèbres suites de nombres existaient depuis très longtemps et qui sont récurrents d'ordre deux à savoir les suites des nombres de Fibonacci F_n, Lucas L_n, Pell P_n, Jacobsthal J_n, Jacobsthal-Lucas j_n, Mersenne M_n, etc... Par exemple F_n, de Fibonacci qui est une suite de nombres entiers ou chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 (resp. 1 et 1) et ses premiers termes sont $0, 1, 1, 2, 3, ...$ (resp. $1, 1, 2, 3, 5, ...$) .

Leonardo Fibonacci est le premier qui a introduit cette suite qui décrit la croissance d'une population de Lapins. Dans son Liber Abaci (livre de calcul), publié en 1202, principalement consacré aux calculs commerciaux, il affine et résout des problèmes algébriques déjà rencontrés dans l'oeuvre du mathématicien AL Khwarizmi. Plusieurs auteurs ont étudie les nombres de Fibonacci par exemple Hoggatt dans [44], Vorobiov dans [77], Marques dans [51] et Shattuck dans [69]. Ils peuvent généraliser aussi les suites de Fibonacci aux suites de Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, etc...n-step Fibonacci définies par des relations de récurrences analogues, pour plus d'information voir [75], [78], [74], etc...

D'autre part, il ya aussi des suites de nombres Gaussiens qui sont des nombres complexes dont la partie réelle et imaginaire sont deux des entiers par exemple les nombres Gaussiens d'ordre deux de Fibonacci GF_n, Pell GP_n, Lucas GL_n, Jacobsthal GJ_n, Jacobsthal-Lucas Gj_n...etc. En 2017, dans [76] D. Tasci a étudie les nombres Gaussiens d'ordre trois de Padovan GP_n, Pell-Padovan GR_n et a présenté les formules de Binets, les fonctions génératrices et quelques propriétés de ces nombres. Dans [5] Mustafa Asci et Esref Gurel ont défini les polynômes bivaries complexes de Fibonacci et Lucas, ils ont aussi déterminé les fonctions génératrices ordinaires ainsi que les formules de Binets et les dérivées partielles de ces polynômes.

Les fonctions génératrices des nombres de Fibonacci et les polynômes de Chebychev de deux espèces ont été déterminé par plusieurs chercheurs, par exemple : en 1994, D. Foata [40] a utilisé des techniques combinatoires afin de donner des fonctions génératrices des produits de nombres de Fibonacci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n^2 z^n$, ainsi que les produits des polynômes de Chebychev des deux espèces. Les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n T_n(x) z^n, \sum_{n=0}^{\infty} F_n U_n(x) z^n, \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) T_n(x) z^n$$

sont des exemples des séries obtenues. En 2004, A. Lascoux dans [47] a trouvé un autre résultat qui est l'identité de Ramanujan par la méthode des différences divisées et aussi l'auteur T. Mansour dans [49] a déterminé les fonctions génératrices des nombres de Lucas, Pell, Pell-Lucas par les suites de Horadam's.

L'opérateur symétrique $\delta^0_{a_1a_2}$ a été défini par M. Paul en 1951 puis A. Lascaux et A. Abderrezzak ont défini l'opérateur $\delta^k_{a_1a_2}$en 1991 et il n'a été utilisé qu'en 2013 par A. Boussayoud et M. Kerada dans [12] où cet opérateur a été appliqué à la série formelle inversible $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e_n a_1^n z^n$ qui leur a permis de récupérer de nombreuses identités et des fonctions génératrices en utilisant le concept des fonctions symétriques.

En 2014, dans [13], M. Kerada et A. Boussayoud ont récupéré les fonctions génératrices obtenues par D. Foata et A. Lascaux en appliquant l'opérateur $\delta^k_{a_1a_2}$ à la série formelle inversible $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A) e_1^n z^n$.

En 2018, A. Boussayoud, M. Chelgham et S. Boughaba dans [21] ont appliqué la différence divésée $\partial_{a_1a_2}$ à la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(E) a_1^{n+k} z^n$ avec E un alphabet de cardinal deux, ils ont obtenu les fonctions génératrices des produits des nombres de Fibonacci et Pell avec les nombres de Mersenne, en plus les fonctions génératrices des produits des nombres de Mersenne avec les polynômes de chebychev du premier et second types.

En 2019, les auteurs dans [7] ont calculé les fonctions génératrices des produits de la fonction symétrique à plusieurs variables et les nombres de k-Fibonacci, k-Lucas, k-Pell, k-Jacobsthal d'indice négatif.

Notre objectif dans cette thèse est d'obtenir de nouveaux résultats sur les fonctions génératrices des produits de certains nombres et polynômes orthogonaux, en appliquant l'opérateur symétrique $\delta_{a_1a_2}^{k}$ à la série formelle inversible $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(E)\,a_1^n z^n$ où E un alphabet de cardinal trois ou quatre et en utilisant les fonctions symétriques qui forment l'objet central dans ce travail.

Ce travail comporte principalement quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons les outils et notions préliminaires nécessaires à la compréhension des chapitres suivants, nous donnons tout d'abord quelques rappels sur les séries formelles, les relations de récurrences de certains nombres et polynômes et aussi des résultats auxiliaires sur les fonctions génératrices et ses applications sur les suites définies par récurrences linéaires d'ordre deux, trois et quatre. A' la fin nous introduisons les fonctions symétriques élémentaires et complètes ainsi que leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons des nouvelles fonctions génératrices des nombres de Tetranacci généralisés et nous récupérons aussi des fonctions génératrices des nombres de Fibonacci généralisés, Tribonacci généralisés et certains polynômes.

Dans le troisième chapitre, nous présentons des nouveaux résultats sur les fonctions génératrices de produits des nombres Gaussiens de Padovan GP_n, Pell-Padovan GR_n avec des nombres ainsi que des polynômes bivariés complexes comme suit

$$\sum_{n=0}^{\infty} GP_nF_{k,n}z^n, \sum_{n=0}^{\infty} GP_nP_{k,n}z^n, \sum_{n=0}^{\infty} GP_nJ_{k,n}z^n, \sum_{n=0}^{\infty} GP_nM_{k,n}z^n, \sum_{n=0}^{\infty} GP_nF_n(x,y), \sum_{n=0}^{\infty} GP_nL_n(x,y),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} GR_nF_{k,n}z^n, \sum_{n=0}^{\infty} GR_nP_{k,n}z^n, \sum_{n=0}^{\infty} GR_nJ_{k,n}z^n, \sum_{n=0}^{\infty} GR_nM_{k,n}z^n, \sum_{n=0}^{\infty} GR_nF_n(x,y), \sum_{n=0}^{\infty} GR_nL_n(x,y).$$

Ce chapitre fait l'objet de la publication suivante :

H. Zerroug, A. Boussayoud, B. Aloui, M. Kerada, Gaussian Padovan, Gaussian Pell-Padovan numbers and new generating functions with some numbers and polynomials, Journal of information and optimization sciences, (43)-16 pages(2022).

Le chapitre quatre est consacré aux nouveaux théorèmes, ces derniers sont basés sur l'action de l'opérateur symétrique $\delta_{p_1p_2}^{1}$à la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,p_1^n z^n$ cela nous permet de donner une autre approche pour le produit de la fonction symétrique à plusieurs variables et les nombres (k-Fibonacci $F_{k,n}$, k-Lucas $L_{k,n}$, k-Pell $P_{k,n}$, k-Jacobsthal $J_{k,n}$, k-Mersenne $M_{k,n}$) ainsi que des polynômes orthogonaux par exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4) F_{k,n} z^n, \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4) P_{k,n} z^n, \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4) J_{k,n} z^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4) U_n(x) z^n, \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4) T_n(x) z^n, \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4) V_n(x) z^n.$$

Comme application, nous déterminons des nouvelles fonctions génératrices des produits des nombres de Tetranacci $T_n^{(4)}$ avec des nombres : k-Pell $P_{k,n}$, k-Jacobsthal $J_{k,n}$, k-Mersenne $M_{k,n}$ et aussi des polynômes de Pell, Jacobsthal comme suit

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(4)} P_{k,n} z^n, \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(4)} J_{k,n} z^n, \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(4)} M_{k,n} z^n, \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(4)} P_n(x) z^n, \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(4)} J_n(x) z^n.$$

Ce chapitre fait l'objet de la publication suivante :

H. Zerroug, A. Boussayoud, A. Abderrezzek , M. Kerada, complete and elementary symmetric functions in several variables and orthogonal polynomials, nonlinear studies, 29(1), 329-346, 2022.

Nous terminerons cette thèse par une conclusion générale et une liste bibliographie.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Afin de rendre facile la compréhension de cette thèse, nous avons rappelé quelques définitions et théorèmes de base concernant les séries formelles, les relations de récurrences linéaires, les fonctions génératrices et les fonctions symétriques qui seront utilisées fréquemment au long de ce travail. Les références utilisées dans ce chapitre sont [1], [5], [18], [36], [44].

1.1 Séries formelles

1.1.1 Définition, opérations

Soit K un corps commutatif ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.1 *Les éléments de l'ensemble* $K[[Z]] = \left\{ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, a_n \in K \right\}$ *s'appellent les séries formelles à coefficients dans* K. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, z^n *s'appelle le monôme de degré* n *et* a_n *est son coefficient.*

Définition 1.2 *Soient* $u(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *et* $v(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *deux séries formelles. On peut définir les opérations comme suite*

1. *La somme*

$$u(z) + v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

2. *Le produit*

$$u(z) \times v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) z^n.$$

3. *Multiplication par un scalaire*

$$\lambda u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n z^n.$$

4. *Dérivation*

$$u'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

5. *Intégration*

$$\int u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

1.1.2 Inverse d'une série formelle

Définition 1.3 *On dit que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *est l'inverse de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *si*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = 1.$$

Proposition 1.1 *Une série formelle* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *est inversible si et seulement si* $a_0 \neq 0$.

Preuve: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ est l'inverse de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ telle que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) &= 1 \\
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n &= 1 \\
a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n &= 1,
\end{aligned}$$

par identification ; on trouve

$$a_0 b_0 = 1,$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = 0,$$

ce qui donne le coefficient a_0 non nul.

Réciproquement, si a_0 est non nul, alors le système triangulaire d'équations

$$\left\{\begin{array}{c}
a_0 b_0 = 1 \\
a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \\
\vdots \\
a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + ... + a_0 b_n = 0
\end{array}\right. ,$$

a une unique solution. ■

Exemple 1.1 .

1. *La série* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *est inversible et d'inverse* $1 - z$.

2. La série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ *est inversible et d'inverse* $1+z$.

3. La série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ *est inversible et son inverse* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n!}$.

1.2 Relations de récurrences linéaires homogènes

Définition 1.4 *Une relation de récurrence est dite linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants ; si elle est de la forme*

$$u_n+d_1u_{n-1}+d_2u_{n-2}+...+d_ku_{n-k}=0, \tag{1.1}$$

ou $d_1,\ d_2,\ ...,d_k\in K$ *et* $d_k\neq 0$.

Remarque 1.1 .

1. $u_n=0$ *est une solution de l'équation* (1.1) *; elle s'appelle solution triviale.*
2. $u_n=z^n$ *est solution de l'équation* (1.1) *avec* $u_n\neq 0$ *; vérifie*

$$z^n+d_1z^{n-1}+d_2z^{k-2}+...+d_kz^{n-k}=0,$$

si $n=k$ *; on trouve*

$$z^k+d_1z^{k-1}+d_2z^{k-2}+...+d_k=0,$$

cette dernière équation est l'équation caractéristique.

Définition 1.5 *Le polynôme caractéristique est donné par*

$$P(z)=z^k+d_1z^{k-1}+d_2z^{k-2}+...+d_k.$$

Théorème 1.1 *Soit* $d_1,d_2,...,d_k$ *des nombres réels et* d_k *non nul. Supposons que le polynôme caractéristique* P *admet* k *racines distinctes* $z_1,\ z_2,...,\ z_k$*, alors* u_n *est une solution générale de la relation de récurrence si et seulement si*

$$u_n=c_1z_1^n+c_2z_2^n+...+c_kz_k^n,$$

avec $c_1, c_2, ..., c_k$ *des constantes réelles.*

Proposition 1.2 *(Dépendance des conditions initials)*

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$ n *scalaires. Il existe une unique solution* u_n *telle que* $u_i = \alpha_i$ *pour* $i = 0, 1, ..., n-1$.

Remarque 1.2 *La relation de récurrence et les conditions initials déterminant la solution de façon unique.*

Exemple 1.2 *Soit la relation de récurrence de la suite de Fibonacci*

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \\ F_0 = 0, F_1 = 1 \end{cases},$$

son équation caractéristique est

$$z^2 - z - 1 = 0,$$

qui a pour racines simples avec $\Delta = 5$

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La solution générale est donnée par

$$F_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n,$$

autrement dit

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

les constantes c_1 *et* c_2 *sont déterminées par les conditions initiales comme suit*

$$\begin{cases} F_0 = c_1 + c_2 = 0 \\ F_1 = c_1 z_1 + c_2 z_2 = 1 \end{cases},$$

en résolvant ce systhème à deux équations et deux inconnues, on obtient : $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

En fin, on écrit F_n comme suit

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

1.2.1 Relations de récurrences d'ordre deux de certains nombres

Définition 1.6 *[58] La suite de Fibonacci généralisée $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par*

$$\begin{cases} U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}, n \geq 2 \\ U_0 = \alpha, U_1 = \beta \end{cases},$$

avec $a, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$.

Le tableau ci-dessous donne des relations de récurrences de certains nombres :k-Fibonacci, k-Lucas, k-Pell, k-Jacobsthal, k-Mersenne.

Les valeurs de a, b, α, β	Les suites	Relations de récurrences
$a = k, b = \alpha = 1, \beta = 1$	k-Fibonacci	$\begin{cases} F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}, n \geq 2 \\ F_{k,0} = 0,\ F_{k,1} = 1 \end{cases}$
$a = \beta = k, b = 1, \alpha = 2$	k-Lucas	$\begin{cases} L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2}, n \geq 2 \\ L_{k,0} = 2,\ L_{k,1} = k \end{cases}$
$a = 2, b = k, \alpha = 0, \beta = 1$	k-Pell	$\begin{cases} P_{k,n} = 2P_{k,n-1} + kP_{k,n-2}, n \geq 2 \\ P_{k,0} = 0,\ P_{k,1} = 1 \end{cases}$
$a = k, b = 2, \alpha = 0, \beta = 1$	k-Jacobsthal	$\begin{cases} J_{k,n} = kJ_{k,n-1} + 2J_{k,n-2}, n \geq 2 \\ J_{k,0} = 0,\ J_{k,1} = 1 \end{cases}$
$a = 3k, b = -2, \alpha = 0, \beta = 1$	k-Mersenne	$\begin{cases} M_{k,n} = 3kM_{k,n-1} - 2M_{k,n-2}, n \geq 2 \\ M_{k,0} = 0,\ M_{k,1} = 1 \end{cases}$

Table 1.1. Relations de récurrences de certains nombres.

Si l'on pose $k = 1$, le tableau ci-dessous devient

Les valeurs de a, b, α, β	Les suites	Relations de récurrences
$a = 1, b = \alpha = 1, \beta = 1$	Fibonacci	$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \\ F_0 = 0,\ F_1 = 1 \end{cases}$
$a = \beta = 1, b = 1, \alpha = 2$	Lucas	$\begin{cases} L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2 \\ L_0 = 2,\ L_1 = 1 \end{cases}$
$a = 2, b = 1, \alpha = 0, \beta = 1$	Pell	$\begin{cases} P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, n \geq 2 \\ P_0 = 0,\ P_1 = 1 \end{cases}$
$a = 1, b = 2, \alpha = 0, \beta = 1$	Jacobsthal	$\begin{cases} J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2 \\ J_0 = 0,\ J_1 = 1 \end{cases}$
$a = 3, b = -2, \alpha = 0, \beta = 1$	Mersenne	$\begin{cases} M_n = 3M_{n-1} - 2M_{n-2}, n \geq 2 \\ M_0 = 0,\ M_1 = 1 \end{cases}$

Table 1.2. Relations de récurrences de certains nombres classiques.

1.2.2 Relations de récurrences d'ordre trois de certains nombres Gaussiens

Définition 1.7 *[70] La suite de Tribonacci généralisée* $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} + tV_{n-3}, n \geq 3 \\ V_0 = a, V_1 = b, V_2 = c \end{cases},$$

avec $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$ *et* $r,\ s \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 1.3 .

1. Pour $r = 0, s = t = 1, a = 1, b = 1 + i, c = 1 + i$, *nous obtenons la suite des nombres Gaussiens de Padovan*

$$\begin{cases} GP_n = GP_{n-2} + GP_{n-3},\ n \geq 3 \\ GP_0 = 1,\ GP_1 = 1 + i, GP_2 = 1 + i \end{cases}.$$

2. Pour $r = 0, s = 2, t = 1, a = 1 - i, b = 1 + i, c = 1 + i$, *nous obtenons la suite des nombres*

Gaussiens de Pell-Padovan

$$\begin{cases} GR_n = 2GR_{n-2} + GR_{n-3},\ n \geq 3 \\ GR_0 = 1 - i,\ GR_1 = 1 + i, GR_2 = 1 + i \end{cases}.$$

1.2.3 Relations de récurrences de certains polynômes orthogonaux

Dans cette partie, on définie les polynômes de Chebychev des quatre types ainsi que les polynômes de Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal et les polynômes bivariés complexes de Fibonacci et Lucas.

Définition 1.8 *Une suite de polynômes orthogonaux est une suite infinie de polynômes $P_0(x), P_1(x), \ldots$ à coefficients réels, dans laquelle chaque $P_n(x)$ est de degré n, et telle que les polynômes de la suite sont orthogonaux deux à deux pour un produit sclaire de fonctions donné.*

Théorème 1.2 *[32] Soit $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes normalisée*

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots$$

alors $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes orthogonaux normalisée si et seulement si'il existe deux suites de nombres complexes $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x), n \geq 0 \\ P_{-1}(x) = 0, P_0(x) = 1 \end{cases}.$$

Proposition 1.3 *[32] (Favadar's) Toute suite de polynômes $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de relation de récurrence d'ordre deux est une suite de polynômes orthogonaux.*

Définition 1.9 *On définit la fonction T_n par*

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta),\ \ \theta \in [0, \pi], n \in \mathbb{N},$$

si $x \in [-1, 1]$, alors on a

$$T_n(x) = \cos(n(\arccos x)).$$

Proposition 1.4 *Les polynômes de Chebychev de première espèce sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x), n \geq 0 \end{cases}.$$

Preuve: Il suffit de prouver que

$$T_n(x) + T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x).$$

Pour $\theta \in [0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) + \cos((n+2)\theta) &= \cos((n+1)\theta)\cos\theta + \sin((n+1)\theta)\sin\theta \\ &\quad + \cos((n+1)\theta)\cos\theta - \sin((n+1)\theta)\sin\theta \\ &= 2\cos((n+1)\theta)\cos\theta, \end{aligned}$$

de la définition 1.8, on a

$$\forall \theta \in [0, \pi] \qquad T_n(\cos\theta) + T_{n+2}(\cos\theta) = 2T_{n+1}(\cos\theta)\cos(\theta),$$

comme $x = \cos\theta$, alors

$$\forall x \in [-1, 1] \qquad T_n(x) + T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x).$$

■

Définition 1.10 *On définit la fonction U_n par*

$$\sin\theta.U_n(\cos\theta) = \sin((n+1)\theta), \ \theta \in [0, \pi], n \in \mathbb{N},$$

si $x \in [-1,1]$, *alors on a*

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)(\arccos x))}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Proposition 1.5 *[52] Les polynômes de Chebychev de deuxième espèce sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\left\{\begin{array}{c} U_0(x) = 1 \\ U_1(x) = 2x \\ U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x), n \geq 0 \end{array}\right. .$$

Preuve: La preuve est similaire que la proposition 1.2. ■

Définition 1.11 *On définit la fonction* V_n *par*

$$V_n(x) = \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}, \ \theta \in [0,\pi]$$

avec $x = \cos\theta$ *et* $x \in [-1,1]$.

Proposition 1.6 *[36] Les polynômes de Chebychev de troisième espèce sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\left\{\begin{array}{c} V_{n+2}(x) = 2xV_{n+1}(x) - V_n(x), n \geq 0 \\ V_0(x) = 1, V_1(x) = 2x-1 \end{array}\right. .$$

Preuve: Il suffit de prouver que

$$V_n(x) + V_{n+2}(x) = 2xV_{n+1}(x)$$

Pour $\theta \in [0,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$V_n(x) + V_{n+2}(x) = \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)} + \frac{\cos\left(n+\frac{5}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta\cos\theta-\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta\sin\theta}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)} \\
&\quad+\frac{\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta\cos\theta+\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta\sin\theta}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)} \\
&= \frac{2\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta\cos\theta}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)} \\
&= 2xV_{n+1}(x).
\end{aligned}
$$

■

Définition 1.12 *On définit la fonction W_n par*

$$W_n(x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)},\ \theta\in[0,\pi]$$

avec $x=\cos\theta$ et $x\in[-1,1]$.

Proposition 1.7 *[36] Les polynômes de Chebychev de quatrième espèce sont définis par la relation de récurrence suivante*

$$\begin{cases} W_{n+2}(x)=2xW_{n+1}(x)-W_n(x),n\geq 0 \\ W_0(x)=1,W_1(x)=2x+1 \end{cases}.$$

Preuve: La preuve est similaire que la proposition 1.4. ■

Le tableau ci-dessous donne des relations de récurrences de certains polynômes.

Suite de Polynôme	Relation de récurrence
Fibonacci	$\begin{cases} F_n(x)=xF_{n-1}(x)+F_{n-2}(x),n\geq 2 \\ F_0(x)=1,\ F_1(x)=x \end{cases}$
Lucas	$\begin{cases} L_n(x)=xL_{n-1}(x)+L_{n-2}(x),n\geq 2 \\ L_0(x)=2,\ L_1(x)=x \end{cases}$

Pell	$\begin{cases} P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), n \geq 2 \\ P_0(x) = 0,\ P_1(x) = 1 \end{cases}$
Jacobsthal	$\begin{cases} J_n(x) = J_{n-1}(x) + 2xJ_{n-2}(x), n \geq 2 \\ J_0(x) = 0,\ J_1(x) = 1 \end{cases}$

Table 1.3 .Relations de récurrences de certain polynômes

Définition 1.13 *[5] Les polynômes bivariés complexes de Fibonacci sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} F_n(x,y) = ixF_{n-1}(x,y) + F_{n-2}(x,y), n \geq 2 \\ F_0(x,y) = 0,\ F_1(x,y) = 1 \end{cases}$$

Définition 1.14 *[5] Les polynômes bivariés complexes de Lucas sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} L_n(x,y) = ixL_{n-1}(x,y) + L_{n-2}(x,y), n \geq 2 \\ L_0(x,y) = 2,\ L_1(x,y) = ix \end{cases}.$$

1.3 Fonctions génératrices ordinaires

Définition 1.15 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres ; on appelle fonction génératrice ordinaire de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ la fonction*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n.$$

Proposition 1.8 *[19] Soit $g(z)$ une fonction génératrice de la suite (a_n) et $h(z)$ une fonction génératrice de la suite (b_n), alors*

1. *$g(z)h(z)$ fonction génératrice de la suite $(a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + ... + a_1b_{n-1} + a_0b_n)$.*
2. *$c_1g(z) + c_2h(z)$ fonction génératrice de la suite $(c_1a_n + c_2b_n)_{n\geq 0}$.*
3. *$(1-z)g(z)$ fonction génératrice de la suite $(a_n - a_{n-1})_{n\geq 0}$.*
4. *$ng(z)$ fonction génératrice de la suite $(na_n)_{n\geq 0}$.*
5. *$\frac{g(z)}{1-z}$ fonction génératrice de la suite $(a_0 + a_1 + ... + a_n)$.*

1.3.1 Fonctions génératrices de certains nombres

Le but de ce paragraphe est de calculer des fonctions génératrices des suites définies par les relations de récurrences d'ordre deux, trois et quatre.

Théorème 1.3 *La fonction génératrice de la suite de Fibonacci généralisée* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donnée par*

$$g(z) = \frac{\alpha + (\beta - p\alpha) z}{1 - az - bz^2}.$$

Preuve: Soit

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n,$$

la fonction génératrice de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
g(z) &= U_0 + U_1 z + \sum_{n\geq 2} U_n z^n \\
&= U_0 + U_1 z + \sum_{n\geq 2} (pU_{n-1} + qU_{n-2}) z^n \\
&= U_0 + U_1 z + p \sum_{n\geq 2} U_{n-1} z^n + q \sum_{n\geq 2} U_{n-2} z^n \\
&= U_0 + U_1 z + pz \sum_{n\geq 0} (U_n z^n - U_0) + qz^2 \sum_{n\geq 0} U_n z^n \\
&= \alpha + \beta z + pz \sum_{n\geq 0} U_n z^n - p\alpha z + qz^2 \sum_{n\geq 0} U_n z^n \\
&= \alpha + (\beta - a\alpha) z + azg(z) + bz^2 g(z),
\end{aligned}$$

alors, nous trouve

$$g(z) = \frac{\alpha + (\beta - a\alpha) z}{1 - az - bz^2}.$$

■

D'aprés le théorème précédent, nous déduisons des fonctions génératrices de certains nombres.

Valeurs de p, q, α, β	Coefficients de z^n	Fonctions génératrices
$p = k, q = \alpha = 1, \beta = 1$	$F_{k,n}$	$\frac{1}{1-kz-z^2}$
$p = \beta = k, q = 1, \alpha = 2$	$L_{k,n}$	$\frac{2-kz}{1-kz-z^2}$

$p=2, q=k, \alpha=0, \beta=1$	$P_{k,n}$	$\frac{z}{1-2z-kz^2}$
$p=k, q=2, \alpha=0, \beta=1$	$J_{k,n}$	$\frac{z}{1-kz-2z^2}$
$p=3k,\ q=-2, \alpha=0, \beta=1$	$M_{k,n}$	$\frac{z}{1-3kz+2z^2}$

Table 1.4. Fonctions génératrices de certains nombres.

Si $k=1$, le tableau ci-dessous devient

Valeurs de p, q, α, β	Coefficients de z^n	Fonctions génératrices
$p=1, q=\alpha=1, \beta=1$	F_n	$\frac{1}{1-z-z^2}$
$p=\beta=1, q=1, \alpha=2$	L_n	$\frac{2-z}{1-z-z^2}$
$p=2, q=1, \alpha=0, \beta=1$	P_n	$\frac{z}{1-2z-z^2}$
$p=1, q=2, \alpha=0, \beta=1$	J_n	$\frac{z}{1-z-2z^2}$
$p=3,\ q=-2, \alpha=0, \beta=1$	M_n	$\frac{z}{1-3z+2z^2}$

Table 1.5 Fonctions génératrices de certains nombres classiques.

Proposition 1.9 *La fonction génératrice des nombres Gaussiens de Padovan est donnée par*

$$g\left(z\right)=\frac{1+\left(1+i\right)z+iz^{2}}{1-z^{2}-z^{3}}.$$

Preuve: Par définition, on a

$$\begin{aligned}
g\left(z\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} GP_n z^n \\
&= GP_0+GP_1+GP_2+\sum_{n=3}^{\infty} GP_n z^n \\
&= GP_0+GP_1+GP_2+\sum_{n=3}^{\infty} GP_{n-2} z^n+\sum_{n=3}^{\infty} GP_{n-3} z^n \\
&= \left(1-z^2\right)GP_0+GP_1+GP_2+z^2\sum_{n=3}^{\infty} GP_n z^n+z^3\sum_{n=3}^{\infty} GP_n z^n \\
&= \left(1-z^2\right)GP_0+GP_1+GP_2+z^2G\left(z\right)+z^3G\left(z\right),
\end{aligned}$$

mais comme $GP_0 = 1, GP_1 = GP_2 = 1 + i$, alors

$$g(z) = \frac{1 + (1+i)z + iz^2}{1 - z^2 - z^3}.$$

■

Proposition 1.10 *La fonction génératrice des nombres Gaussiens de Pell-Padovan est donnée par*

$$g(z) = \frac{(1+i) + (1+i)z + (-1+3i)z^2}{1 - 2z^2 - z^3}.$$

Preuve: La preuve est similaire à celle de la proposition 1.7. ■

Théorème 1.4 *Soit la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par la relation de récurrence d'ordre quatre suivante :*

$$\begin{cases} w_n = r_1 w_{n-1} + r_2 w_{n-2} + r_3 w_{n-3} + r_4 w_{n-4}, n \geq 4 \\ w_0 = a, \quad w_1 = b, \quad w_2 = c, \quad w_3 = d \end{cases},$$

avec r_1, r_2, $r_3 \in \mathbb{R}$, $r_4 \in \mathbb{R}^*$ et a, b, c, $d \in \mathbb{C}$. Alors, la fonction génératrice associée à $(w_n)_{n\geq 0}$ est donnée par

$$g(z) = \frac{a + (b - r_1 a)z + (c - r_1 b - r_2 a)z^2 + (d - r_1 c - r_2 b - r_3 a)z^4}{1 - r_1 z - r_2 z^2 - r_3 z^3 - r_4 z^4}.$$

Preuve: On a

$$\begin{aligned}
g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n \\
&= w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} w_n z^n \\
&= w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} (r_1 w_{n-1} + r_2 w_{n-2} + r_3 w_{n-3} + r_4 w_{n-4}) z^n \\
&= w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + r_1 \sum_{n=4}^{\infty} w_{n-1} z^n + r_2 \sum_{n=4}^{\infty} w_{n-2} z^n + r_3 \sum_{n=4}^{\infty} w_{n-3} z^n \\
&\quad + r_4 \sum_{n=4}^{\infty} w_{n-4} z^n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a+bz+cz^2+dz^3+zr_1\sum_{n=4}^{\infty}w_{n-1}z^{n-1}+z^2r_2\sum_{n=4}^{\infty}w_{n-2}z^{n-2}+z^3r_3\sum_{n=4}^{\infty}w_{n-3}z^{n-3} \\
&\quad +z^4r_4\sum_{n=4}^{\infty}w_{n-4}z^{n-4} \\
&= a+bz+cz^2+dz^3+zr_1\left(\sum_{n=4}^{\infty}w_nz^n-a-bz-cz^2\right)+z^2r_2\left(\sum_{n=0}^{\infty}w_nz^n-a-bz\right) \\
&\quad +z^3r_3\left(\sum_{n=0}^{\infty}w_nz^n-a\right)+z^4r_4\sum_{n=0}^{\infty}w_n \\
&= a+(b-r_1a)\,z+(c-r_1b-r_2a)\,z^2+(d-r_1c-r_2b-r_3a)\,z^3 \\
&\quad +\left(r_1z+r_2z^2+r_3z^3+r_4z^4\right)\sum_{n=4}^{\infty}w_nz^n \\
&= a+(b-r_1a)\,z+(c-r_1b-r_2a)\,z^2+(d-r_1c-r_2b-r_3a)\,z^3 \\
&\quad +\left(r_1z+r_2z^2+r_3z^3+r_4z^4\right)g(z),
\end{aligned}
$$

donc,

$$g(z)=\frac{a+(b-r_1a)\,z+(c-r_1b-r_2a)\,z^2+(d-r_1c-r_2b-r_3a)\,z^4}{1-r_1z-r_2z^2-r_3z^3-r_4z^4}.$$

■

1.3.2 Fonctions génératrices de certains polynômes orthogonaux

Théorème 1.5 *Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ la suite des polynômes orthogonaux définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} P_n(x)=pxP_{n-1}(x)+qP_{n-2}(x)\,, n\geq 2 \\ P_0(x)=\alpha, P_1(x)=\beta x+\delta \end{cases},$$

avec $q\in\mathbb{R}^*, p,\ \alpha,\ \beta,\ \delta\in\mathbb{R}$.

La fonction génératrice associée à $(P_n)_{n\geq 0}$ est donnée par

$$g(z)=\frac{\alpha+((\beta-p\alpha)\,x+\delta)\,z}{1-pxz-qz^2}.$$

Preuve: On a

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,z^n$$

$$\begin{aligned}
&= P_0(x) + P_1(x) z + \sum_{n=2}^{\infty} P_n(x) z^n \\
&= \alpha + \beta x z + \delta z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(p x P_{n-1}(x) + q P_{n-2}(x) \right) z^n \\
&= \alpha + \beta x z + \delta z + p x \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x) z^n + q \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2}(x) z^n \\
&= \alpha + \beta x z + \delta z + p x z \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) z^n + q z^2 \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \\
&= \alpha + \beta x z + \delta z + p x z \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n - \alpha \right) + q z^2 \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \\
&= \alpha + \beta x z + \delta z - p \alpha x z + p x z g(z) + q z^2 g(z),
\end{aligned}$$

et par suit

$$\left(1 - p x z - q z^2\right) g(z) = \alpha + \left(\left(\beta - p\alpha\right) x + \delta\right) z,$$

or

$$g(z) = \frac{\alpha + \left(\left(\beta - p\alpha\right) x + \delta\right) z}{1 - p x z - q z^2}.$$

■

Nous déduisons des fonctions génératrices de certains polynômes.

Les valeurs de $p, q, \alpha, \beta, \delta$	Les coefficients de z^n	Fonctions génératrices
$p = 2, q = -1, \alpha = 1, \beta = 1, \delta = 0$	$T_n(x)$	$\frac{1-xz}{1-2xz+z^2}$
$p = 2, q = -1, \alpha = 1, \beta = 1, \delta = 0$	$U_n(x)$	$\frac{1}{1-2xz+z^2}$
$p = 2, q = -1, \alpha = 1, \beta = 2, \delta = -1$	$V_n(x)$	$\frac{1-z}{1-2xz+z^2}$
$p = 2, q = -1, \alpha = 1, \beta = 2, \delta = 1$	$W_n(x)$	$\frac{1+z}{1-2xz+z^2}$
$p = 1, q = 1, \alpha = 1, \beta = 1, \delta = 0$	$F_n(x)$	$\frac{1}{1-xz+z^2}$
$p = 1, q = 1, \alpha = 2, \beta = 1, \delta = 0$	$L_n(x)$	$\frac{2-xz}{1-xz-z^2}$
$p = 2, q = 1, \alpha = 0, \beta = 0, \delta = 1$	$P_n(x)$	$\frac{z}{1-2xz-z^2}$

Table 1.6. Fonctions génératrices de certains polynômes.

1.4 Fonctions symétriques

Nous donnons ici un aperçu de quelques notions de bases et certaines propriétés de ces fonctions.

Définition 1.16 *Soit $f : K^n \to K$ une fonction en n variables. On dit que f est symétrique si pour tout permutation σ de l'ensemble d'indices $\{1,\ 2, ...,\ n\}$ l'égalité suivante est vérifiée*

$$f(x_1,\ x_2, ...,\ x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}\right).$$

Autrement dit, une fonction de plusieurs variables est symétrique si sa valeur ne change pas quand on permute les variables.

1.4.1 Fonctions symétriques élémentaires

Définition 1.17 *On appelle k-ième fonction symétrique élémentaire la fonction définit par*

$$e_k^{(n)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}, 0 \leq k \leq n,$$

avec $i_1, i_2, ..., i_n = 0$ ou 1.

Exemple 1.4 *Pour une équation de degré 3 $(n = 3, \text{les racines : } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, on a*

$$e_k^{(3)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left\{ \begin{array}{c} e_0 = 1 \\ e_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ e_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ e_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{array} \right. .$$

Proposition 1.11 *Soit $e_k^{(n)}$ la fonction symétrique élémentaire, on a*

1. $e_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1}e_{k-1}^{(n)} + e_k^{(n)}$,
2. $e_k^{(n)} = \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)} + \lambda_{n-1}e_k^{(n-2)} + ... + \lambda_{n-i}e_{k-1}^{(n-i-1)} + ... + \lambda_k e_k^{(k-1)}$.

Preuve: *1. De la définition de la fonction symétrique élémentaire, on a*

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1}e_{k-1}^{(n)}+e_k^{(n)} &= \lambda_{n+1}\left(\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k-1}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\right)+\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n} \\
&= \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k-1}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}+\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^0 \\
&= \sum_{i_1+i_2+...+i_n+1=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^1+\sum_{i_1+i_2+...+i_n+0=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^0 \\
&= \sum_{i_1+i_2+...+i_{n+1}=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}} \\
&= e_k^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

2. De la formule 1, on écrit $e_k^{(n)}$ *comme suit*

$$\begin{aligned}
e_k^{(n)} &= \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+e_k^{(n-1)} \\
&= \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+\lambda_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)}+e_k^{(n-2)} \\
&= \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+\lambda_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)}+\lambda_{n-2}e_{k-1}^{(n-3)}+e_k^{(n-3)} \\
&= \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+\lambda_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)}+\lambda_{n-2}e_{k-1}^{(n-3)}+e_k^{(n-3)}+...+\lambda_{n-i}e_{k-1}^{(n-i-1)}+...+\lambda_k e_{k-1}^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ■

Proposition 1.12 *Les fonctions symétriques élémentaires peuvent également définir comme les coefficients du développement en série formelle*

$$E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e_k^{(n)}z^k=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z),$$

avec $e_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=0$ *pour* $k>n$.

Preuve: Par récurrence

On a

$$\sum_{k=0}^{\infty}e_k^{(n)}z^k=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z).$$

Alors pour $n = 2$, on trouve

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{2}(1+\lambda_i z) &= (1+\lambda_1 z)(1+\lambda_2 z) \\
&= 1+(\lambda_1+\lambda_2)z+\lambda_1\lambda_2 z^2 \\
&= e_0+e_1 z+e_2 z^2 \\
&= \sum_{k=0}^{2} e_k z^k.
\end{aligned}$$

Supposons que

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k^{(n)} z^k = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z),$$

et montrons que

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k^{(n+1)} z^k = \prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i z).$$

On a

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i z) &= (1+\lambda_{n+1} z)\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z) \\
&= (1+\lambda_{n+1} z)\sum_{k=0}^{n} e_k z^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} e_k z^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n} e_k z^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e_k z^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} e_{k-1} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e_k^{(n)} z^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} e_{k-1}^{(n+1)} z^k \\
&= \sum_{k\geq 0}\left(e_k^{(n)}+\lambda_{n+1}e_{k-1}^{(n+1)}\right) z^k \\
&= \sum_{k\geq 0} e_k^{(n+1)} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} e_k^{(n)} z^k.
\end{aligned}$$

■

1.4.2 Fonctions symétriques complètes

Définition 1.18 *On appelle k-ième fonction symétrique complètes la fonction définit par*

$$h_k^{(n)} = h_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n},$$

avec $i_1,\ i_2, ...,\ i_n \geq 0.$

Exemple 1.5 *Pour une équation de degré 3* $(n = 3,\ \text{les racines : } \lambda_1,\ \lambda_2, \lambda_3)$, *on a*

$$h_k^{(3)} = h_k(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} h_0 = 1 \\ h_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ h_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ h_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_3^2\lambda_1 + \lambda_3^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ \vdots \end{cases}$$

Proposition 1.13 *Soit* $h_k^{(n)}$ *la fonction symétrique complète, on a*

1. $h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)}$,
2. $h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1}^k + \lambda_{n+1}^{k-1}h_1^{(n)} + \lambda_{n+1}^{k-2}h_2^{(n)} + \lambda_{n+1}^{k-3}h_3^{(n)} + ... + \lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)}$.

Preuve: 1. En vertu de la définition de la fonction symétrique complète, on a

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)} &= \lambda_{n+1} \times \sum_{i_1+i_2+...+i_{n+1}=k-1} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_n^{i_{n+1}} + \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n} \\ &= \sum_{i_1+i_2+...+i_{n+1}=k-1} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_n^{i_{n+1}}\lambda_{n+1}^1 + \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^0 \\ &= \sum_{i_1+i_2+...+i_{n+1}=k-1+1=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_n^{i_{n+1}}\lambda_{n+1}^1 + \sum_{i_1+i_2+...+i_n+0=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^0 \\ &= \sum_{i_1+i_2+...+i_{n+1}=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_n^{i_{n+1}}\lambda_{n+1}^1 + \sum_{i_1+i_2+...+i_n+0=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^0, \end{aligned}$$

comme $i_{n+1} \geq 0$, alors $i_{n+1} + 1 \geq 1$. Supposons $i'_{n+1} = i_{n+1} + 1$ ou $i'_{n+1} = 0$, donc $i'_{n+1} \geq 0$, et par suite

$$\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)} = \sum_{i_1+i_2+...+i\prime_{n+1}=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_n^{i'_{n+1}}$$

$$= h_k^{(n+1)}.$$

2. De la première égalité, on écrit $h_k^{(n+1)}$ comme suit

$$\begin{aligned}
h_k^{(n+1)} &= \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)} \\
&= \lambda_{n+1} \left(\lambda_{n+1} h_{k-2}^{(n+1)} + h_{k-1}^{(n)} \right) + h_k^{(n)} \\
&= \lambda_{n+1}^2 h_{k-2}^{(n+1)} + \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)} \\
&= \lambda_{n+1}^3 h_{k-3}^{(n+1)} + \lambda_{n+1}^2 h_{k-2}^{(n+1)} + \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)} \\
&= \lambda_{n+1}^i h_{k-i}^{(n+1)} + \lambda_{n+1}^{i-1} h_{k-(i-1)}^{(n+1)} + ... + \lambda_{n+1}^2 h_{k-2}^{(n+1)} + \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)} \\
&= \lambda_{n+1}^k + \lambda_{n+1}^{k-1} h_1^{(n)} + \lambda_{n+1}^{k-2} h_2^{(n)} + \lambda_{n+1}^{k-3} h_3^{(n)}. + ... + \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Proposition 1.14 *On peut également se définir les k-ième fonctions complètes comme les coefficients du développement en série formelle*

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(n)} z^k = \prod_{i \geq 1} (1 - \lambda_i z)^{-1}.$$

Preuve: Par récurrence

On a

$$h_k^{(n)} = h_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} ... \lambda_n^{i_n},$$

alors, pour $n = 2$, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(2)} z^k &= h_0^{(2)} + h_1^{(2)} z + h_2^{(2)} z^2 + ... \\
&= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2) z + \left(\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 \right) z^2 + ... \\
&= \left(1 + \lambda_1 z + \lambda_1^2 z^2 + ... \right) \left(1 + \lambda_2 z + \lambda_2^2 z^2 + ... \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 z)^k \times \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_2 z)^k \\
&= \frac{1}{(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}(1-\lambda_i z)}.$$

Supposons que

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(n)} z^k = \prod_{i\geq 1}(1-\lambda_i z)^{-1},$$

et montrons que

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(n+1)} z^k = \prod_{i\geq 1}(1-\lambda_i z)^{-1},$$

on a

$$h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)},$$

alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(n+1)} z^k &= \lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} h_{k-1}^{(n+1)} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(n)} z^k \\
&= \lambda_{n+1}\sum_{k=1}^{\infty} h_{k-1}^{(n+1)} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(n)} z^k \\
&= \lambda_{n+1} z\sum_{k=0}^{\infty} h_{k-1}^{(n+1)} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(n)} z^k \\
&= \lambda_{n+1} z\prod_{i=1}^{n+1}(1-\lambda_i z)^{-1} + \prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i z)^{-1} \\
&= \frac{\lambda_{n+1} z + (1-\lambda_{n+1} z)}{\prod_{i=0}^{n+1}(1-\lambda_i z)} \\
&= \frac{1}{\prod_{i=0}^{n+1}(1-\lambda_i z)},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Proposition 1.15 *Soient $E(z)$ et $H(z)$ deux fonctions symétriques élémentaire et complète respectivement, alors on a*

$$E(-z)\times H(z) = 1.$$

Preuve: Par définition, on a

$$E(-z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k^{(n)}(-z)^k = \prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i z),$$

et

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k = \prod_{i \geq 1} (1 - \lambda_i z)^{-1},$$

donc,

$$E(-z) \times H(z) = 1.$$

■

1.4.3 Quelques propriétés des fonctions symétriques

Définition 1.19 *Soit l'alphabet $E = \{e_1, e_2\}$, on définit la fonction symétrique S_n qui lui est associée par*

$$S_n(E) = S_n(e_1 + e_2) = \frac{e_1^{n+1} - e_2^{n+1}}{e_1 - e_2},$$

avec

$$\begin{aligned} S_0(E) &= h_0^{(2)} = 1 \\ S_1(E) &= h_1^{(2)} = e_1 + e_2 \\ S_2(E) &= h_2^{(2)} = e_1^2 + e_2^2 + e_1 e_2 \\ &\vdots \\ S_n(E) &= h_n^{(2)} \end{aligned}$$

et $S_n(E) = 0$ pour $n < 0$.

Définition 1.20 *Etant donnés deux alphabets A et B, on note $S_n(A - B)$ les coefficients de la série rationnelle*

$$\frac{\prod_{b \in B} (1 - zb)}{\prod_{a \in A} (1 - za)} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A - B) z^n.$$

Remarque 1.3 *Si $A = \emptyset$, alors*

$$\prod_{b \in B} (1 - zb) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(-B) z^n.$$

Proposition 1.16 *Supposons que* $A=\emptyset$ *ou* $B=\emptyset$ *, on obtient*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A-B)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} S_n(-B)z^n.$$

Remarque 1.4 *Si* $A=B$*, alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)z^n = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)z^n}.$$

Lemme 1.1 *Soit* $A=\{x\}$ *et* $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ *deux alphabets, on a*

$$S_{n+k}(x-B) = x^k S_n(x-B), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Proposition 1.17 *Soit* $A=\{x\}$ *et* $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ *deux alphabets, on a*

$$\frac{\prod\limits_{b\in B}(1-zb)}{(1-zx)} = 1+...+z^{n-1}S_{n-1}(x-B)+z^n\frac{S_n(x-B)}{(1-zx)}.$$

Preuve: De la définition 1.23, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\prod\limits_{b\in B}(1-zb)}{(1-zx)} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x-B)z^n \\
&= 1+...+S_{n-1}(x-B)z^{n-1}+S_n(x-B)z^n+S_{n+1}(x-B)z^{n+1}+... \\
&= 1+...+S_{n-1}(x-B)z^{n-1}+z^n(S_n(x-B)+S_{n+1}(x-B)z+...),
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $S_{n+k}(x-B) = x^k S_n(x-B), \forall k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\prod\limits_{b\in B}(1-zb)}{(1-zx)} &= 1+...+S_{n-1}(x-B)z^{n-1}+z^n(S_n(x-B)+xS_n(x-B)z+...) \\
&= 1+...+S_{n-1}(x-B)z^{n-1}+z^nS_n(x-B)\left(1+xz+x^2z^2+...\right),
\end{aligned}$$

mais comme

$$\frac{1}{1-xz} = 1+xz+x^2z^2+...,$$

alors
$$\frac{\prod\limits_{b\in B}(1-zb)}{(1-zx)} = 1+...+S_{n-1}(x-B)\,z^{n-1}+\frac{z^n S_n(x-B)}{1-xz}.$$

■

Proposition 1.18 *Soit $A=\{x\}$, on a*

$$S_n(x-B) = x^n S_0(-B) + x^{n-1}S_1(-B) + ... + S_n(-B).$$

Preuve: On a

$$\begin{aligned} S_n(x-B) &= \sum_{k=0}^{n} S_{n-k}(x)\,S_k(-B) \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^{n-k}S_k(-B) \\ &= x^n S_0(-B) + x^{n-1}S_1(-B) + ... + S_n(-B). \end{aligned}$$

■

Remarque 1.5 *En particulier, lorsque $B=\{b,b,...,b\}$, on a $S_n(x-nb)=(x-b)^n$.*

Chapitre 2

Construction de certains nombres et polynômes par des fonctions symétriques

Dans ce chapitre, nous donnons des nouvelles fonctions génératrices des nombres de Tetranacci généralisés et nous récupérons aussi des fonctions génératrices des nombres de Fibonacci généralisés, Tribonacci généralisés et certains polynômes.

2.1 Notations et définitions

Rappelons d'abord la formule de l'opérateur symétrique qui est valide dans la suite.

Définition 2.1 *Soit $A = \{a_1, a_2\}$ un alphabet, nous définissons l'opérateur symétrique $\delta^k_{a_1a_2}$ par*

$$\delta^k_{a_1a_2} f(a_1) = \frac{a_1^k f(a_1) - a_2^k f(a_2)}{a_1 - a_2}, k \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Remarque 2.1 *Si $f(a) = a$, alors la formule (2.1) s'écrit comme suit*

$$\delta^k_{a_1a_2} f(a_1) = \frac{a_1^{k+1} - a_2^{k+1}}{a_1 - a_2} = S_k(a_1 + a_2).$$

2.2 Résultat principal

Théorème 2.1 *Etant donnés deux alphabets $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et $A = \{a_1, a_2\}$, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(E)S_n(a_1 + a_2)z^n = \frac{\begin{pmatrix} 1 - a_1a_2S_2(-E)z^2 - a_1a_2(a_1 + a_2)S_3(-E)z^3 \\ -a_1a_2\left((a_1 + a_2)^2 - a_1a_2\right)S_4(-E)z^4 \end{pmatrix}}{\prod_{e\in E}(1 - a_1ez)\prod_{e\in E}(1 - a_2ez)}. \tag{2.2}$$

Preuve: Soit $f(a_1z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E)a_1^n z^n$, alors le premier membre de la formule (2.2) s'écrit

$$\begin{aligned}
\delta^1_{a_1a_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(E)a_1^n z^n\right) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} S_n(E)a_1^{n+1}z^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E)a_2^{n+1}z^n}{a_1 - a_2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E)\frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{a_1 - a_2}z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(E)S_n(a_1 + a_2)z^n,
\end{aligned}$$

mais comme $f(a_1 z) = \frac{1}{\prod_{e\in E}(1-a_1 ez)}$, alors le deuxième membre de la formule (2.2) s'écrit

$$\begin{aligned}
\delta^1_{a_1a_2}\left(\frac{1}{\prod\limits_{e\in E}(1-a_1ez)}\right) &= \frac{\frac{a_1}{\prod_{e\in E}(1-a_1ez)}-\frac{a_2}{\prod_{e\in E}(1-a_2ez)}}{a_1-a_2} \\
&= \frac{a_1\prod\limits_{e\in E}(1-a_2ez)-a_2\prod\limits_{e\in E}(1-a_1ez)}{(a_1-a_2)\prod\limits_{e\in E}(1-a_1ez)\prod\limits_{e\in E}(1-a_2ez)} \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_n(-E)\,a_1a_2^nz^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_n(-E)\,a_2a_1^nz^n}{(a_1-a_2)\prod\limits_{e\in E}(1-a_1ez)\prod\limits_{e\in E}(1-a_2ez)} \\
&= \frac{1-a_1a_2\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n(-E)\frac{a_1^{n-1}-a_2^{n-1}}{a_1-a_2}z^n}{\prod\limits_{e\in E}(1-a_1ez)\prod\limits_{e\in E}(1-a_2ez)} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 1-a_1a_2S_2(-E)\,z-a_1a_2(a_1+a_2)\,S_3(-E)\,z^3 \\ -a_1a_2\left((a_1+a_2)^2-a_1a_2\right)S_4(-E)\,z^4\end{pmatrix}}{\prod\limits_{e\in E}(1-a_1ez)\prod\limits_{e\in E}(1-a_2ez)},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

2.3 Fonctions génératrices des nombres de Tetranacci généralisés

Définition 2.2 *[74] La suite de Tetranacci généralisée* $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} W_n = r_1W_{n-1}+r_2W_{n-2}+r_3W_{n-3}+r_4W_{n-4}, n\geq 4 \\ W_0=a, W_1=b, W_2=c, W_3=d \end{cases},$$

avec les conditions initials sont des nombres complexes (ou reélles) et $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}, r_4 \in \mathbb{R}^*$.

Les cas spécials de $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont représentés dans le tableau suivant :

Nombres de Tetranacci généralisée	Relations de réccurences
Tetranacci	$\begin{cases} T_n^{(4)} = T_{n-1}^{(4)} + T_{n-2}^{(4)} + T_{n-3}^{(4)} + T_{n-4}^{(4)}, n \geq 4 \\ T_0^{(4)} = 0, T_1^{(4)} = 1, T_2^{(4)} = 1, T_3^{(4)} = 2 \end{cases}$
Tetranacci-Lucas	$\begin{cases} R_n^{(4)} = R_{n-1}^{(4)} + R_{n-2}^{(4)} + R_{n-3}^{(4)} + R_{n-3}^{(4)}, n \geq 4 \\ R_0^{(4)} = 4, R_1^{(4)} = 1, R_2^{(4)} = 3, R_3^{(4)} = 7 \end{cases}$
Gaussiens de Tetranacci	$\begin{cases} GT_n^{(4)} = GT_{n-1}^{(4)} + GT_{n-2}^{(4)} + GT_{n-3}^{(4)} + GT_{n-4}^{(4)}, n \geq 4 \\ GT_0^{(4)} = 0, GT_1^{(4)} = 1, GT_2^{(4)} = 1+i, GT_3^{(4)} = 2+i \end{cases}$
Gaussiens de Tetranacci-Lucas	$\begin{cases} GR_n^{(4)} = GR_{n-1}^{(4)} + GR_{n-2}^{(4)} + GR_{n-3}^{(4)} + GR_{n-3}^{(4)}, n \geq 4 \\ GR_0^{(4)} = 4-i, GR_1^{(4)} = 1+4i, GR_2^{(4)} = 3+i, GR_3^{(4)} = 7+3i \end{cases}$
Pell d'ordre quatre	$\begin{cases} P_n^{(4)} = 2P_{n-1}^{(4)} + P_{n-2}^{(4)} + P_{n-3}^{(4)} + P_{n-4}^{(4)}, n \geq 4 \\ P_0^{(4)} = 0, P_1^{(4)} = 1, P_2^{(4)} = 2, P_3^{(4)} = 5 \end{cases}$
Pell-Lucas d'ordre quatre	$\begin{cases} Q_n^{(4)} = 2Q_{n-1}^{(4)} + Q_{n-2}^{(4)} + Q_{n-3}^{(4)} + Q_{n-4}^{(4)}, n \geq 4 \\ Q_0^{(4)} = 4, Q_1^{(4)} = 2, Q_2^{(4)} = 6, Q_3^{(4)} = 17 \end{cases}$
Pell modifiés d'ordre quatre	$\begin{cases} E_n^{(4)} = 2E_{n-1}^{(4)} + E_{n-2}^{(4)} + E_{n-3}^{(4)} + E_{n-4}^{(4)}, n \geq 4 \\ E_0^{(4)} = 0, E_1^{(4)} = 1, E_2^{(4)} = 1, E_3^{(4)} = 3 \end{cases}$
4-premiers	$\begin{cases} G_n = 2G_{n-1} + 3G_{n-2} + 5G_{n-3} + 7G_{n-4}, n \geq 4 \\ G_0 = 0, G_1 = 0, G_2 = 1, G_3 = 2 \end{cases}$
Lucas 4-premiers	$\begin{cases} H_n = 2H_{n-1} + 3H_{n-2} + 5H_{n-3} + 7H_{n-4}, n \geq 4 \\ H_0 = 4, H_1 = 2, H_2 = 10, H_3 = 41 \end{cases}$
4-premiers modifiés	$\begin{cases} E_n = 2E_{n-1} + 3E_{n-2} + 5E_{n-3} + 7E_{n-4}, n \geq 4 \\ E_0 = 0, E_1 = 0, E_2 = 1, E_3 = 1 \end{cases}$

Table 2.1. Les cas spécials des nombres de Tetranacci généralisés.

Dans le cas spécial $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et $A = \{1, 0\}$ le théorème 2.1 prend la forme

Corollaire 2.1 *Etant donné un alphabet* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(E) z^n = \frac{1}{(1-e_1 z)(1-e_2 z)(1-e_3 z)(1-e_4 z)}. \tag{2.3}$$

D'aprés la formule (2.3) , on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(E)z^n = \frac{z}{(1-e_1z)(1-e_2z)(1-e_3z)(1-e_4z)}, \tag{2.4}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(E)z^n = \frac{z^2}{(1-e_1z)(1-e_2z)(1-e_3z)(1-e_4z)}, \tag{2.5}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-3}(E)z^n = \frac{z^3}{(1-e_1z)(1-e_2z)(1-e_3z)(1-e_4z)}, \tag{2.6}$$

avec

$$\begin{aligned} & (1-e_1z)(1-e_2z)(1-e_3z)(1-e_4z) \\ = \ & 1-(e_1+e_2+e_3+e_4)z+(e_1e_2+e_1e_3+e_1e_4+e_2e_3+e_2e_4+e_3e_4)z^2 \\ & -(e_1e_2e_3+e_1e_2e_4+e_1e_3e_4+e_2e_3e_4)z^3+e_1e_2e_3e_4z^4 \\ = \ & 1+S_1(-E)z+S_2(-E)z^2+S_3(-E)z^3+S_4(-E)z^4. \end{aligned}$$

En posant $\begin{cases} S_1(-E) = -r_1 \\ S_2(-E) = -r_2 \\ S_3(-E) = -r_3 \\ S_4(-E) = -r_4 \end{cases}$, dans (2.3) , (2.4) , (2.5) et (2.6) , on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(E)z^n = \frac{1}{1-r_1z-r_2z^2-r_3z^3-r_4z^4}, \tag{2.7}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(E)z^n = \frac{z}{1-r_1z-r_2z^2-r_3z^3-r_4z^4}, \tag{2.8}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(E)z^n = \frac{z^2}{1-r_1z-r_2z^2-r_3z^3-r_4z^4}, \tag{2.9}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-3}(E)z^n = \frac{z^3}{1-r_1z-r_2z^2-r_3z^3-r_4z^4}, \tag{2.10}$$

respectivements.

En multipliant les équations $(2.7), (2.8), (2.9)$ et (2.10) par $W_0, W_1 - r_1W_0, W_2 - r_1W_1 - r_2W_0$, et $W_3 - r_1W_2 - r_2W_1 - r_3W_0$ respectivements, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_0 S_n(E) z^n = \frac{W_0}{1 - r_1z - r_2z^2 - r_3z^3 - r_4z^4}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (W_1 - r_1W_0) S_{n-1}(E) z^n = \frac{(W_1 - r_1W_0) z}{1 - r_1z - r_2z^2 - r_3z^3 - r_4z^4}, \tag{2.12}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (W_2 - r_1W_1 - r_2W_0) S_{n-2}(E) z^n = \frac{(W_2 - r_1W_1 - r_2W_0) z^2}{1 - r_1z - r_2z^2 - r_3z^3 - r_4z^4}, \tag{2.13}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (W_3 - r_1W_2 - r_2W_1 - r_3W_0) S_{n-3}(E) z^n = \frac{(W_3 - r_1W_2 - r_2W_1 - r_3W_0) z^3}{1 - r_1z - r_2z^2 - r_3z^3 - r_4z^4}. \tag{2.14}$$

En additionant les équations obtenues $(2.11), (2.12), (2.13)$ et (2.14), alors on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice de la suite de Tetranacci généralisée est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n z^n = \frac{W_0 + (W_1 - r_1W_0) z + (W_2 - r_1W_1 - r_2W_0) z^2 + (W_3 - r_1W_2 - r_2W_1 - r_3W_0) z^3}{1 - r_1z - r_2z^2 - r_3z^3 - r_4z^4}.$$

De cette proposition, on peut conclure le corollaire suivant :

Corollaire 2.2 *Pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} W_n &= W_0 S_n(E) + (W_1 - r_1W_0) S_{n-1}(E) + (W_2 - r_1W_1 - r_2W_0) S_{n-2}(E) \\ &\quad + (W_3 - r_1W_2 - r_2W_1 - r_3W_0) S_{n-3}(E). \end{aligned}$$

On déduit alors, les corollaires suivants :

Corollaire 2.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des nombres de Tetranacci est donnée* *par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n^{(4)} z^n = \frac{z}{1 - z - z^2 - z^3 - z^4}, \text{ avec } T_n^{(4)} = S_{n-1}(E).$$

Corollaire 2.4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des nombres de Tetranacci-Lucas est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n^{(4)} z^n = \frac{4 - 3z - 2z^2 - z^3}{1 - z - z^2 - z^3 - z^4},$$

avec $R_n^{(4)} = 4S_n(E) - 3S_{n-1}(E) - 2S_{n-2}(E) - S_{n-3}(E)$.

Corollaire 2.5 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des nombres Gaussiens de Tetranacci est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GT_n^{(4)} z^n = \frac{z + iz^2}{1 - z - z^2 - z^3 - z^4}, \text{ avec } GT_n^{(4)} = S_{n-1}(E) + iS_{n-2}(E).$$

Corollaire 2.6 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des nombres Gaussiens de Tetranacci-Lucas est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GR_n^{(4)} z^n = \frac{4 - i - (3 - 5i)\, z - (2 + 2i)\, z^2 - (1 + i)\, z^3}{1 - z - z^2 - z^3 - z^4},$$

avec $GR_n^{(4)} = (4 - i)\, S_n(E) - (3 - 5i)\, S_{n-1}(E) - (2 + 2i)\, S_{n-2}(E) - (1 + i)\, S_{n-3}(E)$.

Corollaire 2.7 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des nombres de Pell d'ordre quatre est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n^{(4)} z^n = \frac{z}{1 - 2z - z^2 - z^3 - z^4}, \text{ avec } P_n^{(4)} = S_{n-1}(E).$$

Corollaire 2.8 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des nombres de Pell-Lucas d'ordre quatre est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Q_n^{(4)} z^n = \frac{4 - 6z - 2z^2 - z^3}{1 - 2z - z^2 - z^3 - z^4},$$

avec $Q_n^{(4)} = 4S_n(E) - 6S_{n-1}(E) - 2S_{n-2}(E) - S_{n-3}(E)$.

Corollaire 2.9 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des nombres de Pell modifiés d'ordre quatre est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E_n^{(4)} z^n = \frac{z - z^2}{1 - 2z - z^2 - z^3 - z^4}, \text{ avec } E_n^{(4)} = S_{n-1}(E) - S_{n-2}(E).$$

Corollaire 2.10 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des nombres de 4-premiers est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} G_n z^n = \frac{z^2}{1 - 2z - 3z^2 - 5z^3 - 7z^4}, \text{ avec } G_n = S_{n-2}(E)$$

Corollaire 2.11 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des nombres de Lucas 4-premiers est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} H_n z^n = \frac{4 - 6z - 6z^2 - 5z^3}{1 - 2z - 3z^2 - 5z^3 - 7z^4},$$

avec $H_n = 4S_n(E) - 6S_{n-1}(E) - 6S_{n-2}(E) - 5S_{n-3}(E)$.

Corollaire 2.12 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des nombres de 4-premiers modifiés est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E_n z^n = \frac{z^2 - z^3}{1 - 2z - 3z^2 - 5z^3 - 7z^4},$$

avec $E_n = S_{n-2}(E) - S_{n-3}(E)$.

2.4 Fonctions génératrices des nombres de Fibonacci généralisés

En considérant la spécialisation $E = \{e_1, -e_2, 0, 0\}$ et $A = \{1, 0\}$ dans le théorème 2.1, on a

Corollaire 2.13 *Soit $E = \{e_1, -e_2\}$ un alphabet, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(e_1 + [-e_2]\right) z^n = \frac{1}{1 + S_1\left(-E\right) z + S_2\left(-E\right) z^2}. \tag{2.15}$$

Corollaire 2.14 *Soit $E = \{e_1, -e_2\}$ un alphabet, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(e_1 + [-e_2]) z^n = \frac{z}{1 + S_1(-E) z + S_2(-E) z^2}. \tag{2.16}$$

En posant $S_1(-E) = -a$ et $S_2(-E) = -b$ dans les formules (2.15) et (2.16), on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(e_1 + [-e_2]) z^n = \frac{1}{1 - az - bz^2}, \tag{2.17}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(e_1 + [-e_2]) z^n = \frac{z}{1 - az - bz^2}. \tag{2.18}$$

En multipliant l'équation (2.17) par α et l'équation (2.18) par $(\beta - a\alpha)$, en additionnant les résultats, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha S_n(e_1 + [-e_2]) + (\beta - a\alpha) S_{n-1}(e_1 + [-e_2])) z^n = \frac{\alpha + (\beta - a\alpha) z}{1 - az - bz^2}.$$

Ce qui nous donne la proposition suivante :

Proposition 2.2 *[9] La fonction génératrice de la suite de Fibonacci généralisée est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n = \frac{\alpha + (\beta - a\alpha) z}{1 - az - bz^2}, \text{ avec } U_n = \alpha S_n(e_1 + [-e_2]) + (\beta - a\alpha) S_{n-1}(e_1 + [-e_2]), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'aprés la proposition précédente, on conclut le tableau suivant :

a	b	α	β	Cofficients de z^n	Fonctions symétriques
k	1	1	1	$F_{k,n}$	$S_n(e_1 + [-e_2])$
k	1	2	k	$L_{k,n}$	$2S_n(e_1 + [-e_2]) - kS_{n-1}(e_1 + [-e_2])$
2	k	0	1	$P_{k,n}$	$S_{n-1}(e_1 + [-e_2])$
k	2	0	1	$J_{k,n}$	$S_{n-1}(e_1 + [-e_2])$
$3k$	-2	0	1	$M_{k,n}$	$S_{n-1}(e_1 + [-e_2])$

Table 2.2. Fonctions symétriques de certains nombres.

2.5 Fonctions génératrices des nombres de Tribonacci généralisés

Dans le cas spécial $E = \{e_1, e_2, e_3, 0\}$ et $A = \{1, 0\}$ le théorème 2.1 prend la forme :

Corollaire 2.15 *Etant donné un alphabet $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(E) z^n = \frac{1}{(1 - e_1 z)(1 - e_2 z)(1 - e_3 z)}. \tag{2.19}$$

De cette formule, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(E) z^n = \frac{z}{(1 - e_1 z)(1 - e_2 z)(1 - e_3 z)}, \tag{2.20}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(E) z^n = \frac{z^2}{(1 - e_1 z)(1 - e_2 z)(1 - e_3 z)}, \tag{2.21}$$

avec

$$\begin{aligned} (1 - e_1 z)(1 - e_2 z)(1 - e_3 z) &= 1 - (e_1 + e_2 + e_3) z + (e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) z^2 - e_1 e_2 e_3 z^3 \\ &= 1 + S_1(-E) z + S_2(-E) z^2 + S_3(-E) z^3. \end{aligned}$$

En posant $\begin{cases} S_1(-E) = -r \\ S_2(-E) = -s \\ S_3(-E) = -t \end{cases}$ dans (2.19), (2.20) et (2.21), on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(E) z^n = \frac{1}{1 - rz - sz^2 - tz^3}, \tag{2.22}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(E) z^n = \frac{z}{1 - rz - sz^2 - tz^3}, \tag{2.23}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(E)z^n = \frac{z^2}{1-rz-sz^2-tz^3}, \tag{2.24}$$

respectivements.

En multipliant les équations (2.22) , (2.23) et (2.24) par $V_0, V_1 - rV_0, V_2 - rV_1 - sV_0$ respectivements, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} V_0 S_n(E)z^n = \frac{V_0}{1-rz-sz^2-tz^3}, \tag{2.25}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (V_1 - rV_0) S_{n-1}(E)z^n = \frac{(V_1 - rV_0) z}{1-rz-sz^2-tz^3}, \tag{2.26}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (V_2 - rV_1 - sV_0) S_{n-2}(E)z^n = \frac{(V_2 - rV_1 - sV_0) z^2}{1-rz-sz^2-tz^3}, \tag{2.27}$$

En additionant les équations obtenues (2.25) , (2.26) et (2.27), alors on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.3 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice de la suite de Tribonacci généralisée est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} V_n z^n = \frac{V_0 + (V_1 - rV_0) z + (V_2 - rV_1 - sV_0) z^2}{1-rz-sz^2-tz^3}.$$

De cette proposition, on peut conclure le corollaire suivant :

Corollaire 2.16 *Pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$V_n = V_0 S_n(E) + (V_1 - rV_0) S_{n-1}(E) + (V_2 - rV_1 - sV_0) S_{n-2}(E).$$

On déduit les corollaires suivants :

Corollaire 2.17 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des nombres Gaussiens de Padovan est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GP_n z^n = \frac{1 + (1+i) z + iz^2}{1 - z^2 - z^3},$$

avec $GP_n = S_n(E) + (1+i) S_{n-1}(E) + iS_{n-2}(E)$.

Corollaire 2.18 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice des nombres Gaussiens de Pell-Padovan est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} GR_n z^n = \frac{(1+i)+(1+i)\,z+(-1+3i)\,z^2}{1-2z^2-z^3},$$

avec $GR_n = (1+i)\,S_n(E)+(1+i)\,S_{n-1}(E)+(-1+3i)\,S_{n-2}(E)$.

2.6 Fonctions génératrices de certains polynômes orthogonaux

Définition 2.3 *[54]La suite des polynômes généralisées $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence d'ordre 2 suivante :*

$$\begin{cases} G_n(x) = (p_0+p_1x)\,G_{n-1}(x)+(q_0+q_1x)\,G_{n-2}(x) \\ G_0(x)=\alpha_0, G_1(x)=\beta_0+\beta_1 x \end{cases},$$

avec $p_0,\ p_1,\ q_1,\ \alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{C}, q_0 \in \mathbb{C}^*$.

On distingue deux cas :

– **Le premier cas** : En multipliant l'équation (2.15) par α_0 et l'équation (2.16) par $(\beta_0 - p_0\alpha_0)+(\beta_1 - p_1\alpha_0)\,x$, en additionnant les résultats, et en posant $\begin{cases} S_1(-E) = -(p_0+p_1x) \\ S_2(-E) = -(q_0+q_1x) \end{cases}$, on obtient

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_0 S_n(e_1+[-e_2])+((\beta_0-p_0\alpha_0)+(\beta_1-p_1\alpha_0)\,x)\,S_{n-1}(e_1+[-e_2])\right)z^n \\ = \ &\frac{\alpha_0+[(\beta_0-p_0\alpha_0)+(\beta_1-p_1\alpha_0)\,x]\,z}{1-(p_0+p_1x)\,z-(q_0+q_1x)\,z^2}.\end{aligned}$$

Proposition 2.4 $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice de la suite des polynômes généralisées est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\,z^n = \frac{\alpha_0+[(\beta_0-p_0\alpha_0)+(\beta_1-p_1\alpha_0)\,x]\,z}{1-(p_0+p_1x)\,z-(q_0+q_1x)\,z^2},$$

avec $G_n(x) = \alpha_0 S_n(e_1 + [-e_2]) + ((\beta_0 - p_0\alpha_0) + (\beta_1 - p_1\alpha_0)x) S_{n-1}(e_1 + [-e_2])$.

De cette proposition, on déduit le tableau suivant :

α_0	β_0	β_1	p_0	p_1	q_0	q_1	Coefficients dez^n	Fonctions symétriques
1	0	1	0	1	1	0	$F_n(x)$	$S_n(e_1 + [-e_2])$
2	0	1	0	1	1	0	$L_n(x)$	$2S_n(e_1 + [-e_2]) - xS_{n-1}(e_1 + [-e_2])$
0	0	1	0	2	1	0	$P_n(x)$	$S_{n-1}(e_1 + [-e_2])$
0	1	0	1	0	0	2	$J_n(x)$	$S_{n-1}(e_1 + [-e_2])$

Table 2.3. Fonctions symétriques de certains polynômes

– **Le deuxième cas :** En remplaçant e_1 par $(2e_1)$ et e_2 par $(-2e_2)$ dans (2.15) et (2.16), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(2e_1 + [-2e_2]) z^n = \frac{1}{1 - 2(e_1 - e_2)z - 4e_1e_2z^2}, \tag{2.28}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(2e_1 + [-2e_2]) z^n = \frac{z}{1 - 2(e_1 - e_2)z - 4e_1e_2z^2}. \tag{2.29}$$

En multipliant l'équation (2.28) par α_0 et l'équation (2.29) par $((\beta_0 - p_0\alpha_0) + (\beta_1 - p_1\alpha_0)x)$, en additionant les résultats, on trouve

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_0 S_n(2e_1 + [-2e_2]) + ((\beta_0 - p_0\alpha_0) + (\beta_1 - p_1\alpha_0)x) S_{n-1}(2e_1 + [-2e_2])) z^n \\ = & \frac{\alpha_0 + [(\beta_0 - p_0\alpha_0) + (\beta_1 - p_1\alpha_0)x] z}{1 - 2(e_1 - e_2)z - 4e_1e_2z^2}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

posons $\begin{cases} e_1 - e_2 = p_0 + p_1 x \\ -4e_1e_2 = q_0 + q_1 x \end{cases}$ dans la formule (2.30), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_0 S_n(2e_1 + [-2e_2]) + ((\beta_0 - p_0\alpha_0) + (\beta_1 - p_1\alpha_0)x) S_{n-1}(2e_1 + [-2e_2])) z^n \\ = & \frac{\alpha_0 + [(\beta_0 - p_0\alpha_0) + (\beta_1 - p_1\alpha_0)x] z}{1 - 2(p_0 + p_1x)z + (q_0 + q_1x)z^2}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne la proposition suivante :

Proposition 2.5 $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice de la suite des polynômes généralisées est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) z^n = \frac{\alpha_0 + [(\beta_0 - p_0\alpha_0) + (\beta_1 - p_1\alpha_0) x] z}{1 - 2(p_0 + p_1 x) z + (q_0 + q_1 x) z^2},$$

avec $G_n(x) = \alpha_0 S_n(2e_1 + [-2e_2]) + ((\beta_0 - p_0\alpha_0) + (\beta_1 - p_1\alpha_0) x) S_{n-1}(2e_1 + [-2e_2])$.

De cette proposition, on déduit le tableau suivant :

α_0	β_0	β_1	p_0	p_1	q_0	q_1	Coefficients de z^n	Fonctions symétriques
1	0	2	0	2	-1	0	$U_n(x)$	$S_n(2e_1 + [-2e_2])$
1	0	1	0	2	-1	0	$T_n(x)$	$S_n(2e_1 + [-2e_2]) - xS_{n-1}(2e_1 + [-2e_2])$
1	-1	2	0	2	-1	0	$V_n(x)$	$S_n(2e_1 + [-2e_2]) - S_{n-1}(2e_1 + [-2e_2])$
1	1	2	0	2	-1	0	$W_n(x)$	$S_n(2e_1 + [-2e_2]) + S_{n-1}(2e_1 + [-2e_2])$

Table 2.4. Fonctions symétriques de polynômes de Chebychev

Chapitre 3

Nombres Gaussiens de Padovan, Pell-Padovan et nouvelles fonctions génératrices de certains nombres et polynômes

Ce chapitre comporte deux parties. La première partie consacrée à donner le théorème principal et ses corollaires qui sont basés sur les fonctions symétriques. Dans la deuxième partie nous déterminons des nouvelles fonctions génératrices des produits des nombres Gaussiens de Padovan, Pell-Padovan avec les nombres de k-Fibonacci, k-Lucas, k-Jacobsthal, k-Mersenne ainsi que des polynômes bivariés complexes de Fibonacci et Lucas. Ce chapitre fait l'objet de la publication suivante :

H. Zerroug, A. Boussayoud, B. Aloui, M. Kerada, Gaussian Padovan, Gaussian Pell-Padovan numbers and new generating functions with some numbers and polynomials. Journal of information and optimization sciences, 43, 1–16, 2022.

3.1 Résultats principaux

Théorème 3.1 *Etant donnés deux alphabets* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ *et* $B = \{b_1, -b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)S_{n+k}(b_1 + [-b_2])z^n = \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\delta_{b_1[-b_2]}^{k+1} (-b_2)^n z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)b_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)(-b_2)^n z^n\right)}. \tag{3.1}$$

Preuve: L'action de l'opérateur $\delta_{b_1[-b_2]}^{k}$ sur la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(A)b_1^{n+1}z^n$ nous donne le premier membre de l'égalité (3.1) , il vient

$$\begin{aligned}
\delta_{b_1[-b_2]}^{k} f(b_1 z) &= \delta_{b_1[-b_2]}^{k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)b_1^{n+1}z^n\right) \\
&= \frac{b_1^k \sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(A)b_1^{n+1}z^n - (-b_2)^k \sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(A)(-b_2)^{n+1} z^n}{b_1 + b_2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\left(\frac{b_1^{n+k+1} - (-b_2)^{n+k+1}}{b_1 + b_2}\right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)S_{n+k}(b_1 + [-b_2])z^n, \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) b_1^{n+1} z^n = \frac{b_1}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) b_1^n z^n},$$

alors le deuxième membre de l'égalité (3.1) s'écrit

$$\begin{aligned}
\delta_{b_1[-b_2]}^{k}\left(\frac{b_1}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) b_1^n z^n}\right) &= \frac{b_1^{k+1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\left(-b_2\right)^n z^n - \left(-b_2\right)^{k+1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) b_1^n z^n}{\left(b_1+b_2\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) b_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\left(-b_2\right)^n z^n\right)} \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) \frac{b_1^{k+1}(-b_2)^n - (-b_2)^{k+1} b_1^n}{b_1+b_2} z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) b_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\left(-b_2\right)^n z^n\right)} \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) \delta_{b_1[-b_2]}^{k+1}\left(-b_2\right)^n z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) b_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\left(-b_2\right)^n z^n\right)}, \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

l'égalité (3.1) résulte alors du fait que les deux sommes apparaissant dans (3.2) et (3.3) sont égales. D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) S_{n+k}(b_1 + [-b_2]) z^n = \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) \delta_{b_1[-b_2]}^{k+1}\left(-b_2\right)^n z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A) b_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\left(-b_2\right)^n z^n\right)}.$$

■

– En posant $k = 0$ dans l'égalité (3.1), on peut conclure les corollaires suivantes :

Corollaire 3.1 *Etant donnés deux alphabets $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, -b_2\}$, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A) S_n(b_1 + [-b_2]) z^n = \frac{1 + b_1 b_2 S_2(-A) z^2 + b_1 b_2 (b_1 - b_2) S_3(-A) z^3}{\prod\limits_{a\in A}(1 - a b_1 z) \prod\limits_{a\in A}(1 + a b_2 z)}. \qquad (3.4)$$

Corollaire 3.2 *Etant donnés deux alphabets* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ *et* $B = \{b_1, -b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(A)\, S_{n-1}(b_1 + [-b_2])\, z^n = \frac{z + b_1 b_2 S_2(-A)\, z^3 + b_1 b_2 (b_1 - b_2)\, S_3(-A)\, z^4}{\prod_{a\in A}(1 - ab_1 z) \prod_{a\in A}(1 + ab_2 z)}. \tag{3.5}$$

– En posant $k = 1$ dans l'égalité (3.1), on peut conclure les corollaires suivantes :

Corollaire 3.3 *Etant donnés deux alphabets* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ *et* $B = \{b_1, -b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\, S_{n+1}(b_1 + [-b_2])\, z^n = \frac{(b_1 - b_2) - b_1 b_2 S_1(-A)\, z - b_1^2 b_2^2 S_3(-A)\, z^3}{\prod_{a\in A}(1 - ab_1 z) \prod_{a\in A}(1 + ab_2 z)}. \tag{3.6}$$

Corollaire 3.4 *Etant donnés deux alphabets* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ *et* $B = \{b_1, -b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(A)\, S_n(b_1 + [-b_2])\, z^n = \frac{(b_1 - b_2)\, z - b_1 b_2 S_1(-A)\, z^2 - b_1^2 b_2^2 S_3(-A)\, z^4}{\prod_{a\in A}(1 - ab_1 z) \prod_{a\in A}(1 + ab_2 z)}. \tag{3.7}$$

Corollaire 3.5 *Etant donnés deux alphabets* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ *et* $B = \{b_1, -b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(A)\, S_{n-1}(b_1 + [-b_2])\, z^n = \frac{(b_1 - b_2)\, z^2 - b_1 b_2 S_1(-A)\, z^3 - b_1^2 b_2^2 S_3(-A)\, z^5}{\prod_{a\in A}(1 - ab_1 z) \prod_{a\in A}(1 + ab_2 z)}. \tag{3.8}$$

Proposition 3.1 *Etant donnés deux alphabets* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ *et* $B = \{b_1, -b_2\}$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\, S_{n-1}(b_1 + [-b_2])\, z^n = \frac{-S_1(-A)\, z - (b_1 - b_2)\, S_2(-A)\, z^2 - \left((b_1 - b_2)^2 + b_1 b_2\right) S_3(-A)\, z^3}{\prod_{a\in A}(1 - ab_1 z) \prod_{a\in A}(1 + ab_2 z)}. \tag{3.9}$$

Preuve: On sait que

$$S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) = \frac{b_1^n - (-b_2)^n}{b_1 + b_2},$$

il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\, S_{n-1}(b_1 + [-b_2])\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\, \frac{b_1^n - (-b_2)^n}{b_1 + b_2} z^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\, b_1^n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\,(-b_2)^n z^n\right) \\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left(\frac{1}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)} - \frac{1}{\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z)}\right) \\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left(\frac{\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z) - \prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z)}\right) \\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left(\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\,(-b_2)^n z^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\, b_1^n z^n}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z)}\right) \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\,\frac{(-b_2)^n - b_1^n}{b_1+b_2} z^n}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z)} \\
&= \frac{-\sum\limits_{n=1}^{3} S_n(-A)\, S_{n-1}(b_1+[-b_2])\, z^n}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z)} \\
&= \frac{-S_1(-A)\,z - (b_1-b_2)\,S_2(-A)\,z^2 - \left((b_1-b_2)^2 + b_1b_2\right) S_3(-A)\,z^3}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z)}.
\end{aligned}
$$

■

Proposition 3.2 *Etant donnés deux alphabets $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, -b_2\}$, alors*

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(A)\, S_n(b_1+[-b_2])\, z^n = \frac{\left((b_1-b_2)^2 + b_1b_2\right) z^2 - b_1b_2(b_1-b_2)\, S_1(-A)\, z^3 + b_1^2 b_2^2 S_2(-A)\, z^4}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z)}. \tag{3.10}
$$

Preuve: On a

$$
S_n(b_1+[-b_2]) = \frac{b_1^{n+1} - (-b_2)^{n+1}}{b_1+b_2},
$$

alors

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(A)\, S_n(b_1+[-b_2])\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(A)\, \frac{b_1^{n+1} - (-b_2)^{n+1}}{b_1+b_2} z^n
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\, b_1^n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\,(-b_2)^n z^n\right)\\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left(b_1^3 z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(A)\, b_1^{n-2} z^{n-2} - (-b_2)^3 z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-2}(A)\,(-b_2)^{n-2} z^{n-2}\right)\\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left(b_1^3 z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\, b_1^n z^n - (-b_2)^3 z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)\,(-b_2)^n z^n\right)\\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left(\frac{b_1^3 z^2}{\prod_{a\in A}(1-ab_1z)} - \frac{(-b_2)^3 z^2}{\prod_{a\in A}(1+ab_2z)}\right)\\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left(\frac{b_1^3 z^2 \prod_{a\in A}(1+ab_2z) - (-b_2)^3 z^2 \prod_{a\in A}(1-ab_1z)}{\prod_{a\in A}(1-ab_1z)\prod_{a\in A}(1+ab_2z)}\right)\\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left(\frac{b_1^3 z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\,(-b_2)^n z^n - (-b_2)^3 z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)\, b_1^n z^n}{\prod_{a\in A}(1-ab_1z)\prod_{a\in A}(1+ab_2z)}\right)\\
&= \left(\frac{\sum_{n=0}^{3} S_n(-A)\, \frac{b_1^3(-b_2)^n-(-b_2)^3 b_1^n}{b_1+b_2} z^{n+2}}{\prod_{a\in A}(1-ab_1z)\prod_{a\in A}(1+ab_2z)}\right)\\
&= \frac{\left((b_1-b_2)^2+b_1b_2\right)z^2 - b_1b_2(b_1-b_2)S_1(-A)z^3 + b_1^2b_2^2S_2(-A)z^4}{\prod_{a\in A}(1-ab_1z)\prod_{a\in A}(1+ab_2z)},
\end{aligned}
$$

d'où le résultat. ■

Remarque 3.1 *On a*

$$
\begin{aligned}
&\prod_{a\in A}(1-ab_1z)\prod_{a\in A}(1+ab_2z)\\
= \;& 1 + (b_1-b_2)S_1(-A)z\\
&+ \left((b_1-b_2)^2 S_2(-A) - b_1b_2\left(S_1^2(-A) - 2S_2(-A)\right)\right)z^2\\
&+ \left((b_1-b_2)^3 S_3(-A) + b_1b_2(b_1-b_2)\left(3S_3(-A) - S_1(-A)S_2(-A)\right)\right)z^3\\
&+ \left(-b_1b_2(b_1-b_2)^2 S_1(-A)S_3(-A) + b_1^2b_2^2\left(S_2^2(-A) - 2S_1(-A)S_3(-A)\right)\right)z^4\\
&+ b_1^2b_2^2(b_1-b_2)S_3(-A)S_2(-A)z^5 - S_3^2(-A)b_1^3b_2^3z^6.
\end{aligned}
$$

3.2 Fonctions génératrices de produits de certains nombres

Dans cette section, nous déterminons des nouvelles fonctions génératrices des produits des nombres Gaussiens de Padovan, Pell-Padovan avec les nombres de k-Fibonacci, k-Pell, k-Jacobsthal et k-Mersenne.

Théorème 3.2 *La fonction génératrice du produit des nombres Gaussiens de Padovan et les nombres de k-Fibonacci est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} GP_n F_{k,n} z^n = \frac{1+(1+i)\,kz+\left(\left(k^2-1\right)i-1\right)z^2-kz^3+z^4}{1-\left(k^2+2\right)z^2-k\left(k^2+3\right)z^3+z^4+kz^5-z^6}.$$

Preuve: Comme

$$F_{k,n} = S_n\left(b_1+[-b_2]\right),$$

et

$$GP_n = S_n(A)+(1+i)\,S_{n-1}(A)+iS_{n-2}(A),$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GP_n F_{k,n} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(S_n(A)+(1+i)\,S_{n-1}(A)+iS_{n-2}(A)\right)S_n\left(b_1+[-b_2]\right)z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\,S_n\left(b_1+[-b_2]\right)z^n+(1+i)\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)\,S_n\left(b_1+[-b_2]\right)z^n \\
&\quad +i\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\,S_n\left(b_1+[-b_2]\right)z^n.
\end{aligned}$$

Des égalités (3.4), (3.7) et (3.10), on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GP_n F_{k,n} z^n &= \frac{1+b_1b_2S_2(-A)\,z^2+b_1b_2\left(b_1-b_2\right)S_3(-A)\,z^3}{\prod_{a\in A}\left(1-ab_1z\right)\prod_{a\in A}\left(1+ab_2z\right)} \\
&\quad +(1+i)\times\frac{-S_1(-A)\,z-\left(b_1-b_2\right)S_2(-A)\,z^2-\left(\left(b_1-b_2\right)^2+b_1b_2\right)S_3(-A)\,z^3}{\prod_{a\in A}\left(1-ab_1z\right)\prod_{a\in A}\left(1+ab_2z\right)} \\
&\quad +i\times\frac{\left(\left(b_1-b_2\right)^2+b_1b_2\right)z^2-b_1b_2\left(b_1-b_2\right)S_1(-A)\,z^3+b_1^2b_2^2S_2(-A)\,z^4}{\prod_{a\in A}\left(1-ab_1z\right)\prod_{a\in A}\left(1+ab_2z\right)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\begin{array}{c} 1-(1+i)\,S_1(-A)\,z+\left([b_1b_2-(1+i)(b_1-b_2)]\,S_2(-A)+i\left((b_1-b_2)^2+b_1b_2\right)\right)z^2 \\ +\left(\left[b_1b_2(b_1-b_2)-\left((b_1-b_2)^2+b_1b_2\right)\right]S_3(-A)-ib_1b_2(b_1-b_2)\,S_1(-A)\right)z^3+ib_1^2b_2^2S_2(-A)\,z^4 \end{array}}{\prod_{a\in A}(1-ab_1z)\prod_{a\in A}(1+ab_2z)}.$$

On prend $\begin{cases} S_1(-A)=0 \\ S_2(-A)=-1 \\ S_3(-A)=-1 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_1-b_2=k \\ b_1.b_2=1 \end{cases}$, alors par un calcul simple, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} GP_nF_{k,n}z^n=\frac{1+(1+i)\,kz+\left(\left(k^2-1\right)i-1\right)z^2-kz^3+z^4}{1-\left(k^2+2\right)z^2-k\left(k^2+3\right)z^3+z^4+kz^5-z^6}.$$

■

Théorème 3.3 *Pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction génératrice du produit des nombres Gaussiens de Padovan et les nombres de k-Pell est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} GP_nP_{k,n}z^n=\frac{(1+i)\,z+2\,(i+1)\,z^2+(4-ik)\,z^3-2k\,(1+i)\,z^4+ik^2z^5}{1-(2k+4)\,z^2-2\,(4+3k)\,z^3+k^2z^4+2k^2z^5-k^3z^6}$$

Preuve: On a $P_{k,n}=S_{n-1}(b+[-b_2])$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GP_nP_{k,n}z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(S_n(A)+(1+i)\,S_{n-1}(A)+iS_{n-2}(A)\right)S_{n-1}(b_1+[-b_2])\,z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\,S_{n-1}(b_1,[-b_2])\,z^n+(1+i)\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)\,S_{n-1}(b_1+[-b_2])\,z^n \\
&\quad +i\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\,S_{n-1}(b_1+[-b_2])\,z^n.
\end{aligned}$$

De même manière que le théorème 3.2 et en utilisant les formules (3.5), (3.8), (3.9) avec les conditions

$$\begin{cases} S_1(-A)=0 \\ S_2(-A)=-1 \\ S_3(-A)=-1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_1-b_2=2 \\ b_1.b_2=k \end{cases},$$

alors, on obtient le résultat. ■

Théorème 3.4 *Pour tout entier naturel n, la fonction génératrice du produit des nombres Gaus-*

siens de Padovan et les nombres de k-Jacobsthal est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} GP_n J_{k,n} z^n = \frac{(1+i)\,z + (i+1)\,kz^2 - (k^2-2i)\,z^3 - 2k\,(1+i)\,z^4}{1-(k^2+4)\,z^2 - k\,(k^2+6)\,z^3 + 4z^4 + 4kz^5 - 8z^6}.$$

Preuve: On a $J_{k,n} = S_{n-1}\left(b_1 + [-b_2]\right)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GP_n J_{k,n} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(S_n(A) + (1+i)\,S_{n-1}(A) + iS_{n-2}(A)\right) S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\,S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) z^n + (1+i)\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)\,S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) z^n \\
&\quad +i\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\,S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) z^n.
\end{aligned}$$

En suit d'aprés $(3.5)\,,(3.8)\,,(3.9)$ et en posant

$$\begin{cases} S_1(-A) = 0 \\ S_2(-A) = -1 \\ S_3(-A) = -1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_1 - b_2 = k \\ b_1.b_2 = 2 \end{cases},$$

on trouve le résultat. ■

Théorème 3.5 *Pour tout entier naturel n, la fonction génératrice du produit des nombres Gaussiens de Padovan et les nombres de k-Mersenne est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} GP_n M_{k,n} z^n = \frac{(1+i)\,z + (3i+3)\,kz^2 - (9k^2-2i)\,z^3 - 6k\,(1+i)\,z^4}{1-(9k^2-4)\,z^2 + 3k\,(27k^2+6)\,z^3 + 4z^4 + 12kz^5 + 8z^6}.$$

Preuve: On a $M_{k,n} = S_{n-1}\left(b_1 + [-b_2]\right)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GP_n M_{k,n} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(S_n(A) + (1+i)\,S_{n-1}(A) + iS_{n-2}(A)\right) S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\,S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) z^n + (1+i)\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)\,S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) z^n \\
&\quad +i\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\,S_{n-1}\left(b_1+[-b_2]\right) z^n.
\end{aligned}$$

En remplaçant $S_1(-A) = 0, S_2(-A) = S_3(-A) = -1, b_1 - b_2 = 3k, b_1.b_2 = -2$ dans les relations $(3.5), (3.8)$ et (3.9), on obtient le résultat. ∎

Théorème 3.6 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice du produit des nombres Gaussiens de Pell-Padovan et les nombres de k-Fibonacci est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} GR_n F_{k,n} z^n = \frac{(1-i) + k(1+i) - ((k^2+3) - i(3k^2+5)) z^2 - k(1-i) z^3 + (3-5i) z^4}{1 - 2(2+k^2) z^2 - k(k^2+3) z^3 + 4z^4 + 2kz^5 - z^6}.$$

Preuve: Comme

$$F_{k,n} = S_n(b_1 + [-b_2]),$$

et

$$GR_n = (1-i) S_n(A) + (1+i) S_{n-1}(A) + (3i-1) S_{n-2}(A).$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} GR_n F_{k,n} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} ((1-i) S_n(A) + (1+i) S_{n-1}(A) + (3i-1) S_{n-2}(A)) S_n(b_1 + [-b_2]) z^n \\ &= (1-i) \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) S_n(b_1 + [-b_2]) z^n + (1+i) \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_n(b_1 + [-b_2]) z^n \\ &\quad + (3i-1) \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A) S_n(b_1 + [-b_2]) z^n. \end{aligned}$$

On prend $\begin{cases} S_1(-A) = 0 \\ S_2(-A) = -2 \\ S_3(-A) = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_1 - b_2 = k \\ b_1.b_2 = 1 \end{cases}$, dans les égalités $(3.4), (3.7)$ et (3.10), alors par un calcul simple, on obtient le résultat. ∎

Théorème 3.7 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice du produit des nombres Gaussiens de Pell-Padovan et les nombres de k-Pell est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} GR_n P_{k,n} z^n = \frac{(1+i) z + 2(i+1) z^2 + (4 - k - i(4+3k)) z^3 - 2k(1+i) z^4 + k^2(3i-1) z^5}{1 - 4(2+k) z^2 - 2(4+3k) z^3 + 4k^2 z^4 + 4k^2 z^5 - k^3 z^6}.$$

Preuve: On a $P_{k,n} = S_{n-1}(b_1 + [-b_2])$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GR_n P_{k,n} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} ((1-i) S_n(A) + (1+i) S_{n-1}(A) + (3i-1) S_{n-2}(A)) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) z^n + (1+i) \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) z^n \\
&\quad + (3i-1) \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) z^n.
\end{aligned}$$

En posant $\begin{cases} S_1(-A) = 0 \\ S_2(-A) = -2 \\ S_3(-A) = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_1 - b_2 = k \\ b_1.b_2 = 2 \end{cases}$ dans $(3.5), (3.8)$ et (3.9), on trouve le résultat. ∎

Théorème 3.8 *Pour tout entier naturel n, la fonction génératrice du produit des nombres Gaussiens de Pell-Padovan et les nombres de k-Jacobsthal est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} GR_n J_{k,n} z^n = \frac{(1+i) z + k(1+i) z^2 + (k^2 - 2 - i(k^2+6)) z^3 - 2k(1+i) z^4 + 4(3i-1) z^5}{1 - 2(k^2+4) z^2 - k(k^2+6) z^3 + 16z^4 + 8kz^5 - 8z^6}.$$

Preuve: On a $J_{k,n} = S_{n-1}(b_1 + [-b_2])$, alors, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GR_n J_{k,n} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} ((1-i) S_n(A) + (1+i) S_{n-1}(A) + i S_{n-2}(A)) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) z^n \\
&= (1-i) \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) z^n + (1+i) \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) z^n \\
&\quad + (3i-1) \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) z^n.
\end{aligned}$$

En remplaçant $S_1(-A) = 0, S_2(-A) = -2, S_3(-A) = -1, b_1 - b_2 = k$ et $b_1.b_2 = 2$ dans les formules $(3.5), (3.8)$ et (3.9), on obtient le résultat. ∎

Théorème 3.9 *Pour tout entier naturel n, la fonction génératrice du produit des nombres Gaussiens de Pell-Padovan et les nombres de k-Mersenne est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} GR_n M_{k,n} z^n = \frac{(1+i) z + 3k(1+i) z^2 - (9k^2 - 2 + i(9k^2+6)) z^3 - 6k(1+i) z^4 + 4(3i-1) z^5}{1 - 2(9k^2+4) z^2 - 3k(9k^2+6) z^3 + 16z^4 + 24kz^5 - 8z^6}.$$

Preuve: On a $M_{k,n} = S_{n-1}\left(b_1 + [-b_2]\right)$, alors, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} GR_n M_{k,n} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(1-i\right) S_n\left(A\right) + \left(1+i\right) S_{n-1}\left(A\right) + iS_{n-2}\left(A\right)\right) S_{n-1}\left(b_1 + [-b_2]\right) z^n \\ &= \left(1-i\right) \sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(A\right) S_{n-1}\left(b_1 + [-b_2]\right) z^n + \left(1+i\right) \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(A\right) S_{n-1}\left(b_1 + [-b_2]\right) z^n \\ &\quad + \left(3i-1\right) \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}\left(A\right) S_{n-1}\left(b_1 + [-b_2]\right) z^n.\end{aligned}$$

Des relations $(3.5), (3.8), (3.9)$ et puisque $S_1\left(-A\right) = 0, S_2\left(-A\right) = -2, S_3\left(-A\right) = -1, b_1 - b_2 = 3k$ et $b_1 b_2 = -2$, on trouve le résultat. ■

En posant $k = 1$, dans les théorèmes 3.2-3.9, on obtient des nouvelles fonctions génératrices des produits des nombres Gaussiens de Padovan, Pell-Padovan avec certains nombres classiques représentant dans le tableau suivant :

Coefficient de z^n	Fonction génératrice
GP_nF_n	$\frac{1+(1+i)z-z^2-z^3+z^4}{1-3z^2-4z^3+z^4+z^5-z^6}$
GP_nP_n	$\frac{(1+i)z+2(i+1)z^2+(4-i)z^3-2(1+i)z^4+iz^5}{1-6z^2-14z^3+z^4+2z^5-z^6}$
GP_nJ_n	$\frac{(1+i)z+(i+1)z^2-(1-2i)z^3-2(1+i)z^4}{1-5z^2-7z^3+4z^4+4z^5-8z^6}$
GP_nM_n	$\frac{(1+i)z+(3i+3)z^2-(9-2i)z^3-6(1+i)z^4}{1-5z^2+99z^3+4z^4+12z^5+8z^6}$
GR_nF_n	$\frac{(1-i)+(1+i)-(4-8i)z^2+(1+i)z^3-(3-5i)z^4}{1-6z^2-4z^3+4z^4+2z^5-z^6}$
GR_nP_n	$\frac{(1+i)z+2(i+1)z^2+(3-7i)z^3-2(1+i)z^4+(3i-1)z^5}{1-12z^2-14z^3+4z^4-4z^5-z^6}$
GR_nJ_n	$\frac{(1+i)z+(1+i)z^2-(-1+7i)z^3-2(1+i)z^4+4(3i-1)z^5}{1-10z^2-7z^3+16z^4+8z^5-8z^6}$
GR_nM_n	$\frac{(1+i)z+3(2+i)z^2-(11+4i)z^3+6(1+i)z^4+4iz^5}{1-26z^2-45z^3+16z^4+24z^5-8z^6}$

Table 3.1. Fonctions génératrices des produits des nombres Gaussiens de Padovan, Pell-Padovan avec certains nombres classiques

3.3 Fonctions génératrices liées à certains polynômes bi-variés complexes

Maintenant, dans cette section nous utilisons les théorèmes et les corollaires précédents pour déterminer des nouvelles fonctions génératrices des produits des nombres Gaussiens de Padovan, Pell-Padovan avec les polynômes bivariés complexes de Fibonacci et Lucas.

Théorème 3.10 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice du produit des nombres Gaussiens de Padovan et les polynômes bivariés complexes de Fibonacci est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} GP_n F_n(x,y) z^n = \frac{(1+i)z + (i-1)xz^2 - (iy+x^2)z^3 + (1-i)xyz^4 + iy^2z^5}{1 + (x^2-2y)z^2 + i(x^3-xy)z^3 + y^2z^4 + ixy^2z^5 - y^3z^6}. \tag{3.11}$$

Preuve: On a $F_n(x,y) = S_{n-1}(b_1 + [-b_2])$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GP_n F_n(x,y) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(S_n(A) + (1+i)S_{n-1}(A) + iS_{n-2}(A)\right) S_{n-1}(b_1+[-b_2]) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) S_{n-1}(b_1+[-b_2]) z^n + (1+i)\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_{n-1}(b_1+[-b_2]) z^n \\
&\quad + i\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A) S_{n-1}(b_1+[-b_2]) z^n,
\end{aligned}$$

on déduit des formules (3.5), (3.8) et (3.9) que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GP_n F_n(x,y) z^n &= \frac{-S_1(-A)z - (b_1-b_2)S_2(-A)z^2 - \left((b_1-b_2)^2 + b_1b_2\right)S_3(-A)z^3}{\prod_{a\in A}(1-ab_1z)\prod_{a\in A}(1+ab_2z)} \\
&\quad + (1+i) \times \frac{z + b_1b_2S_2(-A)z^3 + b_1b_2(b_1-b_2)S_3(-A)z^4}{\prod_{a\in A}(1-ab_1z)\prod_{a\in A}(1+ab_2z)} \\
&\quad + i \times \frac{(b_1-b_2)z^2 - b_1b_2S_1(-A)z^3 - b_1^2b_2^2S_3(-A)z^5}{\prod_{a\in A}(1-ab_1z)\prod_{a\in A}(1+ab_2z)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}(-S_1(-A)+(1+i))z+(i(b_1-b_2)-(b_1-b_2)S_2(-A))z^2 \\ +\left((1+i)b_1b_2S_2(-A)-ib_1b_2S_1(-A)-\left((b_1-b_2)^2+b_1b_2\right)S_3(-A)\right)z^3 \\ +(1+i)b_1b_2(b_1-b_2)S_3(-A)z^4-ib_1^2b_2^2S_3(-A)z^5\end{array}}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z)}, \tag{3.12}$$

lorsque $\begin{cases} S_1(-A)=0 \\ S_2(-A)=-1 \\ S_3(-A)=-1 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_1-b_2=ix \\ b_1.b_2=y \end{cases}$, l'égalité (3.12) devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} GP_nF_n(x,y)z^n = \frac{(1+i)z+(i-1)xz^2-(iy+x^2)z^3+(1-i)xyz^4+iy^2z^5}{1+(x^2-2y)z^2+i(x^3-xy)z^3+y^2z^4+ixy^2z^5-y^3z^6}.$$

■

Théorème 3.11 *Pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction génératrice du produit des nombres Gaussiens de Padovan et les polynômes bivariés complexes de Lucas est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} GP_nL_n(x,y)z^n = \frac{N(z)}{1+(x^2-2y)z^2-i(xy-x^3)z^3+y^2z^4+ixy^2z^5-y^3z^6}.$$

avec $N(z)=2+(i-1)xz+(x^2-2y+i(2y-x^2))z^2-(xy-i(x^3-3xy))z^3$
$+(2y^2-x^2y-ix^2y)z^4+xy^2z^5.$

Preuve: Pour $L_n(x,y)=2S_n(b_1+[-b_2])-ixS_{n-1}(b_1+[-b_2])$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} GP_nL_n(x,y)z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(S_n(A)+(1+i)S_{n-1}(A)+iS_{n-2}(A))(2S_n(b_1+[-b_2])-ixS_{n-1}(b_1+[-b_2]))z^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)S_n(b_1+[-b_2])z^n+2(1+i)\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}(A)S_n(b_1+[-b_2])z^n \\ &\quad +2i\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-2}(A)S_n(b_1+[-b_2])z^n \\ &\quad -ix\sum_{n=0}^{\infty}(S_n(A)+(1+i)S_{n-1}(A)+iS_{n-2}(A))S_{n-1}(b_1+[-b_2])z^n,\end{aligned}$$

en utilisant les formules $(3.4)\,,(3.7)\,,(3.10)$ et $(3.11)\,,$ on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} GP_nL_n\left(x,y\right)z^n = 2\times\frac{1+b_1b_2S_2\left(-A\right)z^2+\left(b_1b_2\left(b_1-b_2\right)S_3\left(-A\right)\right)z^3}{\prod\limits_{a\in A}\left(1-ab_1z\right)\prod\limits_{a\in A}\left(1+ab_2z\right)}$$

$$+2\left(1+i\right)\times\frac{\left(b_1-b_2\right)z-b_1b_2S_1\left(-A\right)z^2-b_1^2b_2^2S_3\left(-A\right)z^4}{\prod\limits_{a\in A}\left(1-ab_1z\right)\prod\limits_{a\in A}\left(1+ab_2z\right)}$$

$$+2i\times\frac{\left(\left(b_1-b_2\right)^2+b_1b_2\right)z^2-b_1b_2\left(b_1-b_2\right)S_1\left(-A\right)z^3+b_1^2b_2^2S_2\left(-A\right)z^4}{\prod\limits_{a\in A}\left(1-ab_1z\right)\prod\limits_{a\in A}\left(1+ab_2z\right)}$$

$$-ix\times\frac{\begin{array}{c}\left(-S_1\left(-A\right)+\left(1+i\right)\right)z+\left(i\left(b_1-b_2\right)-\left(b_1-b_2\right)S_2\left(-A\right)\right)z^2+\\ \left(b_1b_2S_2\left(-A\right)-b_1b_2S_1\left(-A\right)-\left(\left(b_1-b_2\right)^2+b_1b_2\right)S_3\left(-A\right)\right)z^3+\\ \left(1+i\right)b_1b_2\left(b_1-b_2\right)S_3\left(-A\right)z^4-ib_1^2b_2^2S_3\left(-A\right)z^5\end{array}}{\prod\limits_{a\in A}\left(1-ab_1z\right)\prod\limits_{a\in A}\left(1+ab_2z\right)}$$

$$=\frac{\begin{array}{c}2+2\left(1+i\right)\left(b_1-b_2\right)z+\left(b_1b_2\left(S_2\left(-A\right)-2\left(1+i\right)S_1\left(-A\right)\right)+2i\left(\left(b_1-b_2\right)^2+b_1b_2\right)\right)z^2\\ +2b_1b_2\left(b_1-b_2\right)\left(S_3\left(-A\right)-iS_1\left(-A\right)\right)z^3+2b_1^2b_2^2\left(-\left(1+i\right)S_3\left(-A\right)+iS_2\left(-A\right)\right)z^4\end{array}}{\prod\limits_{a\in A}\left(1-ab_1z\right)\prod\limits_{a\in A}\left(1+ab_2z\right)}$$

$$-\frac{\begin{array}{c}i\left(-S_1\left(-A\right)+\left(1+i\right)\right)xz+i\left(i\left(b_1-b_2\right)-\left(b_1-b_2\right)S_2\left(-A\right)\right)xz^2\\ +i\left(b_1b_2S_2\left(-A\right)-b_1b_2S_1\left(-A\right)-\left(\left(b_1-b_2\right)^2+b_1b_2\right)S_3\left(-A\right)\right)xz^3\\ +i\left(1+i\right)b_1b_2\left(b_1-b_2\right)S_3\left(-A\right)xz^4+b_1^2b_2^2S_3\left(-A\right)xz^5\end{array}}{\prod\limits_{a\in A}\left(1-ab_1z\right)\prod\limits_{a\in A}\left(1+ab_2z\right)},$$

en posant $\begin{cases} S_1\left(-A\right)=0\\ S_2\left(-A\right)=-1\\ S_3\left(-A\right)=-1\end{cases}$ et $\begin{cases} b_1-b_2=ix\\ b_1b_2=y\end{cases}$, alors on obtient le résultat. ■

Théorème 3.12 *Pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction génératrice du produit des nombres Gaussiens de Pell-Padovan et les polynômes bivariés complexes de Fibonacci est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} GR_nF_n\left(x,y\right)z^n=\frac{\left(1+i\right)z+\left(i-1\right)xz^2-\left(x^2+y+i\left(3y-x^2\right)\right)z^3-\left(i-1\right)xyz^4+\left(3i-1\right)y^2z^5}{1+2\left(x^2-2y\right)z^2-i\left(3xy-x^3\right)z^3+4y^2z^4+2ixy^2z^5-y^3z^6}. \tag{3.13}$$

Preuve: En écrivant $F_n(x,y) = S_{n-1}(b_1 + [-b_2])$, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} GR_n F_n(x,y) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} ((1-i) S_n(A) + (1+i) S_{n-1}(A) + (3i-1) S_{n-2}(A)) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) z^n \\ &= (1-i)\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) z^n + (1+i)\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) z^n \\ &\quad + (3i-1)\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A) S_{n-1}(b_1 + [-b_2]) z^n,\end{aligned}$$

En utilisant les formules (3.5), (3.8) et (3.9), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} GR_n F_n(x,y) z^n = \frac{\begin{array}{c}((1+i) - (1-i) S_1(-A)) z + (b_1 - b_2)((3i-1) - (1-i) S_2(-A)) z^2 + \\ -(3i-1) b_1 b_2 S_1(-A) + \left((1+i) b_1 b_2 S_2(-A) - (1-i)\left((b_1 - b_2)^2 + b_1 b_2\right)\right) \\ \times S_3(-A) z^3 + (1+i) b_1 b_2 (b_1 - b_2) S_3(-A) z^4 - (3i-1) b_1^2 b_2^2 S_3(-A) z^5\end{array}}{\prod_{a\in A}(1 - a b_1 z)\prod_{a\in A}(1 + a b_2 z)},$$

comme $\left\{\begin{array}{l} S_1(-A) = -1 \\ S_2(-A) = -2 \\ S_3(-A) = -1 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{c} b_1 - b_2 = ix \\ b_1.b_2 = y \end{array}\right.$ alors, on trouve le résultat. ■

Théorème 3.13 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice du produit des nombres Gaussiens de Pell-Padovan et les polynômes bivariés complexes de Lucas est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} GR_n L_n(x,y) z^n = \frac{Q(z)}{1 + 2(x^2 - 2y) z^2 - i(3xy - x^3) z^3 + 4y^2 z^4 + 2ixy^2 z^5 - y^3 z^6}.$$

avec $Q(z) = (2-2i) + (i-1) xz - (-6y + 3x^2 + i(10y - 5x^2)) z^2 + (x^3 - 5xy - i(xy - x^3)) z^3$ $+ (6y^2 - x^2 y - i(10y^2 + x^2 y)) z^4 + (3+i) xy^2 z^5.$

Preuve: On a $L_n(x,y) = 2S_n(b_1 + [-b_2]) - ixS_{n-1}(b_1 + [-b_2])$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} GR_n L_n(x,y) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} ((1-i) S_n(A) + (1+i) S_{n-1}(A) + (3i-1) S_{n-2}(A)) \\ &\quad \times (2S_n(b_1 + [-b_2]) - ixS_{n-1}(b_1 + [-b_2])) z^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2-2i)\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\, S_n(b_1+[-b_2])\, z^n + (2+2i)\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(A)\, S_n(b_1+[-b_2])\, z^n \\
&\quad + (6i-2)\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-2}(A)\, S_n(b_1+[-b_2])\, z^n - ix\sum_{n=0}^{\infty} (1-i)\, S_n(A) + (1+i)\, S_{n-1}(A) \\
&\quad + (3i-1)\, S_{n-2}(A) \times S_{n-1}(b_1+[-b_2])\, z^n,
\end{aligned}$$

on utilise les formules (3.4), (3.7), (3.10) et (3.13), il en résult que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} GR_nL_n(x,y)\, z^n \\
&= (2-2i)\times \frac{1 + b_1b_2S_2(-A)\, z^2 + b_1b_2(b_1-b_2)\, S_3(-A)\, z^3}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z)} \\
&\quad + (2+2i)\times \frac{(b_1-b_2)\, z - b_1b_2S_1(-A)\, z^2 - b_1^2b_2^2S_3(-A)\, z^4}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z)} \\
&\quad + (6i-2)\times \frac{\left((b_1-b_2)^2 + b_1b_2\right) z^2 - b_1b_2(b_1-b_2)\, S_1(-A)\, z^3 + b_1^2b_2^2S_2(-A)\, z^4}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z)} \\
&\quad - ix \times \frac{\begin{array}{c}((1+i)-(1-i)\, S_1(-A))\, z + (b_1-b_2)\left((3i-1)-(1-i)\, S_2(-A)\right) z^2 \\ \left(-(3i-1)\, b_1b_2S_1(-A) + \left((1+i)\, b_1b_2S_2(-A) - (1-i)\left((b_1-b_2)^2 + b_1b_2\right)\right) S_3(-A)\right) z^3 \\ + (1+i)\, b_1b_2(b_1-b_2)\, S_3(-A)\, z^4 - (3i-1)\, b_1^2b_2^2S_3(-A)\, z^5\end{array}}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1z)\prod\limits_{a\in A}(1+ab_2z)},
\end{aligned}$$

puisque $\begin{cases} S_1(-A) = 0 \\ S_2(-A) = -2 \\ S_3(-A) = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_1 - b_2 = ix \\ b_1.b_2 = y \end{cases}$, alors on obtient le résultat. ∎

Chapitre 4

Fonctions symétriques complètes et élémentaires à plusieurs variables et polynômes orthogonaux

Ce chapitre est partagé en deux parties. Dans la première nous montrons l'action de l'opérateur $\delta^1_{p_1p_2}$ sur la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) p_1^n z^n$, qui nous permet d'obtenir des nouvelles fonctions génératrices des produits de certains nombres et des polynômes orthogonaux avec les fonctions symétriques à plusieurs variables.

Dans la deuxième partie, nous déterminons des nouvelles fonctions génératrices des produits des nombres de Tetranacci avec les nombres de k-Pell, k-Jacobsthal, k-Mersenne ainsi que des polynômes de Pell et Jacobsthal. Ce chapitre fait l'objet de la publication suivante :

H. Zerroug, A.Boussayoud, A. Abderrezzek, M. Kerada, complete and elementary symmetric functions in several variables and orthogonal polynomials. Nonlinear studies, 29(1), 329-346, 2022.

4.1 Notations et définitions

Définition 4.1 *Soit $f \in \mathbb{R}^n$, on définit la différence divisée notée $\partial_{x_i,x_{i+1}}$ par*

$$\partial_{x_i,x_{i+1}}(f) = \frac{f(x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots x_n) - f(x_1, \cdots x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2} \cdots x_n)}{x_i - x_{i+1}}.$$

Proposition 4.1 *Soit $A = \{p_1, p_2\}$ un alphabet, Nous définissons l'opérateur symétrique $\delta^k_{p_1p_2}$ par*

$$\delta^k_{p_1p_2} f\left(p_1\right) = h_{k-1}\left(p_1, p_2\right) f\left(p_1\right) + p_2^k \partial_{p_1,p_2}\left(f\right).$$

Preuve: Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\delta^k_{p_1p_2} f(p_1) &= \frac{p_1^k f\left(p_1\right) - p_2^k f\left(p_2\right)}{p_1 - p_2} \\
&= \frac{p_1^k f\left(p_1\right) - p_2^k f\left(p_2\right) + p_2^k f\left(p_1\right) - p_2^k f\left(p_1\right)}{p_1 - p_2} \\
&= \frac{p_1^k f\left(p_1\right) - p_2^k f\left(p_1\right)}{p_1 - p_2} + \frac{p_2^k f\left(p_1\right) - p_2^k f\left(p_2\right)}{p_1 - p_2} \\
&= \frac{p_1^k - p_2^k}{p_1 - p_2} f\left(p_1\right) + p_2^k \frac{f\left(p_1\right) - f\left(p_2\right)}{p_1 - p_2} \\
&= h_{k-1}\left(p_1, p_2\right) f\left(p_1\right) + p_2^k \partial_{p_1,p_2}\left(f\right).
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.2 *[7]Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

1. $F_{k,-n} = (-1)^{n+1} F_{k,n}$
2. $P_{k,-n} = (-1)^{n+1} P_{k,n}$
3. $L_{k,-n} = (-1)^{n} L_{k,n}$

4.$M_{k,-n} = \frac{-1}{2^n} M_{k,n}$

5.$J_{k,-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} J_{k,n}$

4.2 Résultats principaux

Théorème 4.1 *Etant donnés deux alphabets $P = \{p_1, p_2\}$ et $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, alors on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\, h_n(p_1, p_2)\, z^n = \frac{\left[\begin{array}{c} 1 - p_1p_2e_2^{(4)}z^2 + p_1p_2(p_1+p_2)\, e_3^{(4)}z^3 \\ -p_1p_2\left[(p_1+p_2)^2 - p_1p_2\right] e_4^{(4)}z^4 \end{array}\right]}{\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_2z)}. \tag{4.1}$$

Preuve: Soient $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\, p_1^n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\, p_1^n z^n$ deux séries telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\, p_1^n z^n \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\, p_1^n z^n = 1.$$

Soit $f(p_1z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\, p_1^n z^n$, alors le premier membre de la formule (4.1) s'écrit

$$\begin{aligned} \delta^1_{p_1p_2} f(p_1z) &= \frac{p_1\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\, p_1^n z^n - p_2\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\, p_2^n z^n}{p_1 - p_2} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\, p_1^{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\, p_2^{n+1} z^n}{p_1 - p_2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\, \frac{p_1^{n+1} - p_2^{n+1}}{p_1 - p_2} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\, h_n(p_1, p_2)\, z^n. \end{aligned}$$

d'autre part, comme $f(p_1z) = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_1^n z^n}$, alors on a

$$\begin{aligned}
\partial_{p_2p_2} f(p_1z) &= \frac{1}{p_1-p_2}\left(\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_1^n z^n} - \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_2^n z^n}\right) \\
&= -\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\frac{p_1^n - p_2^n}{p_1-p_2} z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_2^n z^n\right)} \\
&= -\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)h_{n-1}(p_1+p_2) z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_2^n z^n\right)},
\end{aligned}$$

d'aprés la proposition 4.1, il vient

$$\begin{aligned}
\delta^1_{p_1p_2} f(p_1z) &= \left[\begin{array}{c}\frac{h_0(p_1+p_2)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_1^n z^n} - \\ p_2\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)h_{n-1}(p_1+p_2)z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_2^n z^n\right)}\end{array}\right] \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\left[h_0(p_1,p_2)p_2^n - p_2h_{n-1}(p_1,p_2)\right] z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_2^n z^n\right)} \\
&= \frac{\left[\begin{array}{c} e_0(a_1,a_2,a_3,a_4)\left[h_0(p_1,p_2) - p_2h_{-1}(p_1,p_2)\right] - \\ e_1(a_1,a_2,a_3,a_4)\left[h_0(p_1,p_2)p_2 - p_2h_0(p_1,p_2)\right]z + \\ e_2(a_1,a_2,a_3,a_4)\left[h_0(p_1,p_2)p_2^2 - p_2h_1(p_1,p_2)\right]z^2 \\ -e_3(a_1,a_2,a_3,a_4)\left[h_0(p_1,p_2)p_2^3 - p_2h_2(p_1,p_2)\right]z^3 + \\ e_4(a_1,a_2,a_3,a_4)\left[h_0(p_1,p_2)p_2^4 - p_2h_3(p_1,p_2)\right]z^4 \end{array}\right]}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)p_2^n z^n\right)}.
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, h_n(p_1,p_2)\, z^n = \frac{\begin{bmatrix} 1 - p_1p_2e_2^{(4)}z^2 + p_1p_2(p_1+p_2)\, e_3^{(4)}z^3 \\ -p_1p_2\left[(p_1+p_2)^2 - p_1p_2\right] e_4^{(4)}z^4 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_2z)}.$$

■

Du théorème 4.1, on conclut la proposition suivante :

Proposition 4.3 *Etant donnés deux alphabet $P = \{p_1,p_2\}$ et $A = \{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, alors on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1,a_2,a_3,a_4)\, h_{n-1}(p_1,p_2)\, z^n = \frac{\begin{bmatrix} z - p_1p_2e_2^{(4)}z^3 + p_1p_2(p_1+p_2)\, e_3^{(4)}z^4 - \\ p_1p_2\left[(p_1+p_2)^2 - p_1p_2\right] e_4^{(4)}z^5 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_2z)}. \tag{4.2}$$

Preuve: En multipliant les deux membres de l'égalité (4.1) par z, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, h_n(p_1,p_2)\, z^{n+1} &= z \times \frac{\begin{bmatrix} 1 - p_1p_2e_2^{(4)}z^2 + p_1p_2(p_1+p_2)\, e_3^{(4)}z^3 \\ -p_1p_2\left[(p_1+p_2)^2 - p_1p_2\right] e_4^{(4)}z^4 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_2z)} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} z - p_1p_2e_2^{(4)}z^3 + p_1p_2(p_1+p_2)\, e_3^{(4)}z^4 \\ -p_1p_2\left[(p_1+p_2)^2 - p_1p_2\right] e_4^{(4)}z^5 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_2z)},\end{aligned}$$

il en resulte que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1,a_2,a_3,a_4)\, h_{n-1}(p_1+p_2)\, z^n = \frac{\begin{bmatrix} z - p_1p_2e_2^{(4)}z^3 + p_1p_2(p_1+p_2)\, e_3^{(4)}z^4 - \\ p_1p_2\left[(p_1+p_2)^2 - p_1p_2\right] e_4^{(4)}z^5 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_2z)}.$$

■

Théorème 4.2 *Etant donnés deux alphabets* $P = \{p_1, p_2\}$ *et* $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, *alors on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, h_{n-1}(p_1,p_2)\, z^n = \frac{\begin{bmatrix} e_1^{(4)} z - (p_1+p_2)\, e_2^{(4)} z^2 \\ + \left[(p_1+p_2)^2 - p_1p_2\right] e_3^{(4)} z^3 \\ -(p_1+p_2)\left[(p_1+p_2)^2 - 2p_1p_2\right] e_4^{(4)} z^4 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_1z)\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_2z)}. \tag{4.3}$$

Preuve: Soit $f(p_1z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, p_1^n z^n$, alors le premier membre de la formule (4.3) s'écrit

$$\begin{aligned} &\partial_{p_1,p_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, p_1^n z^n\right) \\ = &\ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, p_1^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, p_2^n z^n}{p_1-p_2} \\ = &\ \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, \frac{p_1^n - p_2^n}{p_1-p_2} z^n \\ = &\ \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, h_{n-1}(p_1,p_2)\, z^n. \end{aligned}$$

d'autre part, le deuxième membre de la formule (4.3) s'écrit

$$\begin{aligned} &\partial_{p_1,p_2}\left(\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, p_1^n z^n}\right) \\ = &\ \frac{\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4) p_1^n z^n} - \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4) p_2^n z^n}}{p_1-p_2} \\ = &\ \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, p_2^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, p_1^n z^n}{(p_1-p_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, p_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, p_2^n z^n\right)} \\ = &\ -\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, \frac{p_1^n-p_2^n}{p_1-p_2} z^n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, p_1^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, p_2^n z^n\right)} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{n-1}(p_1+p_2)\,z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,p_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,p_2^n z^n\right)}$$

$$= -\frac{\left[\begin{array}{c} e_0(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{-1}(p_1+p_2) - e_1(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_0(p_1+p_2)\,z \\ +e_2(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_1(p_1+p_2)\,z^2 - e_3(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_2(p_1+p_2)\,z^3 \\ +e_4(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_3(p_1+p_2)\,z^4 \end{array}\right]}{\prod\limits_{i=1}^{4}(1-a_ip_1z)\prod\limits_{i=1}^{4}(1-a_ip_2z)}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{c} e_1(a_1,a_2,a_3,a_4)\,z - (p_1+p_2)\,e_2(a_1,a_2,a_3,a_4)\,z^2 \\ +\left[(p_1+p_2)^2 - p_1p_2\right] e_3(a_1,a_2,a_3,a_4)\,z^3 \\ -(p_1+p_2)\left[(p_1+p_2)^2 - 2p_1p_2\right] e_4(a_1,a_2,a_3,a_4)\,z^4 \end{array}\right]}{\prod\limits_{i=1}^{4}(1-a_ip_1z)\prod\limits_{i=1}^{4}(1-a_ip_2z)},$$

par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{n-1}(p_1,p_2)\,z^n = \frac{\left[\begin{array}{c} e_1^{(4)}z - (p_1+p_2)\,e_2^{(4)}z^2 \\ +\left[(p_1+p_2)^2 - p_1p_2\right] e_3^{(4)}z^3 \\ -(p_1+p_2)\left[(p_1+p_2)^2 - 2p_1p_2\right] e_4^{(4)}z^4 \end{array}\right]}{\prod\limits_{i=1}^{4}(1-a_ip_1z)\prod\limits_{i=1}^{4}(1-a_ip_2z)}.$$

■

4.3 Fonctions génératrices du produit de certains nombres et les fonctions symétriques à plusieurs variables

En remplaçant p_2 par $(-p_2)$ dans (4.1), (4.2) et (4.3), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_n(p_1,[-p_2])\,z^n = \frac{\begin{bmatrix} 1+p_1p_2e_2^{(4)}z^2 - p_1p_2(p_1-p_2)\,e_3^{(4)}z^3 \\ +p_1p_2\left[(p_1-p_2)^2+p_1p_2\right]e_4^{(4)}z^4 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-(p_1-p_2)\,a_iz-p_1p_2a_i^2z^2\right)}, \tag{4.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{n-1}(p_1,[-p_2])\,z^n = \frac{\begin{bmatrix} z+p_1p_2e_2^{(4)}z^3 - p_1p_2(p_1-p_2)\,e_3^{(4)}z^4 \\ +p_1p_2\left((p_1-p_2)^2+p_1p_2\right)e_4^{(4)}z^5 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-(p_1-p_2)\,a_iz-p_1p_2a_i^2z^2\right)}, \tag{4.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{n-1}(p_1,[-p_2])\,z^n = \frac{\begin{bmatrix} e_1^{(4)}z-(p_1-p_2)\,e_2^{(4)}z^2 \\ +\left[(p_1-p_2)^2+p_1p_2\right]e_3^{(4)}z^3 \\ -(p_1-p_2)\left[(p_1-p_2)^2+2p_1p_2\right]e_4^{(4)}z^4 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-(p_1-p_2)\,a_iz-p_1p_2a_i^2z^2\right)}. \tag{4.6}$$

respectivements. On distingue quatre cas :

Le premier cas : En prenant $\begin{cases} p_1-p_2=k \\ p_1.p_2=1 \end{cases}$, dans (4.4), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_n(p_1,[-p_2])\,z^n &= \frac{1+e_2^{(4)}z^2-ke_3^{(4)}z^3+(k^2+1)\,e_4^{(4)}z^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-ka_iz-a_i^2z^2\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,F_{k,n}z^n,\end{aligned}$$

ce qui nous donne les théorèmes suivants :

Théorème 4.3 *Pour $n\in\mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de k-*

Fibonacci et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) F_{k,n} z^n = \frac{1 + e_2^{(4)} z^2 - k e_3^{(4)} z^3 + \left(k^2+1\right) e_4^{(4)} z^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - k a_i z - a_i^2 z^2\right)}.$$

Théorème 4.4 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de k-Fibonacci d'indice négatif et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) F_{k,-n} z^n = \frac{-1 - e_2^{(4)} z^2 - k e_3^{(4)} z^3 - \left(k^2+1\right) e_4^{(4)} z^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 + k a_i z - a_i^2 z^2\right)}.$$

Preuve: Conséquence directe du théorème 4.3 et la proposition 4.2. ■

Théorème 4.5 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de k-Lucas et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) L_{k,n} z^n = \frac{\begin{bmatrix} 2 - k e_1^{(4)} z + \left(2+k^2\right) e_2^{(4)} z^2 - \\ \left(k^3+3k\right) e_3^{(4)} z^3 + \left(2+4k^2+k^4\right) e_4^{(4)} z^4 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - k a_i z - a_i^2 z^2\right)}.$$

Preuve: On sait que

$$L_{k,n} = \left(2+k^2\right) h_n\left(p_1, [-p_2]\right) - k h_{n+1}\left(p_1, [-p_2]\right),$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) L_{k,n} z^n = \begin{bmatrix} \left(2+k^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) h_n\left(p_1, [-p_2]\right) \\ -k \sum_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) h_{n+1}\left(p_1, [-p_2]\right) z^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \sum_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) h_n\left(p_1, [-p_2]\right) z^n \\ -k \sum_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) h_{n-1}\left(p_1, [-p_2]\right) z^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right) F_{k,n} z^n \\ -k\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right) h_{n-1}\left(p_1,[-p_2]\right) z^n \end{bmatrix},$$

par le théorème 4.3 et la formule (4.6) , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right) L_{k,n} z^n &= \begin{bmatrix} \frac{2+2e_2^{(4)}z^2-2ke_3^{(4)}z^3+2\left(k^2+1\right)e_4^{(4)}z^4}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1-ka_iz-a_i^2z^2\right)} \\ -k\frac{e_1^{(4)}z-ke_2^{(4)}z^2+\left(k^2+1\right)e_3^{(4)}z^3-\left(k^3+2k\right)e_4^4z^4}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1-ka_iz-a_i^2z^2\right)} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 2-ke_1^{(4)}z+\left(2+k^2\right)e_2^{(4)}z^2- \\ \left(k^3+3k\right)e_3^{(4)}z^3+\left(2+4k^2+k^4\right)e_4^{(4)}z^4 \end{bmatrix}}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1-ka_iz-a_i^2z^2\right)}. \end{aligned}$$

■

Théorème 4.6 *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de k-Lucas d'indice négatif et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right) L_{k,-n} z^n = \frac{\begin{bmatrix} 2+ke_1^{(4)}z+\left(2+k^2\right)e_2^{(4)}z^2+ \\ \left(k^3+3k\right)e_3^{(4)}z^3+\left(2+4k^2+k^4\right)e_4^{(4)}z^4 \end{bmatrix}}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1+ka_iz-a_i^2z^2\right)}.$$

Preuve: Conséquence directe du théorème 4.5 et la proposition 4.2.. ■

Le deuxième cas : En posant $p_1 - p_2 = 2$ et $p_1.p_2 = k$ dans (4.5), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right) h_{n-1}\left(p_1,[-p_2]\right) z^n &= \frac{z+ke_2^{(4)}z^3-2ke_3^{(4)}z^4+k\left(k+4\right)e_4^{(4)}z^5}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1-2a_iz-ka_i^2z^2\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right) P_{k,n} z^n, \end{aligned}$$

ce qui nous donne les théorèmes suivants :

Théorème 4.7 *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de k-Pell* *et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)P_{k,n}z^n=\frac{z+ke_2^{(4)}z^3-2ke_3^{(4)}z^4+k\left(k+4\right)e_4^{(4)}z^5}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1-2a_iz+ka_i^2z^2\right)}.$$

Théorème 4.8 *Pour $n\in\mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de k-Pell d'indice négatif et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)P_{k,-n}z^n=\frac{z+ke_2^{(4)}z^3-2ke_3^{(4)}z^4+k\left(k+4\right)e_4^{(4)}z^5}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1+2a_iz+ka_i^2z^2\right)}.$$

Preuve: Conséquence directe du théorème 4.7 et la proposition 4.2.. ■

Le troisième cas : En posant $p_1-p_2=3k$ et $p_1.p_2=-2$ dans (4.5), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)h_{n-1}\left(p_1,[-p_2]\right)z^n &= \frac{z-2e_2^{(4)}z^3+6ke_3^{(4)}z^4-\left(18k^2-4\right)e_4^{(4)}z^5}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1-3ka_iz+2a_i^2z^2\right)}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)M_{k;n}z^n,\end{aligned}$$

ce qui nous donne les théorèmes suivants :

Théorème 4.9 *Pour $n\in\mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de k-Mersenne et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)M_{k,n}z^n=\frac{z-2e_2^{(4)}z^3+6ke_3^{(4)}z^4-\left(18k^2-4\right)e_4^{(4)}z^5}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1-3ka_iz+2a_i^2z^2\right)}.$$

Théorème 4.10 *Pour $n\in\mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de k-Mersenne d'indice négatif et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)M_{k,-n}z^n=\frac{-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}e_2^{(4)}z^3-\frac{3k}{8}e_3^{(4)}z^4+\frac{\left(9k^2-2\right)}{16}e_4^{(4)}z^5}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1-\frac{3k}{2}a_iz+\frac{1}{2}a_i^2z^2\right)}.$$

Preuve: Conséquence directe du théorème 4.9 et la proposition 4.2.. ■

Le quatrième cas : En posant $\begin{cases} p_1 - p_2 = k \\ p_1.p_2 = 2 \end{cases}$, dans (4.5), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1,a_2,a_3,a_4)\, h_{n-1}(p_1,[-p_2])\, z^n &= \frac{z + 2e_2^{(4)}z^3 - 2ke_3^{(4)}z^4 + 2(k^2+2)\, e_4^{(4)}z^5}{\prod\limits_{i=1}^{4}(1 - ka_iz - 2a_i^2z^2)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1,a_2,a_3,a_4)\, J_{k,n}z^n,\end{aligned}$$

ce qui nous donne les théorèmes suivants :

Théorème 4.11 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de k-Jacobsthal et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1,a_2,a_3,a_4)\, J_{k,n}z^n = \frac{z + 2e_2^{(4)}z^3 - 2ke_3^{(4)}z^4 + 2(k^2+2)\, e_4^{(4)}z^5}{\prod\limits_{i=1}^{4}(1 - ka_iz - 2a_i^2z^2)}.$$

Théorème 4.12 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de k-Jacobsthal d'indice négatif et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1,a_2,a_3,a_4)\, J_{k,-n}z^n = \frac{\frac{z}{2} + e_2^{(4)}\frac{z^3}{4} + ke_3^{(4)}\frac{z^4}{8} + (k^2+2)\, e_4^{(4)}\frac{z^5}{16}}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1 + ka_i\frac{z}{2} - a_i^2\frac{z^2}{2}\right)}.$$

Preuve: Conséquence directe du théorème 4.11 et la proposition 4.2. ■

– Pour $a_4 = 0$, on obtient le tableau suivant qui représente des fonctions génératrices du produit de certains nombres et les fonctions symétriques à trois variables :

$p_1 - p_2$	p_1p_2	Coefficient de z^n	Fonctions génératrices
k	1	$h_n(a_1,a_2,a_3)\, F_{k,n}$	$\frac{1+e_2^{(3)}z^2 - ke_3^{(3)}z^3}{\prod_{i=1}^{3}(1-ka_iz-a_i^2z^2)}$
2	k	$h_{n-1}(a_1,a_2,a_3)\, P_{k,n}$	$\frac{z+ke_2^{(3)}z^3 - 2ke_3^{(3)}z^4}{\prod_{i=1}^{3}(1-2a_iz-ka_i^2z^2)}$

$3k$	-2	$h_{n-1}(a_1,a_2,a_3)\,M_{k,n}$	$\frac{z-2e_2^{(3)}z^3+6ke_3^{(3)}z^4}{\prod_{i=1}^{3}\left(1-3ka_iz+2a_i^2z^2\right)}$
k	2	$h_{n-1}(a_1,a_2,a_3)\,J_{k,n}$	$\frac{z+2e_2^{(3)}z^3-2ke_3^{(3)}z^4}{\prod_{i=1}^{3}\left(1-ka_iz-2a_i^2z^2\right)}$

Table 4.1. Fonctions génératrices du produit de certains nombres et les fonctions symétriques à trois variables.

– Pour $a_3 = a_4 = 0$, on obtient le tableau suivant

$p_1 - p_2$	$p_1.p_2$	Coefficient of z^n	Fonctions génératrices
k	1	$h_n(a_1,a_2)\,F_{k,n}$	$\frac{1+e_2^{(2)}z^2}{\prod_{i=1}^{2}\left(1-ka_iz-a_i^2z^2\right)}$
2	k	$h_{n-1}(a_1,a_2)\,P_{k,n}$	$\frac{z+ke_2^{(2)}z^3}{\prod_{i=1}^{2}\left(1-2a_iz-ka_i^2z^2\right)}$
k	1	$h_n(a_1,a_2)\,L_{k,n}$	$\frac{2-ke_1^{(2)}z+\left(2-k^2\right)e_2^{(2)}z^2}{\prod_{i=1}^{2}\left(1-ka_iz-a_i^2z^2\right)}$
$3k$	-2	$h_{n-1}(a_1,a_2)\,M_{k,n}$	$\frac{z-2e_2^{(2)}z^3}{\prod_{i=1}^{2}\left(1-3a_iz+2a_i^2z^2\right)}$
k	2	$h_{n-1}(a_1,a_2)\,J_{k,n}$	$\frac{z+2e_2^{(2)}z^3}{\prod_{i=1}^{2}\left(1-ka_iz-2a_i^2z^2\right)}$

Table 4.2. Fonctions génératrices du produit de certains nombres et les fonctions symétriques à deux variables.

4.4 Fonctions génératrices du produit de certains polynômes et les fonctions symétriques à plusieurs variables

– Maintenant, en remplacant p_2 par $(-p_2)$ dans (4.1), (4.2) et (4.3), on distingue trois cas :

a) En posant $\begin{cases} p_1 - p_2 = x \\ p_1.p_2 = 1 \end{cases}$ dans (4.4), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, h_n(p_1,[-p_2])\, z^n = \frac{1 + e_2^{(4)} z^2 - x e_3^{(4)} z^3 + (x^2+1)\, e_4^{(4)} z^4}{\prod_{i=1}^{4}(1 - x a_i z - a_i^2 z^2)},$$

ce qui nous donne les théorèmes suivants :

Théorème 4.13 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des polynômes de Fibonacci et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, F_n(x)\, z^n = \frac{1 + e_2^{(4)} z^2 - x e_3^{(4)} z^3 + (x^2+1)\, e_4^{(4)} z^4}{\prod_{i=1}^{4}(1 - x a_i z - a_i^2 z^2)}.$$

Théorème 4.14 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des polynômes de Lucas et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, L_n(x)\, z^n = \frac{\left[\begin{array}{c} 2 - x e_1^{(4)} z + (2+x^2)\, e_2^{(4)} z^2 - \\ (3x+x^3)\, e_3^{(4)} z^3 + (2+4x^2+x^4)\, e_4^{(4)} z^4 \end{array}\right]}{\prod_{i=1}^{4}(1 - x a_i z - a_i^2 z^2)}.$$

Preuve: Comme

$$L_n(x) = \left(2 + x^2\right) h_n(p_1,[-p_2]) - x h_{n+1}(p_1,[-p_2]),$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, L_n(x)\, z^n = \left[\begin{array}{c} (2+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, h_n(p_1,[-p_2])\, z^n \\ -x \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, h_{n+1}(p_1,[-p_2])\, z^n \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c} (2+x^2)\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_n(p_1,[-p_2])\,z^n - \\ x\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\left(xh_n(p_1,[-p_2]) + h_{n-1}(p_1,[-p_2])\right)z^n \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{c} 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_n(p_1,[-p_2])\,z^n - \\ x\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{n-1}(p_1,[-p_2])\,z^n \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{c} 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,F_n(x)\,z^n - \\ x\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{n-1}(p_1,[-p_2])\,z^n \end{array} \right],$$

d'aprés le théorème 4.13 et la formule (4.6), on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,L_n(x)\,z^n = \left[\begin{array}{c} \dfrac{2+2e_2^{(4)}z^2-2xe_3^{(4)}z^3+2\left(x^2+1\right)e_4^{(4)}z^4}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1-xa_iz-a_i^2z^2\right)} - \\ x\dfrac{e_1^{(4)}z-xe_2^{(4)}z^2+\left(x^2+1\right)e_3^{(4)}z^3-\left(x^3+2x\right)e_4^{4}z^4}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1-ka_iz-a_i^2z^2\right)} \end{array} \right]$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{c} 2-xe_1^{(4)}z+(2+x^2)\,e_2^{(4)}z^2- \\ (3x+x^3)\,e_3^{(4)}z^3+(2+4x^2+x^4)\,e_4^{(4)}z^4 \end{array} \right]}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1-xa_iz-a_i^2z^2\right)}.$$

■

b) En posant $\begin{cases} p_1 - p_2 = 2x \\ p_1 \cdot p_2 = 1 \end{cases}$ dans (4.5), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{n-1}(p_1,[-p_2])\,z^n = \frac{z+e_2^{(4)}z^3-2xe_3^{(4)}z^4+(4x^2+1)\,e_4^{(4)}z^5}{\prod\limits_{i=1}^{4}\left(1-2xa_iz-a_i^2z^2\right)},$$

ce qui nous donne le théorème suivant :

Théorème 4.15 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des polynômes de Pell* *et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1, a_2, a_3, a_4) P_n(x) z^n = \frac{z + e_2^{(4)} z^3 - 2xe_3^{(4)} z^4 + (4x^2+1) e_4^{(4)} z^5}{\prod_{i=1}^{4}(1 - 2xa_i z - a_i^2 z^2)}.$$

c) En posant $\begin{cases} p_1.p_2 = 2x \\ p_1 - p_2 = 1 \end{cases}$ dans (4.5), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1, a_2, a_3, a_4) h_{n-1}(p_1, [-p_2]) z^n = \frac{\left[\begin{array}{c} z + 2xe_2^{(4)} z^3 - 2xe_3^{(4)} z^4 + \\ 2x(2x+1) e_4^{(4)} z^5 \end{array}\right]}{\prod_{i=1}^{4}(1 - a_i z - 2xa_i^2 z^2)},$$

ce qui nous donne le théorème suivant :

Théorème 4.16 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des polynômes de Jacobsthal et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1, a_2, a_3, a_4) J_n(x) z^n = \frac{z + 2xe_2^{(4)} z^3 - 2xe_3^{(4)} z^4 + 2x(2x+1) e_4^{(4)} z^5}{\prod_{i=1}^{4}(1 - a_i z - 2xa_i^2 z^2)}.$$

– D'autre part, en remplaçant p_1 par $2p_1$et p_2 par $(-2p_2)$ dans (4.1) et (4.3), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4) h_n(2p_1, [-2p_2]) z^n = \frac{1 - e_2^{(4)} z^2 + 2(p_1 - p_2) e_3^{(4)} z^3 - \left(4(p_1 - p_2)^2 - 1\right) e_4^{(4)} z^4}{\prod_{i=1}^{4}(1 - 2(p_1 - p_2) a_i z + a_i^2 z^2)}, \tag{4.7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3, a_4) h_{n-1}(2p_1, [-2p_2]) z^n = \frac{\left[\begin{array}{c} e_1^{(4)} z - 2(p_1 - p_2) e_2^{(4)} z^2 + \left(4(p_1 - p_2)^2 - 1\right) e_3^{(4)} z^3 \\ -2(p_1 - p_2)\left(4(p_1 - p_2)^2 - 2\right) e_4^{(4)} z^4 \end{array}\right]}{\prod_{i=1}^{4}(1 - 2(p_1 - p_2) a_i z + a_i^2 z^2)}, \tag{4.8}$$

ce qui nous donne les théorèmes suivants :

Théorème 4.17 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des polynômes de*

Chebychev de deuxième espèce et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,U_n(x)\,z^n=\frac{1-e_2^{(4)}z^2+2xe_3^{(4)}z^3-\left(4x^2-1\right)e_4^{(4)}z^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-2xa_iz+a_i^2z^2\right)},\ \ avec\ x=p_1-p_2.$$

Théorème 4.18 *Pour $n\in\mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des polynômes de Chebychev de première espèce et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,T_n(x)\,z^n=\frac{\begin{bmatrix} 1-xe_1^{(4)}z+\left(2x^2-1\right)e_2^{(4)}z^2- \\ \left(4x^3-3x\right)e_3^{(4)}z^3+\left(8x^4-8x^2+1\right)e_4^{(4)}z^4\end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-2xa_iz+a_i^2z^2\right)}.$$

Preuve: On sait que

$$T_n(x)=h_n(2p_1,[-2p_2])-xh_{n-1}(2p_1,[-2p_2]),$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,T_n(x)\,z^n &= \begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_n(2p_1,[-2p_2])\,z^n \\ -x\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{n-1}(2p_1,[-2p_2])\,z^n\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,U_n(x)\,z^n \\ -x\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{n-1}(2p_1,[-2p_2])\,z^n\end{bmatrix},\end{aligned}$$

par le théorème 4.17 et la formule (4.8), on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,T_n(x)\,z^n=\begin{bmatrix}\frac{1-e_2^{(4)}z^2+2xe_3^{(4)}z^3-\left(4x^2-1\right)e_4^{(4)}z^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-2xa_iz+a_i^2z^2\right)} \\ -x\frac{e_1^{(4)}z-2xe_2^{(4)}z^2+\left(4x^2-1\right)e_3^{(4)}z^3-2x\left(4x^2-2\right)e_4^{(4)}z^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-2xa_iz+a_i^2z^2\right)}\end{bmatrix},$$

un calcul simple nous donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,T_n(x)\,z^n = \frac{\begin{bmatrix} 1 - xe_1^{(4)}z + (2x^2-1)\,e_2^{(4)}z^2 - \\ (4x^3-3x)\,e_3^{(4)}z^3 + (8x^4-8x^2+1)\,e_4^{(4)}z^4 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}(1-2xa_iz+a_i^2z^2)}.$$

■

Théorème 4.19 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des polynômes de Chebychev de troisième espèce et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,V_n(x)\,z^n = \frac{\begin{bmatrix} 1 - e_1^{(4)}z + (2x-1)\,e_2^{(4)}z^2 - (4x^2-2x-1)\,e_3^{(4)}z^3 \\ +(1-4x-4x^2+8x^3)\,e_4^{(4)}z^4 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}(1-2xa_iz+a_i^2z^2)}.$$

Preuve: On sait que

$$V_n(x) = h_n(2p_1+[-2p_2]) - h_{n-1}(2p_1+[-2p_2]),\ \text{voir [25]}$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,V_n(x)\,z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,(h_n(2p_1,[-2p_2]) - h_{n-1}(2p_1,[-2p_2]))\,z^n \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_n(2p_1,[-2p_2])\,z^n \\ -\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{n-1}(2p_1,[-2p_2])\,z^n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,U_n(x)\,z^n \\ -\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{n-1}(2p_1,[-2p_2])\,z^n \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

d'aprés le théorème 4.17 et la formule (4.8), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,V_n(x)\,z^n &= \frac{1-e_2^{(4)}z^2+2xe_3^{(4)}z^3-(4x^2-1)\,e_4^{(4)}z^4}{\prod_{i=1}^{4}(1-2xa_iz+a_i^2z^2)} \\
&\quad -\frac{e_1^{(4)}z-2xe_2^{(4)}z^2+(4x^2-1)\,e_3^{(4)}z^3-2x\,(4x^2-2)\,e_4^{(4)}z^4}{\prod_{i=1}^{4}(1-2xa_iz+a_i^2z^2)} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 1-e_1^{(4)}z+(2x-1)\,e_2^{(4)}z^2-(4x^2-2x-1)\,e_3^{(4)}z^3 \\ +(1-4x-4x^2+8x^3)\,e_4^{(4)}z^4 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}(1-2xa_iz+a_i^2z^2)}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 4.20 *Pour $n\in\mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des polynômes de Chebychev de quatrième espèce et les fonctions symétriques à plusieurs variables est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,W_n(x)\,z^n = \frac{\begin{bmatrix} 1+e_1^{(4)}z-(1+2x)\,e_2^{(4)}z^2+(4x^2+2x-1)\,e_3^{(4)}z^3 \\ -(8x^3+4x^2-4x-1)\,e_4^{(4)}z^4 \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{4}(1-2xa_iz+a_i^2z^2)}.$$

Preuve: On sait que

$$W_n(x) = h_n(2p_1,[-2p_2]) + h_{n-1}(2p_1,[-2p_2]),\ \text{voir [25]}$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,W_n(x)\,z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,(h_n(2p_1,[-2p_2])+h_{n-1}(2p_1,[-2p_2]))\,z^n \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_n(2p_1,[-2p_2])\,z^n \\ +\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\,h_{n-1}(2p_1,[-2p_2])\,z^n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, U_n(x)\, z^n \\ + \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, h_{n-1}(2p_1,[-2p_2])\, z^n \end{array} \right],$$

d'aprés le théorème 4.17 et la formule (4.8), on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\, W_n(x)\, z^n &= \frac{1-e_2^{(4)}z^2+2xe_3^{(4)}z^3-(4x^2-1)\,e_4^{(4)}z^4}{\prod_{i=1}^{4}(1-2xa_iz+a_i^2z^2)} \\ &+\frac{e_1^{(4)}z-2xe_2^{(4)}z^2+(4x^2-1)\,e_3^{(4)}z^3-2x\,(4x^2-2)\,e_4^{(4)}z^4}{\prod_{i=1}^{4}(1-2xa_iz+a_i^2z^2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{c} 1+e_1^{(4)}z-(1+2x)\,e_2^{(4)}z^2+(4x^2+2x-1)\,e_3^{(4)}z^3 \\ -(8x^3+4x^2-4x-1)\,e_4^{(4)}z^4 \end{array} \right]}{\prod_{i=1}^{4}(1-2xa_iz+a_i^2z^2)}.$$

■

– Posant $a_4=0$, dans les théorèmes 4.13-4.17, on obtient le tableau suivant :

p_1-p_2	$p_1.p_2$	Coefficient de z^n	Fonctions génératrices
x	1	$h_n(a_1,a_2,a_3)\,F_n(x)$	$\frac{1+e_2^{(3)}z^2-xe_3^{(3)}z^3}{\prod_{i=1}^{3}\left(1-xa_iz-a_i^2z^2\right)}$
$2x$	1	$h_{n-1}(a_1,a_2,a_3)\,P_n(x)$	$\frac{z+e_2^{(3)}z^3-2xe_3^{(3)}z^4}{\prod_{i=1}^{3}\left(1-2xa_iz-a_i^2z^2\right)}$
x	1	$h_n(a_1,a_2,a_3)\,L_n(x)$	$\frac{2-xe_1^{(3)}z+\left(x^2+2\right)e_2^{(3)}z^2-\left(3x-x^3\right)e_3^{(3)}z^3}{\prod_{i=1}^{3}\left(1-xa_iz-a_i^2z^2\right)}$
x	$-\frac{1}{4}$	$h_n(a_1,a_2,a_3)\,U_n(x)$	$\frac{1+e_2^{(3)}z^2-2xe_3^{(3)}z^3}{\prod_{i=1}^{3}\left(1-2xa_iz-a_i^2z^2\right)}$
x	$-\frac{1}{4}$	$h_n(a_1,a_2,a_3)\,T_n(x)$	$\frac{1-xe_1^{(3)}z-\left(2x^2+1\right)e_2^{(3)}z^2-x\left(4x^2+1\right)e_3^{(3)}z^3}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-2xa_iz+a_i^2z^2\right)}$

Table 4.3. Fonctions génératrices du produit de certains polynômes et des fonctions symétriques.

– Pour $a_4 = a_3 = 0$, on obtient le tableau suivant qui représente des fonctions génératrices du produit de certains polynômes et les fonctions symétriques à deux variables.

$p_1 - p_2$	$p_1 \times p_2$	Coefficient de z^n	Fonctions génératrices
x	1	$h_n(a_1, a_2) F_n(x)$	$\frac{1+e_2^{(2)}z^2}{\prod_{i=1}^{2}\left(1-xa_iz-a_i^2z^2\right)}$
$2x$	1	$h_{n-1}(a_1, a_2) P_n(x)$	$\frac{z+e_2^{(2)}z^3}{\prod_{i=1}^{2}\left(1-2xa_iz-a_i^2z^2\right)}$
x	1	$h_n(a_1, a_2) L_n(x)$	$\frac{2-xe_1^{(2)}z+\left(x^2+2\right)e_2^{(2)}z^2}{\prod_{i=1}^{2}\left(1-xa_iz-a_i^2z^2\right)}.$
x	$-\frac{1}{4}$	$h_n(a_1, a_2) U_n(x)$	$\frac{1+e_2^{(2)}z^2}{\prod_{i=1}^{2}\left(1-2xa_iz-a_i^2z^2\right)}$
x	$-\frac{1}{4}$	$h_n(a_1, a_2) T_n(x)$	$\frac{1-xe_1^{(2)}z-\left(2x^2+1\right)e_2^{(2)}z^2}{\prod_{i=1}^{2}\left(1-2xa_iz+a_i^2z^2\right)}$

Table 4.4. Fonctions génératrices du produit de certains polynômes et les fonctions symétriques à deux variables.

4.5 Applications

Dans cette section, nous déterminons des nouvelles fonctions génératrices des produits des nombres de Tetranacci avec les nombres de k-Pell, k-Jacobsthal, k-Mersenne ainsi que des polynômes de Pell et Jacobsthal.

4.5.1 Fonctions génératrices du produit des nombres de Tetranacci et certains nombres

Dans les théorèmes précédents 4.7-4.11, prenons $e_1^{(4)} = e_3^{(4)} = 1, e_2^{(4)} = e_4^{(4)} = -1$, on trouve les théorèmes suivants :

Théorème 4.21 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de Tetra-*

nacci et k-Pell est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(4)} P_{k,n} z^n = \frac{z - kz^3 - 2kz^4 - k(4+k)z^5}{D_1(z)},$$

avec $D_1(z) = 1 - 2z - (3k+4)z^2 - 8(k+1)z^3 - (3k^2+20k+16)z^4 - 4k(k+2)z^5 + k^2(k+4)z^6 - 2k^3z^7 + k^4z^8$.

Théorème 4.22 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de Tetranacci et k-Jacobsthal est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(4)} J_{k,n} z^n = \frac{z - 2z^3 - 2kz^4 - 2(k^2+2)z^5}{D_2(z)},$$

avec $D_2(z) = 1 - kz - (k^2+6)z^2 - (k^3+8k)z^3 - (k^4+10k^2+12)z^4 - 2k(k^2+4)z^5 + 4(k^2+2)z^6 - 8kz^7 + 16z^8$.

Théorème 4.23 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de Tetranacci et k-Mersenne est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n^{(4)} M_{k,n} z^n = \frac{z + 2z^3 + 6kz^4 + (18k^2-4)z^5}{D_3(z)},$$

avec $D_3(z) = 1 - 3kz - (9k^2-6)z^2 - (9k^3+24k)z^3 - (81k^4-72k^2)z^4 - (27k^3-12k)z^5 + (36k^2-8)z^6 + 24kz^7 + 16z^8$.

– Le cas particulier $k = 1$ dans les théorèmes 4.20, 4.21 et 4.22, donnant des nouvelles fonctions génératrices des produits des nombres de Tetranacci et certains nombres classiques

Coefficient de z^n	Fonction génératrice
$T_n^{(4)} P_n$	$\frac{z-z^3-2z^4-5z^5}{1-2z-7z^2-16z^3-39z^4-12z^5+5z^6-2z^7+z^8}$
$T_n^{(4)} J_n$	$\frac{z-2z^3-2z^4-6z^5}{1-z-7z^2-9z^3-23z^4-10z^5+12z^6-8z^7+16z^8}$
$T_n^{(4)} M_n$	$\frac{z+2z^3+6z^4+14z^5}{1-3z-3z^2-33z^3-9z^4+15z^5+28z^6+24z^7+16z^8}$

Table 4.5. Fonctions génératrices des produits des nombres de Tetranacci et certains nombres classiques.

4.5.2 Fonctions génératrices du produit des nombres de Tetranacci avec certains polynômes

Par les théorèmes 4.15, 4.16, on déduit que pour $e_1^{(4)} = e_3^{(4)} = 1, e_2^{(4)} = e_4^{(4)} = -1$, les théorèmes suivants :

Théorème 4.24 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de Tetranacci et les polynômes de Pell est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(4)} P_n(x) z^n = \frac{z - z^3 + 2xz^4 - (4x^2+1) z^5}{D_4(z)},$$

avec $D_4(z) = 1 - 2xz - (4x^2+3) z^2 - 8x(x^2+1) z^3 - (16x^4 + 20x^2 + 3) z^4 - 4x(2x^2+1) z^5 + (4x^2+1) z^6 - 2xz^7 + z^8$.

Théorème 4.25 *Pour $n \in \mathbb{N}$, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de Tetranacci et les polynômes de Jacobsthal est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(4)} J_n(x) z^n = \frac{z - 2xz^3 - 2xz^4 - 2x(2x+1) z^5}{D_5(z)},$$

avec $D_5(z) = 1 - z - (6x+1) z^2 - (8x+1) z^3 - (20x^2 + 10x + 1) z^4 - 2x(4x+1) z^5 + 4x^2(2x+1) z^6 - 8x^3 z^7 + 16x^4 z^8$.

Conclusion générale

Ce travail est une étude d'un outil mathématique intervenant dans la théorie des fonctions symétriques et ses applications dans le cadre des fonctions génératrices ordinaires. Ce qui consiste d'abord, à introduire et étudier les notions fondamentales de cette théorie, et d'obtenir ainsi des résultats généraux et un bagage mathématique utile dans différents domaines.

Comme application, nous avons déterminé les fonctions génératrices ordinaires des produits de certains nombres et polynômes orthogonaux. Les théorèmes proposés sont basés sur les fonctions symétriques afin de déduire des nouvelles fonctions génératrices, cette technique réussit toujours, mais elle conduit souvent à des calculs assez longs.

Les travaux futurs seront autour de l'extension des éléments de l'alphabet et de généraliser les résultats principaux, par exemple :

- En utilisant le théorème 4.1 et ses corollaires, nous pourrons obtenir de nouvelles fonctions génératrices ordinaires des produits des nombres Gaussiens de Tetranacci avec certains nombres et polynômes orthogonaux.
- En prenant un alphabet de cardinal 5, nous pourrons obtenir de nombreuses fonctions génératrices ordinaires des produits des nombres de Pentanacci avec certains nombres et polynômes orthogonaux.
- Les fonctions génératrices ordinaires des suites définies par des relations de récurrences non homogènes.
- Les fonctions génératrices ordinaires des polynômes d-orthogonaux.
- Les fonctions génératrices exponentielles de certains nombres et polynômes.

Bibliographie

[1] A. Abderrezzek, Généralisation de la Transformation d'Euler d'une Série Formelle, Adv, Math. 103, 180-195, 1994.

[2] A. Abderrezzak, Généralisation d'identité de Carlitz. Howard et Lehmer. Aequ. Math. 49, 36-46, 1995.

[3] A. Abderrezzek, M. Kerada, A. Boussayoud, Generalization of Some Hadamard product, Commun. Appl. Anal. 20, 301-306, 2016.

[4] R. André Jeannin, A note on a General Class of Polynomials, II, Fibonacci. Q. 32, 445-456, 1994.

[5] M. Asci and E. Gurel, On Bivariate Complex Fibonacci and Lucas Polynomials, Conference On Mathematical Sciences ICM. 11-14, 2012.

[6] M. Asci, E. Gurel, Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials, Notes Number Theory Discrete Math. 19, 25-36, 2013.

[7] S. Boughaba, A. Boussayoud, On Some Identities and Generating Function of both k-Jacobsthal Numbers and Symmetric Functions in Several Variables, Konualp J. Math. 7(2), 235-242, 2019.

[8] S. Boughaba, A. Boussayoud and Kh. Boublouta, Generating Functions of Modified Pell Numbers and Bivariate Complex Fibonacci Polynomials. Turkish, J. Anal Numbers. 7. 113-116. 2019.

[9] S. Boughaba, A. Boussayoud, M. Kerada, Construction of Summetric Functions of Generalized Fibonacci Numbers. Tamap J. Mathematics and Statistics no. 3, pp. 1-7, 2019.

[10] S. Boughaba, A. Boussayoud, N.Saba, K. V. Venkata Kanuri, A New Family of Generating Functions of Binary Products of Bivariate Complex Fibonachi Polynomials And Gaussian Numbers, Tbilisi Mathematical Journal. 14(2), 125-137, 2021.

[11] S. Boughaba, H. Merzouk, A. Boussayoud, N. Saba, Generating Functions of the Products of Gaussian Numbers with Chebychev Polynomials of First and Second kinds, Transaction Issue Mathematics. 41(1),1-16, 2021.

[12] A. Boussayoud, M. Kerada, A. Abderrezzek, A generalisation of some orthogonal polynomials, Springer Proc. Math. Stat. 41, 229-235, 2013.

[13] A. Boussayoud, M. Kerada, Symmetric and generating functions, Int. Electron. J. Pure Appl. Math. 7, 195-203, 2014.

[14] A. Boussayoud, A. Abderrezzek, M. kerada, Some Applications of Symmetric Functions. Integers., no. 15, pp. 1-7, 2015.

[15] A. Boussayoud, R. Sahali, The Application of The Operator in Series, J. Adv. Res. Appl. Math. 7, 68-75, 2015.

[16] A. Boussayoud, M. kerada, M. Boulyer, A Simple and Accurate Method for Determination of Some Generalized Sequence of Numbers, Int. J. Pure Appl Math. 108, 503-511, 2016.

[17] A. Boussayoud, A. Abderrezzek, On Some Identities and Generating Function for Hadamard Product, Electron. J. Math. Analysis Appl 5(2), 89-97, 2017.

[18] A. Boussayoud, M. Kerada, N. Harrouche, On the k-Lucas Numbers and Lucas Polynomials, Turkish Journal of Analysis and number. 5(3), 121-125, 2017.

[19] A. Boussayoud, L'action de l'opérateur $\delta_{e_1e_2}^{k}$sur la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(A)e_1^n z^n$. (Doctoral dissertation), Mohamed Seddik Ben Yahia University, Jijel, Algeria, 2017.

[20] A. Boussayoud, M. Boulyer, M. kerada, On Some Identities and Symmetric Functions for Lucas and Pell Numbers, Electron. J. Math. Analysis and Numbers. 6(1), 93-97, 2018.

[21] A. Boussayoud, M. Chelgham, S. Boughaba, On Some Identities and Generating Functions for Mersenne numbers and Polynomials,Turkish Journal of Analysis and Number Theorie, 6(3), 93-97, 2018.

[22] A. Boussayoud, A. Abderrezzak, Complete Homogeneous Symmetric Functions and Hadamard Product, Ars Comb. 144, 81-90, 2019.

[23] A. Boussayoud, S. Boughaba, M. Kerada, S. Araci, M. Acikgoz, Symmetric Functions of Binary Products of k-Fibonacci and Orthogonal Polynomials, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat. RACSAM.113 (3), 2575-2586, 2019.

[24] A. Boussayoud, M. Kerada, S. Araci, M. Acikgoz, Symmetric functions of the k-Fibonacci and k-Lucas Asian-European Journal of Math. 2150031,1- 12, 2021

[25] A. Boussayoud, B. Aloui, Generating Function of the Product of the k-Fibonacci and k-Pell numbers and Chebychev Polynomials of the Third and Fourth Kind, Mathematics in Engineering Science and Aerospace, 12 (1), 245-257, 2021.

[26] A. Benoit, Algorithmique Semi-Numérique Rapide des Séries de Tchebychev, Thèse Doctorat, Ecole doctorale de Mathématiques et Informatiques de Bordeaux, 2012.

[27] P. Catarino, On Some Identities and Genarating Functions for k-Pell Numbers, Int. J. Math. Anal. 7, 1877-1884, 2013.

[28] P. Catarino, On some identities for k-Fibonacci Sequence, Int. J. Contemp. Math. Sciences. 9(1), 37-42, 2014.

[29] P. Catarino, H. Campos, Incomplete k-Pell, k-Pell-Lucas and Modifed k-Pell Numbers, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic, 46(3), 361-372, 2017.

[30] M. Chelgham, A. Boussayoud, Constuction of Symmetric Functions of Generalized Tribonacci Numbers, Journal of Science and Arts. 50, 65-74, 2020.

[31] M. Chelgham, A. Boussayoud, On the k-Mersenne Lucas Numbers. Notes Numbers Theory Discret Math. 27(1), 7-17, 2021.

[32] T.S.Chihara, an Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York, 1978.

[33] Ch. Cook, M. R. Bacon, Some Identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers Satisfying higher Order Recurrence Relations, Ann. Math. Inform. 41, 27-39, 2013.

[34] A. Dasdemir, On the Pell, Pell-Lucas and Modified Pell Numbers by Matrix Method, Appl. Math. Sci5. 3173-3181, 2011.

[35] E. Erkuş̧H. Ciftci, Fibonacci and Lucas Differential Equations, Appl. Appl. Math. 13(2), 756-763, 2018.

[36] M. R. Eslahchi , M. Dehghan, S. Amani, The third and fourth kinds of Chebyshev polynomials and best uniform approximation, Math. Comput. Modelling. 55, 1746-1762, 2012.

[37] S. Falcon, A. Plaza, The k- Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle, Chaos, Sulutions& Fractals. 33, 38-49, 2008.

[38] S. Falcon, On the k-Lucas numbres of arithmetic indexes, Appl. Math. 3, 1202-1206, 2012.

[39] M. Feinberg, Fibonacci-Tribonacci, Fibonacci Quarterly1, 71-74, 1963.

[40] D. Foata, G-N.Han, Principes de Combinatoire Classique Cours et Exercices Corrigés, Univercité Louis Pasteur, Strasbourg Département de Mathématique, pp. 1-361, 2008.

[41] S. Halici, S. Oz, On some Gaussian Pell and Pell-Lucas Numbers, Ordu Univ. J. Sci. Tech.6, 8-18, 2016.

[42] S. Halici, S. Oz, On Gaussian Pell Polynomials and their Some Properties, Palest. J. Math, 7(1), 251-256, 2018.

[43] V. E. Hoggatt, Jr., Fibonacci and Lucas numbers, the Fibonacci association, Santa Clara, 1969.

[44] V. E. Hoggatt, M. Bicknell, Generalized Fibonacci Polynomials, The Fibonacci Quarterly, 11, 457-465, 1973.

[45] D. Jhala, K. Sisodiya, G.P.S. Rathor, On Some Identities for k-Jacobsthal, Int. Journal of Math. Analysis. 7, 551-556, 2013.

[46] J. H. Jordan, Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers, Fibonacci Q., 3, 315-318, 1965.

[47] A. Lascoux, Addition of ± 1 : Application Arithmetic. Sémi Lothar Comb.25, 1-9, 2004.

[48] J. M. Mahon, A. F. Horadam, Matrix and Other Summation Techniques for Pell polynomials, Fibonacci Q.24(4),290-309, 1986.

[49] A. Mansour, A Formula for the Generating Functions of Powers of Horadam's Sequence, Australas. J. Comb. 30, 207-212, 2004.

[50] A. Mansour, Ascent Sequences and Fibonacci Numbers, Filomat. 29, 703-712, 2015.

[51] D. Marques, The Order of Appearance of the Product of Consecutive Lucas Numbers, the Fibonacci Quarterly. 51(1), 38-43, 2013.

[52] J. C. Mason and D. C. Handscomb, Chebyshev Polynomails. Chapman and Hall, CRC, Boca Raton, FL, 2003.

[53] M. Merca, A Generalisation of the Symmetry between Complete and Elementary Symmetric Functions, Indian J. Pure Apll. Math. 45, 75-89, 2014.

[54] H. Merzouk,A.Boussayoud, M. Chelgham, Symmetric Functions of Generalized Polynomials of Second Order Turkish Journal of Analysis and Number Theory,7(5), 135-139, 2019.

[55] H. Merzouk, A. Boussayoud, M. Chelgham, Symmetric Function of Binary Products of Tribonacci Lucas Numbers and Orthogonal Polynomials. J. Sci. Arts, 2(5), 461-478, 2021.

[56] H. Merzouk, A. Boussayoud, A. Abderrezzak, Ordinary Generating Functions of Binary Products of Third Order Recurrence Relations and 2-orthogonal Polynomials, Math, Slovaca, 72(1), 2022.

[57] A. Necer, Séries Formelles et Produit de Hadamard, J. Théo. Nombres Bordx. 9, 319-335, 1997.

[58] Y. K. Panwar, B.Singh, V.K.Gupta, Generalized Fibonacci Sequences and its Properties, Palestine Journal of Mathematics,3(1), 141-147, 2014.

[59] S. H. J. Petroudi, M. Pirouz, A. O. Ozturk, On Some Properties of Particular Tetranacci Sequences, J. Int. Math. Virtual. Inst, Vol. 10(2), 361-376, 2020.

[60] T. J. Rivlin, Chebyshev Polynomials From Approximation Theory to Algebra and Number Theory. Second ed, Pure and Applied Mathematics, New York, 1990.

[61] N. Saba, A. Boussayoud, A. Abderrezzek, Complete Homogeneous Symmetric Functions of Third and Second-Order Linear Recurrence Sequences, Mat-Frac. Org, 9(1), p p. 226-242, 2020.

[62] N. Saba, A. Boussayoud, On the Bivariate Mersenne Lucas Polynomials and Their Properties. Chaos. Solotons and Fractals. 146(110899), 1-6, 2021.

[63] N. Saba, A. Boussayoud, Generating Functions of Binary Products of (p, q)-Modified Pell Numbers with Gaussian Numbers and Polynomials, Nonlinear Studies, 28(4), 1311-1327, 2021.

[64] N. Saba, A. Boussayoud, A. Abderrezzek, Symmetric and Generating Functions of Generalized (p, q) Numbers. Kuwait Journal of Science. 48(4), 1-15, 2021.

[65] N. Saba, S. Boughaba, A. Boussayoud, Symmetric Functions of Binary Products of Bivariate Complex Lucas Polynomials and Some Special Numbers and Orthogonal Polynomials. Anlele Stuntifice Ale Universtatti Al. I . Cuza Dintaxi Mathematica. 77(2), 187-211, 2021.

[66] N. Saba, A. Boussayoud, M. Ferkioui, S. Boughaba, Symmetric Functions of Binary Products of Gaussian Jacobsthal Lucas Polynomials and Chebychev Polynomials. Palestine Journal of Mathematic, 10(2), 452-464, 2021.

[67] N. Saba, A. Boussayoud, , K. V. Venkata Kanuri, Mersenne Lucas Numbers and Complete Homogeneous Symmetric Functions. Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 24(1), 127-139, 2022.

[68] N. Saba, A. Boussayoud, New Theorem on Symmetric Functions and Their Applications on Some (p, q) Numbers, J. Appl. Math. Inform, 40(12), 243-257, 2022.

[69] M. Shattuck, Combinatorial Proofs of Determinant Formulas for The Fibonacci and Lucas Polynomials, the Fibonacci Quarterly. 51(1), 63-71, 2013.

[70] Y. Soykan,I. Okumus, F. Tasdemir, on Generalized Tribonacci Sedenions,1901. 05312v1, 2019.

[71] Y. Soykan, Tetranacci an Tetranacci-Lucas Quaternions,.arXiv : 1902. 05868v1, Math. RA, 1-18, 2019.

[72] Y. Soykan, A Study of Generalized Fourth-order Pell Sequences No JSRR. 52074, 25(1), 1-18, 2019.

[73] Y. Soykan, Gaussian Generalized Tetranacci Numbers, arxiv : 1902.03936v1, Math. NT, 1-22, 2019.

[74] Y. Soykan, On Generalized Tetranacci Numbers : Closed Form Formulas of the Sum $\sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k^2$ of the Squares of Terms, doi :10.20944. Preprints 202005. 0453. 1, 1-16, 2020.

[75] D. Tasci, H. Acar, Gaussian Tetranacci Numbers, Communication in Mathematic and Applications, 8(3), 379-386, 2017.

[76] D. Tasci, Gaussian Padovan and Gaussian Pell-Padovan Sequences, Fac, Sci. Ank Ser. Math . Stat, 67, 82-88, 2018.

[77] N. N. Vorobiov, Numeros de Fibonacci, Editora Mir, URSS. 1974.

[78] M. E. Waddil, The Tetranacci Sequence and Generalisations, The Fibonacci Quarterly 30(1),1-9, 1992.

[79] F. Yakoubi, A. Boussayoud, K. Kanuri, S. Boughaba, A New Class of Ordinary Generating Function of Binary Products of k- Lucas Balancing Numbers with Chebychev Polynomials, Math. Eng. Sci. Aerosp. 12(1), 135-150, 2021.

[80] H. Zerroug, A. Boussayoud, A. Abderrezzek, M. Kerada, Complete and Elementary Symmetric Functions in Several Variables and Orthogonal Polynomials. Nonlinear Studies, 29(1), 329-346, 2022.

[81] H. Zerroug, A. Boussayoud, B. Aloui, M. Kerada, Gaussian Padovan, Gaussian Pell-Padovan Numbers and New Generating Functions with Some Numbers and Polynomials. Journal of Information and Optimization Sciences, 43, 1-16, 2022.