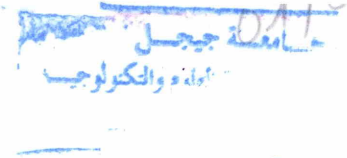


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Electronique



Mémoire de Fin d'Etudes pour l'Obtention du Diplôme
de *Master II en Electronique*

Option : *Electronique et Analyse des Systèmes*

Thème :

**Stabilisation des Systèmes Chaotiques d'ordre
Fractionnaire**

Présenté par :

- *Melle. Saida BOUTEBIBA*
- *Melle. Samira CHEBATA*

Encadré par :

Dr. Ammar SOUKKOU

Promotion : Juin 2015

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

وَمَا أُوتِیْتُمْ مِنَ الْعِلْمِ إِلَّا قَلِیْلًا (85)

سورة الإسراء

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا (114)

سورة طه

Remerciements

Avant tout choses remercions notre DIEU et DIEU de toutes les espèces d'avoir créé cette forme de vie, le tout puissant, le miséricordieux, de nous avoir donné la santé et le courage et tout dont nous nécessitons pour L'accomplissement de ce modeste travail.

*Nous tenaient à formuler nos gratitudees et nos profondes reconnaissances à l'égard de notre encadreur **Dr. Ammar SOUKKOU** Qui a supervisé ce travail de recherche, Pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa disponibilité, son soutien, son efficacité et sa patience et surtout ses encouragements le long de la réalisation de ce travail.*

Nous tenons aussi à remercier tous les enseignants du département d'électronique pour leurs offerts considérables, qui nous ont donné les bases de la science et sans oublier d'exprimer nos remerciements au Chef du Département d'Electronique.

Nous remercions également aux membres de jury de nous avoir fait l'honneur de bien vouloir participer au jury de ce mémoire et pour toute attention qu'ils ont prêté au jugement de ce mémoire.

Enfin, nous saurons terminer ce remerciement, sans mentionner toute personne ayant participée de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

*Je dédie ce travail en signe de
Respect et de reconnaissance*

A

ma mère et mon père

Pour leurs sacrifices durant

Toute leur vie pour me guider au succès

Mon fiancé

Mon binôme

Mes frères et mes sœurs

Toute ma famille

Toutes mes chères amies

Tous ceux que j'aime et ceux qui m'aiment

Samira

Dédicaces

Je dédie ce travail en signe

De Respect et de reconnaissance

Aux être les plus chers.

A

Ma mère et la mémoire de mon père

Pour leurs sacrifie ces durant

Toute leur vie pour me guider au sucées

Mes chers sœurs et frères

Mon binôme

Toute ma famille

Toutes mes chères amies

A tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à

Maintenant,

Tous ceux que j'aime et ceux qui m'aiment

Saida

Sommaire

Introduction Générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I

Systemes d'ordre Fractionnaire

I.1. Introduction.....	4
I.2. Calcul d'ordre fractionnaire.....	5
I.2.1. Historique.....	5
I.2.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire.....	5
I.2.3. Définitions	6
I.2.3.1. Définition de Grunwald-Leitnikov (GL)	6
I.2.3.2. Définition de Riemann-Liouville (RL)	6
I.2.3.3. Définition de caputo (C).....	7
I.2.4. Quelques propriétés de la dérivation non entière	7
I.2.4.1. Linéarité.....	7
I.2.4.2. Opérateur identité	7
I.2.4.3. Additivité et commutativité.....	8
I.2.4.4. Associativité	8
I.3. Transformée de Laplace des systèmes d'ordre fractionnaire.....	8
I.3.1. Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire	8
I.3.2. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire.....	9
I.3.2.1. dérivée de Riemann-Liouville	9
I.3.2.3. Dérivée Grünwald-Letnikov.....	9
I.3.2.3. Dérivée de Caputo	9

I.4. Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire	10
I.4.1. Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire.....	11
I.5. Implémentation 'discrétisation' des systèmes d'ordre fractionnaire	11
I.5.1. Méthode d'approximation d'Oustaloup.....	14
I.5.2. Implémentations numériques des systèmes d'ordre fractionnaire.....	15
I.5.2.1. Transformation Bilinéaire	15
I.5.2.2. Transformation Backward.....	16
I.5.2.3. Transformation Al-Alaoui.....	16
I.6. Calcul d'ordre fractionnaire dans la commande des systèmes	16
I.6.1. Contrôleur PID d'ordre entier et d'ordre fractionnaire	16
I.6.1.1. Structure du correcteur PID.....	16
I.6.1.2. Contrôleur PID d'ordre non-entier.....	17
I.7. Conclusion.....	21

Chapitre II

Systèmes Chaotiques d'ordre Fractionnaire

II.1 Introduction	22
II.2 Généralistes sur les systèmes chaotiques.....	23
II.2.1 Systèmes dynamiques.....	23
II.2.2 Description mathématique.....	23
II.2.3 Définition du chaos.....	25
II.2.3.1 Sensibilité aux conditions initiales.....	26
II.2.3.2 Attracteur étrange.....	27
II.2.4 Exemples des systèmes chaotiques	27
II.2.4.1 Exemples des systèmes chaotiques à temps continu.....	27
II.2.4.2 Exemples des systèmes chaotiques à temps discret	30

II.2.5 Notion de bifurcation.....	31
II.3 Systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.....	32
II.3.1 Simulation numérique des systèmes chaotiques	33
II.3.1.1 Simulation numérique par l'algorithme de GL.....	34
Le critère d'arrêt de l'algorithme est fixé par un nombre maximal d'itérations.	35
II.3.1.2 Simulation numérique par l'algorithme d'ABM.....	35
II.4. Simulations de quelques systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.....	37
II.4.1 Circuit de Chua.....	37
II.4.1.1 Oscillateur de Chua d'ordre entier	37
II.4.1.2 Oscillateur de Chua d'ordre fractionnaire	40
II.4.2 système de Lorenz d'ordre fractionnaire.....	42
II.4.2.2 Résultats de simulation	42
II.4.3 Système de Rössler d'ordre fractionnaire	44
II.4.4 Système de Chen d'ordre fractionnaire.....	45
II.5 Analyse de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire.....	47
II.5.1 Analyse de la stabilité des SLIT d'ordre fractionnaire	47
II.5.2 Analyse de la stabilité des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire.....	49
II.6 Conclusion.....	49

Chapitre III

Stabilisation des Systèmes Chaotiques d'ordre Fractionnaire

III.1 Introduction.....	50
III.2 Problème de contrôle des systèmes chaotiques	50
III.2.1 Etude préliminaire.....	50
III.2.2 Problèmes de stabilisation des systèmes chaotiques.....	52
III.2.3 Méthodes de contrôle des systèmes chaotique.....	53

III.2.3.1 Principe de commande par retour d'état ordinaire	54
III.3 Stabilisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.....	55
III.4 Applications.....	57
III.4.1 Contrôle du système de Chua d'ordre fractionnaire	57
III.4.1.1 Analyse de la stabilité.....	61
III.4.2 Contrôle du système de Lorenz d'ordre fractionnaire	63
III.4.2.1 Analyse de la stabilité.....	66
III.4.3 Contrôle du système de Chen d'ordre fractionnaire	67
III.4.3.1 Analyse de la stabilité.....	70
III.4.4 Système hyperchaotique de Lorenz d'ordre fractionnaire	72
III.4.4.1 Contrôle du Système hyperchaotique de Lorenz d'ordre fractionnaire....	74
III.4.4.1.1 Analyse de la stabilité.....	77
III.5 Conclusion	79
Conclusion Générale.....	80
Références Bibliographiques.....	82

Liste des Figures

<i>Figure I.1: Outils d'analyse des opérateurs d'ordre fractionnaire.....</i>	11
<i>Figure I.2 : Principe de l'intégrale par pôle et zéros successives.....</i>	14
<i>Figure I.3 : Structure de la commande en boucle fermée, (a) Emplacement du correcteur Dans la chaîne de commande. (b) Schéma fonctionnel d'un PID type parallèle.....</i>	17
<i>Figure I.4 : PID fractionnaire : Du point au plan.....</i>	18
<i>Figure I.5 : Schéma fonctionnel d'un PID d'ordre fractionnaire.....</i>	18
<i>Figure I.6 : Réponse fréquentielle du $C(s) = 1 + s^{0.35} + \frac{1}{s^{0.7}}$ avec l'approximation.....</i>	20
<i>Figure II.1: Etat chaotique $x(t)$ du système de Chen.....</i>	26
<i>Figure II.2 : Illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales sur l'état x...</i>	27
<i>Figure II.3 : Attracteur étrange de Rössler.....</i>	27
<i>Figure II.4 : Evolution des variables d'états du système de Lorenz en fonction du temps. (a) Evolution de la variable d'état x. (b) Evolution de la variable d'état y. (c) Evolution de la variable d'état z.....</i>	29
<i>Figure II.5 : Attracteur étrange de Lorenz</i>	29
<i>Figure II.6 : Exposants de Lyapunov du système chaotique continu de Lorenz</i>	30
<i>Figure II.7 : Trajectoire de la fonction logistique.....</i>	31
<i>Figure II.8 : Application logistique pour $r = 4$</i>	31
<i>Figure II.9 : Diagramme de bifurcation de la fonction logistique.....</i>	32
<i>Figure II.10 : Circuit de Chua et les caractéristiques de la diode de Chua.....</i>	38
<i>Figure II.11 : Evolution des variables d'état du système de Chua en 2D et en 3D.....</i>	39
<i>Figure II.12: L'évolution du système du Chua d'ordre fractionnaire. (a) plan de phase, (b).Evolution des variables d'états.....</i>	41
<i>Figure II.13 : l'évolution de l'espace de phase du système de Lorenz.....</i>	43
<i>Figure II.14: Evolution des variables d'états (a).et l'espace de phase (b). du système de Rossler d'ordre fractionnaire.....</i>	45
<i>Figure II.15: L'évolution des variables d'états du système de Chen d'ordre fractionnaire.....</i>	46

Figure III.1: Boucle de contrôle par retour d'état.....55

Figure III.2: Contrôle du circuit de chua.....58

Figure III.3: Evolution de Système de Chua d'ordre fractionnaire contrôlé. (a) Plan de phase, (b) Evolution des variables d'état et de la commande.....60

Figure III.4: Système de Chua sous Contrôle par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire. Plan de phase. (b) Evolution des variables d'état et de commande.....61

Figure III.5: Système de Lorenz sous contrôle par retour d'état ordinaire. (a) plan de phase, (b) l'évolution des variables d'état.....65

Figure III.6: Système de Lorenz sous Contrôle par retour de dérivée d'état d'ordre Fractionnaire. (a) Plan de phase. (b) Evolution des variables d'état.....66

Figure III.7: Système de Chen sous Contrôle par retour d'état ordinaire. (a) Plan de phase. (b) Evolution des variables d'état.....69

Figure III.8: Système de Chen sous Contrôle par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire. (a) plan de phase, (b) l'évolution des variables d'état.....70

Figure III.9: Système hyper-chaotique de Lorenz d'ordre fractionnaire. (a) plan de phase, (b) Evolution des variables d'états.....73

Figure III.10: Système hyperchaotique de Lorenz sous contrôle par retour d'état ordinaire. (a) plan de phase. (b) l'évolution des variables d'état et de commande.....75

Figure III.11: Système hyperchaotique de Lorenz sous Contrôle par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire. (a) Plan de phase. (b) Evolution des variables d'état et de commande.....76

Introduction Générale

A – Etude préliminaire

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini aux 19 siècles par Riemann et Liouville. Leur but devait prolonger la dérivation ou intégration d'ordre fractionnaire en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers. Beaucoup de systèmes physiques ont affiché un comportement dynamique d'ordre fractionnaire, tels que les systèmes viscoélastique, la polarisation électrode électrolyte, polarisation d'interfaces, le comportement cardiaque [1].

Dans un temps proche, les scientifiques admettaient que les systèmes simples généraient des comportements simples et les systèmes complexes généraient des comportements complexes. De plus, ils admettaient qu'un comportement complexe est dû à une accumulation des comportements simples. Ces critères faisaient l'unanimité sur le comportement de la nature. Aujourd'hui, plusieurs chercheurs utilisant les mêmes critères depuis la découverte du chaos.

Le terme "chaos" définit un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais et qui se caractérise par la sensibilité aux conditions initiales, et d'être imprévisible à long terme. Dès lors, plusieurs chercheurs dans différentes disciplines commencent à s'intéresser à ce type comportement. La découverte du comportement chaotique dans la nature, a permis de mettre en place des nouveaux outils et de nouvelles méthodes pour modéliser, analyser et contrôler se comportement et d'imposer des comportements désirés.

Dans la tentative de contrôler le chaos, les chercheurs essayent d'apporter de nouvelles idées et techniques qui utilisent la nature elle-même du chaos afin de le contrôler [2].

B – Formulation du problème

Notre travail a été motivé par les problèmes rencontrés dans l'étude des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire, particulièrement les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, à savoir :

- La modélisation et la simulation du comportement des systèmes d'ordre fractionnaire, où tout simplement comment évaluer (discrétiser) l'opérateur de dérivation et/ou d'intégration $D_t^{\pm\alpha} x(t)$ (resp. $\Delta_k^{\pm\alpha} x(k)$) $\alpha \in \mathbb{R}$?
- L'analyse de la stabilité par application des techniques offertes dans la théorie de stabilité des systèmes d'ordre entier.
- Le contrôle de ces systèmes par application ou par développement des méthodes de contrôle basées sur les approches conventionnelles, intelligentes ou avancées.

C – Objectifs du travail

Les travaux présentés dans ce mémoire ont pour objectif d'identifier et d'adapter des outils capables de réaliser une meilleure évaluation des performances des systèmes dynamiques d'ordre non entier, particulièrement les systèmes Chaotiques d'ordre fractionnaire. Il s'agit essentiellement de :

- Trouver un moyen d'approximer l'opérateur $D_t^{\alpha} x(t)$ (resp. $\Delta_k^{\alpha} x(k)$) $\alpha \in \mathbb{R}$, dans le domaine temporel, est de l'adapter aux systèmes non linéaires chaotiques (Problème de discrétisation et de simulation des systèmes d'ordre fractionnaire).
- Etablir des outils mathématiques simples que possible pour l'analyse de la stabilité de ces systèmes en se basant sur les notions de base de la stabilité des systèmes dynamiques.
- Elaborer (de concevoir) des lois de commande aussi simples que possibles permettant de contrôler le chaos dans sa version fractionnaire et de satisfaire les conditions de stabilité prédéterminés.

D – Organisation du travail

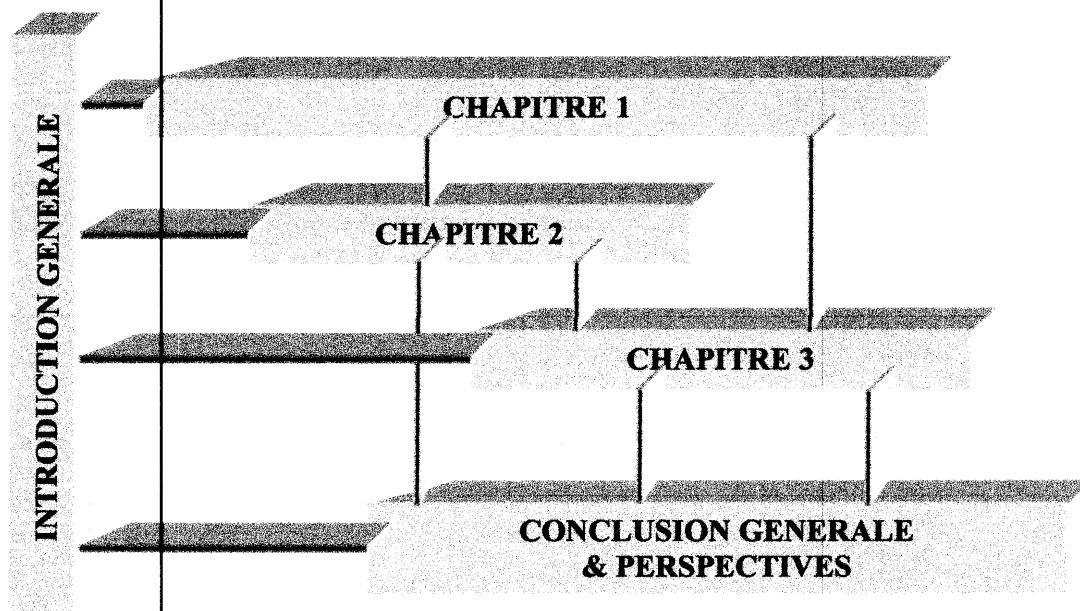
Ce mémoire, décomposé en trois chapitres, est organisé de la façon suivante :

- Le premier chapitre est consacré à l'étude des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire : Systèmes qui mettent en œuvre les dérivées et les intégrales d'ordres non entiers. Quelques propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire et les différentes représentations des systèmes d'ordre fractionnaire. Leurs fonctions de transfert et leurs méthodes d'approximation seront abordées, aussi, dans ce chapitre. Une partie importante est réservée à l'introduction de ces notions dans le

domaine de la commande des systèmes par la présentation des contrôleur PID d'ordre fractionnaire.

- Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous introduirons quelques notions relatives aux systèmes chaotiques. Le but est de présenter les caractéristiques du chaos, ainsi que l'étude du comportement de quelques systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, en particulier le système chaotique de Chua, système de Lorenz, système de Rossler et système de Chen. Des outils de simulation de comportement des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire dans le domaine temporel sont aussi abordés. Ensuite, un bref aperçu sur l'étude de la stabilité est donné à la fin du chapitre.
- Dans le troisième chapitre, on s'intéresse au contrôle et à l'analyse de la stabilité des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Nous présenterons la commande par retour d'état simple est la méthode par retour d'état d'ordre fractionnaire. Les résultats de simulations ont pour objectifs de démontrer l'efficacité de l'approche de contrôle utilisée.
- Nous terminerons ce présent travail par une conclusion générale ainsi que quelques perspectives et des améliorations qui peuvent être présent en compte pour la continuité de ce présent travail.

Les liens entre les différents chapitres constituant ce mémoire seront représentés par la figure arborescente suivante.



Systèmes d'ordre Fractionnaire

1.1. <i>Introduction</i>	4
1.2. <i>Calcul d'ordre fractionnaire</i>	5
1.3. <i>Transformée de Laplace et systèmes d'ordre fractionnaire</i>	8
1.4. <i>Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire</i>	10
1.5. <i>Implémentations 'discrétisation' des systèmes d'ordre fractionnaire</i>	11
1.6. <i>Calcul fractionnaire dans la commande des systèmes</i>	16
1.7. <i>Conclusion</i>	21

L'objectif de ce chapitre est de présenter les notions de base des opérateurs d'ordre fractionnaire, définition mathématiques de la dérivée et d'intégrale d'ordre fractionnaire et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire. Ainsi que les différentes méthodes d'approximation de tels systèmes avec quelques exemples.

I.1. Introduction

Le calcul d'ordre fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre arbitraire, pas nécessairement un nombre entier) est un vieux concept qui date de l'époque de Cauchy, Riemann Liouville et Letnikov au 19^{ème} siècle. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Plus tard, plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire [3-4].

Le concept de la modélisation et de la commande d'ordre fractionnaire signifie que les systèmes modélisés et / ou commandés sont décrit par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Le calcul d'ordre fractionnaire devient un champ très actif dans plusieurs domaines comme en recherche comme en applications industriels. Le but principal est d'améliorer les performances offertes par les approches de commande classiques par introduction des opérateurs d'ordre fractionnaires dans les algorithmes de commande [5].

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul d'ordre fractionnaire nécessaires tout en prend en considération les définitions et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire. Ainsi que les différentes méthodes d'approximations de tels systèmes.

I.2. Calcul d'ordre fractionnaire

I.2.1. Historique

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{ème} siècle, l'époque où Newton et Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{d^n t}$ pour désigner la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre au Hopital (apparemment avec l'hypothèse implicite que n appartient à \mathcal{N}), Hôpital a répondu.

Que signifie $\frac{d^n f}{d^n t}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre d'Hôpital, écrit en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation d'ordre fractionnaire, et le fait que Hôpital à demander spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire une fonction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie importante des mathématiques.

Historiquement, le premier qui a vraiment présenté un correcteur d'ordre fractionnaire est Oustaloup [6]. Il a développé le correcteur *Commande Robuste d'Ordre Non Entier (CRONE)* et appliqué ce correcteur dans divers domaines des systèmes de commande. Plus récemment, Podlubny a proposé une généralisation du correcteur PID classique, à savoir le correcteur PID d'ordre fractionnaire ou tout simplement le correcteur $PI^\lambda D^\mu$. Cette dernière forme représente la forme généralisée des contrôleurs PID conventionnels avec une action d'intégration d'ordre fractionnaire $\lambda \in \mathcal{R}$ et une action de différentiation d'ordre fractionnaire $\mu \in \mathcal{R}$ [3]. Plusieurs chercheurs ont été intéressés à l'utilisation des contrôleurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.

L'intérêt de ce type de correcteurs est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il a deux paramètres supplémentaires qui sont une action d'intégration d'ordre fractionnaire λ et une action de différentiation d'ordre fractionnaire μ . Ces paramètres peuvent être employés pour remplir des caractéristiques additionnelles pour l'amélioration des performances des systèmes à commander.

I.2.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire [4-7]

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier $\alpha \in \mathcal{R}$, ${}_{t_0} D_t^{\pm \alpha} f(t)$ où t_0 et t sont des limites de l'opération.

L'opérateur intégral-différentiel continu est défini comme :

$${}_{t_0}D_t^a f(t) = \begin{cases} \frac{d^a f(t)}{dt^a} & : a > 0, \\ f(t) & : a = 0, \\ \int_a^t f(\tau) d\tau^{-a} & : a < 0, \end{cases} \quad (I.1)$$

où a est l'ordre de l'opération.

I.2.3. Définitions

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais équivalentes pour une large gamme des fonctions.

I.2.3.1. Définition de Grunwald-Leitnikov (GL) [8]

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de GL est donnée par :

$${}_{t_0}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/(h^\alpha) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad (I.2)$$

où $[\cdot]$ dénote la partie entière d'un nombre réel, h est la période d'échantillonnage et les coefficients $\binom{\alpha}{k}$ sont donnée par : où $\alpha \in \mathfrak{R}$ est l'ordre de l'opération.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \quad (I.3)$$

La définition de Grunwald-Leitnikov de l'intégration d'ordre fractionnaire est formulée comme suit :

$${}_{t_0}^{GL}I_t^\alpha f(t) = {}_{t_0}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^\alpha \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad (I.4)$$

I.2.3.2. Définition de Riemann-Liouville (RL)

Définition 1 : Soit $\alpha \in \mathfrak{R}$ avec $\alpha > 0$, $t_0 \in \mathfrak{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty[$. L'intégrale d'ordre α de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}_{t_0}^{RL}I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \cdot f(\tau) d(\tau) \quad (I.5)$$

avec $t > t_0$ et $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \quad x > 0. \quad (I.6)$$

Définition 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$, n entier positif, $t_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty[$. L'intégrale d'ordre α de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \cdot f(\tau) d(\tau) \quad (I.7)$$

où le nombre entier est tel que $(n-1) < \alpha < n$

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation comme suit :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \{I^{(n-\alpha)} f(t)\} \quad (I.8)$$

I.2.3.3. Définition de caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (I.9)$$

Avec n est un positif vérifiant l'intégralité $(n-1) < \alpha < n$.

I.2.4. Quelques propriétés de la dérivation non entière

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont [5] [9] :

- Linéarité.
- Identité.
- Additivité et commutativité.
- Associativité.

I.2.4.1. Linéarité

La dérivation non entière est un opérateur linéaire. Ainsi, si f et g sont deux fonctions continues et a et b des nombres réels, on a [10] :

$$D^a(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot D^a(f) + b \cdot D^a(g) \quad (I.10)$$

I.2.4.2. Opérateur identité

Pour $\alpha = 0$, l'opération $D^{(0)}$ est l'opérateur identité :

$${}_0D_t^0 f(t) = f(t) \quad (I.11)$$

I.2.4.3. Additivité et commutativité

Soit α et β deux nombre réels, on a [11]:

$${}_0D_t^\alpha [{}_0D_t^\beta f(t)] = {}_0D_t^\beta [{}_0D_t^\alpha f(t)] = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t) \quad (I.12)$$

I.2.4.4. Associativité

Soit α, β et γ trois nombres réels, on a [10] :

$${}_0D_t^\gamma [{}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t)] = {}_0D_t^{\gamma+\alpha+\beta} f(t) = {}_0D_t^{\alpha+\beta+\gamma} f(t) = {}_0D_t^\alpha [{}_0D_t^{\beta+\gamma} f(t)] \quad (I.13)$$

Deux autres propriétés peuvent être citées [12] :

- Si $f(z)$ est une fonction analytique en z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire ${}_0D_z^\alpha f(z)$ est une fonction analytique en z et a .
- Pour $\alpha = n$, où n est un nombre entier, l'opération ${}_0D_z^\alpha f(z)$ produit le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.

I.3. Transformée de Laplace des systèmes d'ordre fractionnaire

Dans la théorie des systèmes, l'analyse des comportements dynamiques est souvent faite par les moyens des fonctions de transfert. A ce stade, l'introduction de la transformée de Laplace pour des dérivées d'ordre non entier est nécessaire. La transformation de Laplace inverse est également utile pour la représentation temporelle des systèmes pour lesquels seulement la réponse fréquentielle est connue. D'autre part, comme les définitions temporelles des opérateurs différentiels non entiers souffrent d'un formalisme mathématique quelque peu compliqué, mais leur expression dans le domaine de Laplace relève d'une simplicité remarquable, en particulier dans le cas de l'étude des systèmes relaxés à $t = 0$ (avec conditions initiales nulles).

I.3.1. Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire [13]

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha < 0$ définie par l'équation qu'on peut écrire comme une convolution des fonctions

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \text{ et } f(t) \quad (I.14)$$

$${}^{RL}I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t) \quad (I.15)$$

et comme :

$$L\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} F(s) \quad (I.16)$$

De la même manière, la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire défini par Grunwald-Letnikov et Caputo est aussi donnée par l'équation (I.15).

I.3.2. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée d'ordre fractionnaire.

I.3.2.1. dérivée de Riemann-Liouville

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire de RL sera évaluée de la manière suivante [14]:

$$L\left\{\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t)\right\} = s^\alpha L\{f(t)\} - \sum_{K=0}^{n-1} s^K \left[\frac{d^{\alpha-1-K} f(t)}{dt^{\alpha-1-K}}\right]_{t=0} \quad (I.17)$$

Avec n est un entier, tel que $n - 1 < \alpha < n$

Cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue. Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour $t = 0$.

I.3.2.3. Dérivée Grünwald-Letnikov

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire de GL sera évaluée de la manière suivante :

$$L\{ {}^{GL}D_t^\alpha [f(t)] \} = S^\alpha F(S) \quad (I.18)$$

I.3.2.3. Dérivée de Caputo

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo sera évaluée de la manière suivante :

$$L\left\{\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t)\right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{K=0}^{n-1} s^{\alpha-K-1} f^{(K)}(0) \quad (I.19)$$

L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est qu'elle permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter telles que $y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \dots$ etc. De plus, la dérivée de Caputo d'une constante est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à $t = 0$. La seule exception est quand on prend $t = -\infty$ comme point de départ (limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville. Cependant, quand on s'intéresse à des processus transitoires, on ne peut pas accepter de placer le point de départ à $-\infty$; dans ce

cas la définition de Caputo semble être la plus appropriée quand on la compare aux autres [15].

I.4. Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire

En général, un système d'ordre fractionnaire peut être décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme [16-17] :

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (I.20)$$

ou par une fonction de transfert de la forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (I.21)$$

où $D^{\alpha_{n-1}} \equiv {}_0 D_t^{\alpha_{n-1}}$; $a_k (k = 0, \dots, n)$, $b_k (k = 0, \dots, m)$ sont des constantes; et $\alpha_k (k = 0, \dots, n)$, $\beta_k (k = 0, \dots, m)$ sont des nombres arbitraires. Il est à noter qu'il existe deux catégories de fonctions de transfert : « *implicite* » et « *explicite* » [18].

I.4.1. Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire

La description interne d'un système d'ordre entier est représentée par un système d'équation appelé représentation d'état de la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (I.22)$$

où, u et y sont, respectivement, l'entrée et la sortie du système. Pour un système linéaire à temps invariant (SLIT), les équations (I.22) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (I.23)$$

où A est la matrice d'état, B est la matrice de commande et C est la matrice de sortie. Dans l'équation (I.20), qui décrit la dynamique d'un SLIT mono variable d'ordre fractionnaire, deux cas se présentent et conduisent à deux types de systèmes : Les systèmes commensurables ou d'ordres commensurables et les systèmes non commensurables ou d'ordres non commensurables [12].

Dans le cas des systèmes commensurables, très intéressants en pratique, on peut obtenir une représentation d'état analogue à celle des systèmes d'ordre entiers. Les ordres de dérivation a_k et b_k relatifs à l'entrée et à la sortie étant tous deux des multiples d'un ordre non

ou d'intégration d'ordre fractionnaire en temps continue $D^{\pm a}x(t)$ ou $\Delta^{\pm a}x(n)$ en temps discret (voir le chapitre II). Dans l'approche fréquentielle, le problème est de trouver un moyen d'évaluer l'opérateur de Laplace $s^{\pm a}$.

(1). **Analyse temporelle:** Méthodes basées sur la formulation analytique de l'expression du signal de dérivation et d'intégration. Les méthodes de GL et d'Adams-Bashforth-Moulton (ABM) sont les plus utilisées dans le domaine temporel.

(2). **Analyse fréquentielle:** Méthodes basées sur l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire par une forme rationnelle continue. La transformée de Laplace est l'algorithme le plus utilisé. Les étapes principales pour calculer la forme générale sont:

- **Etape 1:** Evaluer la Transformée de Laplace (Eq. (I.19)).
- **Etape 2:** Evaluer $s^{\alpha} = \phi(s) = N(s)/D(s)$ par utilisation des approximations les plus utilisées pour l'évaluation de $s^{\pm\alpha}$ qui sont classées en trois catégories:
 - ✓ Méthodes basées sur des techniques mathématiques des approximations des fonctions rationnelles.
 - ✓ Méthodes basées sur la location recursive explicites des poles et des zeros de l'approximation rationnelle. Plusieurs techniques sont utilisées à savoir:
 - Oustaloup,
 - Charef,
 - Carlson et
 - Matsuda.
 - ✓ Méthodes basées sur l'identification dans le domaine fréquentiel.
- **Etape 3:** Remplacer la dernière approximation de $s^{\pm\alpha}$ et évaluer l'opérateur de la transformée de Laplace inverse $L^{-1}\left\{L\left\{{}_0D_t^{\alpha} f(t)\right\}\right\}$ dans (I.19) pour obtenir l'expression pour simuler l'opérateur de dérivation (resp. D'intégration) d'ordre fractionnaire du signal $f(t)$.

(3). **Analyse en temps-dicret:** Méthodes basées sur l'approximation du modèle fractionnaire par une forme discrète. La transformée en z est la méthode la plus utilisée. Les étapes principales pour calculer la forme générale sont:

- **Etape 1:** Discrétisation de l'opérateur s par $s = \psi(z^{-1})$ ainsi que l'approximation de la fonction génératrice (GF) de la forme $(\psi(z^{-1}))^{\pm\alpha}$ correspondant à $s^{\pm\alpha}$. Les méthodes les plus utilisées dans la transformation s -to- z sont:
- Euler (Backward - Forward),
 - Tustin,
 - Al-Alaoui,
 - Simpson,
 - Al-Alaoui – Simpson,
 - Al-Alaoui – SKG et
 - Al-Alaoui – Schneider.
- **Etape 2:** Pour obtenir les coefficients des equation de l'approximation $(\psi(z^{-1}))^{\pm\alpha}$, on peut utilisé les algorithms les plus utilises:
- ✓ The direct Power Series Expansion (PSE) of the Euler operator (FIR filter structure),
 - ✓ Continuous Fractional Expansion (CFE) of the Tustin operator (IIR filter structure),
 - ✓ Méthodes d'intégration numériques.
- **Etape 3:** Evaluer l'opérateur inverse $Z^{-1}\{Z\{ {}_0D_t^{\pm\alpha} f(t) \}\}$ pour obtenir l'approximation de ${}_0D_t^{\pm\alpha} f(t)$.

Dans une perspective de contrôle et de traitement du signal, les approches GL et ABM semblent être le plus utile et intuitive, en particulier pour une mise en œuvre en temps discret. En outre, dans l'analyse et la conception de systèmes de contrôle nous adoptons généralement la méthode de de la transformée de Laplace.

En conséquence, la synthèse de contrôleur fractionnaire d'ordre est effectuée, de préférence, dans le domaine fréquentiel. Ceci est la raison pour laquelle la plupart des méthodes de conceptions proposées jusqu'à présent pour le contrôleur d'ordre fractionnaire sont basés sur l'utilisation d'informations de réponses fréquentielles.

I.5.1. Méthode d'approximation d'Oustaloup

Cette approche repose sur l'approximation en temps continu de l'opérateur d'ordre fractionnaire, par une fonction rationnelle en utilisant une distribution récursive de zéros et pôles d'ordre entier, répartis dans une bande de fréquence limitée [16].

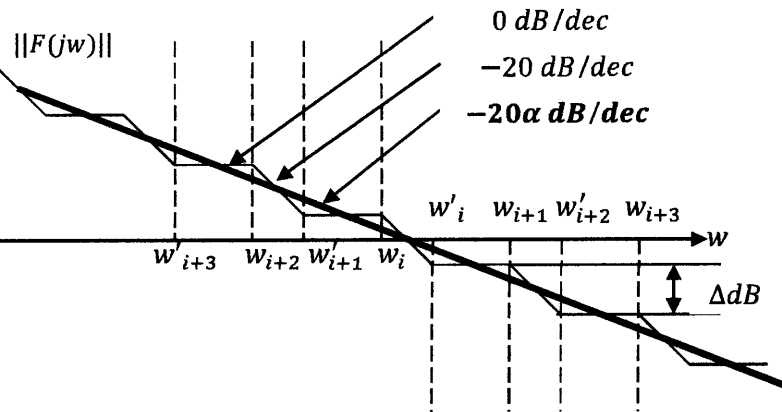


Figure I.2 : Principe de l'intégrale par pôle et zéros successives.

L'approche de base d'Oustaloup consiste que dans une première phase, cette approche consiste à remplacer un dérivateur non entier par un dérivateur non entier borné en fréquence, soit symboliquement :

$$s^n \rightarrow D(s) = C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{w_b}}{1 + \frac{s}{w_h}} \right)^n, \quad (I.25)$$

où w_b et w_h désignent, respectivement, les fréquences transitionnelles basses et hautes, n étant l'ordre de dérivation. C_0 Est un coefficient de normalisation.

Dans une seconde phase, l'approche consiste à synthétiser le dérivateur non entier borné en fréquence grâce à une démarche fondé sur le concept de fractal à travers la récursivité. Sa synthèse repose, en effet, sur une distribution récursive de zéros et de pôles. Soit [19] :

$$D_N(s) = C_0 \prod_{k=1}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{w_k}}{1 + \frac{s}{w_k}} \right) \quad (I.26)$$

où $D(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s)$

avec :

$$w'_k = w_b \left(\frac{w_h}{w_b} \right)^{\frac{k+N+\frac{(1-n)}{2}}{2N+1}}, \quad w_k = w_b \left(\frac{w_h}{w_b} \right)^{\frac{k+N+\frac{(1+n)}{2}}{2N+1}}, \quad C_0 = w_h^n$$

Avec cette approche, les systèmes d'ordre fractionnaire peuvent être approximer en remplaçant chaque terme fractionnaire par son approximation.

I.5.2. Implémentations numériques des systèmes d'ordre fractionnaire

L'étape clé dans l'implémentation numérique d'un correcteur d'ordre fractionnaire, cités précédemment, est l'évaluation numérique ou la discrétisation des dérivations d'ordre fractionnaires " s^α ". En général, il y a deux types de méthodes de discrétisation: La discrétisation directe et la discrétisation indirecte.

- Dans les méthodes de discrétisation indirecte, deux étapes sont nécessaires, l'approximation analogique du dérivateur puis la discrétisation de la fonction de transfert en s obtenue.
- Les méthodes de discrétisation directe existantes incluent l'application du développement direct en série de puissances de l'opérateur d'Euler, le développement fractionnaire continu de l'opérateur de Tustin et les méthodes basées sur l'intégration numérique [20].

Rappelant la fonction de transfert continue générale d'un système d'ordre fractionnaire, qui est de la forme suivante :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta m} + b_{m-1} s^{\beta m-1} + \dots + b_0 s^{\beta 0}}{a_n s^{\alpha n} + a_{n-1} s^{\alpha n-1} + \dots + a_0 s^{\alpha 0}} \quad (I.27)$$

Pour obtenir les modèles discrets des systèmes d'ordre fractionnaires, il est nécessaire d'utiliser des approximations discrètes des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaires. En faisant cela dans l'équation (I.33) de $G(s)$, une expression générale pour la fonction de transfert discrète du système d'ordre fractionnaire $G(z)$, peut être obtenue sous la forme [3]:

$$G(z) = \frac{b_m (w(z^{-1}))^{\beta m} + b_{m-1} (w(z^{-1}))^{\beta m-1} + \dots + b_0 (w(z^{-1}))^{\beta 0}}{a_n (w(z^{-1}))^{\alpha n} + a_{n-1} (w(z^{-1}))^{\alpha n-1} + \dots + a_0 (w(z^{-1}))^{\alpha 0}} \quad (I.28)$$

Pour réaliser une tel discrétisation ; les méthodes classiques de discrétisation (la méthode Backward (Euler), la méthode Bilinéaire (Tustin), la méthode Al-Alaoui sont très utiles, mais cela n'est possible qu'après la réalisation d'une approximation analogique des opérateurs fractionnaires par l'une des méthodes citées précédemment.

I.5.2.1. Transformation Bilinéaire

Cette méthode est connue dans la littérature souvent sous le nom de la méthode trapézoïdale d'intégration, ou la méthode de transformation de Tustin. L'équation de la transformation bilinéaire est donnée par [20]:

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (I.29)$$

I.5.2.2. Transformation Backward

Cette méthode est connue aussi sous le nom d'Euler est une méthode simple de discrétisation qui produit un filtre discret stable à partir d'un filtre analogique stable. L'équation de la transformation 'Backward' est donnée par [20]:

$$S = \frac{1-z^{-1}}{T_s} \quad (I.30)$$

I.5.2.3. Transformation Al-Alaoui

Un nouveau schéma mixte utilisant simultanément les opérateurs d'Euler et de Tustin est proposé, qui utilise l'opérateur dit d'Al-Alaoui. L'équation de la transformation Al-Alaoui est donnée par [20]:

$$S = \frac{8}{7T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7} \quad (I.31)$$

I.6. Calcul d'ordre fractionnaire dans la commande des systèmes

Les deux décennies précédentes ont connus des efforts de recherche très remarquables reliés au calcul d'ordre fractionnaire et son application dans la théorie de commande des systèmes. Clairement, pour une boucle fermée de commande des systèmes, il existe quatre situations :

- (1). Système d'ordre entier avec correcteur d'ordre entier,
- (2). Système d'ordre entier avec correcteur d'ordre fractionnaire,
- (3). Système d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre entier,
- (4). Système d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre fractionnaire.

Dans la pratique de commande des systèmes, on considère généralement uniquement le correcteur d'ordre fractionnaire. Ceci est en raison que le modèle du système peut être déjà obtenu comme un modèle d'ordre entier dans le sens classique [3] et comme le correcteur PID est la technique la plus utilisée dans l'asservissement des processus industriels pour des décennies c'est pour ce type de commande qu'on va étudier l'intervention des systèmes fractionnaires dans la commande des systèmes.

I.6.1. Contrôleur PID d'ordre entier et d'ordre fractionnaire

I.6.1.1. Structure du correcteur PID

Aujourd'hui, le correcteur PID est la structure de commande la plus utilisée dans les boucles de rétroaction. Plus de 90% des boucles d'asservissement sont des correcteurs PID.

Généralement, le correcteur PID classique est implémenté dans des systèmes de commande à retour unitaire classique donné par la figure I.2, où $u(t)$ désigne le signal de commande et $e(t)$ l'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$ et la grandeur à commander $y(t)$, $C(s)$ est la fonction de transfert du correcteur, $G_p(s)$ est la fonction de transfert de système.

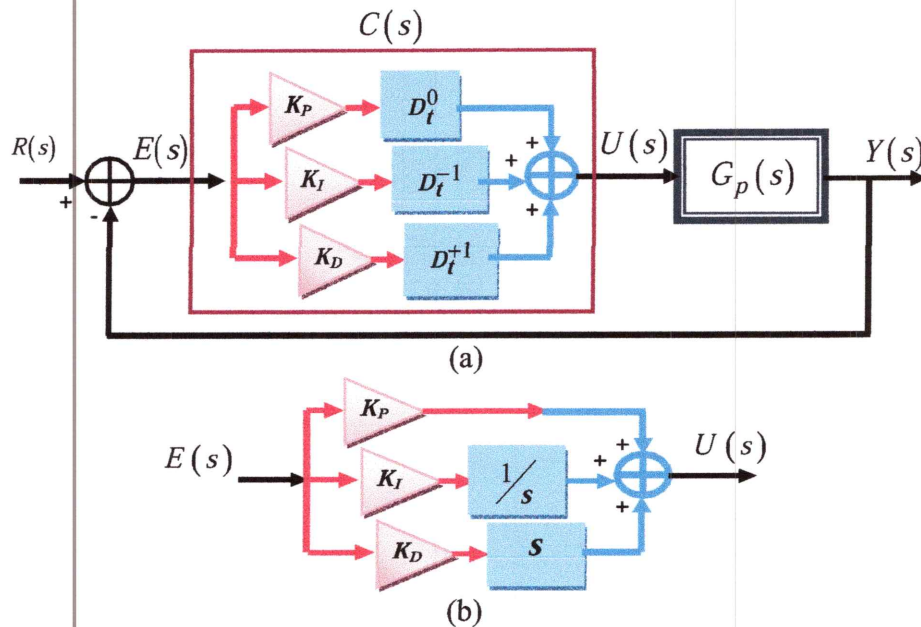


Figure I.3 : Structure de la commande en boucle fermée : (a) Emplacement du correcteur dans la chaîne de commande. (b) Schéma fonctionnel d'un PID type parallèle.

Le correcteur proportionnel-intégral-dérivé (PID) classique est basé sur le présent (P), le passé (I) et le futur (D) de l'erreur de commande $e(t)$, son comportement est décrit par l'équation suivante :

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (\text{I.32})$$

Ce qui donne dans le domaine de Laplace la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s \quad (\text{I.33})$$

avec :

$K_i = K_p/T_i$: est le gain d'intégration. $K_d = K_p \cdot T_d$: est le gain de dérivation.

I.6.1.2. Contrôleur PID d'ordre non-entier

Afin d'améliorer les performances des systèmes asservis linéaires, Podlubny a proposé une généralisation du correcteur PID classique à la forme $PI^\alpha D^\gamma$ nommé PID-fractionnaire, où α et γ sont des réels positifs. Il a montré que les performances étaient considérablement améliorées par rapport à celles obtenues par un PID d'ordre entier [9].

Comme il est montré sur la figure I.3, le $PI^\alpha D^\gamma$ fractionnaire généralise le PID conventionnel et l'étend du point au plan. Cette extension donne plus de flexibilité dans la conception des commandes PID. Ce type de correcteur est généralement utilisé dans la conception d'une commande robuste [21].

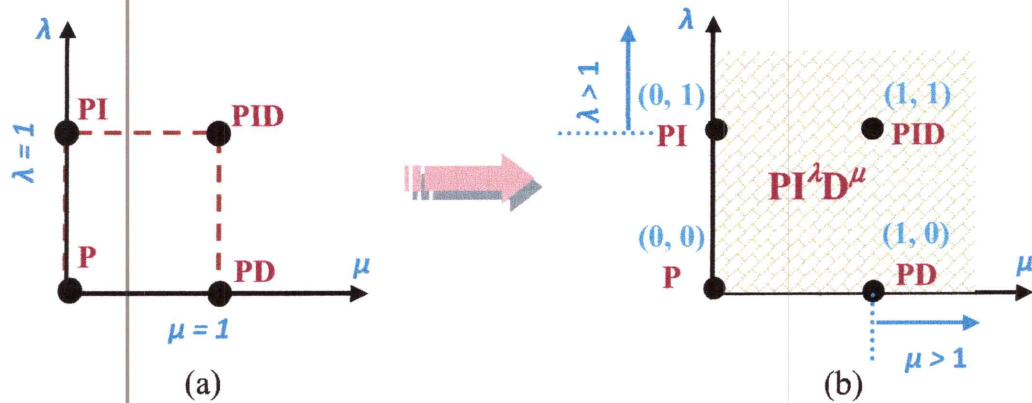


Figure I.4 : PID fractionnaire : Du point au plan.

L'équation de la sortie du correcteur $PI^\alpha D^\gamma$ d'ordre fractionnaire dans le domaine de temps est donnée sous la forme :

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\alpha} e(t) + T_d D^\gamma e(t) \right) \quad (I.34)$$

α est l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration tel que $0 < \alpha < 1$ et γ est l'ordre fractionnaire de l'action de différentiation tel que $0 < \gamma < 1$.

L'algorithme du correcteur $PI^\alpha D^\gamma$ d'ordre fractionnaire tel que décrit en équation (I.34) peut être représenté par la fonction de transfert suivante [21] :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_i \frac{1}{s^\alpha} + K_d s^\gamma \quad (I.35)$$

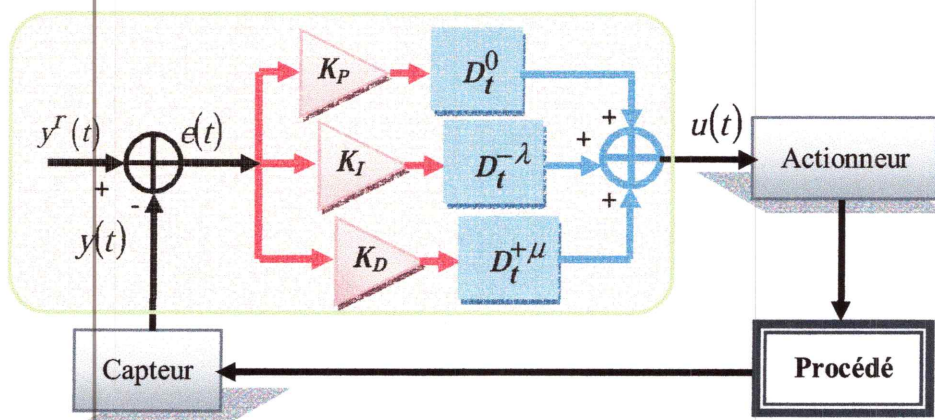


Figure I.5 : Schéma fonctionnel d'un PID d'ordre fractionnaire.

a. Approximation du correcteur $PI^\alpha D^\nu$ dans le domaine temporel

Comme mentionné au début de chapitre, la méthode de GL est suggérée pour le calcul (approximation) dans le domaine temporel des opérateurs de dérivation $D^\nu e(t)$ et d'intégration $D^{-\alpha} e(t)$. On fait revenir à l'expression de GL donnée par :

$${}^{GL}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{{}_a \Delta_h^\alpha f(t)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (I.36)$$

Pout une fonction causale $f(t)$, et pout $t = kh$, nous aurons l'approximation suivante :

$${}^{GL}_a D_t^\alpha f(kh) = \frac{{}_a \Delta_h^\alpha f(kh)}{h^\alpha} = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(kh-jh) \quad (I.37)$$

où $\binom{\alpha}{j}$ sont des coefficients binomiaux et $c_0^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ ($j=0,1,\dots$).

Le calcul des coefficients se fait par la formule de récurrence suivante [22-1] :

$$c_0^\alpha = 1, \quad c_j^\alpha = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) c_{j-1}^\alpha \quad (I.38)$$

De même pour une fonction causale $f(t)$, et pour $t = kh$, l'approximation de l'intégrale est donnée par [6] :

$$I^\mu(kh) = D^{-\mu} f(kh) \equiv h^\mu \sum_{j=0}^k c_j^{(-\mu)} f(kh-jh) \quad (I.39)$$

où les coefficient $c_j^{(-\mu)}$ sont es coefficients binomiaux qui peuvent être calculés par la formule de récurrence suivante, pour $j = 1, 2, \dots, k$

$$c_0^{(-\mu)} = 1, \quad \text{et} \quad c_j^{(-\mu)} = \left(1 - \frac{1-\mu}{j}\right) c_{j-1}^{(-\mu)} \quad (I.40)$$

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 - \dots + (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} x^k + \dots \\ = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} x^k \quad (I.41)$$

b. Approximation du correcteur $PI^\alpha D^\nu$ dans le domaine fréquentiel

Dans le but d'implémenter le correcteur $PI^\alpha D^\nu$ d'ordre fractionnaire dans le schéma de commande, une approximation est nécessaire. La procédure consiste à remplacer chacun des termes fractionnaires par sont équivalent en utilisant une des méthodes d'approximation. Si on utilise la méthode d'approximation de Charef, la transmittance d'un $PI^\alpha D^\nu$ devienne de la forme suivante :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \cong K_p + K_i \frac{K_I}{\left(\frac{s}{w_c}\right)^\alpha} + K_d K_D \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^\gamma \cong K_p + K_i K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{s_i}\right)} + K_d K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{s_i}\right)} \quad (I.42)$$

La figure suivante montre la réponse fréquentielle du $PI^\alpha D^\gamma$ avec celle du son approximation par les deux méthodes.

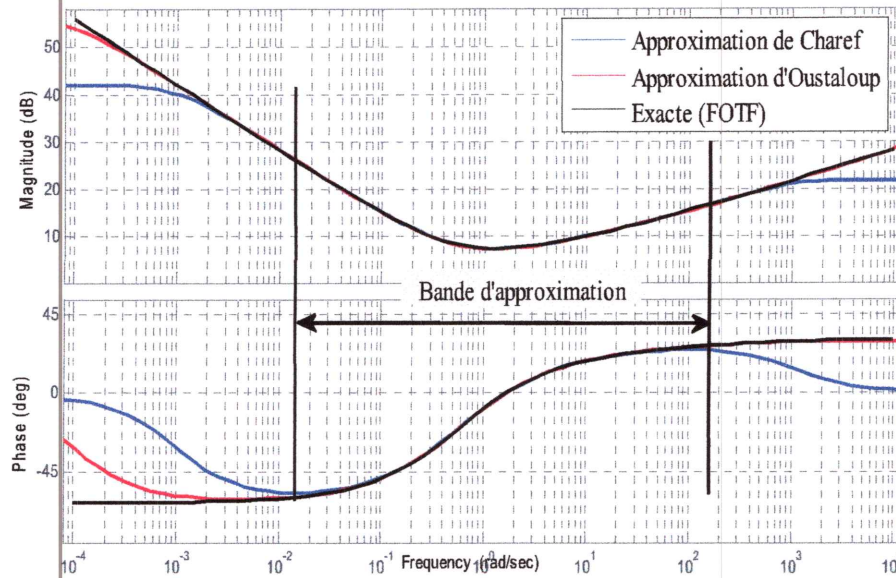


Figure I.6 : Réponse fréquentielle du $C(s) = 1 + s^{0.35} + \frac{1}{s^{0.7}}$ avec l'approximation [23].

D'après cette figure, on remarque que les deux méthodes donne une bonne approximation du PID fractionnaire mais la méthode d'Oustaloup a l'avantage d'approximer sur une bande de fréquence plus large que celle de Charef surtout pour les hautes fréquences.

c. Réglage de Correcteur PID d'ordre fractionnaire

Afin d'améliorer les performances des systèmes de commande et d'assurer les spécifications désirées, plusieurs structures de commande utilisant l'idée de correcteur $PI^\alpha D^\gamma$ d'ordre fractionnaire ont été étudiées par les chercheurs.

Différemment au correcteur PID classique, il n'y a aucune méthode de réglage systématique existant pour le correcteur $PI^\alpha D^\gamma$ d'ordre fractionnaire [3]. On trouve dans la littérature plusieurs méthodes de réglage. Parmi ces méthode on trouve une méthode basée sur la fonction de transfert idéale de Bode a été proposée pour la première fois par Bode dans son travail sur la conception des amplificateurs à retour en 1945. Dans [14], on trouve une méthode proposée pour ajuster les paramètres d'un PID fractionnaire en utilisant cette méthode qui donne de bons résultats.

Dans [24], le processus de réglage optimal des paramètres en utilisant l'algorithme d'optimisation par essaim particulaires (PSO) a été utilisé pour ajuster les paramètres du correcteur $PI^\alpha D^\nu$ d'ordre fractionnaire. L'idée du correcteur $PI^\alpha D^\nu$ adaptatif d'ordre fractionnaire est étudiée. Elle a pour but d'améliorer les performances des systèmes de commande adaptative classique par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaires dans les algorithmes de commande. Il y a aussi des méthodes proposées pour le dimensionnement du correcteur $PI^\alpha D^\nu$ d'ordre fractionnaire par l'utilisation des algorithmes génétiques.

I.7 Conclusion

L'objectif de chapitre été d'introduire les systèmes d'ordre fractionnaire, et pour cela nous avons commencé par la définition du calcul fractionnaire en citant les différentes définitions, ensuite nous avons présenté la mise en œuvre du fractionnaire dans le domaine de contrôle par la présentation du correcteur PID d'ordre fractionnaire.

On peut dire que le calcul fractionnaire est une étape clé vers une vues plus générale est plus avancée dans la modélisation et la synthèse des correcteur dans les chaîne de commande.

2.1. <i>Introduction</i>	22
2.2. Généralistes sur les systèmes chaotiques.....	23
2.3. Systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.....	32
2.4. Simulations des quelques systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.....	37
2.5. Analyse de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire.....	47
2.6. <i>Conclusion</i>	49

L'objectif de ce chapitre est de disposer des éléments théoriques nécessaires à l'analyse du comportement d'un système chaotique. Nous partirons de quelques définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques chaotiques. Nous commencerons par définir la notion de chaos ainsi que l'étude des différents systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire et les résultats des simulations. Enfin nous présenterons des éléments théoriques nécessaires à l'analyse de la stabilité des systèmes chaotiques.

II.1 Introduction

Les systèmes dynamiques non-linéaires, y inclus les systèmes chaotiques (d'ordre entier et d'ordre fractionnaire) sont depuis longtemps connus dans le domaine des mathématiques mais c'est seulement au cours de ces deux dernières décennies que les applications concrètes se sont multipliées [25].

Le chaos est un comportement imprévisible de manière efficace provenant d'un système dynamique déterministe en raison de la sensibilité aux conditions initiales. Le chaos est un état particulier d'un système dynamique non linéaire et n'apparaît que dans certaines conditions, pour certaines valeurs des paramètres du système. L'état chaotique peut être observé dans une première approche par l'existence dans l'espace des phases d'un attracteur chaotique ou fractal dans laquelle toutes les trajectoires du système évoluent en suivant un certain rythme (bassin d'attracteur), mais ne sont jamais les mêmes [26].

Ce chapitre est de disposer des éléments théoriques nécessaires à l'analyse du comportement d'un système chaotique. Nous partirons de quelques définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques chaotiques. Nous commencerons par définir la notion de chaos ainsi que l'étude des différents systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires. Enfin nous présenterons en détail la stabilité des systèmes chaotiques, en se basant sur différentes approches de l'analyse.

II.2 Généralistes sur les systèmes chaotiques

II.2.1 Systèmes dynamiques

Un système dynamique consiste en un espace de phases dont les coordonnées décrivent l'état dynamique du système à n'importe quel moment et dont une règle dynamique spécifie la tendance future immédiate de toutes les variables d'états composant le système, donnée par la valeur présente de ces mêmes variables d'état. Un système dynamique peut être qualifié de "déterministe" s'il existe une seule conséquence ou phase à chaque état. Il est qualifié de "chaotique" s'il existe une ou plusieurs conséquences ou phases possibles à partir d'une distribution de probabilités des phases possibles.

De plus, un système dynamique peut être représenté par une équation différentielle ordinaire (évolution continue dans le temps t) ou par des équations itératives (évolution discrète dans le temps kT).

Les phénomènes chaotiques que l'on observe sont souvent dus aux non-linéarités que présentent les systèmes, dans des domaines très variés : l'ingénierie, la physique, la chimie, circuits électroniques, réactions chimiques, processus biologiques et systèmes de sécurité de l'information. L'étude du chaos dans ces domaines a mis en évidence. Les systèmes chaotiques Les plus connus sont le circuit de Chua, système de Lorenz, le système de Chen, le système de Rossler, ...etc.[27-28]

II.2.2 Description mathématique

La forme générale d'un système non linéaire contrôlable, complexe et chaotique dans certaines circonstances, peut être modélisée par la forme généralisée (ordre fractionnaire) suivante:

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^{\alpha_x} x(t) &= f(x(t), u(t), \xi(t), t), \quad (q_x - 1 < \alpha_x < q_x), \quad t > 0 \\ y(t) &= g(x(t), u(t), w(t), t) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

où $\alpha_x = [\alpha_{x1} \quad \alpha_{x2} \quad \dots \quad \alpha_{xn}]^T$ pour $q_x - 1 < \alpha_x < q_x$, $q_x \in \mathbb{R}^+$ est le vecteur représentant l'ordre de dérivation et n est le nombre des variables d'état à contrôler. $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont le vecteur des états, d'entrée et de sorties mesurables à l'instant t .

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ est la relation non linéaire entre les variables d'état et les sorties du

où (x, y, z) représente le vecteur d'état et α, b, c sont les paramètres du système. Le système de Chen montre un comportement chaotique pour $\alpha = -35$, $b = 3$ et $c = 28$; avec les conditions initiales $(x(0), y(0), z(0)) = (-9, -5, 14)$.

D'après la figure II.1, on remarque que tous les états du système chaotique présentent des aspects aléatoires.

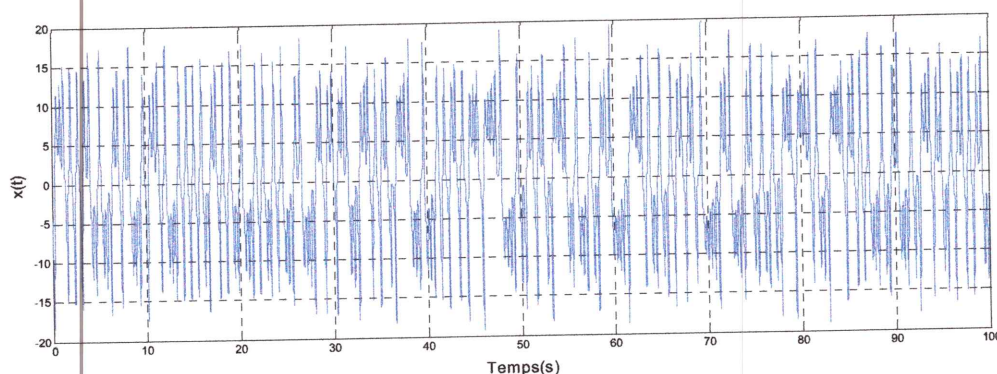


Figure II.1 : Etat chaotique $x(t)$ du système de Chen.

II.2.3.1 Sensibilité aux conditions initiales

Tout d'abord, ils sont extrêmement sensibles aux perturbations. On peut illustrer ce fait par l'effet papillon, popularisé par le météorologue *Edward Lorenz*. Le papillon de Lorenz possède une caractéristique importante : quelles que soient les valeurs initiales choisies, on obtient toujours comme représentation graphique un objet géométrique dont la forme ressemble à un papillon.

Deux conditions initiales différentes même très rapprochées produiront deux tracés totalement différents, donc l'évolution d'un système dynamique chaotique est imprédictible en ce sens qu'elle est sensible aux conditions initiales.

Ainsi, deux trajectoires de phases initialement voisines s'écartent toujours l'une de l'autre, et ceci quelle que soit leur proximité initiale. Il est en particulier clair que la moindre erreur ou simple imprécision sur la condition initiale interdit de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et, en conséquence, de faire une prédiction autre que statistique sur le devenir à long terme du système.

Une des propriétés essentielles du chaos est la sensibilité aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant des taux de divergence des trajectoires. Ceci est illustré par la figure II.2.

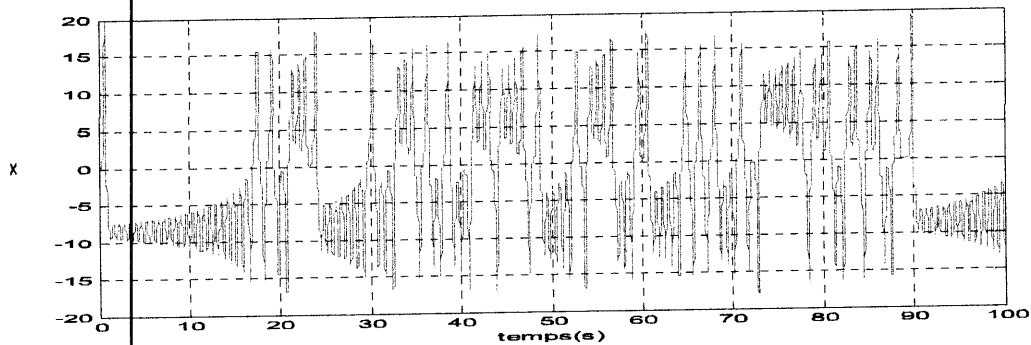
Prenons comme exemple de systèmes chaotiques continus, le système de Lorenz donné par l'ensemble des équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma \cdot (y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x \cdot (\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= x \cdot y - b \cdot z\end{aligned}\tag{II.6}$$

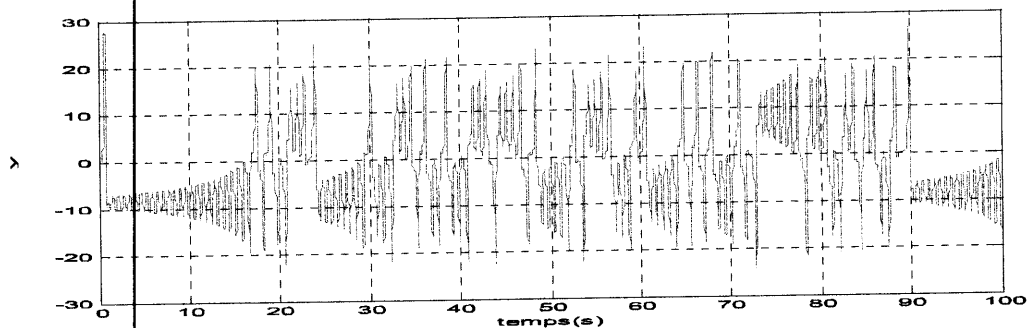
Le système de Lorenz est un système d'équations non linéaires à cause des termes xy et xz . Lorsque les paramètres réels σ , ρ et b prennent les valeurs suivantes : $\sigma = 10$, $\rho = 28$ et $b = 8/3$, le système (II.6) présente un comportement chaotique.

➤ Evolution dans le temps

L'évolution dans le temps d'un tel système est chaotique. On peut le constater intuitivement grâce à la figure (II.4) : illustre l'aspect aléatoire des états du système (II.5) pour les conditions initiales ($x(0) = y(0) = z(0) = 0.01$).



(a)



(b)

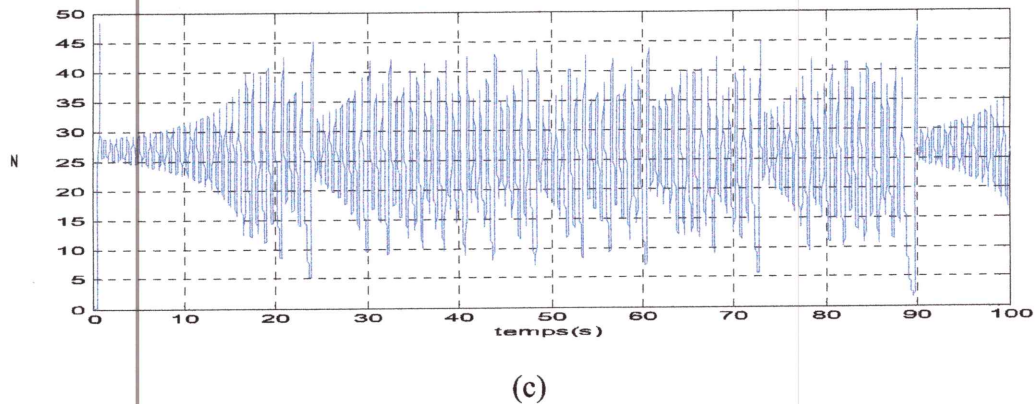


Figure II. 4 : Evolution des variables d'états du système de Lorenz en fonction du temps. (a) Evolution de la variable d'état x . (b) Evolution de la variable d'état y . (c) Evolution de la variable d'état z .

➤ Evolution dans l'espace de phase

La figure II.5 montre l'évolution du système chaotique (II.6) sous forme attractrice étrange connu sous le nom de « ailes de papillon ». On observe que la dynamique du système de Lorenz est indépendante du temps. Par conséquent, ce type de système est qualifié d'être autonome [30].

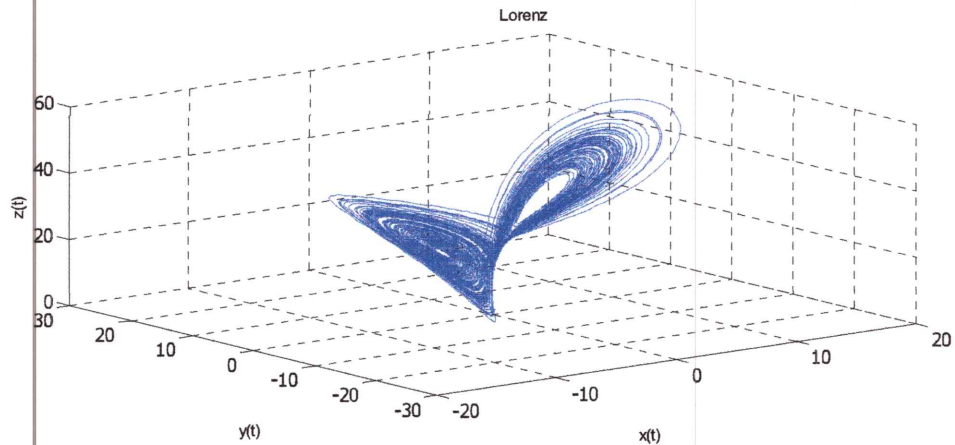


Figure II.5 : Attracteur étrange de Lorenz.

➤ Les exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov sont donnés par $\lambda_1 = 0.85922$, $\lambda_2 = -0.0015763$, $\lambda_3 = -14.5208$. On observe qu'il existe une valeur positive, ce qui signifie que le système est chaotique. La figure II.6 montre les exposants de Lyapunov du système chaotique continu de Lorenz.

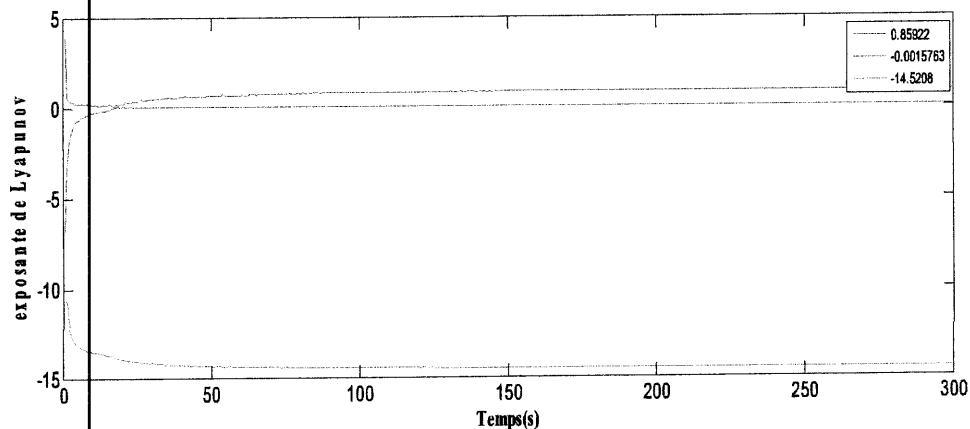


Figure II.6 : Exposants de Lyapunov du système chaotique continu de Lorenz.

II.2.4.2 Exemples des systèmes chaotiques à temps discret [31]

Il existe plusieurs types de systèmes chaotiques à temps discret tel que la fonction logistique, le système de Henon, la carte Tent, et la fonction Gaussienne discrète, etc.

La fonction logistique très connue dans la théorie des systèmes non linéaires, est une application non bijective du domaine $[0, 1]$ dans lui-même qui sert de récurrence à la suite :

$$x_{k+1} = f(x_k) = r \cdot x_k \cdot (1 - x_k) \quad (\text{II.7})$$

où k représente les itérations, x la variable dynamique et r un paramètre réel. Une grande variété de régimes permanents se présente en fonction de la valeur du paramètre r . Parmi lesquelles on trouve :

- Pour $0 < r < 3$, le système possède un point fixe attractif, qui devient instable lorsque $r = 3$.
- Pour $3 < r < 3.57$, le système évolue périodiquement de période r^n , avec n un entier qui tend vers l'infini lorsque r tend vers la valeur 3.57.
- Pour $r = 4$, le système évolue de manière chaotique.

La figure (II.7) illustre l'aspect aléatoire du système pour $r = 4$. Il est alors impossible de discerner à l'œil nu cette trajectoire de celle d'une variable aléatoire.

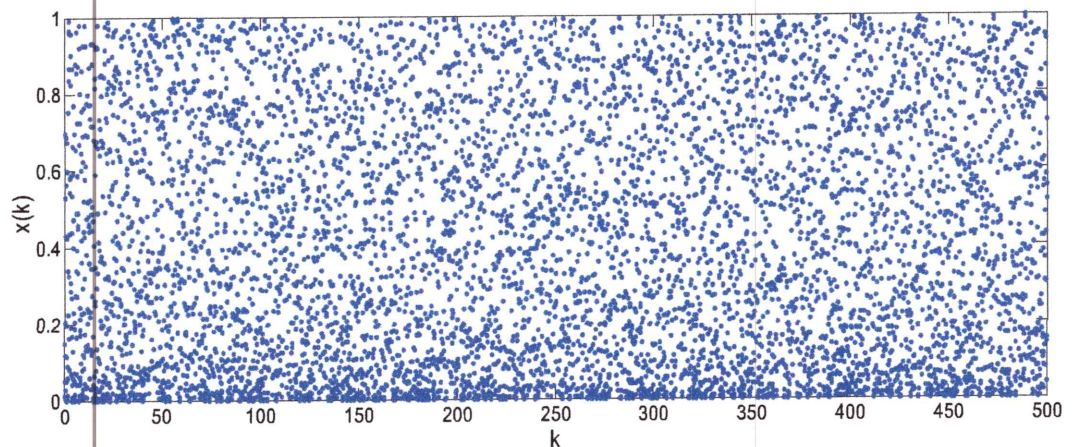


Figure II.7 : Trajectoire de la fonction logistique.

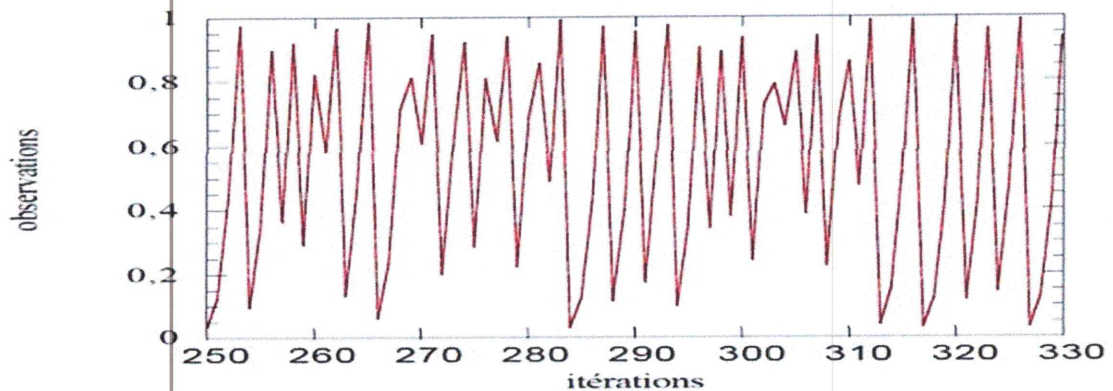


Figure II.8 : Application logistique pour $r = 4$ [31].

L'exposant de Lyapunov de la fonction logistique est $\lambda = \ln 2 > 0$. D'où le système admet un comportement chaotique.

II.2.5 Notion de bifurcation

La théorie de bifurcation consiste en l'étude mathématique des changements qualitatifs ou topologiques de la structure d'un système dynamique. Une bifurcation survient lorsqu'une variation quantitative d'un paramètre du système engendre un changement qualitatif des propriétés telles que la stabilité, le nombre de points d'équilibre ou la nature des régimes permanents.

Les valeurs des paramètres au moment du changement sont appelées valeurs de bifurcation.

Dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation montre les comportements possibles d'un système, à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation. La figure II.9. Montre le diagramme de bifurcation de la fonction logistique.

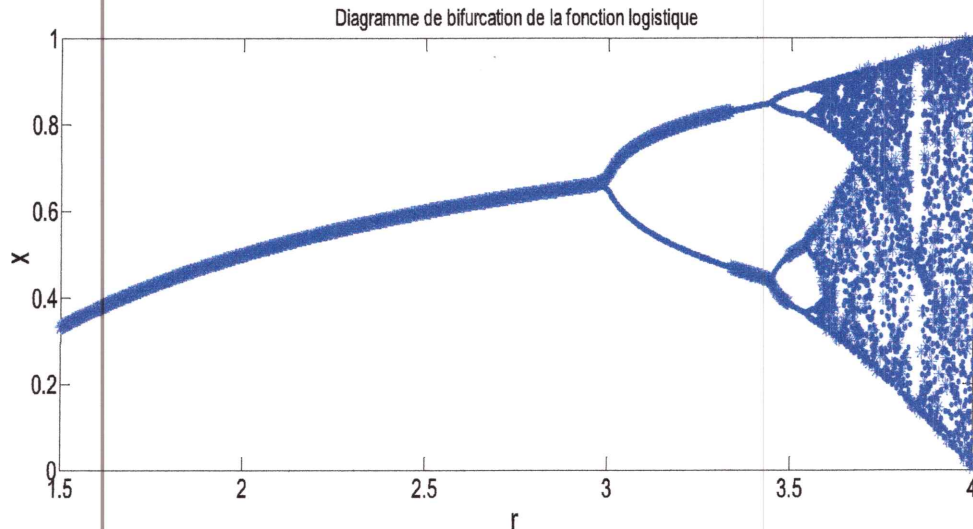


Figure II.9 : Diagramme de bifurcation de la fonction logistique.

Ce diagramme permet de connaître tous les comportements de la suite logistique en fonction de r . En particulier, pour $r=3$ on observe un doublement de période appelé ici bifurcation. Avant de basculer dans le chaos il y a une cascade de doublements de période. Après un doublement de période l'orbite périodique précédent est toujours présente mais instable, ce qui explique qu'elle n'est pas visible sur le diagramme de bifurcation, un système chaotique a donc une infinité d'orbites périodiques.

II.3 Systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

La forme générale d'une classe des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire (sous l'action des signaux de commande $u(t)$) peut être formulée par un système d'équations différentielles d'ordre fractionnaire:

$$\begin{aligned} D_t^q x(t) &= F(x(t)) + u(t) = A \cdot x(t) + \rho(x(t)) + u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

où,

- $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est le vecteur des variables d'état décrivant le système chaotique,
- $u(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des signaux de commande,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice des paramètres du système (constant).
- $q = (q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n)^T \in \mathbb{R}^n$ est l'ordre de dérivation du système,

- $\rho(x(t)) \mapsto \tilde{A}_x(x) \cdot x(t) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (resp. $F(x(t))$) est une fonction non linéaire (généralement $\rho(0) = 0$; De plus, $\rho(x(t))$ maintient le condition de Lipchitz par rapport aux $x(t)$, i.e.,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\rho(x(t))\|}{\|x(t)\|} \mapsto 0 \quad (\text{II.9})$$

où $\|\cdot\|$ est une norme Euclidienne. Le choix des variables soumises à une excitation (signal de commande externe), par action du circuit de commutation dépend du degré d'influence de chaque variable et, aussi, dépend des objectifs de conception.

Un nombre important des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire (tridimensionnel) appartient à la classe du modèle généralisé précédent, et qui peut être exprimé comme suit

$$\begin{aligned} D_t^q x(t) &= \tilde{A} \cdot x(t) + \overbrace{\tilde{A}_x \cdot x(t)}^{\rho(x(t))} + u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

où,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \tilde{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & f(\cdot) & \Phi(\cdot) \\ g(\cdot) & 0 & 0 \\ -\Phi(\cdot) & H(\cdot) & 0 \end{pmatrix}, C = (1 \ 1 \ 1)^T \quad (\text{II.11})$$

$$x(t) = (x(t) \ y(t) \ z(t))^T, q = (q_x \ q_y \ q_z)^T$$

$f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $H(\cdot)$ et $\Phi(\cdot)$ sont des fonctions non linéaires (lisses) appartiennent au domaine de définition $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. α , β et γ sont des constants connus, positives ou négatives.

II.3.1 Simulation numérique des systèmes chaotiques

La simulation des opérateurs de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire dépend du domaine de l'analyse en cours d'étude : fréquentiel ($s^{\pm\alpha}$) ou temporel ($D_t^{\pm\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Dans le domaine temporel, deux approches sont les plus utilisées [2], [32]:

- La définition de GL definition
- La version améliorée de l'algorithme d'Adams-Bashforth-Moulton (ABM), algorithme fondé sur un schéma prédicteur-correcteur.

II.3.1.1 Simulation numérique par l'algorithme de GL

La formule (II.8) permet de développer une forme récursive générale pour simuler le comportement des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire en appliquant l'algorithme de décrétisation GL ou ABM. Basé sur une approche de GL, la solution numérique générale de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire

$$D_t^q x(t) = f(x(t), u(t)) = A \cdot x(t) + \rho(x(t)) + u(t) \tag{II.12}$$

peut être exprimée comme

$$x(t_n) \mapsto x_n = \hbar^q \cdot f(x_n, u_n) - \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i \cdot x_{n-i} + u(t_n) \tag{II.13}$$

$\tilde{C}_i = \text{diag}(c_i^{q1}, c_i^{q2}, \dots, c_i^{qn})$ est la matrice des coefficients binomiaux (diagonale), et $\hbar^q = \text{diag}(\hbar^{q1}, \hbar^{q2}, \dots, \hbar^{qn})$ est la matrice des périodes d'échantionnage. On a

$$x_n = \underbrace{\hbar^q \cdot A \cdot x_n + \hbar^q \cdot \rho(x_n)}_{\Phi(\cdot)} - \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i \cdot x_{n-i} + \hbar^q \cdot B \cdot u_n \tag{II.14}$$

Eq. (II.14) est une équation algébrique non linéaire implicite à l'égard de $x_n = (x_{1n} \ x_{2n} \ \dots)^T$ dans l'équation(II.14), nous pouvons construire un algorithme itératif pour résoudre $\{x_{1n}, x_{2n}, \dots\}$, comme suit:

$$x_n = \underbrace{\Phi(x_n, x_{n-1})}_{\Psi(x_n)} - \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i \cdot x_{n-i} + \hbar^q \cdot B \cdot u_{n-1} \tag{II.15}$$

où,

$$\Phi(x(t_n), x(t_{n-1})) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1(t_{n-1}), x_2(t_{n-1}), x_3(t_{n-1}), \dots, x_n(t_{n-1})) \\ \Phi_2(x_1(t_n), x_2(t_{n-1}), x_3(t_{n-1}), \dots, x_n(t_{n-1})) \\ \Phi_3(x_1(t_n), x_2(t_n), x_3(t_{n-1}), \dots, x_n(t_{n-1})) \\ \vdots \\ \Phi_n(x_1(t_n), x_2(t_n), x_3(t_n), \dots, x_{m-1}(t_n), x_n(t_{n-1})) \end{pmatrix} \tag{II.16}$$

Les expressions (II.15) et (II.16) sont utilisées pour simuler le comportement des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, avec les conditions initiales $x(0) = x_0$. Dans le cas d'un système à 3 dimensions (II.10), l'algorithme itératif peut être écrit comme:

$$X(t_n) = \begin{pmatrix} -h^{qx} \cdot \alpha \cdot x(t_{n-1}) + h^{qx} \cdot \rho(x(t_{n-1}), y(t_{n-1}), z(t_{n-1})) \\ -h^{qy} \cdot \beta \cdot y(t_{n-1}) + h^{qy} \cdot \rho(x(t_n), y(t_{n-1}), z(t_{n-1})) \\ -h^{qz} \cdot \gamma \cdot z(t_{n-1}) + h^{qz} \cdot \rho(x(t_n), y(t_n), z(t_{n-1})) \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i \cdot X(t_{n-i}) + h^q \cdot B \cdot u(t_{n-1}) \quad (\text{II.17})$$

Le critère d'arrêt de l'algorithme est fixé par un nombre maximal d'itérations.

II.3.1.2 Simulation numérique par l'algorithme d'ABM

Nous allons maintenant introduire une méthode numérique pour résoudre une équation différentielle d'ordre fractionnaire de type Caputo basée sur une formulation fractionnaire de la méthode classique d'Adams-Bashforth-Moulton.

Soit q un réel positif vérifiant $m - 1 < q < m$, D^q désigne l'opérateur de dérivation au sens de Caputo. Le système est décrit par :

$$\begin{cases} D_0^q = f(t, y) \\ D_0^q = y_0^k, k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

La solution de l'équation (II.18) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire de Volterra [33] donné par :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (\text{II.19})$$

Le principe de cette méthode est de remplacer l'équation originale (II.18) par l'équation intégrale de Volterra (II.19) et on utilise la formule (produit de quadrature des trapèzes) pour remplacer l'intégrale par: $t_j, j = 0, 1, \dots, n+1$, qui sont prises respectivement à la fonction $(t_{n+1}-\tau)^{q-1}$ c'est-à-dire [34] :

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-\tau)^{q-1} g(\tau) d\tau \approx \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-\tau)^{q-1} g_{n+1}(\tau) d\tau = \frac{h^q}{\Gamma(q+1)} \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} g(t_j) \quad (\text{II.20})$$

avec,

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{q+1} - (n-q)(n+1)^q & j = 0 \\ (n-j+2)^{q+1} + (n-j)^{q+1} - 2(n-j+1)^{q+1}, 1 \leq j \leq n \\ 1 & j = n+1 \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Cela nous donne la formule de correction [34]:

$$y_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{q-1} y_0^k \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_j) \quad (\text{II.22})$$

Pour déterminer la formule de prédiction qui donne $y_h^p(t_{n+1})$, on procède de la même manière comme précédemment mais cette fois l'intégrale sera remplacée en utilisant la méthode des rectangles :

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{q-1} g(\tau) \approx \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} g(t_j) \quad (\text{II.23})$$

où ,

$$b_{j,n+1} = \frac{h^q}{q} ((n-j+1)^q - (n-j)^q) \quad (\text{II.24})$$

où la valeur prédictive de $y_h^p(t_{n+1})$ est déterminée par la méthode Adams–Bashforth [33], comme suit :

$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{j=0}^{q-1} y_0^j \frac{t_{n+1}^j}{j!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_j) \quad (\text{II.25})$$

L'erreur d'estimation de cette approximation est décrite comme suit :

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |y(t_j) - y_h(t_j)| = O(h^p) \text{ avec } p = \min(2, 1+q) \quad (\text{II.26})$$

Un système ayant trois équations différentielles d'ordre fractionnaire de la forme :

$$\begin{cases} D^{q_1} x(t) = f_1(x, y, z) \\ D^{q_2} y(t) = f_2(x, y, z) \\ D^{q_3} z(t) = f_3(x, y, z) \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

avec $0 < q_i < 1$, ($i=1,2,3$), et la condition initiale (x_0, y_0, z_0) , la formule itérative peut être écrite sous la forme :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_0 + \frac{h^{q_1}}{\Gamma(q_1+2)} f_1(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_1} \alpha_{1,j,n+1}}{\Gamma(q_1+2)} f_1(x_j, y_j, z_j) \\ y_{n+1} = y_0 + \frac{h^{q_2}}{\Gamma(q_2+2)} f_2(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_2} \alpha_{2,j,n+1}}{\Gamma(q_2+2)} f_2(x_j, y_j, z_j) \\ z_{n+1} = z_0 + \frac{h^{q_3}}{\Gamma(q_3+2)} f_3(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_3} \alpha_{3,j,n+1}}{\Gamma(q_3+2)} f_3(x_j, y_j, z_j) \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

ou bien par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_0 + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_1} \alpha_{1,j,n+1}}{\Gamma(q_1 + 2)} f_1(x_j, y_j, z_j) \\ y_{n+1} = y_0 + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_2} \alpha_{2,j,n+1}}{\Gamma(q_2 + 2)} f_2(x_j, y_j, z_j) \\ z_{n+1} = z_0 + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_3} \alpha_{3,j,n+1}}{\Gamma(q_3 + 2)} f_3(x_j, y_j, z_j) \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

avec les coefficients :

$$\begin{cases} \alpha_{i,j,n+1} = \begin{cases} n^{q_i+1} - (n - q_i)(n+1)^{q_i}, & j=0 \\ (n-j+2)^{q_i+1} + (n-j)^{q_i+1} - 2(n-j+1), & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j=n+1 \end{cases} \\ \beta_{i,j,n+1} = \frac{h^{q_i}}{q_i} ((n-j+1)^{q_i} - (n-j)^{q_i}) \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

II.4. Simulations de quelques systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

Dans la suite de ce chapitre, quelques systèmes chaotiques d'ordre entier et d'ordre fractionnaire à savoir:

- L'Oscillateur de Chua,
- Système de Lorenz,
- Système de Rössler
- Système de Chen,

Sont présent comme des exemples de test.

II.4.1 Circuit de Chua

II.4.1.1 Oscillateur de Chua d'ordre entier

Le circuit de Chua est un circuit électronique simple qui présente des phénomènes dynamiques non linéaires tels que la bifurcation ainsi que le chaos. Ce circuit se compose de cinq éléments : Deux condensateurs C_1 et C_2 , une inductance L , une résistance R et d'un non-linéaire résistance (g), connu sous le nom de diode de Chua comme le montre la figure suivante.

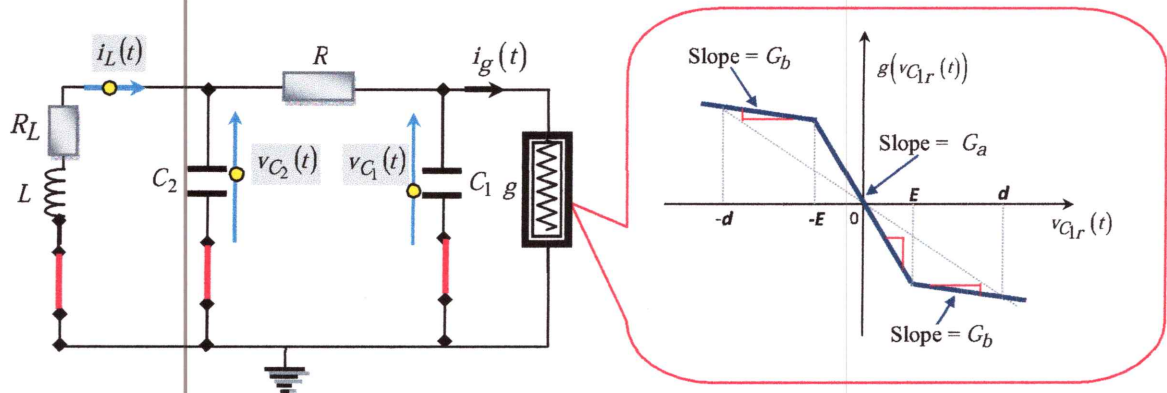


Figure II.10 : Circuit de Chua et les caractéristiques de la diode de Chua.

En appliquant les lois de Kirchhoff, on obtient les équations suivantes [35]:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G(V_2(t) - V_1(t)) - f(V_1(t))] \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} [G(V_1(t) - V_2(t)) + I_L(t)] \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{L} [-V_2(t) - R_L I_L(t)] \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

où $G=1/R$ représente la conductance, $I_L(t)$ est le courant traversant l'inductance L , $V_1(t)$ et $V_2(t)$ sont les tensions aux bornes des condensateurs C_1 et C_2 , respectivement, et $f(V_1(t))$ est la fonction non linéaire caractérisant la diode non linéaire g .

La caractéristique $i-v$ de cette diode est représentée sur la figure II.10, qui peut être décrite par l'équation d'état suivante:

$$I_g(t) = f(V_1(t)) = G_b V_1(t) + \frac{1}{2} (G_a - G_b) (|V_1(t) + B_p| - |V_1(t) - B_p|) \quad (\text{II.32})$$

Avec B_p la tension point d'arrêt, et $G_a < 0$ et $G_b < 0$ est une constantes appropriées. En effectuant les changements des variables suivants :

$$\begin{aligned} x &= V_1 / B_p, \quad y = V_2 / B_p, \quad z = I_L / B_p G, \\ \alpha &= C_2 / C_1, \quad \beta = C_2 / (L G^2), \quad \gamma = C_2 R / (L G), \\ m_1 &= G_b / G, \quad m_0 = G_a / G, \quad \tau = t |G / G_2|, \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

On obtient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha(y(t) - x(t) - f(x)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) - y(t) + z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = -\beta y(t) - \gamma z(t) \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

avec :

$$f(x) = m_1 x(t) + \frac{1}{2} (m_0 - m_1) \times (|x(t) + 1| - |x(t) - 1|) \quad (\text{II.35})$$

où α, β, γ sont des paramètres sans dimension. La fonction $f(x)$ est donnée dans (II.11) où m_1 et m_0 sont des constantes.

La figure II.11 présente le comportement du système de Chua classique pour $\alpha = 10.0$, $\beta = 14.87$, $\gamma = 0.0$, $m_0 = -1.27$ et $m_1 = -0.86$. Les conditions initiales sont $(x(0), y(0), z(0)) = (0.6, 0.1, 1.6)$. D'après le schéma de la figure II.10, on voit bien que le système se comporte de manière chaotique.

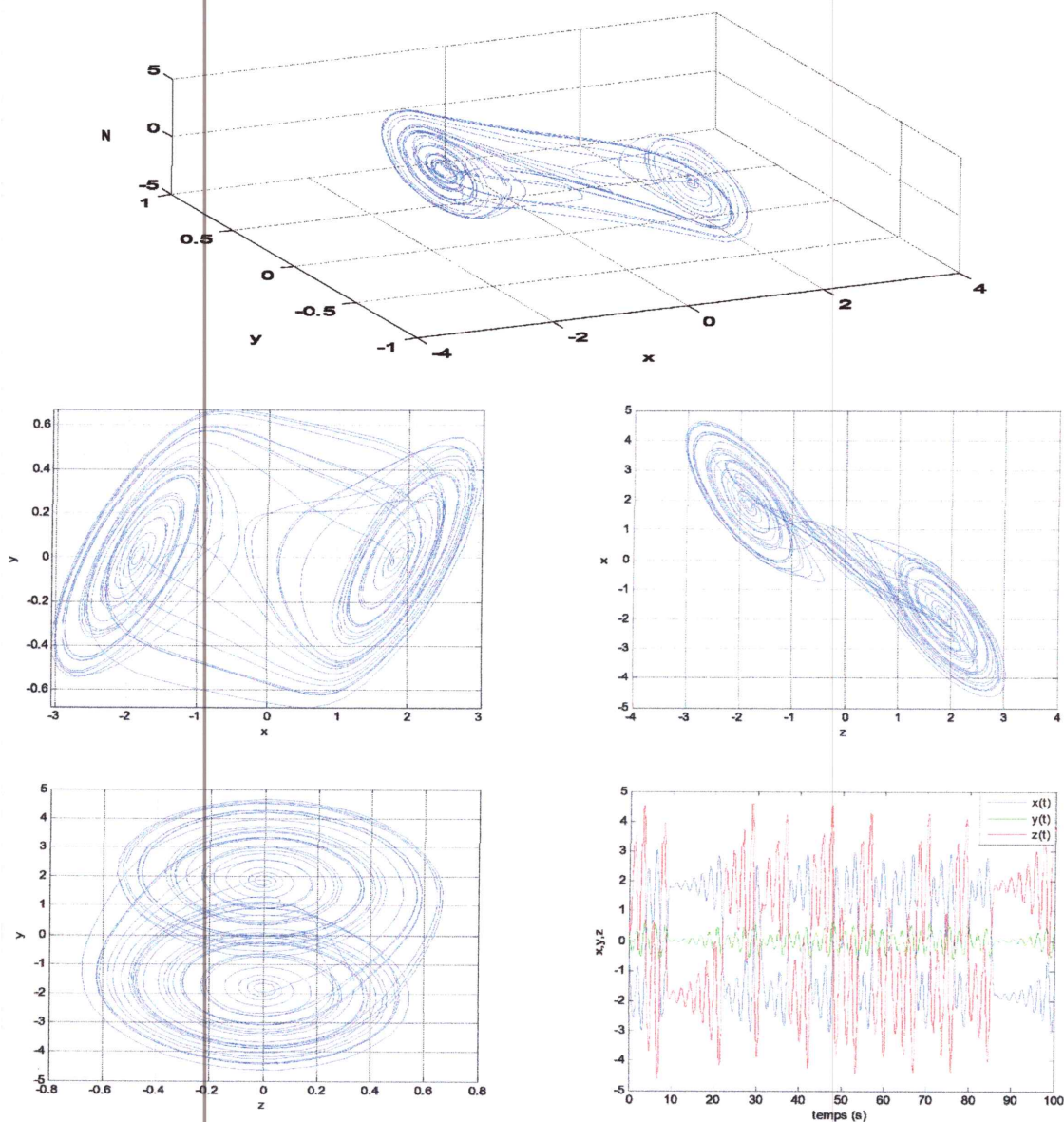


Figure II.11 : Evolution des variables d'état du système de Chua en 2D et en 3D.

II.4.1.2 Oscillateur de Chua d'ordre fractionnaire

Dans cette partie, nous nous intéressons au système de Chua d'ordre fractionnaire où les dérivées d'ordre entière $\frac{dV_1}{dt}$, $\frac{dV_2}{dt}$ et $\frac{dV_3}{dt}$ sont remplacées par des dérivées d'ordre fractionnaire $\frac{d^{q_1} V_1}{dt^{q_1}}$, $\frac{d^{q_2} V_2}{dt^{q_2}}$ et $\frac{d^{q_3} V_3}{dt^{q_3}}$, respectivement $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$. Dans ce cas, le modèle mathématique des variables d'état $V_1(t)$, $V_2(t)$ et $I(t)$ est donné par [28]:

$$\begin{cases} {}_0 D_t^{q_1} V_1(t) = \frac{1}{C_1 R_2} [V_2(t) - V_1(t)] - \frac{f(V_1(t))}{C_1} \\ {}_0 D_t^{q_2} V_2(t) = \frac{1}{C_2 R_2} [V_1(t) - V_2(t)] + \frac{I(t)}{C_2} \\ {}_0 D_t^{q_3} I(t) = \frac{1}{L_1} [-V_2(t) - R_L I(t)] \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

Ainsi, la représentation mathématique est donnée par :

$$\begin{cases} {}_0 D_t^{q_1} x(t) = \alpha (y(t) - x(t) - f(x)) \\ {}_0 D_t^{q_2} y(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ {}_0 D_t^{q_3} z(t) = -\beta y(t) - \gamma z(t) \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

où $f(x)$ est la fonction de non-linéarité donnée en (II.35).

Afin de simuler le circuit, on utilise la définition de Grunwald-Letnikov pour les systèmes d'ordre fractionnaire. Ce qui permet de rendre les équations (II.14) sous la forme suivante:

$$\begin{cases} x(t_k) = (\alpha(y(t_{k-1}) - x(t_{k-1}) - f(x(t_{k-1})))) h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)} x(t_{k-j}), \\ y(t_k) = (x(t_k) - y(t_{k-1}) + z(t_{k-1})) h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)} y(t_{k-j}), \\ z(t_k) = (-\beta y(t_k) - \gamma z(t_{k-1})) h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_3)} z(t_{k-j}), \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

avec,

$$f(x(t_k)) = m_1 x(t_k) + \frac{1}{2} (m_0 - m_1) \times (|x(t_k) + 1| - |x(t_k) - 1|)$$

Les résultats de simulation du système du Chua d'ordre fractionnaire avec la dimension effective $\bar{q} = 2.84$ et les paramètres: $\alpha = 10.725$, $\beta = 10.593$, $\gamma = 0.268$, $q_1 = 0.93$, $q_2 = 0.99$, $q_3 = 0.92$, $m_0 = -0.7872$, $m_1 = -1.1726$, le temps de simulation $T_{sim} = 100s$, les

conditions initiales : $(x(0), y(0), z(0)) = (0.2, 0.1, -0.1)$ et pour un pas d'intégration $h = 0.001$, sont données par la figure II.12.

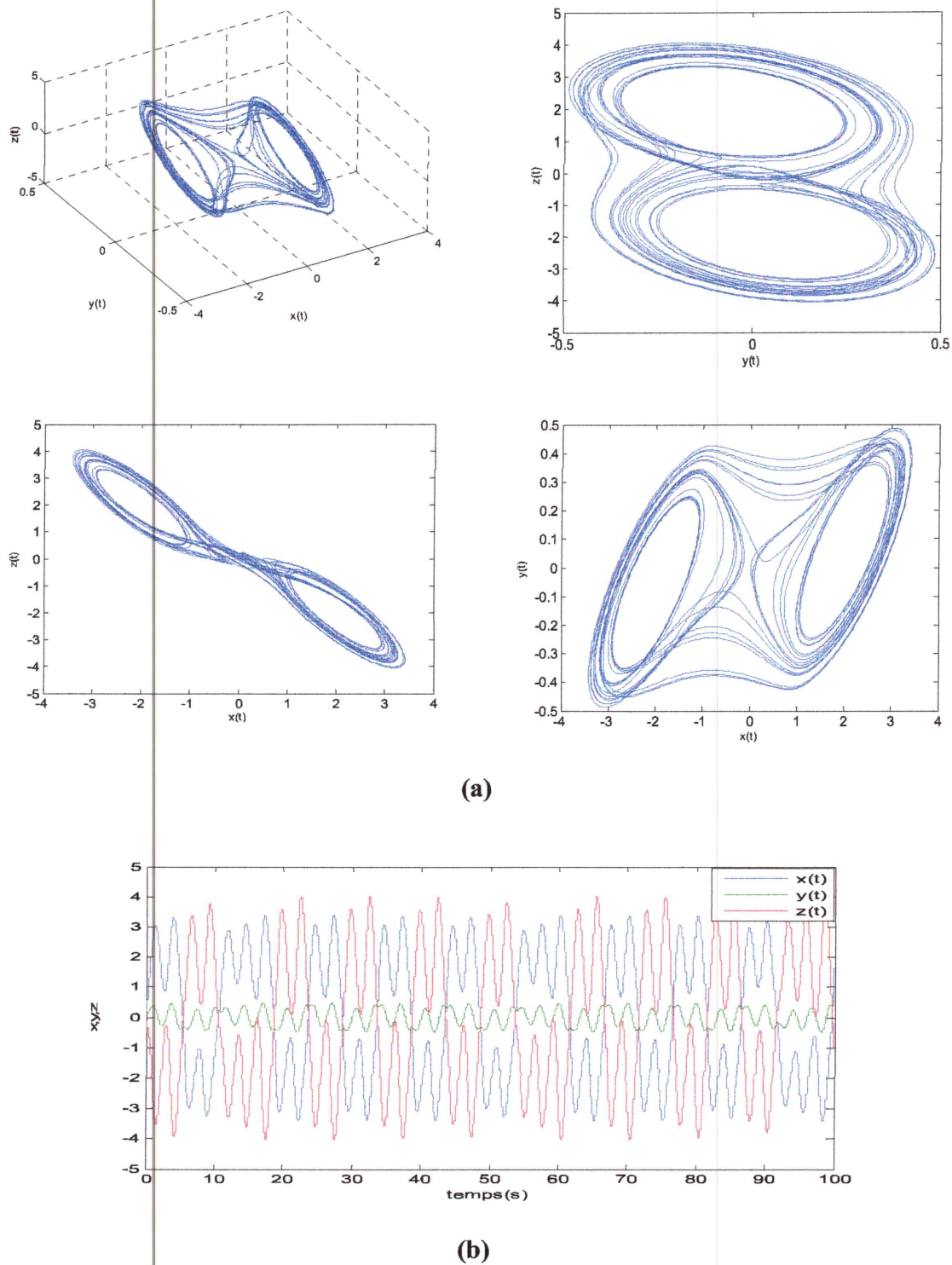


Figure II.12: Evolution du système du Chua d'ordre fractionnaire. (a) Plan de phase

(b) Evolution des variables d'état.

II.4.2 Système de Lorenz d'ordre fractionnaire

L'attracteur de Lorenz est une structure fractale correspondant au comportement à long terme de l'oscillateur de Lorenz. L'attracteur montre comment les différentes variables du système dynamique évoluent dans le temps en une trajectoire non périodique.

Les équations de Lorenz ont été développées en 1963 par le météorologiste Edward Lorenz pour imiter l'écoulement d'air de chauffage de dessous. Ils sont un ensemble de trois équations couplées qui décrivent l'évolution de temps de trois variables x , y et z . Le système de Lorenz d'ordre fractionnaire est donné par le modèle d'équations différentielles d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = \sigma(y(t) - x(t)) \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = x(t)(\rho - z(t)) - y(t) \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

où σ , ρ et β sont les paramètres de système. q_1, q_2, q_3 sont les ordres fractionnaires du système. Par application de la méthode de Grunwald-Letnikov de discrétisation, on obtient la forme numérique du système de Lorenz. Ce qui permet de rendre les équations (II.40) sous la forme échantillonnée :

$$\begin{cases} x(t_k) = (\sigma(y(t_{k-1}) - x(t_{k-1})))h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)} x(t_{k-j}) \\ y(t_k) = (x(t_k)(\rho - z(t_{k-1})) - y(t_{k-1}))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)} y(t_{k-j}) \\ z(t_k) = x(t_k)y(t_k) - \beta z(t_{k-1})h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_3)} z(t_{k-j}) \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

II.4.2.2 Résultats de simulation

Pour $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 2.66$, et les conditions initial $x(0) = 0.1$, $y(0) = 0.1$, $z(0) = 0.1$ et $T_{sim} = 100_s$.

Le comportement du système de Lorenz dans l'évolution des variables d'états, sous les conditions initiales $(x(0), y(0), z(0)) = (0.1, 0.1, 0.1)$ et les paramètres $\rho = 28$, $\sigma = 10$, $\beta = 2.66$ et $q_1 = q_2 = q_3 = 0.995$, est schématisé par la figure II.13

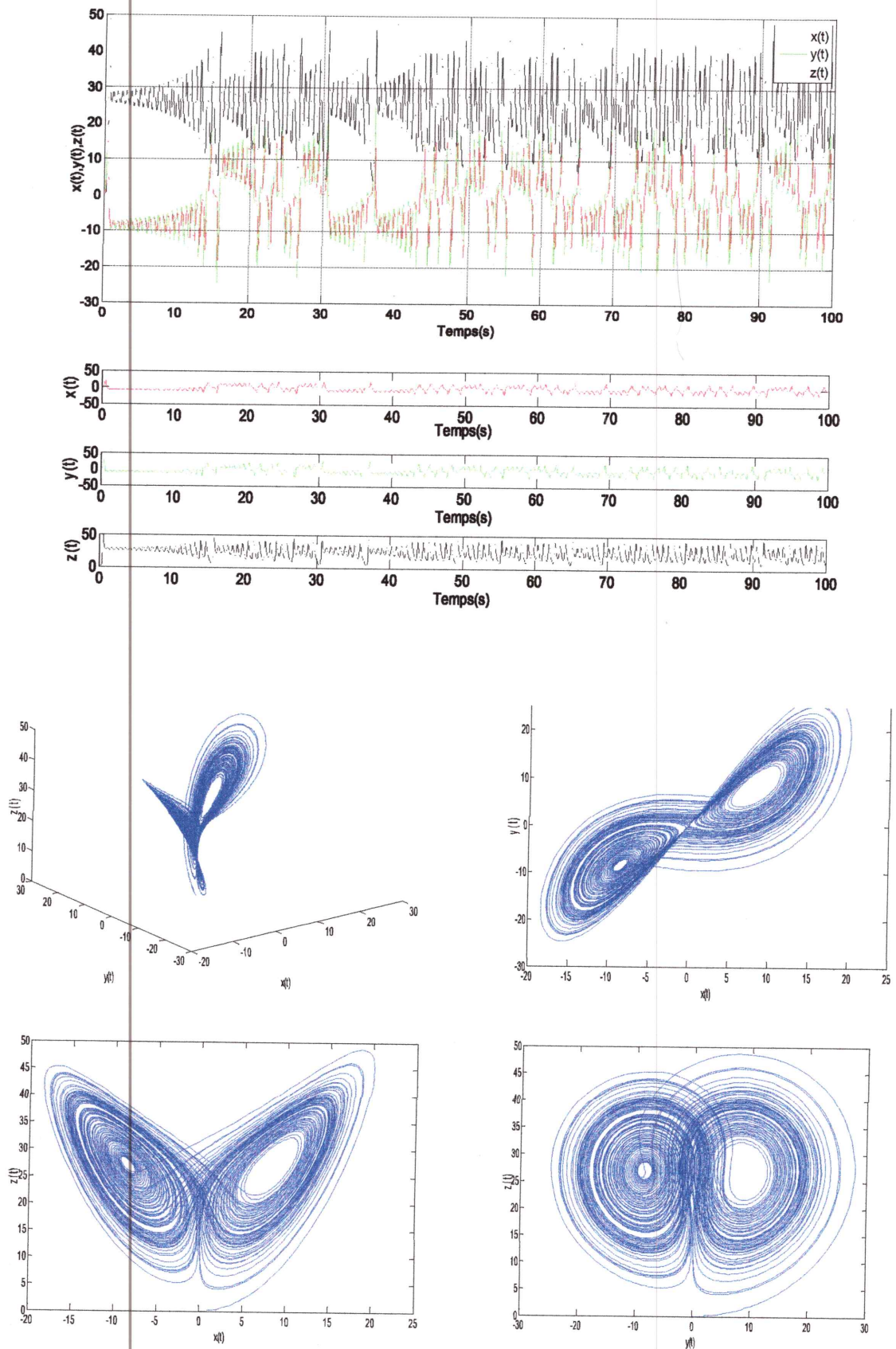


Figure II.13 : Évolution de l'espace de phase du système de Lorenz.

II.4.3 Système de Rössler d'ordre fractionnaire

A. Système de Rössler d'ordre entier

L'attracteur de Rössler est l'attracteur associé au système dynamique de Rössler, un système de 3 équations différentielles nonlinéaires [29] de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(y + z) \\ \frac{dy}{dt} = x + \alpha y \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

où a, b et c représentent les paramètres du système. Rössler a démontré que pour certaines valeurs de a, b et c , le système admet un état chaotique.

B. Système de Rössler d'ordre fractionnaire

Maintenant on considère une généralisation du système de Rössler d'ordre fractionnaire. Dans ce système, la dérivée conventionnelle est remplacée par une dérivée d'ordre fractionnaire. Il est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = -(y + z) \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = x + \alpha y \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

où a, b et c représentent les paramètres du système, q_1, q_2 et q_3 sont les ordres fractionnaires des système. Rössler a démontré que pour certaines valeurs de a, b et c , le système admet un état chaotique.

La figure (II.14) représente l'évolution des variables d'états du système de Rössler d'ordre fractionnaire pour :

- Les ordres $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$,
- Les paramètres $a = 0.5, b = 0.2$ et $c = 10$,
- Les conditions initiales $x(0) = 0.5 ; y(0) = 1.5; z(0) = 0.1$;

Pendant le temps de simulation 120s et le pas $h=0.005$.

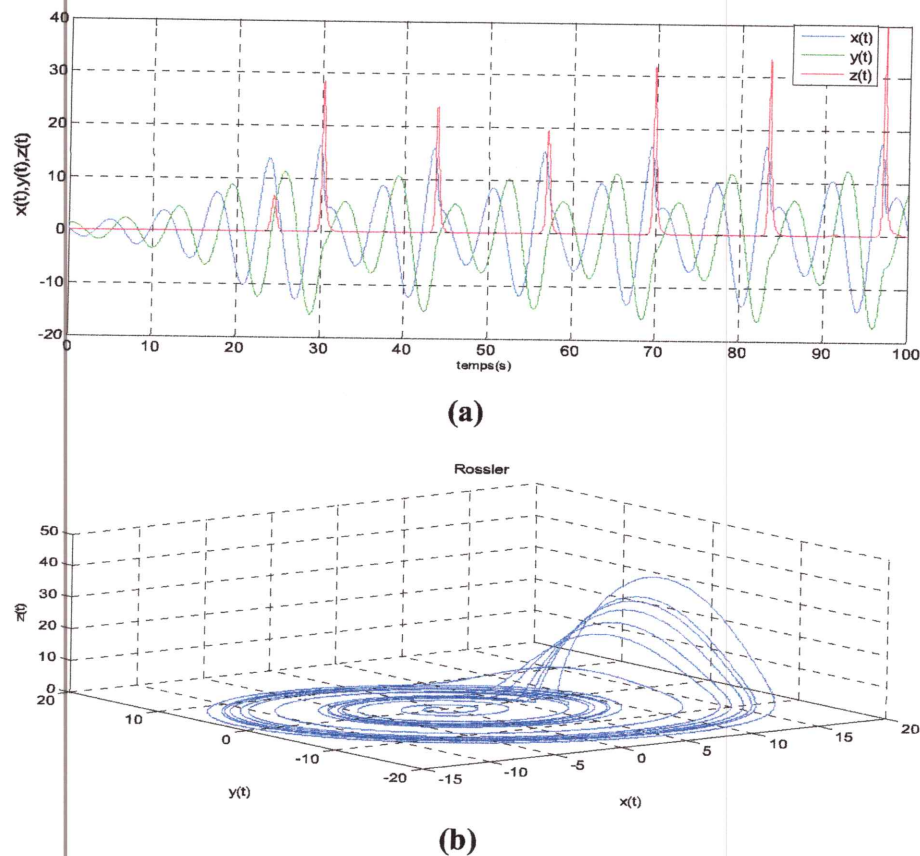


Figure II.14: Evolution des variables d'états (a). L'espace de phase (b) du Système de Rossler d'ordre fractionnaire.

II.4.4 Système de Chen d'ordre fractionnaire

En 1999, Chen a trouvé un système autonome tridimensionnel simple, qui ne est pas topologiquement équivalent à système de Lorenz et qui a un attracteur aussi chaotique. Le modèle de Chen est donné par le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{d^{q1}x}{dt^{q1}} = \alpha(y(t) - x(t)) \\ \frac{d^{q2}y}{dt^{q2}} = (c - \alpha)x(t) - x(t)z(t) + cy(t) \\ \frac{d^{q3}z}{dt^{q3}} = x(t)y(t) - bz(t) \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

La solution numérique du système de Chen d'ordre fractionnaire est réalisée par la méthode d'approximation de Grunwald-Letnikov (II.42) de la forme suivante :

$$\begin{cases} x(t_k) = (\alpha(y(t_{k-1}) - x(t_{k-1})))h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)} x(t_{k-j}) \\ y(t_k) = (dx(t_k) - x(t_k)z(t_{k-1}) + cy(t_{k-1}))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)} y(t_{k-j}) \\ z(t_k) = (x(t_k)y(t_k) - bz(t_{k-1}))h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_3)} \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

Les résultats de simulation pour un pas d'intégration $h=0.005$ et les paramètres : $a = 35, b = 28, c = -7$, les ordres $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$, les conditions initiales $(x(0), y(0), z(0)) = (-9, -5, 14)$ et $T_{\text{sim}}=100\text{s}$ sont données par la figure II.1

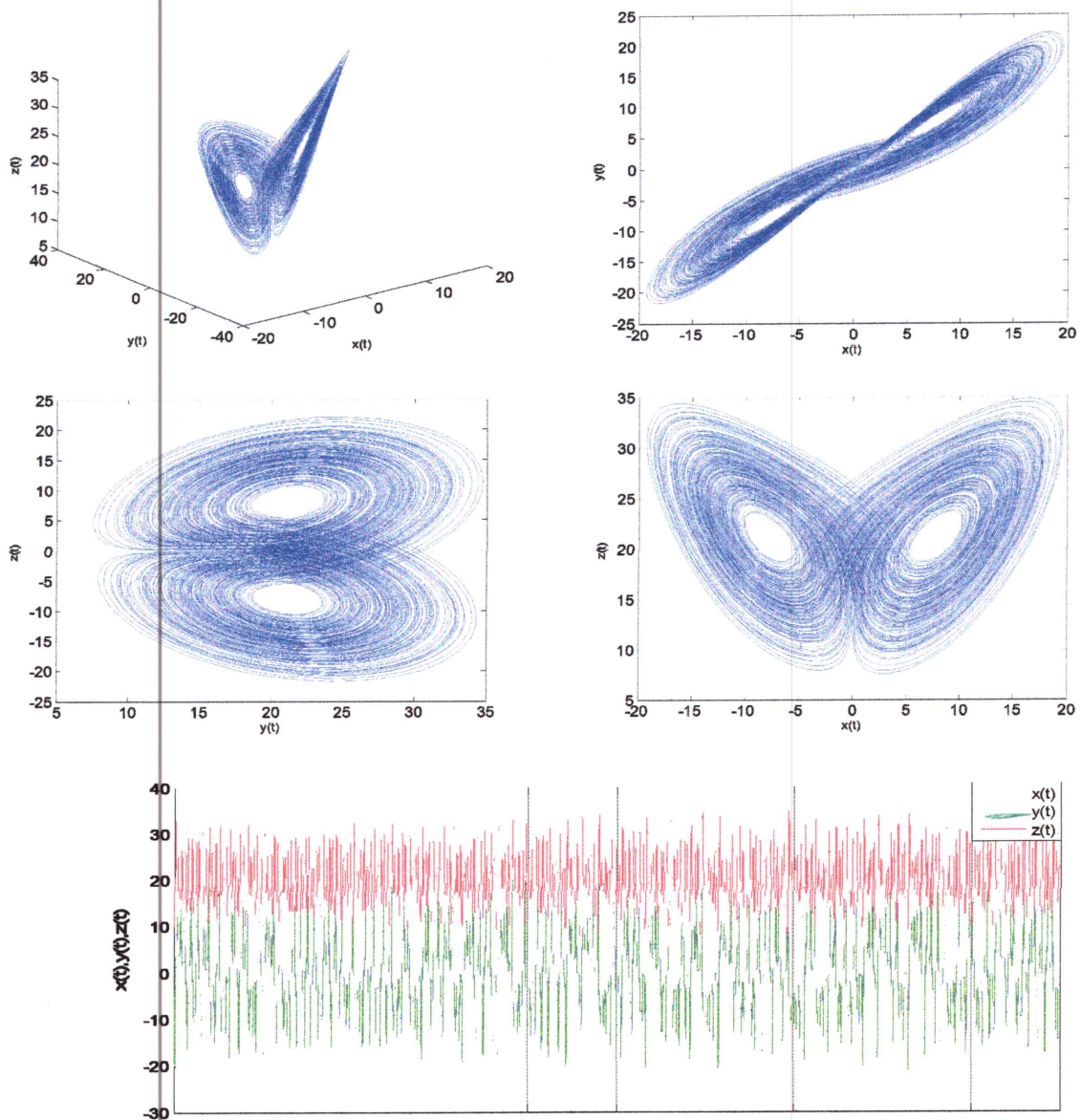


Figure II.15: L'évolution des variables d'états du système de Chen d'ordre fractionnaire.

II.5 Analyse de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire

L'étude de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire peut être réalisée en étudiant les solutions des équations différentielles linéaires ou non linéaires caractérisant ces systèmes.

II.5.1 Analyse de la stabilité des SLIT d'ordre fractionnaire

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps invariant et à dérivée d'ordre entier, nous avons bien qu'un système est stable si les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, donc situées dans la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes linéaires invariant dans le temps (SLIT) d'ordre fractionnaire de la forme :

$$D_t^q x(t) = A \cdot x(t) \quad (\text{II.45})$$

La définition de la stabilité est différente de celle des SLIT d'ordre entier où $q=1$. En effet, les systèmes d'ordre fractionnaire peuvent avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stable [12]. Désignons par λ_i les valeurs propres de la matrice A , le système (représentation d'état) est dit stable si la condition

$$|\arg \lambda_i| > q \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{II.46})$$

est satisfaite pour toutes les valeurs propres de A

Remarques :

- Pour $q=1$, on retrouve la condition de stabilité des SLIT d'ordre entier.
- Pour la représentation fonction de transfert, désignons par p_i les pôles du système. Ces pôles sont définis comme étant solution de l'équation $\det(s^\alpha I - A) = 0$. Ils sont donnés par l'expression :

$$p_i = \lambda_i^{1/\alpha} \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{II.47})$$

Alors, la condition de stabilité dans la sens entrée bornée-sortie bornée est réalisée si la condition $|\arg p_i| > \frac{\pi}{2}$

D'après le théorème sur la stabilité, il en découle les différentes régions stable est instable, dans la figure II.16.

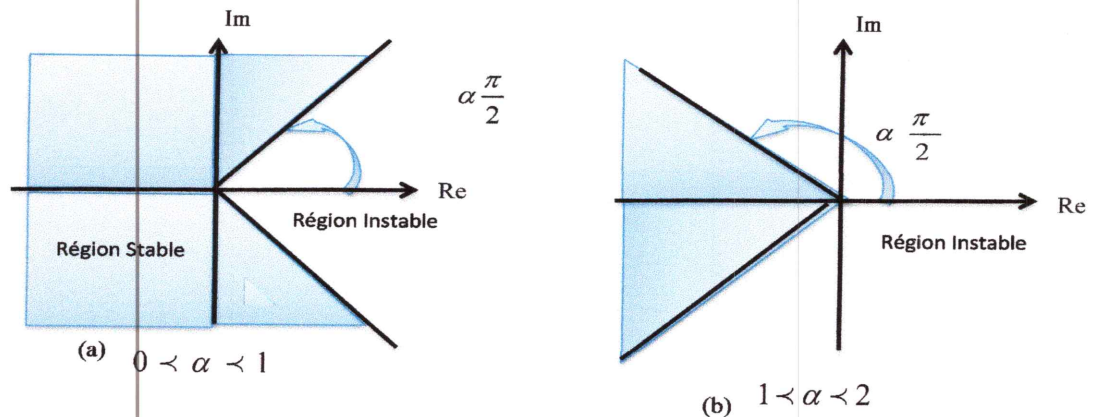


Figure II.16: Région de stabilité des SLIT d'ordre fractionnaire.

II.5.2 Analyse de la stabilité des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire

On désigne par stable tout système qui reprend son état d'équilibre après une perturbation, La théorie des systèmes non linéaires fait intervenir différentes notions de stabilité.

Il faut rappeler que la stabilité d'un point stationnaire garantit une stabilité locale. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante pour avoir une stabilité globale. Le système dynamique non linéaire est stable si tous ses états stationnaires sont stables.

Pour déterminer la stabilité d'un système dynamique non linéaire, on peut utiliser différentes méthodes mathématiques, parmi lesquelles on peut citer la méthode de Lyapounov qui permet l'étude de la stabilité autour d'un point d'équilibre [36].

L'approche de linéarisation est également utilisée. Cette approche consiste à linéariser le système non linéaire d'ordre fractionnaire :

$$D_t^\alpha x(t) = F(x(t)) \quad (\text{II.48})$$

autour d'un (ou des) point d'équilibre, puis en appliquant la théorie de stabilité des systèmes linéaires.

L'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire est un champ de recherche ouvert pour le développement des outils mathématiques simplifiant l'étude de ces systèmes. Dans le prochain chapitre, les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire font l'objet d'une étude détaillée concernant :

- Discrétisation et simulation,
- Contrôle et Analyse de la stabilité.

II. 6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. De ce fait, le chapitre est divisé en deux parties. La première partie apporte les notions de base sur la théorie des systèmes dynamiques, caractéristiques des systèmes chaotiques avec des exemples des systèmes chaotiques de Chua, Chen, Lorenz et Rossler d'ordre fractionnaire. La deuxième partie est consacrée à la simulation et à l'analyse de la stabilité des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Le contrôle et la stabilisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire fera l'objet du chapitre prochain.

CHAPITRE

III

Stabilisation des Systèmes Chaotiques
d'ordre Fractionnaire

3.1. Introduction	50
3.2. Problème de contrôle des systèmes chaotiques.....	50
3.3. Méthodes de contrôle des systèmes chaotique	55
3.4. Application.....	57
3.5. Conclusion.....	79

Nous présentons dans ce chapitre le problème de stabilisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Commençant par décrire le problème de contrôle des systèmes chaotiques. Ensuite, un panorama des méthodes de contrôle du chaos sera présenté. La commande par retour d'état dans leur version fractionnaire et ordinaire fera l'objet principal de ce chapitre. Des systèmes chaotiques et hyperchaotiques sont utilisés pour illustrer l'efficacité des méthodes utilisées.

III.1 Introduction

Une évolution chaotique peut être vue comme une succession de trajectoires périodiques instables. Mais ces trajectoires instables peuvent être changées en trajectoires stables à l'aide d'une technique qui s'appelle le *contrôle du chaos*.

L'objectif de contrôle du chaos est d'éliminer le mouvement chaotique. Une des caractéristiques qui distingue les systèmes chaotiques d'autres systèmes non linéaires est la notion d'attracteur chaotique. L'idée du contrôle est donc d'exploiter cette notion pour concevoir un contrôleur. De plus, l'instabilité d'un système chaotique se traduit en général par la divergence de trajectoires voisines, quelle que soit la nature de l'état en question. Pour stabiliser ces systèmes, il suffit donc d'appliquer au système une excitation externe (perturbation) afin de l'y ramener de nouveau l'état d'équilibre considéré.

III.2 Problème de contrôle des systèmes chaotiques

III.2.1 Etude préliminaire

Le problème de contrôle du chaos a attiré l'attention de plusieurs chercheurs et des ingénieurs durant les deux dernières décennies [37-38]. Son progrès est remarqué

essentiellement sur les techniques de conception de commande des classes des processus dynamiques non linéaires.

La formulation mathématique des problèmes de contrôles des processus chaotiques les plus célèbres sont précédés par la présentation des modèles de base des systèmes chaotiques qui sont souvent utilisés. Les modèles mathématiques les plus connus rencontrés dans la littérature pour le contrôle de chaos sont représentés par des systèmes des équations différentielles ordinaires ou les équations d'état :

La forme généralisée d'une classe des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire (sous l'action des signaux de commande $u(t)$) peut être formulée par un système d'équations différentielles d'ordre fractionnaire :

$$\begin{cases} D_t^q x(t) = F(x(t)) + u(t) = \overbrace{A \cdot x(t) + \rho(x(t))}^{F(x(t))} + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \\ x(t)|_{t=0} = x_0 \end{cases} \quad (III.1)$$



où ,

- $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est le vecteur des variables d'état décrivant le système chaotique,
- $u(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des signaux de commande,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice des paramètres du système (constant),
- $B = \text{diag}(sw_1, sw_2, \dots, sw_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de commande où $sw_i = \{0, 1\}$ représente un circuit de commutation permet d'activer ou désactiver la i^{eme} commande.
- $C = I^{n \times n}$ est la matrice de sortie (d'identité),
- $x(0) = x_0$ est le vecteur des conditions initiales,
- $q = (q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n)^T \in \mathbb{R}^n$ est l'ordre fractionnaire de dérivation du système. Si $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 1$, on parle d'une représentation d'un système chaotique ordinaire.
- $\rho(x(t)) \mapsto \tilde{A}_x(x) \cdot x(t) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (resp. $F(x(t))$) est une fonction non linéaire (généralement $\rho(0) = 0$).

Le choix des variables soumises à une excitation (signal de commande externe) $u(t)$, par action du circuit de commutation $sw_i = \{0,1\}$ dépend du degré d'influence de chaque variable et, aussi, dépend des objectifs de conception.

Pour un signal de référence $x^r(t)$ donné, qui peut être soit une consigne constante ou une fonction (trajectoire de référence), le problème est de concevoir une loi de commande par retour d'état (simple ou amélioré) $u(t)$ tels que les dynamiques des états deviennent stables.

III.2.2 Problèmes de stabilisation des systèmes chaotiques

Les problèmes de stabilisation de la solution périodique instable (orbite) surviennent dans la suppression de bruit ou élimination des harmoniques dans les systèmes de communication, appareils électroniques, et ainsi de suite, Ces problèmes sont distingués pour le fait que le système contrôlé est fortement oscillatoire ,c.à.d. les valeurs propres de la matrice du système linéarisé sont proches de l'axe imaginaire, ces vibrations peuvent être régulières ou quasi régulières ou même chaotique [39-40].

Les problèmes de suppression des oscillations chaotiques ou les réduire aux oscillations régulières ou les supprimer complètement, [41-42] peut être formalisé comme suit :

- Si $x_*(t)$ est une trajectoire oscillatoire périodique du système (III.1) sous la condition initiale $x_*(0)$ tel que,

$$x_*(t + T) = x_*(t) \quad (\text{III.2})$$

Pour stabiliser ce mouvement on doit ramener la solution $x(t)$ du système (III.1) vers $x_*(t)$ c.à.d:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_*(t)) = 0 \quad (\text{III.3})$$

où conduire la sortie du système $y(t)$ vers une fonction donnée $y_*(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_*(t)) = 0 \quad (\text{III.4})$$

Pour tout solution $x(t)$ de système (III.1) sous l'état initial $x_0 \in \Omega$, où Ω est un ensemble des conditions initiales donné, le problème se réduit à déterminer une fonction de contrôle $\Phi(x(t))$ (linéaire ou non linéaire), qui soit :

- Une commande en boucle ouverte: $u(t) = \Phi(x_0, t)$,
- Une commande de contre réaction d'état: $u(t) = \Phi(x(t))$,
- Une commande contre réaction en sortie: $u(t) = \Phi(y(t))$.

satisfaisant l'objectif du contrôle.

Cette formulation du problème de stabilisation de solution périodique est similaire au problème de poursuite de la théorie de contrôle conventionnelle. Néanmoins, il existe une distinction fondamentale est que pour contrôler les processus chaotiques, on a besoin d'atteindre l'objectif avec un niveau de contrôle minimale, la résolution de ce problème n'est pas évidente à cause de l'instabilité des trajectoires chaotiques $x_*(t)$.

La stabilisation d'un point d'équilibre instable est un cas spécial, c.à.d. $F(x_{*0}, 0) = 0$ pour $u(t) = 0$, alors le système (III.1) admet un point d'équilibre x_{*0} qui doit être stabilisé toujours en choisissant une loi de commande appropriée.

III.2.3 Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques

Le contrôle du chaos fait référence à la manipulation du comportement dynamique du système chaotique, dont l'objectif est la suppression du chaos ou d'imposer un comportement désiré. Plusieurs méthodes et algorithmes ont été proposés et développés pour réaliser le contrôle du chaos dans divers systèmes dynamiques non linéaires. Les méthodes développées sont basées sur différentes approches, du conventionnelles, du contrôle intelligent et du contrôle avancé.

- Contrôle en boucle ouverte.
- Contrôle par le PID conventionnel.
- Commande par retour d'état linéaire et non linéaire.
 - Retour d'état avec ou sans retard $K(x(t) - x(t - \tau))$.
 - Contrôle basé sur la méthode OGY
- Contrôle adaptatif.
- Contrôle prédictif.
- Commande robuste.
- Commande optimale.
- Contrôle neuronal.
- Commande floue.

Il est à noter que la méthode de commande par retour d'état est plus utilisée à cause de sa simplicité de conception et d'implantation.

III.2.3.1 Principe de commande par retour d'état ordinaire

La commande par retour d'état est un moyen de modifier le comportement en boucle fermée d'un système dynamique donné par une représentation d'état.

Le principe est de déterminer une commande telle que les pôles du système de la fonction de transfert du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfasse des spécifications d'amortissement, de rapidité, ...etc.

Les pôles de la fonction de transfert étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système. Soit un système SLIT décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Le signal de commande du système (autrement dit l'écart) doit être construit en soustrayant au signal de consigne un signal qui dépend du vecteur d'état, comme indique le schéma de figure III.1, par :

$$u(t) = -K \cdot x(t) \quad (\text{III.6})$$

où $K = \text{dig}(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ est la matrice des gains de commande (diagonale). On peut écrire cette loi sous forme matricielle ou vectorielle comme suit :

- Matricielle : $u(t) = - \begin{pmatrix} k_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & k_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$
- Vectorielle : $u(t) = -(k_1 \ \dots \ k_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$

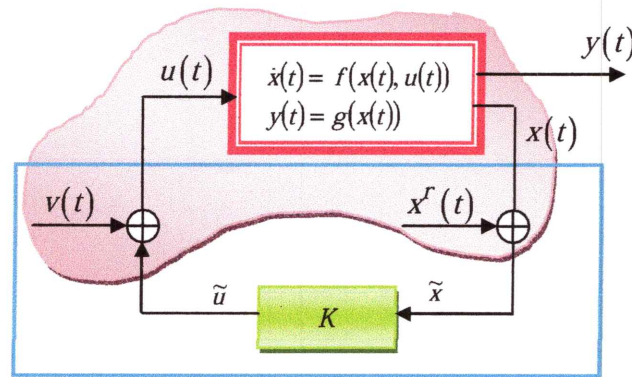


Figure III.1 : Boucle de contrôle par retour d'état.

Les équations du système en boucle fermée sont:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ u(t) = v(t) - K \cdot x(t) \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

L'équation d'état du système en boucle fermée s'écrit:

$$u(t) = x^r(t) + B[v(t) - K \cdot x(t)] = [A - BK] \cdot x(t) + Bv(t) \quad (\text{III.8})$$

Par conséquent, la matrice d'état du système en boucle fermée vaut: $(A - BK)$. La dynamique du système bouclé est donc fixée par les valeurs propres de la matrice $(A - BK)$; ces valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique:

$$\det(\lambda I - (A - BK)) = 0 \quad (\text{III.9})$$

On peut généraliser les notions précédentes aux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

III.3 Stabilisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

Dans cette partie, la commande par retour d'état, ordinaire et fractionnaire, est utilisée pour la stabilisation d'une classe des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. On considère le système $D_t^q x(t) = A \cdot x(t) + \rho(x(t))$ est une *superposition* de deux sous systèmes : Linéaire représenté par $A \cdot x(t)$ et d'une partie non linéaire $\rho(x(t))$.

- Le système $D_t^q x(t) = A \cdot x(t) + \rho(x(t)) + B \cdot u(t)$ est stabilisé par une commande par retour d'état à dérivée d'ordre fractionnaire du type :

$$u(t) = -K \cdot D_t^q x(t), \quad q \in \mathbb{R}^n \quad (\text{III.10})$$

tel que le système en boucle fermée

$$\begin{aligned} D_t^q x(t) &= A \cdot x(t) + \rho(x(t)) - B \cdot K \cdot D_t^q x(t) \\ \Rightarrow (I + B \cdot K) \cdot D_t^q x(t) &= A \cdot x(t) + \rho(x(t)) \\ \Rightarrow D_t^q x(t) &= (I + B \cdot K)^{-1} \cdot [A \cdot x(t) + \rho(x(t))] \\ &= \underbrace{(I + B \cdot K)^{-1} \cdot A}_{\tilde{A}} \cdot x(t) + \underbrace{(I + B \cdot K)^{-1} \cdot \rho(x(t))}_{\tilde{\rho}(x(t))} \\ &= \tilde{A} \cdot x(t) + \tilde{\rho}(x(t)) \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

est asymptotiquement stable, où la matrice diagonale des gains à déterminer par un choix judicieux de ces éléments. Par conséquent, notre objectif est de concevoir la matrice des gains de contre réaction K de telle sorte que la dynamique de l'état (III.11) est asymptotiquement stable, stabilité par morceau: une concerne la partie linéaire $\tilde{A} \cdot x(t)$ et l'autre concerne la partie non linéaire $\tilde{\rho}(x(t))$.

Theorem 1. Si la matrice des gains de contre réaction K est choisie de telle sorte que :

1. $(I + B \cdot K)^{-1}$ existe,
2. $\tilde{\rho}(x(t))$ satisfie $\rho(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\tilde{\rho}(x(t))\|}{\|x(t)\|} \mapsto 0$ et
3. $|\arg(\text{eig}(\tilde{A}))| > q \cdot \frac{\pi}{2}$,

alors le système contrôlé $D_t^q x(t) = A \cdot x(t) + \rho(x(t)) + B \cdot u(t)$ est asymptotiquement stable.

$\tilde{A} = (I + B \cdot K)^{-1} \cdot A$ et $\|\cdot\|$ est une norme Euclidienne. $q = \max(q_i)$, $(i=1, 2, \dots, n)$ et $\arg(\text{eig}(\tilde{A}))$ désigne l'argument de la valeur propre de la matrice \tilde{A} .

Remarque: Si $q=0$, alors on parle de la commande par retour d'état ordinaire, où $u(t) = -K \cdot D_t^{q=0} x(t) = -K \cdot x(t)$. Donc, le système en boucle fermée devient :

$$\begin{aligned}
D_t^q x(t) &= A \cdot x(t) + \rho(x(t)) + B \cdot D_t^0 x(t) \\
&= A \cdot x(t) + \rho(x(t)) - B \cdot K \cdot x(t) \\
&= \underbrace{(A - B \cdot K)}_{\mathfrak{A}} \cdot x(t) + \rho(x(t)) \\
&= \mathfrak{A} \cdot x(t) + \rho(x(t))
\end{aligned} \tag{III.12}$$

Theorem 2. Si la matrice des gains de contre réaction K est choisie de telle sorte que :

1. $\rho(x(t))$ satisfie $\rho(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\rho(x(t))\|}{\|x(t)\|} \mapsto 0$ et
2. $\left| \arg(\text{eig}(\tilde{\mathfrak{A}})) \right| > q \cdot \frac{\pi}{2}$,

alors le système contrôlé $D_t^q x(t) = A \cdot x(t) + \rho(x(t)) + B \cdot u(t)$ est asymptotiquement stable.

$\mathfrak{A} = A - B \cdot K$ et $\|\cdot\|$ est une norme Euclidienne. $q = \max(q_i)$, ($i=1,2,\dots,n$) et $\arg(\text{eig}(\tilde{\mathfrak{A}}))$ désigne l'argument de la valeur propre de la matrice $\tilde{\mathfrak{A}}$.

III.4 Applications

Les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, tels que l'oscillateur de Chua, le système Lorenz, système de Chen et le système hyperchaotique de Lorenz sont considérés comme des exemples pour démontrer l'efficacité des méthodes d'analyse et de contrôle utilisées.

III.4.1 Contrôle du système de Chua d'ordre fractionnaire

Dans cette partie, nous nous intéressons au contrôle du système de Chua d'ordre fractionnaire. Dans ce cas, la représentation mathématique est donnée par :

$$\begin{cases}
D_t^{q_1} x(t) = \alpha \cdot (y(t) - x(t) - f(x)) + u(t) \\
D_t^{q_2} y(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\
D_t^{q_3} z(t) = -\beta \cdot y(t) - \gamma \cdot z(t)
\end{cases} \tag{III.13}$$

avec,

$$f(x) = m_1 \cdot x(t) + \frac{1}{2} (m_0 - m_1) \cdot (|x(t) + 1| - |x(t) - 1|) \tag{III.14}$$

Les valeurs typiques des paramètres du système $\alpha = 10.725$, $\beta = 10.593$, $\gamma = 0.268$, $m_0 = -1.1726$ et $m_1 = -0.7872$, avec les conditions initiales $(x(0), y(0), z(0)) = (0.6, 0.1, 1.6)$ présentent un comportement chaotique comme mentionné dans le chapitre précédent.

Pour les deux cas considéré, l'objectif de contrôle est de générer une commande

- $u_x(t) = -K \cdot D_t^q x(t)$ dans une première application avec une matrice de gain choisi

$$K = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- $u_x(t) = -K \cdot x(t)$ dans une deuxième application avec un gain choisi

$$K = \begin{pmatrix} 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Permettant la suppression du comportement chaotique à partir d'un instant de temps donné, ou tout simplement conduire le système à se stabiliser autour de point d'équilibre (l'origine $(0,0,0)$). L'entrée de commande $u_x(t)$ est appliquée à la variable d'état $x(t)$ pour $t \geq 20[\text{sec}]$ comme indique la figure III.2.

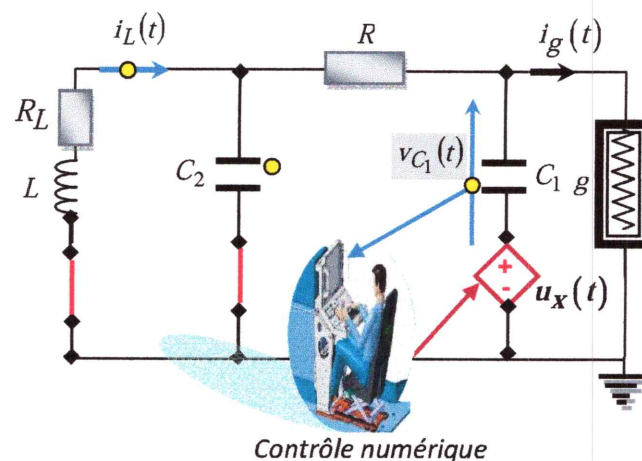
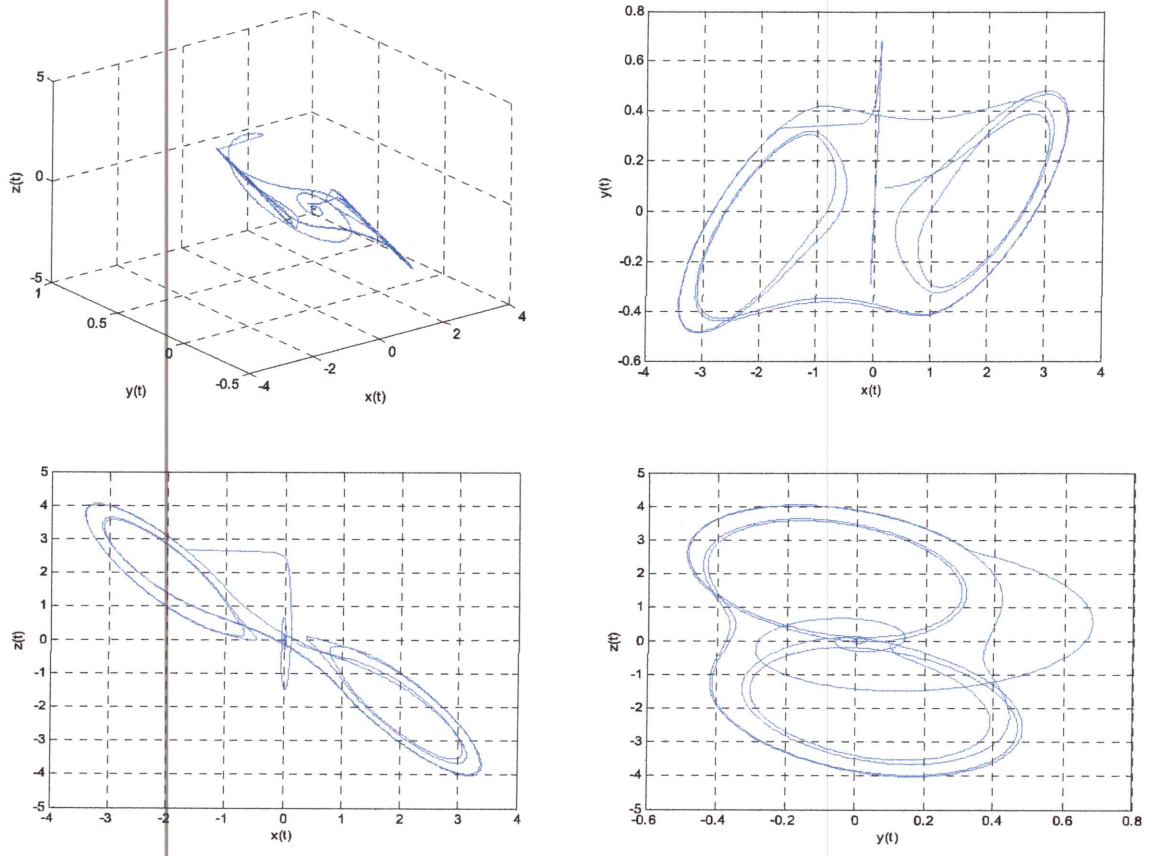
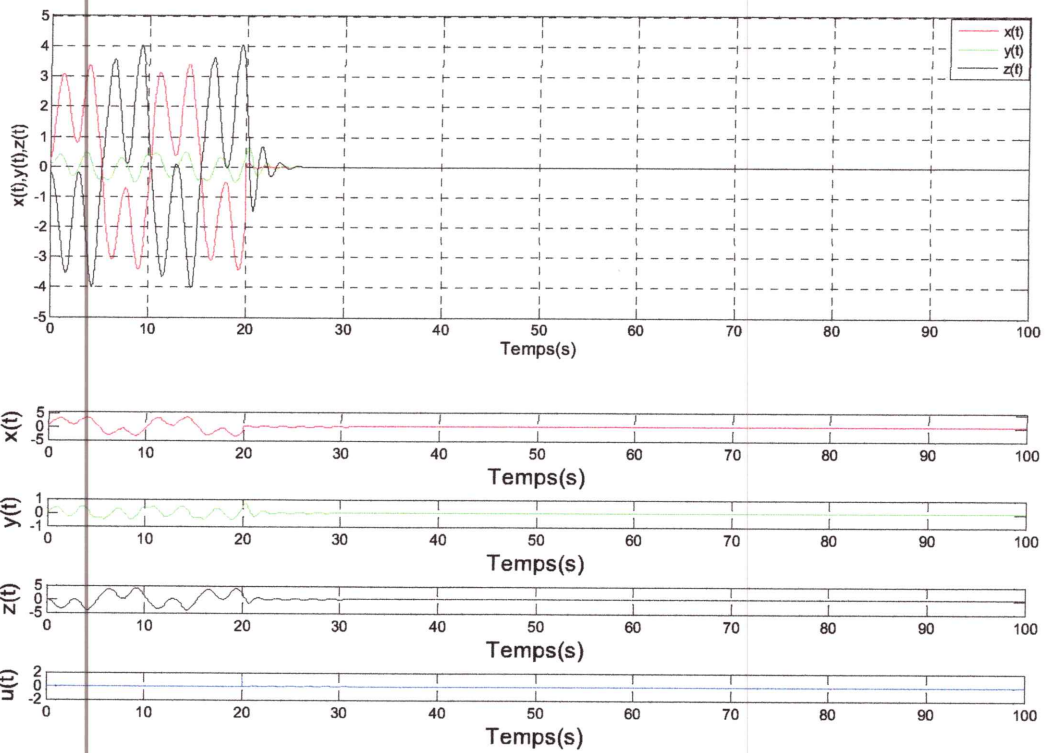


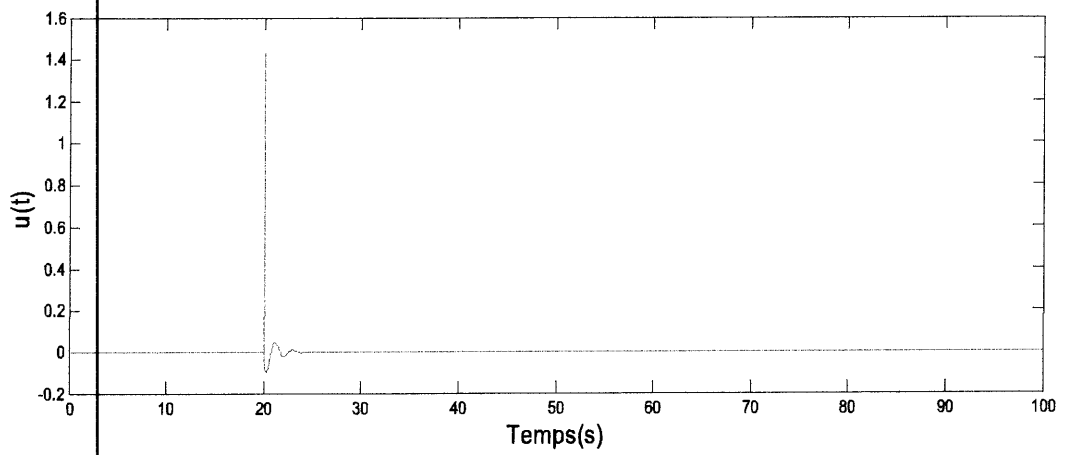
Figure III.2 : Contrôle du circuit de Chua.

Le comportement du système de Chua est réprésenté par le schéma de la figure III.3 pour le cas de la commande par retour d'état ordinaire par le schéma de la figure III.4 pour le cas de la commande par retour de dérivée de d'état d'ordre fractionnaire, respectivement.



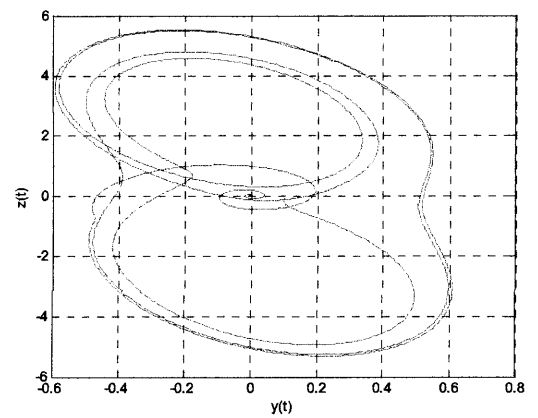
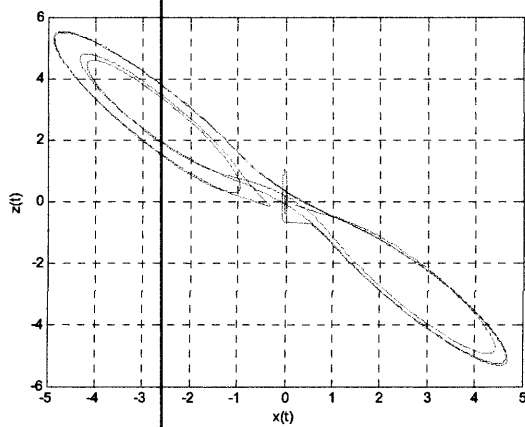
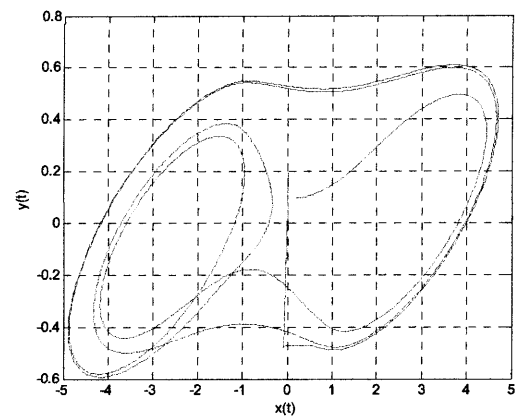
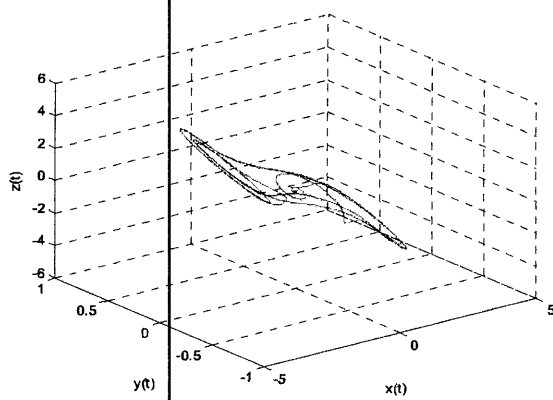
(a)





(b)

Figure III.3 : Evolution du Système de Chua d'ordre fractionnaire contrôlé. (a) Plan de phase. (b) Evolution des variables d'état et de la commande.



(a)

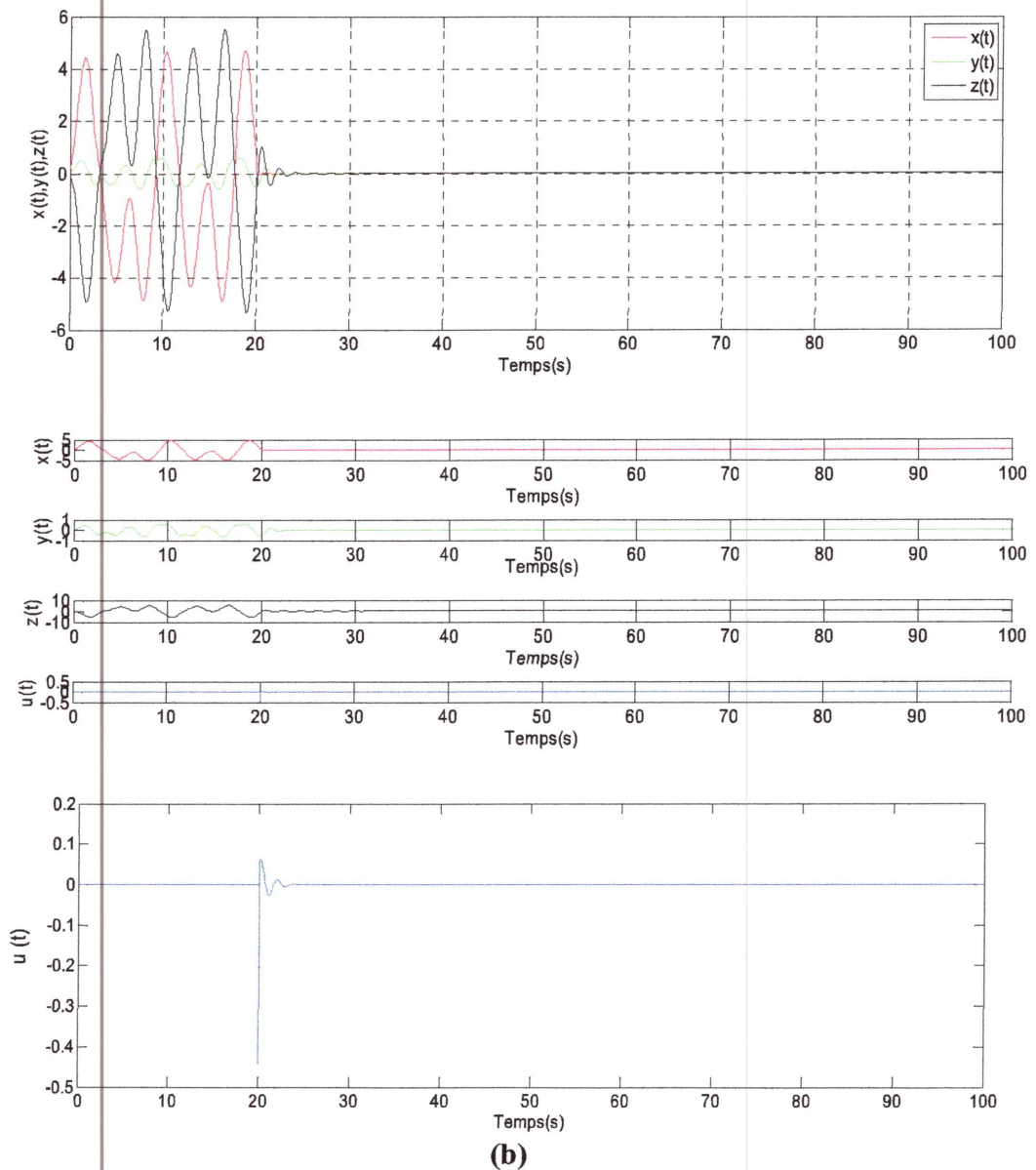


Figure III.4 : Système de Chua sous Contrôle par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire. (a) Plan de phase. (b) Evolution des variables d'état et de commande.

On remarque que les états de circuit de Chua ont été stabilisé autour du point d'équilibre $(0,0,0)$ d'une manière efficace ce qui implique que l'objectif de contrôle est atteint.

III.4.1.1 Analyse de la stabilité

a) Commande par retour d'état ordinaire

La stabilité du système dépend la valeur des paramètre $\alpha = 10.725$, $\beta = 10.593$, $\gamma = 0.268$, $q = 0.99$ et des valeurs de matrice des gains de contre réaction.

Le système est décrit par :

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}; \rho(x) = \begin{pmatrix} -\alpha f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.15})$$

telle que $\rho(x)$ est la partie non linéaire de système. Le système de Chua contrôlé est asymptotiquement stable avec un choix judicieux des gains de contre réaction satisfaisant les conditions du théorème 2.

1. On applique l'inégalité $|a+(-b)| \leq |a|+|-b|$, il est facile de vérifier que

$$\rho(x,t) = -\alpha \cdot g(x) \text{ satisfait } \rho(x(0),0) = 0 \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\rho(x(t),t)\|}{\|x(t)\|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\alpha \cdot m_1 \cdot x + 0.5 \cdot \alpha \cdot (m_0 - m_1) \cdot (|x+1| - |x-1|))^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\alpha \cdot m_1 \cdot x + 0.5 \cdot \alpha \cdot (m_0 - m_1) \cdot (|x|+1 - |x|+1))^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\alpha \cdot m_1 \cdot x)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \cdot |m_1| \cdot \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}} \mapsto 0 \end{aligned}$$

2. Pour étudier la stabilité du système, il faut calculer les valeurs propres du système pour chaque point fixe. Cela revient à étudier le polynôme caractéristique de la matrice $[\lambda I - \mathfrak{A}]$, où $\mathfrak{A} = A - B \cdot K$. Les valeurs propres de $\mathfrak{A} = A - B \cdot K$ sont :

- $\lambda_{1,2} = -0.1710 \pm 3.1180 \cdot j$ et
- $\lambda_3 = -11.6510$.

Ce qui conduit à la réalisation de la condition 2 du théorème 3, où

- $|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.6256 > 0.99 \frac{\pi}{2} = 1.5551$ et
- $|\arg(\lambda_3)| = \pi > 1.5551$,

donc le système est asymptotiquement stable.

b) Commande par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire

Le système de Chua contrôlé est asymptotiquement stable avec un choix judicieux des gains de contre réaction satisfaisant les conditions du théorème 1.

1. $\rho(x(0),0)=0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\rho(x(t),t)\|}{\|x(t)\|}$ est déjà vérifiée.
2. Pour étudier la stabilité du système, il faut calculer les valeurs propres du système pour chaque point fixe. Cela revient à étudier le polynôme caractéristique de la matrice $[\lambda I - \tilde{A}]$, où $\tilde{A} = (I + B \cdot K)^{-1} \cdot A$. Les valeurs propres de $\tilde{A} = (I + B \cdot K)^{-1} \cdot A$ sont :
 - $\lambda_{1,2} = -0.2311 \pm 3.0459 \cdot j$ et
 - $\lambda_3 = -6.764$.

Ce qui conduit à la réalisation de la condition 2 du théorème 3, où

- $|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.6465 > 0.99 \frac{\pi}{2} = 1.5543$ et
- $|\arg(\lambda_3)| = \pi > 1.5543$,

donc le système est asymptotiquement stable.

III.4.2 Contrôle du système de Lorenz d'ordre fractionnaire

Dans cette partie, nous nous intéressons au contrôle du système de Lorenz d'ordre fractionnaire. Dans ce cas, la représentation mathématique est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = \sigma(y(t) - x(t)) \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = x(t)(\rho - z(t)) - y(t) + u_1 \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = x(t)y(t) - \beta z(t) + u_2 \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Les valeurs typiques des paramètres du système $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 2.66$; et l'ordre $q_1 = q_2 = q_3 = 0.995$; avec les conditions initial $(x(0), y(0), z(0)) = (0.1, 0.1, 0.1)$ présentent un comportement chaotique comme mentionné dans le chapitre précédent. Pour les deux cas considéré, l'objectif de contrôle est de générer une commande.

- $u_x(t) = -K \cdot D_t^q x(t)$ dans une première application avec une matrice de gain choisi

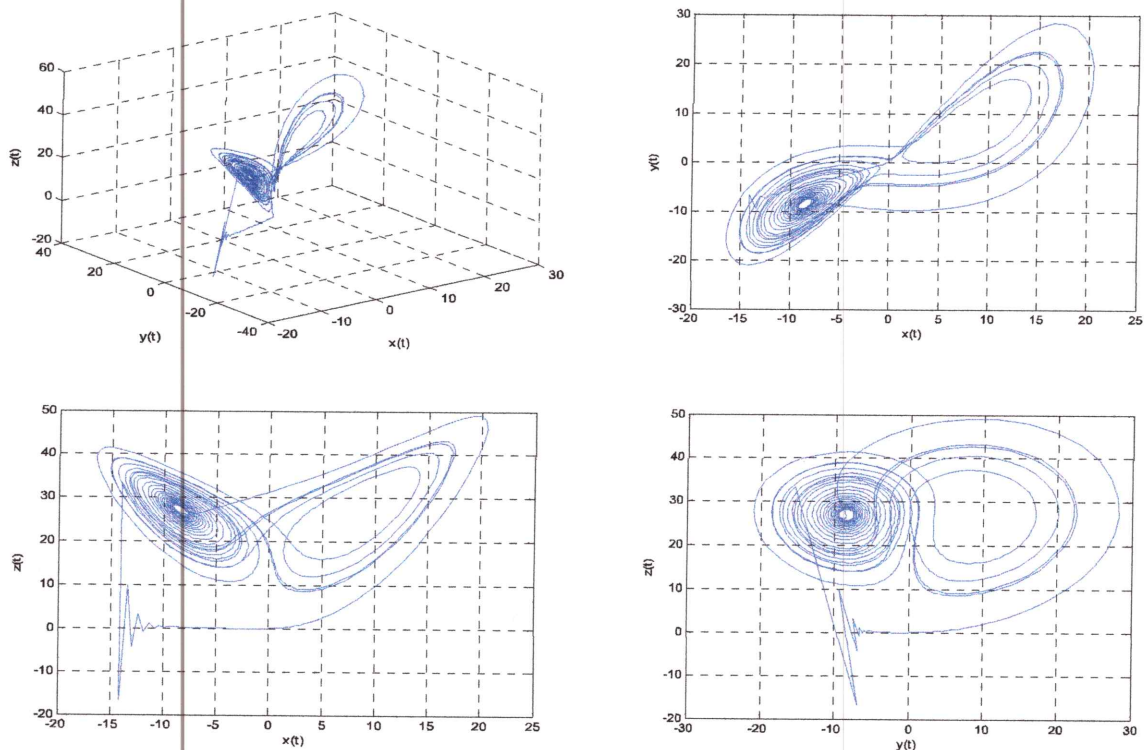
$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0.89 \end{pmatrix},$$

- $u_x(t) = -K \cdot x(t)$ dans une deuxième application avec un gain choisi

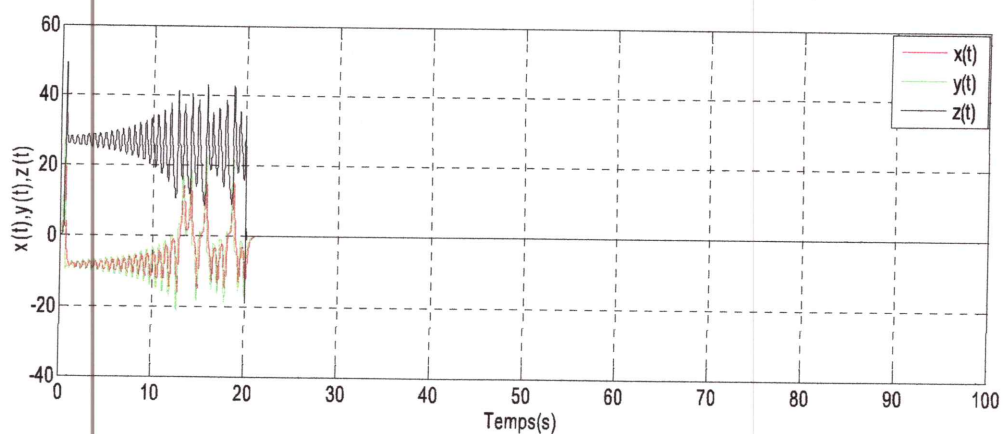
$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix},$$

Permettant la suppression du comportement chaotique à partir d'un instant de temps donné, ou tout simplement conduire le système à se stabiliser autour de point d'équilibre (l'origine $(0,0,0)$). L'entrée de commande est appliquée à la variable d'état $y(t)$ et $z(t)$ pour $t \geq 20$ [sec].

Le comportement du système de Lorenz est représenté par le schéma de la figure III.5 pour le cas de la commande par retour d'état ordinaire par le schéma de la figure III.6 pour le cas de la commande par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire, respectivement.

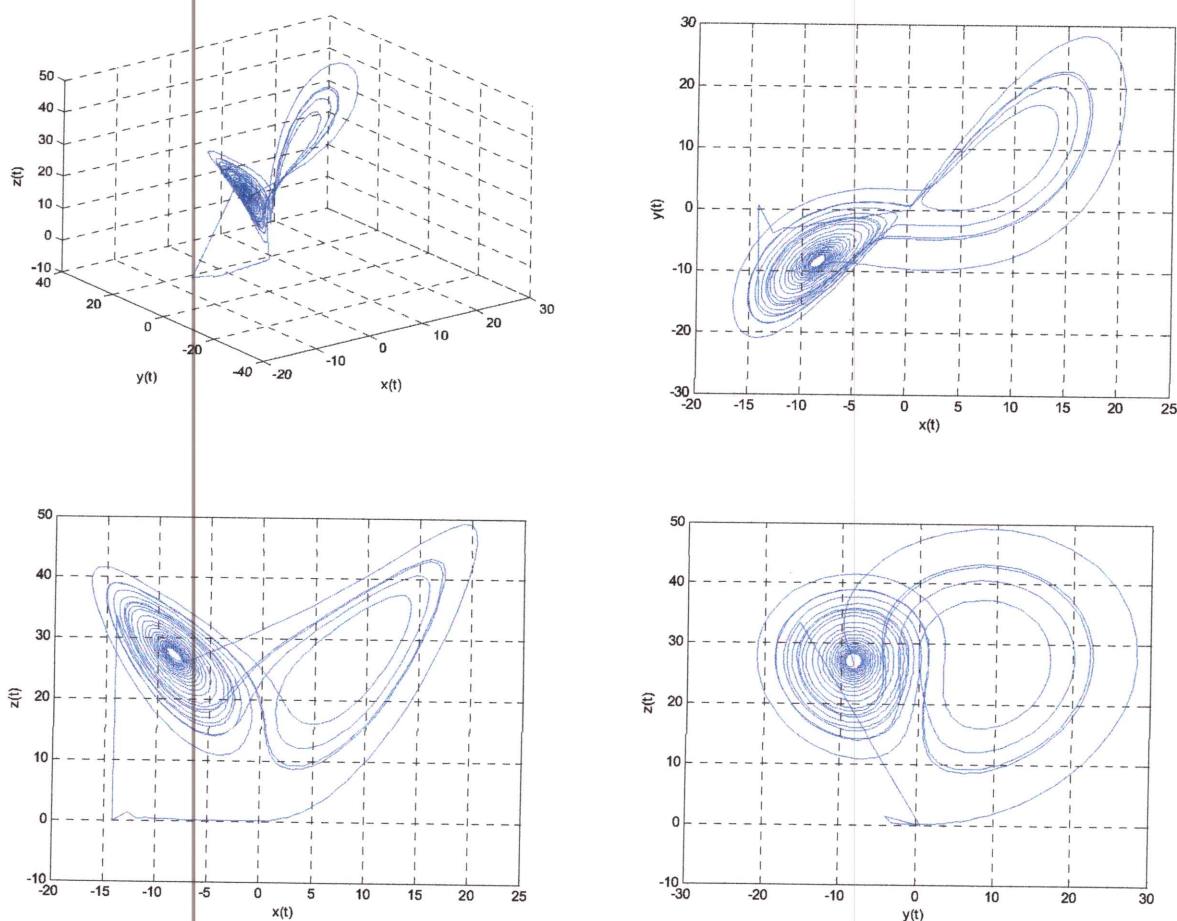


(a)

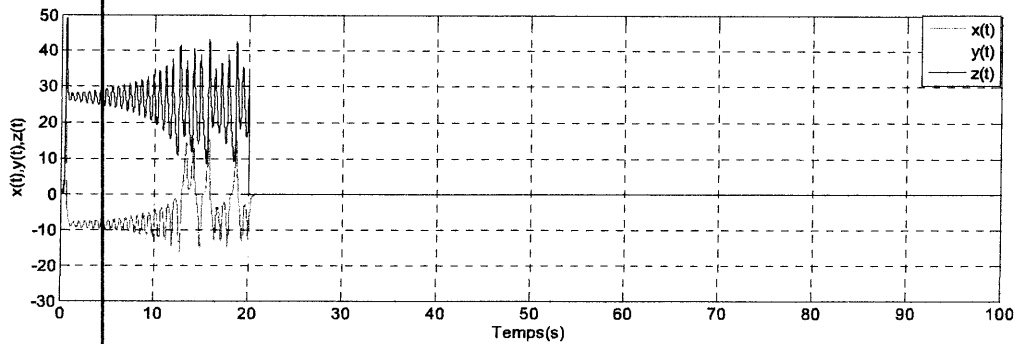


(b)

Figure III.5: Système de Lorenz sous contrôle par retour d'état ordinaire.
(a) Plan de phase, (b) Evolution des variables d'état.



(a)



(b)

Figure III.6: Système de Lorenz sous Contrôle par retour de dérivée d'état d'ordre Fractionnaire. (a) Plan de phase. (b) Evolution des variables d'état.

III.4.2.1 Analyse de la stabilité

a) Commande par retour d'état ordinaire

La stabilité du système dépend la valeur des paramètres $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 2.66$; $q = 0.995$ et des valeurs de matrice des gains de contre réaction. Le système est décrit par :

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \rho(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix} \quad (\text{III.17})$$

telle que $\rho(x)$ est la partie non linéaire de système. Le système de Lorenz contrôlé est asymptotiquement stable avec un choix judicieux des gains de contre réaction satisfaisant les conditions du théorème 2.

1. vérifier que $\rho(x(0),0)=0$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\rho(x(t))\|}{\|x(t)\|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(-xz)^2 + (xy)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2(z^2 + y^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|\sqrt{(z^2 + y^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2. Pour étudier la stabilité du système, il faut calculer les valeurs propres du système pour chaque point fixe. Cela revient à étudier le polynôme caractéristique de la matrice $[\lambda I - \mathfrak{A}]$, où $\mathfrak{A} = A - B \cdot K$. Les valeurs propres de $\mathfrak{A} = A - B \cdot K$ sont :

- $\lambda_1 = -22.8129, \lambda_2 = -4.1600$ et
- $\lambda_3 = -11.8529$

Ce qui conduit à la réalisation de la condition 2 du théorème 3, où

- $|\arg \lambda_{1,2}| = \pi > 0.995 \frac{\pi}{2} = 1.5622$ et
- $|\arg \lambda_3| = 0$

b) Commande par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire

Le système de Lorenz contrôlé est asymptotiquement stable avec un choix judicieux des gains de contre réaction satisfaisant les conditions du théorème 1.

3. $\rho(x(0), 0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\rho(x(t), t)\|}{\|x(t)\|}$ est déjà vérifiée.

4. Pour étudier la stabilité du système, il faut calculer les valeurs propres du système pour chaque point fixe. Cela revient à étudier le polynôme caractéristique de la matrice $[\lambda I - \tilde{\mathfrak{A}}]$, où. Les valeurs propres de $\tilde{\mathfrak{A}} = (I + B \cdot K)^{-1} \cdot A$ sont:

$$\tilde{\mathfrak{A}} = (I + B \cdot K)^{-1} \cdot A$$

- $\lambda_1 = -18.2729, \lambda_2 = -1.4074$ et
- $\lambda_3 = 11.8529$

Ce qui conduit à la réalisation de la condition 2 du théorème 3, où

- $|\arg \lambda_{1,2}| = \pi > 0.995 \frac{\pi}{2} = 1.5622$ et
- $|\arg \lambda_3| = 0$

III.4.3 Contrôle du système de Chen d'ordre fractionnaire

Une autre application de la commande par retour d'état est le contrôle du système de Chen d'ordre fractionnaire. Ce système de Chen sous contrôle est décrit par des équations d'ordre fractionnaire suivant:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = \alpha(y(t) - x(t)) + u_1 \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = (c - \alpha)x(t) - x(t)z(t) + cy(t) + u_2 \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = x(t)y(t) - bz(t) + u_3 \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Les valeurs typiques des paramètres du système $a = 35$, $c = 28$, $b = 3$, $d = -7$, et l'ordre $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$, avec les conditions initiales $(x(0), y(0), z(0)) = (-9, -5, 14)$ présentent un comportement chaotique comme mentionné dans le chapitre précédent.

Pour les deux cas considéré, l'objectif de contrôle est de générer une commande

- $u_x(t) = -K \cdot D_t^q x(t)$ dans une première application avec une matrice de gain choisi

$$K = \begin{pmatrix} 0.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0.98 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix},$$

- $u_x(t) = -K \cdot x(t)$ dans une deuxième application avec un gain choisi

$$K = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.55 \end{pmatrix},$$

Permettant la suppression du comportement chaotique à partir d'un instant de temps donné, ou tout simplement conduire le système à se stabiliser autour de point d'équilibre (l'origine $(0,0,0)$). L'entrée de la commande est appliquée à la variable d'état $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ pour $t \geq 20$ [sec].

Le comportement du système de Chen est représenté par le schéma de la figure III.7 pour le cas de la commande par retour d'état ordinaire par le schéma de la figure III.8 pour le cas de la commande par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire, respectivement.

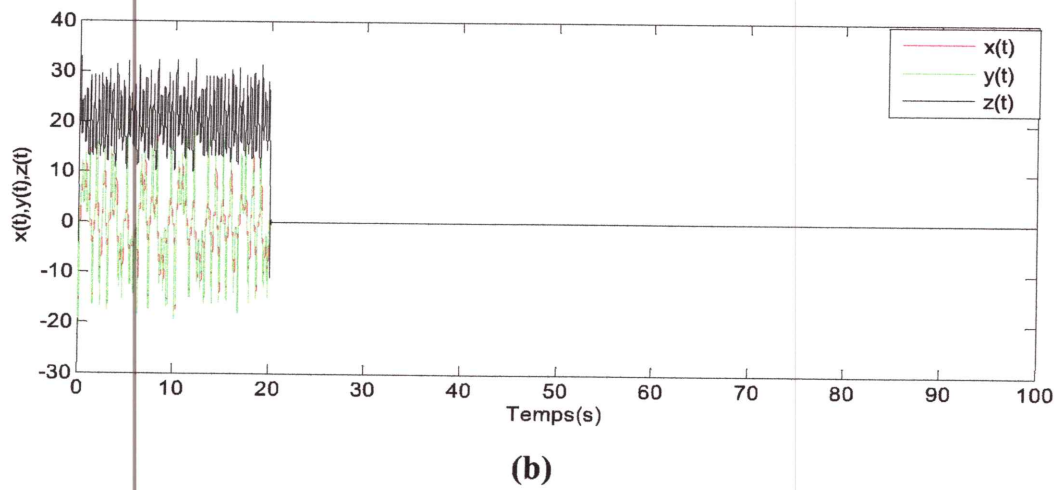
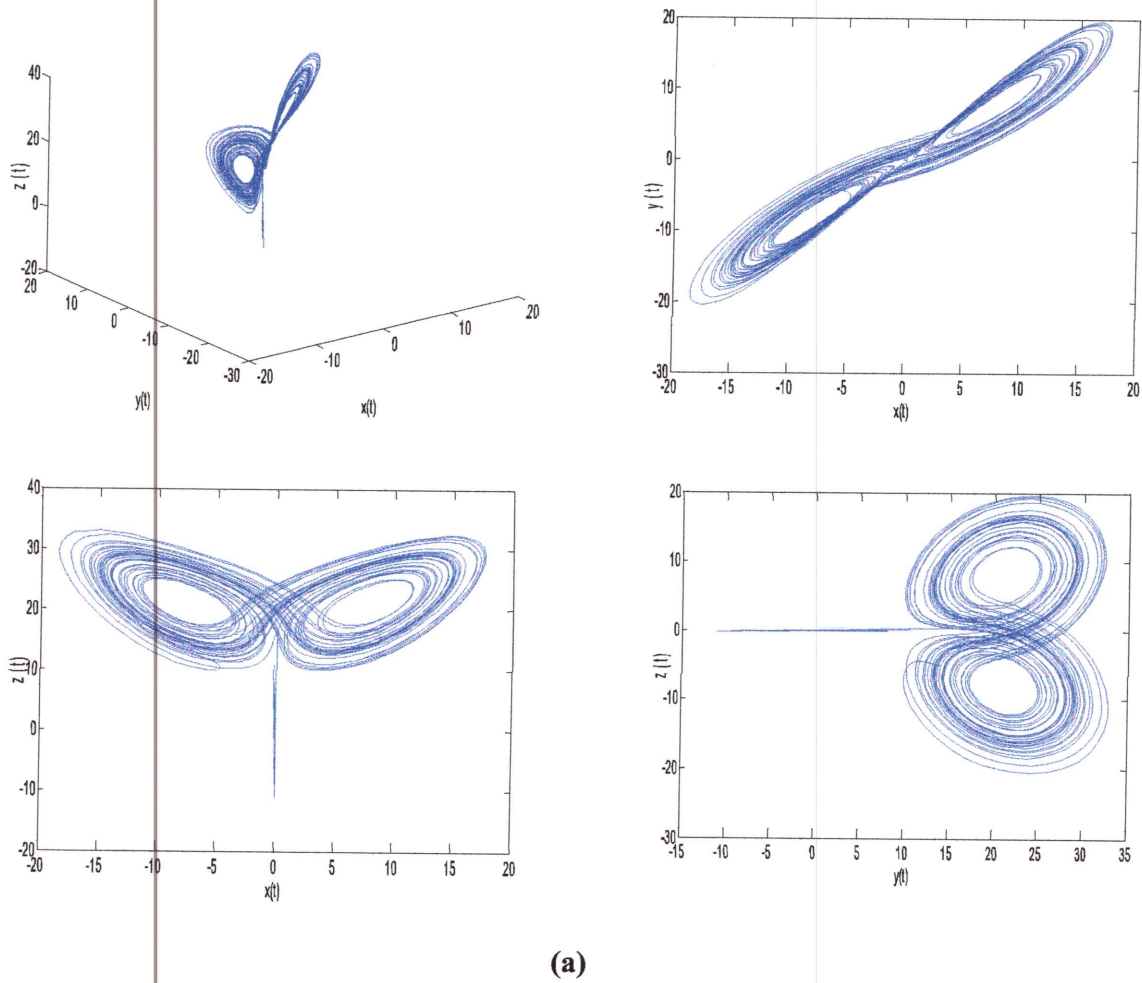


Figure III.7: Système de Chen sous contrôle par retour d'état ordinaire.

(a) Plan de phase. **(b)** Evolution des variables d'état.

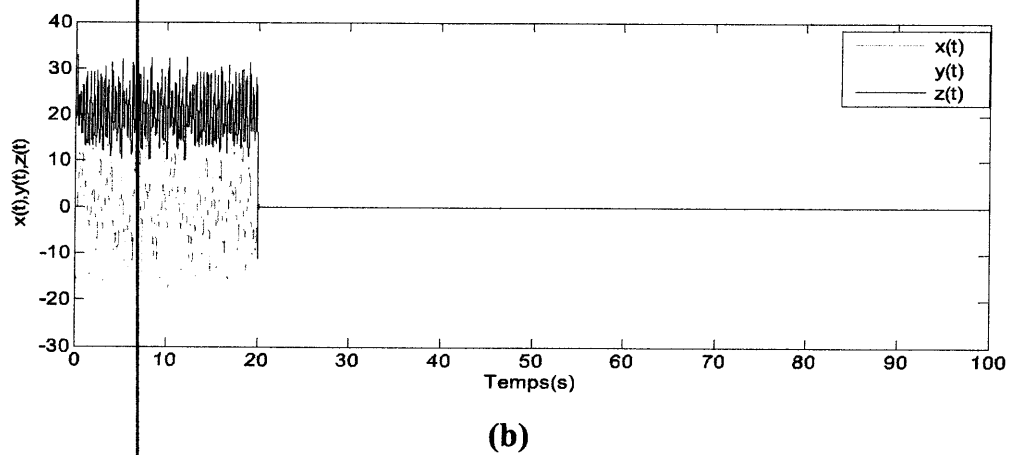
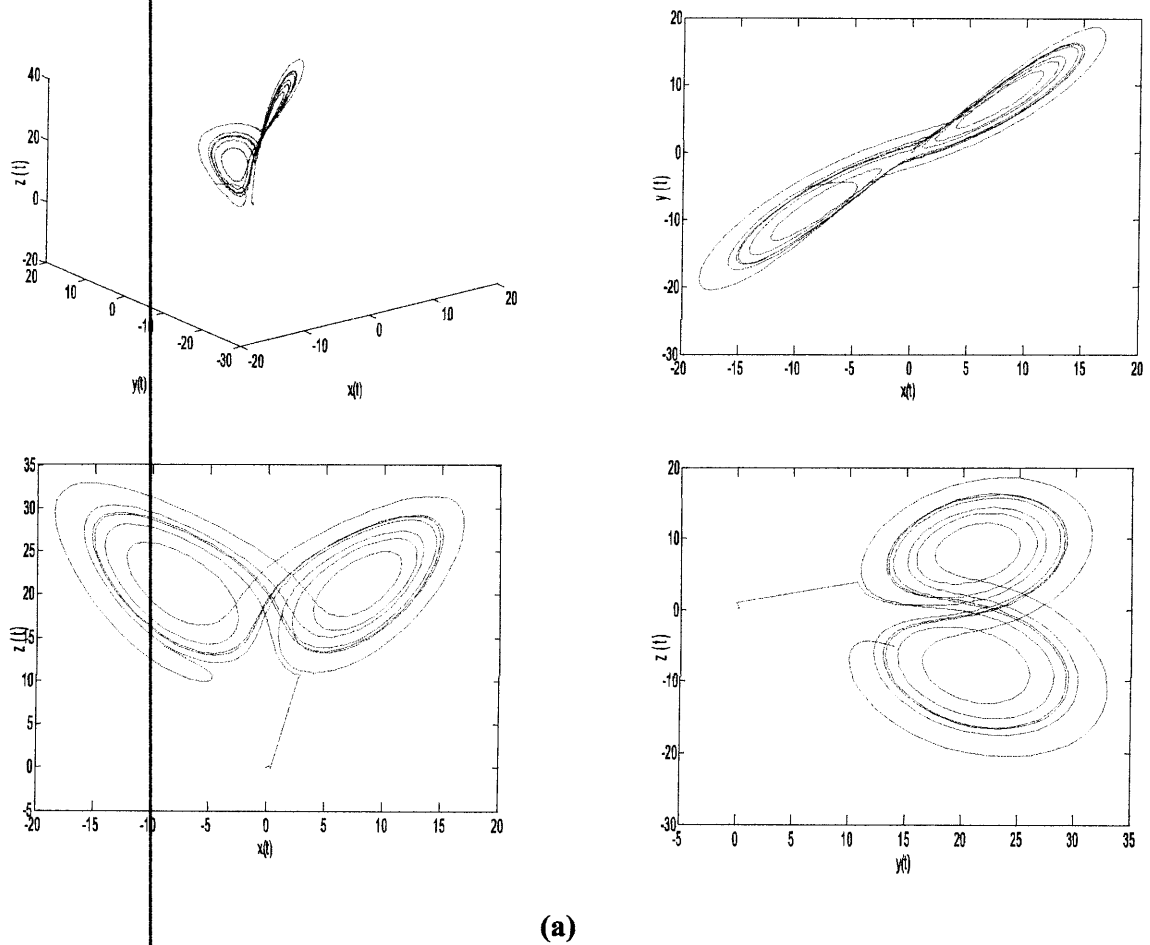


Figure III.8: Système de Chen sous contrôle par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire. **(a)** plan de phase. **(b)** Evolution des variables d'état.

On remarque que les états de circuit de Chua ont été stabilisé autour du point d'équilibre $(0,0,0)$ d'une manière efficace ce qui implique que l'objectif de contrôle est atteint.

III.4.3.1 Analyse de la stabilité

a) Commande par retour d'état ordinaire

La stabilité du système dépend la valeur des paramètres $a = 35$, $b = 8$; $c = 28$ $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ et des valeurs de matrice des gains de contre réaction. Le système est décrit par :

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ (c - a) & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, \quad \rho(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix} \quad (\text{III.19})$$

telle que $\rho(x)$ est la partie non linéaire de système. Le système de Chen contrôlé est asymptotiquement stable avec un choix judicieux des gains de contre réaction satisfaisant les conditions du théorème 2.

1. vérifier que $\rho(x(0), 0) = 0$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\rho(x(t))\|}{\|x(t)\|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(-xz)^2 + (xy)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2(z^2 + y^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|\sqrt{(z^2 + y^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2. Pour étudier la stabilité du système, il faut calculer les valeurs propres du système pour chaque point fixe. Cela revient à étudier le polynôme caractéristique de la matrice $[\lambda I - \mathfrak{A}]$, où $\mathfrak{A} = A - B \cdot K$. Les valeurs propres de $\mathfrak{A} = A - B \cdot K$ sont :

$$\lambda_1 = -15.7448, \lambda_2 = -1.2000 \text{ et}$$

$$\lambda_3 = 12.0290,$$

Ce qui conduit à la réalisation de la condition 2 du théorème 3, où

- $|\arg \lambda_{1,2}| = \pi > 0.9 \frac{\pi}{2} = 1.4130$ et
- $|\arg \lambda_3| = 0$

b) Commande par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire

Le système de Chen contrôlé est asymptotiquement stable avec un choix judicieux des gains de contre réaction satisfaisant les conditions du théorème 1.

1. $\rho(x(0),0)=0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\rho(x(t),t)\|}{\|x(t)\|}$ est déjà vérifiée.
2. Pour étudier la stabilité du système, il faut calculer les valeurs propres du système pour chaque point fixe. Cela revient à étudier le polynôme caractéristique de la matrice $[\lambda I - \tilde{A}]$, où $\tilde{A} = (I + B \cdot K)^{-1} \cdot A$. Les valeurs propres de $\tilde{A} = (I + B \cdot K)^{-1} \cdot A$ sont :

$$\lambda_1 = -15.7448, \lambda_2 = -1.2000 \quad \text{et}$$

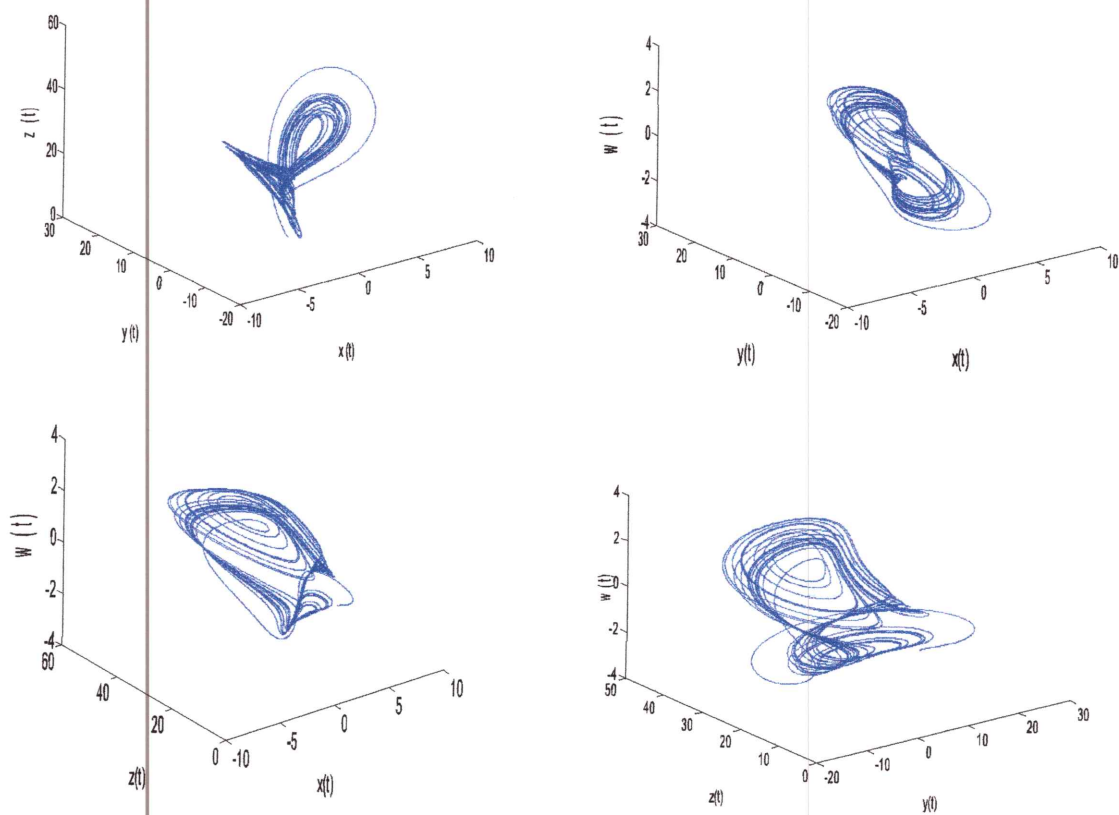
$$\lambda_3 = 12.0290,$$
3. Ce qui conduit à la réalisation de la condition 2 du théorème 3, où
 - $|\arg \lambda_{1,2}| = \pi > 0.9 \frac{\pi}{2} = 1.4130$ et
 - $|\arg \lambda_3| = 0$

III.4.4 Système hyperchaotique de Lorenz d'ordre fractionnaire

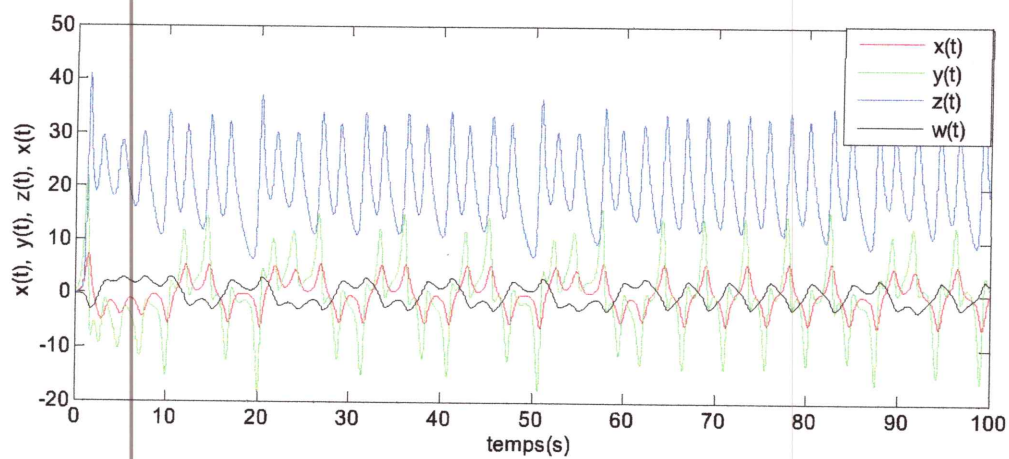
Le système hyperchaotique de Lorenz est basé sur le système familier de Lorenz. Le système est décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = \alpha_1(y - x) + \alpha_4 w \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = (\alpha_3 - z)x - y \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = xy - \alpha_2 z \\ \frac{d^{q_4} w}{dt^{q_4}} = -x - \alpha_1 w \end{array} \right. \quad (\text{III.19})$$

Les valeurs typiques des paramètres du système: $\alpha_1=1, \alpha_2=0.7, \alpha_3=26, \alpha_4=1.5$, et l'ordre de dérivé $q_i = 0.98, (i=1, \dots, 4)$ l'attracteur hyperchaotique de système de Lorenz est donné par la figure III.9.



(a)



(b)

Figure III.9: Système hyper-chaotique de Lorenz d'ordre fractionnaire. (a) Plan de phase, (b) Evolution des variables d'états.

III.4.4.1 Contrôle du Système hyperchaotique de Lorenz d'ordre fractionnaire

Dans cette partie, nous nous intéressons au contrôle du système hyperchaotique de Lorenz d'ordre fractionnaire. Dans ce cas, la représentation mathématique est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = \alpha_1(y - x) + \alpha_4 w + u_1 \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = (\alpha_3 - z)x - y + u_2 \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = xy - \alpha_2 z + u_3 \\ \frac{d^{q_4} w}{dt^{q_4}} = -x - \alpha_1 w + u_4 \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Pour les deux cas considéré, l'objectif de contrôle est de générer une commande

- $u_x(t) = -K \cdot D_t^q x(t)$ dans une première application avec une matrice de gain choisi,

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.85 \end{bmatrix},$$

- $u_x(t) = -K \cdot x(t)$ dans une deuxième application avec un gain choisi,

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Permettant la suppression du comportement chaotique à partir d'un instant de temps donné, ou tout simplement conduire le système à se stabiliser autour de point d'équilibre (l'origine $(0,0,0,0)$). L'entrée de commande $u(t)$ est appliquée à la variable d'état $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, et $w(t)$, pour $t \geq 20$ [sec].

Le comportement du système de Chen est représenté par le schéma de la figure III.10 pour le cas de la commande par retour d'état ordinaire par le schéma de la figure III.11 pour le cas de la commande par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire, respectivement.

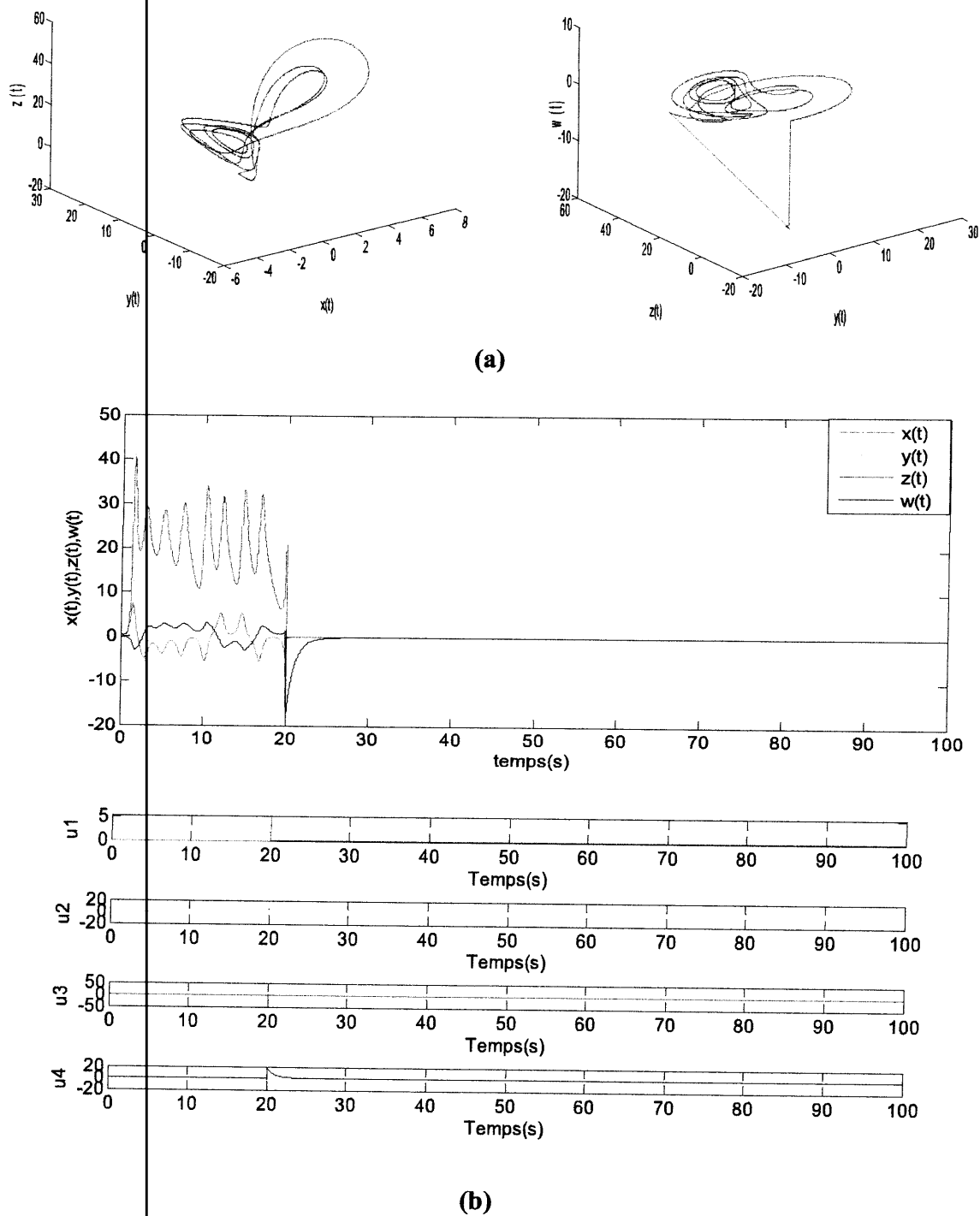
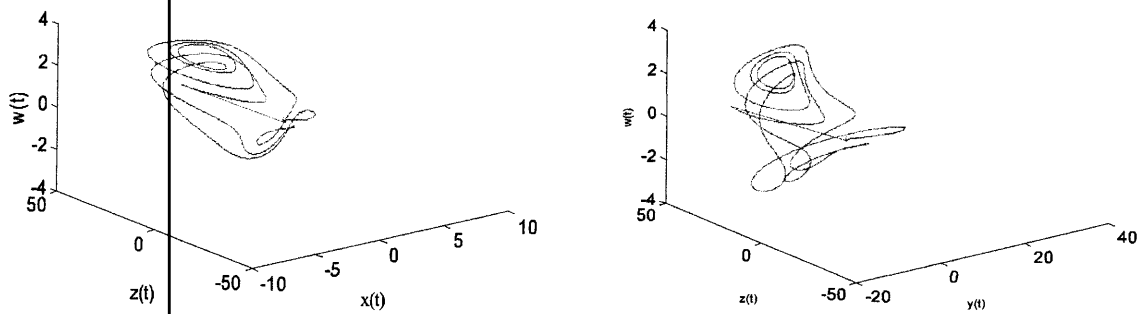
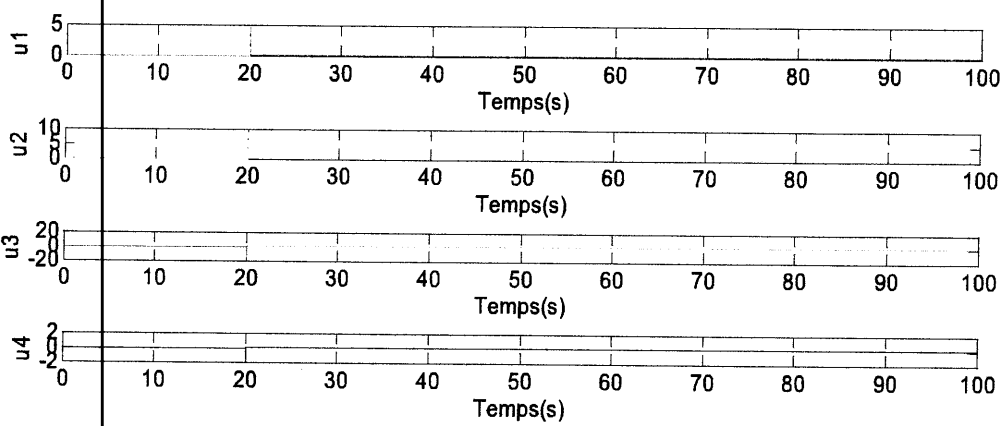
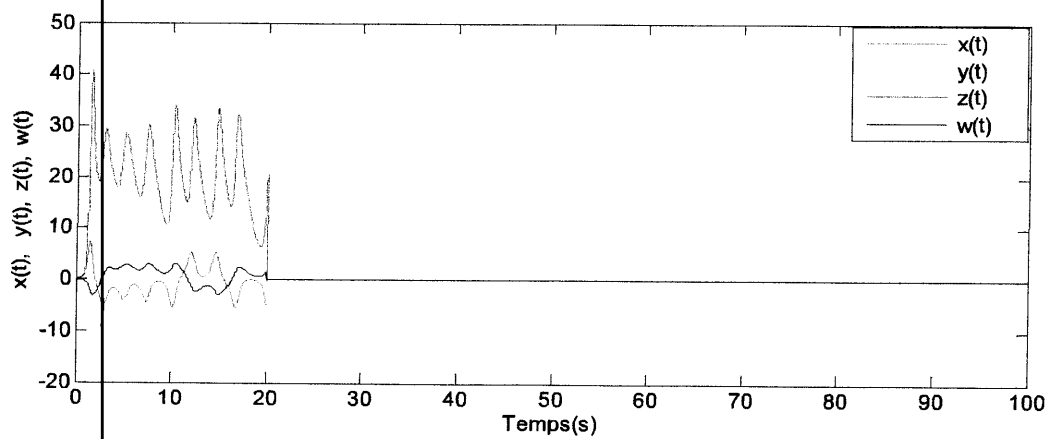


Figure III.10: Système hyperchaotique de Lorenz sous contrôle par retour d'état ordinaire. (a) Plan de phase. (b) Evolution des variables d'état et de commande.



(a)



(b)

Figure III.11: Système hyperchaotique de Lorenz sous Contrôle par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire. (a) Plan de phase. (b) Evolution des variables d'état et de commande.

III.4.4.1.1 Analyse de la stabilité

a) Commande par retour d'état ordinaire

La stabilité du système dépend la valeur des paramètres: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = 26$, $\alpha_4 = 1.5$, $q = 0.98$; et des valeurs de matrice des gains de contre réaction.

Le système est décrit par :

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ -1 & 0 & 0 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \rho(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.21})$$

telle que $\rho(x)$ est la partie non linéaire de système. Le système hyperchaotique de Lorenz d'ordre fractionnaire contrôlé est asymptotiquement stable avec un choix judicieux des gains de contre réaction satisfaisant les conditions du théorème 2.

1. vérifier que $\rho(x(0),0) = 0$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\rho(x(t))\|}{\|x(t)\|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(-xz)^2 + (xy)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2(z^2 + y^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|\sqrt{(z^2 + y^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2. Pour étudier la stabilité du système, il faut calculer les valeurs propres du système pour chaque point fixe. Cela revient à étudier le polynôme caractéristique de la matrice $[\lambda I - \mathfrak{A}]$, où $\mathfrak{A} = A - B \cdot K$. Les valeurs propres de $\mathfrak{A} = A - B \cdot K$ sont :

- $\lambda_{1,2} = -2.2768 \pm 1.3152i$ et
- $\lambda_3 = -1.0000$,
- $\lambda_4 = -1.4464$

Ce qui conduit à la réalisation de la condition 2 du théorème 3, où

- $|\arg \lambda_{1,2}| = 2.6178 > 0.98 \frac{\pi}{2} = 1.5386$ et
- $|\arg \lambda_3| = \pi > 1.5386,$
- $|\arg \lambda_4| = \pi > 1.5386.$

donc le système est asymptotiquement stable.

b) Commande par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire

Le système de chaotique Lorenz d'ordre fractionnaire contrôlé est asymptotiquement stable avec un choix judicieux des gains de contre réaction satisfaisant les conditions du théorème 1.

1. $\rho(x(0),0)=0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\rho(x(t),t)\|}{\|x(t)\|}$ est déjà vérifiée.

2. Pour étudier la stabilité du système, il faut calculer les valeurs propres du système pour chaque point fixe. Cela revient à étudier le polynôme caractéristique de la matrice $[\lambda I - \tilde{A}]$, où $\tilde{A} = (I + B \cdot K)^{-1} \cdot A$. Les valeurs propres de $\tilde{A} = (I + B \cdot K)^{-1} \cdot A$ sont :

- $\lambda_{1,2} = -2.1472 \pm 1.3533i$ et
- $\lambda_3 = -0.8000.$
- $\lambda_4 = -1.0556.$

Ce qui conduit à la réalisation de la condition 2 du théorème 3, où

- $|\arg \lambda_{1,2}| = 2.5792 > 0.98 \frac{\pi}{2} = 1.5386$ et
- $|\arg \lambda_3| = \pi > 1.5386,$
- $|\arg \lambda_4| = \pi > 1.5386.$

donc le système est asymptotiquement stable.

Les résultats obtenus montrent bien l'efficacité des deux approches utilisées pour la :

- Stabilisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques d'ordre fractionnaire par la méthodes par retour d'état ordinaire.

- Stabilisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques d'ordre fractionnaire par la méthodes par retour de drivée d'état d'ordre fractionnaire.

Nous avons constaté que la diminution du temps de réponse ainsi que l'absence (presque totale) des ondulations dans le régime permanent, ce qui justifiée bien l'efficacité des approches utilisée. Un point important est le problème de détermination des matrices des gains de contre réaction tout en satisfaisant les coditions de stabilité.

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité les problèmes de conception de contrôleur des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire en se basant sur la méthode par retour d'état ordinaire et la méthode par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire. Les résultats obtenus, montrent bien que le problème de la stabilisation des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire est résolu par ces deux approches sur des exemples des systèmes chaotiques et hyperchaotiques d'ordre fractionnaire. Un point important à signal est le problème de détermination des matrices des gains de contre réaction, apr tatonnement, tout en satisfaisant les coditions de stabilité. Ce qui necessite d'appliquer d'autres méthodes d'identification et d'estimation des gains de contre réaction.

Conclusion Générale & Perspectives

Le travail réalisé dans ce mémoire porte sur l'étude d'un ensemble de systèmes d'ordre fractionnaire, systèmes dynamiques non linéaires présentant des comportements chaotiques dans leur évolution. La simulation et l'analyse de la stabilité des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires, systèmes autonomes et systèmes contrôlés font l'objet principal de ce modeste travail.

La commande par retour d'état standard et par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire sont conçus pour la stabilisation d'une classe des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Les conditions de stabilité sont bien vérifiées en se basant sur le fait qu'un système chaotique d'ordre fractionnaire (autonome ou contrôlé) est considéré comme la superposition

- D'un sous système linéaire de la forme $\tilde{A} \cdot x(t)$ où on applique la théorie de stabilité des systèmes linéaires (critère de Routh, ...etc.) et
- D'un sous système non linéaire $\rho(x(t))$ satisfait la condition

$$\rho(x(0)=0) = 0 \text{ et } \lim_{\|x(t)\| \rightarrow 0} \frac{\|\rho(x(t))\|}{\|x(t)\|} \rightarrow 0 .$$

Des exemples de ces systèmes chaotiques et hyperchaotiques sont bien étudiés, simulés pour voir leurs comportements chaotiques et contrôlés pour obliger ces systèmes à suivre une trajectoire imposée. En particulier, stabiliser ces systèmes autour des points d'équilibre par l'approche par retour d'état et par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire. Les résultats obtenus sont acceptables et justifiés bien le raisonnement et les méthodes appliquées à l'analyse et à la synthèse des lois de commande.

- Dans le premier chapitre, nous avons présenté en détail quelques définitions mathématiques des opérateurs d'ordre fractionnaire. Ainsi que les différentes propriétés et les caractéristiques de la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire.

- Pour le deuxième chapitre, on a vu un rappel sur la théorie des systèmes dynamiques et du chaos, étudiés et simulés quelques systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. On a vu aussi une analyse théorique de la stabilité de ces systèmes chaotiques.
- Dans le troisième chapitre, nous avons abordé le contrôle en particulier la stabilisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques d'ordre fractionnaire autour des points d'équilibre par l'approche par retour d'état et par retour de dérivée d'état d'ordre fractionnaire. Les résultats obtenus justifient bien la démarche de l'analyse et de la synthèse utilisée.

On peut conclure que l'étude des systèmes d'ordre fractionnaire, notamment les des systèmes chaotiques et hyperchaotiques d'ordre fractionnaire, est un domaine très vaste qui nécessite des connaissances approfondies sur

- Les outils de modélisation et d'analyse des systèmes linéaires notamment les systèmes non linéaires,
- La théorie de stabilité des systèmes linéaires et non linéaires,
- Méthodes de synthèse des lois de commande.

L'amélioration des performances, l'efficacité et la simplicité des approches d'analyse et de synthèse des lois de commande peut être vue comme des perspectives de ce présent travail par application des outils avancées, soit en contrôle, soit en synchronisation soit en optimisation des paramètres des contrôleurs satisfaisant les contraintes de stabilité des systèmes chaotiques et hyperchaotiques d'ordre fractionnaire.

Références Bibliographiques

- [1] H. H. Sun, A. Charef, Y. Tsao, B. Onaral, "Analysis of polarization dynamics by singularity decomposition method", *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 20, 1992.
- [2] Ivo Petráš, "*Fractional-order nonlinear systems : Modeling, Analysis and Simulation*", Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.
- [3] I. Podlubny, "Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controlles", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 1, 1999, pp. 208-214.
- [4] K. B. Oldham and J. Spanier, "*Fractional Calculus*", Academic Press, New York, 1974.
- [5] Khalfa Bettou, "*Analyse et réalisation des correcteurs analogiques d'ordre fractionnaire*", Thèse doctorat, Université Mentouri de Constantine, Algérie, 2011.
- [6] A.Oustaloup, "*La commande CRONE*", Edition Hermès, Paris, 1991.
- [7] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, "*Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*", Gordon and Breach, 1987.
- [8] I. poudlubny, "*Fracitonal Differential Equations*", Academic Press, San Diego, USA, 1999.
- [9] YangQuan Chen et al, "*Linear feedback control analysis and design with MATLAB*", SIAM, Philadelphia, USA, 2007.
- [10] Rechard Magin, Igor Podlubny, "On the fractional signals and systems", *Signal processing*, Vol. 91, 2011, pp. 350-371.
- [11] M.D.Ortigueira, "From differences to differintegrations", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Vol. 7, No. 4, 2004, pp. 459-471.
- [12] Ibrahim N'doye, "*Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires*", Thèse doctorat en Automatique, Université Poincaré, Nancy, France, Février 2011.

- [13] Assabaa Mohamed, “*Modélisation et analyse des équations différentielles linéaires d’ordre fractionnaire*”, Mémoire de Magister en électronique, Université Mentouri de Constantine, Algérie, 2006.
- [14] Riccardo.Caponetto et al., “*Fractional order systems modeling and control applications*”, World Scientific, USA, 2010.
- [15] Nadir Fergani, “*Réglage de PID fractionnaire pour une réponse désirée en boucle fermée*,” Thèse de Magister en Electronique, Uuniversité Mentouri de Constantine, Algérie, 2009.
- [16] Abdelbaki Djouambi, “*Contribution à la commande CRONE*”, Thèse doctorat en Electronique, Université Mentouri de Constantine, Algérie, 2008.
- [17] I. Petras, I. Podlubny, et al., “*Analogue realisations of fractional order controllers*,” Faculta Berg, TU Koosice, 2002.
- [18] Sylvain Canat, “*Contribution à la modélisation dynamique d’ordre non entière de la machine asynchrone à cage*”, Thèse doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, France, juillet 2005.
- [19] Amel Benchellal, “*Modélisation des interfaces de diffusion à l’aide d’opérateur d’intégration fractionnaire*”, Thèse doctorat en Automatique, Université de Poitiers, France, février 2008.
- [20] YangQuan Chen, Ivo Petras, Dingyù Xue, “Fractional order control - a tutorial”, *American Control Conference*, St. Louis, USA, Juin 2009, pp. 1397-1411.
- [21] BlasM.Vinagre, Concepción A.Monje, “*Fractional-order PID Control in the Third Millennium*”, Springer-Verlag, London, 2012, pp. 465-493.
- [22] Monje, A., Chen, Y.Q., vinzgre, B.M., Xue,D., Feliu, V., “*Fractionnal-order systems and controls: Fundamentals and Applications*”, Spinger-Verlag,London, 2010.
- [23] Belhour Med Cherif, “*Application des Systèmes d’ordre Fractionnaire à la Recherche du MPPT dans les Systèmes Photovoltaïques Autonomes*”, Mémoire de Master en Electronique, Université de Jijel, Algérie, 2012.
- [24] Deepyaman Maiti, Sagnik Biswas, Amit Konar, “Design of a Fractional Order PID Controller Using Particle Swarm Optimization Technique”, *2nd National Conference on Recent Trends in Information Systems*, Kolkata, India, 2008.
- [25] E. Chermier, “*Estimation de l’état et des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires*”, Thèse de doctorat en Automatique, Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, France, 2006.

- [26] Feigenbaum M. j., "Universal behaviour in nonlinear systems", *Los Alamos Science*, Vol. 1, 1980, pp. 4-27.
- [27] Zaslavsky G. M., "*Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*", Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [28] Petras I. and Bednarova D., "Fractional – order chaotic systems", *Proc. of the IEEE Conference on Emerging Technologies & Factory Automation, ETFA'2009*, September 22–25, Palma de Mallorca, Spain, 2009.
- [29] T. Yang, "*Impulsive systems and Control: Theory and Applications*", Huntington, NY: Nova Science Publishers, 2001.
- [30] H. Zhang, "*Chaos Synchronization and its Application to Secure Communication*", These de Doctorate, Université de Waterloo, Ontario, Canada, 2010.
- [31] Megherbi Ouerdia, "*Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques*", These de Doctorat, Université Mouloud mammeri, Tizi-ouzou, 2013.
- [32] Hao Zhu, Shangbo Zhou, Jun Zhang, "Chaos and synchronization of the fractional-order Chua's system", *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 39, 2009, pp. 1595-1603.
- [33] Diethelm K, Ford NJ, "Analysis of fractional differential equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 265, 2002, pp. 229-248.
- [34] Diethelm K, Ford NJ, Freed AD, "A predictor–corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 29, 2002, pp. 3-22.
- [35] Matsumoto T., "A chaotic attractor from Chua's circuit", *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, CAS-31, 1984, pp. 1055-1058.
- [36] Glending, P., "*Stability, Instability and chaos*", Cambridge University Press, New York, 1994.
- [37] Fradkov A.L. and Evans R.J., "Control of Chaos: Some Open Problems", *Proceeding of the 40th IEEE Conference on Control and Decision*, Orlando, 2001, pp. 6698-703.
- [38] Fradkov A.L. and Pogromsky, A.Yu., "Speed Gradient Control of Chaotic Continuous time Systems", *IEEE Transactions Circuit Systems I*, Vol. 43, 1993, pp. 907-913.
- [39] Fradkov A.L. and Pogromsky A.Yu., "*Introduction to Control of Oscillations and Chaos*", Singapore World Scientific, 1998.
- [40] Freeman W.J., Chang H.J., Burke B.C., "Taming Chaos: Stabilization of Aperiodic Attractors by Noise", *IEEE Transactions Circuit Systems I*, Vol. 44, 1997, pp. 989-996.

- [41] Loskutov A.Yu., "Problems of Nonlinear Dynamics : Suppression of Chaos and Control of Dynamic Systems", *Vestn. MGU*, No. 22, 2001, pp. 3-21.
- [42] Magnitskii N.A. and Sidorov S.V., "Control of Chaos in Nonlinear Dynamic Systems", *Diff. Uravn.*, No. 2, 1998, pp.1501-1509.