



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Jijel

Faculté Des Sciences Et Technologie

Département d'Automatique

جامعة جيجل  
مكتبة كلية العلوم والتكنولوجيا  
رقم الجرد: M.2288

## Mémoire de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master II en  
**Automatique**

Option : Automatique et Informatique Industrielle



# Thème

**Estimation et Reconstruction des Défauts à  
Base d'Observateurs pour une Classe de  
Systèmes Non Linéaires**

Présenté par :

**Madi Yassine**

**Benniou Rabah**

Proposé et encadré par :

**Mr N. Oucief**

# *Remerciement*

*Nous remercions tout d'abord Dieu le tout puissant de nous avoir donné le courage, la force et la volonté pour mener à terme ce travail.*

*Nous exprimons toute notre gratitude à Monsieur N. Oucief pour les conseils qu'il nous a prodigués et pour nous avoir guidés dans la réalisation de notre travail.*

*Nous tenons à remercier aussi, l'ensemble de nos Enseignants du département d'Automatique au sein de l'université de Jijel, pour nous avoir éclairés durant ces dernières années.*

*Et enfin nous remercions toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'accomplissement de notre projet.*

**Aladi Bassine & Benniou Rabah**

## *Dédicaces*

*Je dédie ce travail à toute ma famille et à tous mes amis,*

*A ma très chère maman qui m'a transmis l'amour du travail, qui a subvenu à tous mes besoins et qui a su m'encourager tout au long de mon cursus,*

*A mes amis pour les cinq belles années passées ensemble.*

**Madi Bassine**

## *Dédicaces*

*Je dédie ce mémoire en premier à mes très chers parents, dont le sacrifice, la tendresse, l'amour, la patience, le soutien, l'aide et les encouragements sont le secret de ma réussite. Sans eux, je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui.*

*Je dédie ce travail également*

*A toute ma famille*

*A tous mes amis proches*

*A tous ceux qui me sont chers*

**Benniou Rabah**

# Table des matières

Introduction générale	1
<b>1 Notions sur diagnostic de défauts</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction	3
1.2 Quelques concepts utilisés en diagnostic	3
1.3 Procédure du diagnostic	4
1.4 Classification des défauts	5
1.4.1 Classification des défauts selon l'emplacement	5
1.4.2 Classification selon leurs caractéristiques temporelles	6
1.4.3 Classification selon leur modélisation	7
1.4.3.1 Défauts additifs	7
1.4.3.2 Défauts multiplicatifs	8
1.4.3.3 Exemple de modélisation de défauts	8
1.5 Observateurs et diagnostic à base d'observateurs	10
1.5.1 Quelques notions d'observabilité	10
1.5.1.1 Observabilité d'un système linéaire	10
1.5.1.2 Observabilité d'un système non linéaire	10
1.5.2 Quelques observateurs d'état	11
1.5.2.1 Observateur de Luenberger	11
1.5.2.2 Observateur de Thau	12
1.5.2.3 Observateur adaptatif pour les systèmes non linéaires	12
1.5.2.4 Observateur par mode de glissement	13
1.5.3 Principe de génération de résidus à base d'observateur	13
1.5.3.1 Structure d'observateurs simplifiés	14
1.5.3.2 Structure d'observateurs dédiés (DOS)	14
1.5.3.3 Structure d'observateurs généralisés (GOS)	15
1.5.4 Estimation et reconstruction de défauts	16
1.6 Conclusion	16
<b>2 Estimation de défauts à base d'observateurs adaptatifs</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction	17
2.2 Observateur adaptatif des systèmes non linéaire	18
2.2.1 Conditions d'existence de l'observateur adaptatif	18
2.2.2 Observateur adaptatif	19

2.2.3	Analyse de la stabilité . . . . .	19
2.2.4	Calcul de $P$ , $F$ et $L$ par $\mathcal{LMI}$ s . . . . .	21
2.3	Observateur adaptatif modifié . . . . .	21
2.3.1	Une forme canonique pour la synthèse de l'observateur adaptatif modifié . . . . .	22
2.3.2	synthèse de l'observateur adaptatif modifié . . . . .	23
2.3.3	Analyse de la stabilité . . . . .	23
2.3.4	Approche $\mathcal{LMI}$ s pour le calcul de $P$ , $L$ et $F$ . . . . .	24
2.4	Observateur adaptatif modifié robuste . . . . .	25
2.4.1	Analyse de la stabilité . . . . .	26
2.4.2	Approche des $\mathcal{LMI}$ s pour le calcul de $P$ , $L$ et $F$ . . . . .	27
2.5	Application à l'estimation des défauts multiplicatifs du robot à liaison flexible . . . . .	28
2.5.1	Modèle du robot à liaison flexible avec défauts multiplicatifs . . . . .	28
2.5.2	Synthèse de L'observateur adaptatif modifié . . . . .	30
2.5.2.1	Simulation . . . . .	30
2.5.3	Synthèse de L'observateur adaptatif robuste . . . . .	35
2.5.3.1	Simulation . . . . .	36
2.6	Conclusion . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Reconstruction des défauts additifs à base d'observateur par mode de glissement</b> . . . . .	<b>39</b>
3.1	Introduction . . . . .	39
3.2	Observateur de Walcott-Zak . . . . .	39
3.3	Reconstruction des défauts additifs par observateur par mode de glissement . . . . .	41
3.3.1	Analyse de la stabilité . . . . .	42
3.3.2	Approche $\mathcal{LMI}$ pour le calcul de $L$ , $F$ et $P$ . . . . .	43
3.3.3	Reconstruction des défauts . . . . .	43
3.4	Application au robot manipulateur à liaison flexible . . . . .	44
3.4.1	modèle du robot à liaison flexible avec défauts additifs . . . . .	44
3.4.2	Synthèse de L'observateur par mode de glissement . . . . .	45
3.4.3	Simulation . . . . .	45
3.5	Conclusion . . . . .	47
	<b>Conclusion générale</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>A</b>	<b>Modèle du robot à liaison flexible</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>B</b>	<b>Inégalités linéaires matricielle <math>\mathcal{LMI}</math></b> . . . . .	<b>53</b>
B.1	Présentation . . . . .	53
B.2	Formalisation des $\mathcal{LMI}$ . . . . .	53

<b>C</b>	<b>Stabilité au sens de Lyapunov</b>	<b>55</b>
C.1	Stabilité des systèmes dynamiques . . . . .	55
C.2	Fonction candidate de Lyapunov . . . . .	56
C.3	Lemme de Barbalat . . . . .	56

# Liste des symboles et abréviations

Symbole	désignation
$R$	Ensemble des nombres réelle.
$I_n$	Matrice identité d'ordre $n$ .
$0_{n \times m}$	Matrice nulle d'ordre $n \times m$ .
$\theta$	Vecteur défauts multiplicatifs.
$f$	Vecteur de défauts additifs.
$\lambda$	Constante de lipschitz.
$H$	Matrice de lipchitz.
$\  \cdot \ $	La norme euclidienne.
$\mathcal{LMI}$	Inégalités linéaires matricielles.
$\mathcal{CVX}$	Solveur des inégalités intégré dans Matlab.



# Table des figures

1.1	Classification des défauts selon l'emplacement . . . . .	5
1.2	Biais de capteur. . . . .	6
1.3	Dérive de capteur. . . . .	6
1.4	Valeur aberrante. . . . .	7
1.5	Modélisation des défauts . . . . .	7
1.6	Schéma structural de l'observateur de Luenberger . . . . .	11
1.7	Principe de génération de résidus à base d'observateur . . . . .	14
1.8	Structure d'observateur simple. . . . .	14
1.9	Structure d'observateur dédié (DOS). . . . .	15
1.10	Structure d'observateurs généralisés (GOS) . . . . .	16
2.1	Estimation du défaut $\Delta k$ par l'observateur adaptatif modifié (Test sans perturbations).. . . . .	31
2.2	Estimation du défaut $\Delta B$ par l'observateur adaptatif modifié (Test sans perturbations). . . . .	31
2.3	Variable d'état $z_1$ et son estimation (Test sans perturbations). . . . .	32
2.4	Variable d'état $z_2$ et son estimation (Test sans perturbations). . . . .	32
2.5	Variable d'état $z_3$ et son estimation (Test sans perturbations). . . . .	32
2.6	Variable d'état $z_4$ et son estimation (Test sans perturbations). . . . .	33
2.7	Estimation du défaut $\Delta k$ par l'observateur adaptatif modifié (Test avec perturbations). . . . .	33
2.8	Estimation du défaut $\Delta B$ par l'observateur adaptatif modifié (Test avec perturbations). . . . .	34
2.9	Variable d'état $z_1$ et son estimation (Test avec perturbations). . . . .	34
2.10	Variable d'état $z_2$ et son estimation (Test avec perturbations). . . . .	34
2.11	Variable d'état $z_3$ et son estimation (Test avec perturbations). . . . .	35
2.12	Variable d'état $z_4$ et son estimation (Test avec perturbations). . . . .	35
2.13	Estimation du défaut $\Delta k$ par l'observateur adaptatif modifié robuste. . . . .	36
2.14	Estimation du défaut $\Delta B$ par l'observateur adaptatif modifié robuste. . . . .	36
2.15	Variable d'état $z_1$ et son estimation par l'observateur adaptatif modifié robuste. . . . .	37
2.16	Variable d'état $z_2$ et son estimation par l'observateur adaptatif modifié robuste. . . . .	37
2.17	Variable d'état $z_3$ et son estimation par l'observateur adaptatif modifié robuste. . . . .	37

2.18	Variable d'état $z_4$ et son estimation par l'observateur adaptatif modifié robuste. . . . .	38
3.1	Variable d'état $x_1$ et son estimation par l'observateur par mode glissement. . . . .	46
3.2	Variable d'état $x_2$ et son estimation par l'observateur par mode glissement. . . . .	46
3.3	Variable d'état $x_3$ et son estimation par l'observateur par mode glissement. . . . .	46
3.4	Variable d'état $x_4$ et son estimation par l'observateur par mode glissement. . . . .	47
3.5	Défaut $f$ et sa reconstruction par l'observateur par mode glissement.	47
A.1	Représentation du robot à liaison flexible. . . . .	51

# Liste des tableaux

3.1	Comparaison entre l'observateur adaptatif et l'observateur par mode de glissement pour l'estimation et la reconstruction des défauts. . . .	49
A.1	Table des valeurs des paramètres. . . . .	52

## Introduction Générale

L'évolution et le développement des systèmes industriels s'accompagnent avec l'augmentation de leur vulnérabilité aux défauts qui les conduisent aux pannes et au mauvais fonctionnement. La défaillance d'une partie d'un processus peut s'aggraver et entraîner des pertes économiques, écologiques ou même humaines. C'est pour cette raison que durant les quarante dernières années, le diagnostic des défauts a reçu une attention très particulière chez les chercheurs en automatique [3].

La mesure de toutes les grandeurs (variables) d'un procédé physique est souvent primordiale afin de mettre en œuvre des stratégies de commande par retour d'état ou bien des stratégies de surveillance et de diagnostic de défauts. Cependant, pour des raisons techniques ou économiques (difficulté d'implémentation ou coût élevé des capteurs) il n'est pas toujours possible d'accéder à toutes les variables d'état représentant ces grandeurs, d'où la nécessité de faire recours à un système dynamique auxiliaire, appelé observateur, qui est chargé d'estimer l'état du système.

D'une manière générale, le diagnostic de défauts par observateur exploite les grandeurs disponibles du système à savoir ses sorties et celles estimées pour reconstruire un signal indicateur de défauts appelé résidu. Le résidu doit être nul en absence de défauts et s'en écarte dès l'apparition d'un défaut. Cependant, le problème de localisation et d'identification de défauts en utilisant la génération de résidus par observateur reste sans solution pour un grand nombre de cas et cela, malgré les nombreuses méthodes proposées dans ce sens.

Une des classes les plus connues des observateurs robustes est celle des observateurs adaptatifs, qui possèdent de bonnes propriétés de robustesse vis-à-vis les incertitudes paramétriques et les perturbations bornées. Du fait que l'impact d'un défaut peut être modélisé comme étant une variation de l'un des paramètres du système, l'utilisation d'observateurs adaptatifs pour l'estimation des défauts s'avère une méthode très intéressante, car elle ne nécessite pas les étapes de localisation et d'identification des défauts [11] [12].

Une autre classe d'observateurs possédant de bonnes propriétés de robustesse vis-à-vis les perturbations bornées est celle des observateurs par mode de glissement. Ce type d'observateurs a fait l'objet de recherches intensives dans le cadre du diagnostic de défauts. Initialement les travaux ont été orientés vers la conception d'observateurs par mode de glissement pour la génération de résidus. En revanche, dans [8] les auteurs ont proposé une approche de détection et d'estimation de défauts par un observateur par mode de glissement. Il est à noter que les observateurs adaptatifs et par mode de glissement développés pour la commande peuvent être transposés, sans modification, à des objectifs d'estimation et de reconstruction de défauts.

L'objectif de ce rapport est d'aborder le problème d'estimation et de reconstruction de défauts à l'aide d'observateurs adaptatifs et des observateurs par mode de

glissement. Dans le premier chapitre, nous allons donner les différentes notions et concepts nécessaires à la compréhension des méthodes de diagnostic à base d'observateur. Dans le deuxième chapitre, nous allons étudier l'estimation des défauts multiplicatifs à base d'observateurs adaptatifs pour les systèmes non linéaires lipschitziens. Le troisième chapitre sera consacré à la reconstruction de défauts additifs à l'aide d'un observateur par mode de glissement. Enfin, nous terminerons ce travail par une conclusion générale.



# Chapitre 1

# Chapitre 1

## Notions sur diagnostic de défauts

### 1.1 Introduction

Le diagnostic de défauts des systèmes industriels représente un des moyens pour contribuer à obtenir un meilleur gain de productivité. Sa vocation première est de détecter et de localiser une défaillance des matériels. De manière générale, lorsqu'on parle de diagnostic de défauts, on se réfère à la procédure de détection et d'isolation de ces derniers, que l'on retrouve souvent sous le nom : FDI (Fault Detection and Isolation). Cette procédure nous permet d'avoir des informations sur l'apparition d'un défaut et sur sa provenance le plus rapidement possible. Les méthodes de détection et de localisation des défauts ont connu un essor considérable depuis le début des années 70 [3].

Dans ce chapitre, il est question dans un premier temps de donner les différents concepts et notions rencontrés dans la littérature concernant le diagnostic des défauts. Nous insistons particulièrement sur la classification des différents types de défauts et sur la phase de modélisation.

Dans un deuxième temps, nous introduisons quelques notions sur l'observabilité ainsi que quelques observateurs d'état pour les systèmes linéaires et non linéaires. Enfin, nous présentons le principe du diagnostic à base d'observateur.

### 1.2 Quelques concepts utilisés en diagnostic

Les définitions présentées dans cette section sont exposées selon la terminologie présentée dans [3].

**Fonctionnement normal** : un système est en fonctionnement normal lorsque ses états, ses entrées et ses sorties sont très proches de leurs valeurs nominales. Typiquement, il y a fonctionnement normal lorsqu'il n'y a pas d'apparition de défauts.

**Défauts** : tout écart entre la caractéristique observée sur le dispositif et la caractéristique théorique. Cet écart est idéalement nul en l'absence de défaut. Les défauts peuvent apparaître au niveau des capteurs, des actionneurs ou au niveau du processus lui-même, ce concept est important dans les opérations de surveillance pour la conduite et la maintenance des processus industriels.

**Défaillance** : est une altération ou cessation de l'aptitude d'un ensemble à accomplir sa ou ses fonctions requises, c.-à-d. un dysfonctionnement du processus du système.

**Panne** : est l'incapacité d'un appareil à achever ses tâches requises. Elle est toujours due à une défaillance.

**Erreur** : définie comme l'écart entre une valeur mesurée ou estimée d'une variable et une valeur donnée par un modèle et qui est théoriquement correcte.

**Résidu** : est un indicateur de défauts basé sur la différence entre les mesures et les calculs.

**Diagnostic** : c'est la détermination du type, de la taille, de la localisation et de l'instant d'occurrence d'un défaut, il suit la détection de défauts et inclut l'isolation et l'identification.

**Perturbation** : c'est l'entrée du système physique qui n'est pas une commande. C.-à-d, c'est une entrée non contrôlée.

**Une anomalie** : est une particularité non conventionnelle à la loi naturelle ou logique.

### 1.3 Procédure du diagnostic

Le diagnostic d'un système est l'identification du mode de fonctionnement, à chaque instant, par ses manifestations extérieures (symptômes). Son principe général consiste à confronter les données relevées au cours du fonctionnement réel du système avec la connaissance que l'on a de son fonctionnement normal ou défaillant. Si le mode de fonctionnement identifié est un mode défaillant, le système de diagnostic devrait localiser sa cause.

On distingue généralement, dans la procédure de diagnostic, deux étapes principales : détection et localisation, plus l'identification pour certaines méthodes. Les définitions de ces notions sont données dans la suite [2] [3] [6].

**Détection** : La détection (Fault detection) est la première décision que doit prendre un système de surveillance. C'est le fait de décider qu'un indicateur de défaut est pertinent et donc de signaler si le système est défaillant ou pas. La détection revient à choisir entre deux hypothèses la première correspond au fonctionnement normal, la deuxième correspond au fonctionnement défaillant. Pour détecter les défauts d'un système, il faut donc être capable de classer les situations observables comme étant normales ou anormales.

**Localisation** : La localisation (Fault isolation) est le fait de déterminer le(s) sous-ensemble(s) fonctionnel(s) défaillant(s). Cet ensemble a intérêt à être le plus réduit possible. La localisation est plus difficile dans le cas de défauts multiples où plusieurs défauts peuvent avoir lieu en même temps.

**Identification** : L'identification ou l'estimation (Fault evaluation) vise à fournir des informations quantitatives sur les caractéristiques du défaut : instant d'apparition, valeur de l'écart d'un paramètre permettant de le quantifier. Dans le cas de défauts procédés, l'identification revient à connaître les valeurs de différents paramètres du système.



## 1.4 Classification des défauts

Les défauts qui peuvent affecter un système sont classés selon leur emplacement, leur modélisation et leurs caractéristiques temporelles.

### 1.4.1 Classification des défauts selon l'emplacement

Les défauts apparaissent dans les différentes parties d'un système, ils sont classés selon leur emplacement en trois catégories comme le montre la figure suivante :

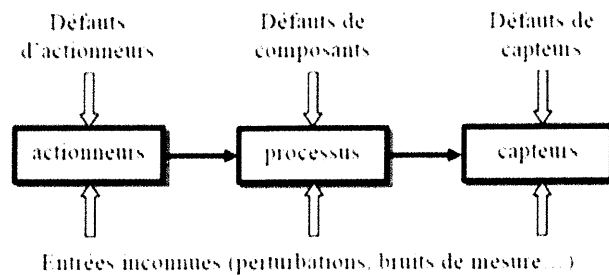


FIGURE 1.1 – Classification des défauts selon l'emplacement

#### – Les défauts capteurs

Ce type de défaut est la cause d'une mauvaise image de l'état physique du système. Un défaut capteur partiel produit un signal avec plus ou moins d'adéquation avec la valeur vraie de la variable à mesurer. Ceci peut se traduire par une réduction de la valeur affichée par rapport à la valeur vraie, ou de la présence d'un biais ou de bruit accru empêchant une bonne lecture [2].

#### – Les défauts actionneurs

Les défauts actionneurs agissent au niveau de la partie opérative et détériorent le signal d'entrée du système. Ils représentent une perte totale (défaillance) ou partielle d'un actionneur agissant sur le système. Un exemple de perte totale d'un actionneur est un actionneur qui est resté "collé" sur une position entraînant une incapacité à commander le système par le biais de cet actionneur. Les défauts actionneurs partiels sont des actionneurs réagissant de manière similaire au régime nominal mais en partie seulement, c'est-à-dire avec une certaine dégradation dans leur action sur le système. (Perte de puissance d'un moteur, fuite dans un vérin, ...) [2].

– **Les défauts composants ou systèmes**

Ce type de défaut provient du système lui-même ; bien souvent les défauts n'appartenant pas à un défaut capteur ou actionneur sont classés de manière arbitraire dans cette catégorie. Néanmoins, un défaut composant résulte de la casse ou de l'altération d'un composant du système réduisant les capacités de celui-ci à effectuer une tâche [2] .

**1.4.2 Classification selon leurs caractéristiques temporelles**

Par ailleurs, une classification des défauts à partir de leurs évolutions temporelles les définit comme suit [3] [2] :

– **Abrupt ou biais de capteur**

La caractéristique principale de ce type de défauts est la discontinuité dans l'évolution temporelle de la variable. Cette évolution, si elle ne correspond pas aux évolutions dynamiques normales attendues pour la variable, est caractéristique d'une panne brutale de l'élément en question : arrêt total ou partiel, déconnexion et peut occasionner de graves dégâts.

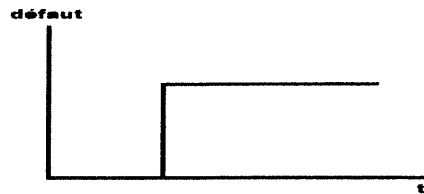


FIGURE 1.2 – Biais de capteur.

– **Graduels (dérives)**

Une dérive se manifeste par une croissance lente et continue. Ces défauts sont plus difficiles à détecter à leur origine du fait de leur faible amplitude et leur lente évolution. Sa cause est généralement due au vieillissement des composants du procédé et l'effet d'usure.

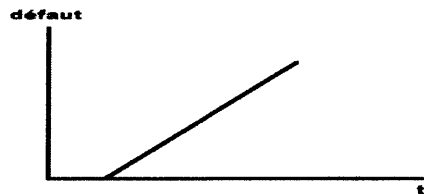


FIGURE 1.3 – Dérive de capteur.

– **Intermittentes (valeurs aberrantes)**

Il s'agit d'un type de défauts caractéristiques de faux contacts (câblage partiellement endommagé). C'est un cas particulier de défauts abrupts avec la propriété d'un signal qui revient de façon aléatoire aux valeurs normales.

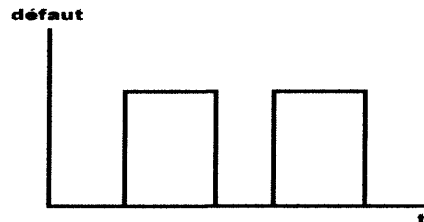


FIGURE 1.4 – Valeur aberrante.

### 1.4.3 Classification selon leur modélisation

Selon les méthodes de modélisation, les défauts peuvent être classés en défauts de nature multiplicative ou de nature additive comme le montre la figure suivante :

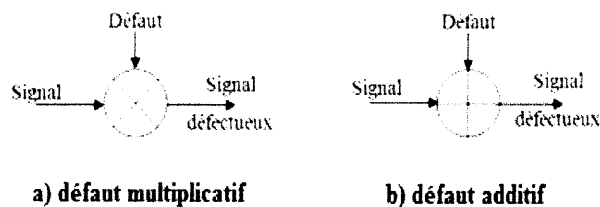


FIGURE 1.5 – Modélisation des défauts

Pour montrer les approches de modélisation des défauts, considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \phi(x) \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $y \in R^p$  représentent respectivement l'état du système, l'entrée et la sortie et  $\phi(x)$  est un terme non linéaire.

#### 1.4.3.1 Défauts additifs

Ces défauts sont modélisés sous forme de signaux additifs inconnus dans le modèle du système. Ils influent sur son état et/ou sur sa sortie. Cette modélisation est habituellement attribuée aux défauts de capteurs et d'actionneurs. Ces défauts se manifestent dans l'équation d'état (1.1) comme le montre l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u + f_a) + \phi(x) + Ef_c \\ y = Cx + Ff_s \end{cases} \quad (1.2)$$

où les vecteurs  $f_a, f_c$  et  $f_s$  représentent respectivement les défauts d'actionneur, les défauts de composants et les défauts de capteurs. Les matrices  $E$  et  $F$  sont les matrices de distribution des défauts de composants et des défauts de capteurs, respectivement. Elles indiquent les emplacements susceptibles à l'apparition de ces défauts. Souvent le système (1.2) est modifié à la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \phi(x) + Gf \\ y = Cx + Hf \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $f = [ f_a^T \ f_c^T \ f_s^T ]^T, G = [ B \ E \ 0 ]$  et  $H = [ 0 \ 0 \ F ]$ .

#### 1.4.3.2 Défauts multiplicatifs

En pratique les défauts dans les systèmes dynamiques provoquent le changement des paramètres du modèle. Ces défauts sont appelés défauts multiplicatifs et sont généralement modélisés par des incertitudes paramétriques. Ils peuvent être décrits comme le montre le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m B_i(u_i(1 - \theta_{ai})) + \phi(x) + E\varphi_1(x, u)\theta_c \\ y = Cx + F\varphi_2(x)\theta_s \end{cases} \quad (1.4)$$

où les vecteurs  $\theta_a = [ \theta_{a1} \ \dots \ \theta_{am} ]^T, \theta_c, \theta_s$  modélisent respectivement les effets des défauts d'actionneur, des défauts de composants et des défauts de capteurs;  $u_i$  est la  $i$ ème entrée du système et  $\sum_{i=1}^m B_i u_i = Bu$ . Les fonctions  $\varphi_1(x, u), \varphi_2(x)$  peuvent être non linéaires et sont supposées connues.

#### 1.4.3.3 Exemple de modélisation de défauts

Considérons le modèle d'un robot manipulateur à liaison flexible [17] d'un seul degré de liberté (voir Annexe A)

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m = \omega_m \\ \dot{\omega}_m = \frac{k}{J_m}(\theta_l - \theta_m) - \frac{B}{J_m}\omega_m + \frac{k_\tau}{J_m}u \\ \dot{\theta}_l = \omega_l \\ \dot{\omega}_l = -\frac{k}{J_l}(\theta_l - \theta_m) - \frac{mgh}{J_l}\sin(\theta_l) \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $\theta_m$  et  $\theta_l$  sont, respectivement, les positions angulaires de l'arbre du moteur et de la tige, avec  $\omega_m$  et  $\omega_l$  étant leurs vitesses angulaires.  $u$  représente le couple de commande du moteur,  $J_m$  le moment d'inertie du moteur,  $J_l$  le moment d'inertie de la tige,  $k$  la constante d'élasticité,  $m$  la masse de la tige,  $g$  la pesanteur,  $h$  le centre de gravité de la tige,  $k_\tau$  le gain de l'amplificateur et  $B$  le coefficient du frottement visqueux. On suppose que  $\theta_m$  et  $\theta_l$  sont mesurables.

En posant  $x = [ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 ]^T = [ \theta_m \ \omega_m \ \theta_l \ \omega_l ]^T$ , le système (1.5) peut être réécrit sous la forme du système (1.1), tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_m} & -\frac{B}{J_m} & \frac{k}{J_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_l} & 0 & -\frac{k}{J_l} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k\tau}{J_m}u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \phi = [0 \ 0 \ 0 \ -mgh(\sin(x_3))]^T.$$

Plusieurs défauts peuvent survenir dans ce système. Dans cet exemple on va traiter seulement deux défauts de composants : un défaut de la liaison flexible engendré par sa déformation élastique, et un autre défaut mécanique qui se manifeste par une augmentation anormale du frottement visqueux. Il est évident que l'impact de ces deux défauts sur le modèle se traduit par la variation des coefficients  $k$  et  $B$ .

Le modèle (1.6) avec les variations paramétriques dues aux défauts, s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu + \phi(x) \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.6)$$

tel que

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta k}{J_m} & -\frac{\Delta B}{J_m} & \frac{\Delta k}{J_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta k}{J_l} & 0 & -\frac{\Delta k}{J_l} & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Delta k$ ,  $\Delta B$  représentent l'impact des variations anormales des coefficients  $k$  et  $B$  respectivement.

#### - Modélisation par des défauts additifs

Si l'on pose  $Ef = \Delta Ax$ , on trouve

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \phi(x) + Ef \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.7)$$

tel que :

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta k x_1}{J_m} - \frac{\Delta B x_2}{J_m} + \frac{\Delta k x_3}{J_m} \\ \frac{\Delta k x_1}{J_l} - \frac{\Delta k x_3}{J_l} \end{bmatrix}.$$

#### - Modélisation par des défauts multiplicatifs

Dans ce cas on met  $E\varphi(x)\theta = \Delta Ax$ . Le système (1.5) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \phi(x) + E\varphi(x, u)\theta \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.8)$$

où

$$E = \begin{bmatrix} (x_3 - x_1)/J_m & -x_2/J_m \\ -(x_3 - x_1)/J_l & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \theta = \begin{bmatrix} \Delta k \\ \Delta B \end{bmatrix}.$$

Remarquons que contrairement au cas précédent, dans ce cas le vecteur des défauts  $\theta$  représente les défauts réels (physiques) qui altèrent le fonctionnement du système.

## 1.5 Observateurs et diagnostic à base d'observateurs

### 1.5.1 Quelques notions d'observabilité

L'observabilité d'un processus est un concept très important dans le domaine d'estimation d'état. En effet, pour reconstruire les états inaccessibles d'un système, il faut savoir, a priori, si les variables d'états sont observables ou non. L'observabilité est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la seule connaissance des signaux d'entrées et de sorties [19].

#### 1.5.1.1 Observabilité d'un système linéaire

Considérons un système continu décrit par son équation d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $x \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u \in R^m$  est le vecteur d'entrée,  $y \in R^p$  est le vecteur de la sortie.  $A \in R^{n \times n}$ ,  $C \in R^{p \times n}$  et  $B \in R^{n \times m}$  sont des matrices constantes connues.

L'observabilité du système (1.9) est garantie si et seulement si

$$\text{rang}(Q_O) = \text{rang} \left( \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix} \right) = n \quad (1.10)$$

On dit alors que la paire  $A$  et  $C$  est observable. Dans ce cas, il est possible de reconstruire le vecteur d'état  $x$  sur tout intervalle  $[t_0, t_1]$  à partir de l'information disponible sur ses entrées et ses sorties [9]. Dans le cas où le rang de la matrice d'observabilité  $Q_O < n$ , on parle de l'observabilité partielle. Si toutes les variables d'état non observables sont asymptotiquement stables on dit que le système (1.9) est détectable.

#### 1.5.1.2 Observabilité d'un système non linéaire

Pour les systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est basée sur la possibilité de différencier deux conditions initiales distinctes. On parle ainsi de la distinguabilité d'un couple de conditions initiales [7].

Les processus physiques sont très souvent représentés par des modèles non linéaires décrits sous la forme suivante (représentation d'état explicite)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.11)$$

où les fonctions  $f$  et  $h$  sont des fonctions supposés suffisamment continument dérivables sur  $x$  et l'entrée  $u$  est localement bornée et mesurable.

L'observabilité du système non linéaire (1.11) est caractérisée par le fait qu'à partir des sorties mesurées, il faut être capable de discerner les différents états initiaux. L'observabilité est donc définie à partir de la notion d'indiscernabilité.

Deux états initiaux  $x(t_0) = x_1$  et  $x(t_0) = x_2$  du système non linéaire (1.11) sont dits indiscernables sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_1]$  si, pour toute entrée  $u(t)$ , leurs sorties respectives  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sont identiques sur cet intervalle. Cette notion d'indiscernabilité de deux états initiaux a permis de donner la définition suivante de l'observabilité.

**Définition :** Le système (1.11) est dit observable s'il n'existe pas de couple d'états initiaux distincts  $\{x(t_0) = x_1, x(t_0) = x_2\}$  indiscernables [7].

## 1.5.2 Quelques observateurs d'état

### 1.5.2.1 Observateur de Luenberger

La théorie de l'observation de Luenberger repose essentiellement sur des techniques de placement de pôles, Luenberger propose l'observateur suivant pour le système (1.9) :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (1.12)$$

où la paire  $(A, C)$  est supposée observable. La dynamique de l'erreur d'estimation  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  a pour expression

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} \quad (1.13)$$

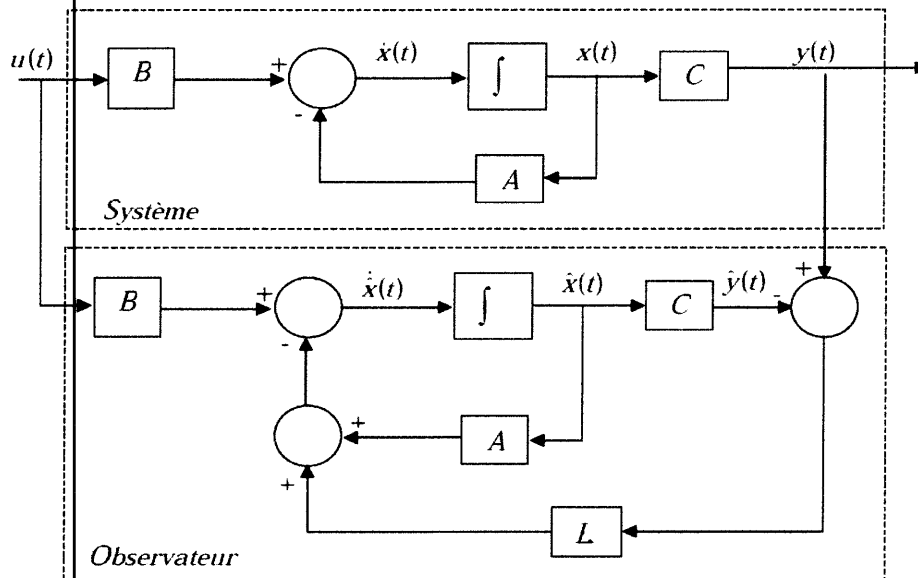


FIGURE 1.6 – Schéma structural de l'observateur de Luenberger

Il suffit alors de choisir le gain  $L$  de l'observateur de telle sorte que les valeurs propres de la matrice  $A - LC$  soient dans le demi-plan complexe gauche. une grande

liberté est laissée au choix des valeurs propres, mais en pratique on choisit une dynamique d'erreur plus rapide que celle du processus.

### 1.5.2.2 Observateur de Thau

L'observateur de Thau a été proposé pour les systèmes ayant la structure du système (1.1). Il est donné par :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \phi(\hat{x}) + L(y - C\hat{x}) \quad (1.14)$$

où la paire  $(A, C)$  est supposée observable et la fonction nonlinéaire  $\phi(x)$  satisfait la condition de continuité de Lipschitz, c-à-d  $\forall x_1, x_2 \in R^n$ , il existe une constante positive  $\lambda$ , dite constante de Lipschitz, tel que :

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\|$$

L'idée de base de cet observateur est de trouver un gain  $L$  de telle sorte que la dynamique de la partie linéaire force  $\phi(\hat{x})$  à converger vers  $\phi(x)$ . Le calcul d'un tel gain n'est pas une tâche aisée surtout pour les valeurs élevées de la constante de Lipschitz et plusieurs approches ont été proposées pour résoudre ce problème.

### 1.5.2.3 Observateur adaptatif pour les systèmes non linéaires

Pour les systèmes ayant des paramètres inconnus on a parfois besoin d'estimer conjointement l'état et les paramètres inconnus. Un observateur adaptatif est donc, un algorithme récursif qui permet d'estimer l'état d'un système dynamique ou ses paramètres inconnus ou les deux conjointement. Les études sur les observateurs adaptatifs ont d'abord été motivées par la commande adaptative, et plus récemment par la détection et le diagnostic de défauts dans des systèmes dynamiques. Dans le cas linéaire, la conception des observateurs adaptatifs est étudiée depuis les années 70. L'idée la plus utilisée dans la conception de ces observateurs est d'intégrer les paramètres inconnus dans le vecteur d'état. Pour les systèmes non linéaires, on distingue deux approches principales : La première concerne des systèmes non linéaires qui sont intrinsèquement associées à une forme canonique dont les nonlinéarités dépendent seulement des variables d'état mesurables. La deuxième concerne des systèmes ayant une forme plus au moins générale où les nonlinéarités peuvent dépendre de l'état tout entier. Cette approche est en réalité une extension de l'observateur de Thau par une loi d'adaptation pour estimer les paramètres inconnus.

Considérons le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ef(x, u)\theta \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.15)$$

où  $\theta$  est le vecteur des paramètres inconnus,  $f(x, u)$  est une fonction Lipschitzienne connue et  $E$  est une matrice tel que  $\text{rang}(E) \leq \text{rang}(C)$ .

S'il existe une matrice  $P = P^T > 0$  et une matrice  $F$  tel que :



$$E^T P = FC \quad (1.16)$$

alors l'observateur adaptatif possédant la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + f(\hat{x}, u)\hat{\theta} + L(y - C\hat{x}) \\ \dot{\hat{\theta}} = \Gamma f(\hat{x}, u)^T F(y - C\hat{x}) \end{cases} \quad (1.17)$$

estime asymptotiquement l'état du système (1.15).

#### 1.5.2.4 Observateur par mode de glissement

Les observateurs par mode de glissement présentent des avantages multiples concernant la robustesse aux différentes perturbations qui peuvent affecter un système linéaire ou non linéaire. Leur principe consiste à contraindre les dynamiques de l'état estimé à converger vers l'état réel en utilisant une contre réaction discontinue [?][?].

Considérons le système non linéaire décrit par l'équation (1.11), un observateur à modes glissants pour ce système peut avoir la forme est défini avec la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - L \times \text{signe}(y - h(\hat{x})) \quad (1.18)$$

où

$$\text{signe}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ -1 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

#### 1.5.3 Principe de génération de résidus à base d'observateur

Un observateur revient à une simulation en temps réel corrigée par une contre réaction pour assurer la convergence de l'état estimé vers l'état réel. Le principe du diagnostic à base d'observateur consiste à utiliser ce dernier pour construire un vecteur de signaux indicateurs de défauts, dit résidus, en utilisant la différence, éventuellement filtrée, entre les sorties réelles et celles estimées. Idéalement, l'observateur estime correctement l'état du système en absence de défauts ce qui signifie que le résidu reste identiquement à zéro. Après l'apparition d'un défaut, l'observateur ne peut estimer correctement l'état du système, et par conséquent le résidu s'écarte significativement de zéro.

Il est important d'obtenir une structure de résidus permettant la localisation des défauts. Les résidus doivent être produits, de manière que pour chaque défaut un ensemble de résidus soient affectés. Il existe plusieurs manières de définir les résidus structurés afin de parvenir à une évaluation correcte des résidus. Les résidus structurés sont conçus de manière à être chacun affecté par un sous ensemble de défaut et robuste (non affecté) par rapport aux défauts restants. Ainsi, lorsqu'un défaut apparaît, seul un sous ensemble de résidus réagit. Le résidu est déstructuré par rapport à un vecteur

de défauts  $f_1$  s'il n'est affecté que par les défauts  $f_1$  et s'il est robuste aux autres. Dans la littérature, on distingue trois structures de génération de résidus à base d'observateur [3].

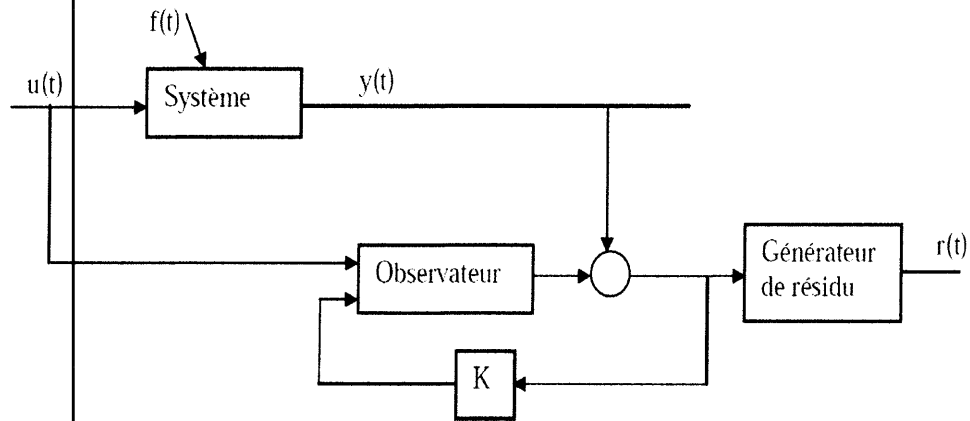


FIGURE 1.7 – Principe de génération de résidus à base d'observateur

### 1.5.3.1 Structure d'observateurs simplifiés

Cette structure utilise un seul observateur. Il est synthétisé de façon à n'être sensible qu'à un groupe de défauts. Dans le cas où un des défauts auquel il est sensible apparaît alors les estimations seront fausses. Dans le cas contraire, elles seront exactes [3].

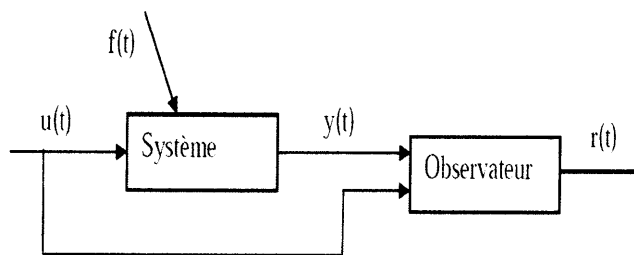


FIGURE 1.8 – Structure d'observateur simple.

### 1.5.3.2 Structure d'observateurs dédiés (DOS)

Dans ce type de structure, il est question de construire autant d'observateur que de défaut à détecter, chacun d'entre eux génère un résidu insensible à tous les défauts sauf un. Ainsi l'observateur recevant une mesure défaillante fournit une mauvaise estimation des variables estimées, tandis que les estimations des autres observateurs convergent vers les mesures des sorties correspondantes sauf sur la sortie erronée. Ce schéma reste valable même dans le cas de plusieurs défauts simultanés .

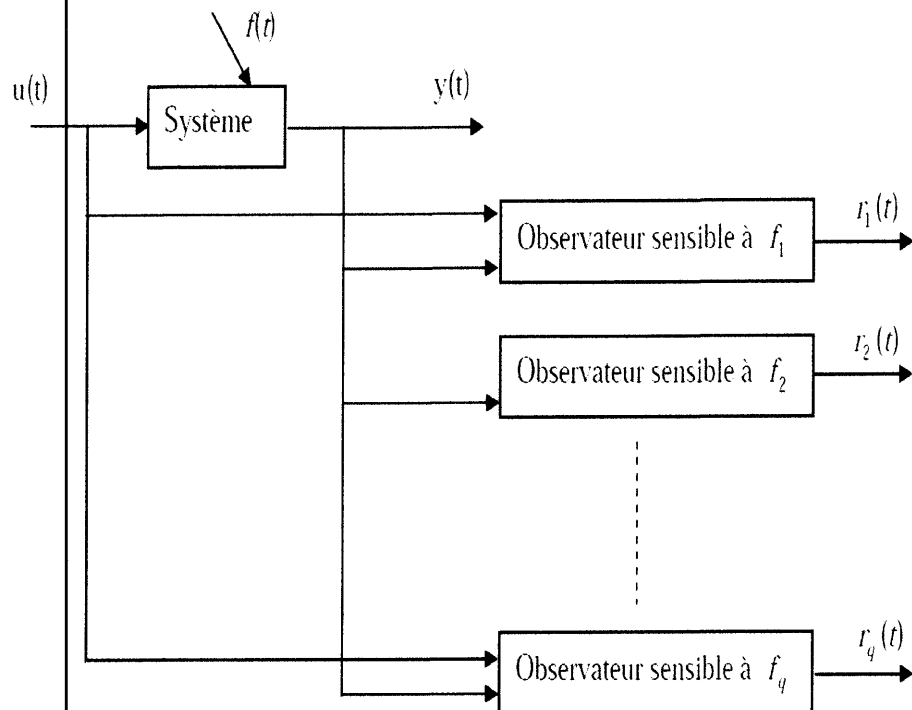


FIGURE 1.9 – Structure d’observateur dédié (DOS).

Mais, si cette structure donne parfois des bons résultats sa conception reste très limitée car elle ne permet pas de s’affranchir des entrées inconnues et des bruits.

### 1.5.3.3 Structure d’observateurs généralisés (GOS)

Dans ce genre de structure, il s’agit de synthétiser un certain nombre d’observateurs où chacun d’entre eux étant insensible à un seul défaut. Si un défaut apparaît alors, toutes les estimations d’états seront erronées sauf celles issues de l’observateur insensible à ce seul défaut. Ce schéma offre plus de degrés de liberté pour la conception de l’observateur et permet d’augmenter la robustesse. Cependant, en plus de ne pas être généralement pas capables de résoudre les problèmes de localisation des défauts, La problématique de cette approche reste dans les interactions entre les sous-systèmes. En effet, si ces interactions sont faibles, un défaut n’affectera que l’estimation de l’observateur local correspondant. Il est alors possible de localiser le composant défaillant. En revanche, si les interactions sont grandes, un défaut d’un des composants se propagera aux observateurs des autres composants [1].

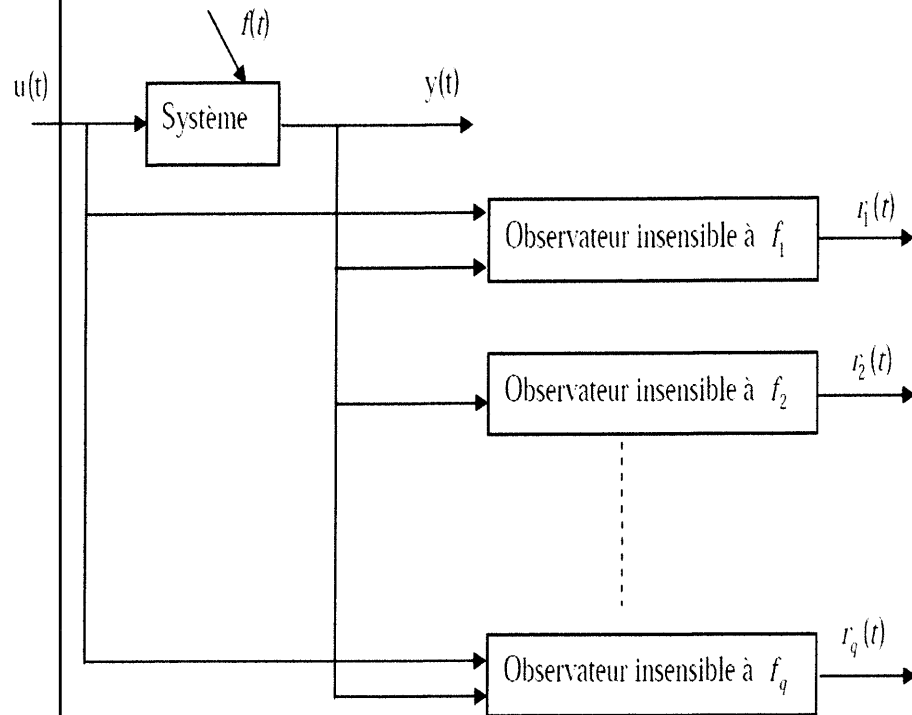


FIGURE 1.10 – Structure d’observateurs généralisés (GOS)

### 1.5.4 Estimation et reconstruction de défauts

Au lieu de générer des résidus puis les analyser pour détecter isoler et identifier les défauts, il est plus intéressant d’estimer ou de reconstruire les défauts. L’avantage des approches d’estimation et de reconstruction de défauts à base d’observateurs par rapport à la majorité des méthodes de génération de résidus est qu’elles ne nécessitent pas les phases d’isolation et d’identification. Les observateurs utilisés pour l’estimation de défauts sont principalement les observateurs adaptatifs et les observateurs utilisés pour la reconstruction de défauts sont des observateurs par mode de glissement.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un panorama de notions et des définitions essentielles pour la compréhension du diagnostic de défauts. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la description et à la modélisation des défauts dans les systèmes dynamiques. Enfin, nous nous sommes orientés vers la description de quelques notions de l’observabilité et d’observateurs dans un cadre général, ainsi que des méthodes de diagnostic basées sur l’utilisation des observateurs.



# Chapitre 2

# Chapitre 2

## Estimation de défauts à base d'observateurs adaptatifs

### 2.1 Introduction

Lorsque les paramètres d'un système sont inconnus ou changent au cours du temps, l'utilisation des observateurs simples pour l'estimation d'état devient difficile. Cela est dû au fait qu'on doit estimer simultanément l'état et les paramètres du système. Dans ce cas, les observateurs adaptatifs sont les mieux appropriés.

Du fait que l'apparition d'un défaut est souvent, interprétée comme étant des variations paramétriques du système, l'utilisation d'observateurs adaptatifs pour l'estimation de défauts est l'une des méthodes les plus répandues dans la littérature [3].

Ce genre d'observateurs a été développé pour adapter plusieurs types des systèmes non linéaires de classes restrictives en utilisant des techniques de transformation de coordonnées vers des formes canoniques. Cependant, il ne garantit pas toujours la convergence des valeurs estimées des états et des paramètres vers leurs valeurs réelles à cause des conditions très restrictives comme la condition de recouvrement et l'excitation persistante [20].

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser les observateurs adaptatifs pour l'estimation de défauts pour une classe de systèmes non linéaires. Dans un premier temps nous allons présenter la méthode conventionnelle d'estimation des défauts à base d'observateur adaptatif pour les systèmes non linéaires lipchitziens et les conditions suffisantes pour l'existence de cet observateur. Deuxièmement, nous nous intéressons aux systèmes non linéaires dont la structure ne vérifie pas la condition de recouvrement. Deux observateurs seront présentés dans ce contexte : un observateur adaptatif modifié dont les conditions d'existence ne nécessitent pas la condition de recouvrement et un observateur adaptatif modifié robuste.

Des résultats de simulation seront donnés pour prouver l'efficacité de ces approches.

## 2.2 Observateur adaptatif des systèmes non linéaire

Considérons le système non linéaire décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + E(\phi(x, u) + \varphi(x, u)\theta) \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u \in R^m$  est le vecteur d'entrée,  $y \in R^p$  est le vecteur de la sortie et  $\theta \in R^r$  est vecteur de paramètres inconnus qui représente tous les défauts multiplicatifs.  $A \in R^{n \times n}$ ,  $C \in R^{p \times n}$  et  $E \in R^{n \times q}$  sont des matrices constantes connues.  $\phi(x, u) : R^n \times R^m \rightarrow R^q$  est une fonction non linéaire connue et  $\varphi(x, u) : R^n \times R^m \rightarrow R^{q \times r}$  est une fonction connue qui peut être non linéaire.

L'objectif ici est de construire un observateur adaptatif avec un gain linéaire capable de forcer la convergence de la partie non linéaire. Le vecteur des défauts est estimé directement par une loi adaptative. Si les conditions suivantes sont satisfaites, alors, on peut construire un observateur adaptatif capable d'estimer conjointement les états du système et les défauts.

### 2.2.1 Conditions d'existence de l'observateur adaptatif

Les conditions nécessaires que doit vérifier le système (2.1) pour l'existence d'un observateur adaptatif sont [1] :

- La paire  $(A, C)$  est observable et les signaux de commandes sont des fonctions connues et bornées qui assure la bornitude de l'état  $x$  même après l'apparition d'un défaut.
- Il existe deux matrices  $P \in R^{n \times n}$  symétrique et définie positive et  $F \in R^{q \times p}$  tel que [5] [6] :

$$E^T P = FC \quad (2.2)$$

Cette condition est connue sous le nom de *observer matching condition* ou *condition de recouvrement*, .

- Le vecteur  $\theta$  est supposé constant et borné, tel que :

$$\|\theta\| \leq \rho \quad (2.3)$$

où  $\rho$  est une constante positive.

- Les fonctions  $\phi$  et  $\varphi$  sont lipchitziennes par rapport à  $x$ . C.à.d.  $\forall (x, \hat{x}) \in R^n$ , il existe deux matrices constantes  $(H_1, H_2) \in R^{q \times n}$ , tel que :

$$\|\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)\| \leq \|H_1(x - \hat{x})\| \quad (2.4)$$

$$\|\varphi(x, u) - \varphi(\hat{x}, u)\| \leq \|H_2(x - \hat{x})\| \quad (2.5)$$

- La matrice  $E\varphi(x, u)$  est à excitation persistante c-à-d. il existe  $T, k_1, k_2 > 0$  tel que pour tout  $t \geq 0$  :

$$I_n k_1 \geq \int_t^{t+T} E\varphi(x, u)\varphi(x, u)^T E^T \geq k_2 I_n \quad (2.6)$$

Notons que dans les conditions de Lipschitz (2.4) et (2.5), on a utilisé des matrices de Lipschitz au lieu des constantes de Lipschitz. Il a été rapporté dans [16] que  $\|H(x - \hat{x})\|$  peut être beaucoup plus petite que son homologue avec une constante de Lipschitz pour la même fonction non linéaire. Cela peut aider de façon significative à trouver une solution au problème de la conception d'observateur lorsque la constante de Lipschitz est grande.

### 2.2.2 Observateur adaptatif

La structure de l'observateur adaptatif du système (2.1) est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + E(\phi(\hat{x}, u) + \varphi(\hat{x}, u)\hat{\theta}) + L(y - C\hat{x}) \\ \dot{\hat{\theta}} = \Gamma\varphi^T(\hat{x}, u)FC\tilde{x} \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $\hat{x}$  est l'état estimé,  $\hat{\theta}$  est l'estimé de  $\theta$  et  $\Gamma \in R^{q \times q}$  est une matrice symétrique et définie positive. Posons  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  et  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ , les erreurs d'observation et d'estimation des défauts, respectivement. Alors, leurs dynamiques sont données par

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} + E(\tilde{\phi} + \tilde{\varphi}\theta + \hat{\varphi}\tilde{\theta}) \\ \dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma\varphi^T(\hat{x}, u)FC\tilde{x} \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $\tilde{\varphi} = \varphi(x, u) - \varphi(\hat{x}, u)$  et  $\tilde{\phi} = \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)$ .

### 2.2.3 Analyse de la stabilité

On choisit la fonction de Lyapunov suivante :

$$v = \tilde{x}^T P \tilde{x} + \tilde{\theta}^T \Gamma \tilde{\theta} \quad (2.9)$$

En dérivant (2.9) le long de la trajectoire de (2.8), on trouve

$$\begin{aligned} \dot{v} = \tilde{x}^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)] \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P E \tilde{\phi} + 2\tilde{x}^T P E \tilde{\varphi} \theta \\ + 2\tilde{x}^T P E \hat{\varphi} \tilde{\theta} - 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \Gamma \hat{\varphi}^T F C \tilde{x} \end{aligned} \quad (2.10)$$

En utilisant la condition (2.2), on obtient

$$\dot{v} = \tilde{x}^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)] \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P E \tilde{\phi} + 2\tilde{x}^T P E \tilde{\varphi} \theta \quad (2.11)$$

D'autre part, En utilisant (2.3), (2.4) et (2.5) et à l'aide de l'inégalité de Young [14]  $2a^T b \leq \varepsilon a^T a + \varepsilon^{-1} b^T b$ , ( $\varepsilon > 0$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} 2\tilde{x}^T P E \tilde{\phi} &\leq \varepsilon_1 \tilde{x}^T P E E^T P \tilde{x} + \varepsilon_1^{-1} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} \\ &\leq \varepsilon_1 \tilde{x}^T P E E^T P \tilde{x} + \varepsilon_1^{-1} H_1^T H_1 \tilde{x}^T \tilde{x} \end{aligned} \quad (2.12)$$



$$\begin{aligned} 2\tilde{x}^T PE\tilde{\varphi}\theta &\leq \varepsilon_2\tilde{x}^T PEE^T P\tilde{x} + \varepsilon_2^{-1}\theta^T \tilde{\varphi}^T \tilde{\varphi}\theta \\ &\leq \varepsilon_2\tilde{x}^T PEE^T P\tilde{x} + \varepsilon_2^{-1}\tilde{x}^T H_2^T H_2\rho^2\tilde{x} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Donc, la dérivée de la fonction de Lyapunov satisfait :

$$\dot{v} \leq \tilde{x}^T[(A - LC)^T P + P(A - LC)]\tilde{x} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\tilde{x}^T PEE^T P\tilde{x} + \tilde{x}^T(\varepsilon_1^{-1}H_1^T H_1 + \rho^2\varepsilon_2^{-1}H_2^T H_2)\tilde{x} \quad (2.14)$$

D'où

$$\dot{v} \leq \tilde{x}^T[(A - LC)^T P + P(A - LC) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)PEE^T P + \varepsilon_1^{-1}H_1^T H_1 + \rho^2\varepsilon_2^{-1}H_2^T H_2]\tilde{x} \quad (2.15)$$

La stabilité de l'observateur est vérifié, c-à-d  $\dot{v} \leq 0$ , si la matrice  $Q$  donnée par :

$$Q = -[(A - LC)^T P + P(A - LC) + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)PEE^T P + \varepsilon_1^{-1}H_1^T H_1 + \rho^2\varepsilon_2^{-1}H_2^T H_2] \quad (2.16)$$

est définie positive. Pour prouver la stabilité asymptotique, on écrit :

$$\dot{v} \leq -\tilde{x}^T Q\tilde{x} \quad (2.17)$$

En intégrant l'inégalité précédente de 0 à  $t_f$  on obtient :

$$v(t_f) - v(0) \leq -\int_0^{t_f} \tilde{x}^T Q\tilde{x}.dt \quad (2.18)$$

Puisque  $v > 0$ , l'inégalité (2.18) implique que

$$\int_0^{t_f} \tilde{x}^T Q\tilde{x}.dt \leq v(0) \quad (2.19)$$

En conséquence, pour  $t_f \rightarrow \infty$  l'intégrale (2.19) existe et inférieure à  $v(0)$ . En utilisant le lemme de Barbalat (voir annexe C), on déduit que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}^T Q\tilde{x} = 0$  et donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = 0$ . Par conséquent, on déduit aussi que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{x}} = 0$ . De plus, puisque  $\varphi$  et  $\phi$  sont Lipchitziennes, de (2.8), on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\hat{\varphi}\tilde{\theta} = 0 \quad (2.20)$$

Ainsi, si la condition d'excitation persistante (2.6) est vérifiée, on déduit que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta} = 0$ . Ce qui signifie que l'observateur estime correctement les défauts.

## 2.2.4 Calcul de $P$ , $F$ et $L$ par $\mathcal{LMI}$ s

Nous avons vu dans la section précédente que la convergence de l'observateur exige de calculer  $P$ ,  $L$  et  $F$  de sorte que (2.16) soit définie négative en vérifiant la contrainte (2.2). Pour transformer (2.16) en une  $\mathcal{LMI}$  [4], on met  $L = P^{-1}MC^T$ , tel que  $M = M^T$ . Le problème revient donc à résoudre l'inégalité

$$A^T P + PA - C^T C M - M C^T C + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) P E E^T P + (\varepsilon_1^{-1} H_1^T H_1 + \rho^2 \varepsilon_2^{-1} H_2^T H_2)^2 I_n < 0 \quad (2.21)$$

pour  $P$  et  $M$ . En appliquant, maintenant, le complément de Schur (Voir annexe B) à (2.21), on obtient  $\mathcal{LMI}$  suivante :

$$\begin{pmatrix} \Xi & PE \\ E^T P & (\varepsilon_1^{-2} + \varepsilon_2^{-2}) I_q \end{pmatrix} < 0 \quad (2.22)$$

avec  $\Xi = A^T P + PA - C^T C M - M C^T C + (\varepsilon_1^{-1} H_1^T H_1 + \rho^2 \varepsilon_2^{-1} H_2^T H_2)^2 I_n$ .

Pour faciliter la résolution de (2.22) sous la contrainte d'égalité stricte (2.2), il est judicieux de transformer (2.2) en une  $\mathcal{LMI}$ . Dans [6], l'auteur a démontré que la résolution de la condition de recouvrement est équivalente à la résolution du problème d'optimisation  $\mathcal{LMI}$  suivant :

$$\begin{matrix} \text{Minimiser } \eta \text{ tel que} \\ \begin{pmatrix} \eta I_q & E^T P - FC \\ (E^T P - FC)^T & \eta I_n \end{pmatrix} \geq 0 \end{matrix} \quad (2.23)$$

Le problème de calcul des gains de l'observateur revient donc à résoudre les  $\mathcal{LMI}$ s (2.22) et (2.23) simultanément pour  $P = P^T > 0$ ,  $M = M^T$  et  $F$ .

## 2.3 Observateur adaptatif modifié

La condition de recouvrement (2.2) est satisfaite si  $q \leq n$  et les degrés relatifs entre tous les défauts et au moins  $q$  sorties sont tous égaux à un. Pour de nombreux systèmes physiques cette condition n'est pas vérifiée. Par exemple pour les systèmes mécaniques, à cause de la structure de leur modèle, il ne peut y avoir aucun défaut dans les dynamiques mesurables si les sorties mesurables sont uniquement les positions. Dans cette section nous présentons un observateur adaptatif modifié, tel qu'il a été présenté dans [15], qui ne nécessite pas la condition de recouvrement. Une condition structurelle nécessaire pour l'existence de cet observateur pour le système (2.1) est la suivante :

$$CE = 0 \quad (2.24)$$

$$\text{rang}(CAE) = \text{rang}(E) \quad (2.25)$$

L'égalité (2.24) signifie que les degrés relatifs entre les défauts et les sorties  $y$  sont supérieurs à un et l'égalité (2.25) signifie que les degrés relatifs entre les défauts et au moins  $q$  sorties sont deux.

L'observateur adaptatif modifiée que nous allons présenté est basé sur le lemme suivant [6] :

**Lemme 1** : Il existe deux matrices  $P$  symétrique et définie positive et  $F$  tel que  $E^T P = FC$  si et seulement si  $\text{rang}(CE) = \text{rang}(E)$ .

### 2.3.1 Une forme canonique pour la synthèse de l'observateur adaptatif modifié

Décomposons les matrices  $C$  et  $E$  en blocs comme suit :

$$C = [ C_1 \quad C_2 ], E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

où  $C_1 \in R^{p \times p}$ ,  $C_2 \in R^{p \times (n-p)}$ ,  $E_1 \in R^{p \times q}$  et  $E_2 \in R^{(n-p) \times q}$ . Sans perte de généralité, on suppose que la matrice  $C_1$  est inversible.

On définit une matrice de transformation non singulière  $T$  tel que

$$T = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0_{(n-p) \times p} & I_{(n-p)} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

En appliquant la transformation  $z = Tx$  au système (2.1), on obtient

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{E}(\bar{\phi}(z, u) + \bar{\varphi}(z, u)\theta) \\ y = \bar{C}z \end{cases} \quad (2.28)$$

où

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, z_1 = y, \bar{\phi}(z, u) = \phi(T^{-1}x, u), \bar{\varphi}(z, u) = \varphi(T^{-1}x, u),$$

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & C_1^{-1}C_2 \\ 0_{(n-p) \times p} & I_{(n-p)} \end{bmatrix},$$

$$\bar{E} = TE = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ 0_{(n-p) \times p} & I_{(n-p)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{p \times q} \\ E_2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = CT^{-1} = [ C_1 \quad C_2 ] \times \begin{bmatrix} C_1^{-1} & C_1^{-1}C_2 \\ 0_{(n-p) \times p} & I_{(n-p)} \end{bmatrix} = [ I_{p \times p} \quad 0_{p \times (n-p)} ].$$

Dans la nouvelle base la condition (2.25) devient

$$\text{rang}(\bar{C}\bar{A}\bar{E}) = \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I_{p \times p} & 0_{p \times (n-p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{p \times q} \\ E_2 \end{bmatrix} \right) = \text{rang}(\bar{E}) \quad (2.29)$$

Cela donne

$$\text{rang}(A_{12}E_2) = \text{rang}(E_2) \quad (2.30)$$

L'égalité (2.25) est de la même forme que la condition de recouvrement. Donc en utilisant Lemme 1, on en déduit qu'il existe deux matrices,  $P_3 \in R^{n \times n}$  symétrique et définie positive et  $F \in R^{q \times p}$  tel que



$$E_2^T P_3 = F A_{12} \quad (2.31)$$

### 2.3.2 synthèse de l'observateur adaptatif modifié

L'observateur adaptatif pour le système (2.28) est donné par

$$\dot{\hat{z}} = \bar{A}\hat{z} + \bar{E}(\bar{\phi}(\hat{z}, u) + \bar{\varphi}(\hat{z}, u)\hat{\theta}) + L(y - \bar{C}\hat{z}) \quad (2.32)$$

où  $\hat{\theta}$  est solution de la loi d'adaptation suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}} = w + \Gamma \hat{\varphi}_z^T F y \\ \dot{w} = -\Gamma \hat{\varphi}_z^T F y - \Gamma \hat{\varphi}_z^T (F A_{11} z_1 + F A_{12} z_2 - E_2^T P_2^T z_1) \end{cases} \quad (2.33)$$

On peut facilement démontrer que les dynamiques de l'erreur d'observation  $\tilde{z} = z - \hat{z}$  et l'erreur d'estimation de défauts  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  sont données par

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}} = (\bar{A} - \bar{L}\bar{C})\tilde{z} + \bar{E}(\tilde{\phi}_z + \tilde{\varphi}_z\theta + \hat{\varphi}_z\tilde{\theta}) \\ \dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma \hat{\varphi}_z^T(\hat{z}, u) \begin{bmatrix} E_2^T P_2^T & F A_{12} \end{bmatrix} \tilde{z} \end{cases} \quad (2.34)$$

où  $\tilde{\phi}_z = \bar{\phi}(z, u) - \bar{\phi}(\hat{z}, u)$ ,  $\tilde{\varphi}_z = \bar{\varphi}(z, u) - \bar{\varphi}(\hat{z}, u)$ .

### 2.3.3 Analyse de la stabilité

On considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$v = \tilde{z}^T P \tilde{z} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (2.35)$$

où

$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (2.36)$$

La dérivée de (2.35) le long des trajectoires des dynamiques des erreurs (2.34) donne

$$\begin{aligned} \dot{v} = \tilde{z}^T [(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})^T P + P(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})] \tilde{z} + 2\tilde{z}^T P \bar{E}(\tilde{\phi}_z + \tilde{\varphi}_z\theta) \\ + 2\tilde{z}^T P \bar{E} \hat{\varphi}_z \tilde{\theta} - 2\tilde{\theta}^T \hat{\varphi}_z^T \begin{bmatrix} E_2^T P_2^T & F A_{12} \end{bmatrix} \tilde{z} \end{aligned} \quad (2.37)$$

En utilisant l'inégalité de Young  $2a^T b \leq \varepsilon a^T a + \varepsilon^{-1} b^T b$ , tel que  $\varepsilon > 0$ , on trouve

$$2\tilde{z}^T P \bar{E} \tilde{\phi}_z \leq \varepsilon_1 \tilde{z}^T P \bar{E} \bar{E}^T P \tilde{z} + \varepsilon_1^{-1} \tilde{\phi}_z^T \tilde{\phi}_z \quad (2.38)$$

$$2\tilde{z}^T P \bar{E} \tilde{\varphi}_z \theta \leq \varepsilon_2 \tilde{z}^T P \bar{E} \bar{E}^T P \tilde{z} + \varepsilon_2^{-1} \theta^T \tilde{\varphi}_z^T \tilde{\varphi}_z \theta \quad (2.39)$$

et en tenant compte que les nonlinéarité  $\tilde{\varphi}_z$  et  $\tilde{\phi}_z$  vérifient les conditions de Lipchitz (2.4) et (2.5), on peut écrire

$$2\tilde{z}^T P \bar{E} \tilde{\phi}_z \leq \varepsilon_1 \tilde{z}^T P \bar{E} \bar{E}^T P \tilde{z} + \varepsilon_1^{-1} \tilde{z}^T \bar{H}_1^T \bar{H}_1 \tilde{z} \quad (2.40)$$

$$2\tilde{z}^T P \bar{E} \tilde{\varphi}_z \theta \leq \varepsilon_2 \tilde{z}^T P \bar{E} \bar{E}^T P \tilde{z} + \rho^2 \varepsilon_2^{-1} \tilde{z}^T \bar{H}_2^T \bar{H}_2 \tilde{z} \quad (2.41)$$

où  $\bar{H}_1 = H_1 T^{-1}$  et  $\bar{H}_2 = H_2 T^{-1}$ .

En remplaçant (2.40) et (2.41) dans (2.37), on trouve

$$\begin{aligned} \dot{v} \leq & \tilde{z}^T [(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})^T P + P(\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) P \bar{E} \bar{E}^T P \\ & + \varepsilon_1^{-1} \bar{H}_1^T \bar{H}_1 + \varepsilon_2^{-1} \bar{H}_2^T \bar{H}_2] \tilde{z} \\ & + 2\tilde{z}^T P \bar{E} \tilde{\varphi}_z \tilde{\theta} - 2\tilde{\theta}^T \hat{\varphi}_z^T \begin{bmatrix} E_2^T P_2^T & F A_{12} \end{bmatrix} \tilde{z} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Maintenant en utilisant les structure décomposée de  $P$  et  $\bar{E}$ , on trouve

$$\begin{aligned} \dot{v} \leq & \tilde{z}^T [(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})^T P + P(\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) P \bar{E} \bar{E}^T P \\ & + \varepsilon_1^{-1} \bar{H}_1^T \bar{H}_1 + \varepsilon_2^{-1} \bar{H}_2^T \bar{H}_2] \tilde{z} \\ & + 2\tilde{z}^T \begin{bmatrix} P_2 E_2 \\ P_3 E_2 \end{bmatrix} \tilde{\varphi}_z \tilde{\theta} - 2\tilde{\theta}^T \hat{\varphi}_z^T \begin{bmatrix} E_2^T P_2^T & F A_{12} \end{bmatrix} \tilde{z} \end{aligned} \quad (2.43)$$

En se servant de la condition (2.31), l'inégalité (2.43) se simplifie à la forme

$$\dot{v} \leq \tilde{z}^T [(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})^T P + P(\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) P \bar{E} \bar{E}^T P + \varepsilon_1^{-1} \bar{H}_1^T \bar{H}_1 + \varepsilon_2^{-1} \bar{H}_2^T \bar{H}_2] \tilde{z} \quad (2.44)$$

Donc l'erreur d'estimation d'état est stable si la matrice

$$Q = -[(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})^T P + P(\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) P \bar{E} \bar{E}^T P + \varepsilon_1^{-1} \bar{H}_1^T \bar{H}_1 + \varepsilon_2^{-1} \bar{H}_2^T \bar{H}_2] \quad (2.45)$$

est définie positive. Pour prouver la stabilité asymptotique de  $\tilde{z}$  et la convergence de  $\tilde{\theta}$  vers zéro, on suit les mêmes étapes que dans la section (2.2.3).

### 2.3.4 Approche $\mathcal{LMI}$ s pour le calcul de $P$ , $L$ et $F$

En poursuivant les mêmes étapes que dans la section (2.2.4), on trouve que le calcul de  $P$  et  $L$  passe par la résolution des  $\mathcal{LMI}$ s suivantes :

$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (2.46)$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda & P \bar{E} & P \bar{E} \\ \bar{E}^T P & \varepsilon_1^{-1} I_q & 0_{q \times q} \\ \bar{E}^T P & 0_{q \times q} & \varepsilon_2^{-1} I_q \end{pmatrix} < 0 \quad (2.47)$$

avec  $\bar{L} = P^{-1} M C^T$ , et  $\Lambda = \bar{A}^T P + P \bar{A} - \bar{C}^T \bar{C} M - M \bar{C}^T \bar{C} + \varepsilon_1^{-1} \bar{H}_1^T \bar{H}_1 + \varepsilon_2^{-1} \bar{H}_2^T \bar{H}_2$ .

De même que pour la contrainte (2.2), la nouvelle condition de recouvrement (2.31) peut être transformée au problème  $\mathcal{LMI}$  suivant :

$$\begin{pmatrix} \text{Minimiser } \eta \text{ tel que :} \\ \eta I & E_2^T P_3 - F A_{12} \\ (E_2^T P_3 - F A_{12})^T & \eta I \end{pmatrix} \geq 0 \quad (2.48)$$

## 2.4 Observateur adaptatif modifié robuste

Les systèmes physiques sont généralement soumis à des perturbations et peuvent ne pas être décrits par des modèles suffisamment précis. Ces erreurs de modélisation et perturbations risquent de fausser les décisions à prendre quant à l'existence ou non d'un défaut. Les caractéristiques des perturbations et des bruits sont généralement inconnues, ce qui fait que, même dans le cas d'un fonctionnement normal, les estimations des défauts ne sont pas nulles.

Dans cette partie, on va essayer de minimiser l'effet des perturbations et des incertitudes du modèle sur l'état et les défauts estimé en utilisant un observateur adaptatif robuste. Le système (2.28) avec perturbations et incertitudes peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{E}(\bar{\phi}(z, u) + \bar{\varphi}(z, u)\theta + d) \\ y = \bar{C}z \end{cases} \quad (2.49)$$

où le vecteur  $d \in R^q$  encapsule les incertitudes du modèle et les perturbations externes.

Soit l'observateur adaptatif décrit par les équations suivantes :

$$\dot{\hat{z}} = \bar{A}\hat{z} + \bar{E}(\bar{\phi}(\hat{z}, u) + \bar{\varphi}(z, u)\theta) + L(y - \bar{C}\hat{z}) \quad (2.50)$$

où  $\hat{\theta}$  est solution de la loi d'adaptation suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}} = w + \Gamma \hat{\varphi}_z^T F y \\ \dot{w} = -\Gamma \hat{\varphi}_z^T F y - \Gamma \hat{\varphi}_z^T (F A_{11} z_1 + F A_{12} \hat{z}_2 - E_2^T P_2^T \tilde{z}_1) - \Gamma \beta (\hat{\theta} - \theta_m) \end{cases} \quad (2.51)$$

avec

$$\theta = \|\theta_m\| \leq \rho \quad (2.52)$$

et  $\beta$  est un terme discontinu défini par

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{if } \|\hat{\theta} - \theta_m\| \leq 2\rho \\ \kappa & \text{if } \|\hat{\theta} - \theta_m\| \geq 2\rho \end{cases} \quad (2.53)$$

tel que  $\kappa$  est une constante positive.

Dans (2.51), le rôle du terme discontinu est de forcer  $\hat{\theta}$  à converger vers la région bornée par  $2\rho$ .

Les dynamiques de l'erreur d'observation  $\tilde{z} = z - \hat{z}$  et de l'erreur d'estimation de défauts  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  deviennent

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}} = (\bar{A} - \bar{L}\bar{C})\tilde{z} + \bar{E}(\tilde{\phi}_z + \tilde{\varphi}_z\theta + \hat{\varphi}_z\tilde{\theta} + d) \\ \dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma \hat{\varphi}_z^T(\hat{z}, u) \begin{bmatrix} E_2^T P_2^T & F A_{12} \end{bmatrix} \tilde{z} + \Gamma \beta (\hat{\theta} - \theta_m) \end{cases} \quad (2.54)$$

L'objectif est de trouver un gain  $\bar{L}$  qui permet d'estimer l'état  $z$  du système (2.49) avec une certaine précision malgré la présence des perturbations  $d$ . Cette précision sera déterminée par un paramètre  $\gamma$  de la façon suivante :

$$\int_0^{t_f} \|\tilde{z}\| dt < \gamma \int_0^{t_f} \|d\| dt \quad (2.55)$$

De la formule (2.55), il est évident que la minimisation de  $\gamma$  améliore la précision de l'estimation d'état. D'autre part, puisque la dynamique d'estimation des défauts n'est pas infectée explicitement par les perturbations  $d$ , la précision d'estimation des défauts (en cas d'excitation persistante) dépend directement de la précision d'estimation d'état.

### 2.4.1 Analyse de la stabilité

Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$v = \tilde{z}^T P \tilde{z} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (2.56)$$

En poursuivant les mêmes étapes que dans la section (2.3.3), la dérivée de (2.56) vérifie

$$\begin{aligned} \dot{v} \leq & \tilde{z}^T [(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})^T P + P(\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) P E E^T P + \varepsilon_1^{-1} \bar{H}_1^T \bar{H}_1 \\ & + \varepsilon_2^{-1} \bar{H}_2^T \bar{H}_2] \tilde{z} + 2\tilde{z}^T P \bar{E} d + 2\tilde{\theta}^T \beta(\hat{\theta} - \theta_m) \end{aligned} \quad (2.57)$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^T \beta(\hat{\theta} - \theta_m) &= (\theta - \theta_m)^T \beta(\hat{\theta} - \theta_m) - (\hat{\theta} - \theta_m)^T \beta(\hat{\theta} - \theta_m) \\ &= (\theta - \theta_m)^T \beta(\hat{\theta} - \theta_m) - \beta \|\hat{\theta} - \theta_m\|^2 \\ &\leq \beta \|\hat{\theta} - \theta_m\| (2\rho - \|\hat{\theta} - \theta_m\|) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Donc on peut écrire

$$\begin{aligned} \dot{v} \leq & \tilde{z}^T [(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})^T P + P(\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) P E E^T P + \varepsilon_1^{-1} \bar{H}_1^T \bar{H}_1 \\ & + \varepsilon_2^{-1} \bar{H}_2^T \bar{H}_2] \tilde{z} + 2\tilde{z}^T P \bar{E} d \end{aligned} \quad (2.59)$$

Maintenant, on définit un critère  $J$ , tel que

$$J = \dot{v} + \tilde{z}^T \tilde{z} - \gamma^2 d^T d \quad (2.60)$$

L'objectif qu'on vise maintenant est de trouver les matrices de conception de l'observateur de sorte que  $J < 0$ . En remplaçant (2.59) dans (2.60), on trouve

$$\begin{aligned} J &= \tilde{z}^T [(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})^T P + P(\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) P \bar{E} \bar{E}^T P + \varepsilon_1^{-1} \bar{H}_1^T \bar{H}_1 \\ &+ \varepsilon_2^{-1} \bar{H}_2^T \bar{H}_2] \tilde{z} + 2\tilde{z}^T P \bar{E} d + \tilde{z}^T \tilde{z} - \gamma^2 d^T d \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{z}^T & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon & P \bar{E} \\ \bar{E}^T P & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

où  $\Upsilon = (\bar{A} - \bar{L}\bar{C})^T P + P(\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)P\bar{E}\bar{E}^T P + \varepsilon_1^{-1}\bar{H}_1^T \bar{H}_1 + \varepsilon_2^{-1}\bar{H}_2^T \bar{H}_2 + I_n$ .  
Ainsi,  $J < 0$  si et seulement si

$$\begin{bmatrix} \Upsilon & P\bar{E} \\ \bar{E}^T P & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} < 0 \quad (2.62)$$

Il est évident que si  $J < 0$ , alors  $\int_0^{t_f} J dt < 0$ . C-à-d

$$\int_0^{t_f} J dt = v(t_f) - v(0) + \int_0^{t_f} \tilde{z}^T \tilde{z} dt - \gamma^2 \int_0^{t_f} d^T d dt < 0 \quad (2.63)$$

Supposant que les conditions initiales sont nulles c-à-d  $\tilde{z}(0) = 0$  et  $\tilde{\theta}(0) = 0$ , donc  $v(0) = 0$ . Par conséquent, on a

$$v(t_f) + \int_0^{t_f} \tilde{z}^T \tilde{z} dt - \gamma^2 \int_0^{t_f} d^T d dt < 0 \quad (2.64)$$

Puisque  $v(t_f) > 0$ , donc

$$\int_0^{t_f} \tilde{z}^T \tilde{z} dt - \gamma^2 \int_0^{t_f} d^T d dt < 0 \quad (2.65)$$

D'où

$$\int_0^{t_f} \tilde{z}^T \tilde{z} dt < \gamma^2 \int_0^{t_f} d^T d dt \quad (2.66)$$

Sachant que  $a^T a = \|a\|^2$ , on obtient

$$\int_0^{t_f} \|\tilde{z}\| dt < \gamma \int_0^{t_f} \|d\| dt \quad (2.67)$$

## 2.4.2 Approche des $\mathcal{LMIs}$ pour le calcul de $P$ , $L$ et $F$

Le calcul des matrices  $P$ ,  $L$  et  $F$  passe de nouveau par la transformation de (2.31) et (2.62) en  $\mathcal{LMIs}$ . En utilisant le complément de schur à deux reprise sur (2.62), le de calcul  $P$  et  $L$  se fait en en résolvant le problème d'optimisaion  $\mathcal{LMIs}$  suivant :



Minimiser  $\gamma$  tel que :

$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (2.68)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma & P\bar{E} & P\bar{E} & P\bar{E} \\ \bar{E}^T P & -\varepsilon_1 I_q & 0_{q \times q} & 0_{q \times q} \\ \bar{E}^T P & 0_{q \times q} & -\varepsilon_2 I_q & 0_{q \times q} \\ \bar{E}^T P & 0_{q \times q} & 0_{q \times q} & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} < 0$$

où  $\Sigma = \bar{A}^T P + P\bar{A} - \bar{C}^T \bar{C} M - M \bar{C}^T \bar{C} + \varepsilon_1^{-1} \bar{H}_1^T \bar{H}_1 + \varepsilon_2^{-1} \bar{H}_2^T \bar{H}_2 + I_n$  et  $\bar{L} = P^{-1} M C^T$ .  
La matrice  $F$  est solution de la containte

Minimiser  $\eta$  tel que :

$$\begin{bmatrix} \eta I & E_2^T P_3 - F A_{12} \\ (E_2^T P_3 - F A_{12})^T & \eta I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.69)$$

## 2.5 Application à l'estimation des défauts multiplicatifs du robot à liaison flexible

Afin de valider les performances de la méthode traitées dans ce chapitre, nous les validons au modèle du robot à liaison flexible (voir Annexe A ).

### 2.5.1 Modèle du robot à liaison flexible avec défauts multiplicatifs

Das cette section on reprend le modèle du robot à liaison flexible [17] (voir annexe A) avec défauts multiplicatif tel qu'il a été considéré dans la section (1.3).

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m = \omega_m \\ \dot{\omega}_m = \frac{k+\Delta k}{J_m}(\theta_l - \theta_m) - \frac{B+\Delta B}{J_m}\omega_m + \frac{k_r}{J_m}u \\ \dot{\theta}_l = \omega_l \\ \dot{\omega}_l = -\frac{k+\Delta k}{J_l}(\theta_l - \theta_m) - \frac{mgh}{J_l}\sin(\theta_l) \end{cases} \quad (2.70)$$

où  $\Delta k$  et  $\Delta B$  représentent, respectivement, l'impact sur le modèle, de la déformation élastique de la liaison et de la variation du frottement visqueux.

Ce modèle peut être écrit sous la forme du système (2.1) avec :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta_m \ \omega_m \ \theta_l \ \omega_l]^T, \theta = \begin{bmatrix} \Delta k \\ \Delta B \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_m} & -\frac{B}{J_m} & \frac{k}{J_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_l} & 0 & -\frac{k}{J_l} & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\phi = [ ku/J_m \quad -mgh \sin(x_3)/J_l ]^T, \varphi = \begin{bmatrix} (x_3 - x_1)/J_m & -x_2/J_m \\ -(x_3 - x_1)/J_l & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut facilement vérifier que la structure de ce système ne satisfait pas la condition de recouvrement (2.2). Cependant les conditions (2.24) et (2.25) sont satisfaites. Ce qui signifie que la loi d'adaptation (2.33) est faisable.

Il est clair que les non linéarités sont globalement Lipchitziennes. On peut calculer la matrice de Lipschitz  $H_1$  de  $\phi$  de la matrice jacobienne  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} \|H_1(x - \hat{x})\| &= \max (\| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x - \hat{x}) \|) \\ &= \max \left( \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mgh \cos x_3/J_l & 0 \end{bmatrix} (x - \hat{x}) \right\| \right) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Il est évident que le deuxième terme de (2.71) est maximal pour  $\cos x_3 = 1$ . Par conséquence

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mgh/J_l & 0 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Puisque  $\varphi$  est une matrice, le calcul de sa jacobienne n'est pas évident. Pour calculer  $H_2$ , on met

$$\varphi(x, u) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varphi_1(x, u) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varphi_2(x, u) \quad (2.73)$$

où  $\varphi_1(x, u) = [ (x_3 - x_1)/J_m \quad -x_2/J_m ]$  et  $\varphi_2(x, u) = [ -(x_3 - x_1)/J_l \quad 0 ]$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \|\varphi(x, u) - \varphi(\hat{x}, u)\| &= \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ((\varphi_1(x, u) - \varphi_1(\hat{x}, u))) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ((\varphi_2(x, u) - \varphi_2(\hat{x}, u))) \right\| \\ &\leq \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ((\varphi_1(x, u) - \varphi_1(\hat{x}, u))) \right\| + \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ((\varphi_2(x, u) - \varphi_2(\hat{x}, u))) \right\| \\ &\leq \|((\varphi_1(x, u) - \varphi_1(\hat{x}, u)))\| + \|((\varphi_2(x, u) - \varphi_2(\hat{x}, u)))\| \\ &\leq \|H_{21}(x - \hat{x})\| + \|H_{22}(x - \hat{x})\| \end{aligned} \quad (2.74)$$

avec  $H_{21}$  et  $H_{22}$  sont, respectivement, les matrice de Lipschitz de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  (et de  $\varphi_1^T$  et  $\varphi_2^T$ ). C'est deux matrice peuvent être évaluées de la même façon que pour  $\phi$ . On trouve facilement leurs valeurs comme suit :

$$H_{21} = \begin{bmatrix} -1/J_m & 0 & 1/J_m & 0 \\ 0 & -1/J_m & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{22} = \begin{bmatrix} 1/J_l & 0 & -1/J_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maintenant pour trouver  $H_2$  à partir de  $H_{21}$  et de  $H_{22}$ , on utilise la relation suivante :

$$\|H_2(x - \hat{x})\| = \|H_{21}(x - \hat{x})\| + \|H_{22}(x - \hat{x})\| \quad (2.75)$$

Donc

$$H_2 = H_{21} + H_{22} = \begin{bmatrix} 1/(J_m + J_l) & 0 & 1/(J_m + J_l) & 0 \\ 0 & 1/J_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

## 2.5.2 Synthèse de L'observateur adaptatif modifié

Pour mettre le système sous la forme canonique de synthèse de l'observateur modifié, on utilise la matrice de transformation suivante :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les paramètres et les grandeurs utilisés dans la synthèse de l'observateur sont :

-  $\rho = 1,$

-  $\varepsilon_1 = 5, \varepsilon_2 = 150,$

-  $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33.33 & 0 \end{pmatrix}$  et  $H_2 = \begin{pmatrix} -24.32 & -24.32 & -1.122 & 0 \\ 9.677 & 0 & -9.677 & 0 \end{pmatrix},$

-  $\Gamma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$

Après la résolution des  $\mathcal{LMIs}$  (2.46), (2.47) et (2.48) à l'aide du solveur  $\mathcal{CVX}$ , nous avons les gains suivants :

-  $\eta = 0.1$

-  $P_1 = \begin{bmatrix} 55.9679 & 0 \\ 0 & 54.6474 \end{bmatrix}$

-  $P_2 = P_2^T = \begin{bmatrix} -0.6815 & 0 \\ 0 & -0.5686 \end{bmatrix}$

-  $P_3 = \begin{bmatrix} 0.0440 & 0 \\ 0 & 0.0567 \end{bmatrix}$

-  $F = \begin{bmatrix} 0.0440 & 0 \\ 0 & 0.0567 \end{bmatrix}$

-  $L = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.0189 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0115 \\ 1.4424 & 0.0438 & 0.0165 & 1.0283 \end{bmatrix}^T$

### 2.5.2.1 Simulation

Les simulations ont été réalisées en se servant du logiciel MATLAB\SIMULINK. La résolution des équations différentielles a été faite par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec le pas d'intégration  $h = 0.001$ . l'entrée utilisée est  $u = \sin(t)$  avec des

conditions initiales nulles. Les défauts introduits sont une variation de  $-20\%$  de la valeur nominale du paramètre  $k$  à l'instant  $t = 5$  sec et une variation de  $30\%$  de la valeur nominale du paramètre  $B$  à l'instant  $t = 5$  sec.

**Test 1** Dans ce test, on effectue une simulation du système\observateur en utilisant les défauts décrit précédemment sans introduire des perturbations.

Les figures (2.1) et (2.2) montrent que l'observateur estime correctement les défauts. Après introduction des défauts, on remarque que leurs estimations convergent rapidement vers les défauts réels. D'autre part, des figures (2.3)-(2.6), que malgré l'introduction des défauts, l'observateur estime correctement l'état du système.

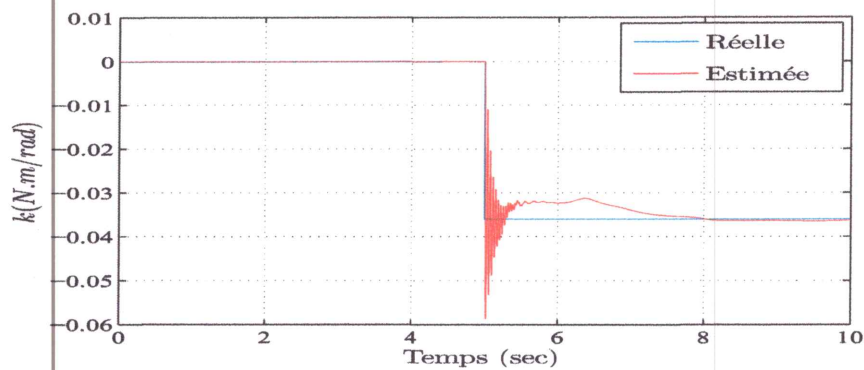


FIGURE 2.1 – Estimation du défaut  $\Delta k$  par l'observateur adaptatif modifié (Test sans perturbations)..

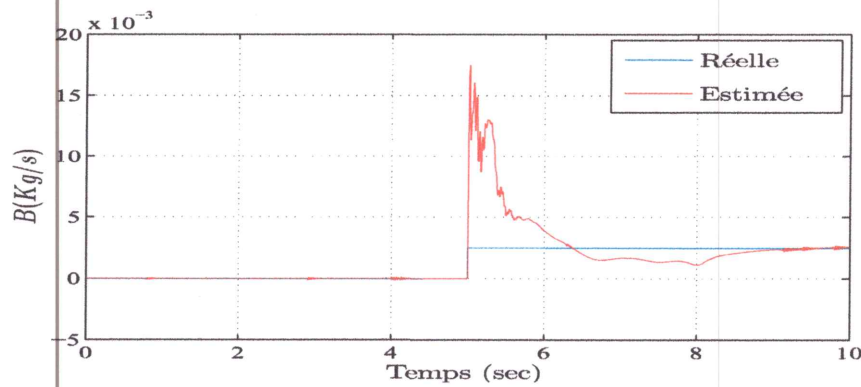


FIGURE 2.2 – Estimation du défaut  $\Delta B$  par l'observateur adaptatif modifié (Test sans perturbations).

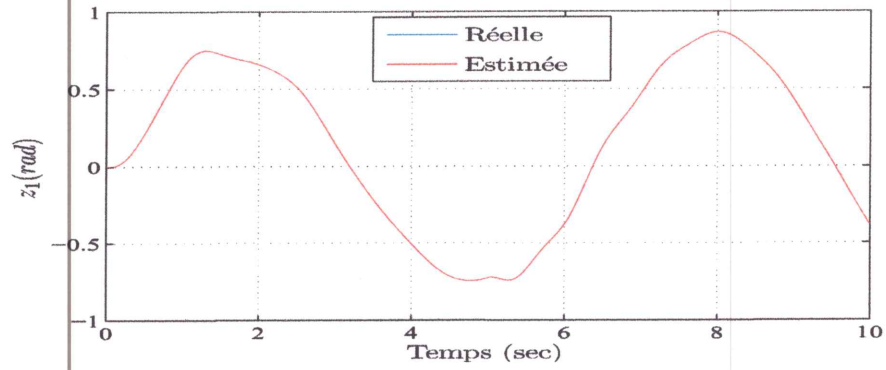


FIGURE 2.3 – Variable d'état  $z_1$  et son estimation (Test sans perturbations).

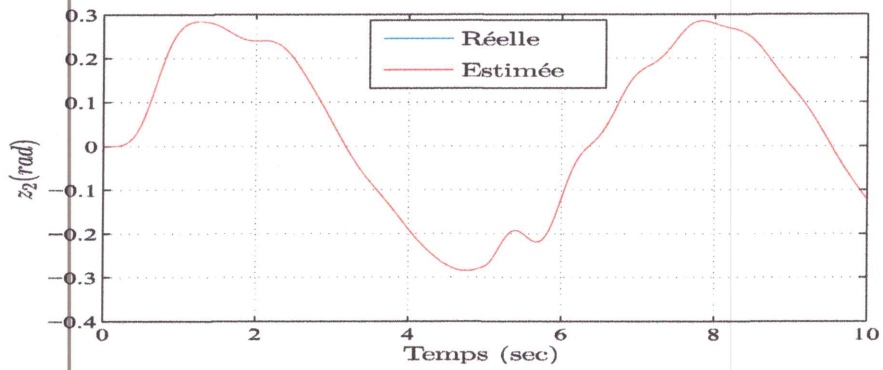


FIGURE 2.4 – Variable d'état  $z_2$  et son estimation (Test sans perturbations).

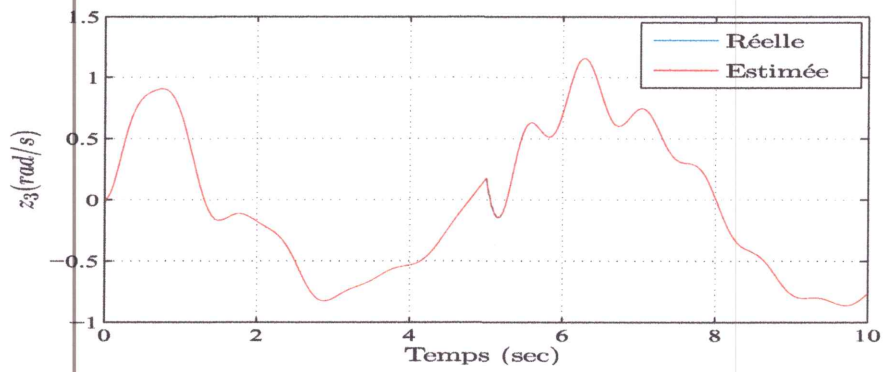


FIGURE 2.5 – Variable d'état  $z_3$  et son estimation (Test sans perturbations).

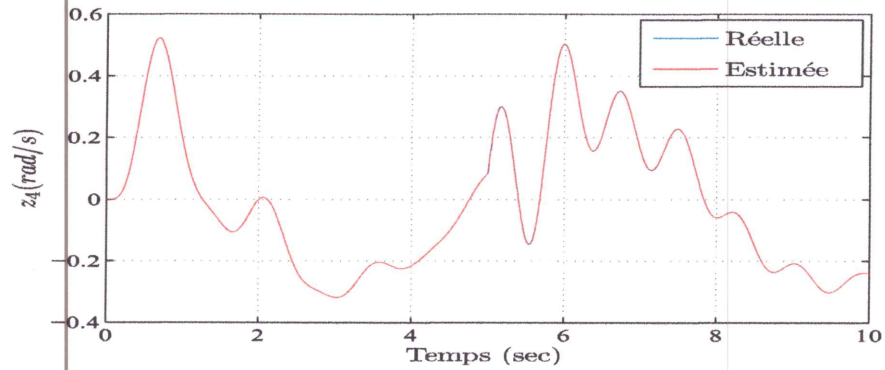


FIGURE 2.6 – Variable d'état  $z_4$  et son estimation (Test sans perturbations).

### Test 2

Afin de tester la sensibilité de l'observateur aux perturbations externes, on introduit un bruit d'amplitude 1 dans les mêmes équations où se trouvent les défauts.

Les figures (2.7) et (2.8) montrent la sensibilité des estimations des défauts aux perturbations. Cependant, l'observateur a préservé sa stabilité et les estimations ne s'éloignent pas beaucoup des valeurs réelles.

Des figures (1.9)-(1.12), on remarque que les états estimés sont moins sensibles aux perturbations que les estimations des défauts.

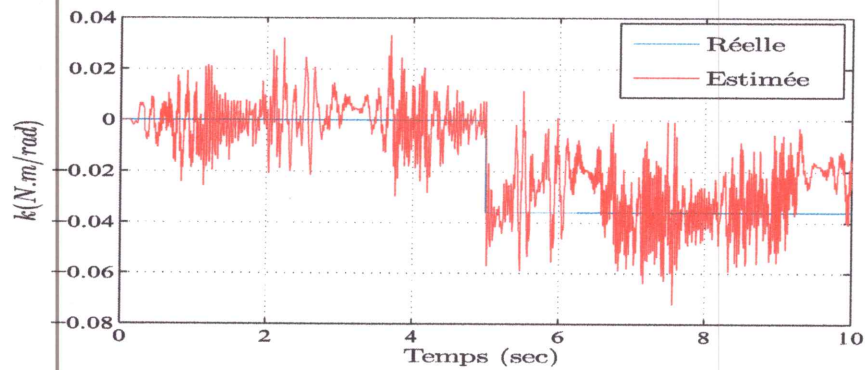


FIGURE 2.7 – Estimation du défaut  $\Delta k$  par l'observateur adaptatif modifié (Test avec perturbations).

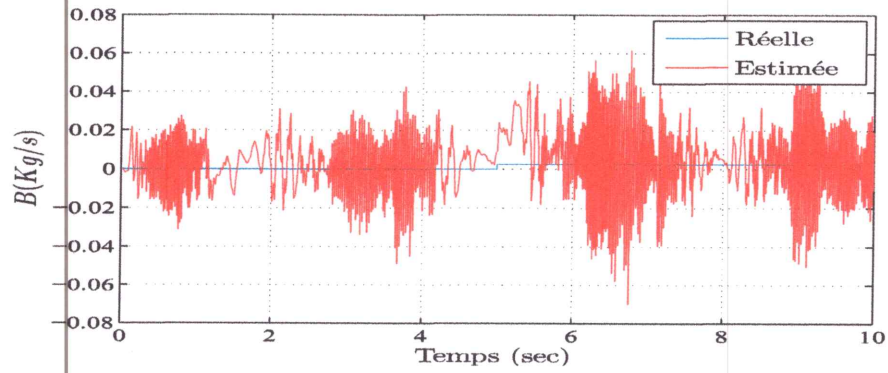


FIGURE 2.8 – Estimation du défaut  $\Delta B$  par l'observateur adaptatif modifié (Test avec perturbations).

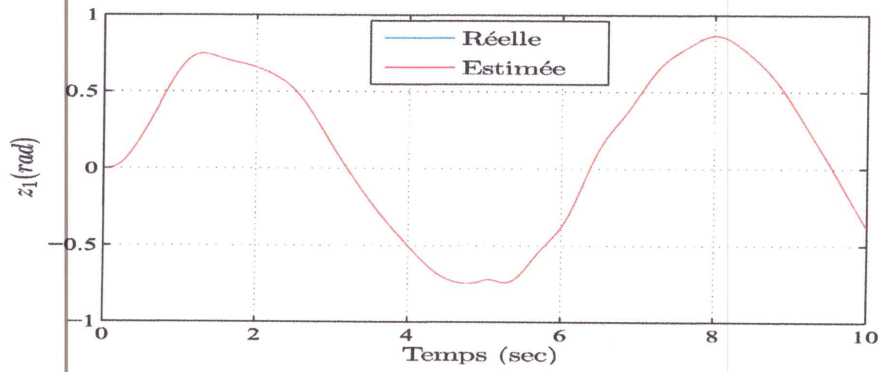


FIGURE 2.9 – Variable d'état  $z_1$  et son estimation (Test avec perturbations).

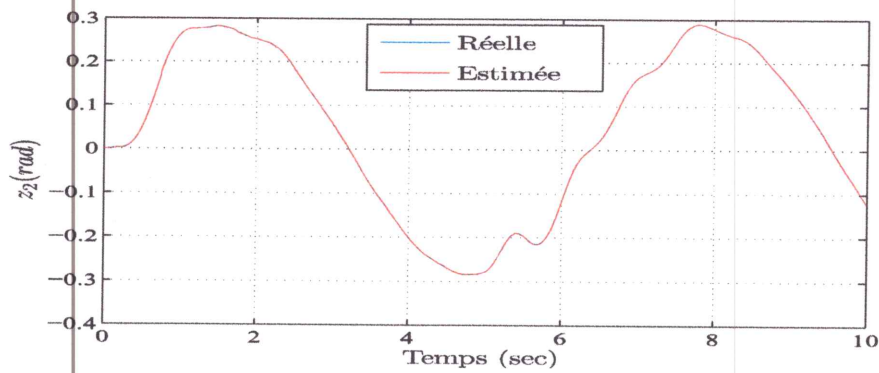


FIGURE 2.10 – Variable d'état  $z_2$  et son estimation (Test avec perturbations).

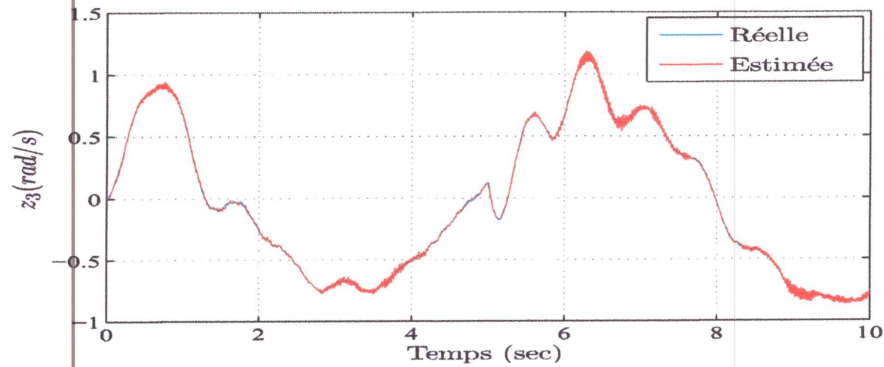


FIGURE 2.11 – Variable d'état  $z_3$  et son estimation (Test avec perturbations).

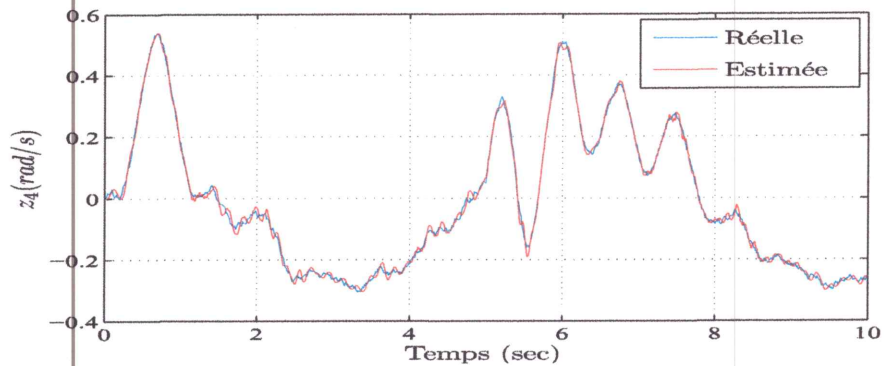


FIGURE 2.12 – Variable d'état  $z_4$  et son estimation (Test avec perturbations).

### 2.5.3 Synthèse de L'observateur adaptatif robuste

Afin de minimiser l'effet des perturbation sur l'état et les défauts estimés on synthétise, dans cette partie, un observateur adaptatif robuste. Les paramètres et les grandeurs utilisés dans la synthèse de l'observateur sont :

- $\rho = 1$ ,
- $\varepsilon_1 = 5, \varepsilon_2 = 150$ ,
- $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33.33 & 0 \end{pmatrix}$  et  $H_2 = \begin{pmatrix} -24.32 & -24.32 & -1.122 & 0 \\ 9.677 & 0 & -9.677 & 0 \end{pmatrix}$ ,
- $\Gamma = \begin{bmatrix} 900 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$ .

Après la résolution des  $\mathcal{LMI}$ s (2.68) et (2.69) à l'aide du solveur  $\mathcal{CVX}$ , nous avons les gains suivants :

- $\eta = 0.1$ ,
- $\gamma = 1.2712 \times 10^{-4}$ ,
- $P_1 = \begin{bmatrix} 5567.5 & -1.2 \\ -1.2 & 4549.2 \end{bmatrix}$ ,
- $P_2 = \begin{bmatrix} -1.6 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}$ ,



$$\begin{aligned}
 -P_3 &= \begin{bmatrix} -3.6 & 0 \\ 0 & 4.6 \end{bmatrix}, \\
 -F &= \begin{bmatrix} -3.6 & 0 \\ 0 & 4.6 \end{bmatrix}, \\
 -L &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.0010 & 0.0000 & 2.2421 & -0.0029 \\ -0.0000 & 0.0002 & -0.0027 & 1.0164 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

### 2.5.3.1 Simulation

Dans cette simulation on utilise la même entrée et on introduit les mêmes défauts que précédemment. On utilise un bruit d'amplitude un comme perturbations externes.

Les figures (2.13) et (2.14) montrent le comportement asymptotique des défauts estimés. On remarque que l'effet perturbations sur ces estimés a été significativement réduit. D'autre part, des figures (2.15)-(2.18) on remarque que les variables d'état estimées sont complètement confondues avec les variables d'état réelles même après l'introduction des défauts.

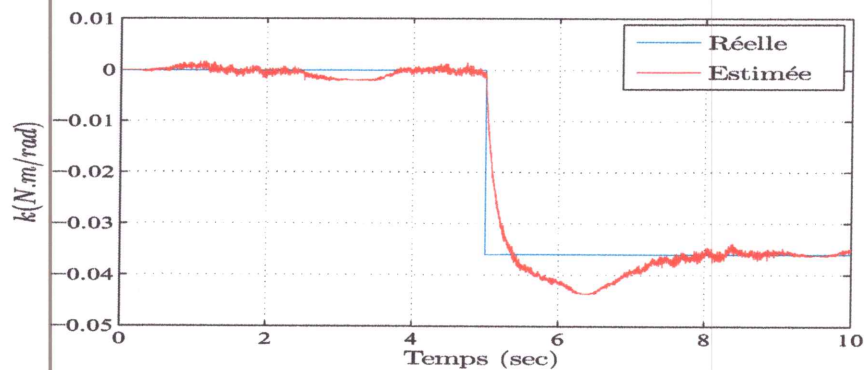


FIGURE 2.13 – Estimation du défaut  $\Delta k$  par l'observateur adaptatif modifié robuste.

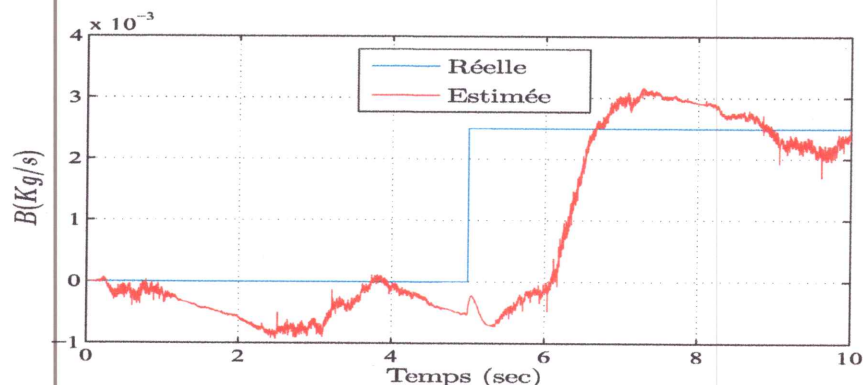


FIGURE 2.14 – Estimation du défaut  $\Delta B$  par l'observateur adaptatif modifié robuste.

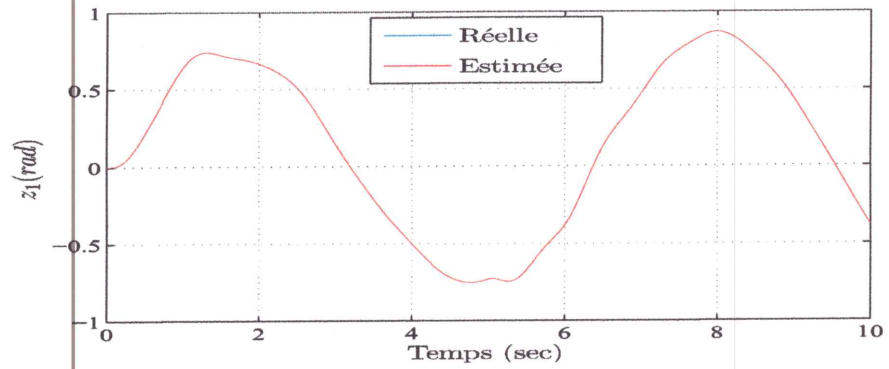


FIGURE 2.15 – Variable d'état  $z_1$  et son estimation par l'observateur adaptatif modifié robuste.

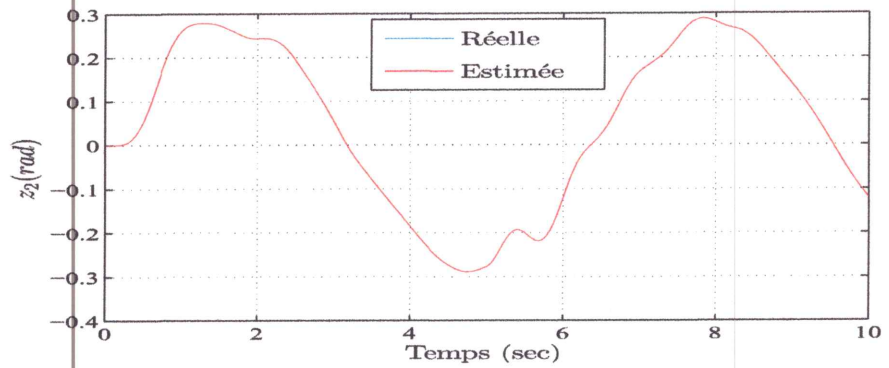


FIGURE 2.16 – Variable d'état  $z_2$  et son estimation par l'observateur adaptatif modifié robuste.

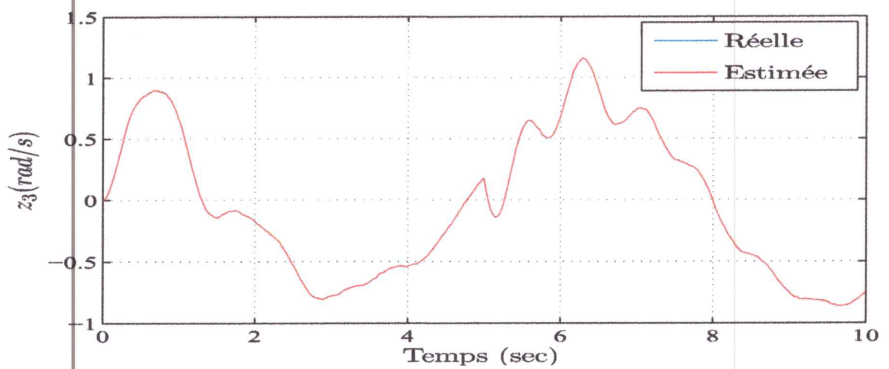


FIGURE 2.17 – Variable d'état  $z_3$  et son estimation par l'observateur adaptatif modifié robuste.

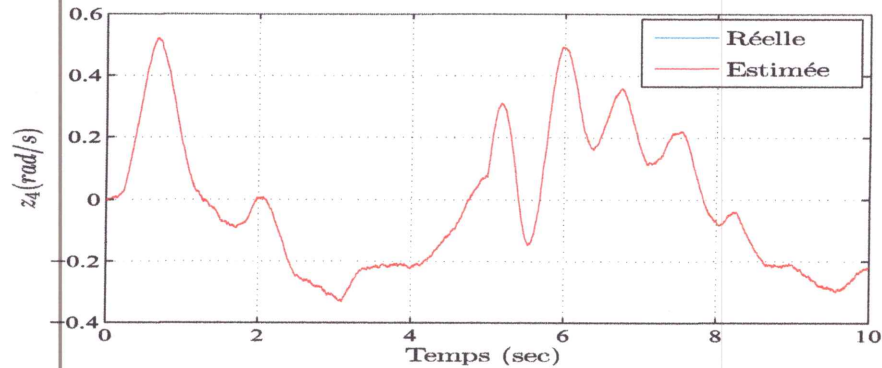


FIGURE 2.18 – Variable d'état  $z_4$  et son estimation par l'observateur adaptatif modifié robuste.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'estimation des défauts multiplicatifs à base d'observateur adaptatif pour les systèmes non linéaires lipchitziens.

Dans un premier temps nous avons présenté l'observateur adaptatif conventionnel. Nous avons vu que la loi d'adaptation de cet observateur est basée sur la condition de recouvrement.

Dans un deuxième temps, nous avons présenté les enjeux théoriques d'un observateur adaptatif pour les systèmes dont la structure ne vérifie pas la condition de recouvrement. La faisabilité de la loi d'adaptation de cet observateur est basée sur une condition structurelle moins restrictive que la condition de recouvrement. Le problème de calcul des gains de cet observateur a été transformé en problème de résolution de *LMI*s.

Puisque les systèmes physiques sont soumis à des perturbations externes et des incertitudes du modèle, nous avons présenté une version robuste de l'observateur adaptatif modifié. Dans ce cas la convergence asymptotique des états estimés et des défauts estimés vers leurs valeurs réelles n'est pas garantie à cause des perturbations. Cependant, l'observateur adaptatif modifié permet minimiser l'effet des perturbations sur les grandeurs estimées et donc avoir une précision d'estimation acceptable.

Afin de tester l'efficacité des approches présentées, nous les avons validés sur le modèle du robot à liaison flexible. Les résultats de simulation ont montré l'efficacité de ces approches d'estimation de défauts.



# Chapitre 3

# Chapitre 3

## Reconstruction des défauts additifs à base d'observateur par mode de glissement

### 3.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'approche d'estimation des défauts par observateurs adaptatifs possède les avantages suivants :

- peut s'en passer de la condition de recouvrement qui est nécessaire pour la synthèse des observateurs par mode de glissement et des observateurs à entrée inconnue qui sont utilisés généralement dans le domaine du diagnostic de défauts,
- peut estimer les défauts du type biais qu'ils soient additifs ou multiplicatifs,
- le nombre des défauts multiplicatifs à estimer ne dépend pas du nombre des sorties mesurables du système.

Cependant, ses inconvénients sont :

- ne peut estimer correctement les défauts du type dérive et valeur aberrante, c-à-d les défauts variables dans le temps,
- nécessite toujours la condition d'excitation persistante pour les défauts multiplicatifs,
- la complexité de leur conception par rapport aux observateurs par mode de glissement par exemple.

L'objectif visé par ce chapitre est d'investiguer les possibilités qu'offre les observateurs par mode de glissement et plus particulièrement l'observateur de Walcott-Zak dans le domaine d'estimation et de reconstruction des défauts additifs.

### 3.2 Observateur de Walcott-Zak

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + g(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u \in R^m$  est le vecteur des entrées,  $y \in R^p$  est le vecteur des sorties mesurables. La fonction  $g(x, u) : R^n \times R^m \rightarrow R^n$  représente les

incertitudes et satisfait les conditions suivantes :

$$g(x, u) = R\xi(x, u) \quad (3.2)$$

où la fonction  $\xi(x, u) : R^n \times R^m \rightarrow R^q$  est une fonction bornée et inconnue, tel que :

$$\|\xi(x, u)\| \leq \rho \quad (3.3)$$

où  $\rho$  est une constante connue. Le problème considéré par Walcott et Żak est l'estimation d'état du système décrit par l'équation (3.1) de sorte que l'erreur tende vers zéro d'une façon exponentielle malgré la présence des incertitudes considérées.

On considère qu'il existe une matrice  $L$  telle que la matrice  $A - LC$  a des valeurs propres stables, une paire de matrices de Lyapunov  $(P, Q)$  symétriques et définies positives et une matrice  $F$  respectant la contrainte structurelle suivante [18] :

$$\begin{aligned} (A-LC)^T P + P(A-LC) &= -Q \\ R^T P &= FC \end{aligned} \quad (3.4)$$

Notons que  $L$  satisfait la première égalité dans (4) si le système est observable. La deuxième égalité, dans (3.4), est la condition de recouvrement.

L'observateur proposé par Walcott-Zak est de la forme [18] :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) + E\nu + L(y - C\hat{x}) \quad (3.5)$$

$$\nu = \begin{cases} \rho P^{-1} \frac{C^T F^T F C \tilde{x}}{\|FC\tilde{x}\|} & \text{si } FC\tilde{x} \neq 0 \\ 0 & \text{si } FC\tilde{x} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  est l'erreur d'estimation. Sa dynamique engendrée par cet observateur est régie par l'équation suivante :

$$\dot{\tilde{x}} = (A-LC)\tilde{x} + R\xi(x, t) - \sigma \quad (3.7)$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \tilde{x}^T P \tilde{x} \quad (3.8)$$

Sa dérivée le long de la trajectoire de l'erreur d'estimation (3.7), s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= ((A-LC)\tilde{x} + R\xi(x, t) - v)^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P ((A-LC)\tilde{x} + R\xi(x, t) - \sigma) \\ &= -\tilde{x}^T Q \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P R \xi(x, t) - 2\tilde{x}^T P \sigma \\ &= -\tilde{x}^T Q \tilde{x} + 2\tilde{x}^T C^T F^T \xi(x, t) - 2\tilde{x}^T P \sigma \end{aligned} \quad (3.9)$$

Lorsque  $FC\tilde{x} \neq 0$ , en remplaçant l'expression de  $v$  par l'équation (3.6), la dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\begin{aligned} &= -\tilde{x}^T Q \tilde{x} + 2\tilde{x}^T C^T F^T \xi(x, t) - 2\tilde{x}^T P \rho P^{-1} \frac{C^T F^T F C \tilde{x}}{\|FC\tilde{x}\|} \\ &\leq -\tilde{x}^T Q \tilde{x} + 2\|\tilde{x}^T C^T F^T\| (\|\xi(x, t)\| - \rho) \end{aligned} \quad (3.10)$$

En utilisant le fait que la fonction inconnue  $\xi(x, t)$  est bornée par le scalaire positif  $\rho$ , la dérivée de la fonction de Lyapunov vérifie l'inégalité suivante :

$$\dot{V} \leq -\tilde{x}^T Q \tilde{x} < 0 \quad (3.11)$$

Lorsque  $FC\tilde{x} = 0$ , en remplaçant l'expression de  $v$  par l'équation (6), la dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\dot{V} = -\tilde{x}^T Q \tilde{x} < 0 \quad (3.12)$$

Donc, dans les deux cas traités précédemment la dérivée de la fonction de Lyapunov est définie négative ce qui montre que l'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro.

### 3.3 Reconstruction des défauts additifs par observateur par mode de glissement

Dans cette section, nous allons combiner l'observateur de Walcott-Zak avec celui de Thau (voir chapitre I, section 1.5.2) pour estimer les défauts additifs pour un système non linéaire lipschitziens.

Soit le système décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \phi(x, u) + Ef \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.13)$$

où  $x \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u \in R^m$  est l'entrée,  $y \in R^p$  est la sortie, le vecteur  $f \in R^q$  représente les défauts additifs et  $\phi(x, u) : R^n \times R^m \rightarrow R^n$  est une fonction non linéaire connue.

Les suppositions suivantes sont des conditions nécessaires pour la stabilité de l'observateur à mode glissant :

- La paire  $(A, C)$  est observable.
- Il existe une matrice  $P \in R^{n \times n}$  symétrique et définie positive et une matrice  $F \in R^{q \times p}$  tel que :

$$E^T P = FC \quad (3.14)$$

- Le vecteur  $f$  est bornée par une constante positive connue  $\rho$ , tel que :

$$\|f\| \leq \rho \quad (3.15)$$

- La fonction non linéaire  $\phi(x, u)$  est Lipchitzienne par rapport à  $x$ , c.à.d. :

$$\|\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)\| \leq \|H(x - \hat{x})\| \quad (3.16)$$

$\forall (x, \hat{x}) \in R^n$ , et  $H \in R^{n \times n}$ .

Rappelons que la condition de recouvrement 3.14 est vérifiée si et seulement si

$$\text{rank}(CE) = \text{rank}(E) \quad (3.17)$$

Pour le système (3.13), un observateur non linéaire par mode de glissement du type Walcott-Zak peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) + E\delta + L(y - C\hat{x}) \quad (3.18)$$

avec

$$\delta = \begin{cases} \rho \frac{FC\tilde{x}}{\|FC\tilde{x}\|} & \text{si } FC\tilde{x} \neq 0 \\ 0 & \text{si } FC\tilde{x} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

La dynamique d'erreur d'observation  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  est donnée par :

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} + \tilde{\phi} + E(f - \delta) \quad (3.20)$$

où  $\tilde{\phi} = \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)$ .

### 3.3.1 Analyse de la stabilité

Pour l'étude de la stabilité de la dynamique de l'erreur d'estimation (3.20), on utilise la fonction de Lyapunov suivante :

$$v = \tilde{x}^T P \tilde{x} \quad (3.21)$$

Sa dérivé est donnée par

$$\dot{v} = \tilde{x}^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)] \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P \tilde{\phi} + 2\tilde{x}^T P E f - 2\tilde{x}^T P E \delta \quad (3.22)$$

En remplaçant  $\delta$  par (3.19), on obtient

$$\dot{v} = \tilde{x}^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)] \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P \tilde{\phi} + 2\tilde{x}^T P E f - 2\tilde{x}^T P E \rho \frac{FC\tilde{x}}{\|FC\tilde{x}\|} \quad (3.23)$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Young  $2a^T b \leq \epsilon a^T a + \epsilon b^T b, (\epsilon > 0)$  et la condition de Lipschitz (3.16), on trouve

$$\begin{aligned} 2\tilde{x}^T P E \tilde{\phi} &\leq \epsilon \tilde{x}^T P E E^T P \tilde{x} + \epsilon^{-1} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} \\ &\leq \epsilon \tilde{x}^T P E E^T P \tilde{x} + \epsilon^{-1} \tilde{x}^T H^T H \tilde{x} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Par conséquent, la dérivé de la fonction de Lyapunov vérifie

$$\dot{v} \leq \tilde{x}^T [(A - LC)^T P + P(A - LC) + P P \epsilon + \frac{1}{\epsilon} H^T H] \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P E f - 2\tilde{x}^T P E \rho \frac{FC\tilde{x}}{\|FC\tilde{x}\|} \quad (3.25)$$

En outre, en se servant de la condition de recouvrement (3.14), on trouve

$$\begin{aligned} \dot{v} &\leq \tilde{x}^T [(A - LC)^T P + P(A - LC) + P P \epsilon + \frac{1}{\epsilon} H^T H] \tilde{x} \\ &\quad + 2\tilde{x}^T C^T F^T f - 2\tilde{x}^T C^T F^T \rho \frac{FC\tilde{x}}{\|FC\tilde{x}\|} \\ &\leq \tilde{x}^T [(A - LC)^T P + P(A - LC) + P P \epsilon + \frac{1}{\epsilon} H^T H] \tilde{x} \\ &\quad + 2\|\tilde{x}^T C^T F^T\| \|f\| - 2\rho \frac{\|FC\tilde{x}\|^2}{\|FC\tilde{x}\|} \\ &\leq \tilde{x}^T [(A - LC)^T P + P(A - LC) + P P \epsilon + \frac{1}{\epsilon} H^T H] \tilde{x} \\ &\quad + 2\|\tilde{x}^T C^T F^T\| (\|f\| - \rho) \end{aligned} \quad (3.26)$$



Sachant que  $f$  est borné par  $\rho$ , la dérivé de la fonction de Lyapunov vérifie toujours l'inégalité suivante :

$$\dot{v} \leq \tilde{x}^T [(A - LC)^T P + P(A - LC) + PP\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} H^T H] \tilde{x} \quad (3.27)$$

Donc la condition suffisante pour la stabilité de l'observateur est que :

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) + PP\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} H^T H < 0 \quad (3.28)$$

### 3.3.2 Approche $\mathcal{LMI}$ pour le calcul de $L$ , $F$ et $P$

La résolution de l'inégalité (3.28) pour  $L$  et  $P$  exige sa transformation en une  $\mathcal{LMI}$ . Pour se faire on pose  $L = P^{-1}MC^T$  où  $M = M^T$ . La résolution de (3.28) revient donc à résoudre l'inégalité :

$$A^T P + PA - C^T C M - M C^T C + PP\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} H^T H < 0 \quad (3.29)$$

pour  $P = P^T > 0$  et  $M = M^T$ .

En appliquant le complément de Schur (voir annexe B) à (3.29), on obtient  $\mathcal{LMI}$  suivante :

$$\begin{pmatrix} \Lambda & P \\ P & -\varepsilon^{-1} I_n \end{pmatrix} < 0 \quad (3.30)$$

avec  $\Lambda = A^T P + PA - C^T C M - M^T C^T C + \frac{1}{\varepsilon} H^T H$ .

Le problème qui se pose maintenant est comment résoudre  $\mathcal{LMI}$  (3.30) sous la contrainte d'égalité de la condition de recouvrement (3.14). Heureusement la condition de recouvrement peut être transformée en le problème d'optimisation  $\mathcal{LMI}$  suivant [6] :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } \eta \text{ tel que :} \\ & \begin{pmatrix} \eta I_q & E^T P - FC \\ (E^T P - FC)^T & \eta I_n \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $\eta$  est un scalaire positif. Donc, le problème de calcul de  $L$ ,  $F$  et  $P$  revient à résoudre (3.30) et (3.31) simultanément pour  $P$ ,  $F$  et  $M$ .

### 3.3.3 Reconstruction des défauts

Supposons que le gain de l'observateur (3.18) a été calculer de sorte que la dynamique de l'erreur d'observation est asymptotiquement stable. Conséquemment :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = 0 \quad (3.32)$$

Par voie de conséquence, on déduit aussi que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{x}} = 0 \quad (3.33)$$

Et puisque les nonlinéarité  $\phi(x, u)$  sont lipschitziennes par rapport à  $x$ , on déduit aussi que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\phi} = 0 \quad (3.34)$$

En remplaçant (3.32)-(3.34) dans (3.20), on trouve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(f - \delta) = 0 \quad (3.35)$$

Cela signifie que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta = f \quad (3.36)$$

Puisque le terme  $\delta$  est discontinu, pour estimer les défauts, on met  $f_e = \delta_{eq}$ , où  $f_e$  est l'estimation de  $f$  et  $\delta_{eq}$  est le terme continu équivalent à  $\delta$  calculer en utilisant le filtre suivant :

$$\dot{\delta}_{eq} = a \times (\delta - \delta_{eq}) \quad (3.37)$$

où  $a$  est une constante positive.

## 3.4 Application au robot manipulateur à liaison flexible

### 3.4.1 modèle du robot à liaison flexible avec défauts additifs

Reprenons le modèle du robot à liaison flexible (voir Annexe A).

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m = \omega_m \\ \dot{\omega}_m = \frac{k}{J_m}(\theta_l - \theta_m) - \frac{B}{J_m}\omega_m + \frac{k\tau}{J_m}u \\ \dot{\theta}_l = \omega_l \\ \dot{\omega}_l = -\frac{k}{J_l}(\theta_l - \theta_m) - \frac{mgh}{J_l}\sin(\theta_l) \end{cases} \quad (3.38)$$

Supposons que les sorties mesurables sont la position angulaire de l'arbre du moteur  $\theta_m$  et sa vitesse  $\omega_m$ . Dans cette section on va considérer deux défauts : un défaut mécanique qui se manifeste par une augmentation anormale du coefficient de frottement visqueux  $B$  et un autre défaut qui se dévoile par un changement de la valeur du gain de l'amplificateur  $k\tau$ .

Le modèle (3.38) peut être écrit sous la forme du système (3.13) avec :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta_m \ \omega_m \ \theta_l \ \omega_l]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_m} & -\frac{B}{J_m} & \frac{k}{J_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_l} & 0 & -\frac{k}{J_l} & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\phi = [0 \ (k\tau/J_m)u \ 0 \ -(mgh/J_l)\sin(x_3)], \quad f = [-(\Delta B/J_m)x_2 + (\Delta k\tau/J_m)u].$$

où  $\Delta k_\tau$  et  $\Delta B$  représentent, respectivement, les variations anormales engendré par les défauts sur les paramètre  $k_\tau$  et  $B$ .

Notons que dans ce cas les deux défauts réels ont été modélisé comme un seul défauts additif car ces deux défauts surgissent dans de la même variable d'état.

### 3.4.2 Synthèse de L'observateur par mode de glissement

Les paramètres et les grandeurs utilisés dans la synthèse de l'observateur sont :

-  $\rho = 15,$

-  $\varepsilon = 0.5,$

$$- H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33.3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Après la résolution des  $\mathcal{LMI}$ s (3.30) et (3.31), à l'aide du solveur  $\mathcal{CVX}$ , nous avons obtenu les gains suivants :  $\eta = 26.5227$

$$- P = \begin{bmatrix} 450.1896 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 23.3517 & -26.4227 & 0 \\ 0 & -26.4227 & 911.3566 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 47.0868 \end{bmatrix},$$

$$- F = [ 0 \quad 23.3517 ],$$

$$- L = \begin{bmatrix} 0.4819 & -0.7617 \\ -13.5330 & 14.2741 \\ 1.0181 & 1.3869 \\ 19.3548 & -0.5612 \end{bmatrix}.$$

### 3.4.3 Simulation

Dans cette simulations le système est excité par l'entrée  $u = \sin(0.1t)$  avec des conditions initiales nulles. Pour la reconstruction du défaut on utilise le paramètre  $a = 20$ . Les défauts introduits sont une variation de 6% ( $\Delta k_\tau = 0.046$ ) de la valeur nominale du paramètre  $k_\tau$  à l'instant  $t = 6$  sec puis une variation de 30% ( $\Delta B = 0.012$ ) de la valeur nominale du paramètre  $B$  à l'instant  $t = 8$  sec.

Les figures (3.1)-(3.4) montrent que malgré l'introduction des défauts, l'observateur estime correctement les variables d'état du système. Par ailleurs le défauts reconstruit avec succès.

Notons que le phénomène de broutement observé est dû au terme dicontinue  $\delta$ .

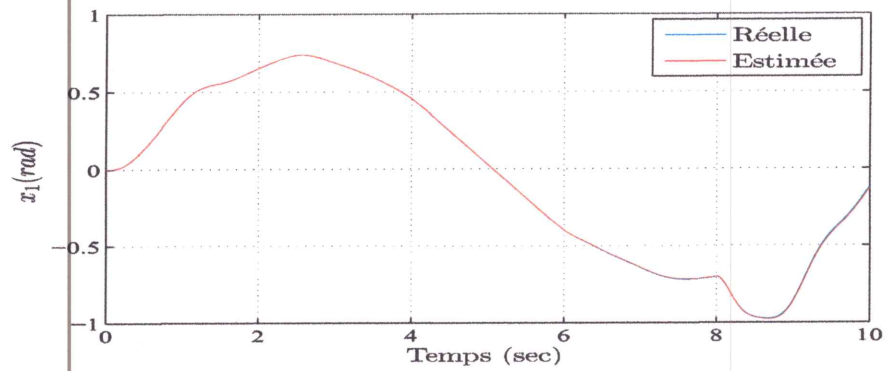


FIGURE 3.1 – Variable d'état  $x_1$  et son estimation par l'observateur par mode glissement.

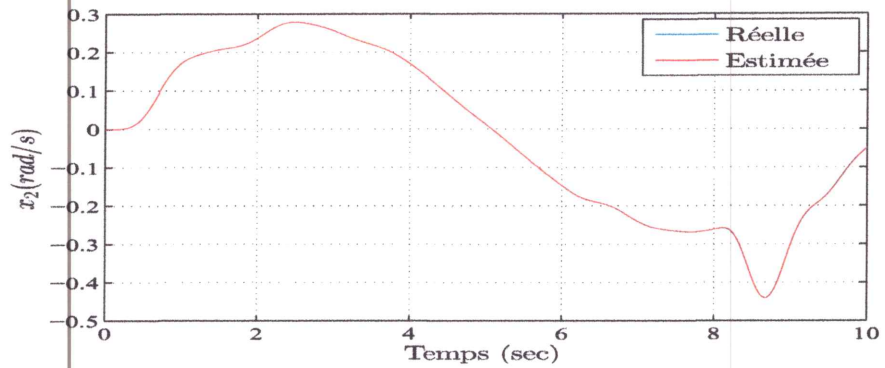


FIGURE 3.2 – Variable d'état  $x_2$  et son estimation par l'observateur par mode glissement.

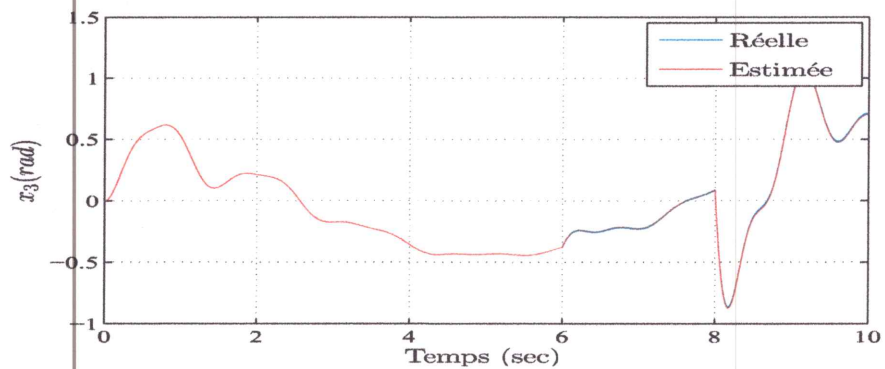


FIGURE 3.3 – Variable d'état  $x_3$  et son estimation par l'observateur par mode glissement.

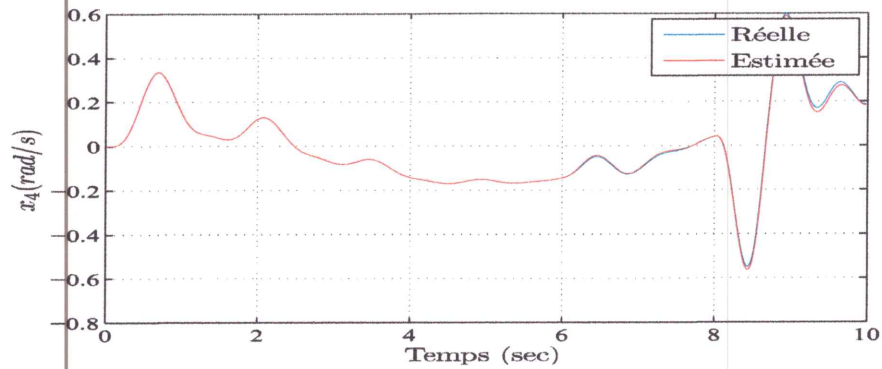


FIGURE 3.4 – Variable d'état  $x_4$  et son estimation par l'observateur par mode glissement.

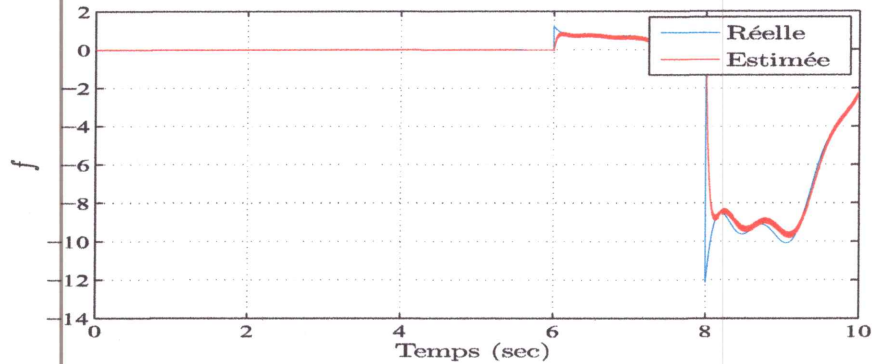


FIGURE 3.5 – Défaut  $f$  et sa reconstruction par l'observateur par mode glissement.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié reconstruction de défauts à base d'observateur par mode de glissement pour les systèmes nonlinéaires lipschitziens.

D'une manière générale, nous avons constaté au cours de cette étude que l'on peut utiliser les observateurs par mode de glissement, développés pour la commande des systèmes, pour des fins de reconstruction de défauts sans la moindre modification de ces observateurs.

La validation en simulation de l'observateur par mode de glissement a donné des résultats acceptables.

## Conclusion générale

L'intérêt croissant des industriels pour le diagnostic des systèmes, justifie l'accent mis par la recherche sur les techniques de détection et de localisation des défauts (FDI) pour les systèmes physiques. Cependant, les techniques FDI restent très difficiles à appliquer pour un grand nombre de systèmes physiques et parfois impossibles pour des systèmes compliqués. Cela a orienté une bonne partie des efforts de recherche vers le développement d'approches alternatives.

Parmi ces méthodes alternatives, les méthodes de diagnostic par estimation et de reconstruction des défauts à l'aide d'observateurs ont connu un grand intérêt ces dernières années. Au lieu de générer des résidus puis les analyser pour détecter et isoler les défauts, l'estimation et la reconstruction des défauts par observateurs évalue d'une façon directe l'impact du défaut sur le système en estimant les signaux ou les paramètres qui modélisent ces défauts. Ainsi ces approches n'exigent pas les étapes FDI compliquées d'isolation et d'identification.

Dans ce rapport, nous avons abordé le problème d'estimation et de reconstruction de défauts par observateurs adaptatifs et observateurs par mode de glissement pour une classe de systèmes non linéaires lipschitziens. Notons que la plupart des observateurs adaptatifs et des observateurs par mode de glissement développés pour des buts de la commande des systèmes dynamiques peuvent être transposés directement pour des intérêts de diagnostic par estimation et reconstruction des défauts.

Dans le premier chapitre, nous avons apporté l'essentiel des définitions et des notions nécessaires pour aborder le problème de diagnostic de défauts dans les systèmes dynamiques. Nous avons décrit également les types de modélisation des défauts ainsi que quelques notions sur l'observabilité et d'observateurs.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié l'estimation des défauts multiplicatifs à base d'observateurs adaptatifs. Deux approches ont été exposées: la première fait appel à un observateur adaptatif conventionnel qui exige au système la satisfaction de la condition structurelle dite condition de recouvrement. La deuxième approche utilise un observateur adaptatif modifié qui ne nécessite pas la satisfaction de la condition de recouvrement. Une version robuste de cet observateur a été également étudiée. Les problèmes de calcul des gains de ces observateurs ont été formulés en problèmes de faisabilité *LMI*s.

Le troisième chapitre concerne la reconstruction des défauts additifs par observateurs par mode de glissement et plus précisément par observateur de Walcott-Zak. Notons que la contrainte principale qui limite l'application de cet observateur est la condition de recouvrement.

A l'issu de l'étude menée dans notre projet nous avons constaté les faits listés dans le tableau suivant :

<b>Observateur Adaptatif</b>	<b>Observateur par mode glissant</b>
N'exige pas la condition de recouvrement	Nécessite la condition de recouvrement
Le nombre de défauts à estimer ne dépend pas du nombre des sorties.	Le nombre de défauts estimer que peut reconstruire dépend est inférieur ou égal au nombre de sorties
Exige la condition d'excitation persistante pour une estimation correcte des défauts	La condition d'excitation persistante n'existe pas pour ce type d'observateurs
Ne peut estimer que les défauts constants dans le temps	Peut reconstruire avec succès les défauts variables dans le temps

Table 3.1 – Comparaison entre l'observateur adaptatif et l'observateur par mode de glissement pour l'estimation et la reconstruction des défauts.

Pour des travaux ultérieurs, nous suggérons comme perspectives :

- La généralisation des approches étudiées dans ce rapport à d'autres classes de systèmes nonlinéaires.
- L'utilisation des observateurs par mode de glissement pour estimer les défauts multiplicatifs.
- L'utilisation des observateurs par mode de glissement d'ordre supérieur pour estimer les défauts.

# Bibliographie

- [1] Gildas Besançon. Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & control letters*, 41(4) :271–280, 2000.
- [2] Mogens Blanke, Michel Kinnaert, Jan Lunze, Marcel Staroswiecki, and J Schrder. *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2010.
- [3] NAIT SLIMANI Boukhalfa. *Synthèse d observateurs non linéaires : Application au diagnostic de défauts*. PhD thesis, Université Mouloud Maameri de Tizi Ouzou, 2011.
- [4] Stephen P Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. SIAM, 1994.
- [5] Young Man Cho and Rajesh Rajamani. A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 42(4) :534–537, 1997.
- [6] Martin Corless and Jay Tu. State and input estimation for a class of uncertain systems. *Automatica*, 34(6) :757–764, 1998.
- [7] G David. An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, 16(6) :596–602, 1971.
- [8] Steven X Ding. *Model-based fault diagnosis techniques : design schemes, algorithms, and tools*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [9] Christopher Edwards, Sarah K Spurgeon, and Ron J Patton. Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, 36(4) :541–553, 2000.
- [10] Christopher Edwards, Sarah K Spurgeon, and Ron J Patton. Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, 36(4) :541–553, 2000.
- [11] Paul M Frank and Xianchun Ding. Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. *Journal of process control*, 7(6) :403–424, 1997.
- [12] Chunyan Gao and Guangren Duan. Robust adaptive fault estimation for a class of nonlinear systems subject to multiplicative faults. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 31(6) :2035–2046, 2012.
- [13] Robert Hermann and Arthur J Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on automatic control*, 22(5) :728–740, 1977.



- [14] M Hou and PC Müller. Design of a class of luenberger observers for descriptor systems. *IEEE transactions on automatic control*, 40(1) :133–136, 1995.
- [15] Mr F KRIM, Mme S SEMCHEDDINE, Mr N KHENFER, and Mr A HASSAM. Observateur non linéaire mode glissant.
- [16] C.Y. Man and R. Rajesh. A sistematic appraoch to daptive observer synthesis for non-linear systems. *IEEE transaction on automatic control*, 1997.
- [17] S. Labiod N. Oucief, M. Tadjine. Observer-based fault estimation for a class of lipschitz nonlinear systems. *International workshop on advanced control*, 2014.
- [18] G Phanomchoeng and R Rajamani. Observer design for lipschitz nonlinear systems using riccati equations. In *American Control Conference (ACC), 2010*, pages 6060–6065. IEEE, 2010.
- [19] Sekhar Raghavan and J Karl Hedrick. Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 59(2) :515–528, 1994.
- [20] BL Walcott and SH Zak. State observation of nonlinear uncertain dynamical systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 32(2) :166–170, 1987.

# Annexe A

## Modèle du robot à liaison flexible

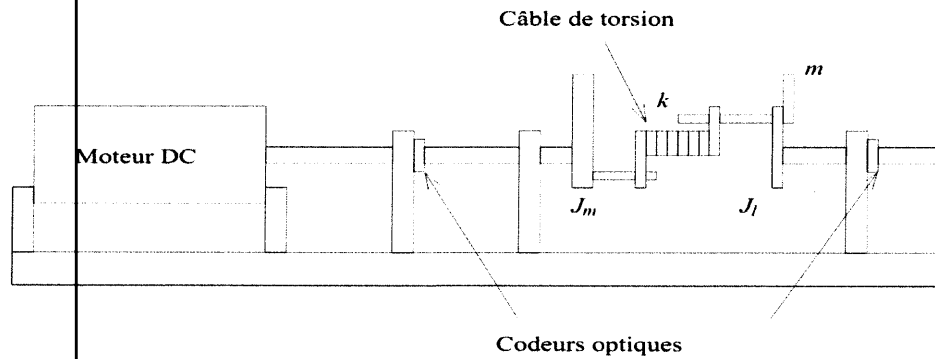


FIGURE A.1 – Représentation du robot à liaison flexible.

Le modèle non linéaire d'un robot à liaisons flexibles présenté dans [17] est décrit par son système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} J_m \ddot{\theta}_m - k(\theta_l - \theta_m) + B\dot{\theta}_m &= k\tau.u \\ J_l \ddot{\theta}_l + k(\theta_l - \theta_m) + mgh.\sin(\theta_l) & \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Si on note  $\dot{\theta}_m = \omega_m$  et  $\dot{\theta}_l = \omega_l$ , on obtient :

$$\begin{aligned} J_m \dot{\omega}_m - k(\theta_l - \theta_m) + B\omega_m &= k\tau.u \\ J_l \dot{\omega}_l + k(\theta_l - \theta_m) + mgh.\sin(\theta_l) & \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où  $\theta_m$  et  $\theta_l$  sont, respectivement, les positions angulaires de l'arbre du moteur et de la tige, avec  $\omega_m$  et  $\omega_l$  étant leurs vitesses angulaires.  $u$  représente le couple de commande du moteur,  $J_m$  le moment d'inertie du moteur,  $J_l$  le moment d'inertie de la tige,  $k$  la constante d'élasticité,  $m$  la masse de la tige,  $g$  la pesanteur,  $h$  le centre de gravité de la tige,  $k_\tau$  le gain de l'amplificateur et  $B$  le coefficient du frottement visqueux.

Les valeurs des paramètres du modèle sont cités dans le tableau suivant [17] :

Paramètres	unités	Valeurs
Moment d'inertie du moteur $J_m$	$Kg.m^2$	$3.7 \times 10^{-3}$
Moment d'inertie de la tige $J_l$	$Kg.m^2$	$9.3 \times 10^{-3}$
Masse de la tige $m$	$Kg$	$2.1 \times 10^{-1}$
Constant d'élasticité $k$	$Nm.rad^{-1}$	$1.8 \times 10^{-1}$
Coéfficient du frottement visqueux $B$	$Kg.s^{-1}$	$4.6 \times 10^{-2}$
gain de l'amplificateur $k\tau$	$Nm.V^{-1}$	$8 \times 10^{-2}$

TABLE A.1 – Table des valeurs des paramètres.

A partir du système (A.2), on peut facilement obtenir la représentation d'états suivante :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m = \omega_m \\ \dot{\omega}_m = \frac{k}{J_m}(\theta_l - \theta_m) - \frac{B}{J_m}\omega_m + \frac{k\tau}{J_m}u \\ \dot{\theta}_l = \omega_l \\ \dot{\omega}_l = -\frac{k}{J_l}(\theta_l - \theta_m) - \frac{mgh}{J_l}\sin(\theta_l) \end{cases} \quad (A.3)$$

# Annexe B

## Inégalités linéaires matricielle $\mathcal{LMI}$

### B.1 Présentation

Les Inégalités Linéaires Matricielles prennent une place de plus importante dans les méthodes modernes de l'automatique. De nombreux résultats antérieurs trouvent une formulation  $\mathcal{LMI}$  et ce formalisme permet aussi de résoudre de nouveaux problèmes qui n'avaient pas trouvé jusqu'alors de solution.

**Définition 1.1 :** *inégalité matricielle linéaire*

On appelle  $\mathcal{LMI}$  le problème suivant : étant données les matrices réelles, carrées et symétriques  $M_k, k = 1 \dots n$ , trouver les réels  $x_k, k = 1 \dots n$  telque

$$M_0 + x_1 M_1 + \dots + x_n M_n > 0 \quad (\text{B.1})$$

Le succès des  $\mathcal{LMIs}$  vient du développement des méthodes dites du point intérieur (interior point methods) qui permettent de résoudre de manière efficace le problème (B.1). Il est également lié au fait que de nombreux problèmes, notamment de l'automatique, peuvent être formulé sous forme de  $\mathcal{LMIs}$ .

**Remarque 1** (Un système de plusieurs  $\mathcal{LMIs}$  est une  $\mathcal{LMI}$ )

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} P(x) & 0 \\ 0 & Q(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.2})$$

### B.2 Formalisation des $\mathcal{LMI}$

Des méthodes efficaces de résolution des problèmes d'optimisation des inégalités matricielles nécessite de les transformer en  $\mathcal{LMIs}$ , et pour ce faire, on utilise le complément de Schur

#### Complément de Schur

Considérant les matrices symétriques  $Q(x) = Q(x)^T, R(x) = R(x)^T$  et  $S(x)$  affine par rapport à la variable  $x$ , les systèmes d'inégalités suivantes sont équivalentes

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.3})$$

$$R(x) > 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x) > 0 \quad (\text{B.4})$$

En d'autres termes, l'inégalité matricielle non linéaire (B.4) est transformée en *LMI*.

# Annexe C

## Stabilité au sens de Lyapunov

En mathématiques et en automatique, la notion de stabilité de Lyapunov (ou, plus correctement, de stabilité au sens de Lyapunov) apparaît dans l'étude des systèmes dynamiques. De manière générale, la notion de stabilité joue également un rôle en mécanique, dans les modèles économiques, les algorithmes numériques, la mécanique quantique, la physique nucléaire, etc.

### C.1 Stabilité des systèmes dynamiques

**Définition A.1 :** *Stabilité BIBO ( Bounded Input Bounded Output ) :*

Un système est stable au sens BIBO ssi pour toute entrée bornée, la sortie est bornée.

**Définition A.2 :** Stabilité au sens de Lyapunov

Un système est dit stable lorsque il reste très proche de son point d'équilibre  $x_e$ , alors  $x_e$  est dit stable au sens de Lyapunov.

Un point d'équilibre est stable si les trajectoires d'état du système y convergent en réponse à un état initial différent de l'état d'équilibre.

**Définition A.3 :** *Point d'équilibre*

Pour un système définie par son équation d'états  $\dot{x} = f(x, t)$ , un point d'équilibre  $x_e$  est la solution de  $\dot{x} = 0$ , il peut être n'est pas unique.

**Définition A.4 :** *Etat d'équilibre :*

$x_e$  est un état d'équilibre si  $x(t_0) = x_e \Leftrightarrow x(t) = x_e$  avec  $t \geq t_0$  en l'absence de commande et de perturbations.

Pour une représentation d'état  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , les points d'équilibre sont les solutions de l'équation algébrique :

$$0 = f(x(t), 0) \tag{C.1}$$

Un système continu  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  peut avoir,

- Un point d'équilibre unique  $x = 0$  si  $A$  est inversible.
- Une infinité de points d'équilibre si  $A$  n'est pas inversible.

**Définition A.5 :** *Stabilité asymptotique :*

Un point d'équilibre  $x_e$  est asymptotiquement stable s'il est stable et si

$$\exists \alpha > 0, \|x(0) - x_e\| < \alpha \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e = 0 \quad (\text{C.2})$$

## C.2 Fonction candidate de Lyapunov

Le théorème central d'Alexandre Lyapunov dit qu'un système dynamique (décrit par une équation différentielle du type  $\dot{x} = f(x, t)$ ) est stable (au sens de Lyapunov) en un point d'équilibre  $x_e$  si et seulement s'il existe une fonction vérifiant certaines conditions précises et liées à la fonction  $f$  de l'équation différentielle et à  $x_e$ . Le problème de la stabilité se ramène donc à chercher une telle fonction (dite fonction de Lyapunov notée souvent  $v(x)$ ), souvent par tâtonnement.

Soit la fonction candidate de Lyapunov  $V(x)$  (fonction d'énergie généralisée)  $V(x) > 0 \forall x \neq 0$

Pour le système autonome  $\dot{x}(t) = f(x)$  de point d'équilibre 0.

- Si  $V(x) > 0$  telle que  $\dot{V}(x) \leq 0$  alors 0 est un point d'équilibre stable.
- Si  $V(x) > 0$  telle que  $\dot{V}(x) < 0$  alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

## C.3 Lemme de Barbalat

**Définition A.6 :** *fonction uniformément continue*

Une fonction  $f(t)$  est uniformément continue si :

$$\forall R > 0, \exists \eta(R) > 0 \mid \forall t_1 > 0, \forall t > 0, \mid t - t_1 \mid < \eta \Rightarrow \mid g(t) - g(t_1) \mid < R$$

**Lemme de Barbalat**

soit  $w(t)$  une fonction uniformément continue et  $W(t)$  sa fonction primitive . Si l'intégrale de  $w(t)$  existe et est finie, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0 \quad (\text{C.3})$$