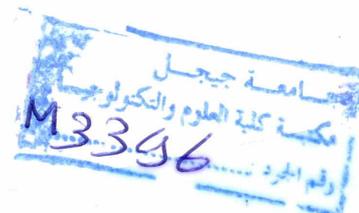


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique
Université de Jijel



Faculté des Sciences et de la Technologie

Département d'Automatique

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme Master en Automatique et

Traitement de Signal

Thème



**Commande quasi-homogène des systèmes
sous-actionnés**

Proposé et dirigé par :

Dr. Farah BOUAKRIF

Réalisé par:

Farida BOUALI

Meriem MERBAY

Promotion 2015

Remerciements

Tout d'abord nous remercions avant tous, Dieu(Allah) le tout puissant qui nous a donné le courage, et la volonté pour atteindre notre objectif, et tous les enseignants qui ont contribués à notre formation durant tous les cycles.

Nous remercions vivement, notre promoteur Monsieur **Bouakrif Farah** de nous avoir pris en charges, et pour sa disponibilité, son aide et ses précieux conseils.

Nous portons avec gratitude de reconnaissance pour l'ensemble des enseignants du département d'Automatique qui ont contribué à notre formation.

Nous ne saurons oublier de remercier les honorables Membres du Jury qui nous ont fait l'immense honneur de Présider et d'examiner ce modeste travail.

A tous ceux ou celles qui nous apportés leur soutien, trouvent ici, l'expression de nos vive et sincère reconnaissance.

BOUALI et MERBAY

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

- ❖ *A ma très chère mère la lumière de ma vie.*
- ❖ *A ma chère grande mère et mon cher grand père*
- ❖ *A ma belle sœur et mon bon frère*
- ❖ *A mon poussin Abd elRahim*
- ❖ *A mes tentes et mes oncles*
- ❖ *A tout ma famille*
- ❖ *A mon binôme Meriem*
- ❖ *A Tous mes amies surtout Wissem ,Djawida ,Fatima,*
- ❖ *A toute la promotion d'Automatique 2015.*

Farida

Dédicace

Au nom de dieu je dédie ce mémoire

À mes parents qui ont su me soutenir tout long de mes études,

parfois me reconforter dans les moments difficiles,

Et qui sans eux je n'aurai pas effectué ce travail

Je dédie ce modeste travail

A celle qui m'a comblé d'amour et de tendresse,

Ma chère maman : Malika

A celui qui m'a donné le meilleur de lui même, qui a sacrifié

Son bonlieur pour moi, cher papa : Yousef

A mes très chères sœurs : Sara, Amina

A mes chères frères : Ibrahim, Mohamed, Yakoub, Zehr aden, Abd alkadr

A mes chères tante: Nadia, Linda, Nora

A mon binôme : Farida

A mes très chers amis

A tout les l'étudiant master 2 automatique de la promotion 2015

A ceux qui ont participé de près ou de loin à l'aboutissement de nos efforts

Meriem

Table des matières

Introduction générale	1
Chapitre I	
Systèmes mécaniques sous actionnés	
I.1 Introduction	3
I.2 Modélisation mathématique des systèmes mécaniques	3
I.3 Systèmes mécaniques complètement actionnés	5
I.4 Systèmes mécaniques sous actionnés	5
I.5 Quelques exemples des systèmes mécaniques sous actionnés	6
I.5.1 La boule et la poutre (beam and ball)	6
I.5.2 Le pendubot	7
I.5.3 L'acrobot	8
I.5.4 Chariot-pendule inversé	9
I.6 Modélisation du Chariot-pendule inversé	10
I.7 Conclusion	14
Chapitre II	
Commande par modes glissants	
II.1 Introduction	15
II.2. Commande par modes glissants d'ordre 1	15
II.3 Synthèse de la loi de commande	16
II.3.1 Choix de la surface de glissement	16
II.3.2 Condition d'existence du mode de glissement	17
II.3.3 Calcul de la commande	17
II.4 Le broutement (chattering)	19
II.5 Solutions pour atténuer le phénomène de réticence	20
II.5.1 Solution de couche limite	21
II.5.2 Solution par des modes glissants d'ordre supérieur	22
II.6 Robustesse de la commande par modes glissants	22
II.7 Mode glissant d'ordre deux	23
II.8 Algorithmes de commande par modes glissants d'ordre 2	24
II.8.1 Algorithme du Twisting (TWG)	24

II.8.2 Algorithme du super-Twisting	25
II.9 Exemple de simulation	26
II.10 Résultats de simulation	28
II.10.1 Résultats de simulation par mode glissant d'ordre 1.....	28
II.10.2 Résultats de simulation avec changement de la fonction signe par la fonction saturation.....	31
II.10.3 Résultats de simulation de la commande par modes glissants d'ordre 2, algorithme de twisting.....	33
II.11 Conclusion.....	35
Chapitre III	
Principe de la commande quasi-homogène	
III.1 Introduction.....	36
III.2 Homogénéité.....	36
III.3 Stabilisation robuste d'un manipulateur à un degré de liberté.....	37
III.4 Stabilisation locale des systèmes mécaniques sous-actionnés par la commande quasi-homogène	38
III.5 Conclusion.....	41
Chapitre IV	
Application au chariot-pendule inversé	
IV.1 Introduction.....	42
IV.2 Stabilisation locale d'un pendule inversé par la commande quasi-homogène	42
IV.2.1 Conception de la commande.....	43
IV.2.2 Résultat de Simulations	45
IV.2.2.1 Résultats de Simulation sur le pendule inversé sans frottement.....	45
IV.2.2.2 Résultats de simulation sur le pendule inversé avec des perturbations satisfant la condition de recouvrement	47
IV.2.2.3 Résultat de Simulations du pendule inversé avec des perturbations satisfant la condition de recouvrement (matching condition) et des perturbations ne satisfant pas la condition de recouvrement (non-matching condition)	50
IV.3 Conclusion.....	52
Conclusion générale.....	53
Bibliographies.....	55

Table des figures

Chapitre I

Systèmes mécaniques sous actionnés

Figure I.1 : La boule et la poutre	6
Figure I.2 : Le pendubot en coordonnées généralisés	7
Figure I.2 : L'acrobot en coordonnées généralisés	8
Figure I.4 : Chariot-pendule inversé	9
Figure I.5 : Pendule inverce en coordonnées généralisés	10

Chapitre II

Commande par modes glissants

Figure II.1 : Différents modes de convergence pour la trajectoire d'état	16
Figure II.2 : Représentation de la commande discontinue	19
Figure II.3 : Le phénomène de broutement	20
Figure II.4 : Fonction «SAT»	21
Figure II.5 : Fonction pseudo-signe	21
Figure II.6 : Fonction tangente hyperbolique	22
Figure II.7 : Convergence de l'algorithme Twisting dans le plan (s, \dot{s})	24
Figure II.8 : Convergence de l'algorithme Super -Twisting dans le plan (s, \dot{s})	26
Figure II.9 : Pendule simple	26
Figure II.10 : La position angulaire de pendule	29
Figure II.12 : La vitesse angulaire du pendule	29
Figure II.11 : La surface de glissement s	29
Figure II.13 : Le signal de commande	30
Figure II.14 : La position angulaire de pendule	30
Figure II.15 : La vitesse angulaire du pendule	30
Figure II.16 : La surface de glissement s	31
Figure II.17 : Le signal de commande	31
Figure II.18: La position angulaire de pendule	32
Figure II.20 : La vitesse angulaire du pendule	32

Figure II.19 : La surface de glissement s.....	32
Figure II.21 : Le signal de commande	33
Figure II.22 : La position angulaire de pendule	33
Figure II.24 : La vitesse angulaire du pendule	34
Figure II.23 : La surface de glissement s.....	34
Figure II.25 : Le signal de commande	34
Chapitre IV	
Application au chariot-pendule inversé	
Figure IV.1 : Pendule inversé situé au LAGIS	43
Figure. IV.2 : Position de chariot(m).....	45
Figure.IV.3 : Angle θ de la tige (rad).....	46
Figure. IV.4 : Vitesse de chariot (m/sec)	46
Figure. IV.5 : Vitesse angulaire de la tige (rad/sec)	46
Figure. IV.6 : Surface (m^2).....	47
Figure.IV.7 : Commande(volts).....	47
Figure. IV.8 : Position de chariot(m).....	48
Figure.IV.9 : Angle θ de la tige (rad).....	48
Figure. IV.10 : Vitesse de chariot (m/sec)	48
Figure. IV.11 : Vitesse angulaire de la tige (rad/sec)	49
Figure. IV.12 : Surface (m^2).....	49
Figure. IV.13 : Commande(volts).....	49
Figure. IV.14 : Position de chariot(m).....	50
Figure. IV.15 : Angle θ de la tige (rad).....	50
Figure. IV.16 : Vitesse de chariot (m/sec)	51
Figure. IV.17 : Vitesse angulaire de la tige (rad/sec)	51
Figure. IV.18 : Surface (m^2)	51
Figure.IV.19 : Commande(volts).....	52

Introduction générale

L'étude des systèmes mécaniques sous-actionnés est beaucoup plus récente. Inspirés principalement de la structure du corps humain, les systèmes sous-actionnés admettent des degrés de liberté plus nombreux que les actionneurs. Le manque d'actionneur complique la tâche **de commande de ce genre de systèmes. On peut citer le pendule inversé, le pendubot et l'acrobate** comme des exemples de systèmes mécaniques sous-actionnés [1].

La commande de tels systèmes, lorsqu'on veut la mettre en pratique, se trouve confrontée à la **présence inévitable de perturbations, notamment celles issues des phénomènes de frottements.** Les forces de frottement ont des dynamiques compliquées souvent mal modélisées. Pour commander des systèmes perturbés mal modélisés, des techniques de commande à structure variables (par modes glissants) sont efficaces à condition que les perturbations et les frottements **vérifient une condition dite de recouvrement.**

La commande par mode de glissement fait partie de la famille des contrôleurs à structure variable, c.à.d. des commandes commutant entre plusieurs lois de commande différentes. L'importance des contrôleurs par mode glissant réside dans : **la grande précision, la réponse dynamique rapide, la stabilité, la simplicité de la conception et l'implantation, et la robustesse vis-à-vis la variation des paramètres internes ou externes** [2]. Le principe de la commande par modes glissants est de contraindre les trajectoires du système à atteindre une surface donnée, **(surface de glissement), pour ensuite y rester.**

Toutefois, la commande par mode de glissement induit en pratique des commutations haute fréquence connues sous le nom de chattering. Ces commutations peuvent exciter des dynamiques non désirées qui risquent de déstabiliser, détériorer voir même de détruire le système étudié. Il **existe différentes méthodes pour diminuer ce phénomène dont l'une consiste à remplacer la fonction signe par une approximation continue au voisinage de la surface de glissement (fonction saturation, fonction pseudo-signes et fonction tangente hyperbolique).** Une autre méthode consiste à utiliser les modes glissants d'ordre supérieur, dont le principe est de rejeter les discontinuités **au niveau des dérivées supérieures de l'entrée du système.**

Si on s'intéresse à la commande des systèmes sous-actionnés, la tâche est plus difficile. En effet, **la présence de frottements sur les parties non actionnées ne satisfait pas cette condition de recouvrement.** D'où la nécessité de trouver une autre technique de commande qui a pour objectif

de réduire l'effet des perturbations agissants sur la partie non actionnée. Dans ce mémoire, Nous présenterons une commande à structure variable dite quasi-homogène, permettant de rejeter les perturbations satisfaisant la condition de recouvrement (pour la partie actionnée), et de diminuer l'effet des perturbations ne satisfaisant pas la condition de recouvrement (pour la partie non actionnée). Il est important de noter, que cette commande se compose de deux parties : la première partie est une fonction discontinue homogène, et la deuxième partie est un terme continu.

Ce travail est organisé comme suit :

Le premier chapitre étudie les systèmes mécaniques actionnés et sous actionnés avec des exemples de ces derniers.

Le deuxième chapitre introduit les idées fondamentales de la commande par modes glissants d'ordre un, en donnant les étapes à suivre pour concevoir cette dernière. Ensuite, nous allons mentionné que cette commande possède un inconvénient qui est le chattering, en présentant quelques solutions pour surmonter ce problème. A la fin de ce chapitre, nous allons appliqué cette commande au pendule simple, en donnant les résultats de simulation.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation de la commande quasi-homogène, appliquée sur un manipulateur à un degré de liberté et après nous allons appliqué cette technique de commande à un système mécanique sous actionné dont l'objectif est de stabiliser le système autour d'une position d'équilibre instable.

Dans le quatrième chapitre, nous employons la commande quasi-homogène pour la stabilisation locale du pendule inversé, c'est-à-dire, amener la partie non actionné d'une condition initiale à la position d'équilibre instable et la partie actionné à une position finale désirée.

Chapitre I

Systemes mécaniques sous actionnés

I.1 Introduction

Les Systèmes Mécaniques Sous Actionnés (S.M.S.A) ont une grande importance dans l'industrie. Ces systèmes sont caractérisés par un nombre d'entrées de commande inférieur au nombre de degrés de liberté à contrôler. Le nombre de degrés de liberté étant la dimension du vecteur des coordonnées généralisées indépendantes [3].

Un système mécanique complètement actionné peut devenir sous actionné après une durée de fonctionnement, par exemple lors d'une panne d'actionneur. Dans ce cas, au lieu de changer l'actionneur on bascule d'un algorithme de commande pour un système à actionneur complet vers un algorithme de contrôle pour les systèmes sous actionnés.

Ces systèmes offrent quelques avantages : la minimisation du coût, du poids et de l'énergie et permettent de gagner du temps.

Dans ce chapitre, on présente les systèmes mécaniques sous-actionnés, en donnant les concepts permettant de concevoir un modèle mathématique décrivant les dynamiques de ce type de systèmes.

I.2 Modélisation mathématique des systèmes mécaniques

Afin de pouvoir modéliser un système mécanique par des équations mathématiques, on commence par choisir un ensemble de coordonnées permettant de le décrire. Ces coordonnées sont généralement nommées coordonnées généralisées. Cette dénomination provient de l'époque où l'utilisation des coordonnées cartésiennes était la plus naturelle [1].

L'intérêt du choix des coordonnées généralisées réside dans la simplification de la démarche de la modélisation puis de l'analyse de ces systèmes. Une fois les coordonnées généralisées choisies, on peut procéder de deux manières :

- Soit on fait une étude des forces agissant sur le système, et on applique la seconde loi de la dynamique de Newton, disant que la somme des forces appliquées est égale à la masse multipliée par l'accélération.
- Soit on étudie les différentes énergies échangées par le système, puis on exprime le

lagrangien avant d'appliquer la formule de Lagrange.

Cette deuxième méthode, en général plus simple à mettre en œuvre, est décrit dans ce qui suit.

Considérons un système mécanique composé de corps solides non déformables. Deux types d'énergie interviennent : l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Le lagrangien est la somme de ces deux quantités. Plus concrètement, si q représente le vecteur des coordonnées généralisées de dimension n , E_c l'énergie cinétique et E_p l'énergie potentielle. Le lagrangien (l'énergie mécanique globale) s'écrit sous la forme :

$$L(q, \dot{q}) = E_c - E_p = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - E_p(q) \quad (\text{I.1})$$

Où $M(q)$ est la matrice d'inertie, symétrique définie positive.

Les équations différentielles décrivant la dynamique d'un système mécanique sont obtenues par l'application de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F(q)u \quad (\text{I.2})$$

où $u \in R^n$ est le vecteur des forces externes et $F(q) = (f_1(q), \dots, f_m(q))$ est la matrice correspondante, qui répartit les forces sur le système. Les équations du mouvement dérivent de (1.2) et sont données par :

$$\sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{ij} T_{ij}^k(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + g_k(q) = B(q)u, \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{I.3})$$

où, $g_k(q) = \partial_{q^k} E_p(q)$, m_{kj} sont les éléments de matrice d'inertie et $T_{ij}^k(q)$ sont les symboles de Christoffel définis par :

$$T_{ij}^k(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right) \quad (\text{I.4})$$

L'écriture de la formule précédente sous une forme vectorielle donne :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)u \quad (\text{I.5})$$

où $C(q, \dot{q})$ est une matrice composée des éléments :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n T_{kj}^i(q) \dot{q}_k \quad (I.6)$$

$C(q, \dot{q})\dot{q}$ contient deux types d'éléments. Ceux qui font intervenir les produits $\dot{q}_i \dot{q}_j$ Pour $i = j$ sont appelés forces centrifuges. Ceux qui correspondent aux indices $i \neq j$ sont les forces de Coriolis. Le vecteur $G(q)$ représente les forces de gravité.

I.3 Systèmes mécaniques complètement actionnés

Considérons le système mécanique décrit par (I.5). Un système mécanique complètement actionné si le nombre des entrées de commande est égal au nombre de degrés de liberté, dans ce cas $B(q)$ est une matrice carrée inversible. Par conséquent, les systèmes mécaniques complètement actionnés sont linéarisables par retour d'état, ceci peut être montré en appliquant la commande suivante [1]:

$$u = B(q)^{-1}(M(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) \quad (I.7)$$

En définissant les variables

$$\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = \dot{q} \end{cases} \quad (I.8)$$

Pour obtenir :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v \end{cases} \quad (I.9)$$

On obtient un double intégrateur $\ddot{q} = v$ et on peut appliquer les concepts de l'automatique linéaire classique. Ceci signifie que le contrôle des systèmes mécaniques complètement actionnés et sans perturbation ne pose pas de défis en termes de contrôle.

I.4 Systèmes mécaniques sous-actionnés

Un système mécanique est dit sous-actionné s'il admet moins d'actionneurs que le degré de liberté, soit :

$$\text{rang}B(q) = m < n. \quad (I.10)$$

Cette restriction empêche une linéarisation par bouclage statique de la dynamique complète du système [1]. La forme général des équations dynamiques des systèmes sous-actionnés peut être donnée par :

$$M_{11}(q)\ddot{q}_1 + M_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_1(q, \dot{q}) + G_1(q) = 0 \quad (I.11)$$

$$M_{21}(q)\ddot{q}_1 + M_{22}(q)\ddot{q}_2 + C_2(q, \dot{q}) + G_2(q) = \bar{B}(q)u \quad (I.12)$$

tels que :

$$M(q) \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}, C(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} C_1(q, \dot{q}) \\ C_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix}, G(q) \begin{bmatrix} G_1(q) \\ G_2(q) \end{bmatrix}, B(q) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m)n} \\ \bar{B}(q) \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

Les auteurs ont montré que la partie actionnée du système (de dimension m) peut être linéarisée. Cette procédure, appelée linéarisation partielle par bouclage statique, simplifie les dynamiques, facilite la manipulation des équations et la synthèse des lois de commande.

En appliquant à l'équation (I.12) la commande suivant

$$u = \bar{B}^{-1}(q) \left(\left(M_{22}(q) - \frac{M_{12}(q)M_{21}(q)}{M_{11}(q)} \right) v - \frac{M_{21}(q)}{M_{11}(q)} C_1(q, \dot{q}) - \frac{M_{21}(q)}{M_{11}(q)} G_1(q) + C_2(q, \dot{q}) + G_2(q) \right) \quad (\text{I.13})$$

On obtient

$$\begin{aligned} M_{11}(q)\ddot{q}_1 + M_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_1(q, \dot{q}) + G_1(q) &= 0 \\ \ddot{q}_2 &= v \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

I.5 Quelques exemples des systèmes mécaniques sous-actionnés

Dans cette section, nous allons donner quelques exemples des systèmes mécaniques sous actionnés. Ces exemples incluent la boule et la poutre, le chariot-pendule inversé, l'acrobate et le pendubot [3].

I.5.1 La boule et la poutre (beam and ball)

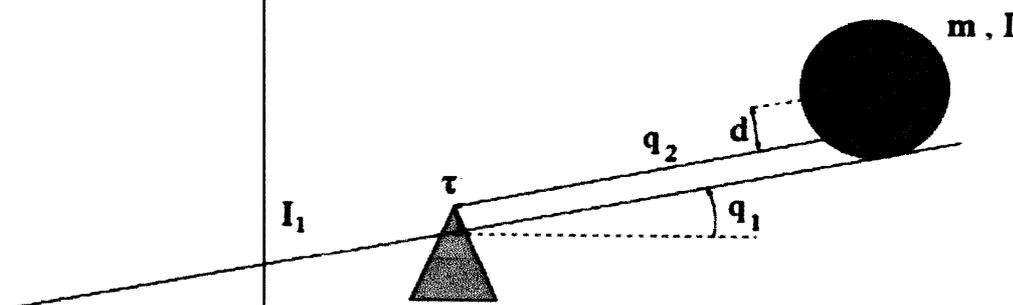


Figure I.1. La boule et la poutre

Ce système est composé d'une poutre pouvant pivoter dans le plan vertical par l'application d'un couple au point de rotation (le centre) et d'une balle dont on restreindra le mouvement à un glissement sans frottement le long de la poutre. Dans cet exemple on veut

commander deux sorties (deux degrés de liberté). La position angulaire q_1 de la poutre et la position q_2 de la boule par la seule commande u disponible appliquée au point de rotation de la poutre. Donc, le nombre de sortie qu'on veut commander est supérieur au nombre de commande dont on dispose, ce caractère se nomme « sous actionné ».

Soit d la distance entre le centre de masse de la boule et la poutre ($d = r$ dans la figure I.1 où le modèle conventionnel de ce système correspond à $d = 0$). La matrice d'inertie $M(q)$ et l'énergie potentielle E_p sont données par :

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_1 + m(q_2^2 + d^2) & -md \\ -md & mA \end{bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

et

$$E_p = mg(q_2 \sin q_1 + d \cos q_1) \quad (\text{I.16})$$

où I_1 est l'inertie de la poutre. m et I sont la masse et l'inertie de la boule, respectivement, avec

$$A = 1 + \frac{I_2}{mr^2} \quad (\text{I.17})$$

I.5.2 Le pendubot

Le pendubot représenté dans la figure I.2, est constitué de deux tiges qui peuvent tourner autour de leurs axes respectifs. La tige 1 de masse m_1 et de longueur l_1 , est actionnée par un couple de contrôle τ tandis que la tige 2, de masse m_2 et de longueur l_2 , est en rotation libre autour de la tige 1[1].

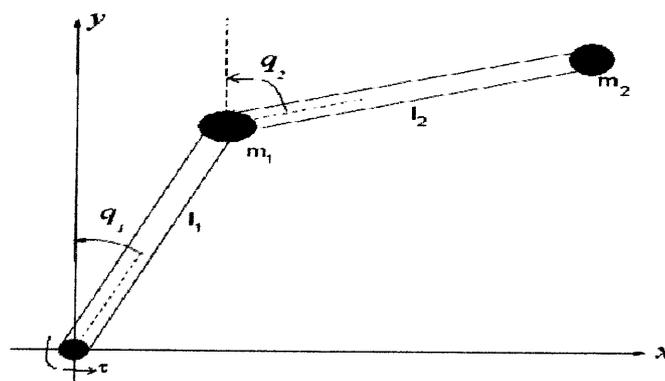


Figure I.2. Le pendubot.

A vitesse nulle, le pendubot admet une infinité de points d'équilibre instables donnés par $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_2 = 0$, $q_1 = cte$ correspondant à la position haute de la tige 2 pour toute position de la première tige, et une infinité de points d'équilibre stables donnés par $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$, $q_2 = \pi$ correspondant à la position basse de la tige numéro 2: Le lagrangien et les équations

dynamiques du mouvement sont donnés respectivement, par (I.18), (I.19), (I.20)

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{q}_2^2 + 2m_1l_1l_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \\ + m_1gl_1(\cos(q_1) - 1) + m_2g(l_1(\cos(q_1) - 1) + l_2(\cos(q_2) - 1)) \quad (\text{I.18})$$

$$m_2l_1l_2 \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_1 + m_2l_2^2\ddot{q}_2 + m_2l_1l_2 \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_1^2 - m_2gl_2 \sin(q_2) = 0 \quad (\text{I.19})$$

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{q}_1 - m_2l_1l_2 \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_2^2 - (m_1 + m_2)gl_1 \sin(q_1) \\ + m_2l_1l_2 \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_2 = \tau \quad (\text{I.20})$$

I.5.3 L'acrobot

L'acrobot est similaire au pendubot à la différence que c'est l'articulation joignant les 2 tiges qui est actionné par un couple τ . Le lagrangien est donné par (1.18) et les équations dynamiques du mouvement sont données par

$$m_2l_1l_2 \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_1 + m_2l_2^2\ddot{q}_2 + m_2l_1l_2 \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_1^2 - m_2gl_2 \sin(q_2) = \tau \quad (\text{II.21})$$

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{q}_1 - m_2l_1l_2 \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_2^2 - (m_1 + m_2)gl_1 \sin(q_1) \\ + m_2l_1l_2 \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_2 = 0 \quad (\text{I.22})$$

où m_1, l_1, m_2 , et l_2 sont respectivement les masses et longueurs des tiges 1 et 2, τ est le couple de commande[4].

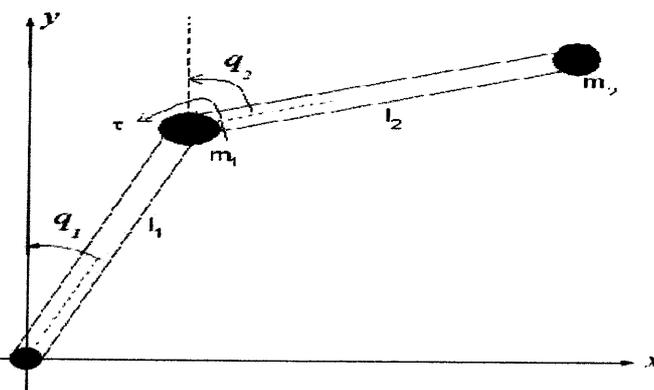


Figure I.3 L'arcobote en coordonnées généralisés

L'acrobot admet aussi une infinité de points d'équilibre stables et instables. L'ensemble des points d'équilibre instables correspond aux positions où la verticale passant par le centre

de gravité (ce dernier étant dans le demi-plan supérieur) du système global passe aussi par l'axe de rotation de la tige 1. Les positions d'équilibres stables sont identiques aux points instables, la seule différence étant que le centre de gravité est dans le demi-plan inférieur. Un simple calcul des moments d'ordre 1 des 2 masses ponctuelles m_1 et m_2 par rapport à l'axe de rotation de la tige numéro 1 donne $m_1 l_1 \sin(q_1) = m_2 l_2 \sin(q_2)$ correspondant aux points d'équilibres

I.5.4. Chariot-pendule inversé

Le pendule inversé est un système classique très intéressant et largement étudié dans la communauté automatique, vu sa nature non linéaire et instable. Il a toujours constitué un défi intéressant pour le contrôle et a servi à la compréhension des notions de l'automatique comme à l'élaboration des lois de commande. Par ailleurs, son principe se retrouve dans plusieurs applications de véhicules légers [1].

Depuis 1950, les pendules inversés sont des plates-formes d'expérimentation classiques dans les laboratoires d'automatique. Ils ont été utilisés pour illustrer des idées de commande linéaire comme la stabilisation des systèmes instables. Vu leur nature non linéaire, les pendules sont aussi utilisés pour illustrer des idées émergeant du contrôle non linéaire.

Le système chariot-pendule inversé représenté par la Figure I.4 est un système mécanique sous actionné, constitué d'un chariot pouvant se déplacer sur une surface plane et d'un pendule connecté à travers une charnière sur ce chariot. Le tout est commandé par un moteur électrique.

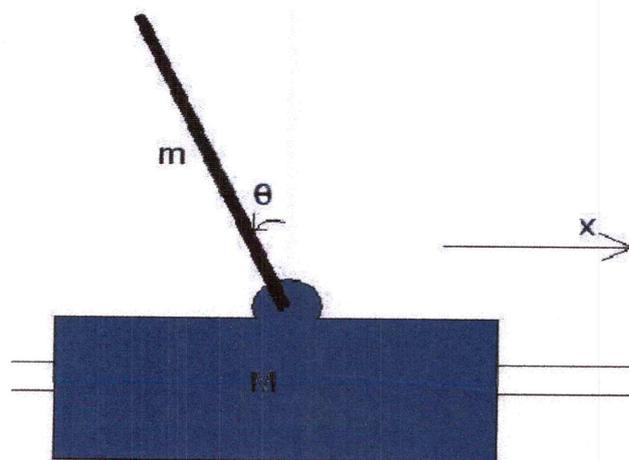


Figure I.4 .Chariot-pendule inversé

I.6 Modélisation du Chariot-pendule inversé I

Le pendule de longueur l et de masse m dont l'axe de suspension est lié au chariot de masse M , peut se déplacer sur un axe horizontal.

Le modèle complet est basé sur 4 variables d'état :

- θ : position angulaire de pendule.
- $\dot{\theta}$: vitesse angulaire de pendule.
- x : position de chariot.
- \dot{x} : vitesse de chariot.

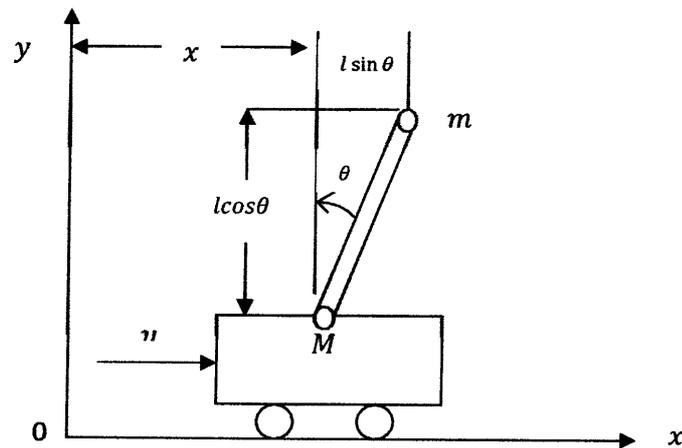


Figure I.5. Pendule inversé en coordonnées généralisés.

Dans la suite, les notations suivantes sont considérées :

- g : représente l'accélération due a la force de gravité ($g = 9.81m/s^2$).
- l : est la longueur de pendule.
- m : est la masse de pendule.
- M : est la masse de chariot.

Pour établir les équations différentielles de ce système, nous calculons le lagrangien L et nous appliquons le formalisme d'Euler-Lagrange.

$$L = E_c + E_p \quad (I.23)$$

L'énergie cinétique de système E_C

$$E_C = E_{C1} + E_{C2} \quad (I.24)$$

E_{C1} : L'énergie cinétique de chariot.

E_{C2} : L'énergie cinétique de pendule.

J : Moment d'inertie

$$E_{C1} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (\text{I.25})$$

$$E_{C2} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.26})$$

Donc l'énergie cinétique totale de système est

$$E_C = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m [(l \cos(\theta) + \dot{x})^2 + (l \sin(\theta) \dot{\theta})^2] + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.27})$$

L'énergie potentielle de système E_p

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} \quad (\text{I.28})$$

E_{p1} : L'énergie potentielle du chariot.

E_{p2} : L'énergie potentielle du pendule.

$E_{p1} = 0$ (pas de déplacement sur l'axe vertical)

$$E_{p2} = - \int \vec{F} \cdot \vec{dr} \quad (\text{I.29})$$

avec

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (\text{I.30})$$

$$\vec{dr} = \vec{d_{OG}} \quad (\text{I.31})$$

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} x + l \cos(\theta) \\ l \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{I.32})$$

alors on a :

$$E_{p2} = mgl(\cos(\theta) - 1) \quad (\text{I.33})$$

Nous sommes maintenant prêts à écrire l'expression du lagrangien

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(ml^2 + J)\dot{\theta}^2 - ml \cos(\theta)\dot{\theta}\dot{x} - mgl(\cos(\theta) - 1) \quad (I.34)$$

Les équations de Lagrange de ce système sont

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = F q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = F q_2 \end{cases} \quad (I.35)$$

On a $q_1 = x$, $q_2 = \theta$, $Fq_1 = \tau - \psi(\dot{x}) + \omega_1(t)$, $Fq_2 = -\varphi(\dot{\theta}) + \omega_2(t)$ donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} - ml \cos(\theta)\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml \sin(\theta)\dot{\theta}\dot{x} + mgl \sin(\theta) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} - ml \cos(\theta)\dot{x} \end{cases} \quad (I.36)$$

En conséquence, les équations de mouvement régissant ce système sont

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} - ml \cos(\theta)\ddot{\theta} + ml \sin(\theta)\dot{\theta}^2 = \tau - \psi(\dot{x}) + \omega_1(t) \\ \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} - ml \cos(\theta)\ddot{x} - mgl \sin(\theta) = -\varphi(\dot{\theta}) + \omega_2(t) \end{cases} \quad (I.37)$$

Dans ces équations, τ est la commande (la force exercée par le moteur). $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ sont des termes incertains bornés tenant compte des dynamique mal modélisées ainsi que des perturbations externes. $\psi(\dot{x})$ et $\varphi(\dot{\theta})$ sont respectivement les efforts de frottement (de coulomb et visqueux) du chariot et du pendule. Ils sont modélisés comme suit :

$$\psi(\dot{x}) = \psi_{Dahl}(\dot{x}) + \psi_v \dot{x} \quad (I.38)$$

$$\varphi(\dot{\theta}) = \varphi_{Dahl}(\dot{\theta}) + \varphi_v \dot{\theta} \quad (I.39)$$

Où ψ_v et φ_v sont les coefficients de frottement visqueux. Dans ce que suit, le développement de contrôleur requiert que les perturbations inconnues et les efforts de frottement soient différentiables. Ainsi, il est supposé que l'évolution de frottement de coulomb est décrit par le modèle de Dahl suivant [1]

$$\dot{\psi}_{Dahl}(\dot{x}) = \sigma_x \left[\dot{x} - \frac{\psi_{Dahl}(\dot{x})}{\psi_c} |\dot{x}| \right] \quad (I.40)$$

$$\dot{\varphi}_{Dahl}(\dot{\theta}) = \sigma_\theta \left[\dot{\theta} - \frac{\varphi_{Dahl}(\dot{\theta})}{\varphi_c} |\dot{\theta}| \right] \quad (I.41)$$

où σ_x et σ_θ sont les coefficients de rigidité. ψ_c et φ_c sont, respectivement, la force de frottement de coulomb sur le chariot (moteur linéaire) et le couple de frottement de coulomb sur le pendule:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = B(q)u \quad (I.42)$$

avec :

$$M(q) = \begin{bmatrix} M + m & -ml \cos(\theta) \\ -ml \cos(\theta) & J + ml^2 \end{bmatrix} \quad (I.43)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & ml \sin(\theta)\dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (I.44)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -ml \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (I.45)$$

$$F(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \psi(\dot{x}) - \omega_1(t) \\ \varphi(\dot{\theta}) - \omega_2(t) \end{bmatrix} \quad (I.46)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I.47)$$

En posant le vecteur d'état suivant

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (I.48)$$

Et donc

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (I.49)$$

La représentation d'état obtenue est donnée par l'équation suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(3mgl \cos(\theta) - 4ml^2\dot{\theta}^2) \sin(\theta)}{D} \\ \dot{\theta} \\ \frac{((M+m)g - ml \cos(\theta)\dot{\theta}^2) 3 \sin(\theta)}{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4l}{D} \\ 0 \\ \frac{3 \cos \theta}{D} \end{bmatrix} (\tau - \psi(\dot{x})\omega_1(t)) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3 \cos(\theta)}{D} \\ 0 \\ \frac{3(M+m)}{mlD} \end{bmatrix} (\varphi(\dot{\theta}) - \omega_2(t)) \quad (I.50)$$

Avec

$$D = l(4M + m + 3m\sin^2(\theta)) \quad (\text{I. 48})$$

Ce système admet une infinité de points d'équilibre caractérisés par $\dot{x} = \dot{\theta} = 0$, $\theta = \{0, \pi\}$ modulo 2π et ceci pour tous x . Les points d'équilibre correspondants à $\theta = 0$ modulo 2π , ou 0 est la position verticale haute du pendule, ils sont instables et ceux correspondants à $\theta = \pi$ modulo 2π sont stables.

I.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques généralités sur les systèmes mécaniques actionnés et sous-actionnés. Ces derniers sont des systèmes dont le nombre de sorties est supérieure au nombre d'entrées. Nous avons commencé par la modélisation mathématique des systèmes mécaniques complètement actionnés, puis les systèmes mécaniques sous-actionnés. Enfin, nous avons cité quelques exemples de ce type des systèmes, à savoir, la boule et la poutre, l'acrobot, le pendubot et chariot-pendule inversé avec modélisation mathématique de ce dernier.

Chapitre II

Commande par mode glissant

II.1 Introduction

La commande par mode glissant a connu un essor considérable durant les dernières décennies [5]. Ceci est dû principalement à la propriété de convergence rapide et en temps fini des erreurs, ainsi, que la grande robustesse par rapport aux erreurs de modélisation et certains types de perturbations extérieures [6]. Tous ces aspects positifs ne doivent pas néanmoins masquer certains inconvénients. Les commandes à modes glissants procèdent de manière discontinue, ce qui conduit à exciter toutes les fréquences du système à contrôler et donc des modes pas forcément pris en compte dans la modélisation. De plus, dans la plupart des cas, les discontinuités de contrôle interviennent directement sur l'actionneur. Si cet organe n'est pas conçu pour ce type des oscillations, cela risque de conduire à son vieillissement prématuré et le système sera soumis à chaque instant à une commande élevée afin d'assurer sa convergence vers l'état désiré. Ce chapitre est consacré à une présentation générale des concepts de base de la commande par mode glissant, en présentant son avantage qui est sa robustesse vis à vis les perturbations ainsi que son inconvénient qui est le phénomène de chattering en donnant quelques solutions pour résoudre ce problème.

II.2. Commande par modes glissants d'ordre 1

La commande par mode glissant d'ordre 1 (CMG) est une commande à structure variable pouvant changer de structure et commutant entre deux valeurs suivant une logique de commutation bien spécifique $s(x)$ [6].

Le principe de la commande par modes glissants est de contraindre le système à atteindre une surface donnée appelée surface de glissement et d'y demeurer jusqu'à l'équilibre.

II.3 Synthèse de la loi de commande

La synthèse de la commande par modes glissants se fait en trois étapes (Figure II.1):

- choix de la surface de glissement
- établir la condition de convergence
- déterminer la loi de commande qui permet d'atteindre la surface et d'y demeurer.

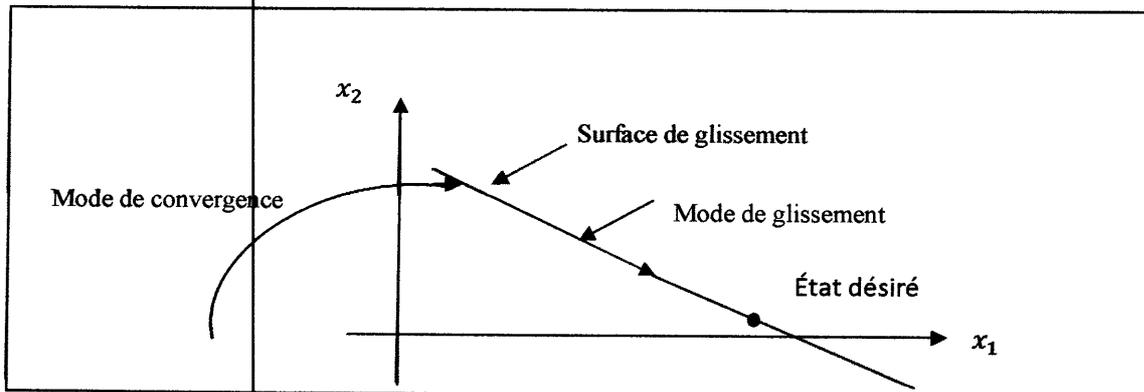


Figure II.1. Différents modes de convergence pour la trajectoire d'état

II.3.1 Choix de la surface de glissement

Soit le système décrit par l'équation différentielle suivante (II.1)

$$\dot{x}^n = f(x, t) + g(x, t)u \quad (\text{II.1})$$

Où f et g sont des fonctions non linéaires, u est l'entrée du système. x est l'état du système.

Soit x_a la consigne désirée et e l'erreur de poursuite définie par

$$e = x - x_a \quad (\text{II.2})$$

La formule générale de la surface de glissement est définie par

$$s(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{n-1} e(x) \quad (\text{II.3})$$

$$\text{Pour } n=1 \quad s(x) = e(x) \quad (\text{II.4})$$

$$\text{Pour } n=2 \quad s(x) = \lambda e(x) + \dot{e}(x) \quad (\text{II.5})$$

$$\text{Pour } n=3 \quad s(x) = \lambda^2 e(x) + 2\lambda \dot{e}(x) + \ddot{e}(x) \quad (\text{II.6})$$

λ : Une constante positive.

n : Le degré relatif du système par rapport à la sortie $y(t)$. Il représente le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie $y(t)$ par rapport au temps, pour y voir apparaître l'entrée.

II.3.2 Condition d'existence du mode de glissement

Le choix de la fonction de glissement étant fait, la deuxième étape consiste à concevoir une loi de commande qui puisse amener le vecteur d'état à converger vers la surface et y demeurer ($s = 0$). Pour cela, il faut que la loi de commande soit conçue de telle manière à ce que s soit attractif. Pour déterminer la condition d'attractivité, considérons la fonction de Lyapounov suivante [2].

$$v(x) = \frac{1}{2} s^2 \quad (\text{II.7})$$

Une condition nécessaire et suffisante, appelée condition d'attractivité, pour qu'une variable de glissement $s(x, t)$ tende vers 0 et que la dérivée temporelle de v soit définie négative

$$\dot{s} \cdot s < \eta |s| \quad (\text{II.8})$$

Si la condition (II.8) est vérifiée, alors la variable de glissement et sa dérivée sont de signe contraire quel que soit le temps et que 0 est un centre attracteur.

Le temps de convergence, ou le temps d'atteinte dépend directement du choix de s .

II.3.3 Calcul de la commande

Lorsque le régime glissant est atteint, il reste à déterminer la commande nécessaire pour attirer la trajectoire d'état vers la surface et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant les conditions d'existence de glissement. La structure de cette commande est constituée de deux parties, une concernant la linéarisation exacte (u_{eq}) et l'autre stabilisante (u_d) [7].

$$u = u_{eq} + u_d \quad (\text{II.9})$$

avec

$$u_d = -\alpha \text{sign}(s) \quad (\text{II.10})$$

u_{eq} : est une fonction continue qui sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement $\{s = 0\}$. Elle est obtenue grâce aux conditions d'invariance de la surface suivant :

$$\begin{cases} s = 0 \\ \dot{s} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

α : Une constante positive.

$sign$: La fonction signe.

u_d : La commande discontinue.

Pour mettre en évidence le développement précédent, nous considérons un système défini dans l'espace d'état par :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (\text{II.12})$$

La dérivée de $s(x)$

$$\dot{s}(x) = \frac{\partial s}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) \left(\frac{dx}{dt}\right) \quad (\text{II.13})$$

en remplaçant (II.9) et (II.13) dans (II.14) nous trouvons

$$\dot{s}(x) = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) (f(x, t) + g(x, t)u_{eq}) + \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) g(x, t)u_d \quad (\text{II.14})$$

Durant le mode de glissement et le régime permanent, la surface est nulle. Par conséquent, sa dérivée est la partie discontinue sont aussi nulles, d'où nous déduisons l'expression de la commande équivalente

$$u_{eq} = - \left(\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) g(x, t)\right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) f(x, t) \quad (\text{II.15})$$

Pour que la commande équivalente puisse prendre une valeur finie, il faut que

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) g(x, t) \neq 0 \quad (\text{II.16})$$

Durant le mode de convergence, et en remplaçant la commande u_{eq} par son expression dans (II.16), nous trouvons la nouvelle expression de la dérivée de la surface

$$\dot{s}(x) = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) g(x, t)u_d \quad (\text{II.17})$$

La condition d'attractivité exprimée par $\dot{s} < 0$, devient

$$s(x, t) \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) g(x, t)u_d < 0 \quad (\text{II.18})$$

Afin de satisfaire cette condition, le signe u_d doit être opposé à celui de $s(x, t) \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) g(x, t)$. La forme la plus simple que peut prendre la commande discrète est celle d'un relais de la figure II.2.

$$u_d = -\alpha \text{sign}(s) \quad (\text{II.19})$$

$$u_{eq} = -\alpha \left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \text{sign}(s) \quad (\text{II.20})$$

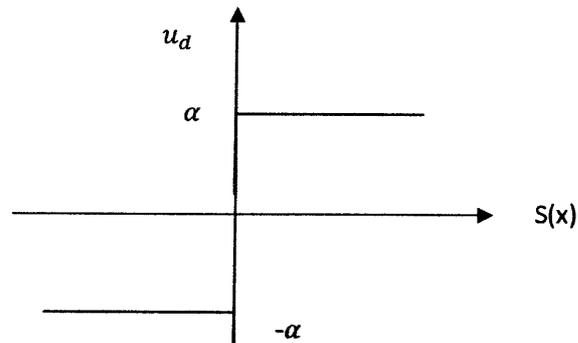


Figure II.2. Représentation de la commande discontinue

Le signe de α doit être différent de celui de $\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) g(x, t)$.

II.4 Phénomène de chattering (réticence)

Un régime glissant requiert une commande pouvant commuter à une fréquence infinie. Evidemment, pour une utilisation pratique, seule une commutation à une fréquence finie est possible, ce qui cause un retard entre la mesure de la sortie et le calcul de la commande, qui peut être amplifié si le système présente naturellement des retards ou des dynamiques négligées. Cela conduit le système à quitter la surface de glissement sans que la commande ne puisse réagir, puis, une fois le signe de la commande inversé, à revenir sur cette surface et passer de l'autre côté, et ainsi de suite[8].

Ainsi, durant le régime glissant, les discontinuités appliquées à la commande peuvent entraîner des oscillations haute fréquence de la trajectoire du système autour de la surface de glissement, un phénomène appelé broutement ou chattering en anglais. Les principales raisons de ce phénomène sont:

- Les retards purs en série avec le système en boucle ouverte (retards inhérents au système,

échantillonnage,.....).

- Les dynamiques non modélisées des capteurs et observateur, qui retardent le moment où le régulateur prend conscience qu'il faut inverser la commande.
- Les dynamiques non modélisées des actionneurs et autres dynamiques rapides du système, qui retardent le moment où la commande est suffisamment forte pour rapprocher le système de la surface de glissement.

Tous ces phénomènes ont globalement l'effet de retarder l'application effective de la commande permettant de ramener le système sur la surface de glissement à partir du moment où il l'a quitté.

Le phénomène de chattering peut être si pénalisants que l'utilisation d'une loi de commande par mode glissants peut, dans certaines applications, être à proscrire, vu que son utilisation peut dégrader les performances, voire conduire à l'instabilité a cause du chattering sur la sortie. Le chattering de la commande, quant à lui, peut entraîner une usure prématurée des actionneurs ou de certaines parties du système à cause de trop fortes sollicitation. Excitant les modes propres des dynamiques non modélisées ou des fréquences de résonance du système correspondant aux retards de commutation.

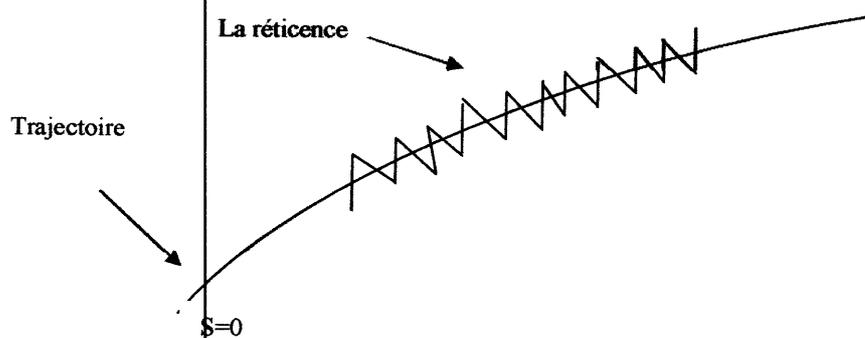


Figure II.3. Le phénomène de broutement

II.5 Solutions pour atténuer le phénomène de réticence

Dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène, de nombreuses solutions ont été présentées, comme la solution de couche limite, mode glissant d'ordre supérieur, etc.....

II.5.1 Solution de couche limite

Cette solution consiste à remplacer la fonction «signe» par une fonction continue adéquate qui filtre les hautes fréquences, dans un proche voisinage de surface.

On donne ci-dessous des exemples de quelques fonctions utilisées :

- Fonction SAT :

$$\text{Sat}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > \mu \\ -1 & \text{si } s < -\mu \\ \frac{s}{\mu} & \text{si } |s| < \mu \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

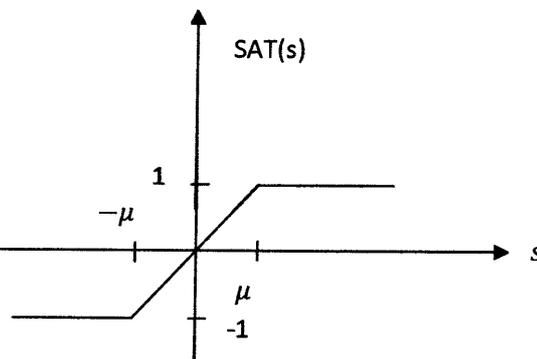


Figure II.4. Fonction « SAT »

Avec μ : est un paramètre positif

- Fonction pseudo-signe :

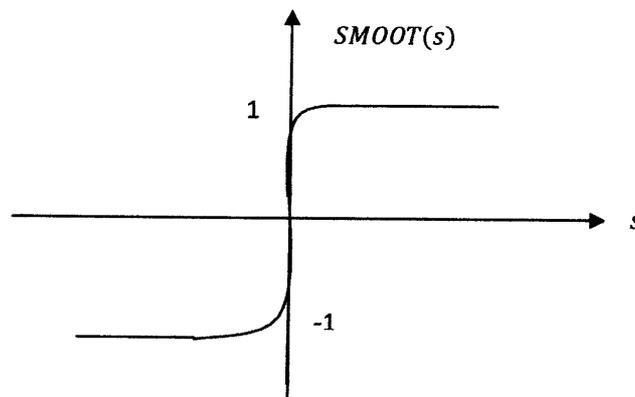


Figure II.5. Fonction pseudo-signe

$$v(s) = \frac{s}{|s| + \mu} \quad (\text{II.22})$$

- Fonction tangente hyperbolique :

$$v(s, \delta) = \tanh \frac{s}{\delta} \quad (\text{II.23})$$

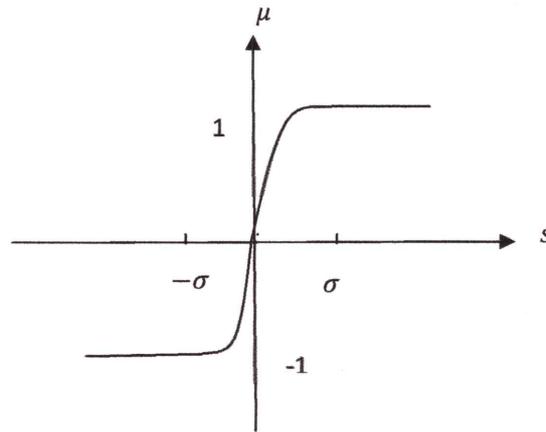


Figure II.6. Fonction tangente hyperbolique



II.5.2 Solution par de mode glissant d'ordre supérieur

Les modes glissants d'ordre supérieur ont été introduits pour pallier au problème du chattering tout en gardant les propriétés de convergence en temps fini et de robustesse des commandes par modes glissants classiques. Dans cette approche, le terme discontinu n'apparaît plus directement dans l'expression de la commande synthétisée mais dans une de ses dérivées supérieures ce qui a le mérite de réduire le Chattering [9].

II.6 robustesse de la commande par modes glissants

Considérons le système d'écrit par l'équation (II.1) soumis à des perturbations "d" tel que :

$$\dot{x}^n = f(x, t) + g(x, t)u + d \quad (\text{II.24})$$

La robustesse des contrôleurs glissants est garantie en vérifiant la condition de recouvrement. Cette condition est définie par le théorème suivant [10].

Théorème II.1

Un régime glissant sur s du système perturbé (II.24) est indépendant du signal de perturbation d ,

si et seulement si $d \in \text{vect}\{g(x)\}$. Cette condition structurelle est appelée condition de recouvrement. L'ensemble $\text{vect}\{g(x)\}$ désigne la distribution engendrée par les vecteurs g_1, \dots, g_m .

Il faut noter que le système est insensible aux perturbations seulement en régime glissant, mais qu'il reste infecté pendant le régime de transitoire.

II.7 Mode glissant d'ordre deux

Considérons un système non linéaire décrit par :

$$\ddot{x} = f(x, t) + g(x, t). u \quad (\text{II.25})$$

L'objectif est d'établir un régime glissant d'ordre deux par rapport à s , en imposant aux trajectoires d'état du système à évoluer au bout d'un temps fini sur l'ensemble s_2 et à ne plus le quitter ensuite :

$$s_2 = \{x : s = \dot{s} = 0\} \quad (\text{II.26})$$

Ceci est réalisé par une commande agissant sur la dérivée seconde de la variable de glissement qui de manière générale, peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{s} = \varphi(x, t) + \phi(x, t). v \quad (\text{II.27})$$

Avec

- $v = \dot{u}$ dans le cas où le système est de degré relatif dynamique $n = 1$ par rapport à s , c'est à dire $\frac{\partial}{\partial u} \dot{s} \neq 0$, avec les fonctions f et g dérivables
- $v = u$ dans le cas où le système est de degré relatif dynamique $n = 2$ par rapport à s , c'est à dire $\frac{\partial}{\partial u} \ddot{s} \neq 0$

Afin de réaliser des algorithmes par modes glissants d'ordre deux, il est nécessaire de vérifier l'hypothèse de travail suivante pour valider l'atteignabilité de la surface de glissement et la bornitude de la variable \ddot{s} [9] :

- Les fonctions incertaines $\varphi(x, t)$ et $\phi(x, t)$ sont bornées.
- il existe quatre constantes positives s_0, c_0, k_m et k_M telles que, dans un voisinage

$$|s(x, t)| < s_0$$

Les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$|\varphi(x, t)| < c_0 \text{ et } 0 < k_m \leq |\phi(x, t)| \leq k_M \quad (\text{II.31})$$

Les hypothèses énoncées ci-dessus impliquent que la dérivée seconde de la fonction de commutation est uniformément bornée. En respectant les conditions déjà définies, nous pouvons écrire que toute solution relative à l'équation (II.27) satisfait l'inclusion différentielle suivante [9]

$$\ddot{s} \in [-c_0, c_0] + [k_m, k_M] \cdot v \quad (\text{II.32})$$

II.8 algorithme de commandes par modes glissants d'ordre 2 :

Dans la littérature on trouve plusieurs algorithmes modes glissants d'ordre 2, Parmi ces algorithmes, on cite [9] :

- Algorithme du Twisting.
- Algorithme du Super Twisting.
- Algorithme du prescribed convergence law (Algorithme avec une loi de convergence prédéfinie).

II.8.1 Algorithme du Twisting (TWG)

En plus de la commutation du signe de la commande, on commute son amplitude entre deux valeurs en fonction du quadrant dans lequel se trouve l'état du système. La trajectoire du système dans le plan de phase tourne autour de l'origine en s'en rapprochant à la manière d'une spirale. Son expression pour un système de degré relatif 2 est [11] :

$$u = -\alpha \text{sign}(s) - \beta \text{sign}(\dot{s}) \quad (\text{II.33})$$

avec $\alpha > \beta > 0$

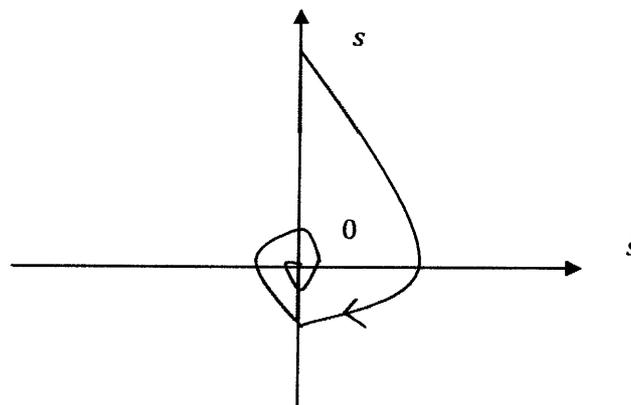


Figure II.7 Convergence de l'algorithme Twisting dans le plan (s, \dot{s})

Sous les conditions décrites par les inégalités (II.26), la trajectoire du système différentiel (II.29) converge au point d'équilibre $s = \dot{s} = 0$ en un temps fini sous les conditions suivantes

$$-(\alpha + \beta)k_m - C_0 > -(\alpha - \beta)K_M + C_0 \quad (\text{II.34})$$

$$-(\alpha - \beta)K_m > C_0 \quad (\text{II.35})$$

L'homogénéité de cette loi de commande est évidente, car son expression ne dépend pas de la valeur de s ou \dot{s} , mais seulement de leur signe, qui ne varie pas en les multipliant par $k > 0$.

II.8.2 Algorithme du super-Twisting

Cet algorithme a été développé pour l'asservissement de systèmes à degré relatif égal à 1 par rapport à la surface de glissement. Cette loi de commande a été proposée par Emelyanov en 1990. Elle a été étudiée par Levant dans [11]. Le Super-twisting n'utilise pas d'informations sur \dot{s} ceci peut être vu comme un avantage. Il est composé de deux parties, une partie discontinue u_2 et une partie continue u_1

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad (\text{II.33})$$

$$\dot{u}_1 = \begin{cases} -u & \text{si } |u| > U_M \\ -\alpha \text{sign}(s) & \text{si non} \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

$$u_2 = \begin{cases} -\lambda |s_0|^\rho \text{sign}(s) & \text{si } |u| > s_0 \\ -\lambda |s|^\rho \text{sign}(s) & \text{si non} \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

La commande u est une fonction bornée $|u| \leq U_M$ pour tout t avec α, λ, ρ vérifiant les inégalités suivantes :

$$\alpha > \frac{C_0}{k_m}, \quad 0 < \rho < 0.5 \quad (\text{II.36})$$

$$\lambda^2 \geq \frac{4C_0 k_M (\alpha + C_0)}{k_m^2 k_m (\alpha - C_0)} \quad (\text{II.37})$$

Dans la suite, on fixera $\rho = 0.5$

Cette commande se décompose en un terme algébrique (non dynamique) et en un terme intégral. On peut donc considérer cet algorithme comme une généralisation non linéaire d'un PI.

Si $s_0 = \infty$ peut simplifier l'algorithme

$$u = -\lambda |s_0|^\rho \text{sign}(s) + u_1 \quad (\text{II.38})$$

$$\dot{u}_1 = -\alpha \text{sign}(s) \quad (\text{II.39})$$

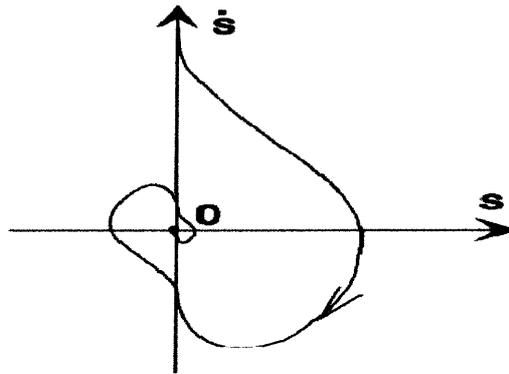


Figure (II.8) Convergence de l'algorithme Super -Twisting dans le plan (s, \dot{s})

La trajectoire de l'algorithme dans le plan de phase (s, \dot{s}) est donnée dans la Figure (II.8), et on montre que les intersections consécutives de celle-ci avec les axes du plan (s, \dot{s}) évoluent tout en se rapprochant de l'origine qui est atteinte en temps fini. Par un choix particulier du modèle et de la surface de glissement, l'algorithme de commande par modes glissants Super Twisting [9] [12], peut être formulé comme un algorithme d'observation pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré.

II.9 Exemple de simulation

nous allons appliquer la commande par mode glissant sur un système non linéaire de deuxième ordre qui est le pendule simple représenté sur la figure II.9

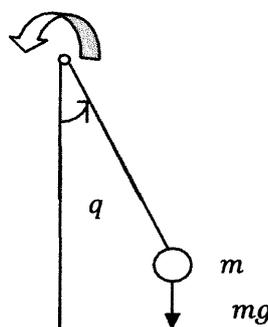


Figure II.9.pendule simple

Le Lagrangien de ce pendule est donné par

$$L = E_c - E_p$$

$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2$$

$$E_p = mgl (1 - \cos q)$$

telles que

E_c : L'énergie cinétique

E_p : L'énergie potentielle

l : la longueur du bras manipulateur

q : position angulaire

Nous sommes maintenant prêts à écrire l'expression du lagrangien

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 - mgl(1 - \cos(q)) \quad (I.34)$$

Soit l'équation d'Euler- Lagrange suivante

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau \quad (I.35)$$

Avec:

$N=1$: pour un degré de liberté.

$\tau = u$: Commande du système.

Les équations différentielles sont données comme suit

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q} = -mgl \sin q \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m l^2 \dot{q} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = m l^2 \ddot{q} \end{cases}$$

Alors l'équation différentielle du système est donnée par

$$ml^2\ddot{q} + mgl\sin(q) = u \quad (\text{II.43})$$

Avec $m = 1, g = 9.81, l = 1$

La représentation d'état de système est la suivante :

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{II.44})$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) + \frac{l}{ml^2}u \quad (\text{II.45})$$

Le but de notre commande est de forcer la sortie du système à suivre la trajectoire désirée

$$x_d = 0 \quad (\text{II.46})$$

La surface de glissement est choisie comme suit :

$$s = \dot{e} + \alpha e \quad (\text{II.47})$$

Avec : $\alpha=4$

$$e = x_1 - x_d \quad (\text{II.48})$$

La commande par mode glissant est donnée par

$$u = u_{eq} - k\text{sgn}(s) \quad (\text{II.49})$$

$$u = (\alpha mx_2 + mg\sin(x_1)) - k\text{sgn}(s) \quad (\text{II.50})$$

Avec : $k = 1$

Donc :

$$u = 4x_2 + 9.81\sin(x_1) - \text{sgn}(s) \quad (\text{II.51})$$

II.10 Résultats de simulation

II.10.1 Résultats de simulation par la commande mode glissant d'ordre 1

Test 1 : sans perturbation

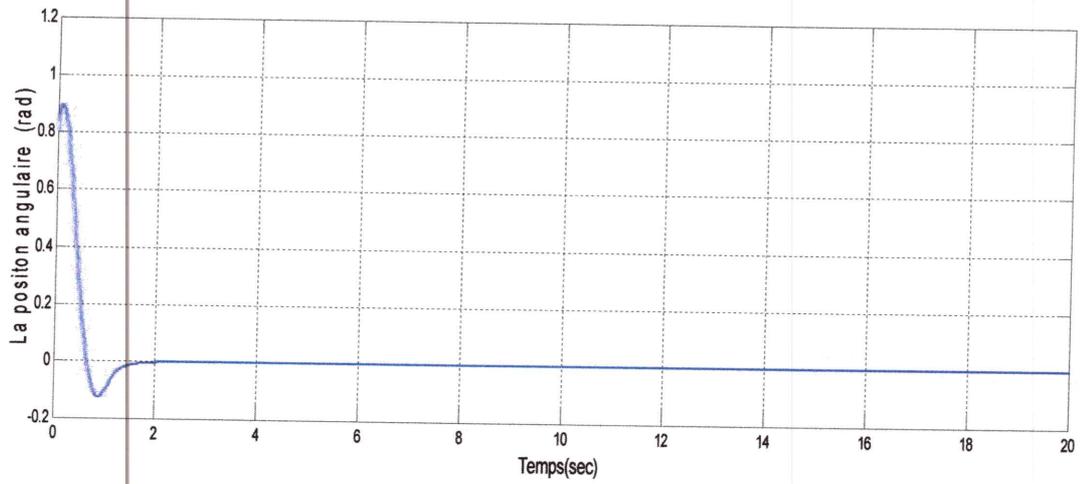


Figure II.10 La position de pendule

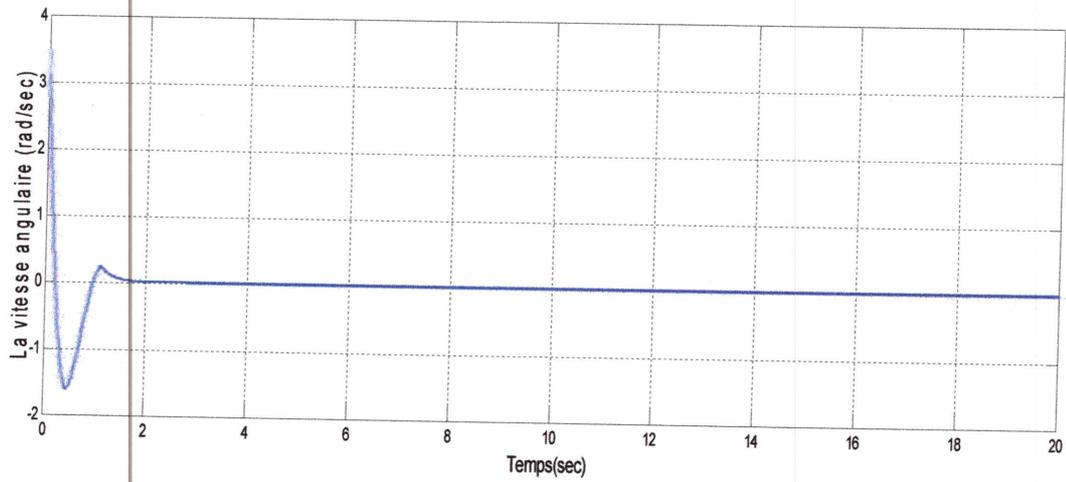


Figure II.11. La vitesse angulaire du pendule

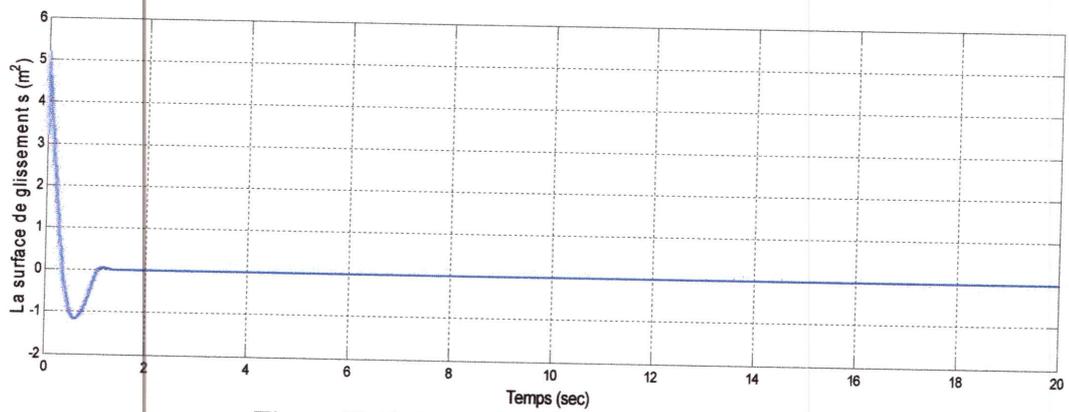


Figure II.12 La surface de glissement s

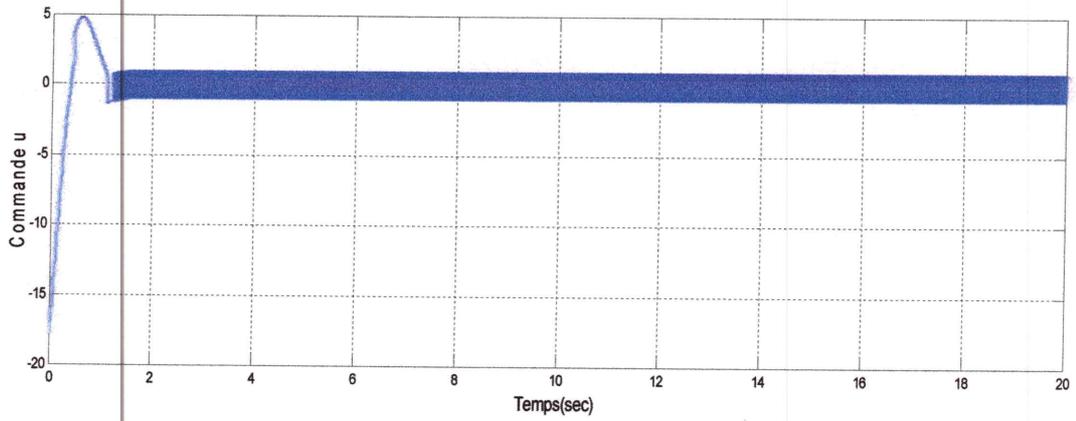


Figure II.13 le signal de commande

Test 2 : avec perturbation

Pour tester la robustesse de notre commande on prend en compte des perturbations sous forme

$$d = \frac{1}{6} \sin(2\pi t)$$

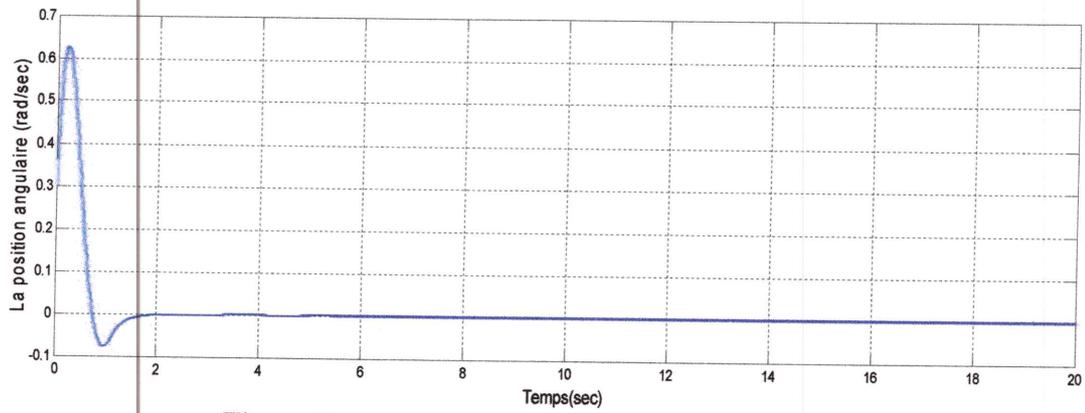


Figure II.14. La position angulaire de pendule

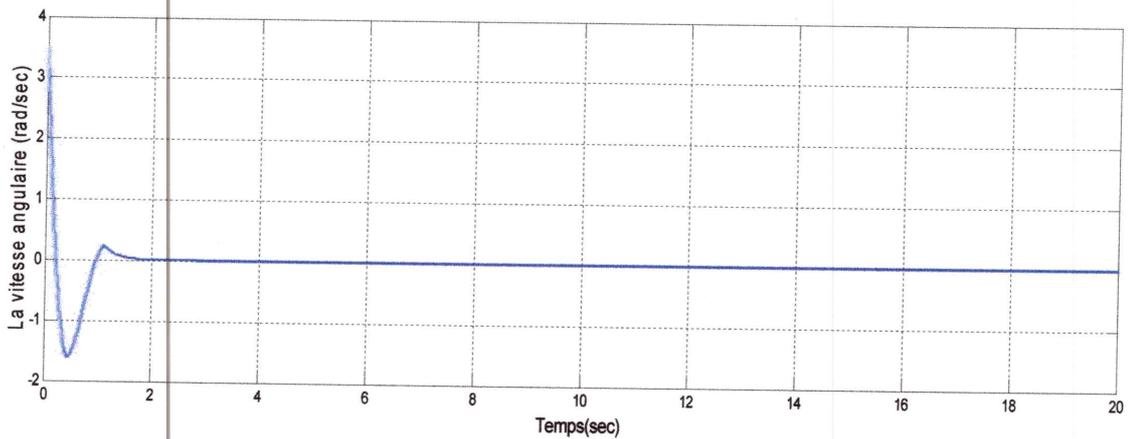


Figure II.15. la vitesse angulaire de pendules

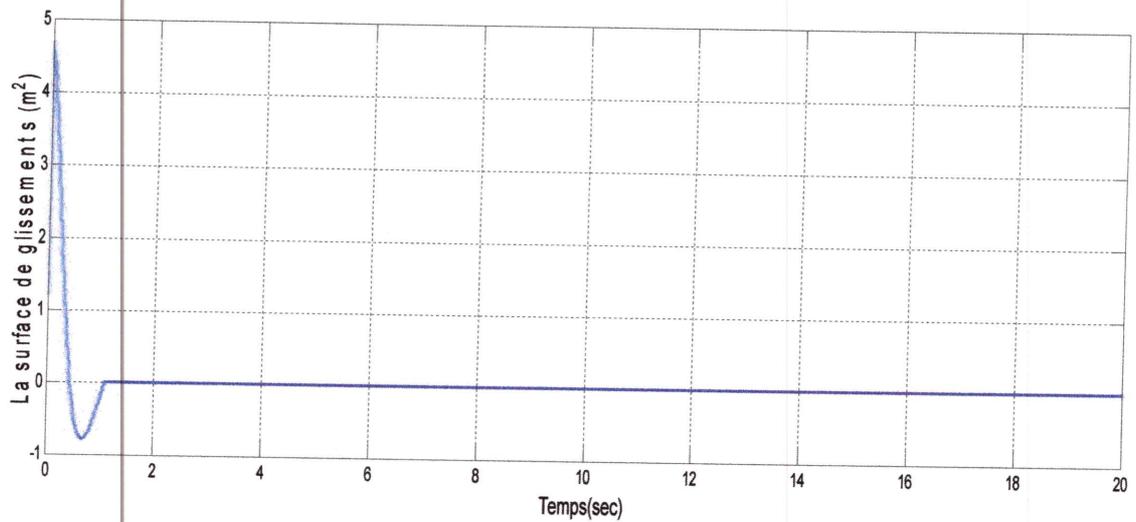


Figure II.16 .la surface de glissement s

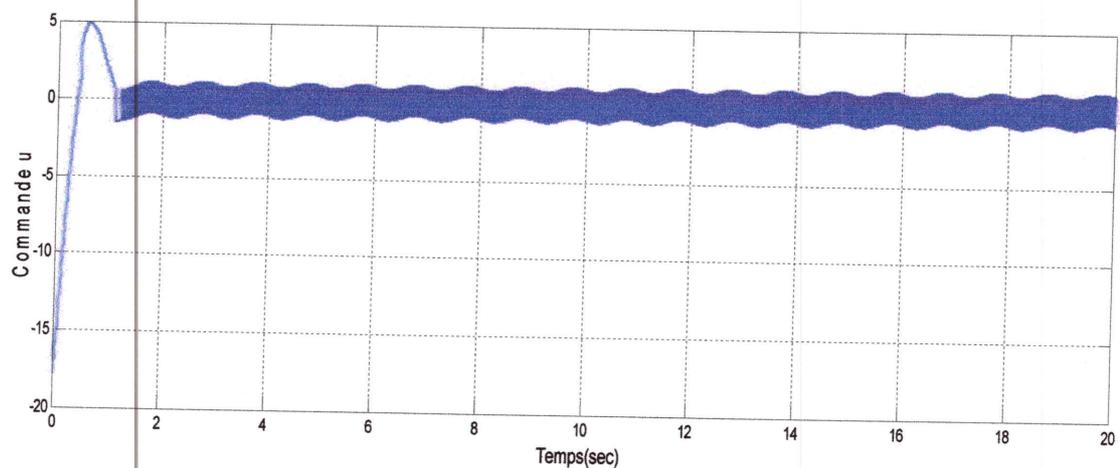


Figure II.17. Le signal de commande

Commentaires sur les résultats

D'après ces figures on remarque la bonne robustesse de cette commande malgré la présence des perturbations, mais on remarque aussi dans les deux tests la présence du problème majeur des modes glissants d'ordre 1 (chattering) dans les signaux de commande.

II.10.2 Résultats de Simulation avec changement de la fonction signe par la fonction saturation

Afin de diminuer le chattering sur la commande on remplace le terme signe par la fonction saturation

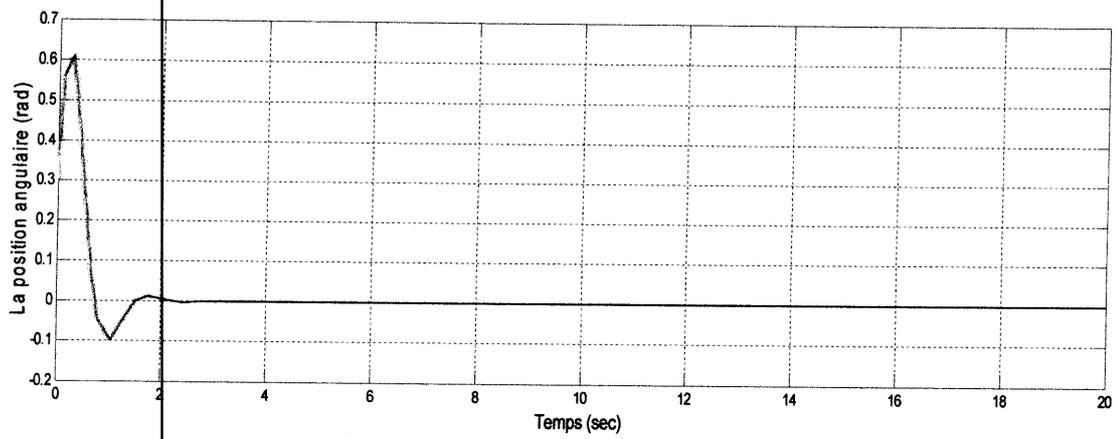


Figure II.18. La position angulaire de pendule

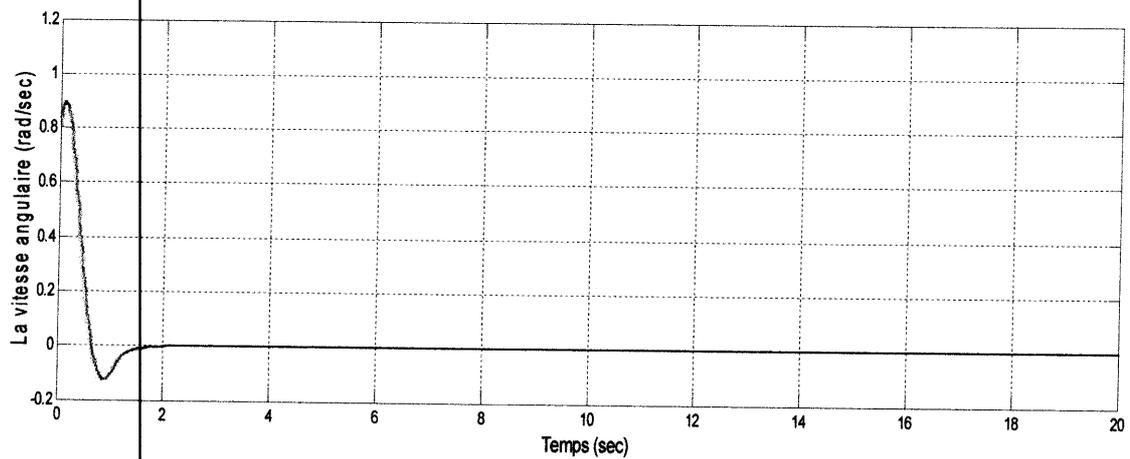


Figure II.19. La vitesse angulaire du pendule

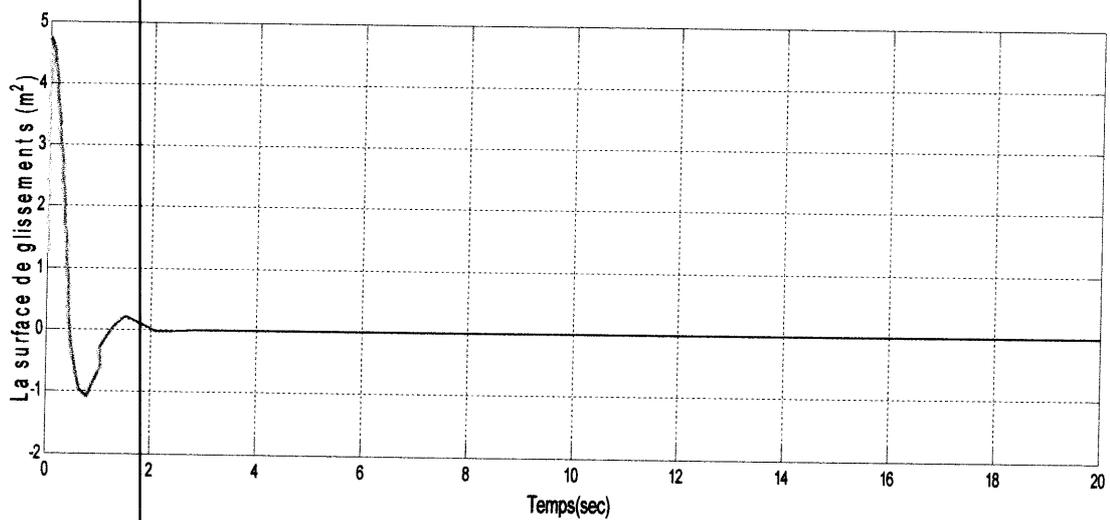


Figure II.20. La surface de glissement s

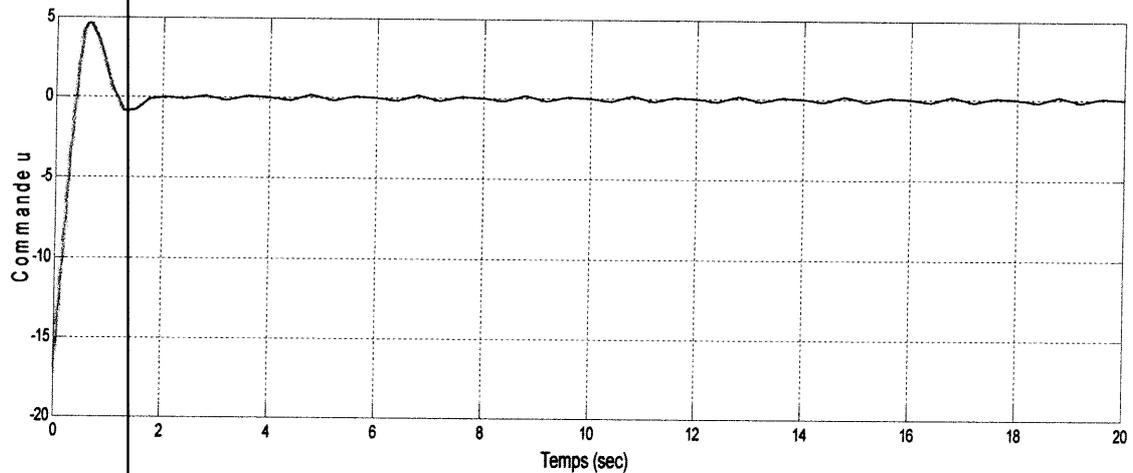


Figure II.21. Le signal de commande

Commentaires sur les résultats

D'après ces figures on remarque les bonnes performances avec la disparition de problème de chattering dans les signaux de commande, la fonction saturation est une solution efficace de ce problème.

II.10.3 Résultats de simulation par la commande mode glissant d'ordre 2, algorithme de twisting

La surface de glissant qu'on a adopté pour l'algorithme de twisting est $s = \dot{e} + \alpha e$, $\alpha=4$.

Alors la commande est donnée par :

$$u = u_{eq} - k_1 \text{sgn}(s) - k_2 \text{sgn}(\dot{s}) \quad (\text{II.49})$$

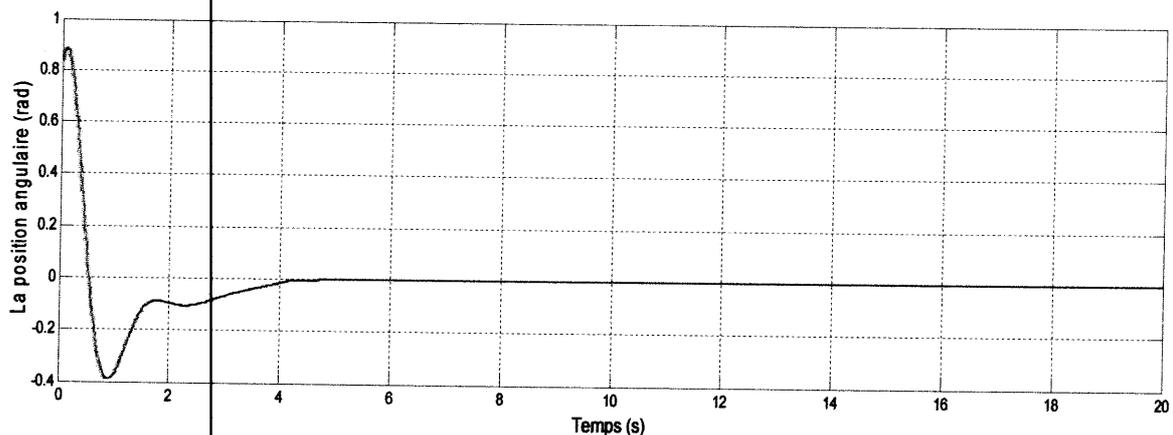


Figure II.22 La position angulaire de pendule

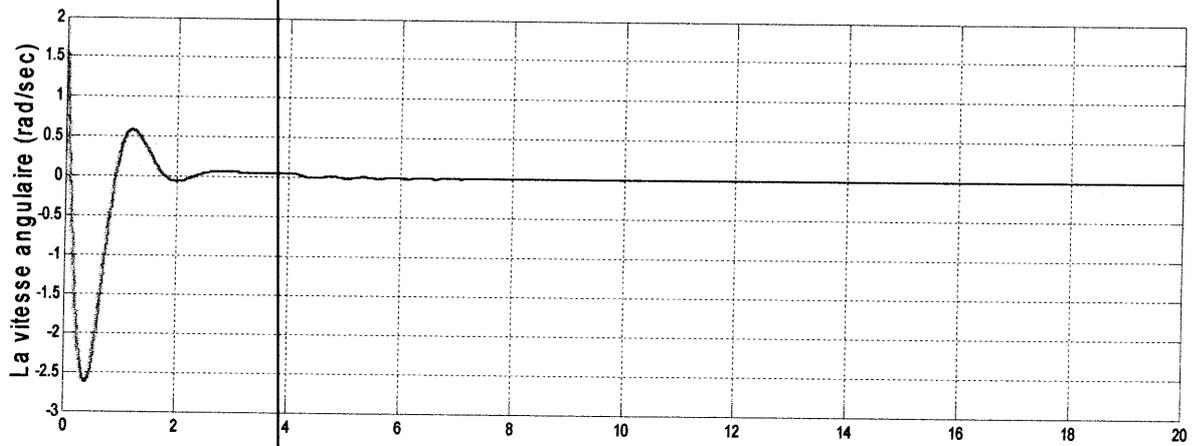


Figure II.23. La vitesse angulaire du pendule

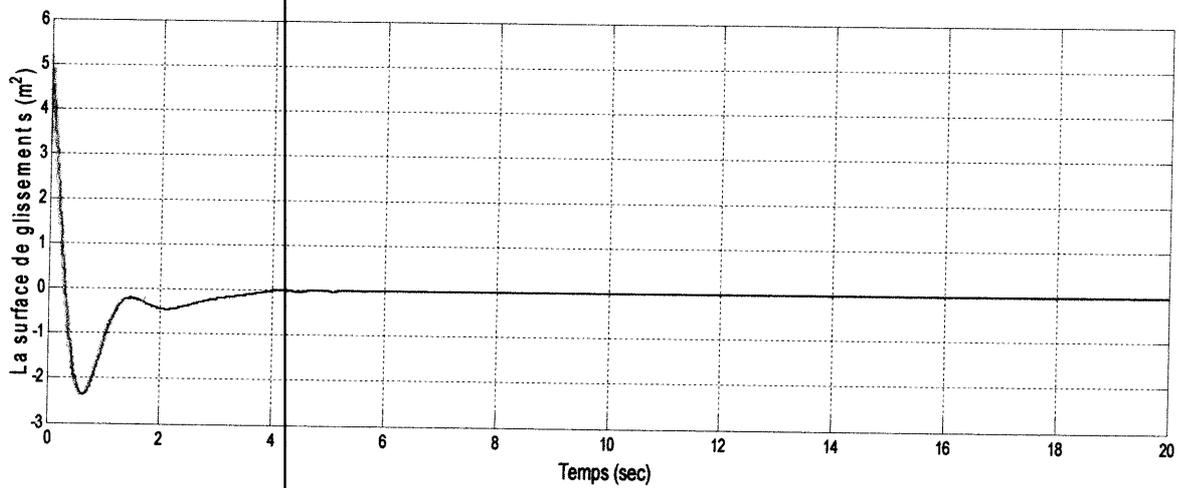


Figure II.24. La surface de glissement s

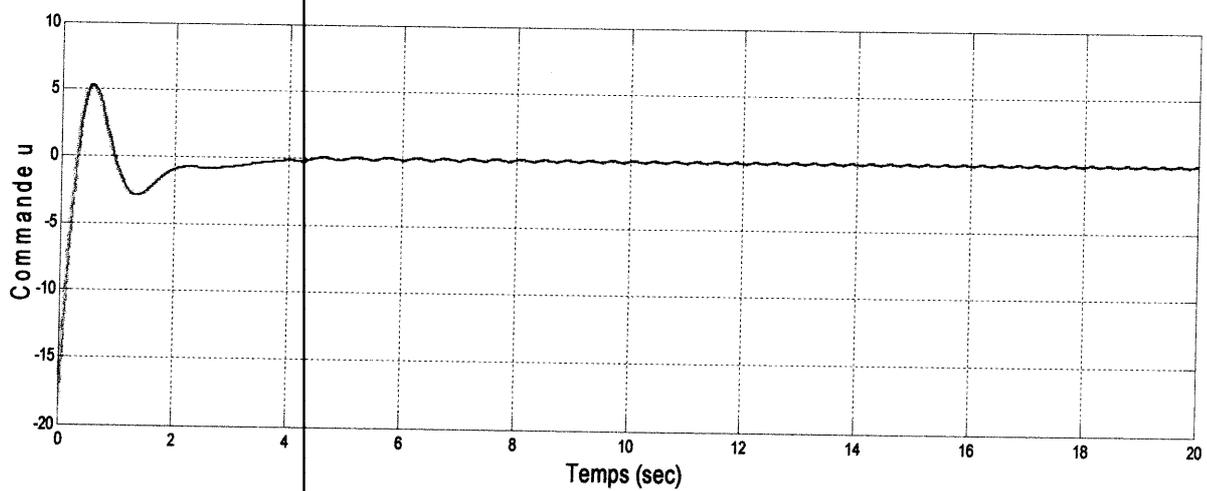


Figure II.25. Le signal commande

Commentaires sur les résultats

D'après ces figures, on remarque des bonnes performances avec la disparition de problème de chattering, le mode glissant d'ordre 2 est une solution de ce problème.

II.11 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté, premièrement, l'aspect théorique de la commande par mode glissant (CMG) d'ordre 1, en donnant les trois étapes à suivre pour trouver la loi de commande. Ces étapes sont, le choix de la surface de glissement, condition d'attraction et enfin le calcul de la commande. Cette commande est appropriée pour les systèmes non-linéaires incertains sous l'effet des perturbations externes, car cette technique de commande est robuste vis-à-vis ce type d'incertitudes. Nous avons remarqué que cette technique de commande souffre du phénomène de broutements. Afin de diminuer l'effet de ce phénomène indésirable, nous avons présenté quelques solutions, à savoir, de remplacer la fonction signe par la fonction saturation. Une deuxième solution est d'utiliser la théorie de la commande par mode glissant d'ordre 2, ce qui a été fait en deuxième partie de ce chapitre. L'exemple de simulation sur un pendule simple a montré les bonnes performances de régulation et de commande malgré la présence des perturbations.

Chapitre III

Principe de la commande quasi-homogène

III.1 Introduction

La commande quasi-homogène fait partie des commandes par modes glissants, plus précisément les modes glissants du second ordre. La commande quasi-homogène possède donc les avantages des modes glissants, à savoir la robustesse de la commande vis-à-vis des perturbations satisfaisant la condition de recouvrement (matching condition), ainsi que la propriété de convergence en temps fini sur une surface de glissement prédéfinie. Cette commande est appropriée lorsque le système à commander subit aux perturbations qui ne satisfait pas la condition de recouvrement (non-matching condition). Dans [1], a été montré pratiquement que la commande quasi-homogène est efficace pour diminuer l'effet des perturbations (non-matching condition). Dans ce chapitre, on définit la commande quasi-homogène et on présente une étude sur la stabilité en temps fini des systèmes quasi-homogènes et en particulier celle du système (quasihomogène) du second ordre.

III.2 Homogénéité

En mathématique, une fonction homogène est une fonction qui a un comportement d'échelle multiplicatif par rapport à son ou ses arguments : si l'argument (vectoriel au besoin) est multiplié par un scalaire, alors le résultat sera multiplié par ce scalaire porté à une certaine puissance [13].

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif K .

Une fonction f de E dans F est dite homogène de degré α si $\forall k \in K, \forall x \in E$

$$f(kx) = k^\alpha f(x) \quad (\text{III.1})$$

Si K est le corps \mathbb{R} des nombres réels, on dit que f est positivement homogène de degré α si $\forall t \geq 0, \forall x \in E$

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \quad (\text{III.2})$$

III.3 Stabilisation robuste d'un manipulateur à un degré de liberté

La commande quasi-homogène, qui sera définie ultérieurement, est tout d'abord illustrée sur un manipulateur à 1 degré de liberté opérant dans des conditions incertaines [14]. Les dynamiques du manipulateur sont données par

$$\dot{y} = w(y, \dot{y}, t) + u \quad (\text{III.3})$$

Où y est la position, \dot{y} est la vitesse, u est la commande et $w(y, \dot{y}, t)$ est une fonction non linéaire continue par morceaux qui contient toutes les forces agissant sur le système (frottement visqueux et de Coulomb, poids, etc.). Le manipulateur opère dans des conditions incertaines ce qui implique que la non-linéarité $w(y, \dot{y}, t)$ est mal connue. Ce terme, qui peut être déstabilisant, peut être considéré comme étant la somme d'un terme nominal connu a priori $w^{nom}(y, \dot{y}, t)$ et d'un terme incertain $w^{un}(y, \dot{y}, t)$ qui sera rejeté par la commande

$$w(y, \dot{y}, t) = w^{nom}(y, \dot{y}, t) + w^{un}(y, \dot{y}, t) \quad (\text{III.4})$$

On suppose que $w^{un}(y, \dot{y}, t)$ est bornée, c'est à dire, l'inégalité

$$|w^{un}(y, \dot{y}, t)| \leq N \quad (\text{III.5})$$

est vérifiée pour tout $t \geq 0$ et tout $(y, \dot{y}) \in \mathbb{R}^2$, où $N > 0$ est une constante connue a priori. De plus, on suppose que les fonctions $w^{nom}(y, \dot{y}, t)$ et $w^{un}(y, \dot{y}, t)$ sont continues par morceau, la loi de commande

$$u = -w^{nom}(y, \dot{y}, t) - \alpha \text{sign}(y) + b \text{sign}(\dot{y}) - hy - p\dot{y} \quad (\text{III.6})$$

$$N < b < \alpha - N, \quad h, p \geq 0 \quad (\text{III.7})$$

Où $\text{sign}(\cdot)$ est la fonction signe, stabilise le système incertain (III.3)-(III.5) en temps fini. La commande (III.6)-(III.7) est constituée de la compensation non linéaire $-w^{nom}(y, \dot{y}, t)$, d'un gain linéaire $-hy - p\dot{y}$, et d'une partie discontinue $\varphi(y, \dot{y}) = -\alpha \text{sign}(y) - b \text{sign}(\dot{y})$. Vérifiant $\varphi(cy, c\dot{y}) = \varphi(y, \dot{y})$ pour tout $c > 0$.

Définition 1:

Un contrôleur est dit quasi-homogène s'il peut être représenté comme une combinaison d'un terme homogène discontinu et d'un autre terme continu qui tend vers l'origine de l'espace d'état. Il a été montré [15] que le système non-homogène (III.3)-(III.7) est globalement stable en temps fini, en présence de perturbations externes (III.4) vérifiant (III.5)

III.4. Stabilisation locale des systèmes mécaniques sous-actionnés par commande quasi-homogène

Dans la présente section, la synthèse d'une commande quasi-homogène est développée pour la stabilisation de systèmes mécaniques sous-actionnés dont le modèle dynamique est de la forme [14]

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)[B\tau - C(q, \dot{q}) - G(q) - F(\dot{q})] \quad (\text{III.8})$$

Dans cette équation, $q \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de position des articulations, $\tau \in \mathbb{R}^m$; $m < n$ est la force de commande, \dot{q} et \ddot{q} sont respectivement les vecteurs de vitesse et d'accélération, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'inertie, $C(q, \dot{q})$ représente les forces centrifuge et de Coriolis, $G(q)$ le poids, $F(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ les forces de frottements et B est la matrice d'entrée supposée de rang m . Le système (III.8) peut être représenté localement, par l'intermédiaire d'un changement non linéaire sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{\eta} = g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) \\ \ddot{\xi} = f(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) + u \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Si en plus, ce système est localement à minimum de phase et suffisamment dérivable, il peut être localement stabilisé par un contrôleur quasi-homogène similaire. Les variables η et ξ sont supposées mesurables, car ce sont des fonctions de q et \dot{q} . Dans la suite, on suppose que :

1. Les fonctions $g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ et $f(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ sont continues par morceaux et $g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ est continue par rapport à $(\xi, \dot{\xi})$ localement autour de $(\xi, \dot{\xi}) = 0$ pour tout $(\eta, \dot{\eta})$.
2. Le système $\ddot{\eta} = g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ est stable du point de vue entrée-état.
3. Le système

$$\ddot{\eta} = g(\eta, \dot{\eta}, 0, 0) \quad (\text{III.10})$$

a une position d'équilibre en 0, localement asymptotiquement stable.

L'hypothèse 1 étant vérifiée, l'existence d'une solution (probablement non-unique) d'une telle équation, ayant des conditions initiales arbitraires et un contrôle continu par

morceaux, les autres hypothèses sont nécessaires pour des raisons techniques. L'hypothèse 2 est introduite pour éviter les effets de pic déstabilisant. L'hypothèse 3 signifie que (III.9), ayant comme sortie ε , est localement à minimum de phase.

Comme dans le cas du manipulateur (III.3), le système (III.9) opère dans un milieu incertain. Le terme

$$f(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) = f^{nom}(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) + f^b(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) \quad (III.11)$$

Probablement déstabilisant, est décomposé en une composante nominale f^{nom} , connue a priori, et un gain borné mal connu f^b dont les composantes $f_j^b, j = 1, \dots, m$ sont globalement bornées

$$|f_j^b(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})| \leq N_j \quad (III.12)$$

Par des constantes connues a priori $N_j > 0$. De plus, les deux fonctions f^{nom} et f^b sont supposées continues par morceaux. Le contrôleur quasi-homogène suivant (III.6), (III.7), est présenté

$$u(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) = -f^{nom}(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) - \alpha \text{sign} \xi - \beta \text{sign} \dot{\xi} - H \xi - P \dot{\xi} \quad (III.13)$$

$$H = \text{diag}\{h_j\}, P = \text{diag}\{p_j\}, \alpha = \text{diag}\{\alpha_j\}, \beta = \text{diag}\{\beta_j\}$$

avec

$$N_j < \beta_j < \alpha_j - N_j$$

$$h_j, p_j \geq 0, j = 1, \dots, m \quad (III.14)$$

Pour stabiliser localement le système incertain (III.9), (III.11), (III.12). La notation diag représente une matrice diagonale sign de dimension appropriée, $\text{sign} \xi$ où

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)^T$ est cette vectrice colonne. $(\text{sign} \xi_1, \dots, \text{sign} \xi_m)^T$.

Dans la suite, on montre que le contrôleur présenté (III.13), (III.14) assure la convergence du système incertain (III.9) vers la dynamique équivalente $\xi = \dot{\xi} = 0$ en temps fini avec les Propriétés désirées du système bouclé

Théorème III.1

Supposons que les hypothèses 1-3 sont satisfaites, et soit le système (III.9), (III.11) bouclé par le retour (III.13) sous les conditions (III.12) et (III.14). Alors, le système

bouclé (III.9), et (III.13)-(III.14) est localement asymptotiquement stable [14].

Démonstration : le système en boucle fermée (III.9), (III.13) est représenté comme suit

$$\begin{cases} \ddot{\eta} = g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \zeta) \\ \dot{\xi}_j = \zeta_j \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

$$\dot{\zeta}_j = f_j^b(\eta, \dot{\eta}, \xi, \zeta) - \alpha_j \text{sign} \xi_j - \beta_j \text{sign} \zeta_j - h_j \xi_j - p_j \zeta_j, j = 1, \dots, m \quad (\text{III.16})$$

Ce Théorème étant applicable au système (III.15)-(III.16), le système admet une solution locale en présence de perturbations globalement bornées (III.12). Montrons que toute solution de (III.15), (III.16) est globalement continue à droite

Tout d'abord, pour $j \in (1, \dots, m)$, aucun mouvement n'apparaît sur les axes $\xi_j = 0$ et $\zeta_j = 0$ sauf sur leur intersection $\xi_j = \zeta_j = 0$. En effet, si $\xi_j(t) = 0$ pour une trajectoire de (III.15)-(III.16), alors (III.15) donne $\zeta_j(t) = 0$ sur la trajectoire. D'autre part, si $\zeta_j(t) = 0$ pour une Trajectoire de (III.15)-(III.16) et en tenant compte de (III.14), la seconde équation de (III.16) n'est plus satisfaite pour $\xi_j \neq 0$. Ensuite, calculons la dérivée temporelle de la fonction

$V_j(\xi_j, \zeta_j) = \alpha_j |\xi_j| + \frac{1}{2} (h_j \xi_j^2 + \zeta_j^2)$, $j = 1, \dots, m$, le long des trajectoires de (III.16). en tenant compte de (III.12), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(\xi_j, \zeta_j) &= \alpha_j \zeta_j \text{sign} \xi_j + h_j \xi_j \zeta_j + \zeta_j \{ f_j^b(\eta, \dot{\eta}, \xi, \zeta) - \alpha_j \text{sign} \xi_j - \beta_j \text{sign} \zeta_j - h_j \xi_j - p_j \zeta_j \} \\ &= -[\beta_j - f_j^b(\eta, \dot{\eta}, \xi, \zeta) \text{sign} \zeta_j] * |\zeta_j| - p_j \zeta_j^2 \\ &\leq -(\beta_j - N_j) |\zeta_j| \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Sauf le long de l'axe $\xi_j = 0$ où la fonction $V_j(\xi_j, \zeta_j)$ n'est pas dérivable. Puisque le régime de glissement n'apparaît pas sur $\xi_j = 0$ mais uniquement sur l'intersection de $\xi_j = \zeta_j = 0$ où $\dot{V}_j(\xi_j, \zeta_j) = 0$, l'inégalité (III.17) est toujours satisfaite $\forall t$.

Selon (III.14), la solution du sous-système (III.16) satisfaisant (III.12) est uniformément bornée par rapport à t . Tenant compte de l'hypothèse 2, on s'assure que toutes les solutions possibles du système incertain (III.12), (III.15), (III.16) restent bornées sur tout intervalle de temps fini.

Les composantes $f_j^b(\eta, \dot{\eta}, \xi, \zeta)$, $j = 1, \dots, m$ étant globalement bornées et en vertu de (III.14) tout sous-système (III.16) est similaire à celui considéré dans la Section II, et est donc globalement stable en temps fini, pour toutes perturbations satisfaisant (III.12). Donc, à partir d'un certain temps fini, le système bouclé (III.15), (III.16) évolue sur la dynamique équivalente $\xi_j = \zeta_j = 0$ où le comportement est décrit par la dynamique des zéros (III.10).

Enfin pour compléter la démonstration, il reste à noter, d'après l'hypothèse 3, que la dynamique équivalente (III.10) est localement asymptotiquement stable. Celle-ci, couplée à la stabilité en temps fini locale uniforme de (III.16), assure que le système asservi (III.15), (III.16) est localement asymptotiquement Uniformément stable. La preuve du théorème est alors complète.

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la synthèse d'une commande quasi-homogène des systèmes mécaniques. En premier lieu, nous avons donné le principe de cette commande, et après nous avons appliqué cette technique de commande à un système mécanique sous actionné dont l'objectif est de le stabiliser autour d'une position d'équilibre instable.

Chapitre IV

Application au chariot pendule inversé

IV.1. Introduction

Les concepts théoriques présentés dans le chapitre précédent vont maintenant s'appliquer sur le chariot-pendule inversé. Le système utilisé dans cette simulation numérique est le même système qui se trouve au LAGIS (Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal), constitué d'un moteur linéaire en translation suivant un axe de guidage et d'un pendule pesant libre en rotation [16].

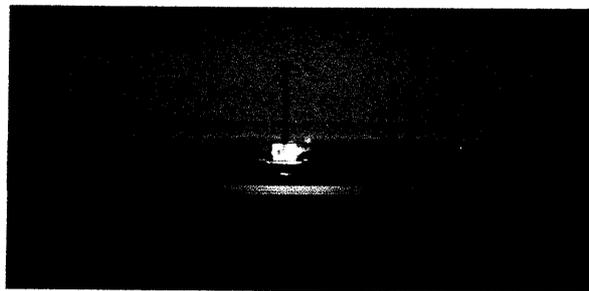


Figure. IV. 1. Pendule inversé situé au LAGIS

IV.2 Stabilisation locale d'un pendule inversé par commande quasi-homogène

Dans cette section la commande quasi-homogène est utilisée pour stabiliser localement le pendule inversé autour de sa position d'équilibre instable tout en forçant le chariot à converger en une position finale désirée [16] [17]. Rappelons tout d'abord les équations du pendule inversé (I.37)

Comme il en a été discuté au chapitre III, l'idée est de trouver un difféomorphisme transformant le système en une forme normale (III.9). Pour cela, on présente le changement de coordonnées

$$\eta = x - \frac{4}{3}l\varrho(\theta), \quad (\text{IV.1})$$

avec

$$\varrho(\theta) = \ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right), |\theta| < \frac{\pi}{2}. \quad (\text{IV.2})$$

Alors, le système d'équations (I.37) est transformé en 2 chaînes d'intégrateurs où l'entrée de commande n'agit que sur la seconde

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ -(g + \frac{4}{3}l \frac{\dot{\theta}^2}{\cos\theta}) \tan\theta \\ \dot{\theta} \\ \frac{3\sin\theta((M+m)g - ml\cos\theta\dot{\theta}^2)}{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3\cos\theta}{D} \end{bmatrix} (\tau - \psi + \omega_1) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{ml\cos\theta}{0} \\ \frac{3(M+m)}{mlD} \end{bmatrix} (\varphi - \omega_2) \quad (\text{IV.3})$$

On voit que les termes φ et ω_2 ne satisfaisant pas la condition de recouvrement, influencent le sous-système $(\eta, \dot{\eta})$ de la forme normale (IV.3). Ces termes n'ont pas été traités dans la partie théorique (chapitre III, section III.3), on verra par la suite que le réglage des paramètres du contrôleur permet d'atténuer leurs effets.

IV.2.1 Conception de la commande [1]

Une sortie fictive ξ est choisie afin que le sous-système $(\eta, \dot{\eta})$ avec $\varphi = \omega_2 = 0$ soit à minimum de phase par rapport à cette sortie.

$$\xi = \tan\theta - \lambda_1\eta - \lambda_2\dot{\eta}, \quad (\text{IV.4})$$

Avec λ_1 et $\lambda_2 > 0$

En tenant compte de (IV.1), (IV.2) et (IV.4), les variables d'état θ et x convergent vers l'origine lorsque $\eta, \dot{\eta}$ et ξ tendent vers zéro. Donc, si on génère un régime de glissement sur $\xi = 0$, l'hypothèse que le sous-système $(\eta, \dot{\eta})$ est à minimum de phase implique la stabilisation asymptotique de x et θ . Le problème revient alors à la construction d'une commande à structure variable garantissant la convergence en temps fini de ξ vers zéro.

En dérivant deux fois ξ , on obtient

$$\ddot{\xi} = \mu + p + u, \quad (\text{IV.5})$$

avec

$$\begin{aligned}
\mu(\theta, \dot{\theta}) &= 2 \frac{\tan\theta}{\cos^2\theta} \dot{\theta}^2 + \left[\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{8l\lambda_2\theta\tan\theta}{3\cos\theta} - \frac{\lambda_2\varphi_v}{ml\cos\theta} \right] \\
&\quad \left[\frac{3[(M+m)g - m\cos\theta\dot{\theta}^2]\sin\theta - 3\cos\theta\psi(\dot{x}) - 3\frac{M+m}{ml}\varphi(\dot{\theta})}{D} \right] \\
&\quad + \lambda_1 \left(g + \frac{4}{3}l \frac{\dot{\theta}^2}{\cos\theta} \right) \tan\theta + \lambda_2 \left(g + \frac{4}{3}l \frac{\dot{\theta}^2(1+\sin^2\theta)}{\cos\theta} \right) \frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} \\
&\quad - \left(\frac{\lambda_1}{ml\cos\theta} + \frac{\lambda_2\dot{\theta}\tan\theta}{ml\cos\theta} \right) \varphi(\dot{\theta}) - \frac{\lambda_2}{ml\cos\theta} \dot{\varphi}_{\text{Dahl}}(\dot{\theta}), \\
u &= \left[\frac{3ml + 8ml^2\lambda_2\dot{\theta}\sin\theta - 3\lambda_2\cos\theta\varphi_v}{mlD\cos\theta} \right] \tau, \tag{IV.6}
\end{aligned}$$

et le terme incertain

$$\begin{aligned}
(ml\cos\theta)p &= \left[\frac{ml}{\cos\theta} + \frac{8ml^2\lambda_2\dot{\theta}\tan\theta}{3} - \lambda_2\varphi_v \right] \left[\frac{3\cos\theta}{D} \omega_1 + \frac{3(M+m)}{mlD} \omega_2 \right] \\
&\quad + (\lambda_1 + \lambda_2\dot{\theta}\tan\theta)\omega_2 + \lambda_2\dot{\omega}_2 \tag{IV.7}
\end{aligned}$$

Étant données les contraintes physiques du système, le gain λ_2 est choisi suffisamment petit pour assurer que $3ml + 8ml^2\lambda_2\dot{\theta}\sin\theta - 3\lambda_2\cos\theta\varphi_v \neq 0$ dans (IV.8). La dynamique du sous système $(\eta, \dot{\eta})$ est donnée par

$$\ddot{\eta} = - \left(g + \frac{4}{3}l \frac{\dot{\theta}^2}{\cos\theta} \right) (\xi + \lambda_1\eta + \lambda_2\dot{\eta}) + \frac{1}{ml\cos\theta} (\varphi - \omega_2). \tag{IV.8}$$

Notons que (IV.5), (IV.8) est une forme régulière similaire à (III.7), (III.8) lorsque $\varphi = \omega_2 = 0$. On présente la loi de commande u suivante :

$$u = -\mu(\theta, \dot{\theta}) - \alpha_1 \text{sign}(\xi) - \beta_1 \text{sign}(\dot{\xi}) - h\xi - p\dot{\xi}, \tag{IV.9}$$

ce qui donne

$$\tau = \frac{mlD\cos\theta(-\mu(\theta, \dot{\theta}) - \alpha_1 \text{sign}(\xi) - \beta_1 \text{sign}(\dot{\xi}) - h\xi - p\dot{\xi})}{[3ml + 8ml^2\lambda_2\dot{\theta}\sin\theta - 3\lambda_2\cos\theta\varphi_v]} \tag{IV.10}$$

Supposons que $\omega_1, \omega_2, \dot{\omega}_2$ et $\dot{\theta}$ sont bornés. Alors P est une perturbation satisfaisant la condition de recouvrement (théorème II.1), uniformément bornée par Δ , i.e. $|p| < \Delta$ pour tout t, θ et $\dot{\theta}$. En posant

$$\Delta < \beta_1 < \alpha_1 - \Delta \text{ et } h, p \geq 0, \quad (\text{IV.11})$$

Le contrôleur quasi-homogène (IV.12), (IV.13) assure la stabilité uniforme en temps fini du système $(\xi, \dot{\xi})$.

IV.2.2 Résultats de Simulations

Pour illustrer l'efficacité de la commande quasi-homogène, des simulations numériques ont été faites sur le pendule inversé [1]. Les valeurs numériques suivantes sont utilisées :

$$M = 3.4 \text{ kg}, m = 0.147 \text{ kg}, l = 0.175 \text{ m}, \psi_v = 8 \text{ N.s/m}, \varphi_v = 0.0015 \text{ N.m.s/rad}$$

$$\psi_c = 6.5 \text{ N}, \quad \varphi_c = 0.00115 \text{ N.m}, \quad \lambda_1 = 0.2 \text{ m}^{-1}, \quad \lambda_2 = 0.25 \frac{\text{s}}{\text{m}} \cdot \text{rad}$$

$$h = 60 \text{ rad/sec}^2, \quad p = 15 \text{ rad/sec}^2, \quad \sigma_\theta = 50 \text{ N.m/rad}, \quad \sigma_x = 10000 \text{ N/m}.$$

IV.2.2.1 Résultat de Simulations sur le pendule inversé sans frottement

Les simulations ont été faites sans frottements et sans perturbations (non-matching), avec les conditions initiales suivantes $(x(0), \dot{x}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)) = (0\text{m}, 0\text{ms}^{-1}, 0.8\text{rd}, 0\text{rds}^{-1})$.

Pour illustrer le grand domaine d'attraction $(\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[)$ du contrôleur. Les résultats sont présentés dans les figures suivantes

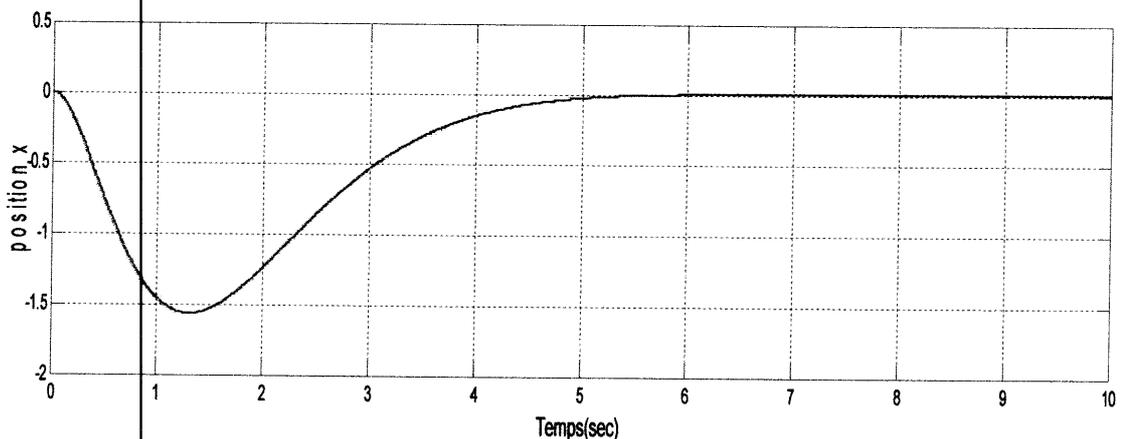


Figure. IV.2. Position de chariot(m)

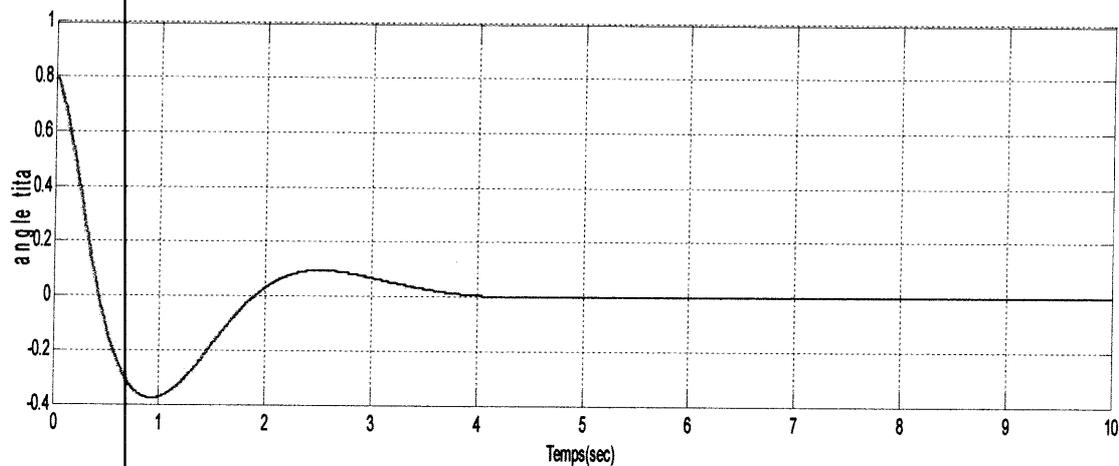


Figure.IV.3. Angle θ de la tige (rad)

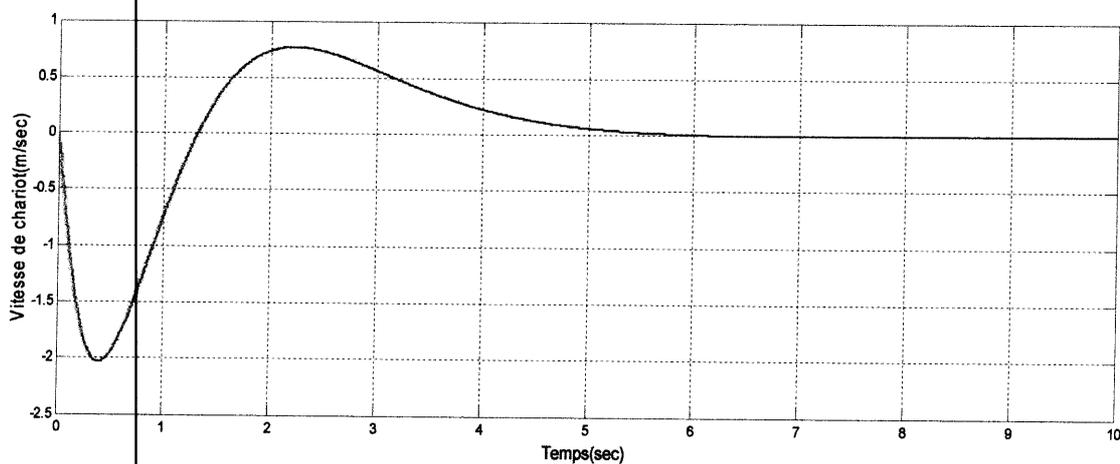


Figure. IV.4. Vitesse de chariot (m/sec)

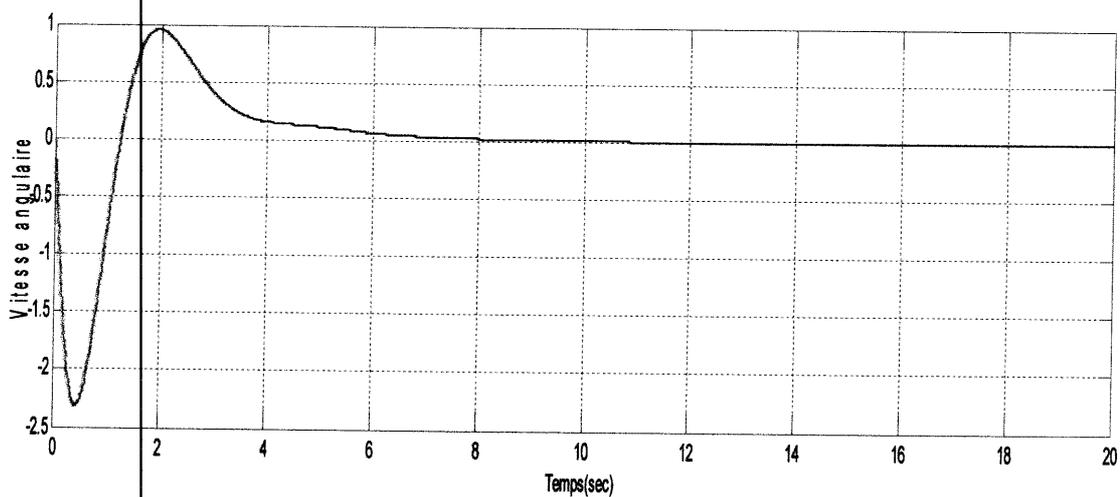


Figure.IV.5. Vitesse angulaire de la tige (rad/sec)

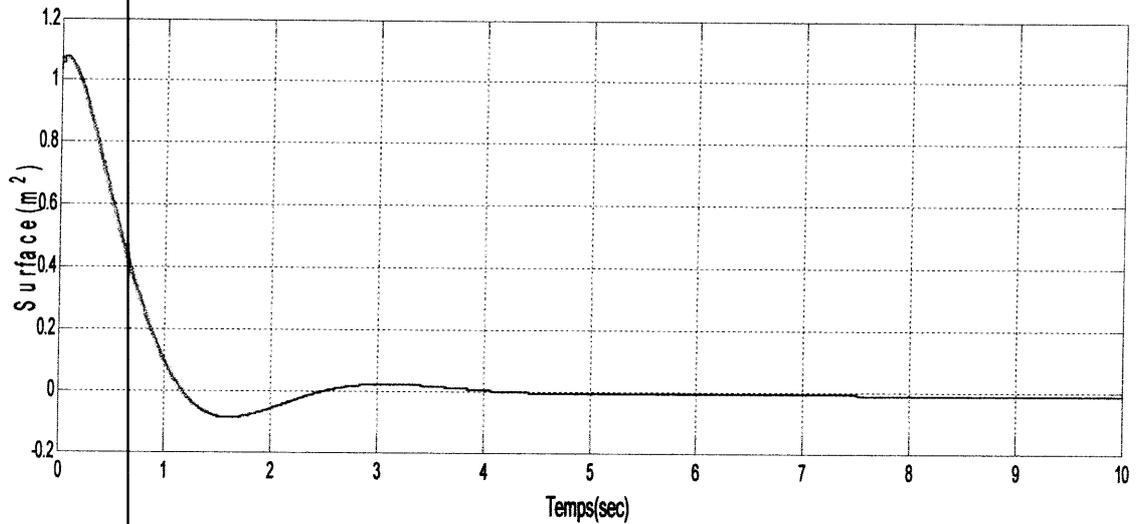
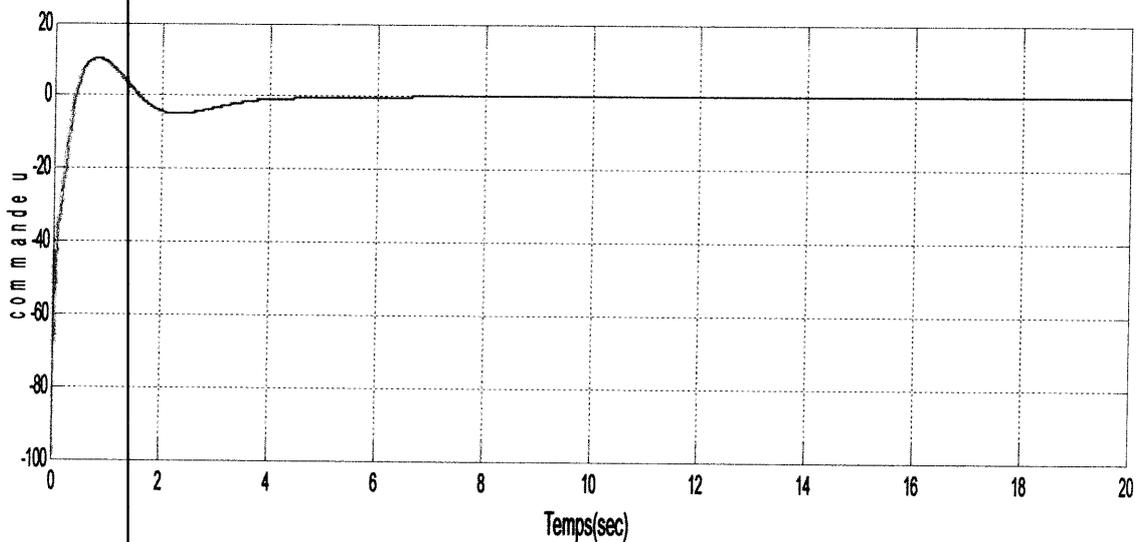
Figure. IV.6. Surface (m^2)

Figure.IV.7. Commande u (volt)

Commentaires sur les résultats

D'après ces figures on remarque les bonnes performances (la stabilité et la robustesse) avec une commande lisse et bornée.

IV.2.2.2 Résultats de simulations sur le pendule inversé avec des perturbations satisfaisant la condition de recouvrement

Nous avons appliqué notre commande sur le pendule inversé ayant des frottements satisfaisant la condition de recouvrement (matching condition) sur le pendule, en réglant les paramètres $\lambda_1 = 0.2$ et $\lambda_2 = 0.25$. Les résultats sont présentés dans les figures suivantes

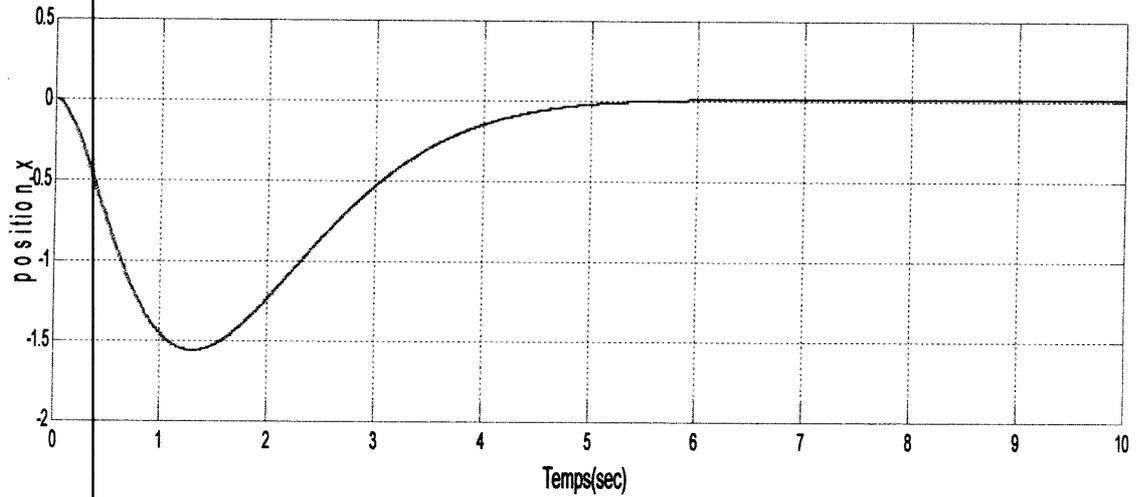


Figure. IV.8. Position de chariot(m)

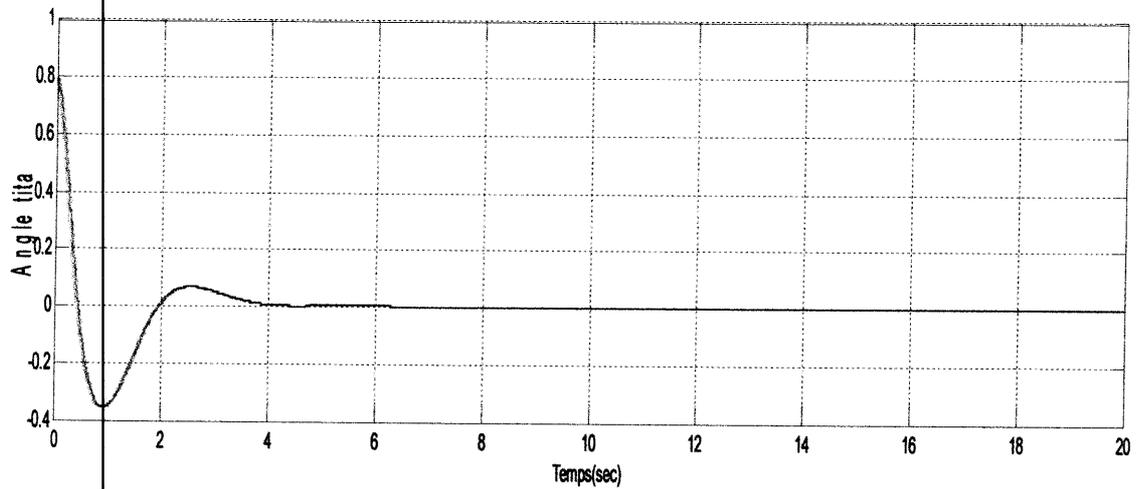


Figure.IV.9. Angle θ de la tige (rad).

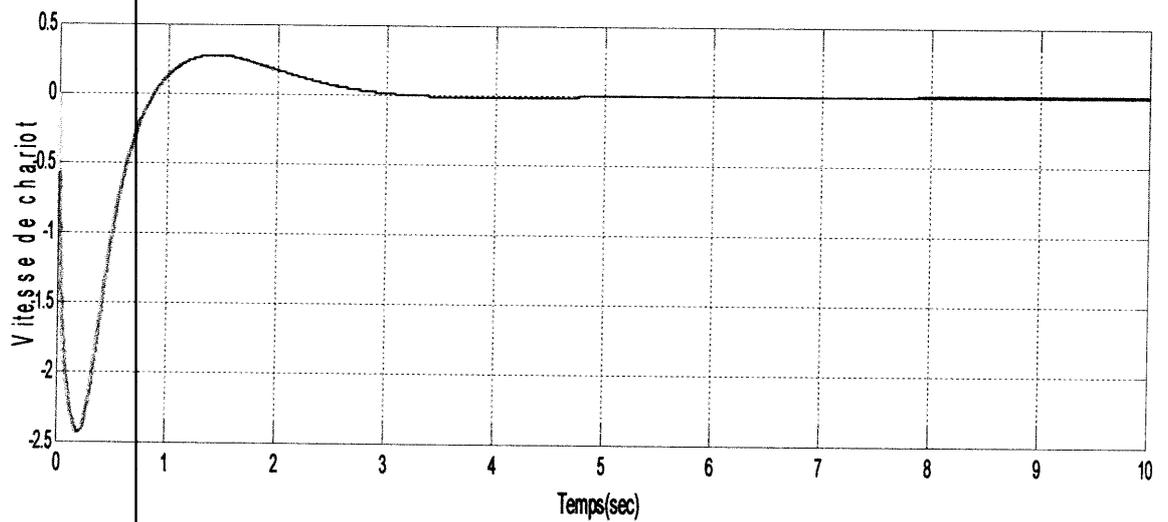


Figure. IV.10. Vitesse de chariot (m/sec)

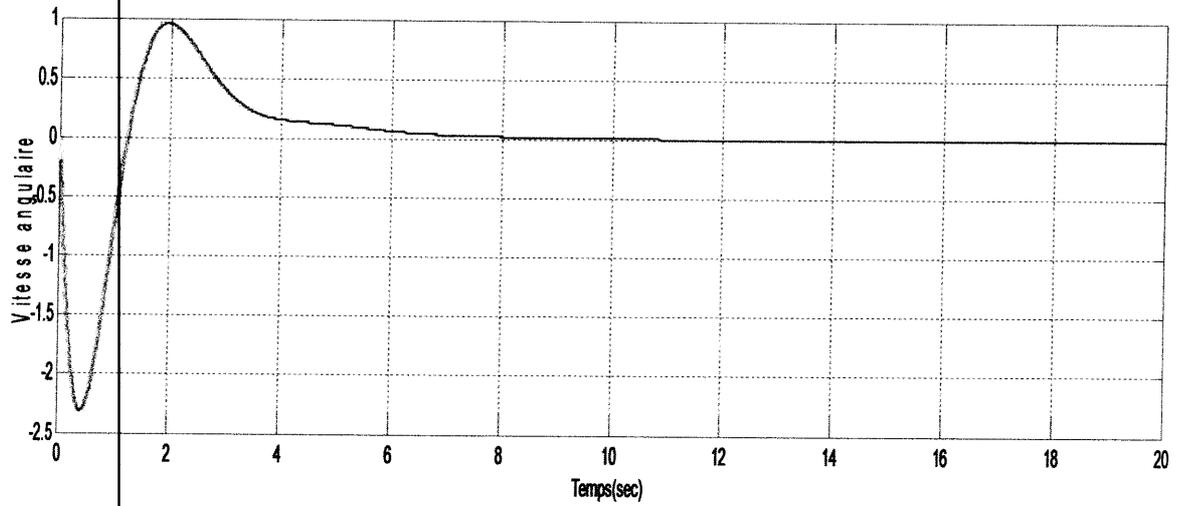


Figure.IV.11. Vitesse angulaire de la tige (rad/sec)

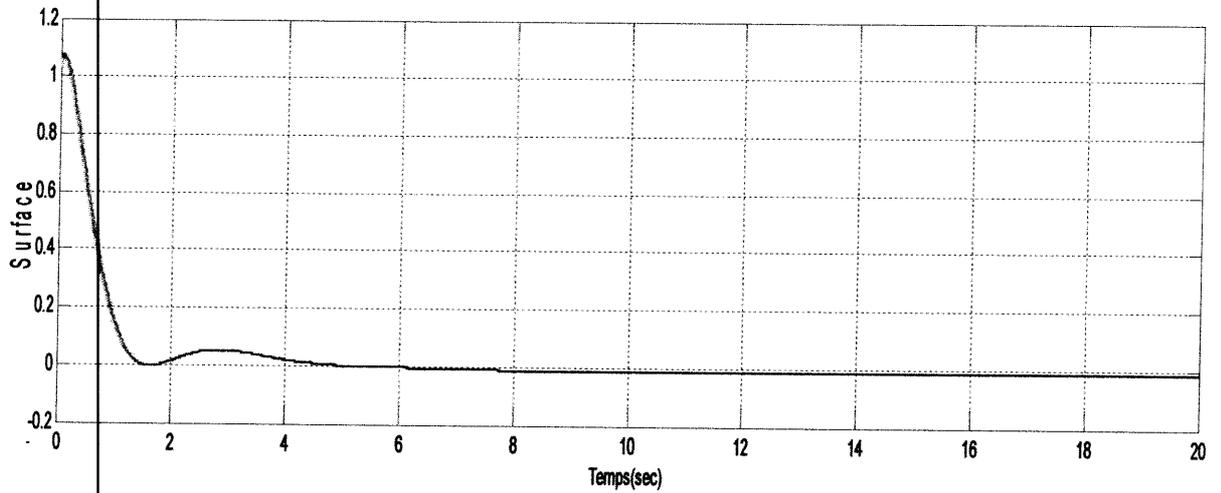


Figure. IV. 12.Surface (m²)

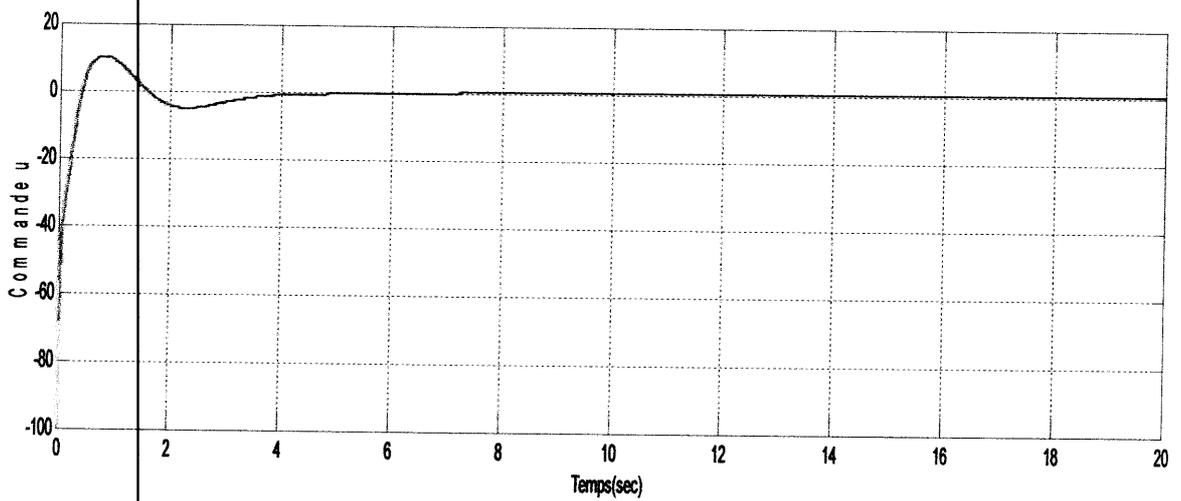


Figure.IV.13. Commande (volts)

Commentaires sur les résultats

D'après ces figures on remarque les bonnes performances (la stabilité et la robustesse) avec une commande lisse et bornée malgré la présence des perturbations (matching) appliqué sur le pendule inversé.

IV.2.2.3 Résultats de Simulations du pendule inversé avec des perturbations satisfaisant la condition de recouvrement (matching condition) et des perturbations ne satisfaisant pas la condition de recouvrement (non-matching condition)

Pour mettre en évidence la robustesse du contrôleur, des perturbations ne satisfont pas la condition de recouvrement (non-matching condition). Les résultats sont présentés dans les figures suivantes

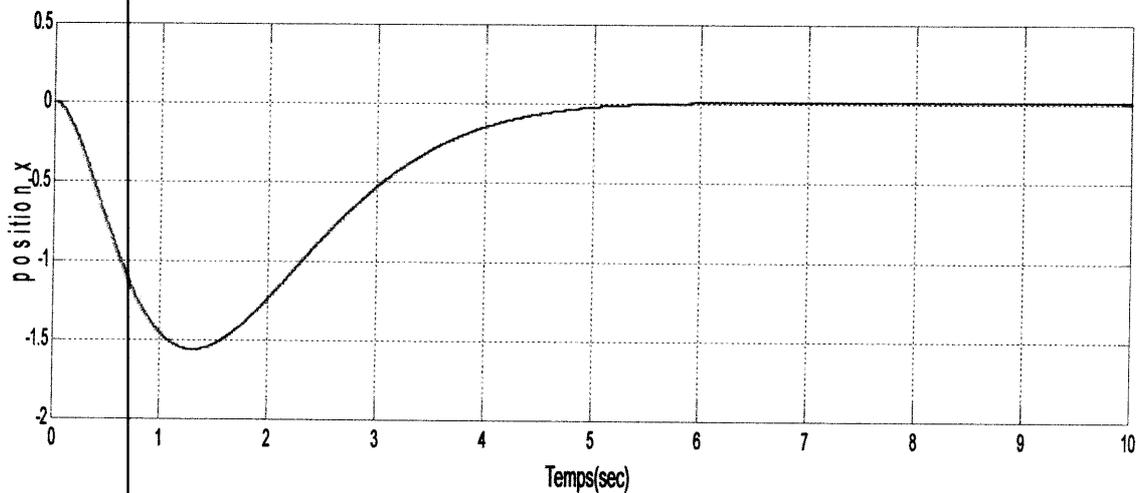


Figure.IV.14.Position de chariot.

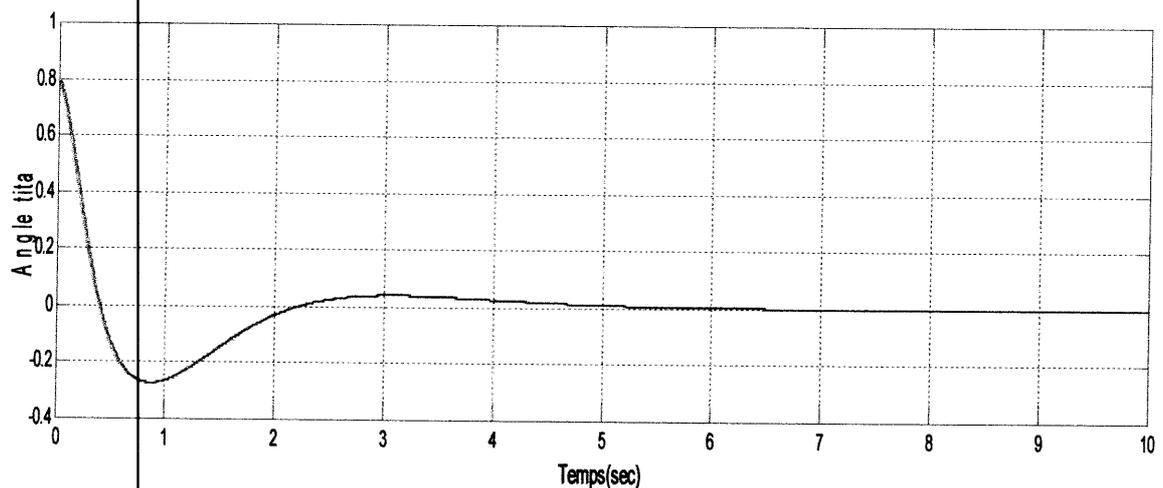


Figure.IV.15. Angle θ de la tige (rad).

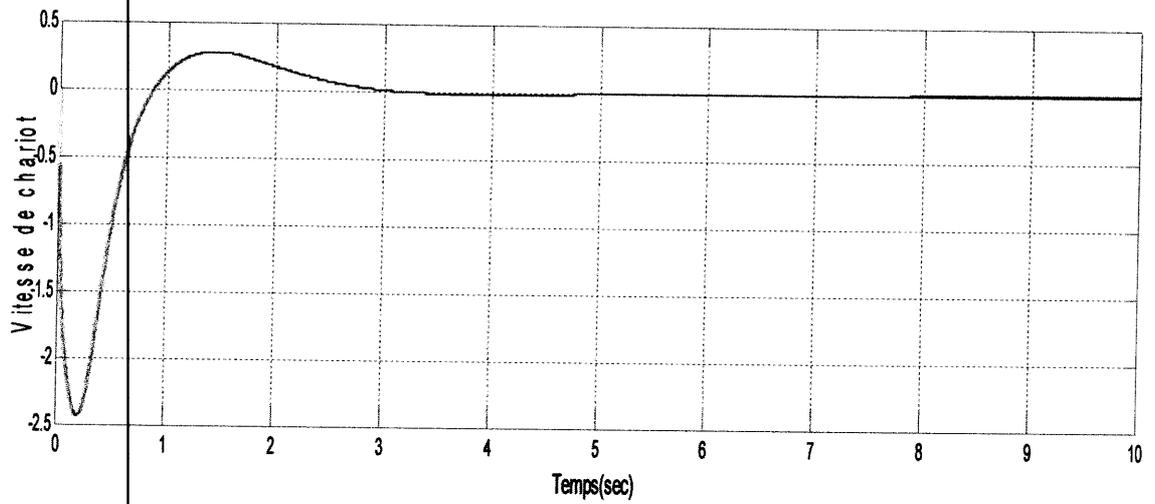


Figure. IV.16. Vitesse de chariot (m/sec)

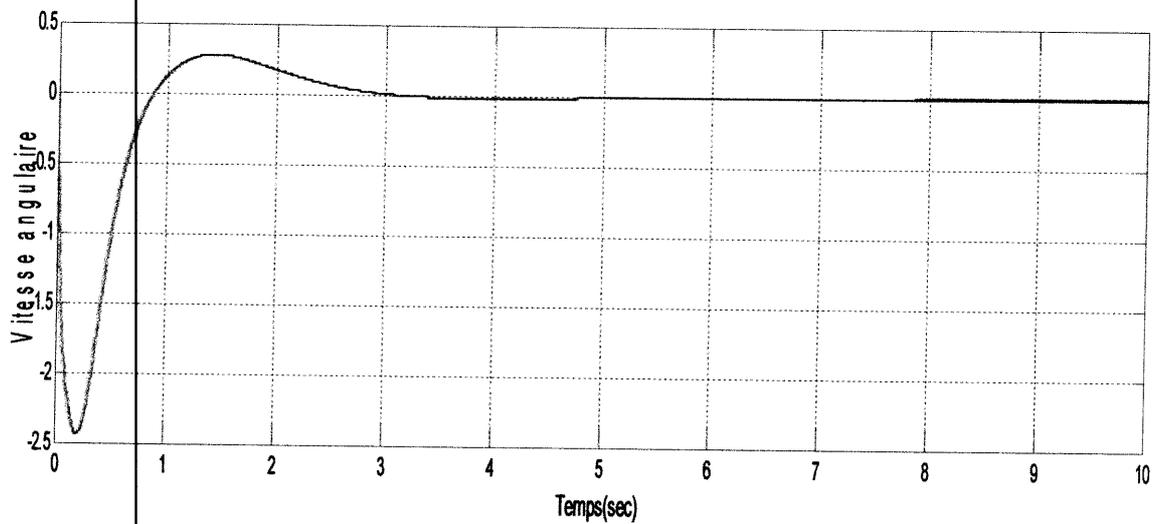


Figure. IV.17. Vitesse angulaire de la tige (rad/sec).

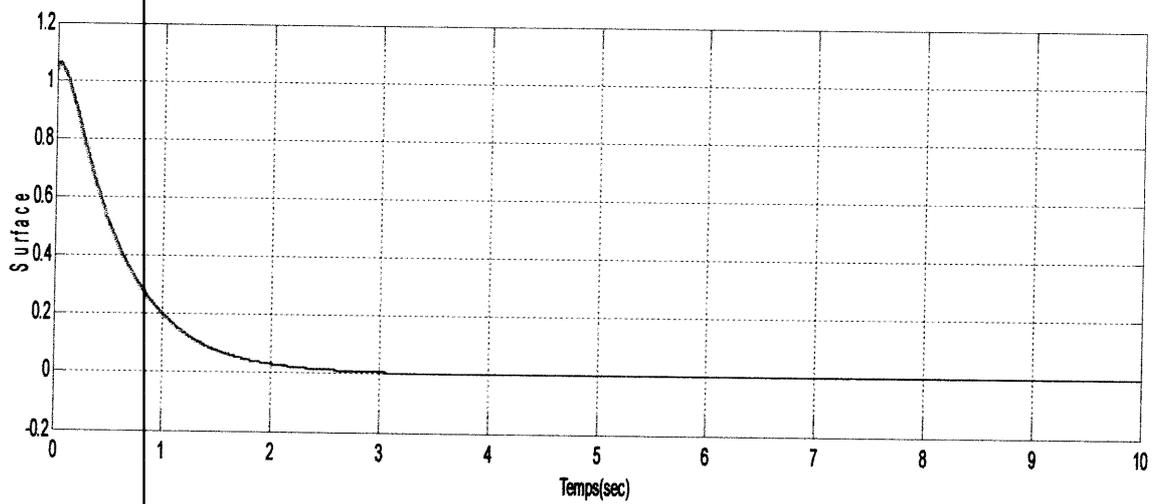


Figure. IV.18. Surface (m²)

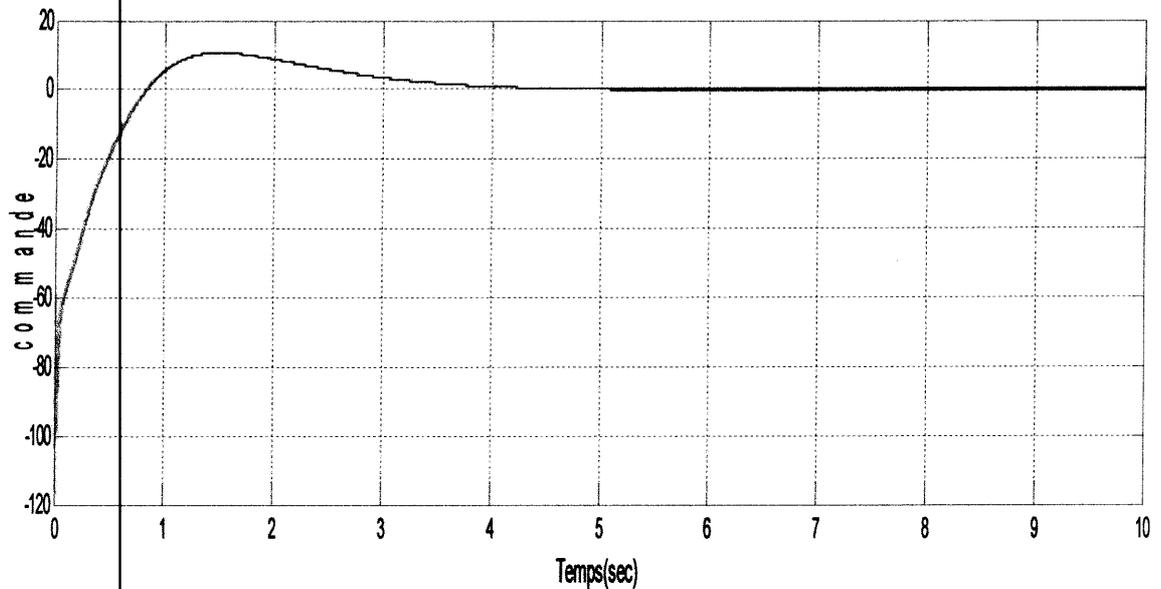


Figure.IV.19.Commande (volts).

Commentaires sur les résultats

D'après ces figures on remarque les bonnes performances (la stabilité et la robustesse) avec une commande lisse malgré la présence des perturbations (matching) et des perturbations (non-matching) appliqué sur le pendule inversé.

IV.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la commande quasi-homogène afin de stabiliser le pendule inversé à son point d'équilibre instable.

En premier lieu, nous avons étudié la stabilité locale d'un pendule inversé en appliquant la par commande quasi-homogène. Nous avons effectué un changement de base sur la représentation d'état pour transformant le système en forme régulière. enfin pour illustrer l'efficacité de la commande quasi-homogène, des simulations ont été faites sur le pendule inversé premièrement sans frottement et après avec des perturbations (matching condition) et enfin avec des perturbations (matching condition) et des perturbations (non-matching condition).

Ces résultats nous ont montré les bonnes performances (stabilité, robustesse) de cette commande.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié la stabilité des systèmes mécaniques sous-actionnés. A cet effet, nous nous sommes servis de la commande par mode glissant et la commande quasi-homogène.

En premier lieu, nous avons donné une description de quelques systèmes mécaniques sous-actionnés, nous avons rappelé les concepts permettant de concevoir les modèles décrivant leurs dynamiques.

Par la suite, La commande des systèmes en mode glissant d'ordre un présente, en général, l'inconvénient majeur du phénomène de chattering. Pour atténuer ou éliminer celui-ci, des solutions ont été présentées en remplaçant le terme discontinu (fonction signe) par une fonction continue (tangente hyperbolique, saturation etc ...) et une méthode de commande par modes glissants d'ordre supérieur basées sur la théorie de l'homogénéité et l'ordre de glissement. La commande par MGOS est basée sur la variable de glissement et le rejet des discontinuités de la commande vers les dérivées d'ordre supérieur. Les résultats de simulation à été effectué sur le pendule simple montré les bonnes performances (la stabilité, la robustesse vis-à-vis des perturbations)

Finalement, la synthèse d'une commande quasi-homogène a été présentée pour la stabilisation asymptotique des systèmes mécaniques sous-actionnés, opérant dans un milieu incertain, ici lié à la présence de frottements mal modélisés. La synthèse étudiée présente une alternative intéressante des modes glissants standard.

Pour stabiliser de tels systèmes autour d'une position d'équilibre instable, une sortie fictive du système doit être choisie de telle sorte que la dynamique équivalente correspondante est localement asymptotiquement stable. Ensuite, les performances désirées du système bouclé sont assurées par l'application d'une commande quasi-homogène annulant la sortie fictive et assurant la convergence des trajectoires du système vers la dynamique équivalente. Les teste de simulation a été effectué sur le pendule inversé dans les trois cas (sans frottement, ensuit avec des perturbations (matching condition) et enfin avec des perturbations (matching condition) et des perturbations (non-matching condition)) a montré les bonnes performances et la bonne robustesse.

A l'issue de ce travail, ce mémoire ouvre de nouvelles perspectives de recherche telles que

- La mise en œuvre expérimentale de commande quasi-homogène
- Introduire des observateurs à mode glissant d'ordre supérieur.

Bibliographie

- [1] RIACHY Samer, «Contribution à l'estimation et à la commande de systèmes mécaniques sous-actionnés» Thèse Doctorat, Ecole Centrale de Lille, 2008
- [2] Deghboudj Iman « commande des systèmes non linéaires par mode glissant d'ordre supérieur » Mémoire magister, Université constantine1, 2013
- [3] ZATLA Hicham, «Génération de trajectoire optimale pour les systèmes mécaniques»Mémoire magister, Université Abou BekrBelkaïd, Tlemcen 2012.
- [4] M. W. Spong.« The singup control problem of the acrobot». IEEE Control Systems Magazine,15 (1):49–55, 1995.
- [5] I.Boiko, L. Fridman, A. Pisano, et Usai. «Analysis of chattering in system with second order sliding modes». IEEE Transactions on Automatic Control, vol 52, no, 11,pp, 2085-2102, 2007.
- [6] A Hamzaoui, N Essounbouli et J Zaytoon, “FuzzySliding Mode Control for Uncertain SISO Systems”, Processing of IFAC Conf. on Intelligent Control Systems et Signal ICONS'03, pages 233–238, 2003.
- [7] Floquet.T. « Contributions à la commande par mode glissant d'ordre supérieur». Thèse de doctorant, Université de sciences et de technologies de Lille, 2000.
- [8] K. Young, V. Utkin, et O. Özgüner. «A control engineer's guide to slidingmode control». IEEE Transactions on Control Systems Technology, 7:328–342, 1999
- [9] H. Bühler, «Réglage par mode de glissement », traité d'électricité, 1ère édition, presses,1991.
- [10] Utkin,VI,«sliding modes in control and optimization».springer,berlin,1992.
- [11] Levant, A,«sliding order and sliding accuracy in sliding mode control». International journal of control,vol 58,no6,pp 1247-1263,1993.

- [13] http://fr:Wikipedia.org/wiki/Fonction_homog
- [14] A. Levant. «Universal SISO sliding-mode controllers with finite-time convergence». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9):1447-1451, 2001.
- [15] Samer Riachy, Thierry Floquet, Jean-Pierre Richard. «Stabilisation de systèmes mécaniques sous-actionnés par commande quasi-homogène». *e-STA, Revue électronique Science et technologies de l'Automatique, SEE*, 2007
- [16] S. Riachy, Y. Orlov, T. Floquet, R. Santiesteban, and J. P. Richard. «Second order sliding mode control of underactuated mechanical systems i : Local stabilization with application to an inverted pendulum». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18, issue 4: 529–543, 2007.
- [17] A. Shiriaev and A. Fradkov. «Stabilization of invariant sets for nonlinear systems with applications to control of oscillations». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 11:215–240, 2001.