

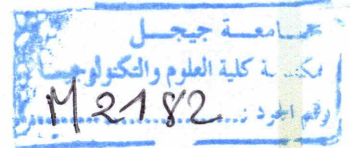
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE JIJEL



*Faculté des Sciences et de la Technologie*  
*Département d'électrotechnique*



**Mémoire**

*De Fin d'Etudes pour l'obtention du Diplôme*  
*de Master en Electrotechnique*  
*Option : Electromécanique*



**Thème**

**Etude analytique et numérique  
d'une machine asynchrone à rotor massif**

**Réalisé par :**

Mr. Hamoud Rabah  
Mr. Kemmache Karim

**Encadré par :**

Mr. Ammar Boulassel

**Promotion: Juin 2015**

## ***Remerciements***

*La Louange est à Allâh, le Seigneur des mondes. Et que la prière et le salut soient sur celui qu'Allâh a envoyé en miséricorde pour l'univers, ainsi que sur sa famille, ses compagnons et ses frères jusqu'au Jour de la Rétribution.*

*Nous voulons remercier tout d'abord Allâh, le tout puissant qui nous a donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce modeste travail.*

*Nous tenons à formuler notre gratitude et notre profonde reconnaissance à l'égard de notre promoteur Mr. Ammar Boulassel qui a supervisé ce travail de recherche. Son soutien, sa disponibilité, sa patience, sa compréhension, ainsi que ses conseils judicieux tant lors de nos recherches que lors de l'écriture de ce mémoire. Ses connaissances et ses jugements nous ont permis d'acquérir des compétences essentielles en recherche.*

*Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants, qui nous ont donnés les bases de la science, sans oublier d'exprimer nos remerciements au **Chef du Département d'Électrotechnique.***

*Nos remerciements aux **membres du jury** qui nous ont fait l'honneur d'accepter de lire et de juger ce mémoire.*

*Nous remercions l'ensemble des **collègues et amis** qui nous ont aidés et supportés durant ces dernières années. Et Nous remercions aussi toute personne ayant participé de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.*

*Nous voudrions exprimer un remerciement spéciale à **nos proches et nos frères** pour leurs conseils au long de notre vie.*

*Enfin, ce travail ne voudrait rien dire sans remercier **nos parents** pour leur dévouement incommensurable, qui nous ont toujours soutenus et poussés à donner le meilleur de nous-mêmes ; pour l'éducation qu'ils nous ont offerte et pour leurs appuis inconditionnels tout au long de notre vie.*

## Notations

$\mu$	Perméabilité du matériau ferromagnétique utilisé au rotor	$H/m$
$\mu_0$	Perméabilité du vide ( $4\pi 10^{-7}$ )	$H/m$
$\mu_r$	Perméabilité relative	
$\sigma$	Conductivité électrique du matériau ferromagnétique	$\Omega^{-1}.m$
$\rho$	Résistivité du matériau ferromagnétique	$\Omega/m$
$\vec{A}$	Potentiel vecteur magnétique	$VS/m$
$\vec{B}$	Vecteur induction magnétique	$T$
$\vec{E}$	Vecteur champ électrique	$V/m$
$\vec{H}$	Vecteur champ magnétique	$A/m$
$\vec{D}$	Vecteur déplacement électrique	$c/m^2$
$\vec{M}$	vecteur aimantation magnétique	$A/m$
$\vec{T}$	Vecteur électrique	$V$
$\Delta$	Opérateur Laplacien	$1/m^2$
$V_s$	Tension simple d'une phase statorique (tension d'alimentation)	$V$
$\vec{J}_s$	Vecteur densité de courant (densité superficielle de courant à la surface du stator)	$A/m$
$e$	Epaisseur de l'entrefer	$M$
$g$	Glissement	
$I$	Courant électrique	$A$
$j$	Tel que $j^2 = -1$	
$k_b$	Coefficient de bobinage	
$L$	Langueur utile de rotor	$m$
$N$	Nombre de spire par pole et par phase	
$P$	Nombre de pair de pole	
$R$	Rayon rotorique	$m$
$R_s$	Rayon statorique	$m$
$r_s$	Résistance d'une phase statorique	$\Omega$
$x_s$	Réactance de fuite d'une phase statorique	$\Omega$
$\delta$	Profondeur de pénétration	$m$
$Ce$	Couple	$N.m$

$\psi$	Flux magnétique	$Wb$
$\omega$	Pulsation électrique	$Rad/s$
$D$	Diamètre du rotor	$m$
$Ep$	Largeur de la rainure	$m$
$Nr$	Nombre de rainure	
$Hp$	Profondeur de la rainure	$m$

## Sommaire

<b>Introduction générale :</b> .....	<b>- 5 -</b>
<b>Chapitre I</b> <u><b>Généralité sur le calcul du champ électromagnétique</b></u>	
Introduction.....	- 8-
1-Equations de Maxwell.....	- 9 -
2-Lois de comportement des milieux et Loi d'Ohm .....	- 9 -
3- Conditions de passage .....	-10 -
4- Formulation du champ électromagnétique : .....	- 11 -
4-1 Formulation en termes du champ : .....	-11 -
4-2 Formulations en termes de potentiels : .....	-13-
4-2-1 Potentiel vecteur magnétique : .....	-13-
4-2-2 Potentiel scalaire magnétique U : .....	-15-
4-2-3 Potentiel vecteur électrique : .....	-15-
5- Méthodes de resolution : .....	-17-
5-1 Méthodes analytiques : .....	-18-
5-2 Méthodes semi-analytiques : .....	-18-
5-2-1 Méthodes des intégrales de frontières : .....	-18-
5-2-2 Méthodes des circuits couplés (MCC) : .....	-18-
5-3 Méthodes numériques : .....	-19-
5-3-1 Méthode des différences finies (MDF) : .....	-19-
5-3-2 Méthode des volumes finis : .....	-19-
5-3-3 Méthode des éléments finis : .....	-19-
Conclusion : .....	-19-
<b>Chapitre II</b> <u><b>Description et modèles des machines asynchrone à rotor massif</b></u>	
Introduction : .....	-21-
1- Machine asynchrone : .....	-22-
2- Eléments de constitution de la machine asynchrone : .....	-22-

2-1 Stator : .....	-23-
2-2 Rotor : .....	-23-
2-2-1 Rotor à cage : .....	-23-
2-2-2 Rotor Bobiné : .....	-24-
2-2-3 Rotor massif : .....	-24-
3- Description des machines asynchrones à rotor massif : .....	-25-
4-Différents types de machines asynchrones à rotors massifs : .....	-26-
4-1 Machine asynchrone à rotor massif lisse : .....	-26-
4-2 Machine asynchrone à rotor massif rainuré : .....	-27-
4-3 Machine asynchrone à rotor massif à cage : .....	-28-
5- Différents modèles de la machine asynchrone à rotor massif : .....	-28-
5-1 Différents modèles de la M.A.R.M lisse : .....	-29-
5-1-1 Modèles déduits de la théorie limite non-linéaire : .....	-29-
5-1-2 Modèle base sur une approximation analytique de la caractéristique B-H : .....	-29-
5-1-3 Modèle multicouches : .....	-29-
5-2 Différents modèles de la M.A.R.M rainuré : .....	-29-
5-2-1 Modèle développé : .....	-30-
5-2-2 Modèle de Dorairaj et Krishna Murty : .....	-31-
5-2-3 Modèle de Rajagopalan et Balarama Murty : .....	-31-
Conclusion : .....	-33-
<b>Chapitre III</b>	<b><u>Etude analytique de la MARM et introduction au MEF</u></b>
Introduction : .....	-35-
1-Modèle d'étude bidimensionnelle d'une machine à rotor massif : .....	-36-
1-1 Hypothèses concernant le stator : .....	-37-
1-2 Résolution en potentiel vecteur : .....	-37-
1-3 Positions de problème : .....	-40-
2- Calcul par la méthode de séparation de variable : .....	-41-
2-1 Hypothèses : .....	-41-
2-2 Résolution de l'équation de poisson dans le rotor : .....	-43-
2-3 Résolution de l'équation de poisson dans l'entrefer : .....	-44-
2-4 Détermination des constantes d'intégration : .....	-45-
2-5 Schéma équivalent : .....	-48-

2-6-1 Calcul du flux dans l'entrefer : .....	-49-
2-6-2 Calcul de l'impédance opérationnelle : .....	-51-
2-6-3 Calcul du courant : .....	-52-
2-6-4 Calcul du couple : .....	-52-
2-6-5 Calcul le facteur de puissance : .....	-53-
3- Méthodes des éléments finis : .....	-53-
3-1 Discrétisation spatiale par éléments finis : .....	-54-
Conclusion : .....	-56-
<b>Chapitre IV</b>	
<u>Simulation et mise en oeuvre informatique</u>	
Introduction : .....	-58-
1-Modèle d'application : .....	-59-
2-Application du modèle analytique : .....	-59-
2-1 Organigramme de calcul : .....	-60-
2-2 Résultats de simulation : .....	-61-
2-3 Interprétation des résultats : .....	-65-
3- Application éléments finis du modèle numérique : .....	-66-
3-1 Étapes de résolution : .....	-66-
3-2 Présentation de la machine étudiée : .....	-67-
3-3 Discrétisation de la géométrie en éléments finis.....	-67-
3-4 Lignes des champs : .....	-68-
Conclusion : .....	-69-
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>-71-</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>-73-</b>

***INTRODUCTION GENERALE***



## INTRODUCTION GENERALE

Les machines électriques à courant alternatif ont fait et font encore l'objet de nombreux travaux de recherche visant à améliorer leur modélisation et optimiser leur conception, ce qui fait du thème de notre travail. Si les modèles externes permettaient d'avoir une approche globale des performances de ces machines par des considérations globales sur les flux, les énergies, les couples etc., ils ne pouvaient donner des résultats appréciables au niveau des grandeurs locales (saturations, échauffements, courants induits, etc.) sans une somme considérable de travail et de réflexion [1].

Dans le monde industriel, il y a une demande de moteurs électriques de grandes puissances à vitesses de rotation élevées (supérieure à 3600tr/min). Ces moteurs, permettant l'entraînement direct, peuvent se substituer aux machines utilisant les énergies fossiles telles que les turbines à vapeur ou à gaz, etc. Ils apportent non seulement une bonne tenue mécanique mais également une compacité, donc une réduction de taille et du poids avec une amélioration du rendement des systèmes entraînés et une réduction de l'entretien [2].

Les développements de l'électronique de puissance apportent des possibilités nouvelles d'alimentation, et de réglage qui trouvent leur application sur tous les types de moteurs, et particulièrement sur les moteurs synchrones et asynchrones. Parmi ces derniers, on cite à côté de la forme d'exécution classique du rotor en tôles feuilletées, la variante en rotor massif.

Cette utilisation de rotor massif dans une machine asynchrone a été envisagée essentiellement dans le cas des moteurs rapides, ou à démarrage fréquent, où la tenue mécanique de rotor doit être particulièrement bonne.

L'étude exhaustive de la diffusion du champ électromagnétique dans le rotor massif est assez complexe. Le champ magnétique pénètre à une certaine profondeur dans le corps du rotor et y induit des courants de Foucault. Ces derniers ne sont plus engendrés dans des conducteurs bien définis comme dans les moteurs classiques, mais dans un milieu continu qui présente en plus une caractéristique magnétique non linéaire. En outre, ces courants se referment avant d'atteindre les extrémités du rotor [3].

L'analyse du comportement de cette machine conduit à la résolution des équations de Maxwell. Ce calcul est extrêmement complexe, et des hypothèses simplificatrices sont nécessaires.

Le but de notre travail est d'établir un modèle, pour calculer les performances électromagnétiques de la machine.

Notre travail s'articule autour de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, on a présenté plusieurs aspects relatifs au calcul du champ électromagnétique (équations, formulations, méthodes de résolutions).

Nous présentons dans le deuxième chapitre, une description des machines asynchrones à rotor massif, l'accent est mis sur certains modèles analytiques permettant l'étude de ces machines.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude analytique du moteur à rotor lisse et rainuré dans l'hypothèse d'une perméabilité constante (isotrope) pour le modèle de moteur à rotor lisse et anisotrope pour le rotor rainuré.

Le dernier chapitre de ce mémoire est réservé à la mise en œuvre informatique des modèles analytiques et numériques et la discussion des résultats obtenus.

# ***CHAPITRE I***

## ***Généralités sur le calcul du champ électromagnétique***

## Introduction

Les modes de présentation usuels dans l'étude du fonctionnement des machines reposent sur l'emploi du modèle de Maxwell caractérisé par les grandeurs physiques, telle que :

- Induction magnétique.
- Densité de courant.
- Potentiel vecteur magnétique.

Cette approche largement utilisée, présente l'avantage d'une compréhension relativement aisée du principe de fonctionnement et d'une mise en équation facile. En effet la portée des équations de Maxwell est immense, en particulier elles expliquent les principes fondamentaux de tout appareil électromagnétique. Ces équations qui ont permis l'établissement des bases théoriques de l'électromagnétisme ont toujours fait l'objet de recherche en vue de leurs résolutions à un large éventail de problèmes d'ordre pratique.

L'établissement et la connaissance des lignes de champs d'un dispositif électromagnétique permettraient de calculer ses performances, donc d'optimiser son dimensionnement.

D'une manière générale, on peut envisager la résolution des équations de Maxwell :

- De manière analytique : ceci n'est limité qu'à quelques cas particuliers géométriques simples (structure 2D, ou 3D axisymétrique).
- De manière semi-analytique : on aperçoit la méthode des intégrales de frontière et la méthode des circuits couplés basés sur le théorème de Green.
- De manière numérique : on distingue les différences finies, les éléments finis et les volumes finis.

Ce chapitre introductif a pour objectif de préparer la suite des chapitres, notamment la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) par la méthode analytique (méthode de séparation de variables).

## 1-Equations de Maxwell

Les phénomènes électromagnétiques qu'on veut étudier au sein des dispositifs électromagnétiques sont régis par les quatre équations aux dérivées partielles de Maxwell [4]. Sous leur forme la plus générale, elles se présentent comme suit :

- Equation de Maxwell-Faraday

$$\text{Rôt}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

- Equation de conservation du flux magnétique

$$\text{Div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{I.2})$$

- Equation de Maxwell-Ampère

$$\text{Rôt}(\vec{H}) = \vec{J} \quad (\text{I.3})$$

- Equation de Maxwell- Gauss

$$\text{Div}(\vec{D}) = \rho \quad (\text{I.4})$$

Avec :

$\vec{B}$  : Induction magnétique, [T]

$\vec{H}$  : Champ magnétique, [A/ m]

$\vec{D}$  : Induction électrique, [As/ m<sup>2</sup>]

$\vec{E}$  : Champ électrique, [V/ m]

$\vec{J}$  : Densité de courant volumique, [A/ m<sup>2</sup>]

$\rho$  : Densité volumique de charge électrique. [C/ m<sup>3</sup>]

## 2-Lois de comportement des milieux et Loi d'Ohm

Les champs vectoriels précédents ne sont pas indépendants les uns des autres, leurs liaisons sont fonctions du milieu où ils règnent [4, 5,6].

Aussi on définit complètement les phénomènes électromagnétiques à l'intérieur d'un milieu, caractérisé du point de vue électromagnétique par :

- une conductivité  $\sigma$
- une perméabilité  $\mu$
- une permittivité  $\varepsilon$

On ajoute aux quatre équations précédentes les lois de comportement des milieux et la loi d'Ohm. Elles sont les suivantes :

- La loi d'Ohm.

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (I.5)$$

- Relation magnétique.

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (I.6)$$

- Relation diélectrique.

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad (I.7)$$

Avec  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ , la perméabilité de matériau et  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ , la permittivité de milieu.

$\mu_0$  : Perméabilité du vide égale à  $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  [H/m] ;

$\mu_r$  : Perméabilité relative.

$\varepsilon_0$  : Permittivité du vide, elle vaut  $10^{-9} / 36 \cdot \pi$  [F/m] ;

$\varepsilon_r$  : Permittivité relative.

### 3- Conditions de passage

Les quatre équations de Maxwell induisent des conditions de passage aux interfaces entre deux milieux électriquement et magnétiquement différents. En les intégrant entre deux points très voisins de part et d'autre d'une surface séparant ces deux milieux, le résultat nous permet de déduire [4,5] :

- La conservation de la composante tangentielle du champ électrique  $\vec{E}$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n} = 0 \quad (I.8)$$

- La conservation de la composante normale de l'induction magnétique  $\vec{B}$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \wedge \vec{n} = 0 \quad (I.9)$$

- La discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique  $\vec{H}$  dû aux courants surfaciques  $\vec{J}_s$ .

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{n} = \vec{J}_s \quad (\text{I.10})$$

- La discontinuité de la composante normale de l'induction électrique  $\vec{D}$  due aux charges surfaciques  $q_s$ .

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \wedge \vec{n} = \vec{q}_s \quad (\text{I.11})$$

Avec :

$\vec{n}$  : Vecteur normal à la surface de séparation entre les deux milieux 1 et 2.

#### 4- Formulation du champ électromagnétique :

Les équations précédentes permettent théoriquement de décrire tous les systèmes quasi-stationnaires dans la plupart des dispositifs utilisés en électrotechnique. Elles sont souvent transformées avant tout traitement numérique pour être appliquées aux problèmes physiques à résoudre, alors une mise en forme préliminaire s'impose afin de réduire le nombre d'inconnus et le nombre d'équation à résoudre. De nombreuses méthodes ont été proposées, utilisant des variables de type potentiel vecteur ou scalaire magnétique ou électrique ou de type du champ [7].

Les formulations proposées dans la littérature scientifique peuvent sommairement être décomposées les variables d'état qu'elles utilisent et qui sont les suivantes :

##### 4-1 Formulation en termes de champ :

En électrotechnique les variations temporelles de la densité de charge électrique et les courants de déplacement peuvent être négligés.

La relation (I.3) liant le champ magnétique à ces sources n'est possible que si :

$$\text{Div}(\vec{J}) = 0 \quad (\text{I.12})$$

Aux équations précédentes, nous ajoutons les propriétés magnétiques et électriques des matériaux qui sont décrites dans les équations (I.5) et (I.6) successivement :

Selon les matériaux utilisés,  $\mu$  et  $\varepsilon$  peuvent être soit des scalaires, modélisant le comportement des matériaux isotropes, soit des tenseurs qui permettent de tenir compte des effets d'anisotropie souvent rencontrés dans les machines électriques.

Pour un problème de la magnétostatique, le champ magnétique est supposé produit par des sources indépendantes du temps, donc  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ , les champs électriques et magnétiques sont découplés, par contre les courants sont non nuls.

L'état magnétique des matériaux peut être défini par l'intensité d'aimantation  $\vec{M}$  :

$$\vec{M} = \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H} = \chi \vec{H} \quad (\text{I.13})$$

Avec :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (\text{I.14})$$

Où  $\chi$  est la susceptibilité magnétique du milieu.

Les équations aux limites entre les deux milieux d'indice 1 et 2, résultent de la formulation superficielle des équations (I.1) et (I.2),  $\vec{n}$  étant le vecteur normal à la surface de séparation orienté de 2 vers 1.

L'équation (I.9) traduit la continuité de la composante normale de l'induction, la relation (I.10) traduit la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique, en présence d'une densité de courant superficielle.

Afin de distinguer le champ inducteur et le champ induit dans le cas de l'aimantation d'un milieu magnétique, nous décomposons le champ  $\vec{H}$  en deux parties :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_i \quad (\text{I.15})$$

$\vec{H}_0$  Est un champ inducteur créé dans le vide par les sources (courants réels ou modèles ampériens dans le cas des aimants).

$\vec{H}_i$  : Champ induit dû à la réaction du matériau magnétique.

Le champ inducteur créé dans le vide par les sources est défini par la loi de Biot et Savart :

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{J} \wedge \text{grad} \left( \frac{1}{\theta} \right) d\theta \quad (\text{I.16})$$

La détermination de  $\vec{H}_0$  peut se faire soit analytiquement ou numériquement en utilisant la relation (I.16), par contre l'évaluation de  $\vec{H}_i$  exige la pré-connaissance de la nature du problème. Pour un problème de la magnétostatique, les équations de Maxwell et les conditions aux limites portant sur  $\vec{H}_i$  sont :



$$\text{Rot}(\vec{H}_i) = 0 \quad (\text{I.17})$$

$$\text{Div}(\mu \cdot \vec{H}_i) = 0 \quad (\text{I.18})$$

$$\vec{n} \wedge (H_{1i} - H_{2i}) = 0 \quad (\text{I.19})$$

$$\vec{n} \cdot (\mu_1 \vec{H}_{1i} - \mu_2 \vec{H}_{2i}) = -\vec{n} \cdot (\mu_1 - \mu_2) \vec{H}_0 \quad (\text{I.20})$$

#### 4-2 Formulations en termes de potentiels :

##### 4-2-1 Potentiel vecteur magnétique :

La relation (I.2) permet de définir une fonction potentielle vecteur magnétique  $\vec{A}$  telle que :

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) \quad (\text{I.21})$$

En absence de courants superficiels, les conditions aux limites suivantes sont vérifiées :

$$\vec{n} \cdot (\text{rot}(\vec{A}_1) - \text{rot}(\vec{A}_2)) = 0 \quad (\text{I.22})$$

$$\vec{n} \wedge \left( \frac{1}{\mu_1} \text{rot}(\vec{A}_1) - \frac{1}{\mu_2} \text{rot}(\vec{A}_2) \right) = 0 \quad (\text{I.23})$$

De la relation (I-1) et en utilisant (I-21), on peut exprimer le champ électrique par :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}(\phi) \quad (\text{I.24})$$

$\phi$  : est un potentiel électrique, il est de nature électrostatique ou électrocinétique, en absence de ce dernier, le champ ( $\vec{E}$ ) est induit uniquement par la variation du champ magnétique, de sorte que :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{I.25})$$

Dans le cas des milieux massifs, il en résulte des courants induits, définis par leur densité :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{I.26})$$

Dans un milieu de perméabilité constante, le potentiel vecteur vérifie donc l'équation :

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = -\sigma\mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{I.27})$$

Pour une définition totale de  $\vec{A}$ , la valeur de sa divergence est supposé nulle :

$$\text{div} \vec{A} = 0 \quad (\text{I.28})$$

La relation (I.28) présente une Jauge de Coulomb, on obtient donc l'équation suivante :

$$\Delta \vec{A} = \sigma\mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{I.29})$$

Cette écriture signifie en fait que chaque composante ( $\vec{A}$ ), soit A vérifiée l'équation :

$$\Delta A = \sigma\mu \frac{\partial A}{\partial t} \quad (\text{I.30})$$

Dans le cas où les grandeurs électromagnétiques sont à variation sinusoïdale par rapport au temps, de pulsation ( $\omega$ ) on aura :

$$\Delta \vec{A}_i = j\omega\sigma\mu \vec{A}_i \quad (\text{I.31})$$

Que nous écrivons :

$$\Delta \vec{A}_i = j\lambda^2 \vec{A}_i \quad (\text{I.32})$$

En posant :

$$\lambda^2 = \omega\sigma\mu \quad (\text{I.33})$$

$\vec{A}_i$  est la représentation complexe de la composante  $A_i$ .

#### 4-2-2 Potentiel scalaire magnétique U :

Dans les milieux où il n'y a pas des courants, et qui vérifie la relation  $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{0}$  on peut définir un potentiel magnétique U tel que :

$$\vec{H} = -\text{grad}(U) \quad (\text{I.34})$$

Si de plus, la perméabilité du milieu est constante, on a aussi :

$$\Delta U = 0 \quad (\text{I.35})$$

Ce potentiel est intéressant lorsqu'on cherche le champ magnétique induit  $\vec{H}_i = -\text{grad } \varphi$ , dû à la polarisation des matériaux :

$$\vec{H}_i = -\text{grad}(\varphi) \quad (\text{I.36})$$

Avec :

$$\Delta \varphi = 0 \quad (\text{I.37})$$

La continuité de  $\varphi$  à la surface de séparation de deux domaines constitue un choix de jauge.

$\varphi$  Vérifie alors les conditions :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (\text{I.38})$$

$$\left( \mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) = (\mu_1 - \mu_2) \vec{H}_0 \cdot \vec{n} \quad (\text{I.39})$$

Ou :

$\vec{H}_0$  : Est défini par l'équation (I.19)

L'utilisation du potentiel scalaire magnétique a l'avantage de limiter le nombre d'inconnues, par contre il n'est utilisable que dans les zones où il n'y a pas de courant.

#### 4-2-3 Potentiel vecteur électrique :

La formulation utilisant le potentiel vecteur électrique procède de la même façon que celle utilisant le potentiel vecteur magnétique dans ce cas on a :

$$\text{div}(\vec{J}) = 0 \quad (\text{I.40})$$

L'équation (I.40) nous permet de définir un vecteur  $\vec{T}$  dont le vecteur densité du courant est :

$$\vec{J} = \text{rot}(\vec{T}) \quad (\text{I.41})$$

$\vec{T}$  est lié au champ magnétique par la relation :

$$\text{rot}(\vec{T}) = \text{rot}(\vec{H}) \quad (\text{I.42})$$

L'équation (I.42) entraîne l'existence d'un potentiel scalaire magnétique  $\Omega$  tel que :

$$\vec{H} = \vec{T} - \text{grad}(\Omega) \quad (\text{I.43})$$

Des relations (I.1) (I.4) (I.5) (I.6) (I.43) on aura :

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{T})) = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} (\mu(\vec{T} - \text{grad}(\Omega))) \quad (\text{I.44})$$

Soit :

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{H})) = -\sigma\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{T} - \text{grad}(\Omega)) \quad (\text{I.45})$$

En tenant compte des relations (I.1) (I.4) (I.43) on a :

$$\text{div}(\text{grad}(\Omega)) = \text{div}(\vec{T}) \quad (\text{I.46})$$

Pour assurer l'unicité de la solution, il faut ajouter une condition sur  $\vec{T}$ .

Pour un choix de jauge  $\text{div}(\vec{T}) = 0$  appelé jauge de Gauss, on obtient :

$$\Delta(\vec{T}) = \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{T} - \text{grad}(\Omega)) \quad (\text{I.47})$$

Avec :

$$\Delta\Omega = 0 \quad (\text{I.48})$$

Un autre choix de jauge, nous permet de découpler  $\vec{T}$  et  $\vec{\Omega}$ , Alors :

$$\text{div}(\vec{T}) = \mu\sigma \frac{\partial \Omega}{\partial t} \quad (\text{I.49})$$

$$\Delta(\vec{T}) - \mu\sigma \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.50})$$

$$\Delta\Omega - \mu\sigma \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.51})$$

Avec les conditions aux limites :

$$\vec{n} \cdot (\text{rot}\vec{T}_2 - \text{rot}\vec{T}_1) = 0 \quad (\text{I.52})$$

$$\vec{n} \wedge \left( \frac{1}{\sigma_2} \text{rot} \vec{T}_2 - \frac{1}{\sigma_1} \text{rot} \vec{T}_1 \right) = \vec{0} \quad (\text{I.53})$$

$$\vec{n} \wedge (\vec{T}_2 - \vec{T}_1 + \text{grad} \vec{\Omega}_1 - \text{grad} \vec{\Omega}_2) = \vec{0} \quad (\text{I.54})$$

$$\vec{n} \cdot (\mu_2 (\vec{T}_2 - \text{grad} \vec{\Omega}) - \mu_1 (\vec{T}_1 - \text{grad} \vec{\Omega}_1)) = 0 \quad (\text{I.55})$$

La continuité de la composante normale de  $\vec{T}$  permet d'écrire :

$$\Omega_1 = \Omega_2 \quad (\text{I.56})$$

$$T_1 = T_2 \quad (\text{I.57})$$

La formulation est intéressante car elle permet d'avoir directement l'induction, par contre, les courants de Foucault s'obtiennent par la dérivation spatiale de la solution.

### 5- Méthodes de résolution :

Le choix d'une méthode de résolution est intimement lié à la géométrie du domaine de résolution et au degré de complexité du problème. Il s'agit de choisir celle qui permet de résoudre le plus facilement possible le problème ; car il n'existe pas une méthode universelle qui pourrait systématiquement résoudre tous les problèmes posés en électromagnétisme [4].

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP), elles sont analytiques, numériques ou mixtes (semi analytique)

#### 5-1 Méthodes analytiques :

C'est la première méthode utilisée, elles consistent à résoudre l'équation différentielle analytiquement avec *la technique de séparation des variables*. Elle est d'emploi restreint à des géométries simples dans une approche monodimensionnelle ou quelquefois dans des problèmes bidimensionnels et tridimensionnels [8].

#### 5-2 Méthodes semi-analytiques :

Ce sont les méthodes semi-analytiques, on distingue la méthode des intégrales de frontières et la méthode des circuits couplés. Elles sont d'une mise en œuvre relativement simple et sont exploitées dans les problèmes de milieux linéaires [4,5].

**5-2-1 Méthodes des intégrales de frontières :**

Elle consiste à discrétiser la frontière du domaine en utilisant le théorème de Green.

Elle est limitée la résolution des systèmes linéaires.

La limitation de la discrétisation aux frontières du domaine nous donne l'avantage de réduction de la place mémoire, surtout pour les systèmes tridimensionnels ou l'air occupe une grande partie du domaine.

Cependant, elle a l'inconvénient de conduire à des systèmes qui possèdent des matrices pleines.

**5-2-2 Méthodes des circuits couplés (MCC) :**

La MCC permet de fournir la solution d'une EDP par une expression intégrale de type déduite de la loi de BIOT et SAVART. Dans ce cas, on associe à la solution, une subdivision de l'inducteur en spires élémentaires.

En appliquant les lois de KIRCHOFF à ces circuits élémentaires, on aboutit à un système algébrique, dont la solution conduit à la distribution des densités de courants.

La MCC peut être couplée à une méthode de discrétisation.

**5-3 Méthodes numériques :****5-3-1 Méthode des différences finies (MDF) :**

C'est une méthode qui résout directement l'équation différentielle. Elle consiste à remplacer le milieu continu dans lequel l'équation est applicable, par un réseau de points auxquels s'applique l'équation discrétisée [4].

**5-3-2 Méthode des volumes finis :**

Le domaine est divisé en un nombre finis d'éléments de volume entourant un point  $p$ , l'équation est intégrée sur chaque élément. Dans cette méthode contrairement à la méthode des différences finies, la variation linéaire de l'inconnu peut être remplacée par sous domaine en fonction de la grandeur.

**5-3-3 Méthode des éléments finis :**

La méthode des éléments finis est bien adaptée à la résolution d'équation aux dérivées partielles sur des domaines de géométrie complexe, linéaire et non linéaire. On cherche tout d'abord, à exprimer à partir du modèle local constitué des équations aux dérivées et des

conditions aux limites, une formulation intégrale qui porte sur le domaine de résolution. Cette présentation intégrale peut se faire à partir de l'une des méthodes, la formulation variationnelle (méthode de Ritz) où la méthode des résidus pondérés ; la première concerne les milieux pour lesquelles on peut exprimer l'énergie du système, tandis que la seconde procédure est plus générale et ne nécessite pas la connaissance de l'expression de cette énergie [4].

**Conclusion :**

Dans cette partie, nous avons explicité en détail, les bases théoriques de la modélisation électromagnétique. Nous rappelons ici, l'essentiel des points évoqués.

D'abord, à l'aide des équations locales de Maxwell, et des conditions de passage entre les différents milieux, nous avons établi l'équation électromagnétique locale à résoudre.

Nous avons présenté en bref les différentes méthodes pour la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles : analytiques, semi-analytiques et numériques existantes. Ces étapes permettent de calculer le champ électromagnétique qui permet à son tour, d'avoir accès aux performances de tout dispositif (couple, puissance, impédance...etc.).

## ***CHAPITRE II***

***Descriptions et modèles de la  
machine asynchrone à rotor  
massif***



**Introduction :**

Il existe des besoins industriels pour de grandes puissances à vitesse élevée qui peuvent être couverts par des machines à courant alternatif alimentées à fréquence variable. Dans la solution synchrone, on rencontre toujours une certaine hétérogénéité du rotor (dissymétrie des machines à reluctance, existence de circuits électriques entraînés). Pour toutes ces solutions, on rencontre une limite mécanique. Une solution possible pour les applications à grande vitesse est alors d'utiliser des machines asynchrones à rotor massif : le fer a le double rôle de canaliser le flux magnétique et de conduire les courants induits [9].

Dans ce chapitre, les éléments de constitution de la machine asynchrone, les types de la machine asynchrone à rotor massif sont décrites, les différentes difficultés d'ordre géométrique, électrique et magnétique sont mentionnées aussi.

Ainsi, on décrit les différents modèles d'étude et structure possible de rotor de la machine.

### 1- Machine asynchrone :

La machine asynchrone (MAS) est un convertisseur électromécanique réversible, le plus souvent. Généralement ce type de machines est plus utilisée en moteur asynchrone (en triphasé). La conversion électromécanique de l'énergie est un processus qui convertit l'énergie de la forme électrique à la forme mécanique. La conversion n'est pas directe, mais plutôt elle nécessite une conversion intermédiaire à la forme magnétique [10].

Les moteurs d'induction triphasés sont les moteurs employés les plus fréquents dans l'industrie. Ils possèdent en effet plusieurs avantages : simplicité, robustesse, prix peu élevé et entretien facile.

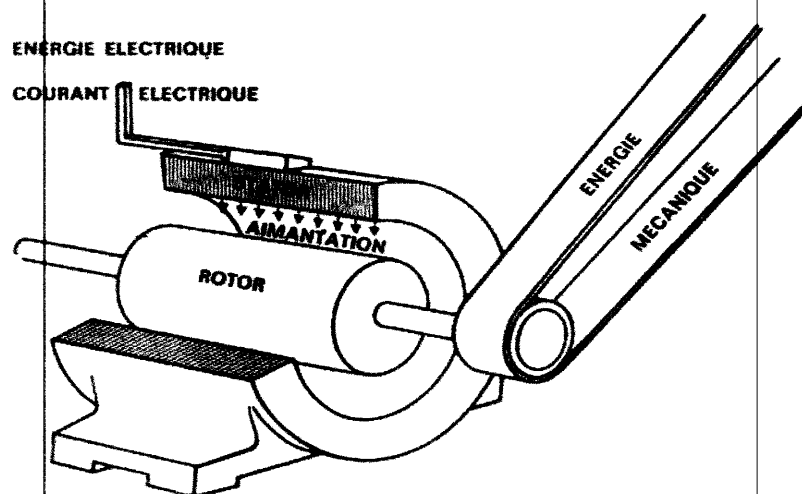


Figure II-1 : Machine asynchrone

### 2- Eléments de constitution de la machine asynchrone :

Le moteur d'induction triphasé (souvent appelé moteur asynchrone triphasé) comprend deux parties principales : un inducteur fixe nommé stator et un induit mobile nommé rotor [10].

#### 2-1 Stator :

C'est la partie fixe de la machine, Le circuit magnétique est un empilement de tôles d'acier découpées, faisant apparaître les différentes encoches statoriques, on isole

habituellement les tôles d'une mince couche de vernis ou de silicate de soude. Le bobinage statorique est constitué de deux parties : les conducteurs d'encoches et les têtes de bobines. Les conducteurs d'encoches permettent de créer dans l'entrefer le champ magnétique à l'origine de la conversion électromagnétique. Quant aux têtes de bobines elles permettent la fermeture des courants en organisant leur circulation, l'objectif étant d'obtenir une répartition des forces magnétomotrices et du flux la plus sinusoïdale possible dans l'entrefer, pour limiter les oscillations du couple électromagnétique.

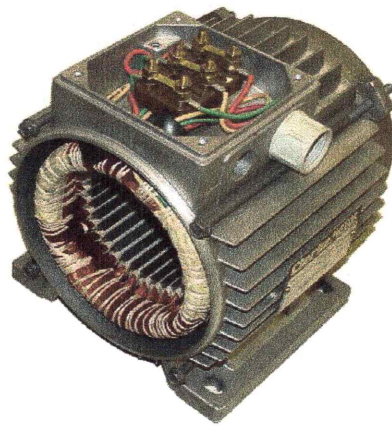


Figure II-2: Stator d'une machine asynchrone

## 2-2 Rotor :

C'est la partie mobile de la machine, il est constitué d'un ensemble de conducteurs mis en court-circuit. On trouve trois types de rotor :

### 2-2-1 Rotor à cage :

La grande majorité des moteurs sont à cages. Dans chaque encoche rotorique est placée une barre. Ces barres sont en cuivre pour les moteurs de forte puissance, et en alliage d'aluminium pour les machines de faible et moyenne puissance. Elles sont réunies à chaque extrémité du rotor par des anneaux réalisant le court-circuit. L'enroulement rotorique ainsi réalisé n'est pas accessible à partir du stator.

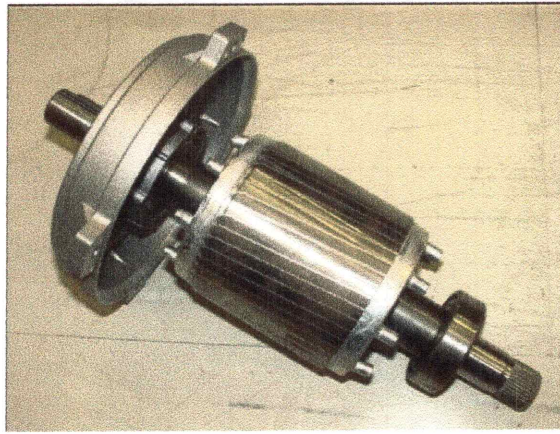


Figure II-3 : Rotor à cage de la machine asynchrone

### 2-2-2 Rotor Bobiné :

Les enroulements rotoriques sont localisés dans les encoches situées à la périphérie du rotor. Ces enroulements sont bobinés de manière à obtenir un enroulement triphasé à « p » paires de pôle. Les bobinages rotoriques sont toujours couplés en étoile, et les trois bornes accessibles sont reliées à la carcasse du stator à l'aide d'un système constitué de trois bagues tournants et de trois balais fixes.

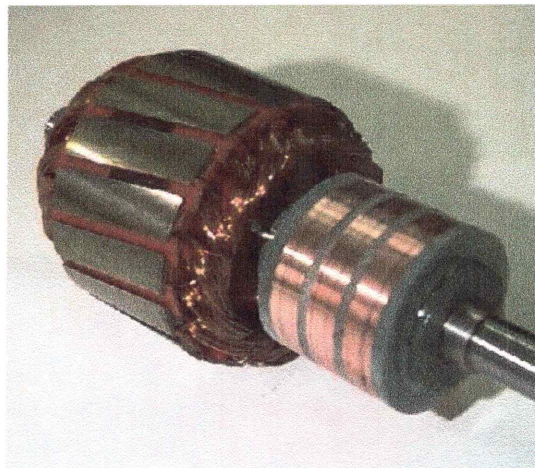


Figure II-4 : Rotor bobiné de la machine asynchrone

### 2-2-3 Rotor massif :

Le rotor est constitué par un cylindre plein non laminé. Les parties massives en fer constituent l'enroulement en court-circuit, par l'effet des courants de Foucault, induits dans la masse métallique.

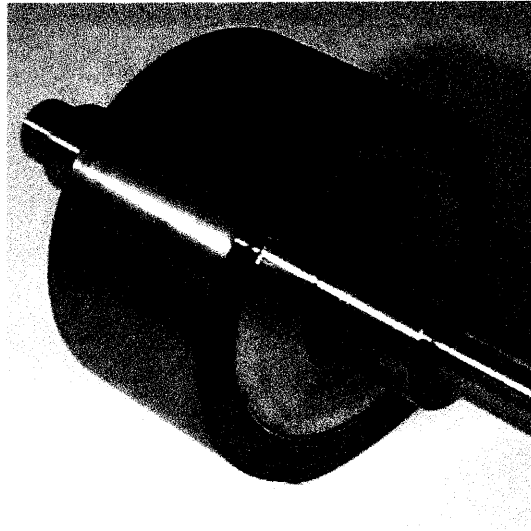


Figure II-5 : Rotor massif de la machine asynchrone

Les rotors massifs utilisés pour les machines asynchrones sont fabriqués le plus souvent en acier et ils présentent des caractéristiques intéressantes tant pour ce qui concerne le comportement vibratoire que du point thermique. La robustesse d'un tel rotor assure d'une part des valeurs élevées des fréquences de résonance à la torsion ou à la flexion, ce qui autorise des vitesses de rotation et des puissances élevées, et d'autre part une capacité calorifique élevée et de ce fait des caractéristiques de démarrage favorable. Les inconvénients du rotor massif résident dans la mauvaise conductibilité électrique du fer rotorique, dans la faible profondeur de pénétration du flux magnétique, du fait de la perméabilité élevée, et de la valeur élevée des pertes qui en résulte [9].

### **3- Description des machines asynchrones à rotor massif :**

Les machines asynchrones à rotor massif sont des dispositifs électromécaniques envisageables pour des puissances élevées (1 – 5 MW) et des vitesses relativement importantes (10000 – 30000 tr/mn) destinées à remplacer les turbines à gaz ou à vapeur pour l'entraînement direct des pompes, des compresseurs ou des ventilateurs [11].

La machine asynchrone à rotor massif possède un stator triphasé identique à celui d'une machine asynchrone classique. Le rotor en forme d'un cylindre plein en acier ferromagnétique, offre de meilleures caractéristiques mécaniques pour des puissances importantes à vitesses assez élevées.

Contrairement au rotor bobiné ou à cage, les courants induits dans le rotor se développent dans un milieu continu non linéaire et la modélisation d'une telle machine est relativement plus complexe.

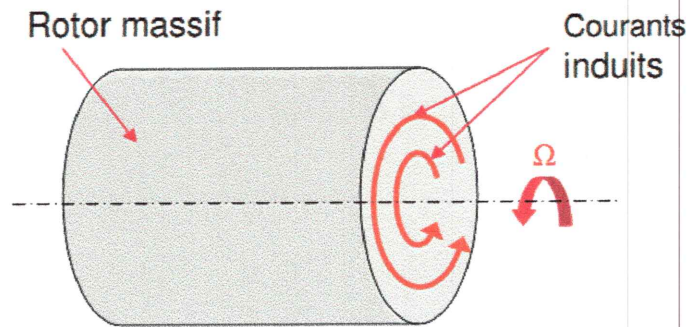


Figure II-6 : Courants induits dans un rotor massif

#### 4-Différents types de machines asynchrones à rotors massifs :

Les rotors de ce type de machines peuvent avoir différentes configurations [12]:

- Rotor massif lisse.
- Rotor massif rainuré.
- Rotor massif avec cage d'écureuil.

##### 4-1 Machine asynchrone à rotor massif lisse :

Dans ce type de machines asynchrones, les courants induits ne sont plus engendrés dans des conducteurs classiques (barres ou bobinage) et guides sur toute la partie active du rotor (figure 7). Ils peuvent donc se refermer avant d'avoir atteint les extrémités du rotor, à la manière des courants de Foucault. Les effets d'extrémités sont très importants pour ce type de structure.

Dans le cas d'un rotor massif, la résistance aux courants rotoriques dépend du glissement d'où des caractéristiques mécaniques différentes de celles des moteurs asynchrones à cage classiques. Le moteur asynchrone à rotor massif lisse offre un bon couple au démarrage. La construction du rotor est simple donc son cout est réduit [13].

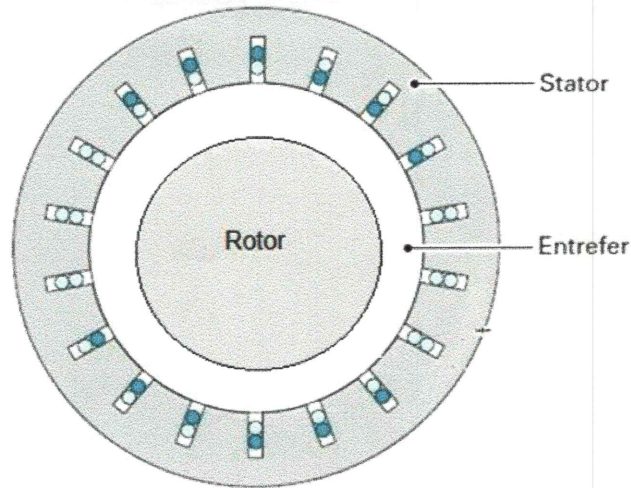


Figure II-7 : Machine asynchrone à rotor massif lisse

#### 4-2 Machine asynchrone à rotor massif rainuré :

La présence des rainures permet de mieux guider les courants induits parallèlement à l'axe de rotation et ainsi de diminuer les effets d'extrémités tout en obligeant les lignes de champs à pénétrer plus profondément dans l'acier rotorique et, donc permet d'augmenter le volume actif du rotor. Ainsi, les pertes superficielles diminuent, le couple, le facteur de puissance et le rendement sont améliorés.

L'étude du fonctionnement d'une machine asynchrone à rotor massif rainuré (figure 8) est complexe. Elle nécessite la résolution des équations de diffusion du champ électromagnétique dans le rotor [13].

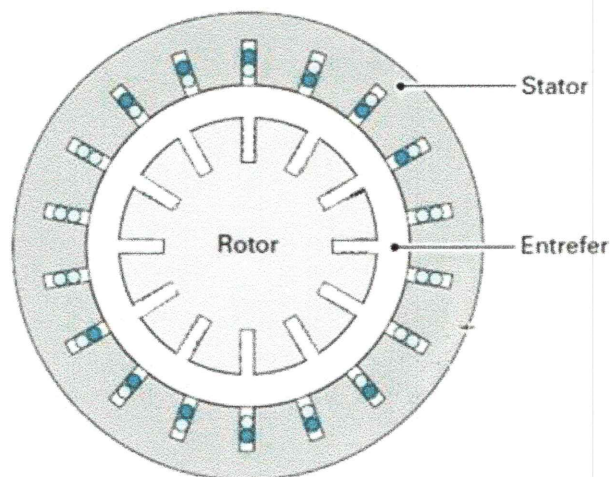


Figure II-8 : Machine asynchrone à rotor massif rainuré

#### 4-3 Machine asynchrone à rotor massif à cage :

Une cage d'écureuil réalisée dans des encoches fermées à l'intérieur du rotor massif (figure 9) permet de supprimer la plupart des problèmes mécaniques puisque le rotor a un comportement beaucoup plus homogène. Néanmoins la fermeture des encoches implique la possibilité pour le flux de se reboucler directement au droit des barres.

Pour affiner le comportement électrique d'une telle machine, il peut être judicieux de concevoir le rotor avec un acier facilement saturable. Ainsi les lignes de flux, d'après avoir saturé l'isthme, contournent l'encoche et créent un courant induit dans les barres. Le problème délicat, lors de cette étude, reste le calcul de la profondeur à laquelle on doit disposer les barres afin d'obtenir un compromis entre les comportements électrique et mécanique de la machine [12].

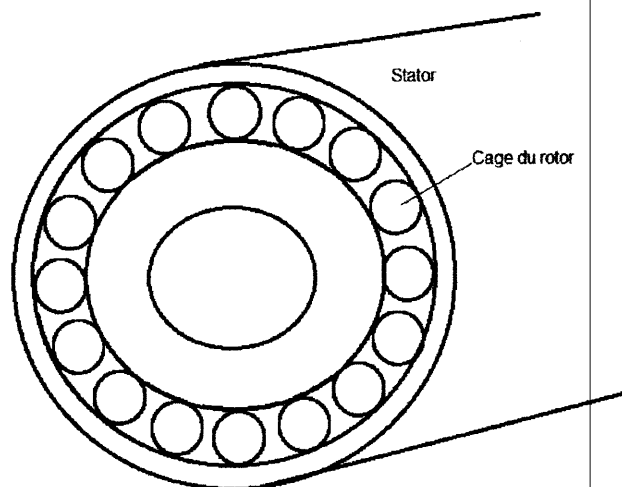


Figure II-9 : Machine asynchrone à rotor massif à cage d'écureuil

#### 5- Différents modèles de la machine asynchrone à rotor massif :

##### 5-1 Différents modèles de la M.A.R.M lisse :

Les principaux modèles analytiques des machines asynchrones à rotor massif lisse sont [13]:

- Les modèles déduits de la théorie limite non-linéaire à une dimension.
- Les modèles basés sur une approximation analytique de la caractéristique magnétique du fer rotorique



- Les modèles semi-analytiques multicouches, associés à la notion de perméabilité complexe non-linéaire.

#### 5-1-1 Modèles déduits de la théorie limite non-linéaire :

La théorie limite non linéaire permet d'expliquer le mécanisme de pénétration du flux dans le fer massif. Son adaptation à deux dimensions afin d'aboutir à une formulation simple de la machine asynchrone à rotor massif exige des hypothèses supplémentaires d'ordre :

-Géométrique

-Magnétique

-Electrique

#### 5-1-2 Modèle base sur une approximation analytique de la caractéristique B-H :

Ce modèle prend en compte le non linéarité du problème de diffusion par l'induction d'une approximation analytique de la caractéristique B-H et des hypothèses simplificatrices de nature :

-Géométrique

-Magnétique

-Electrique

Les recherches concernant l'application de ce modèle aux M.A.R.M ont conduit à des résultats analytiques très complexes [14].

#### 5-1-3Modèle multicouches :

C'est un modèle semi-analytique basé sur la décomposition du rotor en couches tangentielles d'épaisseur constante. Les hypothèses d'ordre géométrique et électriques sont inchangées par rapport au modèle précédent, avec un léger changement dans les hypothèses magnétiques.

#### 5-2 Différents modèles de la M.A.R.M rainuré :

Parmi les modèles approximatifs qui ont été utilisés permettant d'étudier le comportement des machines asynchrone à rotor massif rainuré, nous distinguons [13]:

- Modèle développé.
- Modèle de Dorairaj et Krishna Murty.
- Modèle de Rajagopalan et Balarama Murty.

### 5-2-1 Modèle développé :

Le modèle d'étude est représenté sur la figure (II-10).

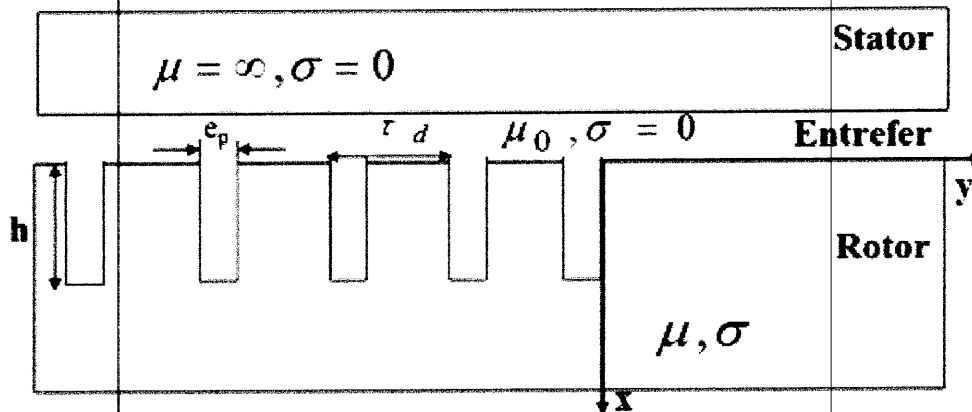


Figure II-10 : Modèle développé

Dans ce modèle, les harmoniques temporels et spatiaux du champ tangentiel au niveau de la frontière stator-entrefer sont négligés. Le stator porte une densité superficielle de courant à répartition sinusoïdale le long de la frontière stator-entrefer, et qui se propage le long de celle-ci.

Les rainures rotoriques, accroissent la circulation du champ suivant l'axe tangentiel.

Dans ce modèle, le pas dentaire est défini comme suit :

$$\tau_d = \frac{\pi \cdot D}{N_{ec}} \quad (\text{II-1})$$

Où :

D : diamètre du rotor.

$N_{ec}$  : Nombre d'encoches.

Le pas polaire est donné par :

$$\tau_p = \frac{\pi \cdot D}{2p} \quad (\text{II-2})$$

Où :

p: le nombre de paires de pôles.

### 5-2-2 Modèle de Dorairaj et Krishna Murty :

Dans ce modèle, nous distinguons deux régions dans le rotor Figure(II-11) :

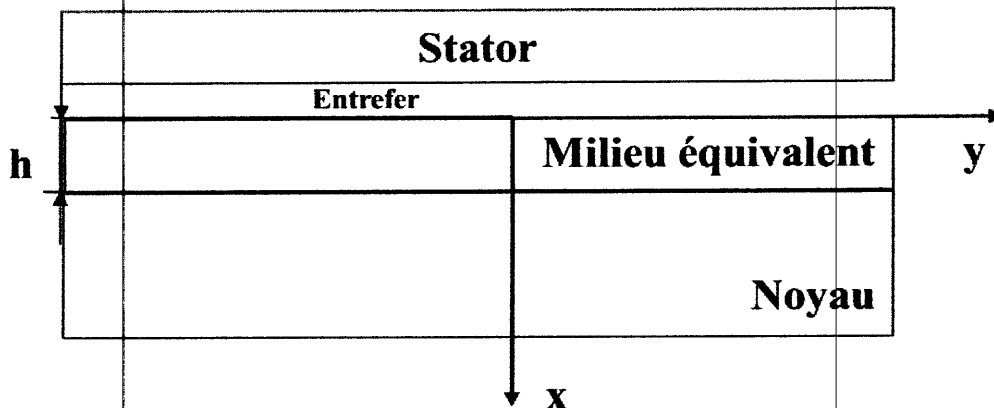


Figure II-11 : Modèle de Dorairaj et Krishna Murty

La zone encochée, constituée par les dents et les rainures, et la zone située plus en profondeur, constituée par la partie centrale massive. Lorsque le nombre de rainures est suffisamment élevé, la zone encochée est remplacée par un milieu équivalent qui tient compte de la présence des encoches, par anisotropie des caractéristiques physiques.

### 5-2-3 Modèle de Rajagopalan et Balarama Murty :

Ce modèle est basé sur simplification du tracé des lignes de champs [15] :

Trace des lignes de champ dans le rotor :

Comme nous l'avons déjà mentionné, la modification de la répartition du courant dû à l'existence des rainures dans le rotor. Le rainurage modifie considérablement la réluctance du circuit magnétique, ce qui se répercute par une amélioration des performances du moteur. Le

trajet des lignes de champ dans le rotor résulte essentiellement du rapport entre le pas dentaire  $\tau_d$  et l'épaisseur de peau  $\delta$  :

$$\triangleright \frac{\tau_d}{\delta} \gg 1$$

Ceux-ci sont possibles par un choix judicieux du pas dentaire  $\tau_d$  comparable au pas polaire  $\tau_p$  et un glissement relativement grand. Dans ce cas, les lignes de champ suivent le contour imposé par les rainures, tandis que le courant reste superficiel (figure 12).

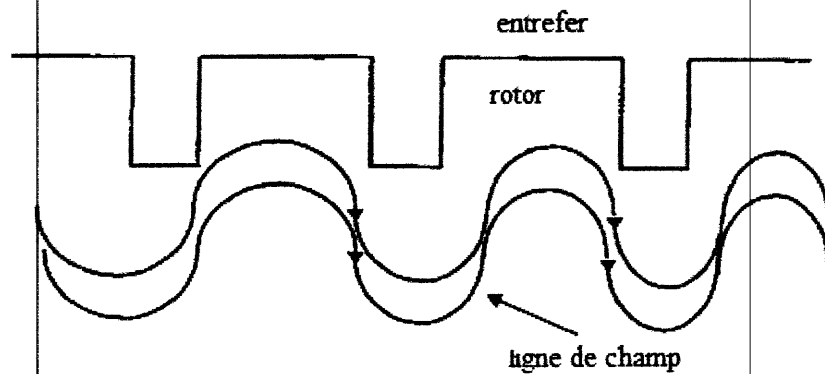


Figure II-12 : Transfert des lignes de champ dans le rotor  $\tau_d \gg \delta$

$$\triangleright \frac{\tau_d}{\delta} \approx 1 :$$

L'adjonction ou l'augmentation du nombre d'encoches perturbe les lignes de champ (Figure II-13).

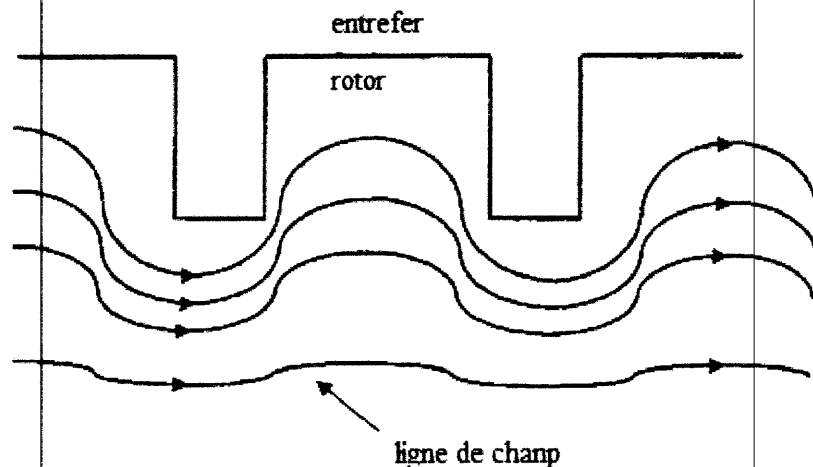


Figure II-13 : Transfert des lignes de champ dans le rotor  $\tau_d = \delta$

$$\triangleright \frac{\tau_d}{\delta} \ll 1 :$$

Cette condition est satisfaite par l'utilisation d'un nombre de rainures important et d'un glissement faible. Les lignes de champ passent en dessous des encoches et la zone encochée se comporte comme une cage facilement pénétrable (Figure II-14).

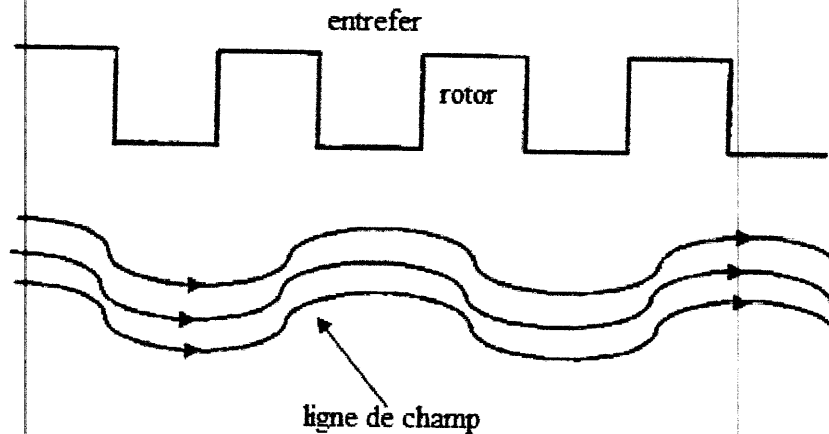


Figure II-14 : Transfert des lignes de champ dans le rotor  $\tau_d \ll \delta$

### Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté une description des machines asynchrones à rotor massif, nous avons décrit surtout les différents types et structures du rotor, et les différents modèles utilisés pour l'étude et l'optimisation des machines asynchrones à rotor massif.

L'aspect théorique a mis en évidence la possibilité d'étudier cette machine suivant plusieurs modèles approximatifs malgré les difficultés d'ordre géométrique, électrique et magnétique.

# ***CHAPITRE III***

***Calcul analytique de la MARM  
et introduction au MEF***

**Introduction :**

Pour améliorer les caractéristiques des moteurs à rotor massif, plusieurs méthodes ont été suggérées telles que : prolongement du rotor ; prévoir des bagues (anneaux) aux extrémités du rotor, ces bagues sont constituées par un très bon matériau conducteur tel que le cuivre ; couvrir le rotor avec une couche très mince composée de cuivre, de fer et de cobalt ou de cuivre, de fer et de Nickel ; creuser des rainures longitudinales parallèles à l'axe du rotor massif [16].

De nombreuses approches analytique et numérique tenant d'expliquer le comportement spécifique des convertisseurs de type M.A.R.M en résolvant l'équation de diffusion [13]. Mais leurs développements exigent beaucoup d'hypothèses pour s'affranchir des difficultés inhérentes à ces machines, difficultés qui sont essentiellement d'ordre géométrique, magnétique et électrique :

- Les difficultés d'ordre géométrique sont liées à l'aspect tridimensionnel des courants induit : des équations différentielles couplées sont associées à des conditions aux limites imposées sur des surfaces non simplement paramétrables en fonction des coordonnées de base.
- Les difficultés d'ordre magnétique sont imputables au comportement non linéaire du fer massif : les équations différentielles sont à coefficients variables, leurs intégrations analytiques est presque impossible.
- Les difficultés d'ordre électrique découlent de la nature des sources : le second membre des équations différentielles doit s'exprimer simplement en fonction de ces sources, qui peuvent être à tension ou à courant imposé, et qui sont localisées dans des bobinages à répartition discrète.

Ce chapitre a donc pour objectif essentiel, l'étude analytique du moteur asynchrone à rotor massif dans l'hypothèse d'une perméabilité constante (isotrope) pour le modèle de moteur à rotor lisse et anisotrope pour le rotor rainuré.

À la fin de ce chapitre, on fait un résumé sur la méthode des éléments finis dont ces éléments sont des triangles de premier ordre.

### 1-Modèle d'étude bidimensionnelle d'une machine à rotor massif :

Le problème de diffusion du champ électromagnétique dans le rotor d'une machine asynchrone à rotor massif devrait être traité en trois dimensions toute fois, sur une longueur importante du rotor, dans la partie centrale de la machine, on peut considérer que le champ est situé dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation-oz- et que la densité des courants induits est parallèle à cet axe [15].

#### 1-1Hypothèses concernant le stator :

La méthode de calcul concerne un modèle théorique qui vérifie les hypothèses suivantes :

- La perméabilité du stator est infinie, ainsi que sa résistance moyenne suivant l'axe de la machine par suite de son feuillage.
- On admet que la répartition spatiale de l'enroulement statorique est sinusoïdale, et que chaque encoche peut être remplacée par une densité de courant superficielle équivalente, placée au droit de l'isthme d'encoche, cette dernière étant remplacée par un matériau de perméabilité infinie. La densité superficielle doit être égale au champ tangentiel qui existait avant cette transformation. L'intérêt de ce processus est de ramener des sources extérieures des sources localisées.

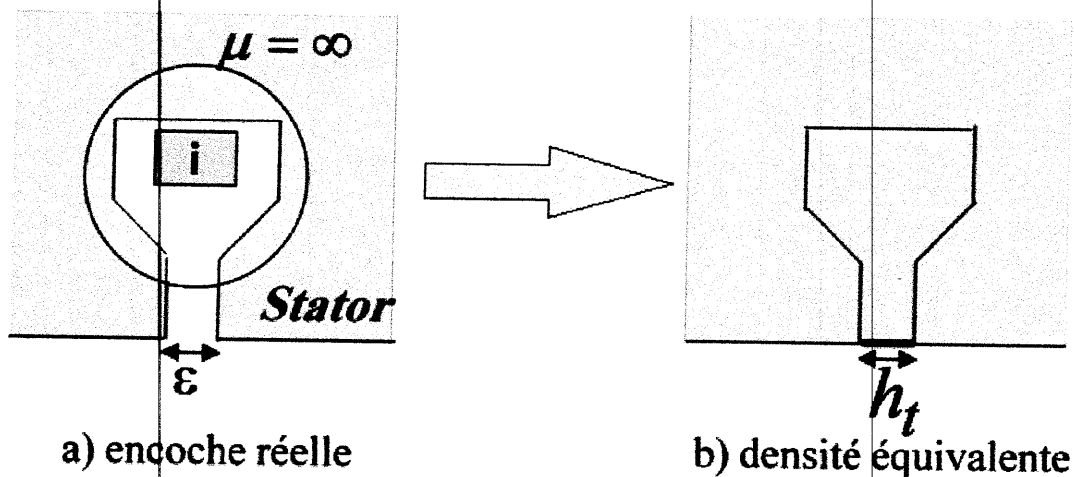


Figure III-1 : définition de la densité de courant Superficielle équivalente à une encoche.

En pratique, on peut considérer que le champ tangentiel au niveau de l'isthme d'encoche coïncide avec sa moyenne, de sorte que l'on place une densité.



$$J_s = \langle h_t \rangle = \frac{i}{\varepsilon} \quad (\text{III-1})$$

$i$  : le courant total dans l'encoche

$\varepsilon$  : l'ouverture de l'encoche

On peut définir la force électromagnétique par encoche par la moyenne du champ électromoteur au niveau de l'isthme d'encoche. On est ainsi conduit à un schéma électrique équivalent par encoche [17].

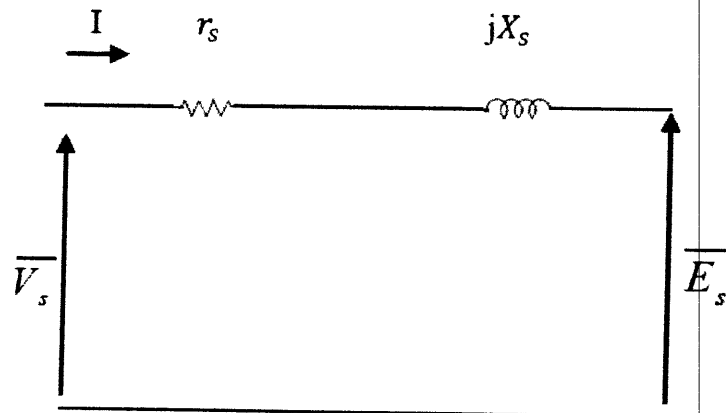


Figure III-2 : schéma électrique équivalent

Tel que :

$\overline{V}_s$  ; La représentation complexe de la tension par phase.

$\overline{E}_s$  ; La force électromotrice par phase.

### 1-2 Résolution en potentiel vecteur :

L'analyse harmonique spatiale de la densité superficielle de courant créé par une phase, qui est la somme des densités équivalentes pour chaque encoche concernée par la phase en question, montre que le premier harmonique est prépondérant.

$\theta'$  Étant un angle géométrique attaché au stator, et pour un choix particulier de l'origine des angles et de l'origine du temps, on écrit la densité superficielle de courant sous la forme :

$$J_s(\theta', t) = \frac{3}{\pi} K_b NI \sqrt{2} \cos(\omega t - p\theta') \quad (\text{III-2})$$

Ou :

$J_s$  : Densité superficielle de courant.

$N$  : Nombre de spires par pole et par phase.

$I$  : Courant statorique en ampère.

$k_b$  : Coefficient de bobinage.

$\omega$  : Pulsation de fréquence.

$p$  : Nombre de paires de pole.

Cette densité est écrite pour un choix particulier de l'origine des angles et d'origine des temps.

On a donc supposé de plus que l'alimentation de la machine est triphasée équilibrée, de pulsation  $\omega$ .

Pour un observateur attaché au rotor est repéré par l'angle  $\theta$  par rapport au rotor :

$$\theta' = (1 - g) \frac{\omega t}{P} + \theta \quad (\text{III-3})$$

Ou :

$g$  : glissement.

$\theta$  : Angle géométrie attaché au rotor.

De sorte que pour cet observateur :

$$J_s(\theta, t) = \frac{3}{\pi} K_b NI \sqrt{2} \cos(g\omega t - p\theta) \quad (\text{III-4})$$

Il subsiste en fait un arbitraire sur la phase de  $j_s(\theta, t)$  lié à la position du rotor à  $t=0$ .

La densité superficielle du courant peut être écrite sous la forme :

$$J_s(\theta, t) = \sqrt{2} \operatorname{Ré} e \left[ \bar{J}_s(\theta) e^{j\omega t} \right] \quad (\text{III-5})$$

Où :

$$J_s(\theta) = \bar{J}_1 e^{jp\theta} + \bar{J}_2 e^{-jp\theta} \quad (\text{III-6})$$

Dans l'hypothèse bidimensionnelle, le potentiel vecteur présente une seule composante suivant l'axe (oz).

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A(r, \theta, t) \end{pmatrix} \quad (\text{III-7})$$

Notons que ce choix de  $\vec{A}$  implique l'utilisation de la jauge de coulomb.

On en déduit l'induction  $\vec{B}$ , qui a deux composantes  $B_r$  et  $B_\theta$ .

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

(III-8)

$$\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{U}_r - \frac{\partial A}{\partial r} \vec{U}_\theta$$

On a donc :

$$\vec{B}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta}$$

(III-9)

$$\vec{B}_\theta = -\frac{\partial A}{\partial r}$$

Le champ électrique induit  $\vec{E}$  qui a lui aussi une seule composante suivant l'axe (oz) :

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad (\text{III-10})$$

Dans le domaine du rotor, toutes les grandeurs électromagnétiques sont de pulsation  $\omega$ , comme les sources qui les créent de sorte que :

$$\begin{aligned}
 A(r, \theta, t) &= \sqrt{2} \text{Réé} \left[ \bar{A}(r, \theta) e^{jg\omega t} \right] \\
 B_r(r, \theta, t) &= \sqrt{2} \text{Réé} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \theta} e^{jg\omega t} \right] \\
 B_\theta(r, \theta, t) &= \sqrt{2} \text{Réé} \left[ -\frac{\partial \bar{A}}{\partial r} e^{jg\omega t} \right] \\
 E(r, \theta, t) &= \sqrt{2} g \omega I_m \left[ \bar{A}(r, \theta) e^{jg\omega t} \right]
 \end{aligned}
 \tag{III-11}$$

1-3 Positions de problème :

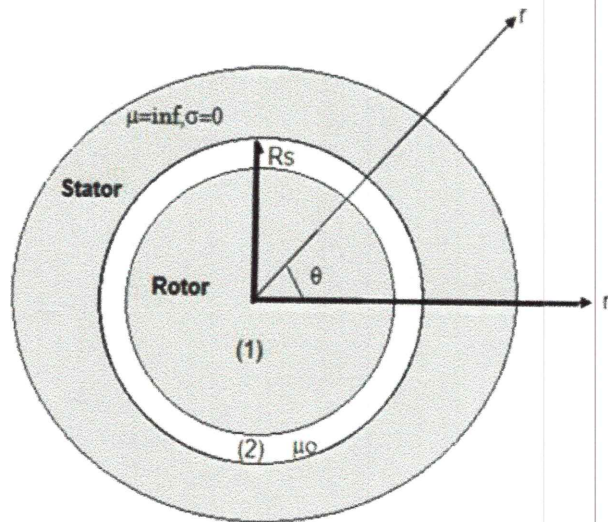


Figure III-3 : configuration générale d'une machine à rotor massif

Dans le domaine (1), on voit qu'on est amené à résoudre l'équation :

$$\Delta \bar{A}_1 - j \lambda^2 \bar{A}_1 = 0
 \tag{III-12}$$

Alors que dans le domaine(2), on doit résoudre l'équation :

$$\Delta \bar{A}_2 = 0
 \tag{III-13}$$

A la surface du stator, sur le rayon  $R_s$ , on utilise :

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \mu_0 \frac{J_s(\theta)}{R_s}
 \tag{III-14}$$

On exige de plus que dans le contour  $LI$  :

$$\overline{A}_1 = \overline{A}_2 \quad (\text{III-15})$$

Et

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \overline{A}_1}{\partial n} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \overline{A}_2}{\partial n} \quad (\text{III-16})$$

## 2- Calcul par la méthode de séparation de variable :

### 2-1 Hypothèses :

L'analyse du comportement de la machine à rotor massif conduit à la résolution des équations de Maxwell dans un domaine tridimensionnel. Ce calcul est extrêmement complexe et des hypothèses simplificatrices sont alors nécessaires pour ramener l'étude à un domaine bidimensionnel. Les hypothèses simplificatrices adoptées sont :

- La perméabilité du stator est infinie et sa conductivité est nulle suivant l'axe de la machine par suite de son feuilletage.
- Les enroulements statoriques sont alimentés par un système triphasé équilibré, à variation sinusoïdale par rapport au temps de pulsation  $\omega$ .
- L'acier du rotor ne présente pas de phénomènes d'hystérésis.
- La longueur axiale de la machine est infinie.
- L'entrefer est constant.
- Le rayon du rotor et du stator sont très grands devant l'épaisseur de l'entrefer.
- Les milieux magnétiques sont linéaires et isotropes.

Compte tenu de ces hypothèses, on peut ramener l'étude à un repère cartésien  $(o, x, y, z)$  lié au rotor tel que l'axe  $ox$  soit radial et dirigé vers l'intérieur de la machine, l'axe  $oy$  soit tangent à la surface du rotor et l'axe  $oz$  soit parallèle à l'axe de rotation. Le centre  $o$  du repère est placé sur la surface du rotor, au milieu de la longueur de ce dernier. On obtient le modèle de la Figure (III-4).

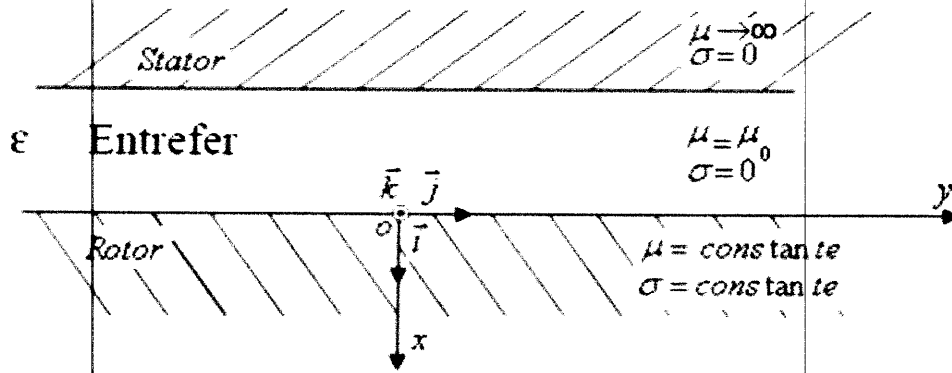
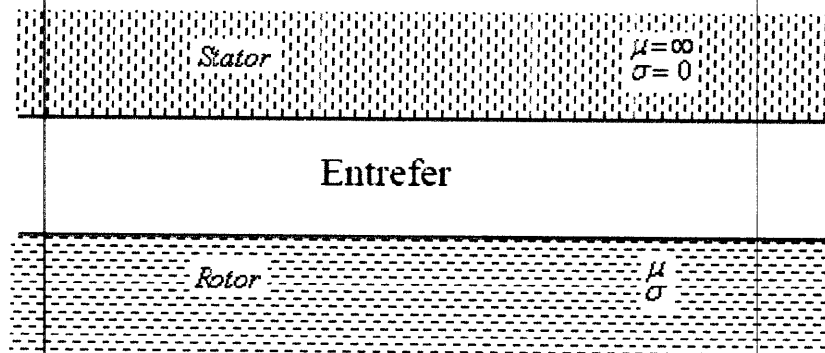
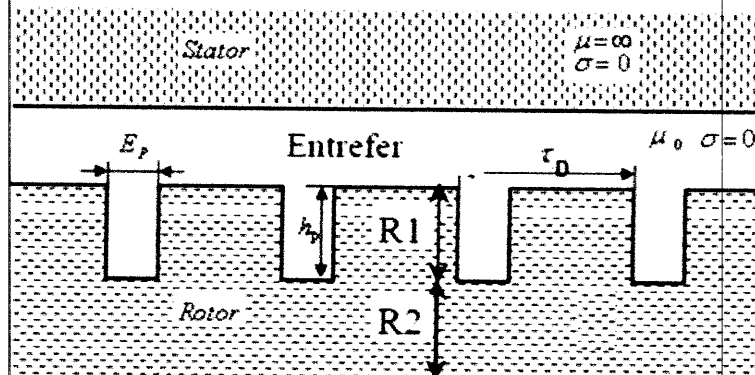


Figure III-4 : Modèle théorique de la machine à rotor massif.

Les modèles d'étude pour les deux types de rotors sont montrés dans la figure (III-5) :



a) Modèle pour rotor lisse.



b) Modèle pour le rotor rainuré

Figure III-5 : Modèles d'étude.

Où :

$$\tau_D = \frac{2\pi}{N_r}$$

$\tau_D$  : Pas dentaire.

$\varepsilon$  : Épaisseur de l'entrefer.

$E_p$  : largeur de la rainure.

$H_p$  : profondeur de la rainure.

$N_r$  : nombre de rainure.

R1 : région 1 (milieu anisotrope), dans laquelle on a :

$$B_{x1} = \mu_{x1} H_{x1}, B_{y1} = \mu_{y1} H_{y1} \text{ et } J_{z1} = \sigma_z E_{z1}$$

R2: région 2 (milieu isotrope), dans laquelle on a :

$$\mu_{y2} = \mu_{x2} = \mu_2 \text{ et } J_{z2} = \sigma_2 E_{z2}$$

B, H, J et E sont l'induction magnétique, l'intensité du champ magnétique, la densité de courant et le champ électrique respectivement.

### 2-2 Résolution de l'équation de poisson dans le rotor :

Compte tenu des hypothèses de ce modèle, le potentiel vecteur est dirigé suivant l'axe oz :

$$\vec{A}(x, y, t) = (0, 0, A(x, y, t)) \quad (\text{III-17})$$

L'équation (III-17) se ramène à :

$$\vec{A}(x, y, t) = \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}(x, y, t)}{\partial t} \quad (\text{III-18})$$

C'est une équation aux dérivées partielles de second ordre, on pose une solution de la forme :

$$\vec{A}(x, \varphi) = a_r(x).e^{j\varphi} + a_r^*(x).e^{-j\varphi} \quad (\text{III-19})$$

$$\varphi = (g\omega)t + by \quad (\text{III-20})$$

Où :

$$b = \frac{2\pi}{\tau_p}$$

$$\tau_p = \frac{\pi D}{2p}$$

$\tau_p$  : Pas polaire.

b : pulsation géométrique d'entrefer.

D : diamètre du rotor.

p : nombre de paires de pole.

En remplaçant (III-18) dans (III-19), on aura après identification :

$$\ddot{a}_r - b^2 a_r = (j\mu\sigma g\omega) a_r \quad (\text{III-21})$$

D'où :

$$\ddot{a}_r - q^2 a_r = 0 \quad (\text{III-22})$$

Avec :

$$q^2 = b^2 + j\mu\sigma g\omega \quad (\text{III-23})$$

L'équation (III-22) est une équation différentielle de second ordre, dont la solution est de la forme :

$$a_r(x) = a_0 e^{-qx} + a_1 e^{qx} \quad (\text{III-24})$$



Le champ doit être borné, puisqu'il est nul au centre du rotor, la solution se réduit à :

$$a_r(x) = a_0 e^{-qx} \quad (\text{III-25})$$

### 2-3 Résolution de l'équation de poisson dans l'entrefer :

La conductivité de l'entrefer est nulle, l'équation (III-18) devient :

$$\vec{A}(x, y, t) = 0 \quad (\text{III-26})$$

C'est l'équation de Laplace. On prend une solution de la forme :

$$\vec{A}(x, \varphi) = a_e(x).e^{j\varphi} + a_e^*(x).e^{-j\varphi} \quad (\text{III-27})$$

En remplaçant cette solution dans (III-26), on aura après identification :

$$\ddot{a}_e - b^2 a_e = 0 \quad (\text{III-28})$$

Cette équation différentielle admet une solution de la forme :

$$\bar{a}_e(x) = \bar{\lambda}_1 \cosh(bx) + \bar{\lambda}_2 \cosh(b(x+e)) \quad (\text{III-29})$$

Où :

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  Sont des constantes d'intégration.

$e$  : épaisseur de l'entrefer.

### 2-4 Détermination des constantes d'intégration :

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions de passage.

À la surface du stator à  $x = -e$  :

La perméabilité du stator est supposée infinie. La discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique à la surface de séparation stator-entrefer s'écrit alors :

$$H_{te} = J_s \quad (\text{III-30})$$

L'induction magnétique dans l'entrefer s'écrit :

$$\vec{B}_e = \text{rot} \vec{A}_e \quad (\text{III-31})$$

Le potentiel vecteur ne dépend pas de z, cette dernière relation donne :

$$\vec{B}_e = \left( \frac{\partial A_e}{\partial y}, -\frac{\partial A_e}{\partial x}, 0 \right) \quad (\text{III-32})$$

Ainsi que :

$$\vec{B}_e = \mu_0 \vec{H}_{te} \quad (\text{III-33})$$

A partir des équations (III-32) et (III-33), nous avons :

$$\left( -\frac{\partial A_e}{\partial x} \right)_{x=-e} = \mu_0 (H_{te})_x = -e \quad (\text{III-34})$$

$H_{te}$  Est donné par la relation (III-30), on a donc :

$$\left( -\frac{\partial A_e}{\partial x} \right)_{x=-e} = \mu_0 J_s \quad (\text{III-35})$$

Où :

$J_s$  : La densité du courant statorique

Avec :

$$\left( \frac{\partial A_e}{\partial x} \right) = \bar{\lambda}_1 (b \sinh(bx)) + \bar{\lambda}_2 (b \cdot \sinh(b(x+e))) \quad (\text{III-36})$$

À partir de relation (III-36), la condition (III-35) donne :

$$\bar{\lambda}_1(-b \sinh(bx)) = -\mu_0 J_s \quad (\text{III-37})$$

À la surface du stator à  $x=0$  :

La continuité de la composante normale de l'induction magnétique à la surface de séparation entrefer-rotor s'écrit :

$$\vec{B}_{ne} = B_{nr} \quad (\text{III-38})$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial \bar{A}_e(x=0)}{\partial y} = \frac{\partial \bar{A}_r(x=0)}{\partial y} \quad (\text{III-39})$$

Avec :

$$\frac{\partial \bar{A}_e}{\partial y} = j.b. [\alpha_e(x) e^{-j\varphi} - \alpha_e^*(x) e^{j\varphi}] \quad (\text{III-40})$$

$$\frac{\partial \bar{A}_r}{\partial y} = j.b. [\alpha_r(x) e^{-j\varphi} - \alpha_r^*(x) e^{j\varphi}] \quad (\text{III-41})$$

Les deux relations (III-38) et (III-39) dans (III-37) donne :

$$\bar{\alpha}_0 = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 \cosh(b.e) \quad (\text{III-42})$$

De plus la condition (III-39), il y a continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à cause de l'absence de la densité du courant superficielle à la surface du rotor, on a donc :

$$H_{te} = H_{tr} \quad (\text{III-43})$$

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z(x=0)}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_r(x=0)}{\partial x} \quad (\text{III-44})$$

Avec :

$$\frac{\partial A_r}{\partial x} = -\bar{\alpha}_0 \cdot q \cdot e^{-qx} \quad (\text{III-45})$$

A partir des relations (III-36) et (III-45), la relation (III-44) s'écrit :

$$\bar{\lambda}_2(b \cdot \sinh(be)) + \bar{\alpha}_0 \left( \frac{q}{\mu_r} \right) = 0 \quad (\text{III-46})$$

Les équations (III-39) et (III-46), (III-45) sont écrites sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} -b \cdot \sinh(be) & 0 & 0 \\ 1 & \cosh(be) & -1 \\ 0 & b \cdot \sinh(be) & \frac{q}{\mu_r} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \\ \bar{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_0 \cdot J_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-47})$$

La résolution de système d'équations (III-47) donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \frac{\mu_0 J_s}{b \cdot \sinh(be)} \\ \bar{\lambda}_2 &= - \frac{-\mu_0 J_s \frac{q}{\mu_r}}{b \cdot \sinh(be) \left( \frac{q}{\mu_r} \cosh(be) + b \cdot \sinh(be) \right)} \\ \bar{\alpha}_0 &= - \frac{-\mu_0 J_s}{b \cdot \sinh(be) + \left( \frac{q}{\mu_r} \cosh(be) \right)} \end{aligned} \quad (\text{III-48})$$

## 2-5 Schéma équivalent :

La machine asynchrone fonctionne suivant le schéma [18] :

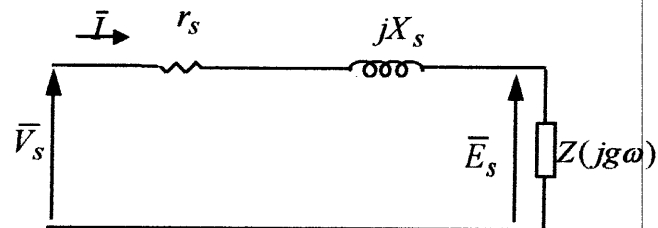


Figure 6: schéma électrique équivalent de la machine asynchrone

Tel que :

$r_s$  : Résistance statorique par phase.

$X_s$  : Réactance de fuite statorique par phase.

$\bar{Z}$  : Impédance opérationnelle.

À partir de la loi de Lenz :

$$e = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (\text{III-49})$$

$\psi$  : Flux dans l'entrefer par phase.

En harmonique la force électromotrice par phase est donnée :

$$\bar{E}_s = j\omega\psi \quad (\text{III-50})$$

Et à partir de schéma équivalent :

$$\bar{V}_s = (R_s + j.X_s)I + j\omega\psi \quad (\text{III-51})$$

## 2-6-1 Calcul du flux dans l'entrefer :

Les expressions du courant statorique dans chaque phase sont :

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( I.e^{j.\alpha} + I^*.e^{-j.\alpha} \right) \\ \bar{I}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( I.e^{j\left(\omega.t-\frac{2\pi}{3}\right)} + I^*.e^{-j\left(\omega.t-\frac{2\pi}{3}\right)} \right) \\ \bar{I}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( I.e^{j\left(\omega.t-\frac{4\pi}{3}\right)} + I^*.e^{-j\left(\omega.t-\frac{4\pi}{3}\right)} \right)\end{aligned}\tag{III-52}$$

Ces courants donnent les flux suivants :

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi.e^{j.\alpha} + \psi^*.e^{-j.\alpha} \right) \\ \bar{\psi}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi.e^{j\left(\omega.t-\frac{2\pi}{3}\right)} + \psi^*.e^{-j\left(\omega.t-\frac{2\pi}{3}\right)} \right) \\ \bar{\psi}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi.e^{j\left(\omega.t-\frac{4\pi}{3}\right)} + \psi^*.e^{-j\left(\omega.t-\frac{4\pi}{3}\right)} \right)\end{aligned}\tag{III-53}$$

Ces flux s'obtiennent à partir d'une source d'alimentation triphasée équilibrée.

Le calcul du flux dans l'entrefer est déduit des expressions de l'énergie magnétique des enroulements statorique.

$$\int_0^{2\pi} \bar{A}(\theta).J_s d\theta = \psi.I^*\tag{III-54}$$

Ainsi que :

$$\bar{A}(\theta) = \frac{\bar{a}(r)}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} + \frac{\bar{a}^*(r)}{\sqrt{2}} e^{-j\varphi}\tag{III-55}$$

$$\bar{J}_s(\theta) = \frac{3k_b}{2b} \frac{N}{\sqrt{2}} (I.e^{j\varphi} + I^* e^{-j\varphi}) \quad (\text{III-56})$$

A partir des relations précédentes, nous obtenons la relation du flux :

$$\psi = \sqrt{2}\pi.N.L \frac{k_b}{p} A_e(r_s) \quad (\text{III-57})$$

### 2-6-2 Calcul de l'impédance opérationnelle :

À partir de la loi de Lenz  $\bar{E}_s = j\omega\psi$ , et l'expression du flux précédente, on déduit l'expression de l'impédance équivalente de la machine asynchrone :

$$\bar{Z} = \frac{\bar{E}_s}{\bar{I}} = \frac{j\omega\psi}{\bar{I}} \quad (\text{III-58})$$

On aura donc :

$$\bar{Z}(jg\omega) = \frac{j\omega\sqrt{2}\pi.k_b.N.A_e(r_s).L}{p.I} \quad (\text{III-59})$$

A partir de l'équation précédente on trouve :

Pour le rotor lisse :

$$\bar{Z}(jg\omega) = j \frac{3}{2} \pi.p\omega\mu_0.L \left[ \frac{K_b}{a} \right]^2 \frac{\text{ch}(a\varepsilon) + \frac{q}{\mu_r} \text{sh}(a\varepsilon)}{\text{sh}(a\varepsilon) + \frac{q}{\mu_r} \text{ch}(a\varepsilon)} \quad (\text{III-60})$$

Avec :

$$q^2 = a^2 + j\mu_0 g \omega$$

Et pour le rotor rainuré :

$$\bar{Z}(jg\omega) = j\frac{3}{2}\pi.p.\omega\mu_0.L\left[\frac{K_b}{a}\right]^2\left[2\cdot\frac{(\text{ch}(a\epsilon)^2 - 1 + F)}{\text{sh}(2a\epsilon)}\right] \quad (\text{III-61})$$

Avec :

$$F = \frac{a\theta a.\epsilon(1+k.\tanh q_1.h_p)}{\frac{\mu_0}{\mu_2}q_2\left(1+\frac{1}{k}\tanh q_1.h_p\right) + a\tanh a.\epsilon(1+k\tanh q_1.h_p)} \quad (\text{III-62})$$

Où :

$$k = \frac{\mu_{y1}q_2}{\mu_2q_1}$$

$$q_1 = \mu_{y1}\left(\frac{a^2}{\mu_{x1}} + j\sigma_{z1}g\omega\right)$$

$$q_2 = a^2 + j\mu_2\sigma_2g\omega$$

### 2-6-3 Calcul du courant :

La connaissance de l'impédance équivalente permet de déduire le courant dans une phase statorique, et cela à partir du schéma équivalent :

$$I = \frac{V}{R_s + R_e(Z(jg\omega)) + j(X_f + I_m(Z(jg\omega)))} \quad (\text{III-63})$$

Où :

Re: partie réelle ; Im : partie imaginaire.

### 2-6-4 Calcul du couple :

Le couple est obtenu à partir de l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique :

$$C_e = 3.R_e(j\omega\psi I^*) \quad (\text{III-64})$$

On a aussi :

$$Z(jg\omega).I = j\omega\psi$$



Et :

$$I.I^* = I^2$$

Donc :

$$C_e = 3.I^2 . R_e(Z(jg\omega)) \quad (\text{III-65})$$

D'où :

$$C_e = 3.\left(\frac{P}{\omega}\right) I^2 . R_e(Z(jg\omega)) \quad (\text{III-66})$$

En utilisant l'équation (III-63) le couple électromagnétique devient :

$$C_e = 3.\left(\frac{P}{\omega}\right) \frac{R_e(Z(jg\omega))}{(R_s + R_e(Z(jg\omega)))^2 + (X_f + I_m(Z(jg\omega)))^2} \quad (\text{III-67})$$

### 2-6-5 Calcul le facteur de puissance :

Le facteur de puissance est donné par :

$$\cos \varphi = \frac{R_e(I)}{I} \quad (\text{III-68})$$

Nous avons ainsi déterminé tous les paramètres principaux, permettant le calcul de la machine.

On passe maintenant à une présentation de la méthode des éléments finis, puisque elle semble être la plus puissante des méthodes numériques

### 3- Méthodes des éléments finis :

Cette méthode consiste à découper le domaine étudié en éléments de forme géométrique simple ayant des cotés communs et dont les sommets ou nœuds sont les points d'articulations de plusieurs éléments entre eux. L'opération de la décomposition est le

maillage. Un bon maillage doit faciliter les opérations prévues par un programme. Il faut donc adopter une méthode systématique ou numérique des éléments et des nœuds [19].

Dans chaque élément, l'inconnue (potentiel vecteur magnétique, par exemple) est donc approximée par des polynômes de degré un ou deux. L'approximation vérifie les équations aux dérivées partielles à résoudre de manière faible. Ces équations sont alors transformées en un système d'équations algébriques qu'il convient de résoudre pour obtenir la solution du problème posé [20].

### 3-1 Discrétisation spatiale par éléments finis :

La méthode des éléments finis consiste à subdiviser le domaine d'étude en petits éléments de la forme triangulaire. Chaque triangle est repéré par ses trois sommets (Figure 6).

Cette subdivision exclusivement triangulaire de premier ordre à l'avantage de s'adapter à toute configuration géométrique et permet un numérotage systématique des points à l'aide des algorithmes [21].

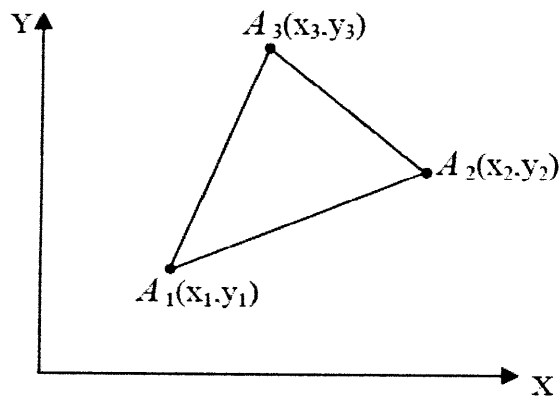


Figure 6 : Élément fini à trois nœuds

Au niveau de chaque élément (Figure 6), le potentiel vecteur magnétique est approché par un polynôme d'interpolation de premier degré en x et y sous la forme suivante [22] :

$$A_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y \quad (i=1, 2, 3) \quad \text{(III-69)}$$

Où  $a_i, b_i, c_i$  sont des coefficients qui dépendent des coordonnées des sommets du triangle et des potentiels correspondants.

De l'équation (II-3), on constate que l'induction est constante à l'intérieur de chaque élément et, par conséquent, la perméabilité magnétique l'est également. Le potentiel en tout point de l'élément est parfaitement défini à partir de la relation (II-4)

$$\vec{A}(x, y) = \sum_1^3 N_i(x, y) \vec{A}_i \quad (\text{III-70})$$

Les éléments sont des triangles de premier ordre, d'où on peut écrire :

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta_e} (a_i + b_i x + c_i y), i = (1, 2, 3) \quad (\text{III-71})$$

$\Delta_e$  Représente l'aire d'un élément, définie par ces trois sommets 1, 2, 3 on peut l'écrire sous la forme :

$$2 \Delta_e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) \quad (\text{III-72})$$

La relation (II-4) peut se mettre sous la forme matricielle :  $A = \langle N \rangle \{A_e\}$  ou  $\langle N \rangle$  est un vecteur ligne  $N_i (i = 1, 2, 3)$  et  $\{A_e\}$  est une vectrice colonne définie aux nœuds  $A_i (i = 1, 2, 3)$

L'interpolation dans un élément est effectuée en fonction des valeurs de l'inconnue aux nœuds de cet élément ; il s'agit alors de l'interpolation nodale, celle-ci a la propriété d'imposer la continuité de l'inconnue :

$$N_i(x_j, z_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} i, j = (1, 2, 3) \quad (\text{III-73})$$

Tous calcul est effectué en désignant par i, k, l, toute permutation circulaire des indices 1, 2, 3 assignés dans le sens trigonométrique. Ces fonctions s'écrivent sous la forme suivante :

$$N_i = \frac{P_i + Q_i x + R_i y}{\Delta_e} \quad (\text{III-74})$$

Les paramètres  $P_i, Q_i, R_i$  et  $\Delta_e$  sont des fonctions des coordonnées des nœuds :

$$P_i = x_k y_l - x_l y_k \quad (\text{III-75})$$

$$Q_i = y_k - y_l \quad (\text{III-76})$$

$$R_i = x_i - x_k \quad (\text{III-77})$$

$$\Delta_e = \frac{1}{2}(P_i + P_k + P_l) \quad (\text{III-78})$$

L'application de la méthode des éléments finis sera faite dans le prochain chapitre par l'utilisation de logiciel FEMM couplé avec le logiciel MATLAB, dont la discrétisation se faite par le mailleur automatique de logiciel FEMM, il existe une bibliothèque de matériaux magnétiques dans ce dernier.

#### Conclusion :

L'étude analytique que nous avons effectuée dans ce chapitre, nous a permis de déterminer tous les paramètres principaux de la machine dans l'hypothèse d'une perméabilité constante (isotrope) pour le modèle de moteur à rotor lisse et anisotrope pour le rotor rainuré.

On conclut pour ce type de machine, que l'impédance opérationnelle est indépendante de la tension.

La méthode des éléments finis nous a donné une idée sur les calculs numériques des problèmes électromagnétiques.

# ***CHAPITRE IV***

## ***Simulation et mise en œuvre informatique***

**Introduction :**

Les moyens informatiques se développent sans cesse, il est maintenant possible de mettre en œuvre des modélisations mathématiques complexes avec un temps et un coût de calcul raisonnables. Ces simulations numériques permettent de développer une nouvelle gamme de moteurs. Elles permettent en outre de mieux connaître les divers modes de fonctionnement ainsi que les différentes grandeurs intrinsèques des machines (puissance, couple, courant, force électromotrice, rendement...) [23].

Ce chapitre sera consacré à la mise en œuvre informatique des deux modèles lisse et rainuré décrit précédemment, l'application numérique des modèles analytiques se fait par le logiciel MATLAB, la méthode des éléments finis est appliquée au modèle lisse à l'aide de logiciel FEMM.

**1-Modèle d'application :**

L'application numérique des deux modèles (lisse et rainuré) est faite sur un moteur asynchrone à rotor massif dont les caractéristiques électriques, magnétiques et géométriques sont :

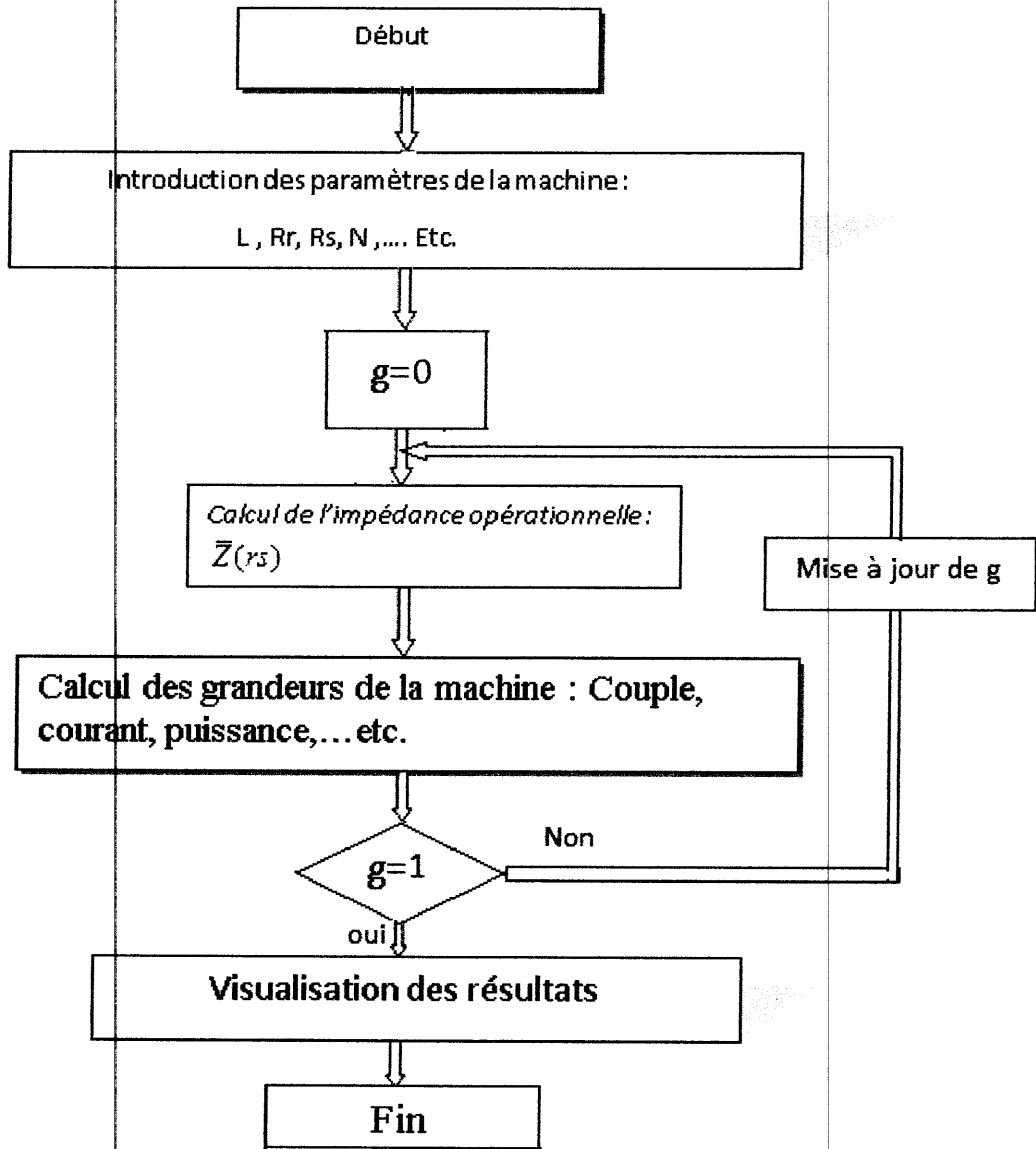
Coefficient de bobinage du fondamentale	$K_b = 0.73274$
Longueur utile	$L = 200 \text{ mm}$
Rayon rotorique	$r_r = 118 \text{ mm}$
Rayon statorique	$r_s = 120 \text{ mm}$
Entrefer	$e = 2 \text{ mm}$
Nombres de spires par phase	$N = 36$
Résistance à chaud d'une phase statorique	$RR_s = 0.52$
Résistance de fuite d'une phase statorique	$X_s = 0.239$
Perméabilité relative du matériau ferromagnétique	$\mu_r = 100$
Nombre de paires de pole	$p = 1$
Fréquence d'alimentation	$f = 50 \text{ Hz}$
Conductivité électrique	$\sigma = 4 \cdot 10^6 \text{ S/m}$
Nombre d'encoche statorique	$q = 36$
Largeur de la rainure (rotor rainuré)	$E_p = 2.5 \text{ mm}$
Profondeur de la rainure (rotor rainuré)	$H_p = 5 \text{ mm}$
Nombre de rainure (rotor rainuré)	$N_r = 24$

Tableau IV-1 : Caractéristiques électrique, magnétique et géométrique de moteur utilisé [13].

**2-Application du modèle analytique :**

A l'aide d'un calculateur numérique (l'environnement MATLAB), et sur la base du calcul analytique décrit au chapitre précédent, nous présentons les résultats obtenus concernant : le couple, le courant absorbé par le moteur, le module de l'impédance opérationnelle, le facteur de puissance.... etc.

2-1 Organigramme de calcul :



Organigramme1 : calcul des grandeurs de la machine



2-2 Résultats de simulation :

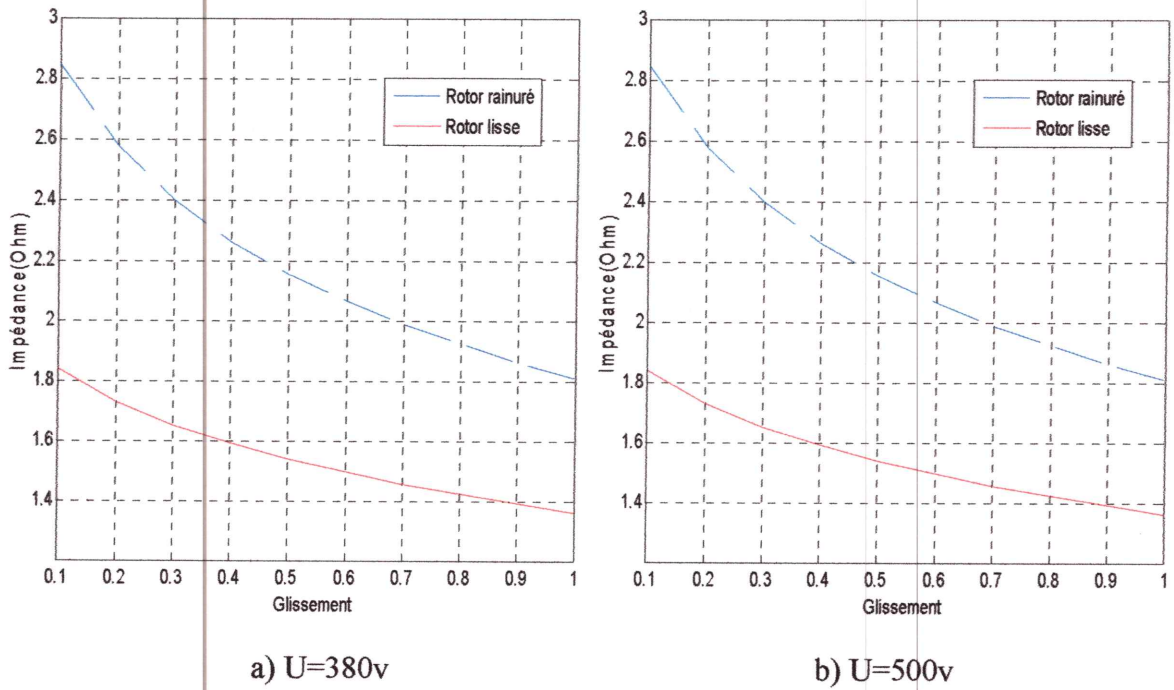


Figure IV-1 : Module de l'impédance en fonction du glissement

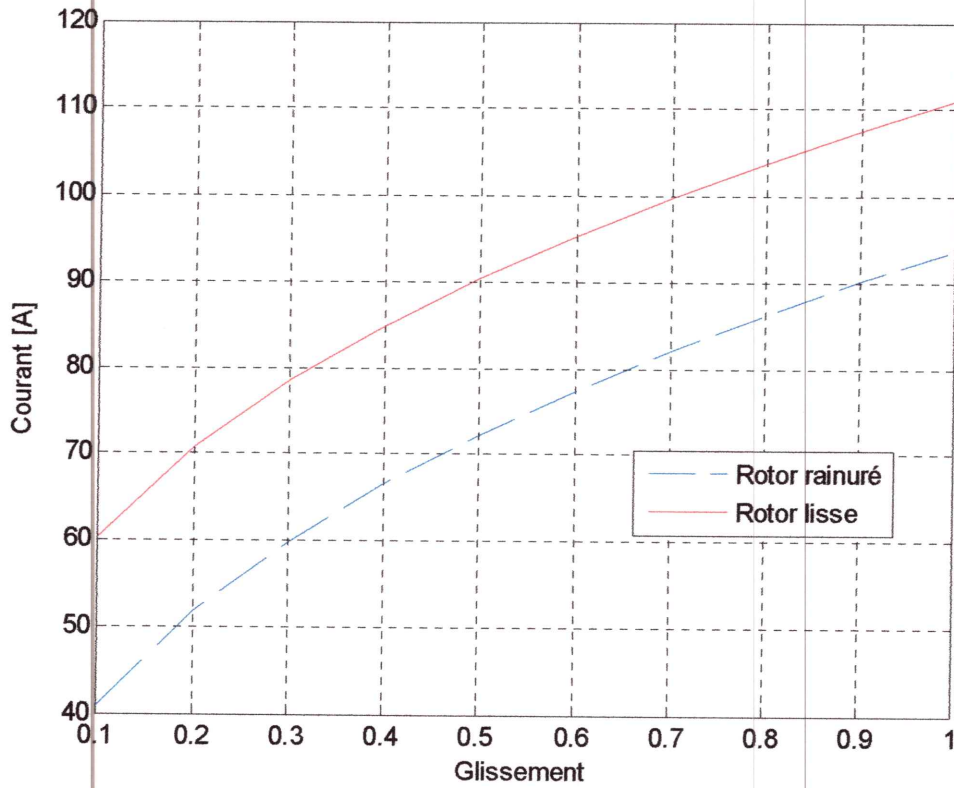


Figure IV-2 : Courant en fonction du glissement

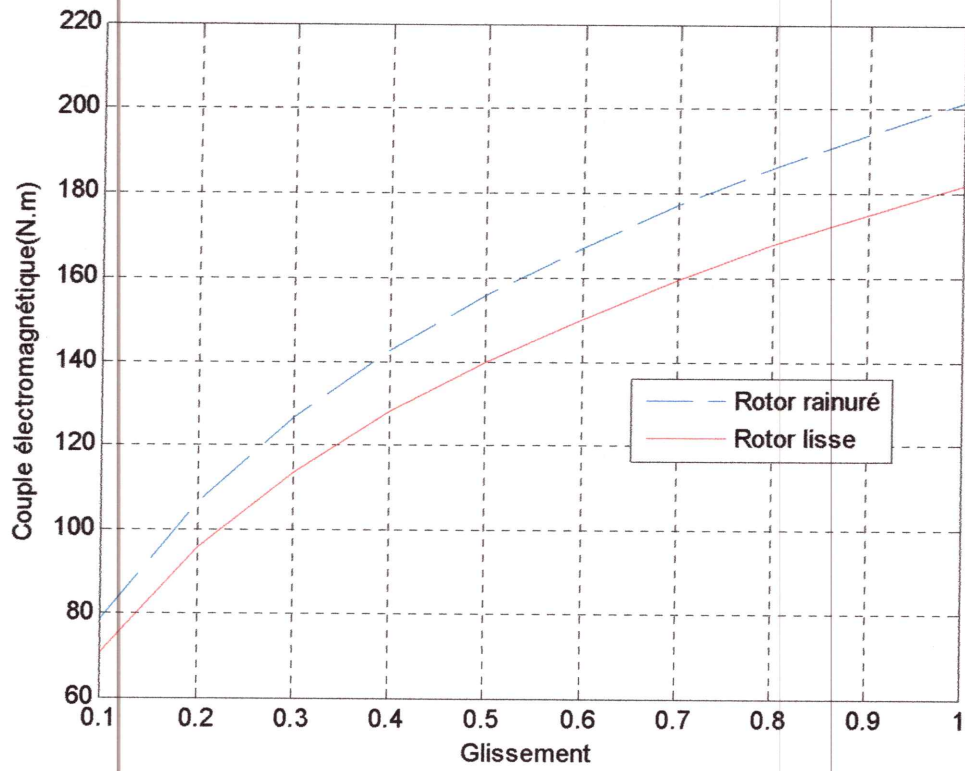


Figure IV-3 : Couple en fonction du glissement

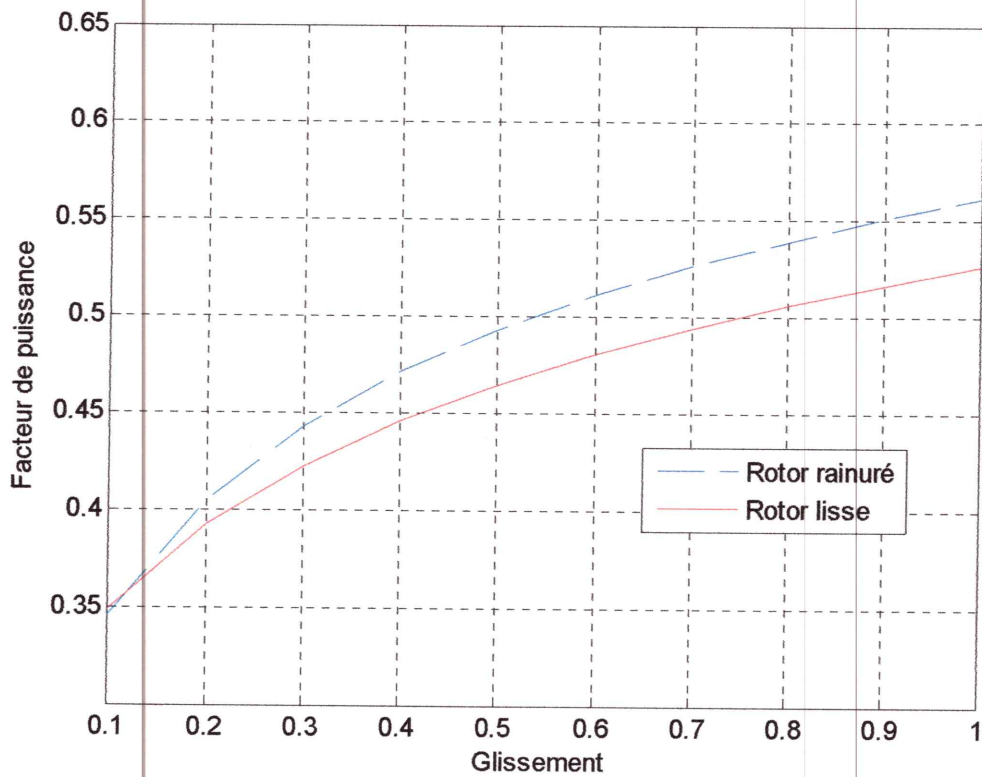


Figure IV-4 : Facteur de puissance en fonction du glissement

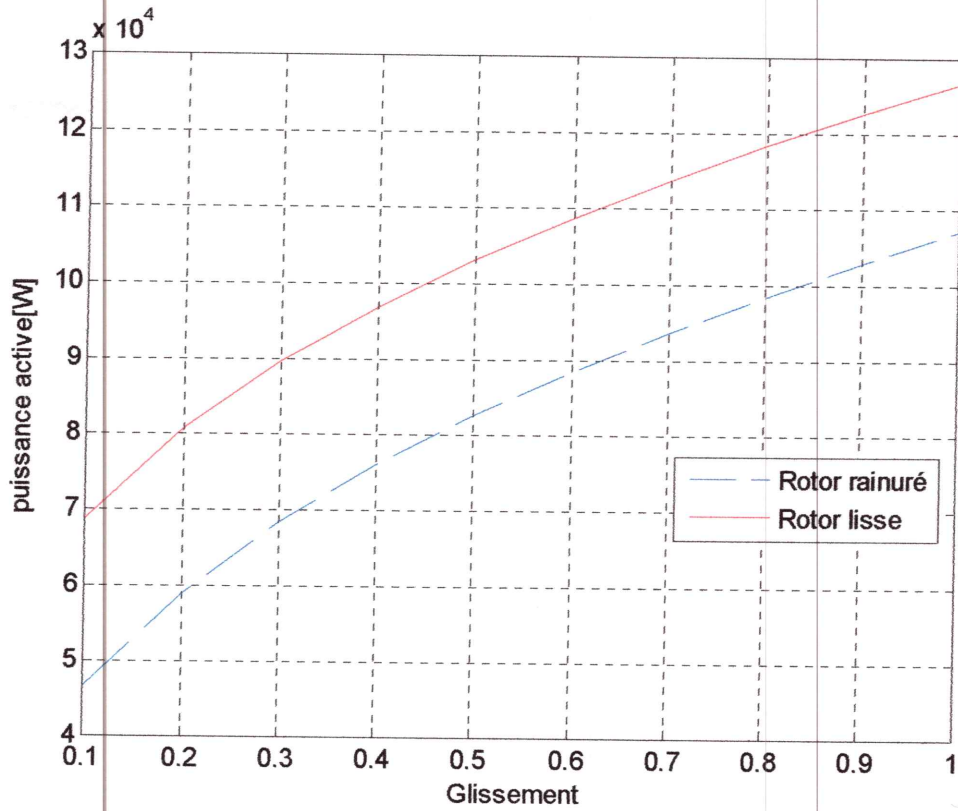


Figure IV-5 : Puissance active en fonction du glissement

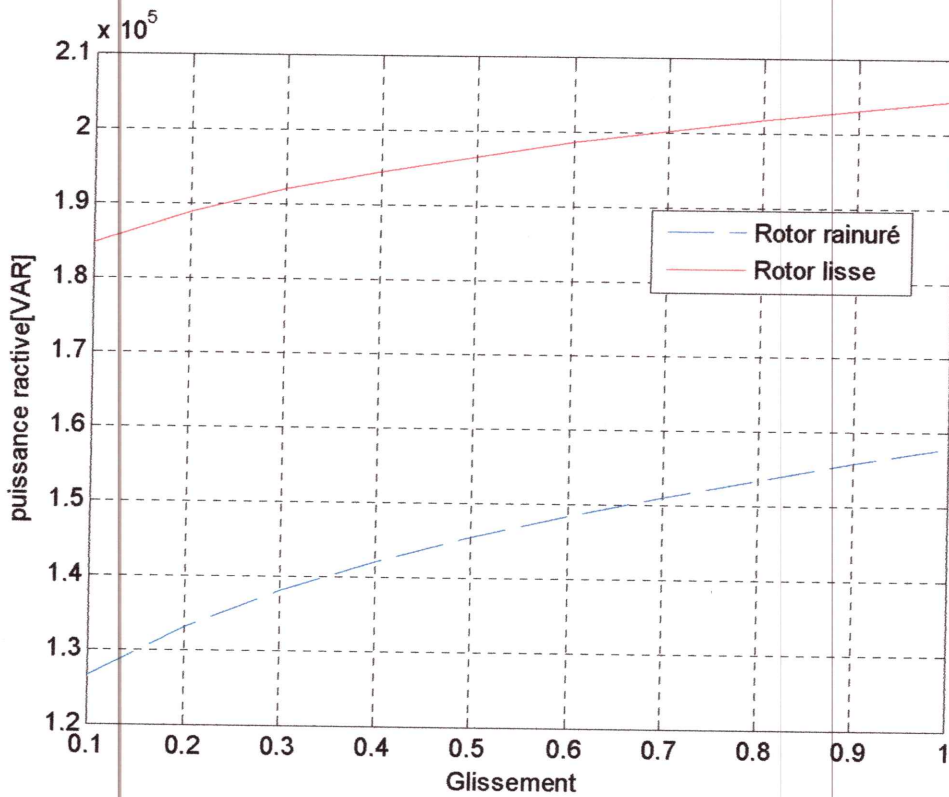


Figure IV-6 : Puissance réactive en fonction du glissement

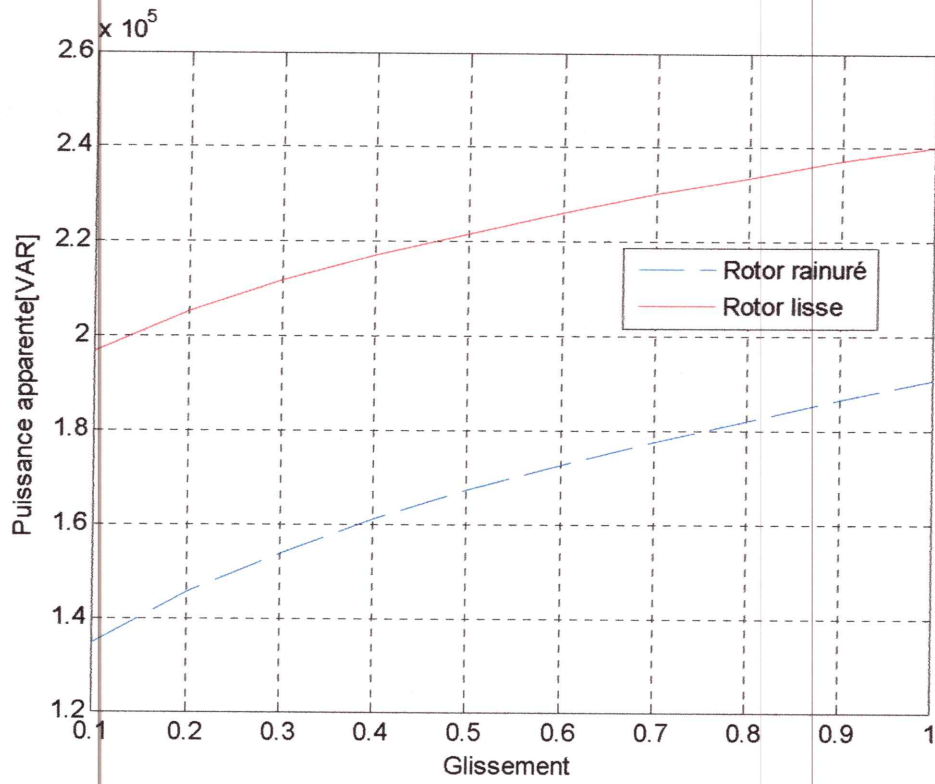


Figure IV-7 : Puissance apparente en fonction du glissement

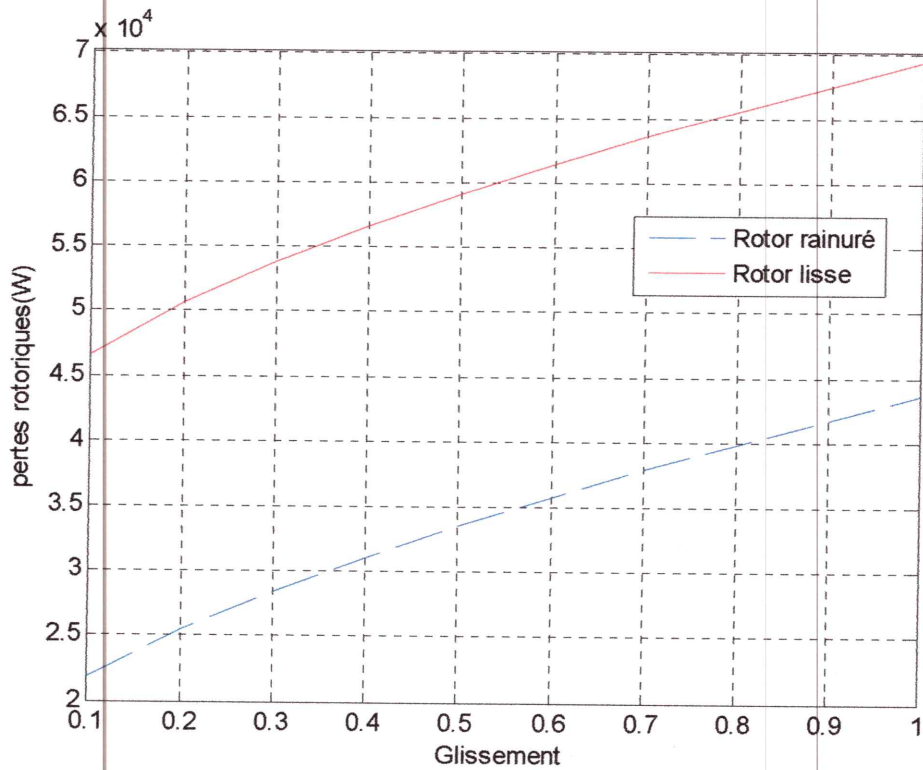


Figure IV-8: Pertes rotoriques en fonction du glissement

**2-4 Interprétation des résultats :**

La figure (IV-1) montre que l'impédance opérationnelle est indépendante de la tension d'alimentation et décroît de façon exponentielle avec le glissement pour les deux modèles.

La figure (IV-2) montre la variation du courant statorique en fonction du glissement (caractéristique électromécanique de courant) sous une tension et fréquence fixes ( $U=380$  volts,  $f=50\text{Hz}$ ). Le courant croît avec le glissement, la différence (l'écart) entre les modèles rainuré et lisse est presque constante.

La figure (IV-3) montre que pour une tension donnée, le couple électromagnétique développé par le rotor rainuré est nettement meilleur que celui du rotor lisse de même diamètre.

Les résultats de la figure (IV-3) montrent que le moteur asynchrone à rotor massif présente un bon couple de démarrage qui se dégrade aux faibles glissements.

Les caractéristiques obtenues dans la figure (IV-4) montrent que la machine asynchrone à rotor massif présente un bon facteur de puissance au démarrage qui décroît sensiblement aux faibles glissements. Pour une tension donnée, le facteur de puissance croît avec le glissement. La comparaison des caractéristiques montre que le rotor rainuré présente une caractéristique meilleure que celle du rotor lisse.

Les figures IV.5, IV.6 et IV.7 montrent que la puissance active, réactive et apparente augmente successivement avec l'augmentation de glissement, pour le modèle rainuré la puissance réactive est réduite considérablement par rapport au modèle lisse.

On peut constater à partir de figure (IV-8) que le rotor massif, bien qu'il représente la meilleure solution du point de vue mécanique, que la tôle rotorique présente des échauffements importants. En effet, pour le glissement nominal, les pertes rotoriques sont très fortes. En plus, le couple n'a pas un maximum au faible glissement. Les résultats obtenus montrent que les pertes rotoriques développés par le rotor rainuré est nettement meilleur (réduit) que celui du rotor lisse de même diamètre.

**3- Application éléments finis du modèle numérique :**

Nous avons présenté dans cette partie l'application de modèle numérique dans le cas de la machine asynchrone à rotor massif lisse calculée à l'aide du logiciel FEMM et du langage de programmation LUA, cette validation des résultats issus du modèle basé sur la méthode des éléments finis.

**3-1 Étapes de résolution :**

Définition de domaine d'étude	
Construction de la géométrie	
Découpage en éléments finis	
Affectation des propriétés magnétiques et physiques puis introduction des conditions aux limites	
Interfaçage MATLAB – FEMM	
Simulation du déplacement de l'actionneur	
Assemblage et résolution des équations	
Affichage des résultats	

Tableau IV-2 : Étapes de résolution par FEMM

### 3-2 Présentation de la machine étudiée :

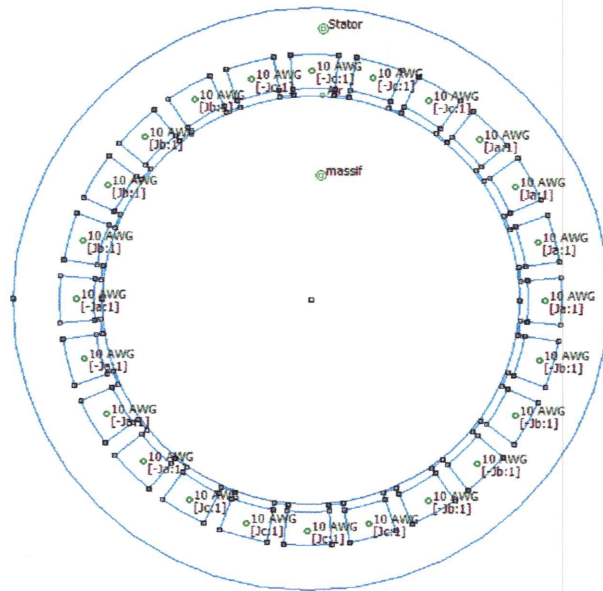


Figure IV-10 : machine asynchrone à rotor massif étudiée.

### 3-3 Discrétisation de la géométrie en éléments finis

La figure (IV-11) montre la discrétisation de la géométrie de la figure (IV-10) en éléments finis, ces éléments finis sont triangulaires linéaires et de premier ordre, le nombre total des éléments est 67259 éléments, le nombre total des nœuds est 33520 nœuds.

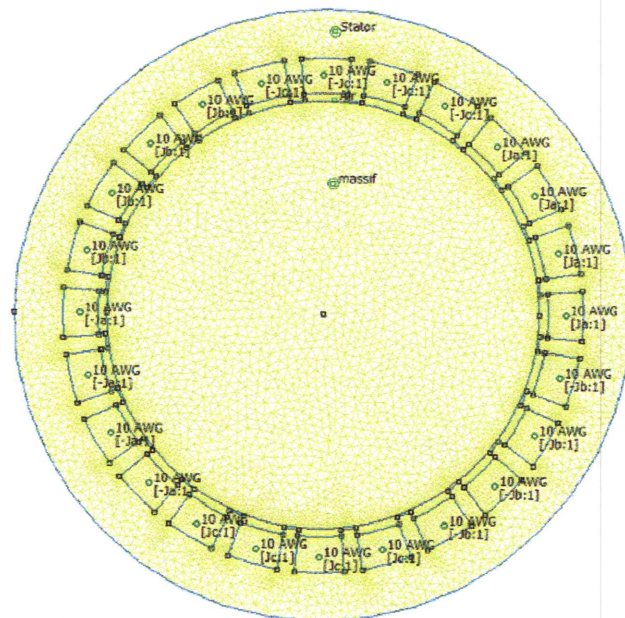
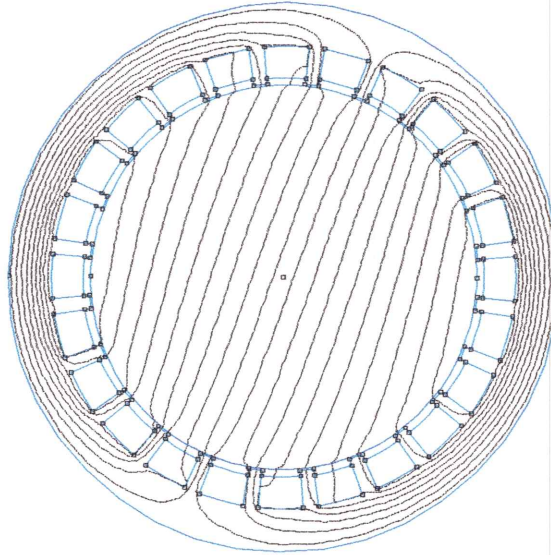


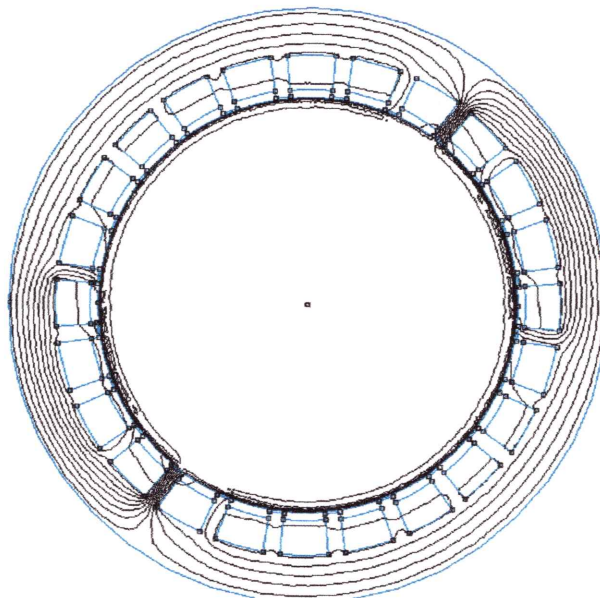
Figure IV-11 : Maillage de la machine étudiée.

**3-3 Lignes des champs :**

La figure (IV-12) représente les lignes de flux, ces lignes sont refermées sur elles-mêmes créant des pôles, allant de stator vers le rotor et traversant l'entrefer.



a) Lignes de champs à vide ( $g=0$ )



b) Lignes de champs au démarrage ( $g=1$ )

Figure IV-12 : Lignes de champs



La figure (IV-12) présente les lignes de champs au démarrage elle montre l'effet de la vitesse rotorique sur la pénétration des lignes de champs au niveau du rotor.

Le temps de calcul de couple électromagnétique par le logiciel FEMM est trop lourd (plus de 11 heures), ce qui influe sur l'affichage des résultats numériques surtout le couple.

**Conclusion :**

Les différents types de rotors (lisse et rainuré) montrent que cette machine possède un important couple de démarrage et un bon facteur de puissance au démarrage, par contre les caractéristiques électriques se dégradent considérablement pour de faibles glissements.

Les résultats montrent que le rotor massif rainuré offre un couple plus grand que celui du rotor massif et aussi montrent que le rotor rainuré présente un meilleur facteur de puissance par rapport au rotor lisse.

Une comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux calculés par la méthode analytique a été effectuée, pour une tension donnée, celle-ci montre que la concordance obtenue est bonne, ce qui justifie notre modèle.

# **Conclusion générale**

### **Conclusion générale :**

le travail que nous avons effectué dans ce mémoire de fin d'étude, nous a permis de progresser dans la connaissance des caractéristiques des moteurs asynchrone à rotor massif lisse et rainuré, dans l'hypothèse d'une perméabilité constante (isotrope) pour le modèle de moteur à rotor lisse et anisotrope pour le rotor rainuré.

L'aspect théorique a mis en évidence la possibilité d'étudier cette machine suivant plusieurs modèles approximatifs malgré les difficultés d'ordre géométrique, magnétique, et électrique.

Les différents modèles linéarités choisis montrent que cette machine possède un important couple de démarrage, par contre ses caractéristiques électriques se dégradent considérablement pour des faibles glissements.

L'étude numérique de la machine asynchrone à rotor massif peut être effectuée par la méthode des intégrales de frontières, car la solution du problème se fait uniquement sur les contours du stator et de rotor. Avec cette méthode, le temps de résolution diminue considérablement.



***BIBLIOGRAPHIE***

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] R.kechroud «Contribution à la modélisation des machine électrique par la méthode des éléments finis associée aux multiplicateurs de Lagrange », thèse de doctorat d'état, ENP, avril, 2002.
- [2] C. Barnetche « Calcul numérique de machines asynchrones en régime transitoire, en tenant compte de la saturation magnétique », thèse de doctorat de l'INP, Nancy, Octobre, 1997.
- [3] M.Hachemi, R.Kadri « Etude expérimentale et simulation de l'influence de la géométrie du rotor sur les performances d'un moteur asynchrone à rotor massif »
- [4] Z.Boulassel, « Modèle analytico-numérique dynamique pour la prise en compte du mouvement dans les dispositifs électromagnétiques », thèse de magistère, centre universitaire de Jijel ,2002.
- [5] A.Rezik, « Etude numérique comparative des différents modèles éléments finis pour le calcul des forces d'origine magnétique », thèse de magistère, centre universitaire de Jijel, 2002.
- [6] M.Juffer « Circuits magnétiques », techniques de l'ingénieur, volume D1 0150.
- [7] C.Geurin, « Détermination des pertes par courant de Foucault dans les cuves de transformateurs », thèse doctorat de l'institut national polytechnique de Grenoble, 1994.
- [8] Y.Cheriguen, « Etude et modélisation bidimensionnelle des phénomènes liées au formage magnétique », thèse de Magister, centre université de Jijel
- [9] C. Boveri « Rotor massif pour une machine asynchrone », institut national de la propriété industrielle, Paris, 1978.
- [10] J. Chatelain « Machines électrique », Volume X, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Traité d'électricité , 1989.
- [11] F.Rioux, « Machines asynchrones à rotor massif composite », Laboratoire d'électrotechnique des Universités, Paris, 1989.
- [12] R. Amimer « Calcul des performances en régime saturé d'un moteur asynchrone à rotor massif », thèse de Magister, ENP, 2004.
- [13] M.Mordjaoui « Contribution à l'étude du champ magnétique dans les pièces ferromagnétique », thèse de Magister, ENSET de Skikda, 2004.

- [14] J.M.Biedinger, « Contribution à l'étude de la diffusion du champ électromagnétique dans le fer massif. Application à l'analyse d'une machine asynchrone à rotor massif », thèse de doctorat, université de Compiègne, 1986.
- [15] M.Chabane, « Utilisation d'une méthode intégrale pour l'étude et l'optimisation de machines asynchrone à rotor massif », Thèse Docteur Ingénieur I.N.P.L 1989.
- [16] M.E.Zaim « Contribution à la conception des machines asynchrones à rotor massif » Thèse de Doctorat de l'ENP, Alger 1989.
- [17] B.Laporte « Généralités sur les convertisseurs électromécaniques », Cours E.N.S.E.M.
- [18] E.Boridy « Electromagnétisme, théorie et application », Presses de l'université du Québec 1993.
- [19] P.Silvester, R.Ferrari « finite elements for electrical engineers », Cambridge University Press, Third edition 1996.
- [20] T.Henneron, «Contribution à la prise en compte des grandeurs globales dans les problèmes d'électromagnétisme résolu avec la méthode des éléments finis». Thèse de doctorat, Université de Lille, 2004.
- [21] D.Mecker, « Manual of finite element method magnetics FEMM », <http://femm.foster-miller.net>.
- [22] G.Touzot, G.Dhall « Une représentation matricielle de la méthode des éléments finis », Maloine éditeur, deuxième édition, 1984.
- [23] C.Barnetche, «calcul numérique de machines asynchrones en régime transitoire, en tenant compte de la saturation magnétique », Thèse de Doctorat de l'INPL, Nancy, Octobre, 1997.
- [24] J. Lemmens, W. Deprez, J. Driesen, « 2D Finite Element Analysis of a Solid Rotor Sector Motor », IEEE Benelux Young Researchers Symposium edition, 2010