

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE Mohamed Seddik Ben Yahia de JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique**

N° d'ordre :
Série :

Mémoire

présenté pour obtenir le diplôme de

Master en physique

Option : Physique Théorique

par

ZAIMEN Abdelhak

Thème

**Théories de grande unification basées sur SU(5) et SO(10): construction et
phénoménologie**

Devant le Jury:

Président	Kh.NOUCER	Prof.	Univ. Jijel
Rapporteur	M.S.ZIDI	M.C.A.	Univ. Jijel
Examineur	T.BOUDJEDAA	Prof.	Univ. Jijel

Dédicace

A ma très chère mère, qui m'a énormément soutenu et encouragé durant ces années d'études, je dédie ce modeste travail.

Remerciements

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon encadrant Dr.M.S.ZIDI, pour son aide précieuse, sa patience, sa disponibilité, ses conseils judicieux et sa bonne humeur.

Je voudrais exprimer aussi ma reconnaissance envers le professeur T. BOUDJEDAA pour son soutien moral et ses encouragements, je le remercie aussi pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je remercie aussi le professeur KH.NOUCER qui m'a fait l'honneur de bien vouloir étudier avec attention mon travail.

Mes remerciements s'adressent également au professeur F.MERICHE, qui m'a énormément aidé avec ses conseils tout au long de mon cursus.

Je tiens ensuite à exprimer toute ma gratitude envers le professeur S.Haouat et toute l'équipe pédagogique du département de physique théorique de l'université de Jijel.

Merci enfin à ma famille, mes amis et mes collègues du département de physique théorique.

Table des matières

1	Introduction générale	1
2	Brisure de symétrie et modèle standard	3
2.0.1	Lagrangien du modèle standard	3
2.1	Brisure spontanée de symétrie et mécanisme de Higgs	5
2.1.1	Brisure spontanée de symétrie dans le modèle standard	6
2.1.2	Masse des bosons de jauge	7
2.1.3	Masse du boson de Higgs	7
2.1.4	Masse des fermions	8
2.2	Problème du modèle standard et théories de grande unification	8
3	Groupes de Lie, Algèbres de Lie et leurs représentations	9
3.1	Groupes et Algèbres de Lie	9
3.1.1	Propriétés générales d'un groupe	9
3.1.2	Groupes de Lie	10
3.1.3	Algèbre de Lie	10
3.1.4	Groupes de Lie compacts et leurs algèbres	11
3.2	Théorie des représentations	12
3.2.1	Représentation réductible	12
3.2.2	Représentations importantes	13
3.3	Classification de Cartan des groupes de Lie Simple	14
3.4	Racine, rang et poids	14
3.5	Les opérateurs de Casimir	16
3.6	Les diagrammes de Dynkin	17
3.6.1	La forme de Killing	17
3.6.2	Les vecteurs de racines simples et les vecteurs de poids fondamentaux	17
3.6.3	Les diagrammes de Dynkin	19
3.6.4	Tableaux de Young	20
4	Théories de grande unification: modèle de Georgi-Glashow	23
4.1	Unification des constantes de couplage	23
4.2	Choix du groupe de jauge	24
4.3	Structure du modèle:	25
4.3.1	Fermions et bosons de jauge:	25
4.4	Lagrangien du modèle $SU(5)$	27
4.4.1	Lagrangien des bosons de jauge	27
4.4.2	Lagrangien fermionique	27
4.4.3	Lagrangien associé aux Higgs	29
4.4.4	Lagrangien de Yukawa	32
4.5	Désintégration du proton	34
4.6	Quelques problèmes du modèle $SU(5)$	35
5	Modèle $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$	37
5.1	Lagrangien du modèle	37
5.1.1	Lagrangien bosonique	38
5.1.2	Lagrangien fermionique	38
5.1.3	Lagrangien scalaire	39
5.1.4	Lagrangien de Yukawa	39

5.2	Brisure spontanée de symétrie	40
5.2.1	Masses des scalaires	41
5.2.2	Masses des bosons de jauge	42
5.2.3	Masse des neutrinos et mécanisme de see-saw de type I	43
6	Phénoménologie du boson Z'	45
6.1	Elements de base et outils de calcul	45
6.1.1	Programme de calcul	45
6.1.2	Modèle des Partons	45
6.1.3	Nécessité du calcul NLO	46
6.1.4	Sections efficaces partonique et hadronique à l'ordre NLO	46
6.1.5	Parton shower	49
6.2	Le Boson Z' :	50
6.3	Modes de production et de désintégration	50
6.4	Calcul numérique de la section efficace	53
6.5	Calcul de la section efficace différentielle	60
7	Phénoménologie des neutrinos lourds	67
7.1	Modes de désintégration du fermion ν_h	67
7.2	processus $p p \rightarrow \nu_{h1} \nu_{h1}$	69
7.3	processus $p p \rightarrow Z' \rightarrow \nu_{h1} \nu_{h1}$	70
8	Conclusion générale	73
	Bibliographie	75

Introduction générale

Après la grande réussite du modèle standard, le but ultime des physiciens maintenant est de trouver une théorie unifiant toutes les forces connues de la nature, c'est à dire la gravitation, l'interaction électrofaible et l'interaction forte. Une des premières étapes pour réaliser cela est l'unification entre l'interaction force décrite par la chromodynamique quantique (QCD) et l'interaction électrofaible et prouver que ces deux interactions sont simplement deux manifestations différentes d'une même force. Parmi les théories visant à décrire cette physique "au delà du modèle standard" il y'a les théories de grande unification.

Dans ce travail nous nous intéresserons, premièrement, à la théorie de grande unification basée sur le groupe de jauge $SU(5)$, appelée aussi modèle de Géorgi-Glashow, car elle représente une des premières tentatives visant à réaliser cette unification. Par la suite, nous nous intéresserons au modèle $(B - L)$ minimal qui représente une extension du modèle standard et qui se base sur le groupe de jauge $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{B-L}(1)$.

Ce travail contient, en plus de cette introduction et d'une conclusion, six autres chapitres structurés comme suit:

- *Chapitre 01*

Ce chapitre représente un petit résumé sur le modèle standard, dans le but d'expliquer, brièvement, deux notions fondamentales pour notre travail, qui sont: la brisure spontanée de symétrie et le mécanisme de Higgs.

- *Chapitre 02*

Ce chapitre représente une introduction aux groupes et algèbres de Lie, car chaque théorie de jauge est basée sur un groupe, par conséquent il est impératif de saisir les notions de base de la théorie des groupes en se focalisant sur les groupes de Lie simples. Cela nous permettra, par la suite, de comprendre le choix des groupes de jauge pour ces théories ainsi que la notion de symétrie.

- *Chapitre 03*

Ce chapitre est dédié au modèle de Géorgi-Glashow basé sur le groupe $SU(5)$, qui représente la théorie de grand unification la plus simple. On a commencé par donner les particules du modèle, puis son lagrangien pour terminer avec les deux brisures de symétrie de ce modèle et leurs conséquences.

- *Chapitre 04*

Ce chapitre est consacré au modèle minimal $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$, qui représente une extension du modèle standard qui a pour conséquence l'apparition des neutrinos de chiralité droite comme particules dans ce modèle, permettant ainsi de résoudre le problème de la masse des neutrinos. On expliquera aussi, dans ce chapitre, le mécanisme permettant de générer une petite masse pour les neutrinos légers appelé: mécanisme de seesaw de type I.

- *Chapitres 05 et 06*

Ces deux chapitres sont consacrés, respectivement, à la phénoménologie du boson Z' (qui est le nouveau boson du modèle $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$) et celle des neutrinos lourds. Dans ces deux chapitres on calculera, à l'aide du programme de calcul automatique *Madgraph*, la variation de la section efficace et de la section efficace différentielle en fonction d'un certain nombre de paramètres (comme les échelles de factorisation et de renormalisation) pour quelques processus à l'ordre LO et NLO ainsi que pour les deux cas: *processus avec parton shower* et *processus fixed order*. Le chapitre 05 contient en plus une partie théorique traitant les notions de base du calcul de précisions.

Enfin, on terminera cette thèse avec une conclusion résumant le travail réalisé dans ces chapitres.

Brisure de symétrie et modèle standard

Dans ce chapitre, nous voulons introduire brièvement le modèle standard, qui est une théorie de jauge se basant sur le groupe $SU_L(2) \times U_Y(1)$, où $SU_L(2)$ est le groupe de l'isospin faible et $U_Y(1)$ le groupe de l'hypercharge. Ainsi le modèle standard représente une unification entre l'électromagnétisme et l'interaction faible. Mais en général on y inclut, ad-hoc, l'interaction forte, dans ce cas, la théorie se basera sur le groupe $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$.

L'intérêt qu'on porte au modèle standard est lié au fait qu'il représente la théorie quantique des champs qui a le plus réussi expérimentalement.

Dans ce même chapitre nous allons évoquer aussi le phénomène de brisure spontanée de symétrie via le mécanisme de Higgs.

Après l'expérience de Wu et al, la violation de parité P par l'interaction faible a été prouvée expérimentalement, pour celà, dans le modèle standard, les champs de chiralité gauche et de chiralité droite doivent être représentés différemment. De ce fait, les champs de chiralité gauche sont représentés par des doublets du groupe $SU_L(2)$ (appartenant à la représentation fondamentale du groupe $SU_L(2)$), par contre les champs de chiralité droite sont représentés comme des singlets de $SU(2)$, de plus les leptons ainsi que les quarks sont groupés en trois génération comme suit:

• **Pour les leptons :**

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \quad (2.1)$$

$$R = e_R, \mu_R, \tau_R \quad (2.2)$$

• **Pour les quarks :**

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

$$R = u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R. \quad (2.4)$$

On constate ainsi qu'il n'y a pas de neutrinos de chiralité droite, pour celà, dans le modèle standard, les neutrinos ne sont pas massifs.

2.0.1 Lagrangien du modèle standard

Le Lagrangien du modèle standard associé au groupe $SU_L(2) \times U_Y(1)$, peut s'écrire comme suit:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_Y \quad (2.5)$$

Avec:

- \mathcal{L}_B : représente le Lagrangien bosonique.
- \mathcal{L}_f : représente le Lagrangien fermionique.
- \mathcal{L}_s : représente le lagrangien scalaire.
- \mathcal{L}_Y : représente le lagrangien de Yukawa.

Lagrangien bosonique

Pour le modèle standard, on a trois champs de jauge, W_μ^a , associés au groupe $SU_L(2)$ et un champs de jauge B_μ associé au groupe $U_Y(1)$. Leurs termes cinétiques s'écrivent comme suit:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad (2.6)$$

Où:

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_2 \varepsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (2.7)$$

Avec:

- $a, b, c = 1, 2, 3$.
- g_2 est la constante de couplage du groupe $SU(2)$.
- ε_{abc} est le tenseur totalement antisymétrique de Lévi-civita.

Et:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.8)$$

Lagrangien fermionique

Le lagrangien fermionique du modèle standard s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= \sum_{i=1}^3 \left[i\bar{Q}_{Li}\gamma^\mu D_\mu Q_{Li} + i\bar{L}_i\gamma^\mu D_\mu L + i\bar{u}_{Ri}\gamma^\mu D_\mu u_{Ri} + i\bar{d}_{Ri}\gamma^\mu D_\mu d_{Ri} + i\bar{e}_{Ri}\gamma^\mu D_\mu e_{Ri} \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[i\bar{Q}_{Li}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig_2 W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + i\frac{1}{6}g'B_\mu \right) Q_{Li} \right. \\ &\quad + i\bar{L}_i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig_2 W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - \frac{i}{2}g'B_\mu \right) L_i \\ &\quad + i\bar{u}_{Ri}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{2}{3}g'B_\mu \right) u_{Ri} \\ &\quad + i\bar{d}_{Ri}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{3}g'B_\mu \right) d_{Ri} \\ &\quad \left. + i\bar{e}_{Ri} \left(\partial_\mu - ig'B_\mu \right) e_{Ri} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Avec:

- σ^a représente les matrices de Pauli.
- g' représente la constante de couplage du groupe $U_Y(1)$.

Comme on peut le constater, ce lagrangien ne contient pas de termes de masse car un terme de masse ($m\bar{\Psi}_R\Psi_L + m\bar{\Psi}_L\Psi_R$) briserait l'invariance de jauge, car il n'est pas invariant de jauge sous le groupe $SU(2)_L \times U_Y(1)$. [1] Ainsi, avant la brisure spontanée de symétrie tous les fermions sont de masse nulle.

Lagrangien scalaire

Afin de pouvoir réaliser la brisure spontanée de symétrie, nous devons introduire un doublet de champs scalaires complexes (ϕ), appartenant à la représentation fondamentale de $SU(2)$, et qui s'écrit comme:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Où:

- ϕ^+ est un champ scalaire complexe chargé positivement.

• ϕ_0 est un champ scalaire complexe neutre.

Alors, le lagrangien scalaire est donné par:

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - V(\phi) \quad (2.11)$$

Avec:

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ig_2 W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\phi + ig' \frac{1}{2} B_\mu\phi \quad (2.12)$$

Et:

$$V(\phi) = \mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4 \quad (2.13)$$

Où:

$\mu^2 < 0$ (afin qu'il y ait une brisure spontanée de symétrie) ¹

et

$\lambda > 0$ (condition de stabilité du vide).

Lagrangien de Yukawa

Les interactions de Yukawa pour le modèle standard sont données par:

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{i,j} \left[\Gamma_{ij}^u \bar{Q}_{Li} (i\sigma_2 \phi^\dagger) u_{Rj} + \Gamma_{ij}^d \bar{Q}_{Li} \phi d_{Rj} + \Gamma_{ij}^l \bar{L}_i \phi e_{Rj} \right] + \mathbf{h.c} \quad (2.14)$$

Où:

Γ^u, Γ^d et Γ^l sont des matrices 3×3 complètement arbitraires, qui vont déterminer, après la brisure, la masse des fermions [2] (sans briser l'invariance de jauge).

2.1 Brisure spontanée de symétrie et mécanisme de Higgs

Une des façons de briser la symétrie du lagrangien, afin de donner une masse aux bosons de jauge, est: **La brisure spontanée de symétrie**, elle représente le cas où les états fondamentaux de certaines particules (le vide) ne possèdent pas la symétrie du lagrangien. [3]

Pour la brisure spontanée de symétrie on a deux cas:

Brisure d'une symétrie globale : Dans ce cas, suivant le théorème de Goldstone, à chaque brisure spontanée de symétrie globale on associe un boson scalaire non massif qu'on appelle boson de Goldstone.

Brisure d'une symétrie locale : Dans ce cas, on parle du mécanisme de Higgs (où mécanisme de Brout-Englert-Higgs).

Pour un groupe non abélien, afin de réaliser une brisure spontanée d'une symétrie locale, on suit les étapes suivantes: [4]

1. Définir un groupe non abélien G , ayant d_G générateurs comme groupe de jauge.
2. A ces d_G générateurs, on associe d_G bosons de jauge de spin 1 et appartenant à la représentation adjointe du groupe G .
3. Les fermions du modèle appartiendront à des représentations chirales du groupe G , par contre les bosons de spin 0 appartiendront à des représentations scalaires réelles ou complexes.
4. Pour les champs scalaires et fermioniques, on définit les dérivées covariantes, dans le but d'obtenir un lagrangien renormalisable et invariant de jauge. A partir des dérivées covariantes, nous pouvons déduire l'interaction entre la matière et les bosons de jauge.

¹Pour $\mu^2 > 0$ on a un $vev = 0$, ainsi la symétrie $SU_L(2) \times U_Y(1)$ ne peut être brisée.

5. Afin d'obtenir des bosons de jauge massifs, nous devons introduire un potentiel de Higgs, composé de champs scalaires, ce dernier brisera spontanément la symétrie via le mécanisme de Higgs, si d'un autre côté, les termes de masse des fermions ne sont pas invariants de jauge, il faut aussi introduire des termes d'interactions de Yukawa entre les fermions et les scalaires du potentiel de Higgs.

2.1.1 Brisure spontanée de symétrie dans le modèle standard

Le lagrangien initial de modèle $SU_L(2) \times U_Y(1)$ ne contient pas de termes de masse pour les fermions et les bosons de jauge massifs, ces masses doivent être générées par une brisure spontanée de la symétrie locale par le mécanisme de Higgs.

Mécanisme de Higgs

IL est possible d'écrire le doublet de Higgs dans une base hermitienne comme suit:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Avec: $\phi_i = \phi_i^\dagger$ les champs hermitiens. Le potentiel s'écrit alors comme:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2 \left(\sum_{i=1}^4 \phi_i^2 \right) + \frac{1}{4}\lambda \left(\sum_{i=1}^4 \phi_i^2 \right)^2 \quad (2.16)$$

Afin de simplifier la tâche de minimisation du champ de Higgs, On Effectue une rotation dans $SU_L(2) \times U_Y(1)$, pour écrire le doublet de Higgs comme:

$$\phi \rightarrow \langle \phi \rangle_0 \equiv v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Alors le potentiel de Higgs s'écrit comme:

$$V(\phi) \rightarrow V(v) = \frac{1}{2}\mu^2\nu^2 + \frac{1}{4}\lambda\nu^4 \quad (2.18)$$

Ainsi le minimum du potentiel est donné par:

$$\frac{dV(\nu)}{d\nu} = \nu(\mu^2 + \lambda\nu^2) = 0 \quad (2.19)$$

Ce qui donne:

$$\nu = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (2.20)$$

Et expérimentalement on a $\nu \approx 246 \text{ GeV}$. On voit alors que les opérateurs I_3 et Y n'annihilent pas le vide v , car:

$$\begin{cases} I_3 v = \frac{1}{2}v \neq 0 \\ Y v = v \neq 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Par contre, l'opérateur de la charge électrique n'est pas brisé:

$$Qv = \left(I_3 + \frac{Y}{2} \right) v = 0 \quad (2.22)$$

On dit alors que la symétrie $SU_L(2) \times U_Y(1)$ est brisée à la symétrie $U_{em}(1)$

$$SU_L(2) \times U_Y(1) \rightarrow U_{em}(1) \quad (2.23)$$

Afin de simplifier le reste des calculs, on écrit le doublet scalaire de Higgs comme suit:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\sum_{i=1}^3 \xi^i L^i)} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + H \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Avec:

L^i : les générateurs brisés: $\frac{\sigma^1}{2}$, $\frac{\sigma^2}{2}$ et $\frac{\sigma^3}{2} - Y$.

H : un champ scalaire hermitien.

ξ^i : Les bosons de Goldstone. ces derniers vont être "absorbés" par les bosons de jauge W^\pm et Z formant ainsi leurs composantes longitudinales.

Pour passer à la base de masse, on effectue une transformation de jauge unitaire, ainsi:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i(\sum_{i=1}^3 \xi^i L^i)} \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + H \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

2.1.2 Masse des bosons de jauge

Afin d'obtenir les termes de masse des bosons de jauge, on remplace (2.25) dans le terme cinétique du potentiel de Higgs, on obtient:

$$(D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \nu \end{pmatrix} \left[\frac{g_2}{2} \sigma^i W_\mu^i + \frac{g'}{2} B_\mu \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} + \text{termes en fonction de } H. \quad (2.26)$$

en prenant:

$$W^\pm = \frac{W^1 \mp iW^2}{\sqrt{2}}, \quad \sigma^\pm = \frac{\sigma^1 \pm i\sigma^2}{2} \quad (2.27)$$

Et en écrivant les bosons physiques Z_μ et A_μ comme une combinaison des bosons W_μ^3 et B_μ comme suit:

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_W) & -\sin(\theta_W) \\ \sin(\theta_W) & \cos(\theta_W) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Avec: θ_W est l'angle de Weinberg, donné par:

$$\sin(\theta_W) = \frac{g'}{\sqrt{g_2^2 + g'^2}}, \quad \cos(\theta_W) = \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g'^2}} \quad (2.29)$$

On a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{B,mass} &= \frac{g_2^2 \nu^2}{4} W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{1}{2} (g_2^2 + g'^2) \frac{\nu^2}{4} \left[\frac{-g' B_\mu + g_2 W_\mu^3}{\sqrt{g_2^2 + g'^2}} \right]^2 \\ &\equiv M_W^2 W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{M_Z^2}{2} Z^\mu Z_\mu \end{aligned} \quad (2.30)$$

On conclue alors que:

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{g_2 \nu}{2} \\ M_Z &= \frac{\sqrt{g_2^2 + g'^2} \nu}{2} = \frac{M_W}{\cos(\theta_W)} \\ M_A &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.1.3 Masse du boson de Higgs

En remplaçant par (2.25) dans le potentiel de Higgs on obtient:

$$V(\phi) = -\frac{\mu^4}{4\lambda} - \mu^2 H^2 + \lambda \nu H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4 \quad (2.32)$$

Alors: la massr du boson de Higgs est donnée par:

$$M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda} \nu \quad (2.33)$$

2.1.4 Masse des fermions

Ainsi, après la brisure spontanée de symétrie, le potentiel de Yukawa devient:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= \sum_{i,j=1}^3 \bar{u}_{Li} \Gamma_{ij}^u \left(\frac{\nu + H}{\sqrt{2}} \right) u_{Rj} + \text{termes de } (d, e) + \mathbf{h.c} \\ &= \bar{u}_L (M^u + h^u H) u_R + \text{termes de } (d, e) + \mathbf{h.c} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Où:

u_L est un vecteur à trois (nombre de générations) composantes, donné par:

$$u_L = \begin{pmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \\ u_{L3} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Et,

M^u est une matrice 3×3 donnée par:

$$M_{ij}^u = \Gamma_{ij}^u \frac{\nu}{\sqrt{2}} \quad (2.36)$$

Ainsi afin de trouver les masses des quarks de charge égale à $\frac{2}{3}e$, il faut trouver les valeurs propres de la matrice M , alors afin de diagonaliser la matrice M , on effectue la transformation bi-unitaire suivante:

$$A_L^{u\dagger} M^u A_R^u = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Obtenant ainsi les masses de ces quarks. Et, les états propres associés sont donnés par:

$$u_{L,R}^m = A_{L,R}^{u\dagger} u_{L,R} \quad (2.38)$$

De la même manière, on obtient les masses des quarks de charge $(-\frac{1}{3}e)$ ainsi que celles des leptons.

2.2 Problème du modèle standard et théories de grande unification

Malgré toutes les réussites expérimentales du modèle standard, il a tout de même un certain nombre de problèmes comme:

1. Le modèle standard est en désaccord avec les résultats expérimentaux en ce qui concerne la masse des neutrinos, en effet les résultats expérimentaux prouvent que les neutrinos possèdent une masse non nulle.
2. Le modèle standard ne donne pas une explication claire de l'asymétrie matière-antimatière.
3. La gravitation n'est pas incluse dans le modèle standard.
4. Le groupe du modèle standard n'est pas un groupe simple, ainsi à l'échelle électrofaible, on a des valeurs différentes pour les constantes de couplage.
5. L'hypercharge, et par la suite la charge électrique, n'est pas quantifiée.

Ces problèmes du modèle standard ont poussé les physiciens à proposer des théories décrivant la physique au-delà du modèle standard, parmi les idées proposées celles des théories de grande unification. Ces dernières consistent à construire un lagrangien possédant comme groupe de jauge un groupe compact plus grand que celui du modèle standard, ainsi à partir de ce lagrangien et après un certain nombre de brisures spontanées de symétrie on arrive aux interactions du modèle standard, avec, possiblement, de nouvelles interactions.[2]

Groupes de Lie, Algèbres de Lie et leurs représentations

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux groupes en général mais particulièrement aux groupes de Lie, à leurs algèbres associées, ainsi qu'à la théorie des représentations. Ceci nous permettra de mieux saisir la particularité de ces groupes, par la suite, nous nous focaliserons sur les groupes de Lie simples tels que: le groupe spécial unitaire $SU(n)$ et le groupe special orthogonal $SO(2n)$.

3.1 Groupes et Algèbres de Lie

3.1.1 Propriétés générales d'un groupe

Un groupe $(G, *)$ est un ensemble d'éléments muni d'une loi de composition et vérifiant les propriétés suivantes:

1. **Relation de fermeture:** Si g_1, g_2 deux éléments de G , alors $g_1 * g_2$ est lui aussi un élément de G :

$$\forall g_1, g_2 \in G, g_1 * g_2 \in G \quad (3.1)$$

2. **Existence d'un élément neutre:** Il existe un élément neutre e dans G tel que: pour tout élément g dans G la relation $g * e = e * g = g$ est vérifiée

$$\forall g \in G, \exists e \in G : g * e = e * g = g \quad (3.2)$$

3. **Existence d'un élément inverse:** pour tout élément g dans G , il existe g^{-1} dans G vérifiant: $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$

$$\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G : g * g^{-1} = g^{-1} * g = e \quad (3.3)$$

4. **Associativité:** Si g_1, g_2 et g_3 sont trois éléments de G , alors ils satisferont la relation suivante: $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$.

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G : (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3) \quad (3.4)$$

- Si de plus la loi de composition est **commutative** ç.à.d:

$$\forall g_1, g_2 \in G : g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \quad (3.5)$$

alors le groupe est dit **commutatif** ou **abélien**, dans le cas contraire le groupe est dit **non abélien**.

- Un groupe peut avoir un **ordre** fini ou infini, c'est à dire un nombre d'éléments fini ou infini, dans le second cas le groupe peut être discret ou continu.

3.1.2 Groupes de Lie

Un groupe de Lie est un groupe qui, en plus de sa structure de groupe, possède des propriétés topologiques faisant de lui une variété différentiable, c'est à dire qu'il est **localement plat** et au voisinage de tout point il ressemble à \mathbb{R}^N (i.e il est localement **homéomorphe**¹ à \mathbb{R}^N), où N est la dimension du groupe (nombre de paramètres réels indépendants du groupe). Donc les éléments du groupe, du moins ceux au voisinage proche de l'identité, peuvent s'écrire de la sorte:

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha^i T_i + O(\alpha^2) \quad (3.6)$$

Où:

- Les α^i sont les paramètres réels du groupe.
- Les T_i sont les **générateurs** du groupe, qui sont des vecteurs appartenant à un espace vectoriel, qui est l'espace tangent au groupe en l'identité [5], et ce sont eux qui forment l'**algèbre de Lie** associée à ce groupe.

3.1.3 Algèbre de Lie

Une algèbre de Lie est, avant tout, un espace vectoriel T sur un corps K , mais cet espace est doté d'une application bilinéaire appelée crochet de Lie ou commutateur qui est défini comme:

$$[,] : T \times T \rightarrow T \quad (3.7)$$

et cette dernière vérifie les trois propriétés suivantes:

1. Bilinéarité:

$$\forall T_i, T_j, T_l \in T, \forall a, b \in K : [aT_i + bT_j, T_l] = [aT_i, T_l] + [bT_j, T_l]. \quad (3.8)$$

2. Alternance:

$$\forall T_i \in T : [T_i, T_i] = 0. \quad (3.9)$$

3. Identité de Jacobi:

$$\forall T_i, T_j, T_l \in T, [T_i, [T_j, T_l]] + [T_j, [T_l, T_i]] + [T_l, [T_i, T_j]] = 0 \quad (3.10)$$

À partir de ces propriétés nous avons:

$$\forall T_i, T_j, 0 = [T_i + T_j, T_i + T_j] = [T_i, T_i] + [T_i, T_j] + [T_i, T_i] + [T_j, T_i] = [T_i, T_j] + [T_j, T_i] \quad (3.11)$$

Alors:

$$[T_i, T_j] = -[T_j, T_i] \quad (3.12)$$

Donc, le crochet de Lie est **antisymétrique**.

Classification des Algèbres de Lie

On peut classer les algèbres de Lie en trois catégories: Les algèbres de Lie simples, semi-simples et non semi-simples mais pour cela nous devons d'abord introduire la notion de **sous algèbre invariante** ou **idéale**.

Une sous algèbre invariante I : est un sous ensemble de générateurs appartenant à une algèbre T et qui vérifient la relation de commutation suivante:

$$\forall I_j \in I, \forall T_k \in T : [I_j, T_k] \subseteq I \quad (3.13)$$

¹Un homéomorphisme: est une application bijective continue d'un espace topologique dans un autre et dont l'application inverse est bijective et continue aussi.

À partir de cette définition nous pouvons déjà constater qu'il existe deux sous algèbres triviales qui sont l'espace nul 0 ainsi que l'algèbre T toute entière.

Maintenant nous pouvons définir les trois catégories d'Algèbres:

• **Algèbre de Lie simple:** c'est une algèbre de Lie non-abélienne et qui de plus ne possède aucune sous algèbre invariante non triviale. Durant le reste de ce travail notre attention se portera sur cette catégorie d'algèbres car l'algèbre que nous voulons étudier ($\mathfrak{su}(5)$) est une algèbre de Lie simple et qui va par la suite générer un groupe de Lie simple [6], de plus grâce à Cartan nous avons une Classification complète des groupes de Lie compact simple.

Remarque 1. Pour tout n , $\mathfrak{su}(n)$ est une algèbre de Lie simple.

Pour $n > 4$, $\mathfrak{so}(n)$ est une algèbre de Lie simple.

• **Algèbre de Lie semi-simple:** c'est une algèbre de Lie qui possède des sous algèbres invariantes mais qui sont non abéliennes, c'est à dire que pour tous ses idéaux on a:

$$[I, T] \neq 0 \subseteq I \quad (3.14)$$

• **Algèbre de Lie non semi-simple:** c'est une algèbre de Lie qui possède des sous algèbres invariantes dont certaines sont abéliennes, c'est à dire que pour certains de ses idéaux on a:

$$[I_i, I_j] = [I_j, I_i] \subseteq I \quad (3.15)$$

3.1.4 Groupes de Lie compacts et leurs algèbres

Dans le cadre de notre étude, nous nous limiterons aux groupes de Lie compacts et simples. Un groupe de Lie abstrait G , dépendant d'un ensemble de paramètres réels **continus** α_i tel que $i = 1, \dots, n$, est dit compact si l'ensemble de ses paramètres est **fermé**² et **borné**.

Pour ces groupes, un élément du groupe peut s'écrire en fonction des vecteurs de l'algèbre associée comme:

$$g = e^{i\alpha^a T_a} \quad (3.16)$$

où: les T_a sont les générateurs du groupe, et ils sont des éléments de l'algèbre de Lie .

• les générateurs de groupe vérifient la relation de commutation suivante:

$$\forall T_i, T_j \in T, \quad [T_i, T_j] = i f_{ijk} T_k \quad (3.17)$$

où les f_{ijk} sont appelées **les constantes de structure** et elles sont **réelles** et **antisymétriques** pour les trois indices.

À partir de la relation (3.10), on trouve que :

$$f_{jkl} f_{ilm} + f_{ijl} f_{klm} + f_{kil} f_{jlm} = 0 \quad (3.18)$$

• Une des propriétés importantes des groupes compacts est qu'ils possèdent des représentations unitaires ($D^\dagger(g) = D^{-1}(g)$) [6].

L'exemple le plus connu d'un groupe de Lie est celui du groupe $SU(2)$ (groupe de spin ou de l'isospin), dont les générateurs (qui sont, dans la représentation fondamentale, représentés par les matrices de Pauli) vérifient la relation de commutation suivante:

$$[T_i, T_j] = i \varepsilon_{ijk} T_k \quad (3.19)$$

où ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita.

²un ensemble est dit fermé, si la limite de toute suite convergente de ses éléments appartient à l'ensemble.

3.2 Théorie des représentations

Représentation: Une représentation d'un groupe G est un **homomorphisme** D de G dans un groupe d'**opérateurs linéaires** agissant sur un espace vectoriel linéaire[7]. Ici, nous nous intéressons seulement au cas où ces opérateurs linéaires sont des **matrices**, c'est ce qu'on appelle **les représentations matricielles** .

Représentation matricielle: Une représentation matricielle est un homomorphisme D du groupe G dans un sous groupe S du groupe **général linéaire** $GL(n, \mathbb{C})$ ³, cet homomorphisme doit satisfaire les conditions suivantes:

$$\forall g_i \in G, g_i \rightarrow D(g_i) \in GL(n, \mathbb{C}) \quad (3.20)$$

$$\forall g_i, g_j \in G, D(g_i \cdot g_j) = D(g_i)D(g_j) \quad (3.21)$$

$$D(e_G) = \mathbb{I} \quad (3.22)$$

$$\forall g \in G, D(g^{-1}) = (D(g))^{-1} \quad (3.23)$$

où \mathbb{I} est la matrice identité dans $GL(n, \mathbb{C})$.

- **Représentation triviale:** c'est celle qui, a chaque élément de G associe la matrice identité \mathbb{I} .
- **Représentation unitaire:** Une représentation de G est dite unitaire si pour tout $g \in G$, la matrice $D(g)$ est unitaire, c'est à dire :

$$D(g)^\dagger D(g) = \mathbb{I} \quad (3.24)$$

Donc,

$$D(g^{-1}) = D^{-1}(g) = D(g)^\dagger \quad (3.25)$$

Theorème 1. [7]

Une représentation d'un groupe de Lie fini ou compact par des matrices inversibles à déterminants non nuls, peut toujours être transformée en une représentation unitaire, où les matrices appartenant aux deux représentations sont des matrices semblables⁴

Ce théorème va nous permettre de travailler, pour les groupe de Lie compacts seulement avec des représentations unitaires($D(g)^\dagger = D(g^{-1})$).

3.2.1 Représentation réductible

Sous espace invariant : Un sous espace W d'un espace vectoriel V est un sous espace de dimension inférieure à celle de V (mais non nulle) qui reste invariant sous l'action d'une représentation $D(g)$ tel que :

$$\forall v \in W, \quad D(g)v = v' \in W \quad (3.26)$$

Représentation réductible : Une représentation est dite réductible si elle possède un sous espace invariant. Alors si on introduit un opérateur de projection P sur ce sous espace ceci peut s'écrire comme suit :

$$PD(g)P = D(g)P, \quad \forall g \in G \quad (3.27)$$

- Une représentation est **complètement réductible** si elle est équivalente à une représentation dont les matrices sont des matrices par blocs diagonales dont les éléments diagonaux sont des matrices appartenant à des représentations irréductibles, de ce fait les matrices de cette représentation peuvent s'écrire comme une somme direct de représentations irréductibles D_i :

$$S^{-1}D(g)S = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \quad (3.28)$$

³ $GL(n, \mathbb{C})$ est le groupe formé par l'ensemble des matrices carrées ($n \times n$) à coefficients dans \mathbb{C} et à déterminant non nul (inversibles) muni d'une loi de composition interne qui est la multiplication des matrices et qui est de plus un groupe de Lie non compact de dimension réelle $2n^2$

⁴Deux matrices $M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{C})$ sont dites semblables si elles sont la représentation d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, c-à-d qu'il existe une matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $M_1 = AM_2A^{-1}$.

• Pour un groupe de Lie compact, si une représentation est réductible, elle est alors complètement réductible .[7]

Représentation Conjuguée: Pour toute représentation irréductible $D(g)$ on peut associer une autre représentation dite la représentation Conjuguée $\bar{D}(g)$, les générateurs de cette dernière sont définis comme suit:

$$T_i^{\bar{D}} = -(T_i^D)^* \quad (3.29)$$

Alors, si:

$$T_i^{\bar{D}} = VT_i^D V^\dagger \quad (3.30)$$

où V est une matrice unitaire, alors si les deux représentations $D(g)$ et $\bar{D}(g)$ sont **équivalentes** la représentation est dite **réelle**, et si les deux représentation ne sont pas équivalentes alors la représentation est dite **complexe** .

Remarque 2. *Tous les groupes de Lie ont des représentations réelles, par contre ils n'ont pas tous des représentations complexes, pour notre cas nous nous intéressons beaucoup plus au groupe $SU(5)$ et ce dernier possède des représentations complexes.*

3.2.2 Représentations importantes

Dans le reste de notre travail nous nous intéresserons beaucoup plus à deux types de représentations:

1. **La représentation fondamentale :** C'est la représentation avec laquelle on définit le groupe et elle est la plus petite représentation irréductible et non triviale du groupe.

Exemple : La représentation fondamentale du groupe $SU(n)$ est l'ensemble des matrices complexes $n \times n$ unitaires et à déterminant égal à l'unité, par contre celle du groupe $SO(n)$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ réelles, orthogonales et à déterminant égal à l'unité.

2. **La représentation adjointe :**

Soit $(L, [,])$ une algèbre de Lie complexe, et $T_i \in L$ on définit alors:

$$adj_i : L \longrightarrow L$$

$$T_j \longrightarrow adj_i(T_j) := [T_i, T_j] = if_{ijk}T_k \quad (3.31)$$

Nous avons alors:

$$[adj_i, adj_j](T_k) = [T_i, [T_j, T_k]] - [T_j, [T_i, T_k]]$$

A l'aide de l'identité de Jacobi on obtient:

$$[adj_i, adj_j](T_k) = if_{ijl}adj_l(T_k) \quad (3.32)$$

Alors l'action adj_i forme une représentation de l'algèbre de Lie appelée **représentation adjointe**. La forme matricielle explicite des éléments de la représentation adjointe est donnée par le biais des constantes de structure tel que :

$$(adj_i)_{jk} = -if_{ijk} \quad (3.33)$$

Posant alors $adj_i = K_i$, et à partir de la relation (3.18) nous obtenons la relation de commutation suivante :

$$[K_i, K_j] = if_{ijl}K_l \quad (3.34)$$

On constate alors que ces nouvelles matrices vérifient la relation qui définit l'algèbre de Lie, et peuvent de ce fait être considérées comme étant des éléments d'une représentation de l'algèbre de notre groupe et la représentation du groupe associée est dite **représentation adjointe**. La représentation adjointe peut être alors considérée comme étant la représentation générée par les constantes de structure du groupe.

3.3 Classification de Cartan des groupes de Lie Simple

Cartan a pu réaliser une classification complète contenant toutes les algèbres de Lie simples et les groupes de Lie associés, cette classification contient les groupes suivants:

Groupe	Nom du groupe	Rang	Dimension	rep complexe
$SU(n)$	spécial unitaire	$n - 1$	$n^2 - 1$	$n \geq 3$
$SO(2n)$	spécial orthogonal	n	$n(2n - 1)$	$n = 2l + 3 \quad l \geq 1$
$SO(2n + 1)$	spécial orthogonal	n	$n(2n + 1)$	Non
$Sp(2n)$	symplectique	n	$n(2n + 1)$	Non
G_2	G_2	2	14	Non
F_4	F_4	4	52	Non
E_6	E_6	6	78	Oui
E_7	E_7	7	133	Non
E_8	E_8	8	248	Non

3.4 Racine, rang et poids

Vu que les éléments d'un groupe de Lie sont définis à partir des générateurs de l'algèbre associée, certaines propriétés de ces éléments sont étroitement liées aux propriétés des générateurs, ceci nous pousse alors à mener une analyse plus détaillée de ces derniers.

Tout d'abord nous voulons par des combinaisons linéaires **diagonales** de nos générateurs former un sous ensemble particulier de générateurs H_i avec $i = 1, 2, \dots, m$ ayant les propriétés suivantes (pour une représentations irréductible $D(g)$ donnée):

1. $H_i = \sum_{\alpha} C_{\alpha} T_{\alpha}$, avec α de 1 à r (le nombre de générateurs)
2. $H_i = H_i^{\dagger}$
3. $[H_i, H_j] = 0$
4. $Tr[H_i H_j] = k_D \delta_{ij}$, où k est une constante dépendant de la représentation et de la normalisation des générateurs.
5. m est le plus grand nombre possible de ces générateurs.

En d'autres termes, ces générateurs, appelés **générateurs de Cartan** sont **hermitiens, diagonalisables** et **linéairement indépendants**.

On définit alors le **rang m** comme étant le nombre maximum d'opérateurs hermitiens diagonalisables, ceci peut être interprété physiquement comme étant le nombre maximum de nombres quantiques pouvant décrire un état quantique. Le sous ensemble regroupant ces m générateurs est appelés **sous algèbre de Cartan**.

Etant donné que les générateurs de Cartan commutent entre eux ils ont alors les mêmes vecteurs propres, donc après diagonalisation de ces générateurs les états propres, dans une représentation donnée D , peuvent s'écrire comme $|\mu, x, D\rangle$ où:

$$H_i |\mu, x, D\rangle = \mu_i |\mu, x, D\rangle \quad (3.35)$$

où x est tout autre nombre quantique nécessaire pour spécifier l'état.

Les valeurs propres μ_i sont appelés les **poids**, et vu que les générateur H_i sont hermitiens elles sont réelles, alors avec m générateurs de Cartan nous pouvons former un vecteur à m composantes μ_i appelé le **vecteur de poids**.

Enfin, nous pouvons, pour une algèbre de Lie semi-simple de rang m , diviser nos générateurs en deux groupes:

1. Les générateurs de Cartan H_i avec $i = 1, 2, \dots, m$.
2. Les générateurs de création et d'annihilation E_α avec $\alpha = m + 1, \dots, r$

- Intéressant nous maintenant aux poids de la représentations adjointe, dans cette dernière chaque état correspond à un générateur, nous pouvons alors opter pour la notation suivante:

$$T_i \longrightarrow |T_i\rangle \quad (3.36)$$

L'action d'un générateur sur un autre est définie comme étant le commutateur entre les deux, et en prenant en considération que: $[H_i, H_j] = 0$ on a en représentation adjointe:

$$H_i |H_j\rangle = |[H_i, H_j]\rangle = 0 \quad (3.37)$$

De ce fait, dans cette représentation, tous les états ayant des vecteurs poids nuls correspondent à des générateurs de Cartan

.Le reste des états $|E_\alpha\rangle$ qui correspondent aux opérateurs de créations et d'annihilation vérifient la relation suivantes:

$$H_i |E_\alpha\rangle = [H_i, E_\alpha] = \rho_i(\alpha) E_\alpha \quad (3.38)$$

Avec $i = 1, 2, \dots, m$ et $\alpha = 1, 2, \dots, r - m$.

Pour une valeur de α donnée, les poids ρ_i sont appelées **racines**, nous pouvons alors former avec ces dernières un vecteur $\rho(\alpha)$ à $(r - m)$ composantes appelé **vecteur de racines**.

De la même manière nous pouvons former un vecteur \mathbf{H} dont les composantes sont les m opérateurs H_i , nous obtenant alors la relation suivante:

$$[\mathbf{H}, E_\alpha] = \rho(\alpha) E_\alpha \quad (3.39)$$

En prenant l'adjoint de la relation précédente, nous obtenons :

$$[\mathbf{H}, E_\alpha^\dagger] = -\rho(\alpha) E_\alpha^\dagger \quad (3.40)$$

Alors si $\rho(\alpha)$ est un vecteur de racines, alors $-\rho(\alpha)$ est aussi un vecteur de racines.[7]

Optons maintenant pour la normalisation suivante:[8]

$$\langle E_\alpha | E_\beta \rangle = \lambda^{-1} Tr[E_\alpha^\dagger E_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.41)$$

$$\langle H_i | H_j \rangle = \lambda^{-1} Tr[H_i H_j] = \delta_{ij} \quad (3.42)$$

Nous obtenons ainsi **la forme standard** des relations de commutation:

$$[H_i, H_j] = 0 \quad (3.43)$$

$$[\mathbf{H}, E_\alpha] = \rho(\alpha) E_\alpha \quad (3.44)$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \rho(\alpha) \mathbf{H} \quad (3.45)$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} & \text{si } \rho(\alpha) + \rho(\beta) \text{ est un vecteur non nul} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.46)$$

où les $N_{\alpha\beta}$ peuvent être directement calculés en sachant \mathbf{H} et \mathbf{E} .

Theorème 2. [7]

Si $\rho(\alpha)$ et $\rho(\beta)$ sont deux vecteurs de racines, alors le produit scalaire entre eux obéit aux relations suivantes:

$$\frac{\rho(\alpha) \cdot \rho(\beta)}{\rho^2(\alpha)} = \frac{1}{2} m \quad (3.47)$$

$$\frac{\rho(\alpha) \cdot \rho(\beta)}{\rho^2(\beta)} = \frac{1}{2} n \quad (3.48)$$

où m et n sont deux entiers.

En multipliant les deux relations précédentes, nous pouvons alors définir l'angle ϕ entre les deux vecteurs comme:

$$\cos^2 \phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}mn \quad (3.49)$$

Ainsi ce théorème implique que pour un rang donné il y'a un nombre fini d'algèbres semi-simples et compactes.

3.5 Les opérateurs de Casimir

Pour une algèbre de Lie compacte, on définit un opérateur de Casimir C comme étant la somme des carrés de tous les générateurs de l'algèbre, tel que:

$$C = \sum_{i=1}^N T_i T_i \equiv T_i T_i \quad (3.50)$$

En utilisant la propriété d'antisymétrie des constantes de structure, on a :

$$\begin{aligned} [C, T_j] &= [T_i T_i, T_j] = [T_i, T_j] T_i + T_i [T_i, T_j] \\ &= i f_{ijk} T_k T_i + i T_i f_{ijk} T_k = i(f_{ijk} + f_{kji}) T_k T_i = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

De plus, pour les représentations irréductibles générées par ces générateurs, nous avons:

$$[C, D(\alpha)] = [C, \exp(i\alpha_i T_i)] = 0 \quad (3.52)$$

Alors, d'après le lemme de Schur ⁵, nous déduisons que l'opérateur C doit être un multiple de la matrice identité:

$$C = c(D)\mathbb{I} \quad (3.53)$$

où c est une constante dépendant de la représentation $D(\alpha)$, et elle est donnée par:

$$c(D) = \text{Tr}(T_i T_i) / \text{Tr}\mathbb{I} \quad (3.54)$$

Exemple 1. :

Afin de mieux cerner les notions précédentes, un des exemples le plus simple est celui du groupe $SU(2)$, ce dernier possède 3 générateurs J_i , et ces derniers vérifient la relation (3.19).

Dans la représentation fondamentale les générateurs de $SU(2)$ sont donnés par:

$$J_i = \frac{\sigma_i}{2} \quad (3.55)$$

où les σ_i représentent les matrices de Pauli.

Tout élément du groupe s'écrit alors comme:

$$u(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp[i(\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3)] \quad (3.56)$$

On peut faire des combinaisons linéaires de ces générateurs afin d'obtenir:

1. Un opérateur hermitien diagonal J_3 ;
2. Un opérateur de création $J_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 + iJ_2)$;
3. Un opérateur d'annihilation $J_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 - iJ_2)$.

⁵**Lemme de Schur** : Toute matrice qui commute avec tous les éléments d'une représentation irréductible de dimension finie, $D(g)$, d'un groupe G , doit être un multiple de la matrice identité.

On voit qu'on a un seul opérateur hermitien diagonal, donc le rang du groupe est égal à 1.

On introduit maintenant des vecteurs d'état $|j, m\rangle$, où j désigne la représentation (j étant le poids le plus élevé de la représentation), et m est le poids associés à l'état, ces états vérifient la relation suivante:

$$J_3|j, m\rangle = m|j, m\rangle \quad (3.57)$$

Avec $j = m_{max}$.

De plus,

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad (3.58)$$

Ainsi pour les racines, nous avons deux valeurs pour α , et celles-ci correspondent à deux vecteurs de racines $\rho(\alpha)$ à une composantes :

$$\begin{aligned} \rho(-1) &= (-1) \\ \rho(1) &= (1) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Enfin, l'opérateur de Casimir du groupe $SU(2)$ est donné par :

$$C = (J_1)^2 + (J_2)^2 + (J_3)^2 = c(D)\mathbb{I} \quad (3.60)$$

Et pour la représentation fondamentale on a :

$$\begin{aligned} c(\mathbf{2}) &= Tr \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} \sigma_i \right)^2 \right) / tr(\mathbb{I}) \\ &= \frac{3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (3.61)$$

3.6 Les diagrammes de Dynkin

Dans cette section nous allons nous intéresser à la représentation géométrique associée aux vecteurs de racines et qui va aboutir aux diagrammes de Dynkin, mais avant cela nous devons introduire de nouvelles notions.

3.6.1 La forme de Killing

la forme de Killing est une forme bilinéaire, elle représente le produit scalaire de l'algèbre et donne la métrique $g_{\alpha\beta}$ associée aux matrices de Cartan. Elle est définie en terme de la représentation adjointe de la sorte :

$$g_{\gamma'\gamma} = tr(adj(T_{\gamma'})adj(T_{\gamma})) \quad (3.62)$$

Pour une algèbre de dimension finie, la trace est cyclique, alors:

$$g_{\gamma'\gamma} = g_{\gamma\gamma'} \quad (3.63)$$

3.6.2 Les vecteurs de racines simples et les vecteurs de poids fondamentaux

Les vecteurs de poids positifs

Nous voulons maintenant classer nos vecteurs de poids $\rho(\alpha)$ en deux catégories, vecteurs positifs et vecteurs négatifs, pour cela nous devons d'abord choisir une base arbitraire pour la sous-algèbre de Cartan, ainsi nous fixons les composantes des vecteurs de poids α_i . Nous adoptons la définition suivante :

Un vecteur de poids est :

- **positif** si la première composante non nulle est positive.
- **négatif** si la première composante non nulle est négative.

Maintenant avec cette définition nous pouvons ordonner nos vecteurs de la manière suivante:

$$\rho(\alpha) > \rho(\beta) \quad \text{si } \rho(\alpha) - \rho(\beta) \text{ est positif} \quad (3.64)$$

Dans la représentation adjointe, les vecteurs de racines positifs correspondent aux opérateurs de création, et les vecteurs de racines négatifs correspondent aux opérateurs d'annihilation. Avec les notions précédentes nous pouvons définir l'état associé au **vecteur de poids le plus élevé** comme étant l'état annihilé par tous les opérateurs associés aux racines positives.

La formule de Master

Pour les algèbres simples, à chaque paire de vecteurs de poids $(\pm\rho(\alpha))$, nous pouvons associer une sous algèbre $SU(2)$ avec les générateurs suivants:

$$\begin{aligned} E^\pm &\equiv |\rho(\alpha)|^{-1} E_{\pm\alpha} \\ E_3 &\equiv |\rho(\alpha)|^{-2} \rho(\alpha) \cdot \mathbf{H} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Ces derniers vérifient les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} [E_3, E^\pm] &= \pm E^\pm \\ [E^+, E^-] &= E_3 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Et chaque représentation irréductible de l'algèbre peut être décomposée en ces représentations irréductibles de $SU(2)$.

Pour une représentation donnée D un état de vecteur de poids $\rho(\mu)$ est donné par $|\mu, x, D\rangle$. Cet état peut être écrit comme une combinaison linéaire d'états qui se transforme suivant une représentation donnée de $SU(2)$. Supposons maintenant que pour ces derniers le poids le plus élevé est j donc:

- Il existe un entier positive p tel que:

$$(E^+)^p |\mu, x, D\rangle \neq 0 \quad (3.67)$$

L'état obtenu a pour vecteur des poids $(\rho(\mu) + p\rho(\alpha))$, si par ailleurs on a :

$$E^+ (E^+)^p |\mu, x, D\rangle = (E^+)^{p+1} |\mu, x, D\rangle = 0 \quad (3.68)$$

Alors l'état obtenu est **l'état le plus élevé** de l'algèbre, ainsi:

$$\begin{aligned} E_3((E^+)^p |\mu, x, D\rangle) &= \frac{\rho(\alpha)(\rho(\mu) + p\rho(\alpha))}{(\rho(\alpha))^2} \\ &= \frac{\rho(\alpha)\rho(\mu)}{(\rho(\alpha))^2} + p \\ &= j \end{aligned} \quad (3.69)$$

Alors, nous avons:

$$\frac{\rho(\alpha)(\rho(\mu) + p\rho(\alpha))}{(\rho(\alpha))^2} = \frac{\rho(\alpha)\rho(\mu)}{(\rho(\alpha))^2} + p = j \quad (3.70)$$

D'un autre coté, On peut trouver un entier positif q qui vérifie :

$$\begin{aligned} (E^+)^q |\mu, x, D\rangle &\neq 0 \\ \text{mais} & \\ E^+ (E^+)^q |\mu, x, D\rangle &= (E^+)^{q+1} |\mu, x, D\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

On obtient alors un vecteur de poids $(\rho(u) - q\rho(\alpha))$, et la valeur associée à E_3 est donnée par :

$$\frac{\rho(\alpha)(\rho(\mu) - q\rho(\alpha))}{(\rho(\alpha))^2} = \frac{\rho(\alpha)\rho(\mu)}{(\rho(\alpha))^2} - q = -j \quad (3.72)$$

A partir de (3.70) et (3.72) nous obtenons la **la formule de Master** :

$$\frac{\rho(\alpha)\rho(\mu)}{(\rho(\alpha))^2} = -\frac{1}{2}(p - q) \quad (3.73)$$

avec

$$p + q = 2j \quad (3.74)$$

Les vecteurs de racines simples

Avec la définition des vecteurs de poids positifs et négatifs, nous pouvons alors classer nos vecteurs de racines en deux ensembles, l'ensemble des vecteurs positifs et l'ensemble des vecteurs négatifs. Dans ces deux ensembles les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. Alors on forme une famille (une collection) π de vecteurs de racines positifs mais qui ne peuvent pas être écrit comme une somme d'autres vecteurs de racines positifs. Ces vecteurs là sont appelés **les vecteurs de racines simples** $\pi(\alpha)$ et ils ont les propriétés suivantes:

1. Ils sont linéairement indépendants, alors la famille est libre, de plus le nombre de ces vecteurs est égal à m , le rang de l'algèbre.
2. Pour tout vecteur de racines positif, on a :

$$\exists n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que: } \rho(\alpha) = \sum_{i=1}^m n_i \pi_i(\alpha) \quad (3.75)$$

3. L'angle θ entre ces vecteurs est compris entre :

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \quad (3.76)$$

Les vecteurs de poids fondamentaux

A partir des vecteurs de racines simples, et à l'aide de formule de Master (3.73), nous pouvons construire une famille de r vecteurs $\rho(q)$ vérifiant la relation :

$$2 \frac{\rho(q)^i \rho(\alpha)^j}{(\rho(\alpha)^j)^2} = \delta^{ij} \quad (3.77)$$

Ces vecteurs là sont appelés vecteurs de racines fondamentaux.

Pour toute représentation irréductible, il est possible d'écrire le vecteur de poids le plus élevé de la représentation comme :

$$\rho(\nu)^{hw} = \sum_{i=1}^r a_i (\rho(q))^i \quad (3.78)$$

Où les $a_i = q_i - p_i$ sont appelés les coefficients de Dynkin.

3.6.3 Les diagrammes de Dynkin

Les diagrammes de Dynkin sont une représentation géométrique des vecteurs de racines simples, ainsi que les angles entre eux.

D'après la formule (3.49), L'angle entre deux racines simples $\rho(\alpha)$, $\rho(\beta)$ est donnée par:

$$\cos(\phi_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \sqrt{mn} \quad (3.79)$$

Donc $mn < 4$ et alors m et n peuvent prendre un nombre fini de valeurs, et on obtient:

1. $m = n = 0 \Rightarrow \phi_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{2}$

2. $m = n = 1 \Rightarrow \phi_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{3}$
3. $m = 2, n = 1 \Rightarrow \phi_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4}$
4. $m = 3, n = 1 \Rightarrow \phi_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{6}$

Ainsi, nous pouvons résumer les lois pour construire les diagrammes de Dynkin :

1. A chaque vecteur de racines simples, on associe un cercle.
2. chaque deux cercles successifs sont connectés par :
 - **Une seule ligne** si $\phi_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{3}$
 - **Deux lignes** si $\phi_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4}$
 - **Trois lignes** si $\phi_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{6}$
 - Pour le cas où $\phi_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{2}$, les deux vecteurs sont orthogonaux, et les deux cercles ne sont pas connectés.
3. Pour une algèbre semi-simple, le diagramme sera composé de parties disjointes, par exemple le diagramme associé à $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ est donné par deux cercles disjointes.
4. Enfin pour deux vecteurs de normes différentes, on trace une flèche qui pointe vers le vecteur de plus petite norme, où bien on dessine tous les vecteurs de petite norme en points noirs.
 - Le point fort des diagrammes de Dynkin est qu'il résume les caractéristiques des algèbres, de plus deux groupes localement isomorphes ont le même diagramme.

Quelques diagrammes de Dynkin

$SO(3) \simeq SU(2)$	\circ
$SU(5)$	$\circ - \circ - \circ - \circ$
$SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$	$\circ \circ$
$SO(5)$	$\circ = \circ$

3.6.4 Tableaux de Young

Une des méthodes les plus faciles pour obtenir des représentations irréductibles à partir de représentations fondamentales plus simples est celle des tableaux de Young.

Prenons maintenant l'exemple des groupes $SU(n)$, afin d'obtenir des représentations irréductibles de dimensions supérieures il suffit de suivre les étapes suivantes :

- (a) A la représentation fondamentale (\mathbf{N}) on associe une case.
- (b) La représentation conjuguée ($\overline{\mathbf{N}}$) est représentée par une colonne contenant $(N - 1)$ cases. Les représentations de dimensions supérieures sont construites en juxtaposant ces groupes de cases, mais en respectant les deux règles suivantes:
 - Les colonnes de cases sont arrangées suivant leur hauteur, en ordre décroissant de gauche à droite.
 - Les rangées de cases sont arrangées suivant leur longueur en ordre décroissant de haut en bas.

Nous illustrons dans le tableau (3.1) les tableaux de young associés à des représentations irréductibles associées aux groupe $SU(n)$ en générale et en mettant l'accent sur les les irreps du groupes $SU(5)$:

Young Tableaux	Dimension in $SU(n)$	Labeling in $SU(5)$	Tensor rep.
\square	n	$\mathbf{5}$	ψ_{i_1}
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	n	$\bar{\mathbf{5}}$	ψ^{i_1}
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\mathbf{10}$	$\psi_{i_1 i_2}$
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\bar{\mathbf{10}}$	$\psi^{i_1 i_2}$
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\mathbf{15}$	$\psi_{i_1 i_2}$
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\bar{\mathbf{15}}$	$\psi^{i_1 i_2}$
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	$n^2 - 1$	$\mathbf{24}$	$\psi_{i_1}^{j_1}$
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8}$	$\mathbf{45}$	$\psi_{i_1 i_2}^{j_1}$
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8}$	$\bar{\mathbf{45}}$	$\psi_{j_1}^{i_1 i_2}$
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{(n+1)^2(n-1)n}{12}$	$\mathbf{50}$	$\psi_{i_1 i_2}$
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8}$	$\bar{\mathbf{50}}$	$\psi^{i_1 i_2}$
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$	$\mathbf{20}$	$\psi_{i_1 i_2 i_3}$

Figure 3.1: tableaux de Young pour les groupes $SU(n)$

Détermination de la dimension d'une représentation du groupe $SU(n)$ à partir du tableau de Young

La dimension d'une représentation est donnée par le rapport entre deux nombres qui sont calculés comme suit:

- (a) **Le numérateur** : D'abord, on associe le nombre N (dimension du groupe $SU(N)$), a la case située tout en haut à gauche, puis à partir de cette dernière et sur la même ligne, on associe aux cases successives les nombres $N + 1, N + 2, \dots$, puis pour chaque colonne en allant de haut en bas les nombres doivent diminuer, par exemple pour la première colonne on à $N, N - 1, N - 2, \dots$, pour la deuxième on à $N + 1, N, N - 2, \dots$, en faisant le produit de tous ces nombres on obtient alors le numérateur.
- (b) **Le dénominateur** : A chaque case du tableaux on associe un nombre égal à (nombre de case se situant en dessous d'elle + nombre de cases se situant à sa droite + 1) ,le dénominateur est alors égal au produit de tous ces nombres.

Exemple 2. :

Prenant deux exemples :

- La représentation $\bar{\mathbf{15}}$ du groupe $SU(5)$:

$$d = \frac{5.6.4.5.3.4.2.3}{5.4.4.3.3.2.2.1} = 15 \tag{3.80}$$

- La représentation $\bar{\mathbf{45}}$ du groupe $SU(5)$:

$$d = \frac{5.6.4.5.3.2}{5.2.4.1.2.1} = 45 \tag{3.81}$$

• De nos jours, nous pouvons obtenir les tableaux de Young plus aisément à l'aide de programmes informatiques, par exemple : **LieArt** qui fournit tous les tableaux de Young associés aux représentations irréductibles des groupes $SU(N)$ et ceci en faisant appel au package *LieArt* sur mathematica, puis via la commande `YoungTableau[irrep]`.

Théories de grande unification: modèle de Georgi-Glashow

Après la réussite du modèle standard, les physiciens ont voulu aller plus loin, en unifiant les forces, à l'exception de la gravitation, dans un seul modèle. Ainsi le modèle de grande unification $SU(5)$ ou modèle de **Georgi – Glashow** a vu le jour, il représente la première tentative d'unification et la plus simple aussi.

4.1 Unification des constantes de couplage

Après passage au premier ordre de perturbation, les constantes de couplages α_3 , α_2 , et α_1 , associées aux groupes de jauge ($SU(3)$, $SU(2)$, $U(1)$) respectivement sont données par:

$$\alpha_i(Q^2) = \frac{4\pi\alpha(\mu^2)}{4\pi + \alpha_i(\mu^2) b \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)} \quad (4.1)$$

où Q est une échelle d'énergie qui peut être l'énergie du centre de masse \sqrt{s} par exemple, μ^2 est une échelle arbitraire (la masse du boson Z par exemple) et b est le coefficient de la fonction β . A l'ordre à une boucle, la fonction $\beta = -b\frac{\alpha^2}{4\pi}$. On note que l'équation (4.1) décrit l'évolution de la constante de couplage de l'échelle μ^2 à l'échelle Q^2 .

Alors il peut exister une échelle d'énergie $Q = M_X$, pour laquelle les trois couplages ont la même valeur, cette échelle là est dite échelle d'unification. Pour voir cela, prenons l'évolution des constantes de couplages (α_3, α_2) en fonction de l'échelle d'énergie:

$$\frac{1}{\alpha_3(M_X)} = \frac{1}{\alpha_3(\mu)} + \frac{b_3}{4\pi} \ln\left(\frac{M_X^2}{\mu^2}\right) \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\alpha_2(M_X)} = \frac{\sin^2(\theta_W)(\mu)}{\alpha_e(\mu)} + \frac{b_2}{4\pi} \ln\left(\frac{M_X^2}{\mu^2}\right) \quad (4.3)$$

où θ_W est l'angle de Weinberg (ou angle de mélange électrofaible), α_e est la constante de couplage électromagnétique, M_X est une échelle de grande unification et μ est une échelle arbitraire d'énergie (on peut la choisir égale à l'échelle électrofaible).

Les coefficients b_2 et b_3 sont donnés par,

$$b_2 = \frac{22}{3} - \frac{4F}{3} - \frac{N_H}{6} \quad b_3 = 11 - \frac{4F}{3} \quad (4.4)$$

où F est le nombre de famille de fermions ($F = 3$) et N_H est le nombre de bosons de Higgs ($N_H = 1$).

Alors en prenant $\mu = 100 \text{ GeV}$, $\sin^2(\theta_W) = 0,22$, $\alpha_3(\mu) = 0,11$, $\alpha_s(\mu) = 0,11$ et $\alpha_e(\mu) = \frac{1}{128}$, et à partir de ces valeurs à cette échelle d'énergie nous obtenons une estimation de l'échelle d'unification $M_X \simeq 10^{15} \text{ GeV}$, voir la figure (4.1). Certes cette échelle est très large, mais elle reste petite en comparaison avec la masse de Planck $M_p = 2.10^{19} \text{ GeV}$ à partir de la quelle la graviton devient très forte et doit être prise en considération.

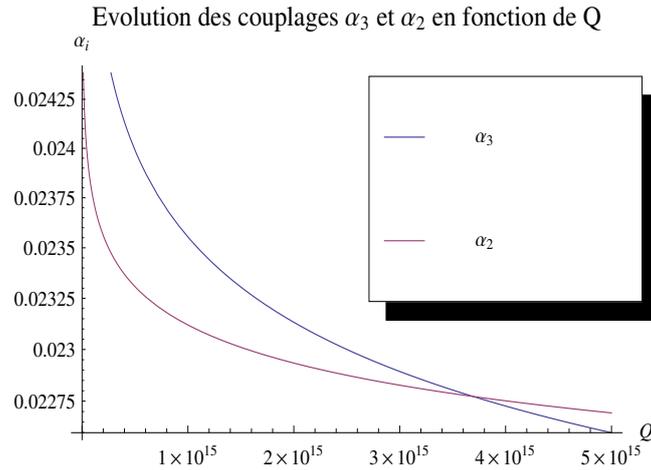


Figure 4.1: Variation des constantes de couplages α_3 et α_2 en fonction de l'échelle Q .

4.2 Choix du groupe de jauge

Le choix d'un groupe de jauge G pour une théorie de grande unification est dicté par un certain nombre de contraintes imposées sur notre modèle qui sont:

1. G doit posséder une représentation complexe:
une des caractéristiques du modèle standard est que la chiralité des champs est prise en considération, les champs de chiralité gauche sont représentés par des doublets de $SU_L(2)$, par contre les champs de chiralité droite sont représentés par des singlets, cette notion de chiralité est étroitement liée à la représentation du groupe, et afin de préserver cette distinction entre les champs de chiralité gauche et droite les fermions doivent être placés dans des représentations complexes ceci garantit que les fermions restent sans masse avant la brisure spontanée de symétrie du groupe ($SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$). [9]
2. G doit avoir le groupe de jauge du modèle standard comme sous groupe:
Notre groupe G va être brisé pour donner le groupe $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ et cela n'est possible que si ce dernier est un sous groupe de G .
3. G doit avoir une seule constante de couplage:
Cette condition n'est pas nécessaire mais elle permet de choisir comme groupe de jauge un groupe de Lie simple.
4. Le rang du groupe G doit être supérieur ou égal à 4 car pour le modèle standard on a 4 générateurs hermitiens diagonalisables : les deux matrices de Gell-Mann (λ_3, λ_8) associés au groupe $SU(3)$, la matrice de Pauli τ_3 associé au groupe $SU(2)$ et enfin le générateur du groupe $U(1)$.

Ainsi nous constatons que le groupe de jauge le plus simple qui satisfait ces conditions est le groupe $SU(5)$.

4.3 Structure du modèle:

4.3.1 Fermions et bosons de gauge:

Le groupe $SU(5)$ possède 24 générateurs (K_i), dans la représentation fondamentale, ces derniers sont représentés par des matrices 5×5 hermitiennes et de trace nulle, alors en plus des 8 générateurs qui vont générer, après la brisure, le sous groupe $SU_c(3)$, les 3 générateurs qui vont générer le sous groupes $SU(2)$ et celui qui va générer le sous groupe $U(1)$ on a 12 nouveaux générateurs.

Tout d'abord, le groupe $SU(5)$ possèdent plusieurs représentations, alors laquelle choisir pour représenter nos fermions? ce choix est dicté par la condition que notre théorie soit renormalisable et sans anomalies (anomaly-free).

L'anomalie d'une représentation peut être donnée par :

$$tr(\{K_i, K_j\}, K_l) = A(D)f_{ijl} \quad (4.5)$$

Où K_i sont les générateurs de la représentation D , f_{ijl} sont les constantes de structure et $A(D)$ le nombre associé à l'anomalie.

Afin que la théorie soit sans anomalies la somme des $A(D)$ pour les représentations choisies doit être égale à 0.

Pour $SU(n)$ et pour une représentation obtenue par le produit totalement antisymétrique de p représentations fondamentales, $A(D)$ est donné par:[10]

$$A(D) = \frac{(n-3)!(n-2p)}{(n-p-1)!(p-1)!} \quad (4.6)$$

Pour la représentation fondamentale $\mathbf{5}$, $p = 1$ alors:

$$A(\mathbf{5}) = 1 \quad (4.7)$$

Pour la représentation $\bar{\mathbf{5}}$, $p = 4$ et on a:

$$A(\bar{\mathbf{5}}) = -1 \quad (4.8)$$

Pour la représentation $\mathbf{10}$, $p = 2$ (un produit antisymétrique de 2 représentations $\mathbf{5}$) donc:

$$A(\mathbf{10}) = 1 \quad (4.9)$$

On remarque alors que $A(\mathbf{5}) + A(\mathbf{10}) \neq 0$, alors nos champs apparaissent dans une représentations ($\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10}$).

Donc pour une famille de leptons et une famille de quarks on a (en l'absence de mélange entre les générations (Cabibbo-like mixing)):

$$\bar{\mathbf{5}} : \Psi_{La} = \begin{pmatrix} d_1^{(c)} \\ d_2^{(c)} \\ d_3^{(c)} \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L \quad (4.10)$$

$$\mathbf{10} : \Psi_L^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & u_3^{(c)} & -u_2^{(c)} & u_1 & d_1 \\ -u_3^{(c)} & 0 & u_1^{(c)} & u_2 & d_2 \\ u_2^{(c)} & -u_1^{(c)} & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^+ \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \quad (4.11)$$

où C (la conjugaison de charge) est la transformation qui change une particule en son antiparticule, en changeant le signe de toutes les charges, elle est définie comme:

$$\begin{aligned} (\Psi^{(c)})_L &= C(\bar{\Psi}_R)^T \\ (\bar{\Psi}^{(c)})_L &= -\Psi_R^T C^{-1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

On constate alors que $\Psi_L^{ab} = -\Psi_L^{ba}$ et que:

$$\Psi_L^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} u_{L\gamma}^c, \text{ pour } \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \quad (4.13)$$

Et:

$$\Psi_{Lr} = \varepsilon_{rs} L^s, \text{ pour } r, s = 4, 5 \quad (4.14)$$

Où $L = (\nu_e \ e^-)_L^T$

Alors chaque famille de 15 champs est placée dans une représentation $(\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10})$.

Pour les 24 bosons de gauge A_μ^i , ils appartiennent à la représentation adjointe **24**, alors on définit une matrice carrée 5×5 qui est la matrice des champs de gauge définie comme:

$$A_\mu = \sum_{i=1}^{24} A^i K^i \quad (4.15)$$

Donc:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \frac{G_1^1}{\sqrt{2}} - 2pB & \frac{G_2^1}{\sqrt{2}} & \frac{G_3^1}{\sqrt{2}} & X_1 & Y_1 \\ \frac{G_1^2}{\sqrt{2}} & \frac{G_2^2}{\sqrt{2}} - 2pB & \frac{G_3^2}{\sqrt{2}} & X_2 & Y_2 \\ \frac{G_1^3}{\sqrt{2}} & \frac{G_2^3}{\sqrt{2}} & \frac{G_3^3}{\sqrt{2}} - 2pB & X_3 & Y_3 \\ X_1^\dagger & X_2^\dagger & X_3^\dagger & \frac{W_1^1}{\sqrt{2}} + 3pB & \frac{W_2^1}{\sqrt{2}} \\ Y_1^\dagger & Y_2^\dagger & Y_3^\dagger & \frac{W_1^2}{\sqrt{2}} & \frac{W_2^2}{\sqrt{2}} + 3pB \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

où G_j^i sont des combinaisons linéaires des huit bosons G^i du groupe $SU(3)$, de même, les W_j^i sont des combinaisons linéaires des bosons de gauge du groupe $SU(2)$ et B est le boson de gauge du groupe $U(1)$.

p est une constante de normalisation et en adoptant la normalisation suivante pour L_Y , qui est la représentation matricielle de l'opérateur Y :

$$Tr(L_Y^2) = \frac{1}{2} \quad (4.17)$$

Sachant que la matrice diagonale associée au champ B est donnée par:

$$L_Y = p(-2, -2, -2, 3, 3) \quad (4.18)$$

Alors

$$L_Y^2 = p^2(4, 4, 4, 9, 9) \quad (4.19)$$

On trouve donc:

$$p^2 = \frac{1}{60}, \text{ et } p = \frac{1}{30} \quad (4.20)$$

Maintenant nous voulons décomposer certaines représentations de $SU(5)$ suivant $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, cela donne:

Représentation	Décomposition
5	$(1, 2, 1) + (3, 1, -\frac{2}{3})$
$\bar{\mathbf{5}}$	$(1, 2, -1) + (3, 1, \frac{2}{3})$
10	$(1, 1, +2) + (\bar{\mathbf{3}}, 1, -\frac{4}{3}) + (3, 2, \frac{1}{3})$
24	$(1, 1, 0) + (1, 3, 0) + (8, 1, 0) + (3, 2, -\frac{5}{3}) + (\bar{\mathbf{3}}, 2, \frac{5}{3})$
45	$(1, 2, 1) + (3, 1, -\frac{2}{3}) + (3, 3, -\frac{2}{3}) + (\bar{\mathbf{3}}, 1, \frac{8}{3}) + (\bar{\mathbf{3}}, 2, -\frac{7}{3}) + (\bar{\mathbf{6}}, 1, -\frac{2}{3}) + (8, 2, 1)$

Où les trois entrées (n_1, n_2, n_3) correspondent respectivement aux groupes $SU(3), SU(2)$ et $U(1)$. On constate alors que dans ce nouveau modèle, on n'aura pas de nouvelles particules dans le secteur des fermions, par contre de nouveaux bosons font leur apparition, car d'après le tableau précédent, on a pour la représentation **24**:

$$\begin{aligned}
(8, 1, 0) &\Leftrightarrow \text{gluons} \\
(1, 3, 0) &\Leftrightarrow W^+, W^-, W^3 \\
(1, 1, 0) &\Leftrightarrow B \\
(3, 2, -\frac{5}{3}) &\Leftrightarrow X, Y \\
(\bar{3}, 2, \frac{5}{3}) &\Leftrightarrow X^\dagger, Y^\dagger
\end{aligned} \tag{4.21}$$

On constate alors, qu'en plus des 8 gluons et des 4 bosons de l'interaction électrofaible, on a 12 nouveaux bosons souvent appelés **bosons lepto – quark** car il sont les médiateurs de nouvelles interactions qui sont les transitions de quarks en anti-leptons, ainsi pour ce modèle des interactions qui violent la conservation du nombre leptonique sont possibles et ce dernier n'est plus conservé.

4.4 Lagrangien du modèle $SU(5)$

Le lagrangien classique associé à ce modèle peut être écrit comme suit:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y \tag{4.22}$$

Avec:

- \mathcal{L}_B : Le lagrangien des bosons de jauge.
- \mathcal{L}_f : Le lagrangien fermionique.
- \mathcal{L}_H : Le lagrangien associé aux Higgs.
- \mathcal{L}_Y : Le lagrangien de Yukawa.

4.4.1 Lagrangien des bosons de jauge

\mathcal{L}_B se compose des termes cinétiques des 24 bosons de jauge A_μ^a , il est donné par:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} A_{\mu\nu}^a A^{a\mu\nu}, \quad a = 1, \dots, 24 \tag{4.23}$$

avec [4]

$$A_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_5 f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \tag{4.24}$$

où f_{abc} sont les constantes de structure du groupe $SU(5)$.

Comme on peut le constater, ce lagrangien ne contient pas de termes de masse car un terme de masse briserai la symétrie, alors avant la brisure spontanée de symétrie tous les bosons sont sans masse.

4.4.2 Lagrangien fermionique

La dérivée covariante est donnée par: [11]

- **Dans la représentation $\mathbf{5}$:**

$$(D_\mu \Psi)^a = [\partial_\mu \delta_b^a - ig_5 (A_\mu)_b^a] \Psi^b \tag{4.25}$$

- **Dans la représentation $\bar{\mathbf{5}}$:**

$$(D_\mu \Psi)_a = [\partial_\mu \delta_a^b + ig_5 (A_\mu)_a^b] \Psi_b \tag{4.26}$$

• Dans la représentation 10 :

$$(D_\mu \Psi)^{ab} = \partial_\mu \Psi^{ab} - ig_5 (A_\mu)_c^a \Psi^{cb} - ig_5 (A_\mu)_d^b \Psi^{ad} \quad (4.27)$$

Alors, le lagrangien fermionique est donné par:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= i\bar{\mathbf{5}}_L \not{D} \mathbf{5}_L + iTr [\bar{\mathbf{10}}_L \not{D} \mathbf{10}_L] \\ &= i(\bar{\Psi}_L)^a (\not{D} \Psi_L)_a + i(\bar{\Psi}_L)_{ac} (\not{D} \Psi_L)^{ac} \end{aligned} \quad (4.28)$$

A partir, de (4.13), (4.26), (4.27) et sachant que :

$$\Psi_{1R}^{(c)} \gamma_\mu \Psi_{2R}^{(c)} = -\Psi_{2L} \gamma_\mu \Psi_{1L} \quad (4.29)$$

On a pour une famille de leptons et de quarks la partie décrivant l'interaction avec les champs de gauge dans le lagrangien fermionique est donnée par:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G &= \frac{g_5}{2} \sum_{i=1}^8 [\bar{u} \not{G}^i \lambda^i u + \bar{d} \not{G}^i \lambda^i d] + \frac{g_5}{2} \sum_{i=1}^3 [\bar{Q}_L \not{W}^i \tau^i Q_L + \bar{L} \not{W}^i \tau^i L] \\ &+ \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{g_5}{2} \left[-\bar{L} \not{B} L + \frac{1}{3} \bar{Q}_L \not{B} Q_L - 2\bar{e}_R^+ \not{B} e_R^+ + \frac{4}{3} \bar{u}_R \not{B} u_R - \frac{2}{3} \bar{d}_R \not{B} d_R \right] \\ &+ \left[\frac{g_5}{\sqrt{2}} \bar{X}_\mu^\alpha \left[\bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu e_R^+ + \bar{d}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^+ + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{(c)} \gamma^\mu u_L^\beta \right] \right. \\ &\left. - \frac{g_5}{\sqrt{2}} \bar{Y}_\mu^\alpha \left[\bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu \nu_R + \bar{u} \gamma^\mu e_L^+ + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{(c)\beta} \gamma^\mu d_L^\gamma \right] + \mathbf{h.c.} \right]. \end{aligned}$$

avec :

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad (4.30)$$

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (4.31)$$

On constate alors que ce lagrangien peut être décomposé en cinq parties, les deux premières représentent les interactions associées aux groupes $SU(3)$ et $SU(2)$ (à condition que, pour des échelles d'énergie suffisamment grandes pour que la brisure spontanée de symétrie puisse être ignorée, g_3, g_2 soient égales à g_5), le troisième terme représente les interactions associées au groupe $U(1)$, on remarque alors que la constante de couplage associée à l'hypercharge est donnée par:

$$g_Y = \sqrt{\frac{3}{5}} g_1 = \sqrt{\frac{3}{5}} g_5 \quad (4.32)$$

Les deux derniers termes représentent les interactions de couplages des fermions aux bosons X, Y (interactions qui violent la conservation du nombre leptonique) ainsi que les interactions d'annihilation de deux quarks en bosons X et Y. La figure (4.2) représente les vertex associés à ces deux dernières interactions:

Remarque 3. Dans le modèle standard, les trois constantes de couplage g_3, g_2 et g_Y sont arbitraires, par contre ici on a un seul groupe $SU(5)$, donc pour $Q > M_X$ ces trois constantes sont reliées entre elles.

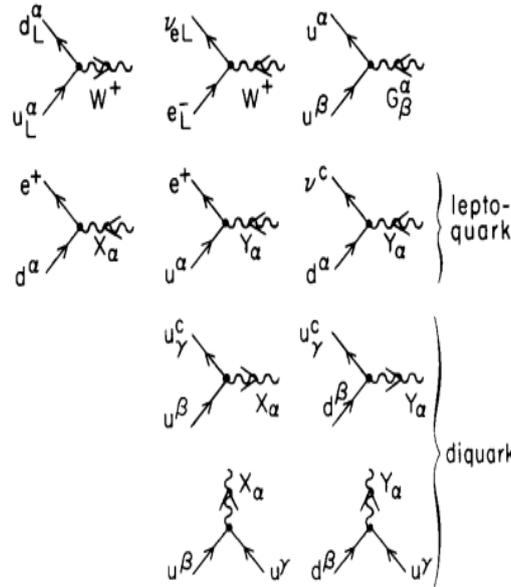


Figure 4.2: Vertex associés aux bosons X et Y

L'angle de Weinberg dans le modèle $SU(5)$

L'angle de mélange électrofaible, est l'angle de la rotation que subissent les bosons W^3 et B , afin de donner le boson Z et le photon γ . C'est un paramètre du modèle standard donné par :

$$\sin^2(\theta_W) = \frac{g_Y^2}{g_Y^2 + g_5^2} \quad (4.33)$$

Mais à l'échelle de grande unification M_X on a:

$$\alpha_5(M_X) = \alpha_3(M_X) = \alpha_2(M_X) = \alpha_1(M_X) = \frac{5}{3}\alpha_Y(M_X) \quad (4.34)$$

Ainsi, nous obtenons:

$$\sin^2(\theta_W)(M_X) = \frac{3}{8} \quad (4.35)$$

Et pour une échelle μ :

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta_W)(\mu)|_{(\mu=400\text{GeV})} &= \frac{1}{6} + \frac{5}{9} \frac{\alpha_e(\mu)}{\alpha_3(\mu)} \\ &= 0,215 \pm 0,002. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux ($\sin^2(\theta_W)_{exp}(\mu)|_{(\mu=400\text{GeV})} = 0,216 \pm 0,012$).

4.4.3 Lagrangien associé aux Higgs

Brisure spontanée de symétrie

Pour des échelles d'énergie $Q \gg M_X$ la BSS peut être ignorée et le groupe $SU(5)$ n'est pas brisé, par contre pour $Q \leq M_X$ la BSS a lieu. Pour notre modèle la brisure spontanée de symétrie s'effectue sur deux étapes, la première étant la brisure de $SU(5)$ en $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ par **des champs scalaires réels** appartenant à la représentation **24**, la deuxième étape est la brisure de $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ en $SU_c(3) \times U_{em}(1)$ qu'on peut représenter schématiquement comme suit: .

$$SU(5) \xrightarrow{\mathbf{24}} SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \xrightarrow{\mathbf{5}} SU_c(3) \times U_{em}(1) \quad (4.37)$$

Brisure spontanée de symétrie à l'échelle de grande unification

Cette première BSS a lieu à l'échelle M_X , pour cela on introduit des champs de Higgs réels ϕ^i appartenant à la représentation **24**, et on obtient la matrice:

$$\phi = \sum_{i=1}^{24} K^i \phi^i \quad (4.38)$$

La forme la plus générale d'un potentiel renormalisable associé a ces champs est donnée par [12] :

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\frac{\mu^2}{2} \text{Tr}(\phi^2) + \frac{c}{2} \text{Tr}(\phi^3) + \frac{a}{4} [\text{Tr}(\phi)^2]^2 + \frac{b}{2} \text{Tr}(\phi^4) \\ &= -\frac{\mu^2}{2} \phi_j^i \phi_i^j + \frac{c}{2} \phi_j^i \phi_k^j \phi_i^k + \frac{a}{4} (\phi_j^i \phi_i^j)^2 + \frac{b}{2} \phi_j^i \phi_k^j \phi_l^k \phi_i^l \end{aligned} \quad (4.39)$$

Par souci de simplicité, on impose que $V(\phi)$ soit invariant sous la transformation ($\phi \rightarrow -\phi$), on obtient alors:

$$c = 0 \quad (4.40)$$

Pour que la BSS ait lieu il faut que:

$$\mu^2 > 0 \quad (4.41)$$

La matrice ϕ est hermitienne et peut donc être diagonalisée par une matrice unitaire, on a alors:

$$\phi_j^i = \delta_j^i \psi^j, \quad \text{où } \psi^i \text{ sont des réels} \quad (4.42)$$

avec:

$$\sum_{i=1}^5 \psi^i = 0 \quad (4.43)$$

Le potentiel devient alors:

$$V(\psi) = -\frac{\mu^2}{2} \sum_{i=1}^5 (\psi^i)^2 + \frac{a}{4} \left(\sum_{i=1}^5 (\psi^i)^2 \right)^2 + \frac{b}{2} \left(\sum_{i=1}^5 (\psi^i)^4 \right) - g \sum_{i=1}^5 \psi^i \quad (4.44)$$

où g est le multiplicateur de Lagrange ajouté à cause de la contrainte (4.43).

Afin que $V(\phi)$ ait une borne inférieure il faut que:

$$15a + 7b > 0 \quad (4.45)$$

Le minimum du potentiel est donné par:

$$\frac{\partial V}{\partial \psi^i} = -\mu^2 \psi^i + a \psi^i \sum_{j=1}^5 (\psi^j)^2 + 2b (\psi^i)^3 - g = 0 \quad (4.46)$$

Avec $i = 1, \dots, 5$.

IL ne peut y avoir que trois valeurs différentes des ψ^i qui satisfont l'équation(4.46) [12], et à partir de (4.43) on obtient :

$$\begin{aligned} \psi^1 + \psi^2 + \psi^3 &= 0 \\ n_1 \psi^1 + n_2 \psi^2 + n_3 \psi^3 &= 0 \\ n_1 + n_2 + n_3 &= 5 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Avec n_i étant le nombre de fois où ψ^i apparaît sur la diagonale de la matrice ψ . On obtient alors:

$$\begin{aligned} \psi^2 &= \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \psi^1 \\ \psi^3 &= \frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_2} \psi^1 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Afin d'obtenir le chemin de brisure voulu, et pour $b > 0$ on doit avoir:

$$n_1 = 3, \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 0 \quad (4.49)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \psi^2 &= -\frac{3}{2}\psi^1 \\ \psi^3 &= \frac{1}{2}\psi^1 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Ainsi le potentiel devient:

$$V(\psi) = -\frac{15}{4}\mu^2(\psi^1)^2 + \frac{15}{16}(15a + 7b)(\psi^1)^4 \quad (4.51)$$

Et donc:

$$\frac{\partial V(\psi)}{\partial \psi^1} = 0 \implies (\langle \psi^1 \rangle_0)^2 = \frac{2\mu^2}{15a + 7b} \quad (4.52)$$

ainsi

$$\psi_0 = v \left(1, 1, 1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right) \quad (4.53)$$

Avec

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{15a + 7b} \quad (4.54)$$

Pour les générateurs, on a les 8 générateurs associés à $SU(3)$, les trois générateurs associés à $SU(2)$ ainsi que le générateur associé à $U_Y(1)$ vérifient:

$$[K^i, \psi_0] = 0 \quad (4.55)$$

Alors ils ne sont pas brisés, par contre les 12 générateurs restant le sont.

Le terme cinétique associé à ϕ est donnée par:

$$\mathcal{L}_{kin} = \frac{1}{2}Tr \left[(D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi \right] \quad (4.56)$$

Avec:

$$(D_\mu \phi)_j^i = \partial_\mu \phi_j^i - \frac{ig_5}{\sqrt{2}} \left(A_{\mu k}^i \phi_j^k - \phi_k^i A_{\mu j}^k \right) \quad (4.57)$$

En remplaçant par $(\psi - \psi_0)$ dans (4.57), on constate alors que les bosons de Goldstone ϕ_X et ϕ_Y sont absorbés par les bosons X et Y, via le mécanisme de Higgs, ainsi les bosons X,Y deviennent massifs et acquièrent une masse :

$$M_X = M_Y = \frac{25}{8}g_5^2 v^2 \quad (4.58)$$

Le reste des bosons forment des bosons de Higgs massifs, ayant pour masses :

$$M_{\phi_G} = \frac{5}{2}bv^2 \quad (4.59)$$

$$M_{\phi_W} = 10bv^2 \quad (4.60)$$

$$M_{\phi_B} = 2\mu^2 \quad (4.61)$$

On constate ainsi que tous les bosons massifs ont des masses de l'ordre de M_X , alors leurs effets sont complètement négligeables face aux contributions des bosons du modèle standard sauf dans le cas de processus interdits dans le modèle standard (violant la conservation du nombre leptonique).

4.4.4 Lagrangien de Yukawa

Avant de nous pencher sur la brisure à l'échelle électrofaible nous devons d'abord nous assurer que les fermions n'acquiesent pas de masse avec la première brisure de symétrie, ainsi nous devons examiner le Lagrangien de Yukawa.

Pour voir la forme des interactions de Yukawa, nous devons voir d'abord les combinaisons de fermions que nous pouvons avoir. Trois types de produits directs sont possibles:

$$\begin{aligned} & \Psi_{La}^T C \Psi_{Lb} + \text{h.c} \\ & \Psi_{La}^T C \Psi_L^{bc} + \text{h.c} \\ & \Psi_L^{Tab} C \Psi_L^{cd} + \text{h.c} \end{aligned} \quad (4.62)$$

La décomposition des produits (4.62) donne :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{5}} \times \bar{\mathbf{5}} &= \bar{\mathbf{10}} + \bar{\mathbf{15}} \\ \bar{\mathbf{5}} \times \mathbf{10} &= \mathbf{5} + \bar{\mathbf{45}} \\ \mathbf{10} \times \mathbf{10} &= \bar{\mathbf{5}} + \mathbf{45} + \mathbf{50} \end{aligned} \quad (4.63)$$

On voit alors que la représentation adjointe $\mathbf{24}$ n'apparaît pas dans les relations (4.63), ainsi il ne peut y avoir de terme (fermion-scalaire-fermion) avec un scalaire appartenant à la représentation $\mathbf{24}$ dans Le lagrangien de Yukawa.

Si maintenant on introduit un champ scalaire H^a , appartenant à la représentation fondamentale $\mathbf{5}$, le Lagrangien de Yukawa s'écrit comme:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= T_{mn} (\mathbf{5}_{mL})_a \mathbf{C} (\mathbf{10}_{nL})^{ab} \mathbf{H}_b^\dagger + S_{mn} \varepsilon_{abcde} (\mathbf{10}_{mL})^{ab} \mathbf{C} (\mathbf{10}_{nL})^{cd} \mathbf{H}^e + \text{h.c} \\ &= T_{mn} \Psi_{mLa}^T C \Psi_{nL}^{ab} H_b^\dagger + S_{mn} \varepsilon_{abcde} \Psi_{mL}^{Tab} C \Psi_{nL}^{cd} H^e + \text{h.c} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Où:

- ε_{abcde} est le tenseur totalement anti-symétrique.
- $m, n = 1, 2, \dots, F$ désigne les indices de familles.
- $a, b, c, d, e = 1, 2, \dots, 5$ désigne les indices du groupe $SU(5)$.

Brisure spontanée de symétrie à l'échelle électrofaible

La brisure spontanée de symétrie à l'échelle électrofaible est faite en introduisant un champ de Higgs H^a appartenant à la représentation fondamentale, avec une valeur moyenne sur vide (VEV) de l'ordre de 100 GeV , cette BSS brisera alors le groupe $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ en $SU(3)_c \times U_{em}(1)$, lors de cette étape les bosons W et Z acquiesent une masse de l'ordre de 100 GeV et aussi les fermions deviennent massifs.

La décomposition de H^a suivant $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ donne:

$$\begin{aligned} \mathbf{5} &= (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) \\ H^a &= H^\alpha + \Phi \end{aligned} \quad (4.65)$$

Où H^α est un triplet de couleur, et Φ le doublet de Higgs du modèle standard.

Alors H^a s'écrit :

$$H^a = \begin{pmatrix} H^1 \\ H^2 \\ H^3 \\ \Phi^+ \\ \Phi^- \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Ainsi:(en omettant les indices associés au groupe $SU(5)$)

$$\mathcal{L}_H(H) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(D_\mu H)^\dagger D^\mu H \right] - V(H) \quad (4.67)$$

Avec :

$$D^\mu H = \partial^\mu H - ig_5 A_\mu H \quad (4.68)$$

Et

$$V(H) = -\frac{\nu^2}{2} H^\dagger H + \frac{\lambda}{4} (H^\dagger H)^2 \quad (4.69)$$

La valeur moyenne sur le vide de H est alors donné par:

$$H_0 = \frac{w}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

Avec

$$w^2 = \frac{2\nu^2}{\lambda} \simeq 246 \text{ GeV} \quad (4.71)$$

Ainsi, on peut paramétrer H^a comme suit [13]:

$$H^a = \begin{pmatrix} H^\alpha \\ H^4 \\ \frac{1}{2}(w + \rho)e^{i\xi/w} \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

Après la deuxième BSS, les champs H^α, H_4 et ξ restent sans masses, et H_4 et ξ sont absorbés donnant ainsi les composantes longitudinales des bosons massifs W^\pm et Z , le champ ρ lui acquiert une masse donnant ainsi le Higgs physique et on obtient:

$$\begin{aligned} m_W^2 &= \frac{1}{4} g_5 w^2 \\ m_\rho^2 &= \frac{1}{4} \lambda w^2 = \nu^2 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Maintenant en remplaçant (4.72) dans (4.64) on constate qu'après cette deuxième BSS les quarks ainsi que les leptons chargés acquièrent une masse par contre les neutrinos restent sans masse. En réalité, afin d'obtenir les états propres de masse associés aux particules physiques, nous devons diagonaliser les deux matrices $\frac{w}{\sqrt{2}}T$ et $\frac{w}{\sqrt{2}}S$. Ainsi à l'ordre de Born nous obtenons:

$$\begin{aligned} m_d &= m_e \\ m_s &= m_\mu \\ m_b &= m_\tau \end{aligned} \quad (4.74)$$

Ce qui est en contradiction avec les résultats expérimentaux. En réalité la relation (4.74) est valable seulement pour $Q \geq M_X$, car en prenant en considération les contributions des ordres supérieurs, on trouve que les masses des leptons et celles des quarks évoluent différemment, ainsi on trouve qu'à une échelle $\mu = 10 \text{ GeV}$:

$$\frac{m_d}{m_e} = \frac{m_s}{m_\mu} = \frac{m_b}{m_\tau} = 3,5 \quad (4.75)$$

Correction du potentiel de Higgs

Les bosons de Goldstone ϕ_Y et H^α se mélangent entre eux et forment deux combinaisons, la première est absorbée par les bosons Y , l'autre qu'on appelle H' reste sans masse donnant ainsi une particule qui peut jouer le rôle de médiateur de processus causant la désintégration du proton comme:

$$u + d \rightarrow H' \rightarrow \begin{cases} e^+ + \bar{u} \\ \bar{\nu}_e + \bar{d} \end{cases} \quad (4.76)$$

ce qui est phénoménologiquement inacceptable.

La solution à ce problème est de donner à H' une masse de l'ordre de M_X . Ceci est fait en ajoutant des termes au potentiel de Higgs qui devient:

$$V(\phi, H) = -\frac{\mu^2}{2} \text{Tr}(\phi^2) + \frac{a}{4} [\text{Tr}(\phi^2)]^2 + \frac{b}{2} \text{Tr}(\phi^4) - \frac{\nu^2}{2} H^\dagger H + \frac{\lambda}{4} (H^\dagger H)^2 + \alpha (H^\dagger H) \text{Tr}(\phi^2) + \beta H^\dagger \phi^2 H \quad (4.77)$$

Et α, β doivent être suffisamment petits pour que le chemin de la BSS ne soit pas affecté. Afin d'obtenir le chemin de brisure voulu, il faut que:

$$\beta < 0 \quad (4.78)$$

Le vev devient alors:[14]

$$\phi_0 = \langle 0|\phi|0\rangle = v \left(1, 1, 1, -\frac{3}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (4.79)$$

où ε est une perturbation due aux couplages. Elle est donnée par:

$$\varepsilon = \frac{3}{20} \frac{\beta w^2}{b v^2} + O\left(\left(\frac{w}{v}\right)^4\right) \quad (4.80)$$

De plus:

$$\begin{aligned} \nu^2 &= \frac{1}{2} \lambda w^2 + 15 \alpha v^2 + \frac{9}{2} \beta v^2 - 3 \varepsilon \beta v^2 + O(\varepsilon w^2) \\ \mu^2 &= \frac{15}{2} a v^2 + \frac{7}{2} b v^2 + \alpha w^2 + \frac{3}{10} \beta w^2 + O(\varepsilon w^2) \end{aligned} \quad (4.81)$$

Ainsi la première combinaison entre ϕ_Y et H^α absorbée par les bosons Y devient:

$$\phi_Y - \frac{\sqrt{2}}{5} \frac{w}{v} H^\alpha + O\left(\frac{w^2}{v^2}\right) \quad (4.82)$$

Et la combinaison orthogonale H' est:

$$H^\alpha + \frac{\sqrt{2}}{5} \frac{w}{v} \phi_Y \quad (4.83)$$

Cette dernière acquiert alors une masse donnée par:

$$m_{H'}^2 = -\frac{5}{2} \beta v^2 + O(w^2) \quad (4.84)$$

Mais pour éviter que le proton ait une durée de vie courte, la valeur $|\beta|$ ne doit pas être trop petite.

4.5 Désintégration du proton

A partir des diagrammes des figures (4.3) et (4.4), on constate que dans ce modèle des réactions violant la conservation du nombre leptonique et conduisant à la désintégration du proton (et du neutron aussi) sont possibles, comme:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow e^+ + u\bar{u} \rightarrow e^+ + \pi^0 \\ p &\rightarrow \bar{\nu}_e + \bar{d}u \rightarrow \bar{\nu}_e + \pi^+ \end{aligned} \quad (4.85)$$

Sachant que $M_X \sim M_Y \gg m_p$, on peut calculer la durée de vie moyenne du proton à partir de ces processus et elle est donnée par:

$$\tau_p \sim \frac{1}{\alpha_5} \frac{M_X^4}{m_p^5} \quad (4.86)$$

Où :

$$\alpha_5 = \frac{g_5}{4\pi} \tag{4.87}$$

En prenant $M_X \sim 10^{14} GeV$ ceci donne:

$$\tau_p = 2 \times 10^{29 \pm 1,7} \text{ années} \tag{4.88}$$

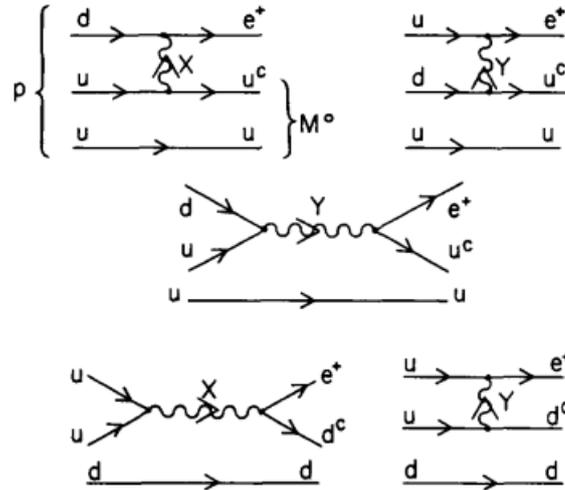


Figure 4.3: Diagrammes représentant les processus $p \rightarrow e^+ u \bar{u}$ et $p \rightarrow e^+ d \bar{d}$

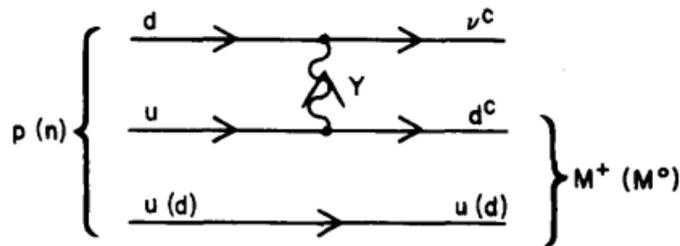


Figure 4.4: Diagrammes représentant les processus $p \rightarrow \bar{\nu} u \bar{d}$ et $p \rightarrow \bar{\nu} d \bar{d}$

4.6 Quelques problèmes du modèle $SU(5)$

1. **Pas d'unification** : à l'aide des équations du groupe de renormalisation, en partant de l'échelle électrofaible et en prenant en considération les corrections apportées par le modèle $SU(5)$ on trouve que les constantes de couplage du modèle standard ne convergent pas en un seul point à l'échelle de grande unification.
2. **Problème de la hiérarchie** : Dans notre modèle on a eu deux BSS mais à deux échelles largement différentes ($\frac{M_W}{M_X} \sim 10^{-13}$), le problème est qu'on ne peut pas expliquer ce choix de la nature, et encore entre les deux échelles on a aucune nouvelle particule qui apparaît pour cela on nomme cette région le désert. En plus pour arriver à faire ces deux brisures on a du ajuster certains paramètres du modèle .
3. **Neutrinos non massifs** : Dans notre représentation ($\bar{5} + 10$) on ne trouve pas de neutrinos de chiralité droite, donc comme dans le modèle standard les neutrinos restent sans masses dans ce modèle, ce qui est en contradiction avec les données expérimentales.

4. **Désintégration trop rapide du proton** : Dans ce modèle la durée de vie moyenne du proton est estimée à $\tau_p = 2 \times 10^{29 \pm 1,7}$ années, par contre les nouveaux résultats expérimentaux ont contredit cela en donnant aux proton une durée de vie moyenne $\tau_p \geq 10^{36}$ années.

Modèle

$$SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$$

Dans ce chapitre nous allons étudier la théorie de jauge qui se base sur le groupe $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{B-L}(1)$, ce choix représente la plus simple extension du modèle standard, l'intérêt qu'on porte à ce modèle est lié au fait qu'il représente une tentative pour expliquer la masse des neutrinos, représentant ainsi un modèle théorique adéquat visant à expliquer ce phénomène. Le nouveau nombre quantique associé au nouveau groupe $U(1)$ est $(B - L)$ (le nombre baryonique moins le nombre leptonique).

Ce modèle est dit minimal et cela pour trois raisons:

1. Il est minimal dans son groupe de jauge, car on a ajouté, au groupe du modèle standard, une simple extension qui est le groupe abélien $U(1)$.
2. Il est minimal dans son lagrangien scalaire, car on a ajouté au doublet de Higgs du modèle standard un seul singlet complexe afin de réaliser la brisure du groupe $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{B-L}(1)$ en $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ ¹.
3. Il est minimal dans le domaine des fermions, car on a ajouté seulement trois singlets du modèle standard (un par génération) représentant trois neutrinos de chiralité droite.

L'introduction de ces trois neutrinos de chiralité droite et du nouveau singlet scalaire a pour but d'éliminer les anomalies triangulaires qui apparaissent dans le modèle rendant ainsi ce modèle "anomalie-free" et aussi conserver l'invariance de jauge. [16]

Dans ce modèle les neutrinos lourds acquièrent une masse (masse de Majorana) lors de la brisure de symétrie, puis les neutrinos légers acquièrent eux aussi une masse par le **mécanisme de seesaw** (ou mécanisme de la balançoire).

On rappelle aussi que le groupe de jauge de ce modèle est le sous-groupe de plusieurs modèles de grande unification, on cite par exemple: $SU(5) \otimes U(1)$ et E_6 .

5.1 Lagrangien du modèle

La forme générale du lagrangien classique associé à cette extension du modèle standard est donnée par:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_Y \tag{5.1}$$

avec,

- \mathcal{L}_s : est le lagrangien scalaire.
- \mathcal{L}_B : est le lagrangien des bosons de jauge.
- \mathcal{L}_f : est le lagrangien fermionique.
- \mathcal{L}_Y : est le lagrangien de Yukawa.

¹cette brisure aura lieu dans une échelle d'énergie de l'ordre du TeV [15]

5.1.1 Lagrangien bosonique

En plus des des 12 bosons du modèle $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, on a un nouveau boson, qu'on appellera Z' , associé au nouveau groupe $U(1)$. Alors la seule différence avec le lagrangien bosonique du modèle Standard est le terme cinétique du nouveau boson donné par:

$$\mathcal{L}_B(U_{(B-L)}(1)) = -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} \quad (5.2)$$

avec,

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu B'_\nu - \partial_\nu B'_\mu \quad (5.3)$$

où B'_μ est le nouveau champ de gauge associé au groupe $U_{(B-L)}(1)$.

Alors la dérivée coravariante devient:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig_S \frac{\lambda^\alpha}{2} G_\mu^\alpha + ig_2 \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a + ig_1 Y B_\mu + i(g'Y + g'_1 Y_{B-L}) B'_\mu \quad (5.4)$$

On constate alors que, du au fait que le nouveau groupe $U(1)$ soit abélien, il apparaît un mélange entre les facteurs des deux groupes $U(1)$, mais pour notre travail nous allons seulement prendre en considération le cas du modèle (B-L) minimal "pur", imposant ainsi la condition que:

$$g'(Q_{EW}) = 0 \quad (5.5)$$

C'est à dire qu'à l'échelle électrofaible, il n'y a pas de mélange entre les facteurs des deux groupes $U(1)$ ², ainsi la dérivée covariante devient:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig_S \frac{\lambda^\alpha}{2} G_\mu^\alpha + ig_2 \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a + ig_1 Y B_\mu + ig'_1 Y_{B-L} B'_\mu \quad (5.6)$$

5.1.2 Lagrangien fermionique

Ce modèle contient en plus des fermions du modèle standard, trois neutrinos de chiralité droite ν_R (un pour chaque famille de leptons). Ainsi le lagrangien fermionique est donné par:

$$\mathcal{L}_f = \sum_{k=1}^3 \left(i\bar{Q}_{Lk} \gamma_\mu D^\mu Q_{Lk} + i\bar{u}_{Rk} \gamma_\mu D^\mu u_{Rk} + i\bar{d}_{Rk} \gamma_\mu D^\mu d_{Rk} \right. \\ \left. + i\bar{L}_k \gamma_\mu D^\mu L_k + i\bar{e}_{Rk} \gamma_\mu D^\mu e_{Rk} + i\bar{\nu}_{Rk} \gamma_\mu D^\mu \nu_{Rk} \right) \quad (5.7)$$

Avec (pour la première génération):

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad (5.8)$$

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (5.9)$$

Les charges associées aux différents champs sont les mêmes que celles du modèle standard en y ajoutant la charge $(B-L)$ avec:

- $Y_{(B-L)} = -1$ pour les leptons (y compris les neutrinos de chiralité droite).
- $Y_{B-L} = \frac{1}{3}$ pour les quarks.

Les deux valeurs précédentes sont les mêmes pour les 3 générations, de plus les champs de chiralité droite et de chiralité gauche ont les mêmes valeurs pour la charge $(B-L)$.

Pour terminer, voici le tableau (5.1), montrant les fermions du modèle $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{B-L}(1)$ et leurs charges:

²A cause de ce choix, il n'y aura pas de mélange, à l'ordre de Born, entre les deux bosons Z et Z' .

ψ	$SU_c(3)$	$SU_L(2)$	Y	B-L
Q_L	3	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
u_R	3	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
d_R	3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
L	1	2	$-\frac{1}{2}$	-1
e_R	1	1	-1	-1
ν_R	1	1	0	-1

Table 5.1: Les particules fermioniques du modèle et leurs charges.

5.1.3 Lagrangien scalaire

Pour ce modèle minimal, afin de réaliser la brisure spontanée de symétrie (BSS), on a ajouté au doublet de Higgs (H) du modèle standard un singlet scalaire (un champ scalaire complexe), qu'on notera χ , avec une valeur moyenne sur le vide vev de l'ordre du TeV .

Les valeurs de la charge ($B - L$) associées aux deux champs est:

- $Y_{B-L}^H = 0$
- $Y_{B-L}^\chi = +2$ ³

Ainsi la forme générale du lagrangien scalaire est donnée par:

$$\mathcal{L}_s = (D^\mu H)^\dagger D_\mu H + (D^\mu \chi)^\dagger D_\mu \chi - V(H, \chi) \quad (5.10)$$

Avec:

$$\begin{aligned} V(H, \chi) &= m^2 H^\dagger H + \mu^2 |\chi|^2 + (H^\dagger H |\chi|^2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \frac{\lambda_3}{2} \\ \frac{\lambda_3}{2} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^\dagger H \\ |\chi|^2 \end{pmatrix} \\ &= m^2 H^\dagger H + \mu^2 |\chi|^2 + \lambda_1 (H^\dagger H)^2 + \lambda_2 |\chi|^4 + \lambda_3 H^\dagger H |\chi|^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

où H est le doublet de Higgs donné par:

$$H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Le tableau (5.2) montre les charges associées à ces champs scalaires.

ψ	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	Y	B-L
H	1	2	$\frac{1}{2}$	0
χ	1	1	0	2

Table 5.2: Les champs scalaires du modèle et leurs représentations

5.1.4 Lagrangien de Yukawa

En introduisant les neutrinos de chiralité droite, on obtient, en plus des interactions de Yukawa du modèle standard, deux nouveaux couplages de Yukawa. Ainsi le lagrangien de Yukawa est donné par:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= -y_{jk}^d \bar{Q}_{Lj} d_{Rk} H - y_{jk}^u \bar{Q}_{Lj} u_{Rk} \tilde{H} - y_{jk}^e \bar{L}_j e_{Rk} H \\ &\quad - y_{jk}^\nu \bar{L}_j \nu_{Rk} \tilde{H} - y_{jk}^M (\bar{\nu}_R)^c_j \nu_{Rk} \chi + \mathbf{h.c} \end{aligned} \quad (5.13)$$

³Cette valeur a été choisie afin d'assurer l'invariance de gauge du modèle.

Où: $\tilde{H} = i\sigma^2 H^*$, et $j, k = 1, 2, 3$.

Dans la deuxième ligne de la relation (5.13) on trouve, respectivement, les termes de masse de Dirac et de Majorana associés aux neutrinos de chiralité droite. Dans la même relation, on voit qu'il y'a un couplage entre les neutrinos de chiralité droite et le nouveau champ scalaire χ . Ainsi, après que le singlet de Higgs ait acquis un vev la brisure de symétrie a lieu et alors les neutrinos de chiralité droite acquièrent une masse.

Remarque 4. Dans ce qui suit, on travaillera dans une base où les matrices de Yukawa des neutrinos de chiralité droite y^M sont diagonales, réelles, et positives.

5.2 Brisure spontanée de symétrie

Afin de réaliser la brisure spontanée de symétrie, il faut d'abord s'assurer que le potentiel $V(H, \chi)$, donné par (5.11), ait une borne inférieure. Cela est vrai à condition que: [15]

$$\begin{aligned} 4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 &> 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 &> 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

On peut paramétriser les champs de Higgs comme suit:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i(w^1 - iw^2) \\ v + (h + iz) \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

et

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + (h' + iz')) \quad (5.16)$$

Ainsi, les bosons $w^\pm = w^1 \mp iw^2$, z et z' représentent les bosons de Goldstone absorbés par les bosons W^\pm , Z et Z' respectivement, pour former leurs composantes longitudinales.

Notre choix de la jauge ne va pas affecter la procédure de minimisation, alors afin de simplifier cette tâche nous choisissons les deux vev comme suit:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Et,

$$\langle \chi \rangle = \frac{x}{\sqrt{2}} \quad (5.18)$$

Où v et x sont des réels positifs.

En remplaçant dans(5.11), on trouve:

$$V(v, x) = \frac{m^2}{2}v^2 + \frac{\mu^2}{2}x^2 + \frac{\lambda_1}{4}v^4 + \frac{\lambda_2}{4}x^4 + \frac{\lambda_3}{4}v^2x^2 \quad (5.19)$$

Ainsi:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial v}(v, x) = v \cdot \left(m^2 + \lambda_1 v^2 + \frac{\lambda_3}{2} x^2 \right) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x}(v, x) = x \cdot \left(\mu^2 + \lambda_2 x^2 + \frac{\lambda_3}{2} v^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

Alors pour des valeurs de v et de x non nulles, on a:

$$v^2 = \frac{-\lambda_2 m^2 + \frac{\lambda_3}{2} \mu^2}{\lambda_1 \lambda_2 - \frac{\lambda_3^2}{4}} \quad (5.21)$$

Et,

$$x^2 = \frac{-\lambda_1 \mu^2 + \frac{\lambda_3}{2} m^2}{\lambda_1 \lambda_2 - \frac{\lambda_3^2}{4}} \quad (5.22)$$

Afin de représenter les vev physiques, les deux valeurs v^2 et x^2 doivent être strictement positives. D'après la condition (5.14), le dénominateur des deux valeurs est strictement positif. Alors on impose que les numérateurs le soient aussi, on obtient:

$$\begin{cases} \lambda_2 m^2 < \frac{\lambda_3}{2} \mu^2 \\ \lambda_1 \mu^2 < \frac{\lambda_3}{2} m^2 \end{cases} \quad (5.23)$$

Afin de confirmer que les deux valeurs v^2 et x^2 représentent réellement un minimum, on calcule la matrice hessienne associée à $V(v, x)$, on a alors:

$$H(v, x) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial v} & \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 v^2 & \lambda_3 v x \\ \lambda_3 v x & 2\lambda_2 x^2 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Ainsi, afin que ce point soit un minimum, il faut que $\det(H) > 0$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} > 0$, alors tenant compte des conditions (5.14), ceci est vérifié.

5.2.1 Masses des scalaires

Afin de trouver la masse des champs scalaires, on effectue des fluctuations autour du vev . Dans la jauge unitaire, les deux champs scalaires s'écrivent comme suit:

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h + v \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Et,

$$\chi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (h' + x) \quad (5.26)$$

On remplace par (5.25) et (5.26) dans (5.11), on trouve alors:

$$V(h, x) = \frac{m^2}{2} (h + v)^2 + \frac{\mu^2}{2} (h' + x)^2 + \frac{\lambda_1}{4} (h + v)^4 + \frac{\lambda_2}{4} (h' + x)^4 + \frac{\lambda_3}{4} (h + v)^2 (h' + x)^2 \quad (5.27)$$

Et, à partir de (5.20) on a:

$$\begin{aligned} m^2 &= -\lambda_1 v^2 - \frac{\lambda_3}{2} x^2 \\ \mu^2 &= -\lambda_2 x^2 - \frac{\lambda_3}{2} v^2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Ainsi, la matrice de masse, dans la base d'interaction, s'écrit comme: [17]

$$M_h^2 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 v^2 & \lambda_3 x v \\ \lambda_3 x v & 2\lambda_2 x^2 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Pour obtenir les bosons de Higgs physiques, il faut passer à la base de masse, ainsi on définit, par une transformation orthogonale, les deux bosons de Higgs physiques (h_1 et h_2) comme:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Où :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Et,

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= \frac{\lambda_3 x v}{\sqrt{(\lambda_1 v^2 - \lambda_2 x^2)^2 + (\lambda_3 x v)^2}} \\ \cos(2\alpha) &= \frac{\lambda_2 x^2 - \lambda_1 v^2}{\sqrt{(\lambda_1 v^2 - \lambda_2 x^2)^2 + (\lambda_3 x v)^2}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

⁴On n'a pas pris l'intervalle $[0, 2\pi]$ tout entier, car les transformations orthogonales sont invariantes sous la transformation $\alpha \rightarrow \alpha + \pi$.

En faisant le choix que $M_{h_1}^2 < M_{h_2}^2$, on a:

$$M_{h_{1(2)}}^2 = \lambda_1 v^2 + \lambda_2 x^2 - (+) \sqrt{(\lambda_1 v^2 - \lambda_2 x^2)^2 + (\lambda_3 x v)^2} \quad (5.32)$$

Remarque 5. Dans la limite ($\alpha \rightarrow 0$), h_1 représente alors le boson de Higgs du modèle standard, et il n'y aura pas de couplage entre le boson h_2 et les particules du modèle standard, rendant ainsi sa détection impossible au LHC [15]

5.2.2 Masses des bosons de jauge

Comme dans le cas du modèle standard, afin de déterminer les masses des bosons de jauge il suffit de remplacer les deux champs de Higgs H et χ , dans la jauge unitaire, dans les termes cinétiques des champs scalaires. Ainsi nous obtiendrons les masses des quatre bosons massifs W^\pm , Z et le nouveau boson Z' , ainsi qu'un boson non massif qui est le photon γ .

Dans notre modèle on a juste ajouté un groupe abélien $U(1)$, ainsi la partie non abélienne du groupe n'a pas été modifiée, alors la masse des bosons W^\pm ne va pas être affectée car elle est reliée seulement au groupe $SU_L(2)$.

On a alors (pour le modèle $(B-L)$ minimal pur):

$$\begin{aligned} (D^\mu H)^\dagger D_\mu H &= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{8} (h+v)^2 (0 \quad 1) [g_2 W_a^\mu \tau_a + g_1 B^\mu]^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{8} (h+v)^2 [g_2^2 |W_1^\mu - iW_2^\mu|^2 + (g_2 W_3^\mu - g_1 B^\mu)^2] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Et

$$(D^\mu \chi)^\dagger D_\mu \chi = \frac{1}{2} \partial^\mu h' \partial_\mu h' + \frac{1}{2} (h' + x)^2 (g_1' 2B'^\mu)^2 \quad (5.34)$$

On voit alors que le boson W acquièrent une masse:

$$M_W = \frac{g_2 v}{2} \quad (5.35)$$

Pour les bosons B^μ , W_3^μ et B'^μ la matrice de masse est donnée par:

$$\begin{aligned} M_B^2 &= \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g_1^2 & -g_2 g_1 & 0 \\ -g_2 g_1 & g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \frac{x^2}{v^2} (g_1')^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{v^2}{4} (g_2^2 + g_1^2) \begin{pmatrix} \sin^2(\theta_W) & -\cos(\theta_W) \sin(\theta_W) & 0 \\ -\cos(\theta_W) \sin(\theta_W) & \cos^2(\theta_W) & 0 \\ 0 & 0 & 16 \frac{x^2 (g_1')^2}{v^2 (g_2^2 + g_1^2)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Où: θ_W est l'angle de mélange électrofaible de Weinberg, donné par:

$$\cos(\theta_W) = \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \quad \sin(\theta_W) = \frac{g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \quad (5.37)$$

Afin de trouver les états propres de masse, il faut diagonaliser la matrice M_B^2 , pour cela on effectue une rotation définie par:

$$R_{EW}(\theta_W) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_W) & -\sin(\theta_W) & 0 \\ \sin(\theta_W) & \cos(\theta_W) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

Ainsi les bosons physiques, sont définis comme des combinaisons des champs B^μ , B'^μ et W_3^μ comme suit:

$$\begin{aligned} A^\mu &= \cos(\theta_W) B^\mu + \sin(\theta_W) W_3^\mu \\ Z^\mu &= -\sin(\theta_W) B^\mu + \cos(\theta_W) W_3^\mu \\ Z'^\mu &= B'^\mu \end{aligned} \quad (5.39)$$

On constate alors qu'il n'y a pas de mélange, à l'ordre de Born, entre les deux bosons Z et Z' . La matrice de masse diagonale est alors donnée par:

$$R_{EW}(\theta_W)M_B^2 [R_{EW}(\theta_W)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v^2}{4}(g_2^2 + g_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & 4x^2(g_1')^2 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Ainsi, on obtient les masses des bosons physiques:

$$\begin{aligned} M_\gamma &= 0 \\ M_Z &= \frac{v}{2}\sqrt{g_2^2 + g_1^2} \\ M_{Z'} &= 2g_1'x \end{aligned} \quad (5.41)$$

5.2.3 Masse des neutrinos et mécanisme de see-saw de type I

La présence de ces trois singlets de neutrinos, un pour chaque génération, permet de générer la masse des neutrinos par le mécanisme de see-saw de type-I (qui est la version la plus simple de ce mécanisme).

A partir du potentiel de Yukawa, après la brisure spontanée de symétrie, la matrice des masses des neutrinos dans la base (ν_L, ν_R^c) est donnée par:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

Où: m_D et M sont respectivement les matrices de masse de Dirac et de Majorana et elles sont données par:

$$m_D = \frac{y^\nu}{\sqrt{2}}v, \quad M = \sqrt{2}y^M x \quad (5.43)$$

Afin de réaliser la mécanisme de "see-saw", il faut trouver les valeurs propres de la matrice des masses \mathcal{M} . Ainsi, on retrouve trois neutrinos de Majorana légers ν_l et trois neutrinos de Majorana lourds ν_h . et leurs masses sont donnée par:

$$\begin{aligned} M_l &\simeq m_D M^{-1} m_D^T = \frac{1}{2\sqrt{2}} y^\nu (y^M)^{-1} (y^\nu)^T \frac{v^2}{x} \\ M_h &\simeq M = \sqrt{2} y^M x \end{aligned} \quad (5.44)$$

Comme ça cette notion de mécanisme "en balançoire" est plus claire, car plus M est grande, plus la masse des neutrinos lourds est grande et celle des neutrinos légers petite.

Pour plus de simplicité, on suppose qu'il n'y a pas de mélange entre les trois générations, de plus les masses des neutrinos lourds et légers sont dégénérées. ainsi:

$$\begin{aligned} m_{\nu_{l1}} &= m_{\nu_{l2}} = m_{\nu_{l3}} = m_{\nu_l} \\ m_{\nu_{h1}} &= m_{\nu_{h2}} = m_{\nu_{h3}} = m_{\nu_h} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Prenons maintenant l'exemple d'une seule génération. La matrice 2×2 associée à une seule génération peut être diagonalisée par une transformation orthogonale comme suit:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_{\nu i}) & -\sin(\alpha_{\nu i}) \\ \sin(\alpha_{\nu i}) & \cos(\alpha_{\nu i}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_D^i \\ m_D^i & M^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{\nu i}) & \sin(\alpha_{\nu i}) \\ -\sin(\alpha_{\nu i}) & \cos(\alpha_{\nu i}) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -\frac{(m_D^i)^2}{M^i} & 0 \\ 0 & M^i \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

Où:

- $i = 1, 2, 3$.
- $\sin(\alpha_{\nu i}) = \frac{m_D^i}{M^i}$.

Ainsi les états propres de masse de Majorana associés aux masses $m_{\nu_{li}}$ et $m_{\nu_{hi}}$, sont donnés par:

$$\begin{pmatrix} \nu_{li} \\ \nu_{hi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{\nu i}) & \sin(\alpha_{\nu i}) \\ -\sin(\alpha_{\nu i}) & \cos(\alpha_{\nu i}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{Li} \\ \nu_{Ri} \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Remarque 6. *Pour des masses de neutrinos légers de l'ordre $0,1 \text{ eV}$ et des masses des neutrinos lourds de l'ordre de 100 GeV on obtient alors $\tan(\alpha_\nu) \sim 10^{-6}$ ainsi:*

- *Les neutrinos légers ν_l sont composés essentiellement de neutrinos de chiralité gauche ν_L .*
- *Les neutrinos lourds ν_h sont composés essentiellement de neutrinos de chiralité droite ν_R .*

Dans le deux chapitres suivants, nous allons voir la physique de ces neutrinos lourds, ainsi que celle du boson Z' , en plus des règles de Feynman associées.

Phénoménologie du boson Z'

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux interactions faisant intervenir comme médiateur le nouveau boson Z' apparu dans notre modèle, pour cela nous calculerons la section efficace totale, ainsi que la section efficace différentielle dans quatre processus, et voir comment elle varie avec les paramètres libres du modèle ($M_{Z'}, \dots$).

6.1 Elements de base et outils de calcul

6.1.1 Programme de calcul

MadGraph5 – aMC@NLO

Madgraph est un programme qui se base sur les méthodes algorithmiques de monte-Carlo afin de simuler les processus se passant dans les collisionneurs de particules (essentiellement au LHC) pour donner les valeurs numériques des sections efficaces (pour l'ordre de born(LO), et même pour le calcul à une boucle NLO). De plus il représente un outil essentiel dans l'étude de la physique au-delà du modèle standard, car on peut y incorporer de nouveaux modèles contenant de nouvelles particules. L'avantage aussi de ce programme est qu'on peut faire appel à d'autres programmes (comme PYTHIA ou HERWIG) afin de prendre en considération les phénomènes se passant dans collisionneurs (parton shower, hadronisation,...). Pour ce travail nous avons utilisé la version MG5-aMC-v3-3-2.

Comment marche Madgraph? [19]

- Tout d'abord télécharger le programme à partir du site : <https://launchpad.net/mg5amcnlo>
- Sur Linux, ouvrir le terminal puis écrire : **cd (emplacement du fichier madgraph)** .
- Lancer le programme en tapant: `./bin/mg5 – aMC` .
- Choisir un modèle: le modèle par défaut dans madgraph est le modèle standard, mais pour étudier la physique au-delà du modèle standard il faut faire appel à d'autres modèles, pour notre cas c'est le modèle `BLN – nloqcd – 5f – fgf – UFO – v1`, et pour faire cela on a recours à la commande : `import model (nom du modèle)`.
- Générer le processus par la commande : `generate (exemple $p p > \tau^+ \tau^-$)`, ici le programme va donner les sous processus possibles ainsi que tous les digrammes de Feynman associés à ces processus.
- Créer un fichier contenant ce code à l'aide de la commande `output (nom choisi)`, de plus le programme va générer une page web contenant toutes les informations sur le processus.
- Finalement lancer le calcul numérique de la section efficace par la commande `Launch` .

Remarque 7. On peut apporter des modifications sur les paramètres du modèle tels que les masses des particules, l'échelle de factorisation, ..., cela est fait par la commande suivante: `scite Cards/run-card(ou param – card).dat`.

6.1.2 Modèle des Partons

Ce modèle a été proposé par Feynman et représente la base de la QCD perturbative (comme on le verra dans la partie (6.1.4)), l'idée de ce modèle est de "considérer le hadron comme composé

de partons¹, objets sans structure (ponctuels) dont les nombres quantiques sont a priori inconnus (spin, charge, ...) mais qui doivent cependant former un objet de spin, charge, ... connus" [20], ainsi on peut réduire l'interaction entre hadrons à une interaction entre partons et on peut calculer la section efficace hadronique à partir des sections efficaces partoniques.

Sections efficaces partonique et hadronique à l'ordre de Born

Dans le modèle des partons, la section efficace hadronique est décrite comme étant une superposition incohérente des sections efficaces partoniques car on ajoute les probabilités et non les amplitudes [20], elle est donnée par :

$$\sigma^{had} = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 f_i(x_1) f_j(x_2) \hat{\sigma}^{par} \quad (6.1)$$

Avec:

• $\hat{\sigma}^{par}$ est la section efficace partonique décrivant l'interaction dure (à courte distance) entre partons, par exemple pour un processus $2 \rightarrow N$ elle est donnée par:

$$\hat{\sigma}^{par} = \frac{1}{2s} \int \prod_{i=1}^N d\Pi_i (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum_i p_i) |M|^2 \quad (6.2)$$

Où :

$$d\Pi_i = \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \quad (6.3)$$

- l'impulsion du parton est donnée par $p_i = x_i P$ (où P est l'impulsion du hadron), alors x_i est la fraction de la quantité de mouvement qu'aquiert le parton, avec $\sum_i x_i = 1$.
- $f_i(x)$ sont les fonctions de distribution partonique, elles donnent la probabilité de trouver dans un hadron, un parton i avec une fraction x de l'impulsion du hadron. Elles ne peuvent pas être calculées de façon perturbative par contre elle sont évaluées à partir de données expérimentales. Il existe deux principaux groupes *CTEQ* et *MRST* qui offrent deux bibliothèques donnant les valeurs des ces fonctions. [21]

6.1.3 Nécessité du calcul NLO

La question qui se pose est la suivante: Dans le calcul perturbatif l'ordre de Born est celui qui contribue le plus dans la section efficace, alors pourquoi ne pas se limiter, dans nos calculs, à cet ordre et pourquoi est-il important de passer à l'autre suivant (NLO)? parmi les raisons on cite : [22]

1. Rendre la section efficace moins sensible aux échelles non physiques (par exemple les échelles de renormalisation et de factorisation).
2. Tester la convergence de la série perturbative.
3. IL y'a plus de physique dans le calcul *NLO*, avec les émissions radiatives des états initiaux, les jets, alors plus de partons participent dans les processus *NLO*.

6.1.4 Sections efficaces partonique et hadronique à l'ordre NLO

Théorème de factorisation

A partir de la formule (6.1), on remarque que les fonctions de distribution partonique ne sont pas dépendantes des variables des Mandelstam (s, t, u), on dit alors qu'elles contiennent les effets à longue distance (ou à basse énergie) (confinement), par contre c'est la section efficace partonique

¹quarks et gluons

qui contient les effets à courte distance (haute énergie), cette séparation entre physique de basse énergie et physique de haute énergie est appelée “théorème de factorisation” qu’on peut illustrer comme dans la figure (6.1):

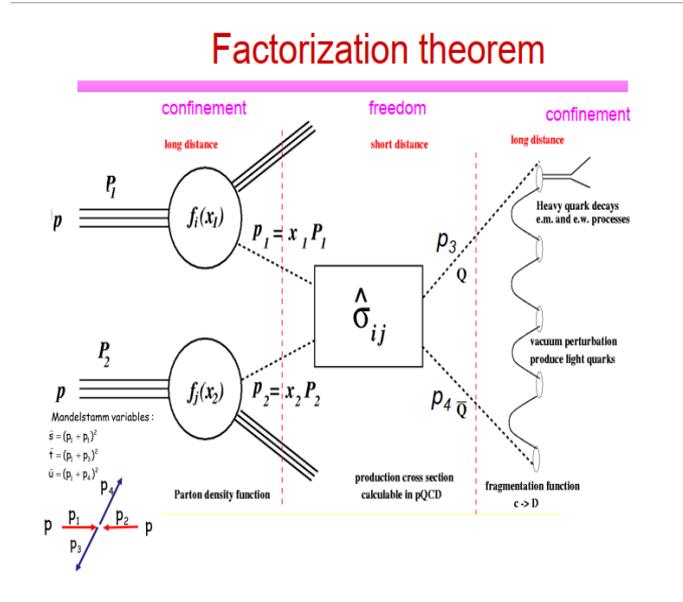


Figure 6.1: Représentation schématique du théorème de factorisation

Section efficace hadronique à l’ordre NLO

En réalité le modèle de partons est trop simpliste, car il ne prend pas en considération les interactions entre partons à l’intérieur du hadron (les partons sont considérés libres et indépendants à l’intérieur du hadron).

L’interaction à l’intérieur du hadron est décrite par la Chromodynamique Quantique qui possède la propriété de **liberté asymptotique**, alors la constante de couplage mobile de la *QCD* ($\alpha_s(Q^2)$) tend vers 0 pour des énergies trop grandes. Ainsi pour ces énergies on a recours à la *QCD* perturbative et la section efficace hadronique devient :

$$\begin{aligned} \sigma^{had} &= \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 f_i(x_1, \mu_F^2) f_j(x_2, \mu_F^2) \left[\hat{\sigma}^{ij} + \alpha_s(\mu) \hat{\sigma}^{ij(1)} + \alpha_s^2(\mu) \hat{\sigma}^{ij(2)} + \dots \right] \\ &= \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 f_i(x_1, \mu_F^2) f_j(x_2, \mu_F^2) \left[\hat{\sigma}^{ij}(p_1, p_2, \mu_R^2) \right] \end{aligned} \quad (6.4)$$

Où :

- μ_F représente l’échelle de factorisation qui peut être vue comme étant l’échelle qui sépare la physique à longue distance de celle à courte distance.
- μ_R représente l’échelle de renormalisation.
- $\hat{\sigma}^{ij}(p_1, p_2, \mu_R^2)$ est un développement en puissance de α_s de la section efficace partonique.

On constate ainsi que les fonctions de distribution partonique deviennent dépendent de l’échelle de factorisation (dépendance logarithmique), et leur évolution est donnée par les équations de *DGLAP*: [21]

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i(x, \mu^2)}{\partial \log \mu^2} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[P_{q_i q_j}(z, \alpha_s) q_j\left(\frac{x}{z}, \mu^2\right) + P_{q_i g}(z, \alpha_s) g\left(\frac{x}{z}, \mu^2\right) \right] \\ \frac{\partial g(x, \mu^2)}{\partial \log \mu^2} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[P_{g q_j}(z, \alpha_s) q_j\left(\frac{x}{z}, \mu^2\right) + P_{g g}(z, \alpha_s) g\left(\frac{x}{z}, \mu^2\right) \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Où P_{ij} sont les noyaux d'Altarelli-Paresi et sont donnés par un développement en puissance de α_s :

$$P_{ab}(x, \alpha_s) = P_{ab}^0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ab}^{(1)}(x) + \dots \quad (6.6)$$

Section efficace partonique à l'ordre NLO

La section efficace à l'ordre NLO est composée de 3 contributions et elle est donnée par :[23]

$$d\hat{\sigma}^{ijNLO} = d\hat{\sigma}^{ij(LO)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} d\delta\sigma^{ij(\hat{N}LO)} \quad (6.7)$$

Où les corrections NLO sont :

$$d\delta\sigma^{ij(\hat{N}LO)} = d\hat{\sigma}^{ij(virt)} + d\hat{\sigma}^{ij(real)} \quad (6.8)$$

Avec:

- $\hat{\sigma}^{ij(LO)}$ est la contribution de l'ordre de Born, et elle est finie.
- $\hat{\sigma}^{ij(virt)}$: représente les corrections virtuelles, qui sont le résultat d'interférence entre l'amplitude de l'ordre LO M^B et celle des digrammes à une boucle M^V (comme celui représenté dans la figure(6.2)). elle est donnée par :

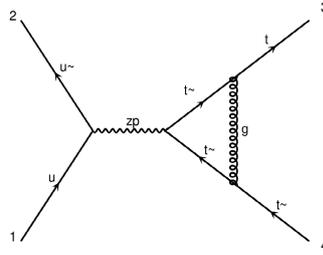


Figure 6.2: Exemple d'un diagramme de la correction virtuelle

$$d\hat{\sigma}^{ij(virt)} = d(2Re(M^V.M^{B*})) \quad (6.9)$$

- $\hat{\sigma}^{ij(real)}$ représente l'émission d'une particule réelle par les particules de l'état initial ou de l'état final comme l'exemple présenté dans la figure (6.3).

Souvent ces corrections présentent des divergences et elles sont de deux types:

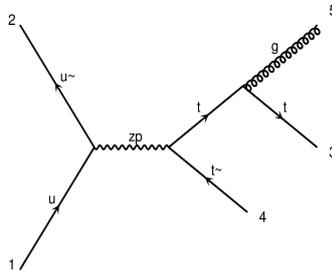


Figure 6.3: Exemple d'un diagramme de la correction réelle

1. **Les divergences ultraviolettes** : Elles apparaissent dans les diagrammes contenant des boucles quand la 4-impulsion tournant dans la boucle tend vers l'infini [24] .
2. **Les divergences infrarouges** : Elles apparaissent dans le cas des champs à masse nulle (photons, gluons) et elles sont de deux types:

- (a) **Les divergences molles** : Elles apparaissent lors de l'émission d'une particule sans masse et d'énergie très faible.
- (b) **Les divergences colinéaires** : Elle apparaissent lorsque l'angle entre les quantités de mouvement de deux particules non massives tend vers zéro.

prenons l'exemple du propagateur suivant:

$$\frac{1}{(p_1 + p_2)^2} = \frac{1}{2(E_1 E_2 - |\mathbf{P}_1||\mathbf{P}_2|\cos\theta)} = \frac{1}{2E_1 E_2(1 - \cos\theta)} \quad (6.10)$$

Ainsi si E_1 ou $E_2 \rightarrow 0$ alors on a une divergence molle, par contre si $\theta \rightarrow 0$ alors c'est une divergence colinéaire .

Ces divergences sont alors éliminées comme suit:

- Pour les divergences ultraviolettes on a recours à la régularisation dimensionnelle, ainsi l'espace de phase est en dimension n avec $n = 4 + 2\varepsilon$ alors les divergences apparaissent comme des pôles en $\frac{1}{\varepsilon_{UV}}$, puis on a recours à la renormalisation en redéfinissant, à des échelles d'énergie arbitraires, les quantités nues (comme les masses), ainsi apparaissent dans le lagrangien les contre-termes, ces derniers sont choisis afin d'éliminer les divergences.
- Pour les divergences infrarouges, elles apparaissent comme des pôles en $\frac{1}{(\varepsilon_{IR})^2}$ et $\frac{1}{\varepsilon_{IR}}$, elles sont éliminées soit en sommant les contributions réelles et virtuelles, soit en étant absorbées par les PDF.

méthode de soustraction

Afin de pouvoir effectuer le calcul numérique des sections efficaces à l'ordre NLO , la méthode de soustraction a été introduite, cette dernière consiste à rajouter et à soustraire un terme à la section efficace afin d'éliminer les divergences IR et UV à la fois, comme suit: [25]

$$\hat{\sigma}^{NLO} = \int_3 (d\hat{\sigma}^{(real)} - d\hat{\sigma}^{(A)}) + \int_2 (d\hat{\sigma}^{(A')} + d\hat{\sigma}^{(virt)}) \quad (6.11)$$

Avec:

$$\int_3 d\hat{\sigma}^{(A)} - \int_2 d\hat{\sigma}^{(A')} = 0 \quad (6.12)$$

Ceci est fait automatiquement dans *Madgraph*, à l'aide du programme *madFKS*.

6.1.5 Parton shower

Dans les processus de collision à haute énergie (dans les collisionneurs de particules), les particules de l'état initial ou de l'état final peuvent émettre des partons (jets) de plus basse énergie, ces derniers (ayant une charge de couleur) peuvent à leur tour émettre des particules de moindre énergie et ainsi de suite alors on obtient des cascades de radiations, mais arriver à une énergie très basse et à cause de la propriété de liberté asymptotique de la QCD , le phénomène d'hadronisation va avoir lieu, car à basse énergie la constante de couplage de la QCD (α_s) devient très grande alors les partons (gluons et quarks) vont se confiner formant ainsi des hadrons, et même ces derniers, dans le cas où ils ne sont pas stables, vont se désintégrer.

Alors afin de prendre en considération tous ces phénomènes, nous avons recours à des algorithmes pour faire des simulations et obtenir des approximations plus correctes, c'est ce qu'on appelle "parton shower". Dans ce travail, nous avons utilisé *PYTHIA8* comme parton shower. La figure (6.4) représente de façon simple ces phénomènes.

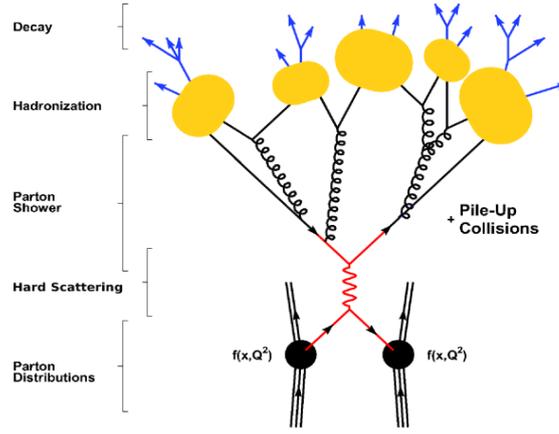


Figure 6.4: Phénomènes associés au parton shower

[26]

6.2 Le Boson Z' :

Dans le cadre de notre étude des théories de grande unification, nous nous sommes intéressés à l'extension minimale du modèle standard et cela en ajoutant un groupe de jauge abélien $U(1)$ associé à la symétrie $(B - L)$, ainsi le lagrangien classique est invariant de jauge pour le groupe de symétrie $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{B-L}(1)$, alors nous avons eu comme résultat l'apparition d'un nouveau médiateur d'interaction, qui est le boson Z' . Ce dernier apparaît dans le lagrangien classique avec un terme cinétique donné par:

$$L_{Z'} = -\frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} \quad (6.13)$$

Avec

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu B' \partial^\nu B' - \partial^\nu B' \partial^\mu B' \quad (6.14)$$

où B' est le nouveau champ de jauge.

Ce nouveau boson est neutre électriquement mais il est massif, et dans le modèle $(B-L)$ minimal sa masse est étroitement liée au vev x , associé à la brisure spontanée du groupe $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{B-L}(1)$, par la relation : [15]

$$x = \frac{M_{Z'}}{2g'_1} \quad (6.15)$$

Où g'_1 est la constante de couplage du groupe $U_{B-L}(1)$. Dans ce modèle aussi, il n'y a pas de mélange entre le nouveau boson et Z le boson neutre du modèle standard, de plus les deux paramètres $M_{Z'}$ et g'_1 sont des paramètres libres du modèle.

6.3 Modes de production et de désintégration

La production ainsi que la désintégration du boson Z' dépend essentiellement des paramètres du modèle (comme la masse du bosons Z'), voici quelques modes:

Quelques modes de production [27]

1. Production directe du bosons Z' (souvent associée à des jets de hadrons), suivie par sa désintégration en leptons.
2. Fusion de gluons afin de produire le nouveau boson de Higgs h_2 , puis ce dernier se désintègre en bosons Z' .

3. Désintégration du Higgs du modèle standard en une paire de bosons Z' .
4. Production de boson Z' accompagné d'un photon γ , un boson W ou un boson Z .

Modes de désintégration

Dans le modèle $(B - L)$ minimal, le boson Z' se désintègre, à l'ordre de born, uniquement en fermions, avec un taux de désintégration donné par :[18]

$$\Gamma(Z' \rightarrow f\bar{f}) = \frac{M_{Z'}}{12\pi} C_f (v^f)^2 \left[1 + 2 \frac{m_f}{M_{Z'}} \right] \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_{Z'}^2}} \quad (6.16)$$

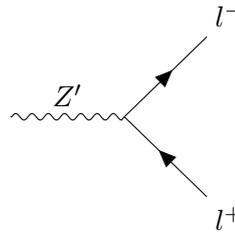
Où:

m_f, C_f sont respectivement la masse et le nombre de couleurs du fermion de type f , et $v^f = (B - L) \times g'_1$.

Différents modes de désintégration du boson Z' :

1. Désintégration en une paire de leptons chargés (l^+l^-) :

$$Z' \rightarrow l^+l^-, \quad \text{avec } l^+ = e^+, \mu^+, \tau^+ \quad (6.17)$$



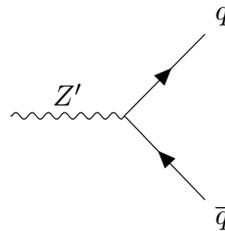
Ce mode de désintégration est prédominant dans le cas du boson Z' , pour des neutrinos lourds de masse $m_{\nu_h} = 200 \text{ GeV}$, et $m_{Z'} = 3 \text{ TeV}$, ces interactions représentent environ 43% des rapports de branchement (BR) [18]

Dans nos calculs, nous allons nous focaliser sur l'interaction :

$$Z' \rightarrow \tau^+\tau^- \quad (6.18)$$

2. Désintégration en une paire de (quark - antiquark):

$$Z' \rightarrow q\bar{q}, \quad \text{avec } q = u, d, c, s, b, t \quad (6.19)$$



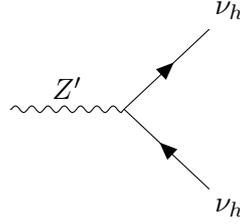
Ce mode de désintégration représente environ $(\frac{1}{4})$ des rapports de branchement [18], il est possible de regrouper ces interactions en deux catégories, la première est celle de la désintégration en quarks légers c-à-d les quarks (u, d, c, s et b), la deuxième est la désintégration en quark lourd c-à-d le quark t :

$$Z' \rightarrow t\bar{t} \quad (6.20)$$

nous traiterons cette dernière, avec plus de détail, dans le reste de notre travail.

3. Désintégration en une paire de neutrino lourds ν_h :

$$Z' \rightarrow \nu_{h_i} \nu_{h_i}, \quad \text{avec } i = 1, 2, 3. \quad (6.21)$$



La possibilité de la désintégration du nouveau boson Z' en une paire de neutrinos lourds est un des résultats les plus importants de ce modèle, car ce mode de désintégration met en avant, en plus des signatures di-leptoniques similaires à celles du modèle standard, des signatures multi-leptoniques (i.e ayant comme résultat final deux leptons ou plus) caractéristiques de ce modèle. Après la formation du neutrino lourd ce dernier va aussi se désintégrer et nous obtenons les deux chaînes de désintégrations suivantes:

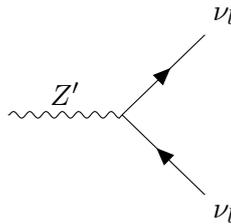
$$\nu_h \rightarrow l^\pm W^\mp \rightarrow l^\pm + \begin{cases} l^\mp \nu_l \\ \text{hadrons} \end{cases} \quad (6.22)$$

$$\nu_h \rightarrow \nu_l Z \rightarrow \nu_l + \begin{cases} l^+ l^- \\ \nu_l \nu_l + \text{hadrons} \end{cases} \quad (6.23)$$

Dans la chaîne (6.22) on peut avoir 1 ou 2 leptons chargés, par contre dans la chaîne (6.23) on a 0 ou 2 leptons chargés, ainsi lors de la désintégration du boson Z' en une paire de neutrinos lourds on peut avoir, à l'état final, jusqu'à 4 leptons chargés.

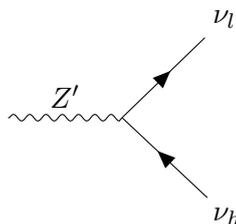
4. Désintégration en une paire de neutrinos légers ν_l :

$$Z' \rightarrow \nu_l \nu_l, \quad \text{avec } i = 1, 2, 3. \quad (6.24)$$



5. Désintégration en neutrino léger ν_l et un neutrino lourd ν_h :

$$Z' \rightarrow \nu_l \nu_{h_i}, \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \quad (6.25)$$



6.4 Calcul numérique de la section efficace

La tâche la plus importante qui a été réalisée durant cette partie est le développement du code pour le calcul NLO pour ce modèle, qui n'était pas disponible en ligne. Ainsi, en plus du calcul à l'ordre LO nous avons effectué grâce à ce code le calcul NLO aussi.

Pour réaliser ce travail nous avons eu recours au programme *Madgraph* en sa version $MG5 - aMC - v3 - 3 - 2$.

Nous avons aussi travaillé en ($5 Flavor scheme$), où les quarks, à l'exception du top quark(t), sont considérés comme étant non massifs.

De plus la bibliothèque de PDF utilisée est : *CTEQ6L1*

Pour ce modèle nous avons fixé les paramètres suivants:

- La constante de couplage du nouveau groupe $U(1)$: $g'_1 = 0, 2$.
- La masse de nouveau boson de Higgs h_2 : $M_{h_2} = 450 GeV$.
- Angle de mélange entre les bosons de Higgs: $sin(\alpha) = 0, 1$.
- Les neutrinos lourds des trois générations sont considérées comme ayant la même masse (masse dégénérée): $m_{\nu_h} = 200 GeV$.
- Les échelles de renormalisation et de factorisation de références $\mu_{R,Ref} = \mu_{F,Ref} = 91, 118 GeV$

Voici enfin les quatre processus réalisés:

1. Le processus $p p \rightarrow Z, Z', W \rightarrow t\bar{t}$:

Tout d'abord, il faut mentionner que pour ce processus nous avons éliminé les interactions en QCD car ils ont la plus grande contribution dans la section efficace rendant presque insignifiante la contribution des autres interactions, de plus on a écarté les processus de la QED car nous avons eu des interférences entre le processus $b\bar{b} \rightarrow W^+ \rightarrow t\bar{t}$ en "t-channel" et des processus faisant intervenir le photon causant ainsi des divergences, pour éviter cela nous avons éliminé les processus ayant le photon comme médiateur.

Pour ce processus on a calculé:

(a) Variation de la section efficace en fonction de la masse du boson Z' :

$M_{Z'} (TeV)$	$\sigma^{LO} (pb)$	$\sigma^{NLO} (pb)$
0,5	$2,333 \pm 0,0087$	$4,677 \pm 0,023$
0,75	$2,218 \pm 0,0085$	$4,561 \pm 0,002$
1	$2,175 \pm 0,0086$	$4,482 \pm 0,021$
1,25	$2,15 \pm 0,009$	$4,454 \pm 0,021$
1,5	$2,159 \pm 0,009$	$4,444 \pm 0,022$
1,75	$2,135 \pm 0,0089$	$4,417 \pm 0,021$
2	$2,143 \pm 0,0088$	$4,406 \pm 0,02$
2,25	$2,144 \pm 0,0086$	$4,417 \pm 0,019$
2,5	$2,148 \pm 0,0089$	$4,422 \pm 0,021$
2,75	$2,137 \pm 0,0086$	$4,447 \pm 0,02$
3	$2,138 \pm 0,0086$	$4,46 \pm 0,023$
3,25	$2,144 \pm 0,009$	$4,421 \pm 0,02$
3,5	$2,128 \pm 0,0087$	$4,453 \pm 0,02$
3,75	$2,146 \pm 0,0089$	$4,456 \pm 0,019$
4	$2,145 \pm 0,0085$	$4,474 \pm 0,025$

Table 6.1: Variation de la section efficace en fonction de la masse du boson Z' pour le processus $p p \rightarrow Z, Z', W \rightarrow t\bar{t}$

On constate d'après la figure (6.5a), que la contribution des corrections est considérable,

prenons par exemple le point $M_{Z'} = 0,5 \text{ TeV}$ on voit que la valeur de la section efficace pour l'ordre NLO est le double de celle de l'ordre LO , pour les deux ordres la variation de la section efficace est la même, elle décroît sur l'intervalle $M_{Z'} \in [0,5; 1]$ puis elle stabilise autour de $(2,1 \text{ pb})$ pour l'ordre LO et $(4,4 \text{ pb})$ pour l'ordre NLO , ceci se justifie par le fait que le boson Z' est devenu très massif comparé aux autres particules nécessitant ainsi une très grande énergie pour le produire, de plus on constate qu'il est dur de bien analyser l'impact du boson Z' , car la contribution des processus en W et Z est beaucoup plus importante.

(b) **Variation de la section efficace en fonction des échelles de renormalisation et de factorisation :**

$\frac{\mu_R}{\mu_{Ref}}$	$\sigma^{LO}(\text{pb})$	$\sigma^{NLO}(\text{pb})$
0,25	$1,432 \pm 0,0057$	$5,605 \pm 0,021$
0,5	$1,807 \pm 0,0071$	$4,929 \pm 0,019$
0,75	$2,015 \pm 0,0081$	$4,607 \pm 0,02$
1	$2,136 \pm 0,0087$	$4,447 \pm 0,023$
1,25	$2,251 \pm 0,0092$	$4,307 \pm 0,021$
1,5	$2,299 \pm 0,0094$	$4,265 \pm 0,022$
1,75	$2,361 \pm 0,0095$	$4,151 \pm 0,023$
2	$2,417 \pm 0,0098$	$4,159 \pm 0,023$
2,25	$2,461 \pm 0,0098$	$4,067 \pm 0,022$
2,5	$2,508 \pm 0,01$	$4,025 \pm 0,024$
2,75	$2,541 \pm 0,011$	$4,038 \pm 0,02$
3	$2,562 \pm 0,01$	$4,015 \pm 0,025$
3,25	$2,592 \pm 0,01$	$3,96 \pm 0,021$
3,5	$2,613 \pm 0,011$	$3,927 \pm 0,02$
3,75	$2,636 \pm 0,01$	$3,925 \pm 0,021$
4	$2,651 \pm 0,011$	$3,931 \pm 0,022$

Table 6.2: Variation de la section efficace en fonction de l'échelle de renormalisation pour le processus $p p \rightarrow Z, Z', W \rightarrow t\bar{t}$

Ici, nous avons étudié la variation de la section efficace aux deux ordres LO et NLO pour des échelles de renormalisation et de factorisations différentes. On voit que pour des valeurs d'échelles basses ($\frac{\mu}{\mu_{Ref}} < 1$) la section efficace pour les deux ordres est très différente, mais à fur et à mesure que les échelles grandissent les valeurs de la section efficaces pour les deux ordres se rapprochent et se stabilisent de plus en plus et donnent des valeurs (pour $\frac{\mu}{\mu_{ref}} > 3$) autour de $(3,9 \text{ pb})$ pour l'ordre NLO et $(2,6 \text{ pb})$ pour l'ordre LO .

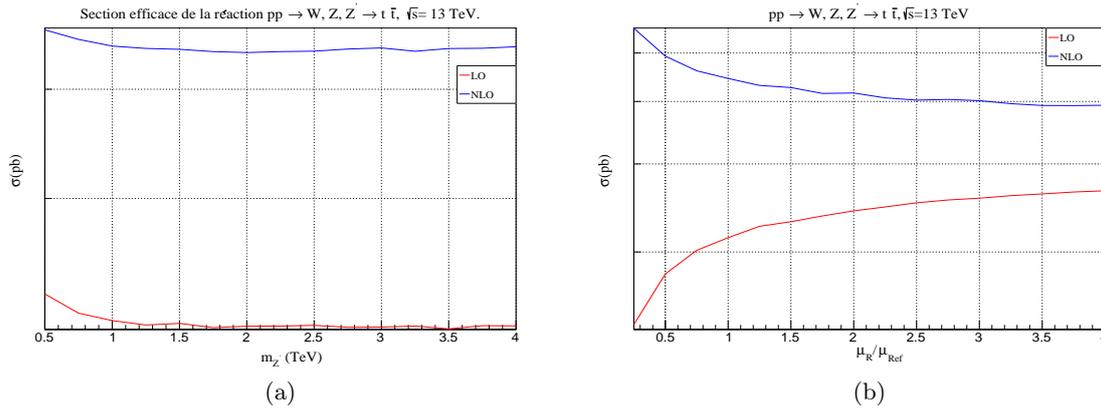


Figure 6.5: Section efficace de la réaction $pp \rightarrow W, Z, Z' \rightarrow t \bar{t}$, $\sqrt{s} = 13$ TeV (a) en fonction de la masse du boson Z' (b) en fonction de l'échelle de renormalisation μ_R

2. Le processus $pp \rightarrow Z' \rightarrow t \bar{t}$:

Pour ce processus, on a pris en considération seulement les interactions ayant le boson Z' comme médiateur, pour voir la contribution de ce nouveau boson dans la section efficace totale.

Pour ce processus on a calculé:

(a) Variation de la section efficace en fonction de la masse du boson Z' :

$M_{Z'}(\text{TeV})$	$\sigma^{\text{LO}}(\text{pb})$	$\sigma^{\text{NLO}}(\text{pb})$
0,5	$0,2219 \pm 0,0011$	$0,2896 \pm 0,0018$
0,75	$0,0849 \pm 0,00044$	$0,1043 \pm 0,00063$
1	$0,03778 \pm 0,0002$	$0,04516 \pm 0,00033$
1,25	$0,01914 \pm 0,0001$	$0,02253 \pm 0,00022$
1,5	$0,01014 \pm 5,4 \cdot 10^{-05}$	$0,01194 \pm 0,0001$
1,75	$0,005735 \pm 3 \cdot 10^{-05}$	$0,006679 \pm 5,7 \cdot 10^{-05}$
2	$0,003353 \pm 1,8 \cdot 10^{-05}$	$0,003879 \pm 3,4 \cdot 10^{-05}$
2,25	$0,002008 \pm 1,1 \cdot 10^{-05}$	$0,00234 \pm 2,1 \cdot 10^{-05}$
2,5	$0,001222 \pm 7,4 \cdot 10^{-06}$	$0,001423 \pm 1,5 \cdot 10^{-05}$
2,75	$0,0007549 \pm 4 \cdot 10^{-06}$	$0,0008757 \pm 8,3 \cdot 10^{-06}$
3	$0,0004736 \pm 3 \cdot 10^{-06}$	$0,0005342 \pm 5,2 \cdot 10^{-06}$
3,25	$0,0002932 \pm 1,5 \cdot 10^{-06}$	$0,0003417 \pm 3,2 \cdot 10^{-06}$
3,5	$0,0001857 \pm 1,4 \cdot 10^{-06}$	$0,0002164 \pm 2,2 \cdot 10^{-06}$
3,75	$0,0001168 \pm 5,7 \cdot 10^{-07}$	$0,0001388 \pm 1,2 \cdot 10^{-06}$
4	$7,361 \cdot 10^{-05} \pm 6,3 \cdot 10^{-07}$	$8,796 \cdot 10^{-05} \pm 8,1 \cdot 10^{-07}$

Table 6.3: Variation de la section efficace en fonction de la masse du bosons Z' pour le processus $pp \rightarrow Z' \rightarrow t \bar{t}$

Pour les deux ordres, On voit que la section efficace est inversement proportionnelle à la masse du boson Z' jusqu'à atteindre $7,361 \cdot 10^{-05}$ pb pour l'ordre LO et $8,796 \cdot 10^{-05}$ pour l'ordre NLO pour $M_{Z'} = 4$ TeV, car pour produire un boson Z' avec des masses aussi grandes cela nécessite beaucoup d'énergie et ainsi la probabilité que ce processus ait lieu devient de plus en plus petite jusqu'à atteindre 0 lorsque le processus devient cinématiquement impossible.

(b) Variation de la section efficace en fonction des échelles de renormalisation et de factorisation :

$\frac{\mu_R}{\mu_{Ref}}$	$\sigma^{LO}(\text{pb})$	$\sigma^{NLO}(\text{pb})$
0,25	$0,007504 \pm 4,1 \cdot 10^{-05}$	$0,007776 \pm 8,3 \cdot 10^{-05}$
0,5	$0,007018 \pm 3,7 \cdot 10^{-05}$	$0,007594 \pm 7,3 \cdot 10^{-05}$
0,75	$0,00663 \pm 3,5 \cdot 10^{-05}$	$0,007533 \pm 6,3 \cdot 10^{-05}$
1	$0,006432 \pm 3,6 \cdot 10^{-05}$	$0,007569 \pm 7,2 \cdot 10^{-05}$
1,25	$0,006258 \pm 3,3 \cdot 10^{-05}$	$0,007449 \pm 6,8 \cdot 10^{-05}$
1,5	$0,006211 \pm 3,5 \cdot 10^{-05}$	$0,007332 \pm 7,1 \cdot 10^{-05}$
1,75	$0,006047 \pm 3,2 \cdot 10^{-05}$	$0,007432 \pm 6,5 \cdot 10^{-05}$
2	$0,005994 \pm 3,3 \cdot 10^{-05}$	$0,007346 \pm 6 \cdot 10^{-05}$
2,25	$0,005882 \pm 3,1 \cdot 10^{-05}$	$0,007256 \pm 5,8 \cdot 10^{-05}$
2,5	$0,00586 \pm 3,1 \cdot 10^{-05}$	$0,007306 \pm 6,7 \cdot 10^{-05}$
2,75	$0,005791 \pm 3,1 \cdot 10^{-05}$	$0,007341 \pm 6,4 \cdot 10^{-05}$
3	$0,005728 \pm 3,1 \cdot 10^{-05}$	$0,007272 \pm 5,3 \cdot 10^{-05}$
3,25	$0,005707 \pm 3,1 \cdot 10^{-05}$	$0,007121 \pm 5,8 \cdot 10^{-05}$
3,5	$0,005661 \pm 3,1 \cdot 10^{-05}$	$0,007181 \pm 6,1 \cdot 10^{-05}$
3,75	$0,005605 \pm 3 \cdot 10^{-05}$	$0,007233 \pm 5,4 \cdot 10^{-05}$
4	$0,00558 \pm 3 \cdot 10^{-05}$	$0,007183 \pm 6,4 \cdot 10^{-05}$

Table 6.4: Variation de la section efficace en fonction de la l'échelle de renormalisation pour le processus $pp \rightarrow Z' \rightarrow t\bar{t}$

D'après la figure (6.6b) on voit que la section efficace, pour les deux ordres, et pour toutes les valeurs de μ , ne dépasse pas les quelques femtobarn, car le bosons Z' est très massif $M_{Z'} = 1,7 \text{ TeV}$. donc la probabilité qu'il soit créé est petite. De plus on constate que la valeur de la section efficace diminue pour des valeurs de plus en plus grandes de μ par contre on voit que pour l'ordre NLO la section efficace est moins sensible aux variations d'échelle ainsi les corrections ont rendu la section efficace moins sensible aux échelles non physiques.

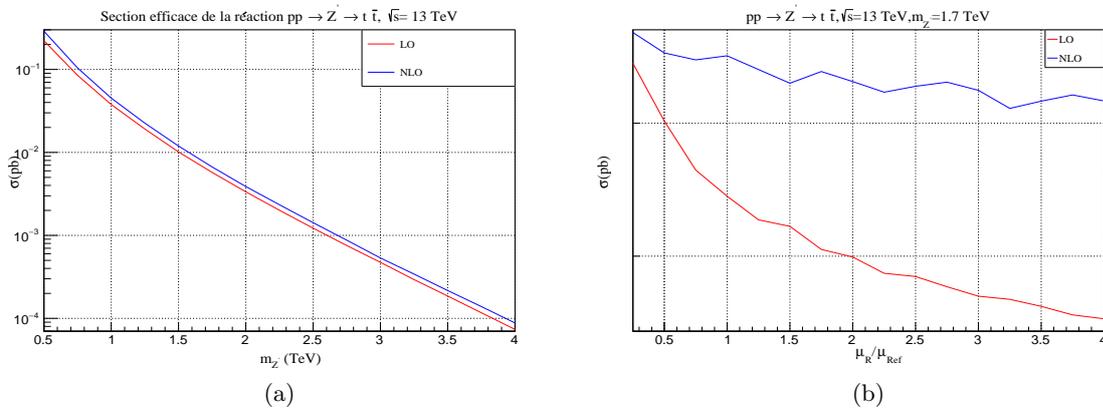


Figure 6.6: Section efficace de la réaction $pp \rightarrow Z' \rightarrow t\bar{t}$, $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ (a) en fonction de la masse du boson Z' (b) en fonction de l'échelle de renormalisation.

3. Le processus $p p \rightarrow Z, Z', \gamma \rightarrow \tau^+ \tau^-$:

Pour ce processus nous nous sommes intéressés à la collision de deux protons produisant une paire de leptons chargés ($\tau^+ \tau^-$).

Pour ce processus, nous avons calculé:

(a) Variation de la section efficace en fonction de la masse du boson Z' :

$M_{Z'}(\text{TeV})$	$\sigma^{\text{LO}}(\text{pb})$	$\sigma^{\text{NLO}}(\text{pb})$
0,5	$1513 \pm 3,6$	$2220 \pm 6,8$
0,75	$1515 \pm 3,5$	$2212 \pm 6,9$
1	$1518 \pm 3,6$	$2209 \pm 7,2$
1,25	$1517 \pm 3,5$	$2217 \pm 7,2$
1,5	$1524 \pm 3,4$	2214 ± 7
1,75	$1519 \pm 3,5$	$2222 \pm 6,8$
2	$1510 \pm 3,5$	$2221 \pm 7,2$
2,25	$1516 \pm 3,6$	2218 ± 7
2,5	$1508 \pm 3,5$	$2215 \pm 7,2$
2,75	$1520 \pm 3,5$	$2223 \pm 6,9$
3	$1515 \pm 3,6$	$2208 \pm 6,9$
3,25	$1513 \pm 3,5$	$2231 \pm 7,2$
3,5	$1522 \pm 3,6$	$2206 \pm 7,1$
3,75	$1518 \pm 3,6$	2214 ± 7
4	$1517 \pm 3,5$	2219 ± 7

Table 6.5: Variation de la section efficace en fonction de la masse du boson Z' pour le processus $p p \rightarrow Z, Z', \gamma \rightarrow \tau^+ \tau^-$

D'après la figure (6.7a), On voit tout d'abord que, pour les deux ordres, la section efficace est de l'ordre du (nb) et la section efficace de l'ordre NLO est plus grande que celle de l'ordre LO (par exemple pour $M_{Z'} = 4 \text{ TeV}$ on a $\frac{\sigma^{\text{NLO}}}{\sigma^{\text{LO}}} \simeq 1,46$). De plus les deux sections sont presque insensibles à la variation de la masse du boson Z' car pour ce processus, les interactions en QED sont celles qui contribuent le plus à la section efficace.

(b) Variation de la section efficace en fonction des échelles de renormalisation et de factorisation :

$\frac{\mu_R}{\mu_{Ref}}$	σ^{LO} (pb)	σ^{NLO} (pb)
0,25	$913,4 \pm 2,1$	$2166 \pm 6,2$
0,5	$1211 \pm 2,4$	$2210 \pm 6,3$
0,75	$1387 \pm 3,2$	$2213 \pm 6,6$
1	$1516 \pm 3,6$	$2207 \pm 7,4$
1,25	$1614 \pm 3,8$	$2214 \pm 7,3$
1,5	1692 ± 4	$2208 \pm 7,6$
1,75	$1766 \pm 4,1$	2213 ± 8
2	$1824 \pm 4,2$	$2206 \pm 8,3$
2,25	$1869 \pm 4,4$	$2207 \pm 8,7$
2,5	$1908 \pm 4,5$	$2220 \pm 8,9$
2,75	$1953 \pm 4,6$	$2204 \pm 9,4$
3	$1992 \pm 4,8$	$2211 \pm 9,6$
3,25	$2027 \pm 4,7$	$2217 \pm 9,7$
3,5	$2063 \pm 4,9$	$2202 \pm 9,8$
3,75	$2077 \pm 4,9$	2225 ± 10
4	2117 ± 5	2203 ± 10

Table 6.6: Variation de la section efficace en fonction de l'échelle de renormalisation pour le processus $pp \rightarrow Z, Z', \gamma \rightarrow \tau^+ \tau^-$

D'après la figure (6.7b), on constate que pour ce processus la section efficace pour l'ordre LO est très sensible à l'échelle de renormalisation, elle varie de $913,4 pb$ pour $\frac{\mu_R}{\mu_{Ref}} = 0,25$ à $2117 pb$ pour $\frac{\mu_R}{\mu_{Ref}} = 4$. Par contre la section efficace à l'ordre NLO est plus stable face aux variations d'échelle. Et avec des rapports $\frac{\mu_R}{\mu_{Ref}}$ de plus en plus grands, l'écart entre les valeurs de la section efficace pour les ordres deux se rétrécit.

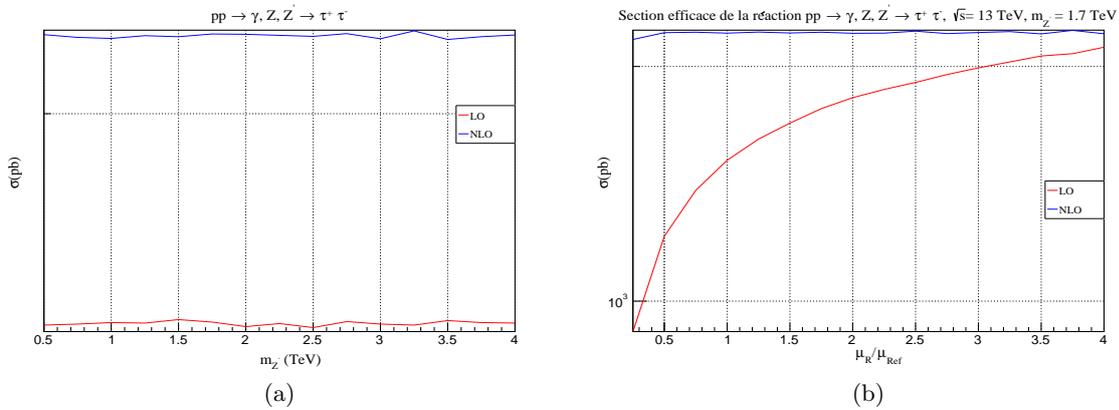


Figure 6.7: Section efficace de la réaction $pp \rightarrow \gamma, Z, Z' \rightarrow \tau^+ \tau^-$, $\sqrt{s} = 13$ TeV (a) en fonction de la masse du boson Z' , (b) en fonction de l'échelle de renormalisation μ_R .

4. Le processus $p p \rightarrow Z' \rightarrow \tau^+ \tau^-$:

Pour ce dernier processus, afin de nous focaliser sur la physique au-delà du modèle standard, nous allons prendre seulement les interactions ayant comme médiateur le boson Z' .

Pour ce processus nous avons calculé:

(a) Variation de la section efficace en fonction de la masse du boson Z' :

$M_{Z'}(\text{TeV})$	$\sigma^{\text{LO}}(\text{pb})$	$\sigma^{\text{NLO}}(\text{pb})$
0,5	$0,756 \pm 0,0039$	$0,8915 \pm 0,0044$
0,75	$0,2642 \pm 0,0014$	$0,3046 \pm 0,0014$
1	$0,1154 \pm 0,00062$	$0,1329 \pm 0,00074$
1,25	$0,05846 \pm 0,00037$	$0,06548 \pm 0,00033$
1,5	$0,03062 \pm 0,00019$	$0,03551 \pm 0,0002$
1,75	$0,01751 \pm 9,6 \cdot 10^{-05}$	$0,01977 \pm 8,4 \cdot 10^{-05}$
2	$0,01157 \pm 4,3 \cdot 10^{-05}$	$0,01159 \pm 5,4 \cdot 10^{-05}$
2,25	$0,006186 \pm 5,6 \cdot 10^{-05}$	$0,006959 \pm 3,4 \cdot 10^{-05}$
2,5	$0,003719 \pm 1,7 \cdot 10^{-05}$	$0,004276 \pm 2,3 \cdot 10^{-05}$
2,75	$0,002266 \pm 1,2 \cdot 10^{-05}$	$0,002613 \pm 1,7 \cdot 10^{-05}$
3	$0,001424 \pm 8,5 \cdot 10^{-06}$	$0,001626 \pm 7,8 \cdot 10^{-06}$
3,25	$0,0008958 \pm 4,8 \cdot 10^{-06}$	$0,001021 \pm 6,7 \cdot 10^{-06}$
3,5	$0,0005572 \pm 3,2 \cdot 10^{-06}$	$0,0006479 \pm 3,9 \cdot 10^{-06}$
3,75	$0,0003508 \pm 1,6 \cdot 10^{-06}$	$0,0004124 \pm 2,3 \cdot 10^{-06}$
4	$0,0002222 \pm 1,3 \cdot 10^{-06}$	$0,0002598 \pm 1,8 \cdot 10^{-06}$

Table 6.7: Variation de la section efficace en fonction de la masse du boson Z' pour le processus $p p \rightarrow Z' \rightarrow \tau^+ \tau^-$

d'après la figure (6.8a), on voit que les valeurs de la sections efficaces pour les deux ordres sont très proches, aussi la section efficace pour les deux ordre varie de la même façon, elle décroît à fur et à mesure que la masse du bosons Z' augmente. ainsi pour un boson Z' très massif la probabilité pour que ce processus ait lieu est très petite.

(b) Variation de la section efficace en fonction des échelles de renormalisation et de factorisation :

$\frac{\mu_R}{\mu_{\text{Ref}}}$	$\sigma^{\text{LO}}(\text{pb})$	$\sigma^{\text{NLO}}(\text{pb})$
0,25	$0,02297 \pm 0,00012$	$0,02282 \pm 0,00027$
0,5	$0,02114 \pm 0,00012$	$0,02245 \pm 9,6 \cdot 10^{-05}$
0,75	$0,02009 \pm 0,00011$	$0,02216 \pm 9,4 \cdot 10^{-05}$
1	$0,01951 \pm 0,0001$	$0,02214 \pm 8,7 \cdot 10^{-05}$
1,25	$0,01886 \pm 9,6 \cdot 10^{-05}$	$0,02193 \pm 0,00013$
1,5	$0,01879 \pm 0,0001$	$0,0221 \pm 0,00011$
1,75	$0,01832 \pm 9,9 \cdot 10^{-05}$	$0,02198 \pm 9,5 \cdot 10^{-05}$
2	$0,01819 \pm 0,00012$	$0,02167 \pm 9 \cdot 10^{-05}$
2,25	$0,01784 \pm 0,0001$	$0,02189 \pm 0,00011$
2,5	$0,01762 \pm 8,3 \cdot 10^{-05}$	$0,02149 \pm 8,8 \cdot 10^{-05}$
2,75	$0,01757 \pm 0,00011$	$0,02179 \pm 0,00013$
3	$0,0175 \pm 0,00011$	$0,02146 \pm 8,7 \cdot 10^{-05}$
3,25	$0,0173 \pm 8,7 \cdot 10^{-05}$	$0,02157 \pm 9,5 \cdot 10^{-05}$
3,5	$0,01718 \pm 0,00012$	$0,0215 \pm 0,00013$
3,75	$0,01701 \pm 9 \cdot 10^{-05}$	$0,02159 \pm 0,00012$
4	$0,01705 \pm 0,0001$	$0,02133 \pm 9,9 \cdot 10^{-05}$

Table 6.8: Variation de la section efficace en fonction de l'échelle de renormalisation pour le processus $pp \rightarrow Z' \rightarrow \tau^+\tau^-$

La figure (6.8b) montre que la section efficace diminue pour des valeurs de plus en plus grandes de l'échelle de renormalisation, mais l'ordre NLO reste moins sensible à ces variations que l'ordre LO .

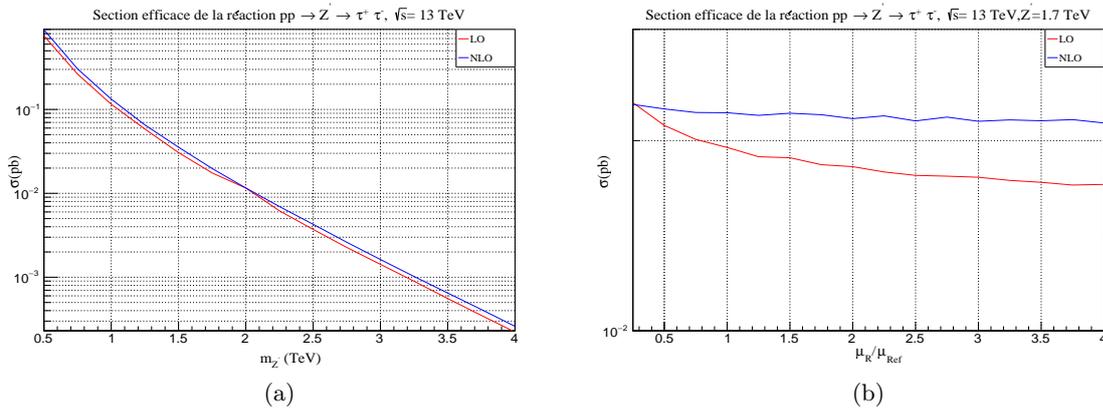


Figure 6.8: Section efficace de la réaction $pp \rightarrow Z' \rightarrow \tau^+\tau^-$, $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$, $M_{Z'} = 1,7 \text{ TeV}$ (a) en fonction de la masse du boson Z' , (b) en fonction de l'échelle de renormalisation μ_R

6.5 Calcul de la section efficace différentielle

Dans cette partie, nous allons calculer la section efficace différentielle pour les quatre processus, en fonction de deux variables, qui sont:

1. La masse invariante [28]

La masse d'une particule, avant sa désintégration, peut être calculée à partir des énergies et

des quantités de mouvement des particules qui sont produites lors de sa désintégration. Cette masse la est dite masse invariante car elle est indépendante des référentiels dans lesquels les énergies et les quantités de mouvement ont été mesurées et elle est donnée par:

$$M^2 = \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \mathbf{P}_i \right)^2 \quad (6.26)$$

Cette notion peut être généralisée, ainsi pour un ensemble de particules (une paire de leptons ou de quarks par exemple) la masse invariante de l'ensemble peut être définie et calculée de la même manière.

2. L'impulsion transverse

L'impulsion transverse est la projection de l'impulsion dans un plan perpendiculaire à l'axe du faisceau de particules, elle est donnée, pour un faisceau se propageant suivant l'axe z, par:

$$p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (6.27)$$

Et on a fixé les paramètres suivants:

- La constante de couplage du nouveau groupe $U(1)$: $g'_1 = 0, 2$.
- La masse de nouveau boson de Higgs h_2 : $M_{h_2} = 450 \text{ GeV}$.
- L'angle de mélange entre les bosons de Higgs: $\sin(\alpha) = 0, 1$.
- La masse du boson Z' : $M_{Z'} = 1, 7 \text{ TeV}$.
- Les neutrinos lourds des trois générations sont considérés comme ayant la même masse (masse dégénérée): $m_{\nu_h} = 200 \text{ GeV}$.
- Les échelles de renormalisation et de factorisation de référence $\mu_{R,Ref} = \mu_{F,Ref} = 91, 118 \text{ GeV}$.

1. Le processus $\mathbf{p p} \rightarrow \mathbf{Z, Z', W} \rightarrow \mathbf{t\bar{t}}$

Pour ce processus on a calculé la variation de la section efficace différentielle en fonction des deux paramètres cités précédemment. On a fixé la masse du boson Z' à $M_{Z'} = 1, 7 \text{ TeV}$ et l'énergie du centre de masse $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ et on a fait les calculs suivants:

- *fixed order LO*
- *fixed order NLO*
- *LO + Parton shower*
- *NLO + Parton shower*

Les résultats obtenus sont:

Variation de la section efficace différentielle en fonction de la masse invariante et de l'impulsion transverse

Comme le montre la figure(6.9a), pour les deux ordres, les valeurs de la section efficace différentielle avec parton shower sont supérieures à celles sans parton shower, de plus la section efficace différentielle, pour les 4 graphes affichent un pic pour une masse invariante de la paire $t\bar{t}$ autour de 400 GeV

puis ils décroissent avec des valeurs de masse invariante de plus en plus grandes.

Pour la variation de la section efficace différentielle en fonction de l'impulsion transverse du top quark t , représentée par la figure (6.9b), on voit que, la encore, les valeurs de la section efficace différentielle avec parton shower sont supérieures à celles de "fixed order" de plus les 4 cas affichent un pic pour une valeur de l'impulsion transverse au voisinage de 60 GeV , puis décroissent avec des valeurs d'impulsion transverse de plus en plus grandes.

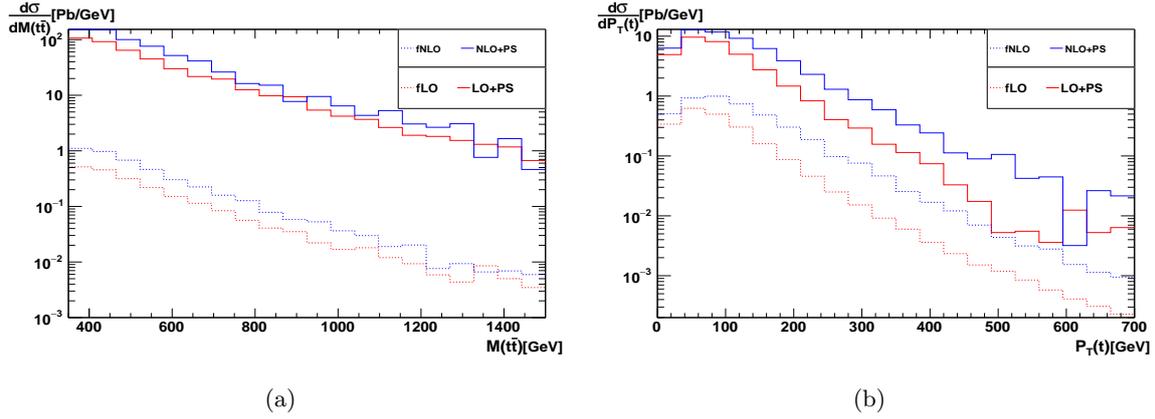


Figure 6.9: Variation de la section efficace différentielle de la réaction $pp \rightarrow Z, Z', W \rightarrow t\bar{t}$, $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$, $M_{Z'} = 1,7 \text{ TeV}$ (a) en fonction de la masse invariante de la paire $t\bar{t}$, (b) en fonction de l'impulsion transverse du top quark $P_T(t)$

2. Le processus $p p \rightarrow Z' \rightarrow t\bar{t}$

comme pour le processus précédent, ici aussi on a calculé la variation de la section efficace différentielle en fonction de la masse invariante de la paire ($t\bar{t}$) et l'impulsion transverse du top quark ($P_T(t)$). On a fixé la masse du boson Z' à $M_{Z'} = 1,7 \text{ TeV}$ et l'énergie du centre de masse $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ et on a fait les calculs suivants:

- *fixed order LO.*
- *fixed order NLO.*
- *LO + Parton shower.*
- *NLO + Parton shower.*

Variation de la section efficace différentielle en fonction de la masse invariante et de l'impulsion transverse

Pour ce processus, on voit que avec le parton shower, la différence entre les valeurs de la section efficace différentielle entre les deux ordres LO et NLO est plus petite que dans le cas de "fixed order".

D'après la figure (6.10a), on voit que pour les quatre graphes, les valeurs de la section efficace différentielle croissent avec des valeurs de la masse invariante de la paire $t\bar{t}$ de plus en plus grande, jusqu'à atteindre un pic pour $M_{t\bar{t}} = 1700 \text{ GeV}$ puis les graphes décroissent avec des masses plus grandes.

Pour le cas de la Variation de la section efficace différentielle en fonction du moment transverse du top quark t , on voit sur la figure (6.10b) que la section efficace différentielle est croissante jusqu'à atteindre son maximum au voisinage de $P_T(t) = 800 \text{ GeV}$ puis elle décroît avec des valeurs d'impulsion transverse plus grandes.

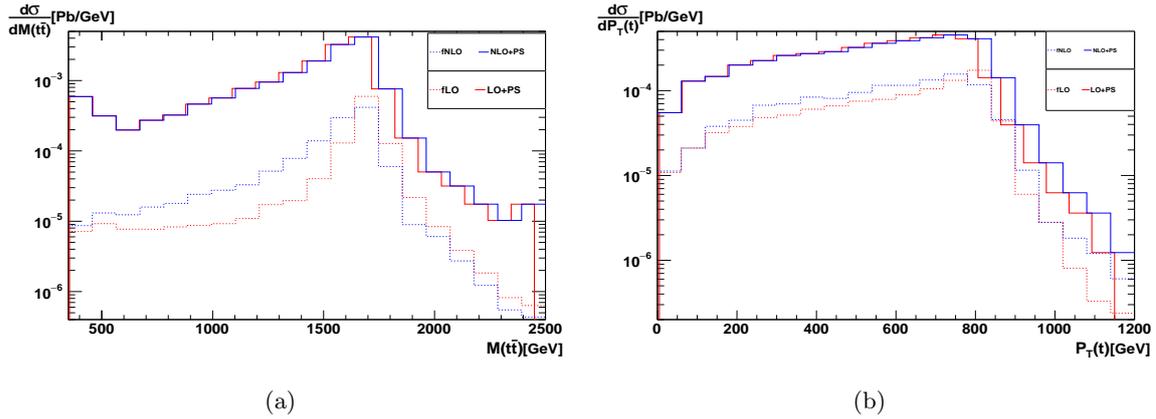


Figure 6.10: Variation de la section efficace différentielle de la réaction $pp \rightarrow Z' \rightarrow t\bar{t}$, $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$, $M_{Z'} = 1,7 \text{ TeV}$ (a) en fonction de la masse invariante de la paire $t\bar{t}$, (b) en fonction de l'impulsion transverse du top quark $P_T(t)$

3. Le processus $pp \rightarrow Z, Z', \gamma \rightarrow \tau^+\tau^-$

Pour ce processus on a calculé la variation de la section efficace différentielle en fonction de la masse invariante de la paire $\tau^+\tau^-$, puis en fonction de l'impulsion transverse du lepton τ^+ . On a fixé la masse du boson Z' à $M_{Z'} = 1,7 \text{ TeV}$ et l'énergie du centre de masse $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ et on a fait les calculs suivants:

- *fixed order LO.*
- *fixed order NLO.*
- *LO + Parton shower.*
- *NLO + Parton shower.*

Variation de la section efficace différentielle en fonction de la masse invariante et de l'impulsion transverse

D'après la figure (6.11a), la section efficace différentielle varie en fonction de la masse de la paire $\tau^+\tau^-$ de la même manière pour les deux ordres LO et NLO et pour les deux cas fixed order et parton shower par contre, dans le cas du parton shower, les valeurs des sections efficaces pour les deux ordres LO et NLO sont supérieures à celle du fixed order, de plus la section efficace affiche des valeurs plus grandes pour l'ordre NLO que pour l'ordre LO pour les deux cas, les quatre graphes affichent aussi un pic pour $M(\tau^+\tau^-) \simeq 90 \text{ GeV}$ pour ensuite décroître avec de valeurs supérieures de $M(\tau^+\tau^-)$.

Pour la variation de la section efficace en fonction de l'impulsion transverse du lepton τ^+ , on voit que, dans le cas du fixed order pour les deux ordres LO et NLO , la section efficace différentielle croît lentement sur l'intervalle $10 \text{ GeV} < P_T(\tau^+) < 50 \text{ GeV}$ pour atteindre un pic pour $P_T(\tau^+) = 50 \text{ GeV}$, de plus on remarque que sur l'intervalle $[50 \text{ GeV}, 100 \text{ GeV}]$, la différence entre les valeurs de la section efficace différentielle des deux ordres s'élargit. Pour le cas du parton shower pour l'ordre NLO on a des valeurs de la section efficace différentielle supérieures à celles de l'ordre LO de plus les deux graphes affiche un pic autour de $P_T(\tau^+) = 20 \text{ GeV}$ pour ensuite décroître sur l'intervalle $[50 \text{ GeV}, 100 \text{ GeV}]$

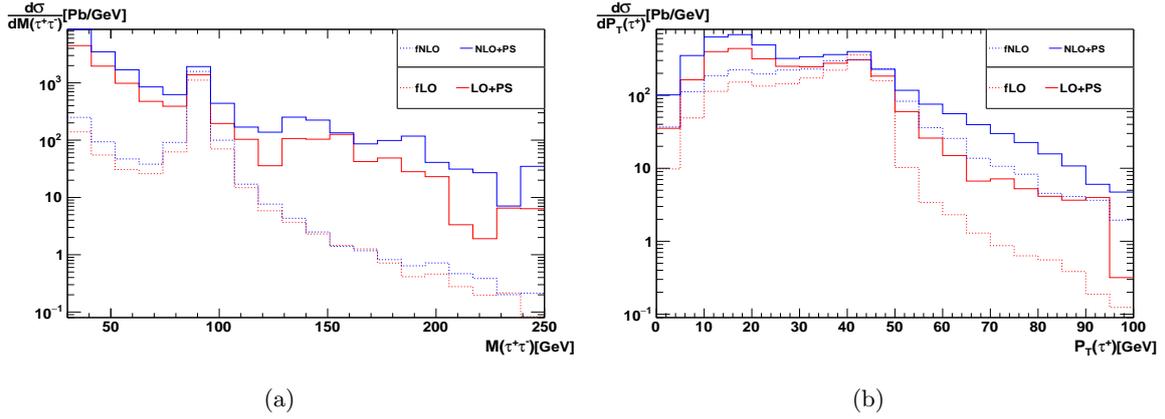


Figure 6.11: Variation de la section efficace différentielle de la réaction $pp \rightarrow Z, Z', \gamma \rightarrow \tau^+ \tau^-$, $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$, $M_{Z'} = 1,7 \text{ TeV}$ (a) en fonction de la masse invariante de la paire $\tau^+ \tau^-$, (b) en fonction de l'impulsion transverse du top quark $P_T(\tau^+)$

4. Le processus $pp \rightarrow Z' \rightarrow \tau^+ \tau^-$

Variation de la section efficace différentielle en fonction de la masse invariante et de l'impulsion transverse

Comme pour le processus précédent, ici aussi a calculé la variation de la section efficace différentielle en fonction de la masse invariante de la paire $\tau^+ \tau^-$, puis en fonction de l'impulsion transverse du lepton τ^+ . On a fixé la masse du boson Z' à $M_{Z'} = 1,7 \text{ TeV}$ et l'énergie du centre de masse $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$ et on a fait les calculs suivant:

- *fixed order LO*
- *fixed order NLO*
- *LO + Parton shower.*
- *NLO + Parton shower.*

D'après la figure (6.12a), on voit que la section efficace différentielle avec parton shower est supérieure à celle avec fixed order sur l'intervalle $[00 \text{ GeV}, 600 \text{ GeV}]$ pour les deux ordres *LO* et *NLO*, puis sur l'intervalle $[600 \text{ GeV}, 2500 \text{ GeV}]$ les quatre graphes affichent des valeurs très proches avec un pic à $M(\tau^+ \tau^-) = 1700 \text{ GeV}$ pour décroître ensuite avec des valeurs supérieures.

Pour la Variation de la section efficace différentielle en fonction de l'impulsion transverse $P_T(\tau^+)$, comme le montre la figure (6.12b), sur l'intervalle $[00 \text{ GeV}, 250 \text{ GeV}]$ pour les deux ordres *LO* et *NLO* les valeur de la section efficace avec parton shower sont supérieures à celles de fixed order, par contre sur l'intervalle $[250 \text{ GeV}, 800 \text{ GeV}]$ les quatre graphes affichent des valeurs très proches et la section efficace différentielle croît lentement atteignant son pic pour $P_T(\tau^+) = 800 \text{ GeV}$, puis sur l'intervalle $[800 \text{ GeV}, 1200 \text{ GeV}]$ la section efficace décroît affichant, pour des valeurs d'impulsion transverse de plus en plus grandes, des valeurs de plus en plus petites.

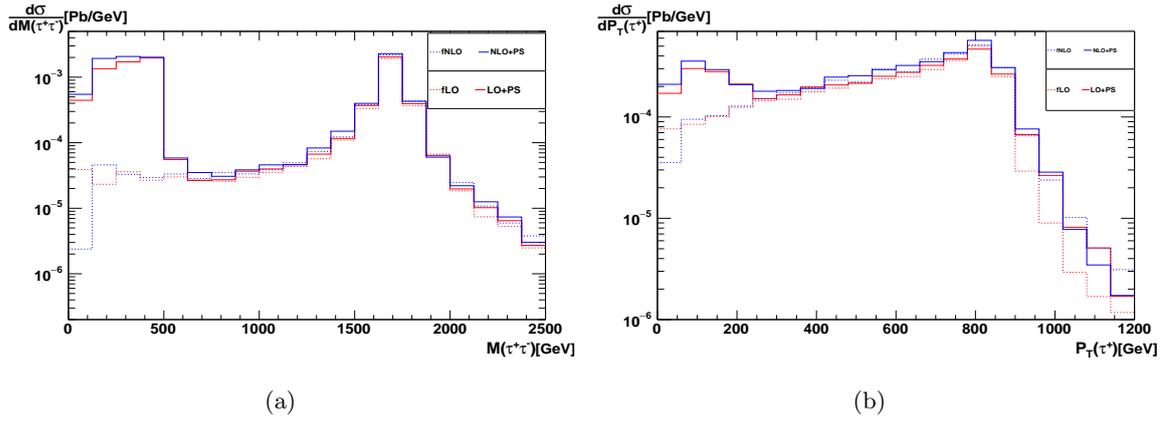


Figure 6.12: Variation de la section efficace différentielle de la réaction $pp \rightarrow Z' \rightarrow \tau^+\tau^-$, $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$, $M_{Z'} = 1,7 \text{ TeV}$ (a) en fonction de la masse invariante de la paire $t\bar{t}$, (b) en fonction de l'impulsion transverse du top quark $P_T(\tau^+)$

Phénoménologie des neutrinos lourds

Après la brisure spontanée du groupe $U_{B-L}(1)$, puis le mécanisme de seesaw, on se retrouve avec deux types de neutrinos, les neutrinos lourds ν_h et les neutrinos légers ν_l , tous les deux de type Majorana et pouvant s'écrire comme des combinaisons linéaires des neutrinos de chiralité gauche et droite comme suit:

$$\begin{aligned}\nu_h &= \cos(\alpha_\nu)\nu_L + \sin(\alpha_\nu)\nu_R \\ \nu_l &= -\sin(\alpha_\nu)\nu_L + \cos(\alpha_\nu)\nu_R\end{aligned}\quad (7.1)$$

Pour notre modèle on a considéré les masses des neutrinos lourds et légers comme étant dégénérées, ainsi tous les neutrinos lourds ont la même masse, de même pour les neutrinos légers, de plus il n'y a pas de mélange entre les générations.

Le couplage entre les neutrinos lourds et les bosons de jauge de l'interaction faible est proportionnel au rapport entre la masse des neutrino faibles et celle des neutrino lourds le rendant ainsi très faible, par conséquent, le taux de désintégration du neutrino lourd est très petit, et inversement sa durée de vie est grande (parfois comparable ou dépassant celle du quark bottom b) [18], pouvant ainsi être mesuré à partir d'un vertex secondaire dans le détecteur.

Pour le calcul numérique, on a utilisé la bibliothèque de PDF *CTEQ6L1*. Et on a fixé les paramètres suivants:

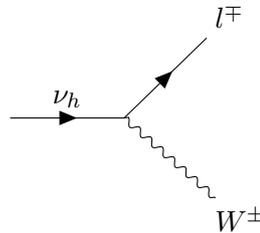
- La constante de couplage du nouveau groupe $U(1)$: $g'_1 = 0, 2$.
- La masse de nouveau boson de Higgs h_2 : $M_{h_2} = 450 \text{ GeV}$.
- L'angle de mélange entre les bosons de Higgs: $\sin(\alpha) = 0, 1$.
- La masse du boson Z' : $M_{Z'} = 1, 7 \text{ TeV}$.
- Les échelles de renormalisation et de factorisation de référence $\mu_{R,Ref} = \mu_{F,Ref} = 91, 118 \text{ GeV}$

7.1 Modes de désintégration du fermion ν_h

1. Désintégration en un boson W et un fermion chargé de charges opposées

$$\nu_h \rightarrow l^\pm W^\mp \quad (7.2)$$

Et le vertex associé est donné par:

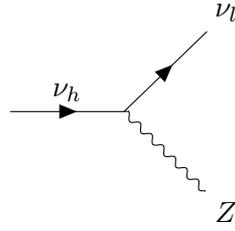


$$\frac{\sqrt{2}e}{4\sin(\theta_W)}\sin(\alpha_\nu) \quad (7.3)$$

2. Désintégration en un neutrino léger et un boson Z

$$\nu_h \rightarrow \nu_l Z \quad (7.4)$$

Et le vertex associé est donné par:



$$- \frac{e}{4\sin(\theta_W)\cos(\theta_W)} \sin(2\alpha_\nu) \quad (7.5)$$

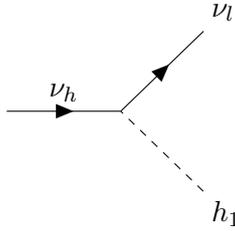
3. Désintégration en un neutrino léger et un boson de Higgs h

$$\nu_h \rightarrow \nu_l h_1 \quad (7.6)$$

Ou bien:

$$\nu_h \rightarrow \nu_l h_2 \quad (7.7)$$

Avec le vertex associé:



$$\frac{1}{2x} \left[-\sqrt{2}xy^\nu \cos(\alpha)\cos(2\alpha_\nu) + M_{\nu_h} \sin(2\alpha_\nu)\sin(\alpha) \right] \quad (7.8)$$

Où:

$$y^\nu = \frac{\sqrt{2m_{\nu_l}M_{\nu_h}}}{v}$$

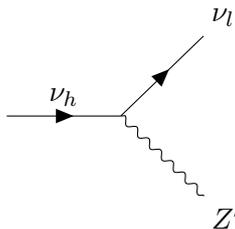
$$\sin(2\alpha_\nu) = -2 \frac{y^\nu \frac{v}{\sqrt{2}}}{\sqrt{4(y^\nu \frac{v}{\sqrt{2}})^2 + M_{\nu_h}^2}} \quad (7.9)$$

$$\cos(2\alpha_\nu) = \frac{M_{\nu_h}}{\sqrt{4(y^\nu \frac{v}{\sqrt{2}})^2 + M_{\nu_h}^2}}$$

4. Désintégration en un neutrino léger et un boson Z'

$$\nu_h \rightarrow \nu_l Z' \quad (7.10)$$

Avec un vertex:

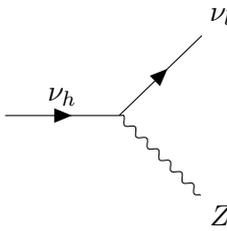


$$g'_1 \sin(2\alpha_\nu) \quad (7.11)$$

5. Désintégration en un neutrino léger et un boson Z

$$\nu_l \rightarrow \nu_l Z \quad (7.12)$$

Avec un vertex:



$$-\frac{e}{4\sin(\theta_W)\cos(\theta_W)}\cos(2\alpha_\nu) \quad (7.13)$$

7.2 processus $p p \rightarrow \nu_{h1} \nu_{h1}$

Pour ce processus, nous allons étudier la variation de la section efficace en fonction de la masse des neutrinos lourds, puis la variation de la section efficace en fonction des échelles de renormalisation et de factorisation. A l'ordre de Born, la création de la paire de neutrinos lourds se fait par la désintégration d'un boson Z ou bien un boson Z' .

Pour le cas de la variation de la masse on a pris les trois cas: des neutrinos lourds de petite masse (50 GeV), relativement lourds $50 \text{ GeV} < M_{\nu_h} < 500 \text{ GeV}$, et enfin très massifs 2000 GeV .

1. Variation de la section efficace en fonction de la masse du neutrino lourd ν_{h1}

$M_{\nu_h} (\text{GeV})$	$\sigma^{\text{LO}} (\text{pb})$	$\sigma^{\text{NLO}} (\text{pb})$
50	$0,00158 \pm 6,6 \cdot 10^{-06}$	$0,00179 \pm 5,9 \cdot 10^{-06}$
200	$0,001388 \pm 5,2 \cdot 10^{-06}$	$0,001587 \pm 4,2 \cdot 10^{-06}$
400	$0,0009829 \pm 3,7 \cdot 10^{-06}$	$0,001138 \pm 2,5 \cdot 10^{-06}$
600	$0,0004847 \pm 1,8 \cdot 10^{-06}$	$0,0005648 \pm 1,3 \cdot 10^{-06}$
800	$6,125 \cdot 10^{-05} \pm 2,3 \cdot 10^{-07}$	$7,198 \cdot 10^{-05} \pm 1,6 \cdot 10^{-07}$
1000	$1,633 \cdot 10^{-06} \pm 6,5 \cdot 10^{-09}$	$1,959 \cdot 10^{-06} \pm 4,6 \cdot 10^{-09}$
1200	$3,011 \cdot 10^{-07} \pm 1,2 \cdot 10^{-09}$	$3,661 \cdot 10^{-07} \pm 8,3 \cdot 10^{-10}$
1400	$9,365 \cdot 10^{-08} \pm 2,2 \cdot 10^{-10}$	$9,398 \cdot 10^{-08} \pm 2,2 \cdot 10^{-10}$
1600	$2,189 \cdot 10^{-08} \pm 9,1 \cdot 10^{-11}$	$2,744 \cdot 10^{-08} \pm 6,5 \cdot 10^{-11}$
1800	$6,801 \cdot 10^{-09} \pm 2,7 \cdot 10^{-11}$	$8,687 \cdot 10^{-09} \pm 2,1 \cdot 10^{-11}$
2000	$2,198 \cdot 10^{-09} \pm 9,8 \cdot 10^{-12}$	$2,84 \cdot 10^{-09} \pm 7,1 \cdot 10^{-12}$

Table 7.1: Variation de la section efficace en fonction de la masse du neutrino lourd pour le processus $p p \rightarrow \nu_{h1} \nu_{h1}$

Comme on peut le constater, d'après la figure (7.1a), pour les deux ordres LO et NLO , la section efficace décroît avec des masses de neutrinos lourds de plus en plus élevées, ainsi plus la masse des neutrinos lourds est grande, plus cela nécessite de l'énergie pour en créer, rendant la probabilité d'apparition d'une paire de neutrinos lourds de plus en plus petite, de ce fait la section efficace est décroissante atteignant $2,198 \cdot 10^{-09} \text{ pb}$ pour des neutrinos très massifs ayant une masse de 2000 GeV .

2. Variation de la section efficace en fonction des échelles de renormalisation et de factorisation ¹

$\frac{\nu_R}{\nu_{Ref}}$	$\sigma^{LO}(\text{pb})$	$\sigma^{NLO}(\text{pb})$
0,25	$0,001702 \pm 6,5 \cdot 10^{-06}$	$0,00171 \pm 4,8 \cdot 10^{-06}$
0,5	$0,001578 \pm 6 \cdot 10^{-06}$	$0,00168 \pm 4,1 \cdot 10^{-06}$
1	$0,001453 \pm 5,5 \cdot 10^{-06}$	$0,001649 \pm 4 \cdot 10^{-06}$
1,5	$0,001394 \pm 5,3 \cdot 10^{-06}$	$0,001627 \pm 4 \cdot 10^{-06}$
2	$0,001292 \pm 4,9 \cdot 10^{-06}$	$0,001558 \pm 4,1 \cdot 10^{-06}$
2,5	$0,001253 \pm 4,8 \cdot 10^{-06}$	$0,001556 \pm 4,1 \cdot 10^{-06}$
3	$0,00124 \pm 4,7 \cdot 10^{-06}$	$0,001537 \pm 4,3 \cdot 10^{-06}$
3,5	$0,00123 \pm 4,6 \cdot 10^{-06}$	$0,001534 \pm 4,8 \cdot 10^{-06}$
4	$0,001204 \pm 4,6 \cdot 10^{-06}$	$0,001524 \pm 4,3 \cdot 10^{-06}$
4,5	$0,001187 \pm 4,5 \cdot 10^{-06}$	$0,00152 \pm 4,4 \cdot 10^{-06}$
5	$0,001178 \pm 4,5 \cdot 10^{-06}$	$0,001515 \pm 4,4 \cdot 10^{-06}$

Table 7.2: Variation de la section efficace en fonction de l'échelle de renormalisation pour le processus $p p \rightarrow \nu_{h1} \nu_{h1}$

Comme le montre la figure (7.1b), la section efficace décroît pour des échelles de renormalisation de plus en plus grandes, par contre la section efficace pour l'ordre NLO est plus grande que celle de l'ordre LO , de plus elle est moins sensible aux variations de l'échelle de renormalisation, d'où l'intérêt d'inclure les corrections dans le calcul numérique.

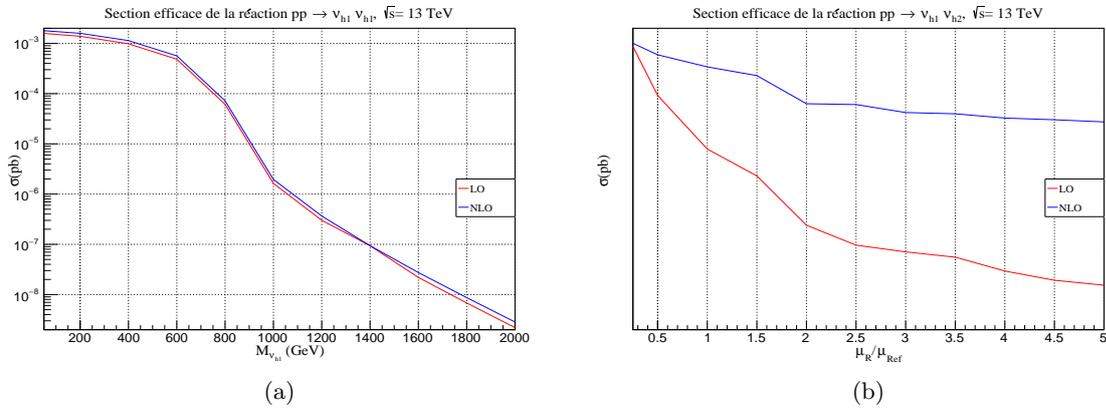


Figure 7.1: Section efficace de la réaction $p p \rightarrow \nu_{h1} \nu_{h1}$, $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$, (a) en fonction de la masse du neutrino ν_{h1} , (b) en fonction de l'échelle de renormalisation μ_R pour une masse des neutrinos lourds $M_{\nu_h} = 200 \text{ GeV}$

7.3 processus $p p \rightarrow Z' \rightarrow \nu_{h1} \nu_{h1}$

Pour ce processus, nous nous intéressons à une interaction caractéristique de notre modèle qui est la désintégration du nouveau boson Z' en une paire de neutrinos lourds, en réalité, comme ça a été mentionné dans le chapitre précédent, ces neutrinos ne sont pas stables et vont se désintégrer à leur tour donnant ainsi des signature multileptoniques. .

¹Ici, nous avons fixé la masse des neutrinos lourds à $M_{\nu_h} = 200 \text{ GeV}$

1. Variation de la section efficace en fonction de la masse du neutrino lourd ν_{h1}

$M_{\nu_h}(\text{GeV})$	$\sigma^{\text{LO}}(\text{pb})$	$\sigma^{\text{NLO}}(\text{pb})$
50	$0,001582 \pm 8,8 \cdot 10^{-06}$	$0,001789 \pm 8,8 \cdot 10^{-06}$
200	$0,001369 \pm 7,1 \cdot 10^{-06}$	$0,001584 \pm 5,4 \cdot 10^{-06}$
400	$0,0009869 \pm 5,1 \cdot 10^{-06}$	$0,001138 \pm 3,5 \cdot 10^{-06}$
600	$0,0004839 \pm 2,5 \cdot 10^{-06}$	$0,000564 \pm 1,7 \cdot 10^{-06}$
800	$6,086 \cdot 10^{-05} \pm 3,2 \cdot 10^{-07}$	$7,211 \cdot 10^{-05} \pm 2,3 \cdot 10^{-07}$
1000	$1,656 \cdot 10^{-06} \pm 8,8 \cdot 10^{-09}$	$1,975 \cdot 10^{-06} \pm 6,2 \cdot 10^{-09}$
1200	$3,04 \cdot 10^{-07} \pm 1,6 \cdot 10^{-09}$	$3,678 \cdot 10^{-07} \pm 1,1 \cdot 10^{-09}$
1400	$7,551 \cdot 10^{-08} \pm 4,1 \cdot 10^{-10}$	$9,391 \cdot 10^{-08} \pm 2,9 \cdot 10^{-10}$
1600	$2,178 \cdot 10^{-08} \pm 1,2 \cdot 10^{-10}$	$2,756 \cdot 10^{-08} \pm 8,5 \cdot 10^{-11}$
1800	$6,837 \cdot 10^{-09} \pm 3,7 \cdot 10^{-11}$	$6,823 \cdot 10^{-09} \pm 3,7 \cdot 10^{-11}$
2000	$2,193 \cdot 10^{-09} \pm 1,2 \cdot 10^{-11}$	$2,839 \cdot 10^{-09} \pm 8,5 \cdot 10^{-12}$

Table 7.3: Variation de la section efficace en fonction de la masse du neutrino lourd pour le processus $p p \rightarrow Z' \rightarrow \nu_{h1} \nu_{h1}$

Comme le montre la figure (7.2a), les valeurs de la section efficace sont maximales pour des neutrinos lourds "légers" ayant une petite masse, puis plus la masse de neutrinos augmente, plus la section efficace diminue et ceci est vrai pour les deux ordres, de plus, pour ce processus, on voit que les valeurs de la section efficace avant et après les corrections sont très proches.

2. Variation de la section efficace en fonction des échelles de renormalisation et de factorisation

$\frac{\mu_R}{\mu_{\text{Ref}}}$	$\sigma^{\text{LO}}(\text{pb})$	$\sigma^{\text{NLO}}(\text{pb})$
0,25	$0,001603 \pm 8,3 \cdot 10^{-06}$	$0,001621 \pm 6,6 \cdot 10^{-06}$
0,5	$0,001494 \pm 7,7 \cdot 10^{-06}$	$0,001612 \pm 5,3 \cdot 10^{-06}$
1	$0,001389 \pm 7,2 \cdot 10^{-06}$	$0,001591 \pm 5,5 \cdot 10^{-06}$
1,5	$0,001323 \pm 6,9 \cdot 10^{-06}$	$0,001572 \pm 5,4 \cdot 10^{-06}$
2	$0,001289 \pm 6,7 \cdot 10^{-06}$	$0,001551 \pm 5,4 \cdot 10^{-06}$
2,5	$0,001269 \pm 6,7 \cdot 10^{-06}$	$0,001548 \pm 6,1 \cdot 10^{-06}$
3	$0,00124 \pm 6,4 \cdot 10^{-06}$	$0,001537 \pm 5,9 \cdot 10^{-06}$
3,5	$0,001221 \pm 6,4 \cdot 10^{-06}$	$0,001534 \pm 5,9 \cdot 10^{-06}$
4	$0,001209 \pm 6,3 \cdot 10^{-06}$	$0,001507 \pm 6,1 \cdot 10^{-06}$
4,5	$0,001195 \pm 6,3 \cdot 10^{-06}$	$0,001509 \pm 6,1 \cdot 10^{-06}$
5	$0,001181 \pm 6,2 \cdot 10^{-06}$	$0,001502 \pm 6,5 \cdot 10^{-06}$

Table 7.4: Variation de la section efficace en fonction de l'échelle de renormalisation pour le processus $p p \rightarrow Z' \rightarrow \nu_{h1} \nu_{h1}$

Comme pour le cas du processus précédent, la masse des neutrinos lourds a été fixée à $M_{\nu_h} = 200 \text{ GeV}$.

On remarque que, d'après la figure (7.2b), des échelles de renormalisation de plus en plus grandes, donnent des sections efficaces de plus en plus petites, mais pour l'ordre NLO ces valeurs restent supérieures à celles de l'ordre LO et diminuent plus lentement.

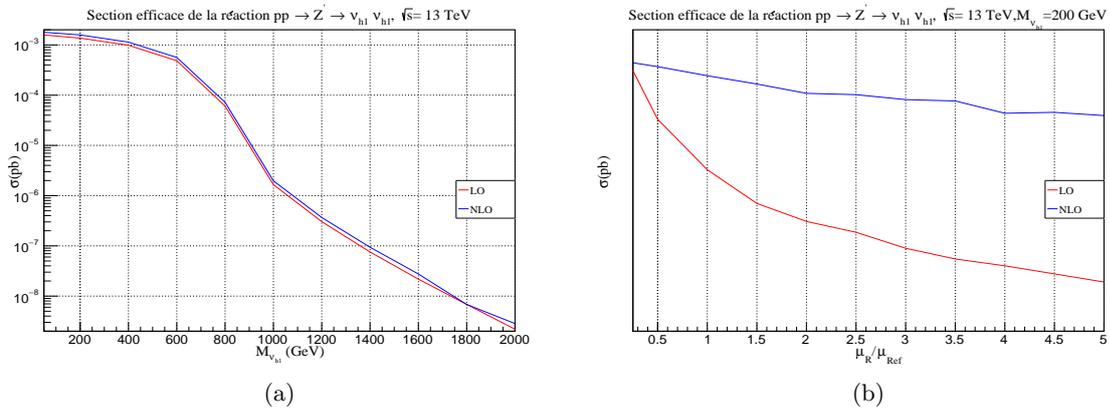


Figure 7.2: Section efficace de la réaction $pp \rightarrow Z' \rightarrow \nu_{h1} \nu_{h1}$, $\sqrt{s} = 13$ (a) en fonction de la masse du neutrino ν_{h1} , (b) en fonction de l'échelle de renormalisation μ_R pour une masse des neutrinos lourds $M_{\nu_h} = 200$ GeV

Conclusion générale

Dans cette thèse on a étudié deux modèles de la physique au delà du modèle standard, et s'inscrivant dans le cadre des théories de grande unification. La thèse peut être décomposée en deux parties, la première est consacrée à la construction des modèles, où on a exposé le modèle standard, puis les groupes et algèbres de Lie, pour arriver ensuite au modèle $SU(5)$, suivit du modèle $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$. Après cela on est passé à la deuxième partie, qu'on a réservé à la phénoménologie du modèle $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$, ainsi dans le chapitre 05, après avoir exposé les éléments de base du calcul de précisions, on a calculé, pour les deux ordres LO et NLO , la variation de la section efficace en fonction de la masse du boson $M_{Z'}$ puis en fonction de l'échelle de renormalisation μ_R pour les quatre processus suivants:

- $p p \rightarrow Z, Z', W \rightarrow t\bar{t}$.
- $p p \rightarrow Z' \rightarrow t\bar{t}$.
- $p p \rightarrow Z, Z', \gamma \rightarrow \tau^+ \tau^-$.
- $p p \rightarrow Z' \rightarrow \tau^+ \tau^-$.

Puis, pour ces mêmes processus, on a calculé la variation de la section efficace différentielle:

- Pour les deux premiers, en fonction de la masse invariante de la paire $t\bar{t}$, puis en fonction de l'impulsion transverse du top quark $P_T(t)$, on a fait cela pour les 4 cas $LO + PS, NLO + PS$, *fixed order LO* et *fixed order NLO* et on a fait une comparaison.
- Pour les deux derniers, la variation de la section efficace différentielle a été calculée en fonction de la masse invariante de la paire $\tau^+ \tau^-$, puis en fonction de l'impulsion transverse du lepton τ^+ $P_T(\tau^+)$, cela a été fait pour les 4 cas $LO + PS, NLO + PS$, *fixed order LO* et *fixed order NLO* et là encore on a comparé les résultats.

Enfin on a consacré le dernier chapitre à la phénoménologie des neutrinos lourds qui apparaissent dans le modèle $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$, on a calculé, pour les deux ordres LO et NLO la variation de la section efficace en fonction de la masse des neutrinos lourds M_{ν_h} , puis en fonction de l'échelle de renormalisation pour les deux processus suivants:

- $p p \rightarrow \nu_{h1} \nu_{h1}$.
- $p p \rightarrow Z' \rightarrow \nu_{h1} \nu_{h1}$.

A l'aide des résultats obtenus, on a pu montrer l'intérêt du calcul NLO et qu'il est plus précis et plus stable face aux variations des échelles non physiques que le calcul LO , ainsi que l'importance du *parton shower* qui donne des résultats plus précis pour les basses énergies.

Pour les calculs précédents, on a utilisé *Madgraph* dans sa version $MG5 - aMC - v3 - 3 - 2$, et, dans *madgraph*, on a utilisé le modèle $BLN - nloqcd - 5f - fgf - UFO - v1$, pour le *parton shower* on a utilisé *Pythia8* et pour les sections efficaces différentielles, on a eu recours à *madanalysis5*.

Bibliographie

- [1] YDRI, Badis. *A Modern Course in Quantum Field Theory*, Volume 2; Advanced topics. 2019.
- [2] LANGACKER, Paul. *The standard model and beyond*. Taylor & Francis, 2017.
- [3] MARLEAU, Luc. *Introduction à la physique des particules*. 1998. Canada.
- [4] TORREJÓN, Miguel. *Symmetry breaking in grand unified theories*. 2016. Thèse de doctorat. Pontificia Universidad Católica del Perú (Peru).
- [5] STILLWELL, John. *Naive lie theory*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [6] CAHILL, Kevin. *Physical mathematics*. Cambridge University Press, 2013.
- [7] LICHTENBERG, D. *Unitary Symmetry and Elementary Particles*. 1978. New York, 1978.
- [8] GEORGI, Howard. *Lie algebras in particle physics: from isospin to unified theories*. Taylor & Francis, 2000.
- [9] TYE, S. H. *Introduction to the SU (5) grand unified theory and related topics*. 1982.
- [10] QUIGG, Chris. *Gauge theories of the strong, weak, and electromagnetic interactions*. CRC Press, 1983.
- [11] LANGACKER, Paul. Grand unified theories and proton decay. *Physics Reports*, 1981, vol. 72, no 4, p. 185-385.
- [12] LI, Ling-Fong. *Group theory of the spontaneously broken gauge symmetries*. *Physical Review D*, 1974, vol. 9, no 6, p. 1723.
- [13] BURAS, Andrzej J., ELLIS, J., GAILLARD, Mary K., et al. *Aspects of the grand unification of strong, weak and electromagnetic interactions*. *Nuclear Physics B*, 1978, vol. 135, no 1, p. 66-92.
- [14] MAGG, M. et SHAFI, Qaisar. *Symmetry breaking patterns in SU (5)*. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 1980, vol. 4, no 1, p. 63-66.
- [15] BASSO, Lorenzo. *Phenomenology of the minimal B-L extension of the Standard Model at the LHC*. arXiv preprint arXiv:1106.4462, 2011.
- [16] PRUNA, Giovanni Marco. *Phenomenology of the minimal B – L Model: the Higgs sector at the Large Hadron Collider and future Linear Colliders*. arXiv preprint arXiv:1106.4691 (2011).
- [17] DEPPISCH, FRANK F., WEI LIU, et Manimala Mitra. *Long-lived heavy neutrinos from Higgs decays*. *Journal of High Energy Physics* 2018, no. 8 (2018): 1-24.
- [18] BASSO, Lorenzo, BELYAEV, Alexander, MORETTI, Stefano, et al. *Phenomenology of the minimal B-L extension of the Standard model: Z' and neutrinos*. *Physical Review D*, 2009, vol. 80, no 5, p. 055030.
- [19] TANEDO, Flip. Monte Carlo with Madgraph 5-personal notes and how-to guide. 2011.
- [20] AURENCHE, Patrick. *La QCD et son histoire: partons d'un bon pied!*. 2006.
- [21] CAMPBELL, John M., HUSTON, J. W., et STIRLING, W. J. *Hard interactions of quarks and gluons: a primer for LHC physics*. *Reports on Progress in Physics*, 2006, vol. 70, no 1, p. 89.

-
- [22] ELLIS , Keith. *QCD for the LHC and the Tevatron*. 2010
- [23] REINA , Laura. *NLO QCD calculations*. CTEQ summer school. 2009
- [24] ZIDI, Mohamed Sadok. *Calcul des boucles dans les théories de jauge*. 2011.
- [25] Rekaik, Chahra., Zidi, M.S. *Physique du boson W -prime au LHC: calcul de précision à l'ordre NLO en QCD*. (2018).
- [26] Bauer, Julia. *Prospects for the Observation of Electroweak Top Quark Production with the CMS Experiment*. PhD diss., KIT, Karlsruhe., 2010.
- [27] DEPPISCH, F., BUTTERWORTH, J., YALLUP, D., WEI, L., VARMA, A. et Amrith, S. *LHC constraints on a B - L gauge model using Contur*. Journal of High Energy Physics, 2019.
- [28] <https://atlas.cern/glossary/mass>

Résumé : Le but de ce travail est de proposer quelques solutions aux problèmes du modèle standard. Nous avons étudié, dans la partie théorique, deux modèles de la théorie de grande unification, le premier est le modèle $SU(5)$ ou modèle *Georgi-Glashow* qui représente un des modèles les plus simples de la physique au delà du modèle standard et le deuxième est le modèle $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$, ce dernier représente une simple extension du modèle standard. Quant à la partie phénoménologique elle a été consacrée au modèle $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$ où nous avons tout d'abord étudié la phénoménologie du nouveau bosons Z' en calculant les sections efficaces totales et les sections efficaces différentielles pour les ordres LO, NLO, LO+PS et NLO+PS pour quatre processus puis après, on a terminé notre travail par une étude de la phénoménologie des neutrinos lourds ν_h en calculant les sections efficaces aux ordres LO et NLO pour deux processus de production d'une paire de neutrinos lourds.

Mots clés : Grande unification, modèle $SU(5)$, modèle $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \otimes U(1)$, boson de jauge Z' , neutrinos lourds, parton shower, LHC.

Abstract: The aim of this work is to solve some problems of the standard model. We studied, in the theoretical part, two models of the grand unified theory, the first one is the $SU(5)$ model or the *Georgi-Glashow* model which represents one of the simplest models of the physics beyond the standard model and the second one is the $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$ model, this latter represents a simple extension of the standard model. As for the phenomenological part it was devoted to the $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$ model where we first studied the phenomenology of the new Z' boson by calculating the total cross sections and the differential cross sections for the orders LO, NLO, LO+PS and NLO +PS for four processes then we ended our work with by studying the phenomenology of the heavy neutrinos ν_h by calculating the cross sections at LO and NLO orders for two processes of paire production of heavy neutrinos.

Keywords: Grand unification, $SU(5)$ model, $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \otimes U(1)$ model, Z' gauge boson, heavy neutrinos, parton shower, LHC

ملخص:

الهدف من هذا العمل هو حل بعض مشاكل التّموذج المعياري. لقد درسنا في الجانب التّطري نموذجين من نظريات توحيد القوى الكبير، التّموذج الاوّل هو $SU(5)$ او ما يعرف بنموذج *Georgi - Glashow* و الذي يعتبر واحد من ابسط نماذج الفيزياء ما بعد التّموذج المعياري، والثاني هو التّموذج $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$ ، هذا الاخير يمثّل توسيع بسيط للتّموذج المعياري. أمّا الجانب الفينومينولوجي، فقد خصّ لنموذج $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_{(B-L)}(1)$ حيث درسنا أوّل الفينومينولوجيا للوزون Z' من خلال حساب المقاطع الفعّالة الكليّة و المقاطع الفعّالة التّفاضليّة في التّقريبات LO ، NLO ، $LO + PS$ و $NLO + PS$ لأربع تفاعلات ثمّ ختمنا عملنا بدراسة فنومينولوجيا التّوترينوهات الثّقيلة من خلال حساب المقاطع الفعّالة في التّقريبات LO ، NLO في تفاعلي انتاج زوج من النّوترينوهات الثّقيلة.

كلمات مفتاحيّة: توحيد القوى الكبير، التّموذج $SU(5)$ ، التّموذج $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \otimes U(1)$ ، البوزون المعياري Z' ، النّوترينوهات الثّقيلة، PS ، LHC