REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Seddik Benyahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Physique

N° d'ordre :

Série :

Mémoire

présenté pour obtenir le diplôme de **Master**

Filière : Physique.

Spécialité : Physique Théorique

par

Roumaissa Krimat

Thème

Systèmes quantiques dissipatifs

Soutenu le: 27/09/2022

Devant le Jury:

Président:	T. Boudjedaa	Prof	Univ. Jijel
Rapporteur:	A. Bounames	Prof.	Univ. Jijel
Examinateur	A. Tilbi	MCA.	Univ. Jijel

Remerciement

Avant tout nous remercions ALLAH tout puissant qui nous a donné la force et la volonté pour pouvoir finaliser ce mémoire de Master.

Un remerciement spécial à mon encadreur le Professeur Abdelhafid Bounames pour m'avoir proposé ce thème et pour m'avoir dirigé durant la préparation de ce mémoire.

Mes remerciements aux membres du jury de ce mémoire, Professeeur Tahar Boudjedaa *qui m'a honnoré en acceptant de présider le Jury et Dr.A.Tilbi, MCA à l'université de Jijel, qui m'a honoré en acceptant de juger ce travail.*

Je présente aussi mes remeciments les plus sincères à tous mes enseignants du département de physique en particulier ceux de physique théorique.

Mes remerciments à mes amies Rihab,Nazha et Nour dine.

Sans oublier ma chère famille, ma mère et mon père, mes soeurs Yasmine, Wissem, Ibtissem et Bassema, et mes frères Billel, Mouloud et Houssem.

Roumaissa Krimat

Introduction générale

Avec les dévelopements des recherches sur systèmes quantiques non-hermitiens durant les deux dernières décennies, les systèmes dissipatifs commencent à susciter l'intérêt des chercheurs [1].

L'objectif principal de la formulation lagrangienne et hamiltonienne est de trouver l'analogue quantique du mouvement dissipatif. Pour cela, nous commensons par la recherche du lagrangien et de l'hamiltonien classiques. Si les quantités conservées sont connues, la solution du problème pourraient être obtenues. Ensuite, la quantification du formalisme est abordé en tenant compte du fait que les relations de commutation et les équations du mouvement de Heisenberg doivent être compatibles.

Ce mémoire se compose d'une introduction générale et trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous donnons un rappel sur les formulations lagrangienne et hamiltonienne classiques pour les systèmes dissipatifs. Dans le deuxième chapitre, nous adordons la quantification de systèmes dissipatifs. Enfin, dans le troisième chapitre nous cherchons les solutions de l'équation de Schrödinger de trois configurations de l'oscillateur harmonique de Caldirola-Kanai complexe dependant du temps en utilisant les tranformations unitaires.

Chapter 1

Systèmes dissipatifs classiques

Dans ce chapitre, nous donnons un apercu sur les formulations lagrangienne et hamiltonienne classiques pour les systèmes dissipatifs. Si l'expression du lagrangien ou de l'hamiltonien du système est connue, alors les quantités conservées et la solution du problème pourraient être obtenues. L'objectif principal de la formulation lagrangienne et hamiltonienne est de trouver l'analogue quantique du mouvement dissipatif.

1.1 Formulation lagrangienne

Dans cette section, nous introduisons le formalisme lagrangien pour les systèmes dissipatifs. Ensuite nous abordons les conditions d'existence du lagrangien et comment le construire. Comme applications, nous complétons l'étude par des exemples de systèmes dissipatifs simples.

1.1.1 Fonctions dissipatives de Rayleigh et de Lur'e

La façon la plus simple d'incorporer les forces dissipatives dans le formalisme lagrangien est d'introduire la fonction de dissipation de Rayleigh $\mathcal{F}$ dans les équations du mouvement [2]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ...N. \tag{1.1}$$

Par exemple, lorsque la force de frottement est proportionnel à la vitesse

$$f = -m\lambda\dot{r}, \qquad f = -\frac{dF}{d\dot{r}}. \tag{1.2}$$

la fonction de Rayleigh $\mathcal{F}$ est donnée par

$$\mathcal{F} = \frac{m}{2}\lambda\dot{r}^2, \tag{1.3}$$

où $2\mathcal{F}$ représente le taux de dissipation de l'énergie due au frottement

$$dw_f = -f\ dr = -f\ v\ dt = m\lambda\ \dot{r}^2 dt. \tag{1.4}$$

La fonction de dissipation de Rayleigh peut être généralisée pour inclure les force d'amortissement non linéaires [3]. Lur's a considéré les composantes de la force d'amortissement de la forme

$$f_j = -k_j\left(x_1, x_2, ...x_N\right) g_j\left(\dot{x}_j\right), \tag{1.5}$$

où k_j sont des fonctions positives, et vérifie la condition

$$\dot{x}_j g_j\left(\dot{x}_i\right) \geq 0, \tag{1.6}$$

où x_j sont les composantes cartésiennes dans l'espace de configuration de dimension N.

On peut écrire $x_j(t)$ en fonction des cordonnées généralisées

$$x_j \ = \ x_j\left(q_1, q_2, ...q_N\right), \tag{1.7}$$

et la force généralisée devient

$$Q_s^L = -\sum_{j=1}^{N} \ k_j\left(x_1, x_2, ..., x_N\right) g_j\left(\dot{x}_i\right) \frac{\partial x_j}{\partial q_s}. \tag{1.8}$$

De l'éq. (1.7) il s'ensuit que

$$\dot{x}_j = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial x_j}{\partial q_s}\dot{q}_s, \tag{1.9}$$

donc

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial x_j}{\partial q_s} \tag{1.10}$$

En remplaçant (2.10) dans (2.8), on obtient

$$Q_S^L = -\sum_{j=1}^{N} k_j \left(x_1, x_2, ..., x_N\right) g_j \left(\dot{x}_i\right) \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_s}. \tag{1.11}$$

Lur'e a défini la fonction de dissipation $\mathcal{F}^L$par

$$\mathcal{F}^L = \sum_{j=1}^{N} k_j \left(x_1, x_2, ..., x_N\right) \int_0^{\dot{x}_j} g_j \left(y\right) dy, \tag{1.12}$$

donc

$$\partial \mathcal{F}^L = \sum_{j=1}^{N} k_j \left(x_1, x_2, ..., x_N\right) g_j \left(y\right) \partial \dot{y}, \tag{1.13}$$

et sa dérivée est

$$\frac{\partial \mathcal{F}^L}{\partial \dot{q}_S} = \sum_{j=1}^{N} k_j \left(x_1, x_2, ..., x_N\right) g_j \left(y\right) \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_s}. \tag{1.14}$$

A partir de cette définition et de l'éq.(2.11), nous avons

$$\frac{\partial \mathcal{F}^L}{\partial \dot{q}_s} = -Q_s^L; \qquad s = 1, 2, ..., N \tag{1.15}$$

En comparant ce résultat avec celui de l'Eq. (2.3). Ce dernier est un cas particulier de l'eq. (2.12) si on choisit

$$g_j \left(\dot{x}_j\right) = \dot{x}_j, \qquad k_j = const. \tag{1.16}$$

Dans le cas particulier d'un mouvement à une dimensionn, la force de frottement est

$$f = -k \left|\dot{x}\right|^n, \tag{1.17}$$

où n entier pair et k une constante positive.

De l'équation (2.11) et (2.12), on trouve:

$$\mathcal{F}^L = \frac{k}{n+1} \left|\dot{x}\right|^{n+1} \tag{1.18}$$

$$Q^L = -k\ \dot{x}^n Sgn\left(\dot{x}\right) \tag{1.19}$$

où $sgn\left(\dot{x}\right)$ est le signe de $\dot{x}$ défini par

$$Sgn\left(\dot{x}\right) = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad \dot{x} > 0 \\ -1 & \text{Si} \quad \dot{x} > 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

Les fonctions dissipatives de Rayleigh et de Lur'e décrivent les forces d'amortissement et sont proportionnelles à la puissance de la vitesse.

Il existe des systèmes physiques tels que le modèle de Drude pour le mouvement d'un électron dans la matière où $\mathcal{F}$ est remplacée par $\mathcal{L} = \mathcal{F} + g$ avec

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \dot{x} R_{ij} \dot{x}_j, \tag{1.21}$$

et

$$g = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \ddot{x}_i P_{ij} \ddot{x}_j, \tag{1.22}$$

Les équations du mouvement généralisées d'Euler-Lagrange sont

$$\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}_i}\right)\right\} - \left\{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\right\} = f_i, \tag{1.23}$$

avec

$$L = T - V\left(x_i\right), \tag{1.24}$$

où f_i est la composante de la force externe dépendante du temps, L a la dimension d'une énergie et $\mathcal{L}$ a la dimension d'une puissance.

La fonction V peut être choisie comme une fonction quadratique des coordonnées

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x_i V_{ij} x_j, \tag{1.25}$$

T est la somme des termes quadratique des vitesses

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \dot{x}_i M_{ij} \dot{x}_j \tag{1.26}$$

et on peut avoir un terme de la forme

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \dot{x} G_{ij} x_j. \tag{1.27}$$

En utilisant ces formes quadratiques, les équations linéaires du mouvement pour les variables x_i sont

$$\sum_{j=1}^{3}\left\{-P_{ij}\frac{d^3x_j}{dt^3}+M_{ij}\frac{d^2x_j}{dt^2}+B_{ij}\frac{dx_j}{dt}+V_{ij}x_j\right\}=f_i,\qquad i=1,2,3 \tag{1.28}$$

où $B_{ij}=R_{ij}+G_{ij}$.

1.1.2 Problème inverse

La formulation précedente est utile pour traiter certains problèmes classiques. Pour la quantification des systèmes dissipatifs et la compatibilité des relations de commutation avec les equations du mouvement nous devons trouver un lagrangien qui décrit le mouvement amorti et qui permet, en même temps, de définir les variables canoniques. Dans ce qui suit, on montre que pour un système donné d'équations du mouvement on peut construire plusieurs lagrangiens, mais pour certains cas particuliers le lagrangien correspondant n'existe pas.

La non-unicité du lagrangien et du hamiltonien a été étudiée dans la littérature. Ici nous donnons brièvement les conditions pour lesquelles les lagrangiens existent et les méthodes de leur construction pour un système donné d'équations du mouvement.

Pour un système système conservatif, le lagrangien en fonction des coordonnées et des vitesses est deféni par

$$L\left(x_i,\dot{x}_i,t\right)=T\left(x_i,\dot{x}_i\right)-V\left(x_i,t\right), \tag{1.29}$$

et en fonction des coordonnées generalisées par

$$L\left(q_i,\dot{q}_i,t\right)=T\left(q_i,\dot{q}_i\right)-V\left(q_i,t\right), \tag{1.30}$$

et satisfait les equations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)=0\qquad ;i=1,2,...,N \tag{1.31}$$

Pour un système conservatif, le lagrangien est bien défini. Cependant, pour un système non-conservatif le lagrangien peut ne pas exister, et lorsqu'il existe, il n'est pas unique. En effet, pour un mouvement à une dimension, on peut toujours trouver un lagrangien qui donne les équations du mouvement. Cependant, lorsque le nombre de degré de liberté est égal ou superieur à deux, il est possible d'avoir ou non une formulation lagrangienne. Comme exemples de systèmes qui n'ont pas de lagrangien, citons les deux exemples suivants:

Exemple 1: le premier est un système couplé à deux degré de liberté (x_1, x_2) dont les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = A\left(x_1 - x_2\right)^{\alpha}, \\ m_2\ddot{x}_2 = B\left(x_2 - x_1\right)^{\beta}, \end{cases} \tag{1.32}$$

pour des valeurs arbitraires de A et B, ce système n'a pas de lagrangien.

Exemple 2: le deuxième est un système de deux oscillateurs couplés dont les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \lambda_1\ \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - c_2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \lambda_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - c_1 x_1 = 0 \end{cases} \tag{1.33}$$

où $c_1$et c_2 sont des deux constantes. Pour des fréquences différentes et des constantes d'amortissement différentes, le lagrangien n'existe pas.

Examinons maintenant les conditions d'existence du lagrangien et comment il peut être construit.

Conditions d'existence du lagrangien

Les lois qui gouvernent la dynamique d'un système peuvent être formulées en utilisant le principe d'action d'Hamilton qui stipule que la variation de l'action S entre deux instants t_1 et t_2

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\left(x_i, \dot{x}_i, t\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{N} \frac{\delta L\left(x_i, \dot{x}_i, t\right)}{\delta x_j} \delta x_j\left(t\right) dt, \tag{1.34}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j,k} \mu_{jk}\left(x_i, \dot{x}_i, t\right) \left[\ddot{x}_k - \frac{1}{m} f_k\left(x_i, \dot{x}_i, t\right)\right] \delta x_j\left(t\right) dt, \qquad j = 1, 2, ..., N \tag{1.35}$$

doit être nulle $(\delta S = 0)$ pour toute variation δx_j compatible avec la condition

$$\delta x_j\left(t_1\right) = \delta x_j\left(t_2\right) = 0. \tag{1.36}$$

Dans l'équation (2.35), μ_{jk} est une matrice définie positive. La condition sur l'extremum de l'action $\delta S = 0$ implique que l'intégrande dans l'équation (2.35) est nulle

$$\ddot{x}_k = \frac{1}{m} f_k \left(x_i, \dot{x}_i, t\right), \tag{1.37}$$

qui est la loi fondamentale de Newton.

Le lagrangien obtenu à partir de la condition $\delta S = 0$ n'est pas unique. On peut ajouter au lagrangien la différentielle totale d'une fonction arbitraire $\Phi\left(x, \dot{x}, t\right)$ sans affecter les équations du mouvement.

•Pour le cas particulier $\mu_{jk} = \mu_{kj}$, Le lagrangien obtenu est le même que celui donné dans l'équation (1.29).

•La seconde variation de S par rapport à $\delta x_j\left(t\right)$ et $\delta x_j\left(t'\right)$ doit satisfaire la condition suivante

$$\frac{\delta^2 S}{\delta x_j\left(t\right)\delta x_k\left(t'\right)} = \frac{\delta^2 S}{\delta x_k\left(t'\right)\delta x_j\left(t\right)}. \tag{1.38}$$

En imposant cette condition à l'équation (2.35), les μ_{jk} doivent satisfaire les quatre équations suivantes

$$\mu_{jk} = \mu_{kj}, \tag{1.39}$$

$$\frac{\partial \mu_{kj}}{\partial \dot{x}_l} = \frac{\partial \mu_{jl}}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial \mu_{lk}}{\partial \dot{x}_j},$$

$$\hat{D}\mu_{jk} + \frac{1}{2m}\sum_l \left(\mu_{jl}\frac{\partial f_l}{\partial \dot{x}_k} + \mu_{kl}\frac{\partial f_l}{\partial \dot{x}_j}\right) = 0, \tag{1.40}$$

et

$$\hat{D}\sum_k \left(\mu_{ik}\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_j} - \mu_{jk}\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_i}\right) - 2\sum_k \left(\mu_{ik}\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_j} - \mu_{jk}\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0. \tag{1.41}$$

où l'opérateur $\hat{D}$ est défini par

$$\hat{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_k \left[\dot{x}_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{m} f_k\left(x_i, \dot{x}_i, t\right)\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}\right], \tag{1.42}$$

et les quatre équations (1.39)-(1.41) sont appelées conditions de Helmoltz.

Construction du lagrangien

On peut construire le lagrangien à partir des équations du mouvement $m\ddot{x}_k = f_k\left(x_i, \dot{x}_i, t\right)$ en résolvant une équation linéaire aux dérivées partielles. Pour cela, écrivons la relation

$$\frac{\delta L}{\delta x_k} = \frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) \equiv \frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_k} - \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial \dot{x}_k} - \sum_j \ddot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} = 0, \quad (1.43)$$

et remplacons $\ddot{x}_j$ de l'équation du mouvement on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_k} - \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial \dot{x}_k} - \frac{1}{m} \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} f_j\left(x_i, \dot{x}_i, t\right) = 0. \quad (1.44)$$

Cette équation avec les quatre (1.39)-(1.41) conditions d'Helmoltz nous permettent de déterminer les expressions du lagrangien $L\left(x_i, \dot{x}_i, t\right)$ et de $\mu\left(x_i, \dot{x}_i, t\right)$.

D'autre part, il existe d'autres méthodes pour la construction du lagrangien des mouvement à une dimansion. Commencons de l'équation du mouvement

$$m\, \ddot{x} = f\left(x, \dot{x}\right), \quad (1.45)$$

et écrivons le lagrangien de ce système

$$L\left(x, \dot{x}\right) = \dot{x} \int^{\dot{x}} \frac{1}{v^2} G\left(v, x\right) dv, \quad (1.46)$$

où $G\left(v, x\right)$ est une fonction qui sera déterminée plus tard. En remplaçant $L\left(x, \dot{x}\right)$ dans les équations d'Euler-Lagrange on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}\left(\frac{\partial G\left(\dot{x}, x\right)}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial G\left(\dot{x}, x\right)}{\partial x} \equiv m\ddot{x} - f\left(\dot{x}, x\right), \quad (1.47)$$

on déduit alors que $G\left(\dot{x}, x\right)$ satisfait l'équation différentielle suivante

$$\frac{1}{m\dot{x}} f\left(x, \dot{x}\right) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} G\left(\dot{x}, x\right) = -\frac{\partial}{\partial x} G\left(\dot{x}, x\right), \quad (1.48)$$

à condition que

$$\frac{1}{\dot{x}}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}G\left(\dot{x},x\right)\neq 0. \tag{1.49}$$

•Exemples: comme application directe de cette méthode considérons les deux exemples suivants. Le premier concerne l'équation du mouvement d'un système amorti dont l'équation du mouvement est de la forme

$$\ddot{x}+\frac{\dot{x}}{\left(\frac{dg(\dot{x})}{d\,\dot{x}}\right)}\frac{dV\left(x\right)}{dx}=0, \tag{1.50}$$

alors le lagrangien est obtenu en résolvant l'équation (1.48)

$$L\left(x,\dot{x}\right)=\dot{x}\int^{\dot{x}}\frac{1}{v^{2}}F\left[z\left(x,v\right)\right]dv, \tag{1.51}$$

où F est une fonction arbitraire de $z\left(x,v\right)$ qui vérifie

$$z\left(v,x\right)=g\left(v\right)+V\left(x\right), \tag{1.52}$$

de sorte que la condition

$$\frac{1}{v}\frac{dg\left(v\right)}{dv}\frac{dF\left(z\right)}{dz}\neq 0, \tag{1.53}$$

doit être satisfaite. Ainsi pour le cas de l'exemple simple $\ddot{x}+\lambda\,\dot{x}=0$ et pour $F\left(z\right)=z$, on obtient l'expression suivante du lagrangien

$$L\left(x,\dot{x}\right)=\dot{x}\ln\dot{x}-\lambda x \tag{1.54}$$

Le deuxième exemple concerne l'oscillateur harmonique amorti dont l'équation du mouvement est

$$\ddot{x}+\lambda\,\dot{x}+\omega_{0}^{2}x=0, \tag{1.55}$$

en calculant la fonction $G\left(\dot{x},x\right)$ on obtient $G\left(\dot{x},x\right)=F(z)$, où z est donnée par

$$z=\frac{1}{2}\frac{\left[x+\left(\frac{\lambda}{2}-i\omega\right)\dot{x}\right]^{v^{*}}}{\left[x+\left(\frac{\lambda}{2}+i\omega\right)\dot{x}\right]^{v}}=z^{*}, \tag{1.56}$$

et

$$v^2 = \frac{\frac{\lambda}{2} + i\omega}{\frac{\lambda}{2} - i\omega}, \tag{1.57}$$

avec $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\lambda^4}{4}$.

Dans ce qui suit nous étudions certains cas particuliers où le lagrangien peut etre obtenu explicitement.

1.1.3 Exemples de systèmes dissipatifs

Exemple 1: le cas $\mu_{jk} = \delta_{jk}$

Le choix $\mu_{jk} = \delta_{jk}$ est le choix le plus simple. Les Eqs(1.40) et (1.41) implique que $\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\forall (j,k)$. Alors f_k ne dépend pas de la vitesse

$$f_k = f_k(x_i, t) \tag{1.58}$$

Exemple 2: problème à 1D

Dans ce cas les équations (1.41) et (1.43) se réduisent à

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{m}\left[\frac{\partial \mu}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) + \mu \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}}\right] = 0, \tag{1.59}$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}} - \dot{x}\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} - \frac{1}{m}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} f(x, \dot{x}, t) = 0, \tag{1.60}$$

on note que μ est sans dimension et L a la dimension de l'énergie.

• Si L est comme dans l'équation (1.60) alors μ peut être obtenu à partir de L.On remarque que

$$\mu = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\right) \tag{1.61}$$

est une solution de l'éq.(1.59)

Les solutions analytiques de l'équation (1.60) lorsque le mouvement est dissipative, nous avons les cas suivants:

a) Lorsque $\mu = \mu(t)$ dépend uniquement du temps, alors de l'éq.(1.59) on a

$$\frac{\partial \mu(t)}{\partial t} + \frac{\mu(t)}{m}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{1.62}$$

et la forme générale de f est

$$f = -m\lambda g(t)\,\dot{x} - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \tag{1.63}$$

avec

$$\mu(t) = m\lambda \int^{t} g(t')\,dt' \tag{1.64}$$

où λ est une constante et $g(t)$ est une fonction arbitraire du temps.

Le lagrangien qui se reduit à $L = T - V$ lorsque $\lambda \to 0$ est de la forme

$$L = \left[\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 - V(x,t)\right]\exp\left(\lambda \int^{t} g(t')\,dt'\right) \tag{1.65}$$

• Cas particulier: si $g(t) = 1$, la force d'amortissement est $f = -m\gamma\dot{x}^2 - \frac{\partial V(x)}{\partial x}$.

b) Lorsque $\mu = \mu(x)$, alors l'équation(1.59) devient

$$\dot{x}\frac{d\mu(x)}{dx} + \left(\frac{\mu(x)}{m}\right)\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{1.66}$$

alors

$$f(x,\dot{x}) = -m\gamma\dot{x}^2 - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \tag{1.67}$$

et de l'éq.(1.66) on a

$$\mu(x) = \exp(2\gamma x) + cte \tag{1.68}$$

De l'équation(1.61) et (1.68), on obtient l'expression du lagrangien

$$L = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2\exp(2\gamma x) - W(x) \tag{1.69}$$

et $W(x)$ est obtenu en remplaçant(1.67) et (1.69) dans (1.60)

$$W(x) = \int^{x} e^{-2\gamma y} \frac{\partial V(y)}{\partial y} dy \tag{1.70}$$

A la limite $\gamma \to 0$, $L = T - V$

Exemple 3: La force de frottement $f = m\beta\dot{x}^{\nu}$**avec** $1 < \nu < 2$.

Le problème est une particule de masse dépendante de la position dans un potentiel constant

$$m\mu''(\dot{x}) \frac{d\dot{x}}{dt} + m\beta = 0 \tag{1.71}$$

où la dérivée est rapport à $\dot{x}$, et

$$\mu''(\dot{x}) = \dot{x}^{(-\nu)} \tag{1.72}$$

le lagrangien de ce mouvement est donné par

$$L(\dot{x}, x) = m\mu(\dot{x}) - m\beta x \tag{1.73}$$

1.1.4 Non-unicité du lagrangien

Si on multiplie le lagrangien L par une constante α et on lui ajoute la dérivée temporelle totale d'une fonction $g(x_i, t)$, le nouveau lagrangien $\bar{L}$

$$\bar{L} = \alpha L + \frac{dg(x_i, t)}{dt}, \tag{1.74}$$

donne les mêmes équations du mouvement que L.

1.2 Formulation hamiltonienne

La méthode de Lagrange fournit une formulation de la dynamique des systèmes conservatifs et de certains systèmes dissipatifs. Pour un système à N degrés de liberté, dans le formalisme Lagrangien il y a N équations différentielles d'ordre deux, et dans la formalisme hamiltonien il y a $2N$ équations du mouvement du premier ordre.

Comme dans le cas des systèmes conservatifs, le formalisme hamiltonien pour les systèmes dissipatifs présente les avantages suivants :

1- L'hamiltonien est fonction seulement des variables et non pas de leurs dérivées.

2- L'égalité de traitement des variables canoniques offre un plus grand choix de transformations.

3- Pour la quantification du système, la forme hamiltonienne est la plus adaptée.

Comme dans le formalisme Lagrangien, l'hamiltonien des systèmes dissipatifs n'est pas unique et peut être introduit de plusieurs façons.

1.2.1 Le Problème inverse

Si les forces agissants sur le système sont connues, on peut résoudre le problème inverse de la dynamique classique en cherchant la solution de l'équation linéaire aux dérivées partielles du lagrangien. Mais contrairement au problème inverse précédent, c'est-à-dire la détermination lagrangienne, l'équation aux dérivées partielles pour L'hamiltonien est non linéaire et du second degré. La loi de l'hamiltonien pour une force particulière, la loi n'est pas unique. Cependant, nous pouvons choisir deux hamiltoniens pour être le générateur de mouvement et une contante de définition du mouvement. Mais lorsqu'il y a des force de dispersion, la deuxième condition ne peut être satisfait. On a déjà défini la quantité de mouvement canonique par

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \qquad j = 1, 2, ..., N \tag{1.75}$$

L'hamiltonien H est défini par

$$H(x_j, p_j, t) = \left(\sum_k \dot{x}_k p_k - L \right)_{\dot{x}_k = x_k(p_j)}, \tag{1.76}$$

pour obtenir l'expression de H en fonction de (x_j, p_j, t), on remplace les $\dot{x}_k = \dot{x}_k(p_j)$ les p_k en utilisant L'Eq. (1.75).

On peut écrire aussi l'action S en fonction de l'hamiltonien

$$S(x_j, p_j) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \dot{x}_j(p_k) p_j - H(x_j, p_j, t) \right] dt, \tag{1.77}$$

et on suppose que x_j et $p_j$sont des variables indépendantes. A partir des dérivées fonctionnelles de l'action $S(x_j, p_j)$ par rapport à x_j et p_j, qui sont égales à zéro, on obtient les équations d'hamilton du mouvement. Pour un système de particules interagissant via le potentiel $V(x_1, ., x_N, t)$, le lagrangien est $L = T - V$ et dans ce cas l'hamiltonien s'écrit sous la forme

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m_j} + V(x_1, ., x_N, t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m_j} + V(x_1, ., x_N, t) . \tag{1.78}$$

En éliminant les moments conjugués p_j des équations canoniques de Hamilton

$$\dot{p}_j(t) = -\frac{\partial H(x_k, p_k, t)}{\partial x_j}, \qquad \dot{x}_j(t) = \frac{\partial H(x_k, p_k, t)}{\partial p_j}, \tag{1.79}$$

on obtient alors les équations du mouvement pour les variables x_j

$$m\, \ddot{x}_j(t) = f_j(x_1, .., x_N, \dot{x}_1, .., \dot{x}_N, t), \qquad j = 1, ..., N. \tag{1.80}$$

L'hamiltonien n'est pas unique et on peut étendre la formulation hamiltonienne à l'étude des systèmes dissipatifs, et dans cas H ne représente pas l'énergie du système, et en général p_j n'est pas la quantité de mouvement $m\dot{x}_j$. Notons ici, comme dans la formulation lagrangienne, qu'il y a aussi une infinité d'hamiltoniens qui génèrent les mêmes équations du mouvement dans l'espace des coordonnées. Ils sont appellés hamiltoniens q-équivalents, de sorte que lorsque H est remplacé dans les équations canoniques (1.79) et en éliminant les p_j, nous obtenons les équations du mouvement (1.80). En mécanique classique, les hamiltoniens q-équivalents sont tous acceptables dans la formulation variationnelle et pour obtenir la solution des équations du mouvement. Cependant, on peut imposer d'autres conditions à l'hamiltonien, par exemple nous pouvons exiger que $H(x_j, p_j, t)$ génère les équations du mouvement dans l'espace des phases, et dans ce cas seul un sous-ensemble d'hamiltoniens q-équivalents sera acceptable.

Considérons d'abord l'équation différentielle partielle pour l'hamiltonien le plus général lorsque la force $f(x, \dot{x})$ ne dépend pas explicitement de temps. D'après les équations (1.79) , on note que pour un mouvement à une dimension

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial p} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right), \tag{1.81}$$

et en substituant cette expression et Eq. (1.79) dans l'équation du mouvement $m\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ on trouve

$$m\left[\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial p} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right] = f\left(x, \frac{\partial H}{\partial p}\right), \tag{1.82}$$

lorsque $f(x, \dot{x}) = -m\gamma\dot{x}^2 - \frac{\partial V(x)}{\partial x}$, l'équation précédente vérifie devient

$$m\left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial V(x)}{\partial x} + m\gamma\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^2 = 0, \tag{1.83}$$

et sa solution est de la forme

$$H = \frac{1}{2m}p^2 e^{-2\gamma x} + \int^x e^{2\gamma x}\frac{\partial V(y)}{\partial y}dy. \tag{1.84}$$

Le résultat de l'équation (1.82) peut être généralisé facilement au cas à plusieurs degrés de liberté comme suit

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial p_k} + \sum_j \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial p_k}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\right) - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)\right] = \frac{1}{m} f_k\left(x_i, \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) \tag{1.85}$$

Comme les équations (1.82) et (1.85) sont des équations aux dérivées partielles non linéaires dont leurs solutions les plus générales ne sont pas connues. Cependant pour des cas très particuliers, nous pouvons obtenir les solutions pour (1.82).

1.2.2 Hamiltoniens de certains systèmes dissipatifs simples

Commençons par le cas le plus simple où la force de frottement est linéairement proportionnelle à la vitesse et il n'y a pas de forces conservatrices, c'est-à-dire $f = -m\lambda\dot{x}$, alors nous pouvons trouver un certain nombre d'hamiltoniens q-équivalents dans les cas suivants:

a) Si nous choisissons H indépendant de x, alors pour un mouvement unidimensionnel, l'équation (1.82) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \lambda H\right) = 0, \tag{1.86}$$

et la solution de cette équation est

$$H(p, t) = h(p)\exp(-\lambda t), \tag{1.87}$$

où $h\left(p\right)$ est une fonction différentiable et arbitraire de p.

b) Si on suppose que H peut s'écrire comme la somme de deux termes

$$H\left(p,x\right)=h_1\left(p\right)+h_2\left(x\right), \tag{1.88}$$

alors la solution de (1.82) est

$$H\left(p,x\right)=\varepsilon_0\exp\left(\frac{p}{p_0}\right)+\lambda p_0 x, \tag{1.89}$$

où ε_0 et p_0 sont des constantes.

c) Si l'hamiltonien est de la forme (Dodonov) $H(t,xp)$, dans ce cas l'équation (1.82) se réduit à

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial\xi}+\left(\frac{\partial H}{\partial\xi}\right)^2+\lambda\left(\frac{\partial H}{\partial\xi}\right)=0, \tag{1.90}$$

où $\xi=xp$. En effectuant le changement $u=\frac{\partial H}{\partial\xi}$, l'équation différentielle de u est

$$\frac{du}{dt}+\lambda u+u^2=0,$$

et l'intégration de cette équation donne

$$u=\frac{\partial H}{\partial\xi}=\frac{\lambda}{\exp\left[\lambda\left(t-\alpha\right)\right]-1}, \tag{1.91}$$

alors l'expression de H est

$$H=\lambda\int^{x_p}\frac{\lambda d\xi}{\exp\left[\lambda\left(t-\alpha\left(\xi\right)\right)\right]-1}, \tag{1.92}$$

où $\alpha\left(\xi\right)$ est une fonction arbitraire de ξ.

Pour les systèmes simples où la force résistance est du type de Stoke, c'est-à-dire elle est proportionnelle à $\dot{x}\left(t\right)$ et l'équation du mouvement est $m\frac{d^2x}{dt^2}+m\lambda\frac{dx}{dt}=f\left(x\right)$. Nous pouvons alors trouver un lagrangien et un hamiltonien explicitement dépendants du temps ou un hamiltonien indépondant du temps. Supposons que la fonction de Lagrange est donnée par [? ?] (Eq (1.65))

$$L=\frac{m}{2}\left[\dot{x}^2+\int^x f\left(x'\right)dx'\right]\exp\left(\lambda t\right) \tag{1.93}$$

où $\dot{x}\left(t\right)$ est la vitesse de la particule et $f\left(x\right)$ est la force conservatrice agissant sur elle.

En substituant dans l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \tag{1.94}$$

on retrouve l'équation du mouvement

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\lambda\frac{dx}{dt} = f(x).$$

dans ce cas le moment canonique p dépend explicitement du temps

$$p = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\dot{x}e^{\lambda t}. \tag{1.95}$$

L'hamiltonien est obtenu à partir de (1.93) et (1.95)

$$H(x,p,t) = (p\dot{x} - L)_{\dot{x}=\dot{x}(p,t)} = \frac{p^2}{2m}e^{-\lambda t} - e^{\lambda t}\int^x f(x')dx' \tag{1.96}$$

Pour le cas particulier d'une particule soumise à un oscillateur $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$, nous avons

$$H_1(x,p,t) = \frac{p^2}{2m}e^{-\lambda t} + \left(\frac{m}{2}\right)e^{\lambda t}\omega_0^2x^2 \tag{1.97}$$

Pour ces systèmes, l'hamiltonien n'est pas unique. Par exemple, un autre hamiltonien qui ne dépend pas explicitement du temps et qui génère la même équation du mouvement dans l'espace de coordonnées que (1.97) est

$$H_2(x,p) = -\frac{\lambda}{2}xp - \ln[\cos(\omega px)] + \ln x, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4} \tag{1.98}$$

Les deux hamiltoniens H_1 et H_2 génèrent les mêmes équations du mouvement pour la variable coordonnée x

$$m\ddot{x} + m\lambda\dot{x} + m(\omega^2 + \frac{\lambda^2}{4})x = 0, \tag{1.99}$$

et en éliminant x et $\dot{x}$ des équations canoniques de Hamilton ($\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ et $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$), on obtient deux équations differentielles différentes pour la variable p.

A partir de l'hamiltonien $H_1(x,p,t)$ et de l'équation canonique d'hamilton, on obtient

$$m\ddot{p} - m\lambda\dot{p} + m(\omega^2 + \frac{\lambda^2}{4})p = 0. \tag{1.100}$$

Les équations différentielles de x et p ne sont pas les mêmes, et le moment canonique p, qui est different de la quantité de mouvement $m\dot{x}$, ne satisfait pas l'équation de p dérivée de $H_2(x,p)$.

Ainsi H_1 et H_2 sont deux hamiltoniens $q-$équivalents, cependant ils donnent des équations du mouvement différentes dans l'espace des phases.

D'autre part, $H_2\left(x,p\right)$ est invariant translation temporelle $t \to t+t_0$, alors que $H_1\left(x,p,t\right)$ ne l'est pas. En effet pour $H_2\left(x,p\right)$ on a

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial t} + \{H_2, H_2\} = 0, \tag{1.101}$$

ce qui signifie que H_2 est une constante du mouvement et ne peut pas donc être l'énergie du système.

L'hamiltonien $H_1(x,p,t)$ peut être considéré comme l'hamiltonien d'un système oscillant dont sa masse augmente avec le temps

$$m(t) = m \exp(\lambda t). \tag{1.102}$$

Les hamiltoniens différents qui génèrent la même équation du mouvement dans l'espace de coordonnées, appelés hamiltoniens q-équivalents, sont liés par des transformations canoniques. Par exemple, les deux hamiltoniens définis par les deux Eqs.(1.89) et (1.96)

$$H_1 = \frac{p^2}{2m}e^{-\lambda t} \qquad \text{et} \qquad H_2 = \varepsilon_2 \exp(\frac{p}{p_0}) + \lambda p_0 X \tag{1.103}$$

donnent la même équation du mouvement $m\ddot{x} + m\lambda\dot{x} = 0$, donc ils sont q-équivalents. La fonction génératrice de la transformation canonique qui relie H_1 à H_2 est

$$F_3(p,x,t) = X(\lambda p_0 t - p) + \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})\left[\varepsilon \exp(\frac{p}{p_0}) - \frac{p^2}{2m}\right]. \tag{1.104}$$

La fonction $F_3(p,X,t)$ permet de relier les anciennes coordonnées (x,p) aux nouvelles (X,P) par

$$P = -\frac{\partial F_3}{\partial X} = p - \lambda p_0 t, \tag{1.105}$$

$$x = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = X - \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})\left[\frac{\varepsilon}{p_0}\exp(\frac{p}{p_0}) - \frac{p}{m}\right], \tag{1.106}$$

et

$$H_2 = H_1 + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \tag{1.107}$$

Comme

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} = \lambda X p_0 + e^{-\lambda t}\left[\varepsilon \exp\left(\frac{p}{p_0}\right) - \frac{p^2}{2m}\right], \tag{1.108}$$

alors

$$H_1(x,p,t) + \frac{\partial F_3}{\partial t} = \lambda p_0 X + \varepsilon e^{-\lambda t}\exp(\frac{P+\lambda p_0 t}{p_0}) = H_2(X,p). \tag{1.109}$$

Notons que la nouvelle coordonnée X est une fonction des anciennes variables canoniques et le temps : $X = X(x,p,t)$.

D'autres hamiltoniens q-équivalents peuvent être obtenus à partir des lagrangiens équivalents, par exemple les deux hamiltoniens suivants:

$$H = \frac{1}{3mp_0}(2p_0 p)^{\frac{3}{2}} e^{-\lambda t},$$

$$H = \frac{m^2}{8}(\frac{6p}{m^2})^{\frac{4}{3}} e^{-\frac{4\gamma x}{3}}, \tag{1.110}$$

ne sont pas uniquement q-équivalents mais sont aussi pq-équivalents de l'hamiltonien $H_1(p,t)$ pour un amortissement linéaire et de l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m}p^2 e^{-2\gamma x}. \tag{1.111}$$

pour un amortissement quadratique.

1.2.3 Oscillateurs harmoniques amortis-amplifiés de Bateman

Le modèle bidimensionnel conservatif dans son ensemble est le modèle de Bateman dont son Lagrangian est

$$L = m\dot{x}\dot{y} + \frac{m}{2}\lambda\left(x\dot{y} - \dot{x}y\right) - m\left(\omega^2 + \frac{\lambda^2}{4}\right)xy, \tag{1.112}$$

les deux équations classiques du mouvement sont

$$m\ddot{x} + m\lambda\dot{x} + m\left(\omega^2 + \frac{\lambda^2}{4}\right)x = 0, \tag{1.113}$$

$$m\ddot{y} - m\lambda\dot{y} + m\left(\omega^2 + \frac{\lambda^2}{4}\right)y = 0, \tag{1.114}$$

sachant que l'équation de y est obtenue par renversement du temps de celle de x. Ainsi, lorsque l'oscillateur x perd de l'énergie, l'oscillator y en gagne de sorte que l'énergie totale du système soit conservée. De la définition de l'hamiltonien

$$H = (p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L)_{\dot{x}(p_x,p_y),\dot{y}(p_x,p_y)}\,, \tag{1.115}$$

on obtient

$$H = \frac{p_x p_y}{2m} - \frac{\lambda}{2}\left(xp_x - yp_y\right) + m\omega^2 xy, \tag{1.116}$$

comme H ne dépend pas explicitement du temps, alors H est une constante du mouvement ($\frac{dH}{dt} = 0$).

Chapter 2

Quantification des Systèmes dissipatifs

Historiquement, la première tentative de quantification de l'oscillateur haemonique amorti a été faite par Seeger en 1932. En effet, en partant de l'opérateur hamiltonien de l'oscillateur

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\Omega_0^2 x^2, \tag{2.1}$$

et le terme d'amortissement

$$\mathcal{F} = \frac{m}{2}\lambda \dot{x}^2, \tag{2.2}$$

les équations du mouvement de p et x dans la representation de Heisenberg sont

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} = -m\Omega_0^2 x - m\lambda\dot{x}, \tag{2.3}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m}p \Rightarrow m\dot{x} = p, \tag{2.4}$$

on remplaçent (2.4) dans (2.3),on obtient:

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0. \tag{2.5}$$

Cette équation doit être satisfaite par les éléments de la matrice

$$\begin{aligned} x_{jk}(t) &= x_{jk}(0)\exp(i\omega_{jk}t), \\ \dot{x}_{jk}(t) &= i\omega_{jk}x_{jk}(0)\exp(i\omega_{jk}t), \\ \ddot{x}_{jk}(t) &= -\omega_{jk}^2 x_{jk}(0)\exp(i\omega_{jk}t), \end{aligned} \tag{2.6}$$

et qui peut s'écrire sous la forme

$$\left(-\omega_{jk}^{2}+i\lambda\omega_{jk}+\Omega_{0}^{2}\right)x_{jk}\left(0\right)=0. \tag{2.7}$$

Donc, $x_{jk}\left(0\right)$ est nul sauf si

$$\omega_{jk}=\pm a+i\frac{\lambda}{2}, \tag{2.8}$$

avec

$$a=\sqrt{\Omega_{0}^{2}-\frac{\lambda^{2}}{4}}\approx\Omega_{0}-\frac{\lambda^{2}}{8\Omega_{0}}, \tag{2.9}$$

où nous avons supposé que le mouvement est faiblement amorti et que $2\Omega_0 \gg \lambda$.

Considérons maintenant la relation de commutation

$$\sum_{j}\left(p_{nj}x_{j_{n}-}x_{nj}p_{j_{n}}\right)=-i\hbar. \tag{2.10}$$

Si

$$\alpha_{jk}=\mathrm{Re}\left[\omega_{jk}\right], \tag{2.11}$$

alors

$$\sum_{j}\alpha_{jk}\left|x_{j_{k}}\right|^{2}=-\frac{\hbar}{2m}. \tag{2.12}$$

Supposons qu'il n'y pas de dégénérescence. Alors pour chaque n, il existe au moins un nombre n' tel que $x_{nn'}\neq 0$, mais comme $\omega_{nn\prime}=\pm a+i\frac{\lambda}{2}$, donc il existe au plus deux valeurs de n'(on les note n'_1et n'_2) pour lesquelles $x_{nn'}\neq 0$. De relation de Planck-Bohr nous avons

$$E_{n}-E_{n_{1}^{\prime}}=\hbar a,\qquad E_{n}-E_{n_{2}^{\prime}}=-\hbar a, \tag{2.13}$$

ou bien

$$E_{n}-E_{n_{1}^{\prime}}=-\hbar a,\qquad E_{n}-E_{n_{2}^{\prime}}=\hbar a. \tag{2.14}$$

Ensuite calculons les éléments de matrice H_{nn} de l'hamiltonien (2.1)

$$H_{nn}=\frac{m}{2}e^{-\lambda t}\left(a^{2}+\frac{\lambda^{2}}{4}+\Omega_{0}^{2}\right)\sum_{j}\left|x_{nj}\right|^{2}, \tag{2.15}$$

et qui peut s'écrire sous la forme

$$H_{nn} = \frac{m}{2} e^{-\lambda t} \left(a^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \Omega_0^2 \right) \left\{ \left| x_{nn'_2} \right|^2 + \left| x_{nn'_1} \right|^2 \right\}. \tag{2.16}$$

D'autre part, de la relation de commutation (2.12) on a

$$\alpha_{nn'_1} \left\{ \left| x_{nn'_2} \right|^2 - \left| x_{nn'_1} \right|^2 \right\} = -\frac{\hbar}{2m}. \tag{2.17}$$

Comme dans le cas de l'oscillateur harmonique non amorti, supposons que n'_2 n'existe pas pour l'état fondamental, donc

$$\alpha_{n_0 n'_0} \left| x_{n_0 n'_0} \right|^2 = \frac{\hbar}{2m}, \tag{2.18}$$

et

$$H_{n_0 n_0} = m \Omega_0^2 e^{-\lambda t} \left| x_{n_0 n'_0} \right|^2. \tag{2.19}$$

De (2.18) on obtient

$$\left| x_{n_0 n'_0} \right|^2 = \frac{\hbar}{2ma}, \tag{2.20}$$

et en remplaçant dans (2.19) on a

$$H_{n_0 n_0} = \frac{\hbar \Omega_0^2}{2a} e^{-\lambda t} \approx \frac{\hbar \Omega_0}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{8 \Omega_0^2} \right) e^{-\lambda t}. \tag{2.21}$$

Pour les niveaux supérieurs, nous avons

$$H_{jj} - H_{kk} = \frac{\hbar \Omega_0^2}{a} (j - k)\, e^{-\lambda t}, \tag{2.22}$$

et la différence d'énergie est donnée par

$$E_j - E_k = (j - k)\, a \hbar \approx \hbar \Omega_0 (j - k) \left(1 - \frac{\lambda^2}{8 \Omega_0^2} \right), \tag{2.23}$$

ou

$$E_j - E_k = (H_{jj} - H_{kk}) \left(\frac{a^2}{\Omega_0^2} \right) e^{\lambda t} \approx (H_{jj} - H_{kk}) \left(1 - \frac{\lambda^2}{4 \Omega_0^2} \right) e^{\lambda t}. \tag{2.24}$$

Par conséquent, Seeger pense que lorsque $\lambda \ll 2\Omega_0$, l'énergie des états de l'oscillateur reste constante pour un temps long.

Il convient de souligner les aspects suivants de cette formulation:

a) Le commutateur $[x, p]$ reste constant au cours du temps.

b) Les éléments de matrice de x et de p sont identiques.

c) L'hamiltonien utilisé est relié à l'opérateur d'énergie, i.e. il est l'opérateur d'énergie.

d) Le changement dans les différences d'énergie dus à l'effet de l'amortissement, est proportionnel à $\frac{\lambda^2}{8\Omega_0^2}$.

Cette méthode de quantification des systèmes dissipatifs a été critiqué par Brittin [4]. Selon lui, pour les forces de frottement dépendantes de la vitesse, la relation de commutation et les équations du mouvement de Heisenberg sont incompables. A cet effet, considérons un mouvement unidimensionnel sous l'effet d'une force de frottement de Q

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q\left(x, \dot{x}\right). \tag{2.25}$$

En utilisant le moment canonique p défini par

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \tag{2.26}$$

l'hamoltonien est

$$H\left(x, p\right) = p\dot{x} - L. \tag{2.27}$$

Dans ce cas, les équations du mouvement de l' hamilton (2.27) sont

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} + Q\left[x, \dot{x}\left(x, p\right)\right]. \tag{2.28}$$

En mécanique classique, on peut ecrire les equations du mouvement (2.28) de la variable dynamique $A\left(x, p, t\right)$ en fonction du crochet de Poisson

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial p} Q\left(x, p\right), \tag{2.29}$$

où le crochet de Poisson $\{A, H\}$ est défini par

$$\{A, H\} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{2.30}$$

La quantification peut s'effectuer par analogie en reliant le crichet de Poisson au commutateur comme suit

$$\{A, H\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}\left[A, H\right] = \frac{1}{i\hbar}\left(AH - HA\right),$$

et en utilisant (2.29), l'équation de Heisenberg d'un opérateur A

$$i\hbar\frac{dA}{dt}=[A,H]+i\hbar\frac{\partial A}{\partial p}Q\left(x,p\right). \tag{2.31}$$

Ensuite, la dérivée par rapport au temps du commutateur suivant

$$[x,p]=i\hbar, \tag{2.32}$$

donne

$$\left[\frac{dx}{dt},p\right]+\left[x,\frac{dp}{dt}\right]=0. \tag{2.33}$$

En utilisant (2.31), réécrivons (2.33) sous la forme

$$\left[\left[x,H\right],p\right]+\left[x,\left[p,H\right]+i\hbar Q\right]=0. \tag{2.34}$$

La relation précédente implique que

$$[x,Q]=0, \tag{2.35}$$

Par conséquent, Q ne peut être qu'une fonction de x et non de $\dot{x}$, i.e. $Q=Q(x)$.

Les arguments de Brittin montrent l'inconsistence entre les equations canoniques du mouvemnt, les hamiltoniens et les relations de commutations.

On peut aborder le problème de la consistence pour les hamiltoniens classiques indépendants du temps des systèmes amortis de la manière suivante: soit un Lagrangien séparable en x et $\dot{x}$ d'une particule de masse unité de la forme

$$L\left(x,\dot{x}\right)=\dot{x}\int^{\dot{x}}\frac{1}{\upsilon^{2}}G\left(\upsilon\right)d\upsilon-V\left(x\right), \tag{2.36}$$

où $G\left(\upsilon\right)$ désigne une fonction arbitraire de υ. Comme auparavant, on impose la condition: $\left(\frac{1}{\upsilon}\right)\left(\frac{dG(\upsilon)}{d\upsilon}\right)\neq 0$. Le moment canonique conjugué de x est

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\int^{\dot{x}}\frac{d\upsilon}{\upsilon^{2}}G\left(\upsilon\right)+\frac{G\left(\dot{x}\right)}{\dot{x}}=\int^{\dot{x}}\frac{d\upsilon}{\upsilon}\frac{dG\left(x\right)}{d\upsilon}. \tag{2.37}$$

En utilisant le lagrangien (2.36), l'hamiltonien correspondant est

$$H\left(x,p\right)=G\left[\dot{x}\left(p\right)\right]+V\left(x\right), \tag{2.38}$$

où l'expression de $\dot{x} = \dot{x}(p)$ est obtenu de l'équation (2.37). Calculons $\frac{i}{\hbar}[H, x]$ en utilisant la relation de commutation canonique $[x, p] = i\hbar$ et l'équation (2.37)

$$\frac{i}{\hbar}[H, x] = \frac{i}{\hbar}[G(\dot{x}), x] = \frac{d}{dp}G(\dot{x}) = \frac{d\dot{x}}{dp}\frac{dG(\dot{x})}{d\dot{x}} = \dot{x}, \tag{2.39}$$

qui l'équation de Heisenberg correcte de la dérivée temporelle de l'operateur position. Ensuite, calculons la dérivée temporelle de $\dot{x}$

$$\ddot{x} = \frac{i}{\hbar}[H, \dot{x}] = \frac{i}{\hbar}[V, \dot{x}], \tag{2.40}$$

Pour calculer l'expression de (2.40), notons que de la relation de commutation $[x, p] = i\hbar$, il s'en suit que pour toute fonction $P(p)$ on a

$$\frac{i}{\hbar}[x, P(p)] = -\frac{dP(p)}{dp}, \tag{2.41}$$

alors

$$\frac{i}{\hbar}[x, \dot{x}] = -\frac{d\dot{x}}{dp} = -\frac{\dot{x}}{\left(\frac{dG(\dot{x})}{d\dot{x}}\right)} = -R(\dot{x}), \tag{2.42}$$

qui une définition de $R(\dot{x})$.

Ensuite, calculons le commutateur

$$\frac{i}{\hbar}[x^n, \dot{x}^n] = \frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{n-1} x^j [x, \dot{x}] x^{n-1-j} = -\sum_{j=0}^{n-1} x^j R(\dot{x}) x^{n-1-j}. \tag{2.43}$$

A la limite classique, le second membre de (2.43) devient

$$-nx^{n-1}R(\dot{x}) = -R(\dot{x})\frac{d}{dx}x^n. \tag{2.44}$$

Pour ce cas, la règle d'association est

$$\left[R(\dot{x})\frac{d}{dx}x^n\right]_{Q.M.} \rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} x^j R(\dot{x}) x^{n-1-j}. \tag{2.45}$$

Supposons maintenant que $V(x)$ peut être s'écrire sous la forme d'une série de puissance de x

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2.46}$$

Alors, calculons l'expression (2.40)

$$\frac{i}{\hbar}\left[V\left(x\right),\dot{x}\right]=-\left(R\left(\dot{x}\right)\frac{dV\left(x\right)}{dx}\right)_{Q.M.},\tag{2.47}$$

et l'équation du mouvement de Heisenberg pour x est

$$\ddot{x}+\left(R\left(\dot{x}\right)\frac{dV\left(x\right)}{dx}\right)_{Q.M.}=0.\tag{2.48}$$

Ainsi toute équation du mouvement de la forme (2.48) est compatible avec les relations de commutation canonique. Cependant, la consistance mathématique n'implique pas que l'équation quantique résultante a nécessairement un sens physique. comme nous l'avons démontré.Cependant l'équation quantique résultante n'est pas nécessairement significative sur le plan physique simplemant parce qu'elle est cohérente sur le plan mathématique.

Exemple: considerons le cas simple où $R\left(\dot{x}\right)=\dot{x}$ et l'équation du mouvement classique est la suivante

$$\ddot{x}+\dot{x}\left(\frac{dV\left(x\right)}{dx}\right)=\ddot{x}+\frac{dV\left(x\right)}{dt}=0.\tag{2.49}$$

Pour ce cas, le Lagrangien et le moment canonique sont

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}\ln\dot{x}^{2}-\dot{x}-V\left(x\right),\tag{2.50}$$

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\frac{1}{2}\ln\dot{x}^{2},\tag{2.51}$$

et l'expression de l'hamiltonien est donnée par

$$H=\pm e^{p}+V\left(x\right).\tag{2.52}$$

Donc apparemment la consistance est étroitement liée à l'hamiltonien qui donne les équations du mouvement correctes dans l'espace des phases.

Dans certains cas, la consistance de la procédure de quantification peut être contournée par la modification du lagrangien et de l'hamiltonien du système. Comme exemple, considérons le cas simple dont l'équation du mouvement est

$$m\ddot{x}+m\lambda\dot{x}=0.\tag{2.53}$$

Comme nous l'avons déjà vu précédemment, en plus de l' hamiltonien $H = \left(\frac{p^2}{2m}\right) e^{-\lambda t}$, on peut construire d'autres hamiltoniens qui donnent la même équation du mouvement (2.53). Prenons la masse de la particule égale à un et écrivons un autre hamiltonien alternatif

$$H = \varepsilon \exp\left(\frac{p}{p_0}\right) + \lambda p_0 x, \tag{2.54}$$

où ε et p_0 sont des constantes.

Les équations du mouvement de Heisenberg sont obtenues comme suit: Soit p et x deux opérateurs canoniquement conjugués satisfaisant la relation de commutation $[p, x] = i\hbar$

$$\dot{x} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, x\right] = \frac{\varepsilon}{p_0} \exp\left(\frac{p}{p_0}\right), \tag{2.55}$$

$$\dot{p} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, p\right] = -\lambda p_0. \tag{2.56}$$

En dérivant (2.55) par rapport au temps de t

$$\ddot{x} = \frac{\varepsilon}{2p_0^2}\left\{\dot{p} \exp\left(\frac{p}{p_0}\right) + \exp\left(\frac{p}{p_0}\right)\dot{p}\right\} = -\lambda \dot{x}, \tag{2.57}$$

où les équations (2.55) et (2.56) ont été utilisées. Par conséquent, la relation de commutation canonique et les équations du mouvement sont compatibles et il n'y a pas d'inconsitance. L'hamiltonien (2.54) génère également la même équation du mouvement dans l'espace des phases, mais il ne représente pas l'énergie du système car il n'a pas la bonne forme lorsque $\lambda \to 0$. Par conséquent, il n'est pas acceptable comme opérateur en mécanique quantique. Cela devient plus clair en écrivant "l'équation d'onde" de l'opérateur(2.54) dans l'espace des moments

$$-i\hbar\lambda p_0 \frac{\partial \psi}{\partial p} + \varepsilon \exp\left(\frac{p}{p_0}\right)\psi = E'\psi, \tag{2.58}$$

dont sa solution est

$$\psi = \exp\left[-\frac{i}{\lambda\hbar p_0}\left\{\varepsilon - E' p_0 \exp\left(\frac{p}{p_0}\right)\right\}\right]. \tag{2.59}$$

Une fois de plus, notons que la limite de ψ n'est pas bien définie lorsque $\lambda \to 0$.

Chapter 3

Oscillateur de Caldirola-Kanai complexe dépendant du temps

Dans ce chapitre, nous présentons l'étude quantique de trois variantes de l'oscillateur de Caldirola-Kanai complexe dépendant explicitement du temps. Nous cherchons les solutions de l'équation de Schrodinger en utilisant les transformations unitaires. L'étude classique de ces problèmes seront abordés dans un autre travail.

3.1 Oscillateur de Caldirola-Kanai complexe dépendant du temps

L'Hamiltonien de l'oscillateur de Caldirola-Kanai complexe dépendant explicetement du temps est défini par

$$\hat{H} = e^{-2i\gamma t}\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}e^{2i\gamma t}m\omega_0^2X^2, \tag{3.1}$$

et l'équation de Schrödinger correspendante est

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \hat{H}\left(t\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle. \tag{3.2}$$

Pour résoudre cette équation, introduisons la transformation unitaire F_1 tel que

$$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = F_1^{-1}\left|\varphi(t)\right\rangle, \tag{3.3}$$

où F_1 est défini par

$$F_1 = \exp\left(\frac{iC}{2A}X^2\right)\exp\left(\frac{-i}{2}(XP+PX)\ln A\right), \tag{3.4}$$

et son inverse est

$$F_1^{-1} = \exp\left(\frac{i}{2}(XP+PX)\ln A\right)\exp\left(-\frac{iC}{2A}X^2\right), \tag{3.5}$$

ensuite remplaçons l'Eq. (3.3) dans l'Eq. (3.2), on obtient la nouvelle l'équation de Schrodinger de l'état $|\varphi(t)\rangle$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\varphi(t)\rangle = \hat{H}_1|\varphi(t)\rangle,$$

de sorte que le nouveau hamiltonien $\hat{H}_1$ soit indépendant du temps

$$\hat{H}_1 = -iF_1\frac{\partial F_1^{-1}}{\partial t} + F_1\hat{H}F_1^{-1}, \tag{3.6}$$

Calculons l'expression du terme $\frac{\partial F_1^{-1}}{\partial t}$

$$\frac{\partial F_1^{-1}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\exp\left(\frac{i}{2}(XP+PX)\ln A\right)\exp\left(-\frac{iC}{2A}X^2\right)\right], \tag{3.7}$$

$$= \frac{i}{2A}\frac{\partial A}{\partial t}(XP+PX)F_1^{-1} - \frac{iX^2}{2}F_1^{-1}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{C}{A^2}\frac{\partial A}{\partial t}\right), \tag{3.8}$$

et en multipliant la relation précédente par $-iF_1$ pour obtenir

$$\begin{aligned} -iF_1\frac{\partial F_1^{-1}}{\partial t} &= \frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial t}F_1(XP+PX)F_1^{-1} \\ &\quad - \frac{X^2}{2}F_1F_1^{-1}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{C}{A^2}\frac{\partial A}{\partial t}\right), \end{aligned} \tag{3.9}$$

on a

$$F_1F_1^{-1} = F_1^{-1}F_1 = 1 \tag{3.10}$$

on sait que

$$\begin{aligned} F_1XF_1^{-1} &= \frac{1}{A(t)}X, & F_1^{-1}XF_1 &= A(t)X, \\ F_1PF_1^{-1} &= A(t)P - C(t)X, & F_1^{-1}PF_1 &= C(t)X + \frac{1}{A(t)}P, \end{aligned} \tag{3.11}$$

on utilise ces relations pour trouver

$$F_1 \left(XP + PX \right) F_1^{-1} = XP + PX - 2\frac{C\left(t\right)}{A\left(t\right)} X^2, \tag{3.12a}$$

on remplace cette dernière dans(3.9)pour obtenir la relation suivante

$$-iF_1 \frac{\partial F_1^{-1}}{\partial t} = \frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial t}\left[XP + PX - 2\frac{C\left(t\right)}{A\left(t\right)} X^2 \right] - \frac{X^2}{2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{C}{A^2}\frac{\partial A}{\partial t} \right), \tag{3.13}$$

Maintenant calculons $F_1 \hat{H} F_1^{-1}$

$$\begin{aligned} F_1 \hat{H} F_1^{-1} &= F_1 \left(e^{-2i\gamma t}\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}e^{2i\gamma t} m\omega_0^2 X^2 \right) F_1^{-1} \\ &= \frac{e^{-2i\gamma t}}{2m} F_1 P^2 F_1^{-1} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 e^{2i\gamma t} F_1 X^2 F_1^{-1} \\ &= \frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}\left(AP - CX\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 e^{2i\gamma t}\left(\frac{X}{A}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

donc

$$F_1 \hat{H} F_1^{-1} = \left[\frac{e^{-2\gamma t}}{2m} C^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 e^{2\gamma t}\left(\frac{1}{A}\right)^2 \right] X^2 + \left[\frac{e^{-2\gamma t}}{2m} A^2 \right] P^2 - \frac{e^{-2\gamma t}}{2m} AC\left(XP + PX\right), \tag{3.15}$$

La relation (3.6)va devenir

$$\begin{aligned} H_1 = &\left[\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m} C^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 e^{2i\gamma t}\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t}\frac{C}{A} - \left(\frac{1}{2A}\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{C}{2A^2}\frac{\partial A}{\partial t} \right) \right] X^2 \\ &+ \left[\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m} A^2 \right] P^2 + \left[\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{e^{-2i\gamma t}}{2m} AC \right] \left(XP + PX\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

On compare la dernière relation avec l'Hamiltonien indépendant du temps

$$\hat{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2, \tag{3.17}$$

alors

$$\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m} C^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 e^{2i\gamma t}\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t}\frac{C}{A} - \left(\frac{1}{2A}\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{C}{2A^2}\frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} m\omega^2, \tag{3.18}$$

$$\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}AC = 0, \tag{3.19}$$

$$\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}A^2 = \frac{1}{2m}, \tag{3.20}$$

d'après ces résultats on trouve que

$$A = e^{i\gamma t}, C = im\gamma e^{i\gamma t}. \tag{3.21}$$

On remplace ces résultas dans (3.18) pour déterminer l'expression de la fréquence ω

$$\frac{1}{2}m\omega_0^2 + \frac{1}{2}m\gamma^2 = \frac{1}{2}m\omega^2, \tag{3.22}$$

d'où

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \gamma^2, \tag{3.23}$$

donc

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}. \tag{3.24}$$

Si on les remplace dans (3.4) on obtient l'expression de la transformation unitaire F_1 et son inverse

$$F_1 = \exp\left(-\frac{m\gamma}{2}X^2\right)\exp\left(\frac{\gamma t}{2}\left(XP + PX\right)\right), \tag{3.25}$$

et

$$F_1^{-1} = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\left(XP + PX\right)\right)\exp\left(\frac{m\gamma}{2}X^2\right). \tag{3.26}$$

3.1.1 Solution de l'équation de Schrödinger

Posons

$$|\psi(t)\rangle = F_2^{-1}|\varphi\rangle \text{ où } |\varphi\rangle = e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}|n\rangle, \tag{3.27}$$

la fonction d'onde est donnée par

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}(XP+PX)\right)\exp\left(\frac{m\gamma}{2}X^2\right)\exp\left[-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]|n\rangle, \tag{3.28}$$

alors $\psi(x,t)$ s'écrit sous la forme

$$\psi(x,t) = \langle x|\,\psi(t)\rangle = \langle x|\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}(XP+PX)\right)\exp\left(\frac{m\gamma}{2}X^2\right)e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}|n\rangle. \tag{3.29}$$

En utilisant la formule suivante

$$\langle x|\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}(XP+PX)\right) = e^{\frac{i\gamma t}{2}}\left\langle e^{i\gamma t}x\right|, \tag{3.30}$$

donc $\psi(x,t)$ s'écrit sous la forme

$$\psi(x,t) = e^{\frac{i\gamma t}{2}}e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}\exp\left(\frac{m\gamma}{2}e^{2i\gamma t}x^2\right)\left\langle e^{i\gamma t}x\right|\,n\rangle, \tag{3.31}$$

avec

$$\left\langle e^{i\gamma t}x\right|\,n\rangle = \left[\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}\exp\left[\frac{-m\omega e^{2i\gamma t}}{2\hbar}x^2\right]H_n\left[e^{i\gamma t}x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right], \tag{3.32}$$

où H_n est le polynôme d'Hermite complexe.

Ainsi la solution finale dépendante du temps$\psi(x,t)$ représente un état comprimé pour l'hamiltonien de Caldirola-Kanai complexe.

3.1.2 Oscillateur de Caldirola-Kanai généralisé complexe

L'oscillateur de Caldirola-Kanai généralisé complexe est défini par le Hamiltonien suivant

$$\hat{H} = e^{-2i\gamma t}\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}e^{2i\gamma t}m\omega_0^2X^2 + i\gamma(XP+PX), \tag{3.33}$$

où γ est un coféclent dépendante du temps.

On ultilise les même étapes que celles de l'exemple précédent pour déterminer les paramètres $A(t)$ et $C(t)$ de la transformation unitaire suivante

$$F_2 = \exp\left(\frac{iC}{2A}X^2\right)\exp\left(-\frac{i}{2}(XP+PX)\ln A\right), \tag{3.34}$$

donc

$$F_2^{-1} = \exp\left(\frac{i}{2}(XP+PX)\ln A\right)\exp\left(-\frac{iC}{2A}X^2\right), \tag{3.35}$$

$$H_2 = -iF_2\frac{\partial F_2^{-1}}{\partial t} + F_2\hat{H}F_2^{-1}, \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned} -iF_2\frac{\partial F_2^{-1}}{\partial t} &= \frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial t}F_2(XP+PX)F_2^{-1} - \frac{X^2}{2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{C}{A^2}\frac{\partial A}{\partial t}\right) \\ &= -iF_1\frac{\partial F_1^{-1}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

et en utilisant la relation $(3.12a)$

$$F_2(XP+PX)F_2^{-1} = XP+PX-2\frac{C(t)}{A(t)}X^2, \tag{3.38}$$

on obtient

$$-iF_2\frac{\partial F_2^{-1}}{\partial t} = \frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial t}\left[XP+PX-2\frac{C(t)}{A(t)}X^2\right] - \frac{X^2}{2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{C}{A^2}\frac{\partial A}{\partial t}\right), \tag{3.39}$$

Calculons maintenant $F_2\hat{H}F_2^{-1}$

$$
\begin{aligned}
F_2\hat{H}F_2^{-1} &= F_2\left[e^{-2i\gamma t}\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}e^{2i\gamma t}m\omega_0^2X^2+i\gamma\left(XP+PX\right)\right]F_2^{-1}, \\
&= \frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}F_2P^2F_2^{-1}+\frac{1}{2}m\omega_0^2e^{2i\gamma t}F_2X^2F_2^{-1}+i\gamma F_2\left(XP+PX\right)F_2^{-1}, \\
&= \left[\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}C^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2e^{2i\gamma t}\left(\frac{1}{A^2}\right)^2-2i\gamma\frac{C}{A}\right]X^2+\left[\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}A^2\right]P2 \\
&+\left[i\gamma-\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}AC\right]\left(XP+PX\right), \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

Ainsi l'expression (3.36) de H_2 devient

$$
\begin{aligned}
H_2 &= \left[\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}C^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2e^{2i\gamma t}\frac{1}{A^2}-2i\gamma\frac{C}{A}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t}\frac{C}{A}-\left(\frac{1}{2A}\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{C}{2A^2}\frac{\partial A}{\partial t}\right)\right]X^2 \\
&+\left[\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}A^2\right]P^2+\left[i\gamma+\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}AC\right]\left(XP+PX\right), \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

et comparons cette dernière avec l'Hamiltonien (3.17) , on obtient le système d'équations suivant:

$$
\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}C^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2e^{2i\gamma t}\left(\frac{1}{A}\right)^2-2i\gamma\frac{C}{A}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t}\frac{C}{A}-\left(\frac{1}{2A}\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{C}{A^2}\frac{\partial A}{\partial t}\right)=\frac{1}{2}m\omega^2, \qquad (3.42)
$$

$$
\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}A^2=\frac{1}{2m}, \qquad (3.43)
$$

$$
i\gamma+\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}AC=0, \qquad (3.44)
$$

De l'Eq. (3.43) et de (3.44) on obtient:

$$
A\left(t\right)=e^{i\gamma t}, C\left(t\right)=3im\gamma e^{i\gamma t}. \qquad (3.45)
$$

Pour obtenir l'expression de la fréquence ω on remplace ces résultats dans la relation (3.42)

$$
\frac{9}{2}m\gamma^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2=\frac{1}{2}m\omega^2, \qquad (3.46)
$$

donc

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 9\gamma^2, \tag{3.47}$$

alors

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 9\gamma^2}. \tag{3.48}$$

et on remplace dans (3.34) pour obtenir l'expression finale de F_2

$$F_2 = \exp\left(-\frac{3m\gamma}{2}X^2\right)\exp\left(\frac{\gamma t}{2}\left(XP+PX\right)\right). \tag{3.49}$$

et

$$F_2^{-1} = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\left(XP+PX\right)\right)\exp\left(\frac{3m\gamma}{2}X^2\right). \tag{3.50}$$

Solution de l'équation de Schrödinger

La fonction d'onde est définie par:

$$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = F_3^{-1}\left|\varphi\right\rangle \quad \text{où} \quad \left|\varphi\right\rangle = e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left|n\right\rangle, \tag{3.51}$$

donc

$$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\left(XP+PX\right)\right)\exp\left(\frac{3m\gamma}{2}X^2\right)e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left|n\right\rangle, \tag{3.52}$$

sachant que

$$\left\langle x\right|\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\left(XP+PX\right)\right) = e^{\frac{i\gamma t}{2}}\left\langle e^{i\gamma t}x\right|, \tag{3.53}$$

donc

$$\psi\left(x,t\right) = \left\langle x\right|\left.\psi\left(t\right)\right\rangle = e^{\frac{i\gamma t}{2}}\exp\left(\frac{3m\gamma}{2}e^{2i\gamma t}\right)e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left\langle e^{i\gamma t}x\right|\left.n\right\rangle, \tag{3.54}$$

avec

$$\left\langle e^{i\gamma t}x\right| n\rangle=\left[\frac{1}{2^{n}n!}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}}e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}e^{2i\gamma t}x^{2}\right]H_{n}\left[e^{i\gamma t}x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right], \tag{3.55}$$

où H_n est le polynôme d'Hermite complexe.

Ainsi la solution finale dépendante du temps$\psi(x,t)$ représente un état comprimé pour l'hamiltonien de Caldirola-Kanai généralisé complexe.

3.1.3 Oscillateur de Caldirola-Kanai non-hermitien complexe

L'oscillateur de Caldirola-Kanai non-hermitien complexe forcé en présence d'un terme complexe et linéaire est défini par l'Hamiltonien suivant:

$$\hat{H}=e^{-2i\gamma t}\frac{P^{2}}{2m}+\frac{1}{2}e^{2i\gamma t}m\omega_{0}^{2}X^{2}+i\lambda\left(t\right)X, \tag{3.56}$$

l'équation de Shrödinguer dépendante du temps s'écrit

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\left(t\right)\right\rangle=\hat{H}\left(t\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle \tag{3.57}$$

pour résoudre cette équation on utilise la transformation unitaire suivante:

$$F_{3}=\exp\left(\frac{iC}{2A}X^{2}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\left(XP+PX\right)\ln A\right), \tag{3.58}$$

alors

$$F_{3}^{-1}=\exp\left(\frac{i}{2}\left(XP+PX\right)\ln A\right)\exp\left(-\frac{iC}{2A}X^{2}\right), \tag{3.59}$$

D'autre part on a

$$H_{3}=-iF_{3}\frac{\partial F_{3}^{-1}}{\partial t}+F_{3}\hat{H}F_{3}^{-1}, \tag{3.60}$$

on utilise les relations (3.11), on trouve:

$$-iF_3\frac{\partial F_3^{-1}}{\partial t}=\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial t}\left[XP+PX-2\frac{C\left(t\right)}{A\left(t\right)}X^2\right]-\frac{X^2}{2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{C}{A^2}\frac{\partial A}{\partial t}\right), \tag{3.61}$$

ensuite calculons l'expression du terme $F_3\hat{H}F_3^{-1}$

$$F_3\hat{H}F_3^{-1}=\left[\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}C^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2e^{2i\gamma t}\frac{1}{A^2}\right]X^2+\left[\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}A^2\right]P^2 \tag{3.62}$$

$$-\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}AC\left(XP+PX\right)+\frac{i\lambda}{A}X, \tag{3.63}$$

puis on remplace les équations (3.61) et (3.62) dans l'Eq. (3.60) on obtient:

$$\begin{aligned}H_3=&\left[\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}C^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2e^{2i\gamma t}\frac{1}{A^2}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t}\frac{C}{A}-\left(\frac{1}{2A}\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{C}{2A^2}\frac{\partial A}{\partial t}\right)\right]X^2\\&+\left[\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}A^2\right]P^2+\left[\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}AC\right]\left(XP+PX\right)+\frac{i\lambda}{A}X,\end{aligned} \tag{3.64}$$

On compare la dernière relation avec l'Hamiltonien non-hermition suivant

$$\hat{H}=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2X^2+iX, \tag{3.65}$$

on obtient alors le système d'équations suivant

$$\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}C^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2e^{2i\gamma t}\frac{1}{A^2}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t}\frac{C}{A}-\left(\frac{1}{2A}\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{C}{2A^2}\frac{\partial A}{\partial t}\right)=\frac{1}{2}m\omega^2, \tag{3.66}$$

$$\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}A^2=\frac{1}{2m}, \tag{3.67}$$

$$\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{e^{-2i\gamma t}}{2m}AC=0, \tag{3.68}$$

$$\frac{i\lambda}{A}=i, \tag{3.69}$$

De l'Eq. (3.67) , (3.68) et (3.69) on trouve que :

$$A(t) = e^{i\gamma t}, C(t) = im\gamma e^{i\gamma t}, \lambda(t) = e^{i\gamma t}. \tag{3.70}$$

alors les expressions finales sont:

$$\hat{H} = e^{-2i\gamma t}\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 e^{2i\gamma t} + ie^{i\gamma t}X. \tag{3.71}$$

et

$$F_3 = \exp\left(-\frac{m\gamma}{2}X^2\right)\exp\left(\frac{\gamma t}{2}(XP + PX)\right). \tag{3.72}$$

$$F_3^{-1} = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}(XP + PX)\right)\exp\left(\frac{m\gamma}{2}X^2\right). \tag{3.73}$$

Pour déterminer l'expression de la fréquence ω,on remplace les résultas obtenus dans l'Eq. (3.66)

$$\frac{1}{2}m\gamma^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2, \tag{3.74}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \gamma^2, \tag{3.75}$$

alors

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}. \tag{3.76}$$

3.1.4 Solution de l'équation de Schrödinger

La soultion de l'équation de Schrodinger est donnée par

$$|\psi(t)\rangle = F_3^{-1}|\varphi\rangle \quad \text{où} \quad |\varphi\rangle = e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}|n\rangle, \tag{3.77}$$

et

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}(XP + PX)\right)\exp\left(\frac{m\gamma}{2}X^2\right)e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}|n\rangle, \tag{3.78}$$

On utilise la formule (3.30) pour calculer l'expression de

$$\psi(x,t) = \langle x|\,\psi(t)\rangle = \langle x|\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}(XP + PX)\right)\exp\left(\frac{m\gamma}{2}X^2\right)e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}|n\rangle, \tag{3.79}$$

donc

$$\psi(x,t) = e^{\frac{i\gamma t}{2}}e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}\exp\left(\frac{m\gamma}{2}e^{2i\gamma t}x^2\right)\left\langle e^{i\gamma t}x\right|\,n\rangle, \tag{3.80}$$

avec

$$\left\langle e^{i\gamma t}x\right|\,n\rangle = \left[\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}}e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}e^{2i\gamma t}x^2\right]H_n\left[e^{i\gamma t}x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right], \tag{3.81}$$

où H_n est le polynôme d'Hermite compexe.

Ainsi la solution finale dépendante du temps $\psi(x,t)$ représente un état comprimé pour l'hamiltonien de Caldirola-Kanai non hermitien complexe.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les systèmes quantiques dissipatifs. Nous avons commencé par un rappel sur le formalisme lagrangien et hamiltonien classiques des systèmes dissipatifs en abordant la non-unicité, les conditions d'existence et comment les construire. Ensuite, nous avons abordé les différentes méthodes de quantification des systèmes dissipatifs classiques de sorte que les relations de commutation et les équations du mouvement de Heisenberg doivent etre compatibles. L'étude a été complétée par des exemples de systèmes dissipatifs simples.

Enfin, nous avons présenté l'étude quantique de l'oscillateur de Caldirola-Kanai complexe dépendant explicitement du temps en utilisant les transformations unitaires pour obtenir les solutions de l'équation de Schrodinger. L'étude classique du problème et sa quantification seront abordées dans un autre travail.

Bibliography

[1] M. Razavy, Cassical ans quantum dissipative systems, Imperial College Press, 2005

[2] L. Meirovitch, Methods of Analytical Dynamics, (McGraw-Hill, New York, 1970) p. 88.

[3] R.M. Rosenberg, Analytical Dynamics of Discrete Systems, (Plenum Press, 1977) p. 229.

[4] P. Cardirola, Nuovo Cimento 18, 393 (1941).

[5] E. Kanai, Prog. Theor. Phys. 3, 440 (1948).