République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur
Et de La Recherche Scientifique
Université de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et informatique

Département de Physique

N° d'ordre :
Série :

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de

MASTER

Filière : Physique

Spécialité : Physique Théorique

Par

Youssra Boumaali

Thème

Quantification stochastique de l'oscillateur harmonique dépendant du temps

Soutenue le : 13/07/2022

Devant le Jury

Président :	A. Tilbi	MCA.	Univ.MSBY, Jijel
Rapporteur :	N. Chine	MCB.	Univ.MSBY, Jijel
Examinatrice :	B. Guettou	MAA.	Univ.MSBY, Jijel

Dédicaces

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude , l'amour , le respect , à ceux qui me sont les plus chers , à ceux qui ont toujours cru en moi , à ceux qui m'ont toujours encouragé C'est avec profonde gratitude et sincères mots , que je dédie ce modeste travail à mes chers parents qui m'ont encouragé à être ce que je suis Merci pour tous les efforts et les sacrifices que vous avez consenti pour mon éducation et mon avenir, Merci pour votre amour , vos conseils ainsi que votre soutien inconditionnel , à la fois moral et économique , qui m'a permis de réaliser les études que je voulais, J'espère être à la hauteur de vos espérances et qu'Allah m'aide à rendre un peu soit - il de ce que vous . m'avez donné, A mes chères sœurs et mes chers frères pour leur encouragement permanent, et leur soutien moral , A ma famille , mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de la vivacité

YOUSSRA

Remerciement

Je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

J'adresse tout d'abord mes plus vifs remerciements et ma profonde gratitude à Dr.N.Chine, MCB à l'université de Jijel , pour avoir accepter de m'encadrer, diriger et m'accompagner a toute cette période de travail.

Mes remerciements vont ensuite à Dr.A.Tilbi , MCA à l'université de Jijel qui a accepté de présider le Jury.

à Mme B.Guettou , MAA à l'université de Jijel qu'elle nous à fait hameur en acceptant de participer à ce Jury.

Enfin , j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille et en particulier ma mère , et mon père qui m'ont soutenue et encouragée , ainsi que mes frères .

Sans oublier mes très chères amies.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Le problème des systèmes dépendants du temps a joué un rôle très important dans l'étude de plusieurs phénomènes physiques, dont il a été étudié par pleusieurs méthodes.

Nous proposons, dans ce travail, une nouvelle méthode, équivalente à la mécanique quantique standard et proche à celle de Feynman, il sagit de la mécanique quantique stochastique (MQS) de Parisi et Wu (1981)[1] .

Bien que sa formulation soit simple, elle n'a pas eu cependant le mérite d'être développée comme le sont actuellement les autres approches comme celles de Schwinger, Feynmann, Heisenberg...

L'idée de base de la MQS est la suivante : on se donne un système physique qui interagit avec son environnement. L'interaction est en général modélisée par un bruit choisi blanc de manière à faire émerger les résultats de la mécanique quantique standard. Sa variable dynamique devient alors aléatoire et son évolution est décrite par une équation dite de Langevin. C'est ainsi que des quantités physiques s'obtiennent à partir de la solution de cette équation.

Par ailleurs dans l'approche de Parisi et Wu la description nécessite l'introduction d'un temps supplémentaire u qui est fictif [2]. En prenant la $\lim u \to \infty$, ce temps fictif permet du point de vue statistique de trouver un certain équilibre thermique. En principe, les résultats de la MQ habituelle doivent émerger naturellement puisque à l'équilibre la probabilité prend la forme standard de Feynman de poids en $exp(Action)$.

Nous proposons dans ce mémoire de voir les possibilités de ce formalisme en étudiant

le mouvement des systèmes Hamiltoniens dépendant du temps. L'oscillateur harmonique à fréquence variable ou à masse variable à une dimension $(1D)$ [3] est l'exemple type le plus étudié, grâce à sa forme simple. Dont l'Hamiltonièn est donné par :

$$H_{cl}(t) = \frac{1}{2M}p^2 + \frac{1}{2}M\omega^2(t)\,x^2,$$

L'oscillateur harmonique à fréquence variable appartient à la classe des potentiels qui peuvent être résolus par la méthode des transformations canoniques (TC).

Ces transformations canoniques sont définies par :

$$\begin{cases} x(t) = \rho Q(t) \\ \\ dt = \rho^2 ds \end{cases}, \tag{1.1}$$

où ρ est une fonction arbitraire sans dimensions.

Ce mémoire est organisé comme suit : aprés une introduction générale au premier chapitre, le deuxième chapitre est consacré à la formulation de la mécanique quantique stochastique de Parisi et Wu (MQS) [4]. Dans le troisième chapitre, nous avons refait les calculs déja existants dans la littérature [4, 5], il s'agit de la détermination exacte de l'amplitude de transition d'un oscillateur harmonique simple à une dimension $(1D)$ [5] en utilisant la formulation du propagateur par la MQS donnée par H, Huffel [4], où les deux équations de Langevin relatives à la position et à l'impulsion ont été utilisées pour calculer l'action classique ainsi que le facteur de fluctuation

Ensuite, le même problème est encore repris, mais cette fois ci dans l'espace de configuration. Le Larangien remplace l'hamiltonien comme moyen de description du mouvement. Nous avons ainsi une seule équation de Langevin à considèrer. Le calcul dans les deux espaces utilise la voie directe de résolution d'équations.

Le problème de l'oscillateur harmonique à une dimension dépendant du temps est traité dans le quatrième chapitre où nous avons utilisé les transformations canoniques pour le rendre indépendant du temps.

Le cinquième chapitre est reservé pour une petite conclusion.

Enfin, nous terminons par un appendice.

Chapitre 2

Formalisme de la mécanique stochastique

Dans ce chapitre, nous présentons le fondement statistique de l'approche de la mécanique stochastique

2.1 Equation de Langevin

L'équation de base de la mécanique quantique stochastique est l'equation de Langevin. C'est une équation différentielle au premier ordre par rapport au temps t.

$$\frac{\partial}{\partial t}x(t) = f\ (x(t)) + \eta(t), \tag{2.1}$$

où $\eta(t)$ est une variable aléatoire qu'on appelle bruit.

Le bruit η est choisi blanc pour les deux propriétés suivantes :

a- moyenne nulle

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \tag{2.2}$$

b- et le produit de corrélation de deux bruits aux instant t et $t\prime$ égal à une fonction de Dirac

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \Omega\delta(t - t'), \tag{2.3}$$

voir appendice 1

La solution de l'équationde Langevin (2.1) est simple

$$x(t) = x_0 + \int_0^t d\tau f(x(\tau)) + \int_0^t d\tau \eta(\tau). \tag{2.4}$$

elle est évidement fonction du bruit.

Nous avons choisi comme condition initiale $x(0) = x_0$ à l'instant $t = 0$.

La moyenne se réduit à

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \int_0^t d\tau \langle f(x(\tau)) \rangle . \tag{2.5}$$

2.2 Quantification Stochastique de Parisi-Wu

Succinctement la méthode de quantification stochastique de Parisi-Wu[1] consiste à :

- associer au temps réel t un temps u fictif, la variable dynamique devient alors une fonction de deux variables : $x(t) \rightarrow x(t, u)$.

- régir l'évolution de cette variable au moyen de ce temps fictif u. L'évolution est maintenant décrite par l'équation de Langevin

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t, u) = f(x(t, u)) + \eta(t, u), \tag{2.6}$$

avec

$$f(x(t, u)) = i \frac{\delta S}{\delta x(t, u)}, \tag{2.7}$$

où S représente l'action relative au système et $\eta(t, u))$ un bruit choisi encore blanc à cause de ses deux propriétés :

a- moyenne nulle

$$\langle \eta(t, u) \rangle = 0. \tag{2.8}$$

b- le produit de corrélation égal au produit de deux fonctions δ

$$\langle \eta(t, u) \eta(t', u') \rangle = \Omega \delta(t - t') \delta(u - u'). \tag{2.9}$$

La moyenne $\langle(*)\rangle$ se calculant comme d'habitude : c'est une somme sur tous les bruits possibles que nous affectons d'un poids gaussien

$$\langle(*)\rangle = \int D\eta\ (*) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2(t,u)dtdu\right], \tag{2.10}$$

Sous forme discrète

$$\langle(*)\rangle = \lim_{N\to\infty} \mathcal{N}\int \prod_n^N d\eta\,(t_n,u_n) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\sum_n^N \varepsilon\sigma\eta^2(t_n,u_n)\right], \tag{2.11}$$

$\mathcal{N}$ étant une constante fixée de façon à avoir $\langle 1\rangle = 1$, à la limite $N \to \infty$, $\varepsilon = \dfrac{t_f - t_i}{N} << 1$.

- pour $u \longrightarrow \infty$, on dit que nous sommes à l'équilibre thermique et nous obtenons alors les quantités physiques de la mécanique quantique.

La moyenne en mécanique quantique se définit par

$$\langle x(t_1)x(t_2)\rangle = \frac{\langle x_f, t_f \mid T(x(t_1)x(t_2)) \mid x_i, t_i\rangle}{\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle}, \tag{2.12}$$

qui est exactement la moyenne en mécanique stochastique

$$\frac{\langle x_f, t_f \mid T(x(t_1)x(t_2)) \mid x_i, t_i\rangle}{\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle} = \lim_{u\longrightarrow\infty} \langle x(t_1,u)x(t_2,u)\rangle, \tag{2.13}$$

avec T est le produit chronologique

La généralisation pour un champ est évidente.

Pour un système décrit par un champ $\phi(x)$ (scalaire) où $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (s, \overrightarrow{r})$ est un 4-vecteur, la procédure s'adapte encore :

- le champ $\phi(x)$ se modifie en le faisant dépendre d'une autre variable u temps fictif :

$\phi = \phi(x,u)$ et l'équation de Langevin régissant l'évolution de ce champ est

$$\frac{\partial}{\partial u}\phi(x,u) = i\frac{\delta S}{\delta\phi(x,u)} + \eta(x,u), \tag{2.14}$$

tandis que la moyenne se définit comme suit

$$\langle F(\phi(x),u)\rangle = \int D\eta(x,u)F(\phi(x),u)\exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2(x,u)d^4xdu\right]. \tag{2.15}$$

L'équilibre est atteint pour $u \longrightarrow \infty$.

2.3 Formulation Stochastique du Propagateur

La determination de la section efficace, spectre des énergies, fonctions d'onde, ... en mécanique quantique, par exemple nécessite la connaissance de l'amplitude de transition ou propagateur. Sa détermination est donc essentielle, puisque il contient toutes les informations importantes sur la dynamique d'un système.

Le but de cette section est de voir comment le déterminer par l'utilisation de la méthode de quantification stochastique (SQM) de Parisi-Wu [1, 2]

Suivant [4] le propagateur se construit à partir de l'équation d'évolution suivante :

$$|x_i,t_i\rangle = T\exp\left[i\int_{t_0}^{t_i} H(t)dt\right]|x_i,t_0\rangle\,, \tag{2.16}$$

où T est le produit chronologique et $H(t)$ est l'hamiltonien, qui régit la dynamique du système.

Par dérivation par rapport au temps t on reconnaît l'équation de Schrödinger

$$\frac{\partial}{\partial t_i}|x_i,t_i\rangle = iH(t_i)|x_i,t_i\rangle\,. \tag{2.17}$$

En multipliant à gauche par le bra $\langle x_f,t_f|$

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\langle x_f,t_f \mid x_i,t_i\rangle = i\langle x_f,t_f|H(t_i)|x_i,t_i\rangle \tag{2.18}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_i}\ln\langle x_f,t_f \mid x_i,t_i\rangle = i\frac{\langle x_f,t_f|H(t_i)|x_i,t_i\rangle}{\langle x_f,t_f \mid x_i,t_i\rangle}, \tag{2.19}$$

et en intégrant, l'amplitude se calcule

$$\langle x_f,t_f \mid x_i,t_i\rangle = c\exp\left[i\int^{t_i}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H(t_i)\rangle\,dt_i\right]. \tag{2.20}$$

Nous voyons qu'elle se calcule en déterminant la moyenne stochastique $\langle H(t_i)\rangle$. La constante c étant indépendante de t_i que nous fixons par la condition :

$$\lim_{T\longrightarrow 0} \langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle = \delta(x_f - x_i), \qquad T = (t_f - t_i)\,. \tag{2.21}$$

Résumons la procédure :

1- A l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$, est associé un hamiltonien classique.

2- les variables stochastiques dépendent en outre d'un temps fictif.

suivant [4] l'Hamiltonien $H(t,u)$, se décompose de deux parties.

$$H(t,u) = H_{cl}(t) + H_Q(t,u), \tag{2.22}$$

si on effectue la séparation suivante

$$\begin{cases} x = x_{cl} + x_Q \\ \\ p = p_{cl} + p_Q \end{cases}, \tag{2.23}$$

la moyenne (sur les bruits) se sépare en deux parties

$$\langle H(t,u)\rangle = \langle H_{cl}(t)\rangle + \langle H_Q(t,u)\rangle\,. \tag{2.24}$$

- la moyenne classique $\langle H_{cl}(t)\rangle$ indépendante du temps fictif u est reliée à l'action classique (calculée suivant le chemin classique)

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial t_i} = H_{cl}(t_i). \tag{2.25}$$

- et une une moyenne $\langle H_Q(t,u)\rangle$ liée aux fluctuations quantiques qui va déterminer le facteur de fluctuation.

Le propagateur est alors égal à :

$$\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle = c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\int^{t_i} \lim_{u\longrightarrow\infty} \langle H_Q(t_i,u)\rangle\, dt_i\right]. \tag{2.26}$$

Finalement la détermination du propagateur passe par le calcul de la partie classique et de la partie relative aux fluctuations quantiques $\langle H_Q(t_i,u)\rangle$.

Pour des actions quadratiques, cette moyenne $\langle H_Q(t_i, u)\rangle$ a été calculée [4]. C'est ainsi que les cas relatifs à la particule libre, soumise à un champ magnétique ont été considérés exactement en utilisant l'espace des configurations et l'espace des phases. Le cas où la variable est de type Grassmman a été considéré pour calculer le facteur de fluctuation [4].

Chapitre 3

Propagateur du potentiel d'oscillateur harmonique

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un système physique particulièrement important : l'oscillateur harmonique simple à une dimension

3.1 Formulation dans l'espace des phases

Comme nous étudions le mouvement dans l'espace des phases, Il est donc naturel d'utiliser le formalisme hamiltonien, avec évidemment les deux variables $(x_Q\ , p_Q)$ qui deviennent des variables aléatoires dans l'approche de la MQS.

Au chapitre deux, il a été montré que l'expression du propagateur à calculer est :

$$\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i \rangle = c \exp\left[iS_{cl}\right] \exp\left[i \int_0^{t_i} \lim_{u \longrightarrow \infty} \langle H_Q(t_i, u) \rangle \, dt_i\right], \tag{3.1}$$

passe par la détermination de

a- la partie classique

b- et de la partie relative aux fluctuations quantiques $\langle H_Q(t_i, u) \rangle$.

Commençons par la partie classique.

3.1.1 Calcul de l'action classique S_{cl}

L'hamiltonien et l'action classique d'un oscillateur harmonique sont respectivement :

$$H = \frac{p^2(t)}{2M} + \frac{M\omega^2}{2}x^2(t)$$

et

$$S_{cl} = \int_{t_i}^{t_f} \left[p\frac{dx(t)}{dt} - \frac{p^2(t)}{2M} - \frac{M\omega^2}{2}x^2(t) \right] dt \tag{3.2}$$

Soit maintenant la trajectoire classique d'équation x_{cl}, cette équation se détermine par les deux équations d'Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{p}_{cl} = -\dfrac{\partial H_{cl}}{\partial x_{cl}} = -M\omega^2 x(t) \\ \\ \dot{x}_{cl} = \dfrac{\partial H_{cl}}{\partial p_{cl}} = \dfrac{p_{cl}}{M} \end{cases} \tag{3.3}$$

Alors, l'équation qui donne la trajectoire classique (*équation différentielle des oscillations harmoniques)* est :

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{3.4}$$

La solution de cette équation est purement sinusoïdale et s'écrit :

$$x_{cl}(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{3.5}$$

En utilisant les conditions aux limites

$$x_i = A\sin\omega t_i + B\cos\omega t_i \tag{3.6}$$

$$x_f = A\sin\omega t_f + B\cos\omega t_f \tag{3.7}$$

nous pouvons tirer les valeurs des constantes A et B

En multipliant (3.6) par $(\cos\omega t_f)$ et (3.7) par $(\cos\omega t_i)$, il vient

$$\begin{cases} x_i\cos\omega t_f = A\sin\omega t_i\cos\omega t_f + B\cos\omega t_i\cos\omega t_f \\ \\ x_f\cos\omega t_i = A\sin\omega t_f\cos\omega t_i + B\cos\omega t_f\cos\omega t_i \end{cases} \tag{3.8}$$

Prenons la différence de ces équations

$$x_i \cos \omega t_f - x_f \cos \omega t_i = A \left(\sin \omega t_i \cos \omega t_f - \sin \omega t_f \cos \omega t_i \right) \tag{3.9}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_i \cos \omega t_f - x_f \cos \omega t_i}{\sin \omega t_i \cos \omega t_f - \sin \omega t_f \cos \omega t_i} \\ &= \frac{x_f \cos \omega t_i - x_i \cos \omega t_f}{\sin \omega T}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

avec $T = t_f - t_i$

Multipliant maintenant (3.6) par $(\sin \omega t_f)$ et (3.7) par $(\sin \omega t_i)$, il vient

$$\begin{cases} x_i \sin \omega t_f = A \sin \omega t_i \sin \omega t_f + B \cos \omega t_i \sin \omega t_f \\ \\ x_f \sin \omega t_i = A \sin \omega t_f \sin \omega t_i + B \cos \omega t_f \sin \omega t_i \end{cases} \tag{3.11}$$

et faisons la différence

$$x_f \sin \omega t_i - x_i \sin \omega t_f = B \left(\cos \omega t_f \sin \omega t_i - \cos \omega t_i \sin \omega t_f \right) \tag{3.12}$$

il vient

$$\begin{aligned} B &= \frac{x_f \sin \omega t_i - x_i \sin \omega t_f}{\cos \omega t_f \sin \omega t_i - \cos \omega t_i \sin \omega t_f} \\ &= -\frac{x_f \sin \omega t_i - x_i \sin \omega t_f}{\sin \omega T}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Alors $x_{cl}(t)$ s'écrit sous la forme

$$
\begin{aligned}
x_{cl}(t) &= A\sin\omega t + B\cos\omega t \\
&= \frac{x_f\cos\omega t_i - x_i\cos\omega t_f}{\sin\omega T}\sin\omega t - \frac{x_f\sin\omega t_i - x_i\sin\omega t_f}{\sin\omega T}\cos\omega t \\
&= x_f\frac{\sin\omega(t-t_i)}{\sin\omega T} + x_i\frac{\sin\omega(t_f-t)}{\sin\omega T} \\
&= \frac{1}{\sin\omega T}\left[x_f\sin\omega(t-t_i) + x_i\sin\omega(t_f-t)\right] \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Ayant déterminé complètement la trajectoire classique, calculons l'action qui lui est relative

$$S_{cl} = \int_{t_i}^{t_f}\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2(t) - \frac{1}{2}M\omega^2x^2(t)\right]dt \qquad (3.15)$$

En utilisant l'intégration par partie pour le terme de l'énergie cinétique

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{M}{2}x_{cl}\dot{x}_{cl}\right]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f}\frac{M}{2}x_{cl}\ddot{x}_{cl}\,dt - \int_{t_i}^{t_f}\frac{M\omega^2}{2}x_{cl}^2\,dt \\
&= \left[\frac{M}{2}x_{cl}\dot{x}_{cl}\right]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f}\frac{M}{2}x_{cl}\underbrace{\left(\ddot{x}_{cl} + \omega^2x_{cl}\right)}_{=0} \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

donc

$$S_{cl} = \left[\frac{M}{2}x_{cl}\dot{x}_{cl}\right]_{t_i}^{t_f} \qquad (3.17)$$

D'après (3.14) , $\dot{x}_{cl}(t)$ est simplement égal à

$$\dot{x}_{cl}(t) = \omega x_f\frac{\cos\omega(t-t_i)}{\sin\omega T} - \omega x_i\frac{\cos\omega(t_f-t)}{\sin\omega T} \qquad (3.18)$$

avec

$$\dot{x}_i = \frac{\omega x_f - \omega x_i\cos\omega T}{\sin\omega T} \qquad (3.19)$$

et

$$\dot{x}_f = \frac{\omega x_f\cos\omega T - \omega x_i}{\sin\omega T} \qquad (3.20)$$

reportons les résultats (3.14) , (3.19) et (3.20) dans l'expression de l'action classique (3.17), il vient

$$S_{cl} = \frac{M}{2} x_f \frac{\omega x_f \cos \omega T - \omega x_i}{\sin \omega T} - \frac{M}{2} x_i \frac{\omega x_f - \omega x_i \cos \omega T}{\sin \omega T}, \tag{3.21}$$

finalement après simplifications nous obtenons pour l'action classique l'expression suivante

$$S_{cl} = \frac{M\omega}{2 \sin \omega T} \left[\left(x_f^2 + x_i^2 \right) \cos \omega T - 2 x_i x_f \right]. \tag{3.22}$$

Cette action est une fonction de x_i, t_i, x_f, t_f.

Passons au calcul du facteur de fluctuation.

3.1.2 Calcul du terme de fluctuation $\left\langle H_{Q(t_i,u)} \right\rangle$

Soient :

- x_Q la déviation de x par rapport à la trajectoire classique x_{cl}

- p_Q est la déviation de p par rapport à l'impulsion classique p_{cl}

$$\begin{cases} x(t) = x_{cl}(t) + x_Q(t) \\ \\ p(t) = p_{cl}(t) + p_Q(t) \end{cases}. \tag{3.23}$$

Avec cette décomposition l'action S se décompose

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\left(p_{cl} + p_Q \right) \frac{\partial \left(x_{cl} + x_Q \right)}{\partial t} - \frac{\left(p_{cl} + p_Q \right)^2}{2M} - \frac{1}{2} M \omega^2 \left(x_{cl} + x_Q \right)^2 \right] \tag{3.24}$$

en une partie classique S_{cl} qui a pour expression

$$S_{cl} = \int_{t_i}^{t_f} \left[p_{cl} \frac{\partial x_{cl}}{\partial t} - \frac{p_{cl}^2}{2M} - \frac{1}{2} M \omega^2 x_{cl}^2 \right] dt \tag{3.25}$$

- et une autre partie qui regroupe les termes relatifs aux déviations

$$
\begin{aligned}
S_Q &= S - S_{cl} \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[p_{cl}\frac{\partial x_Q}{\partial t} + p_Q\frac{\partial x_{cl}}{\partial t} + p_Q\frac{\partial x_Q}{\partial t} - \frac{p_Q^2}{2M} - \frac{p_{cl}p_Q}{M} - \frac{1}{2}M\omega^2 x_Q^2 - M\omega^2 x_{cl}x_Q \right] \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left[p_Q\frac{\partial x_Q}{\partial t} - \frac{p_Q^2}{2M} - \frac{M\omega^2}{2}x_Q^2 + \underbrace{\left(p_Q\frac{\partial x_{cl}}{\partial t} - \frac{p_{cl}p_Q}{M} \right)}_{=0} \underbrace{\left(M\frac{\partial x_{cl}}{\partial t}\frac{\partial x_Q}{\partial t} - M\omega^2 x_{cl}x_Q \right)}_{=0\ (\textit{intégration par parties})} \right] dt
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

$$
S_Q = \int_{t_i}^{t_f} \left[p_Q\frac{\partial x_Q}{\partial t} - \frac{p_Q^2}{2M} - \frac{M\omega^2}{2}x_Q^2 \right] dt \tag{3.27}
$$

avec évidemment les conditions aux bords

$$
x_Q(t_i) = x_Q(t_f) = 0. \tag{3.28}
$$

Décomposons de la même façon l'hamiltonien, il a aussi deux parties :

$$
H = H_{cl} + H_Q \tag{3.29}
$$

- une partie classique donnée par

$$
H_{cl} = \frac{p_{cl}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 x_{cl}^2 \tag{3.30}
$$

-et une autre partie qui regroupe aussi tous les termes restants

$$
H_Q = \frac{P_Q^2}{2M} + \frac{P_{cl}P_Q}{M} + \frac{1}{2}M\omega^2 x_Q^2 + M\omega^2 x_{cl}x_Q \tag{3.31}
$$

Ajoutons, à ce niveau un temps fictif u au temps réel t, afin de passer à la MQS. Nous avons alors

- pour les positions

$$
x_Q(t) \longrightarrow x_Q(t,u), \tag{3.32}
$$

avec les conditions aux bords

$$x_Q(t_i, u) = x_Q(t_f, u) = 0, \tag{3.33}$$

- et pour les impulsions

$$p_Q(t) \longrightarrow p_Q(t, u). \tag{3.34}$$

sans aucune conditions aux limites.

Leurs évolutions sont sujettes aux deux équations de Langevin

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_Q(t,u)}{\partial u} = i\dfrac{\delta S_Q}{\delta x_Q(t,u)} + \eta(t,u) \\ \\ \dfrac{\partial p_Q(t,u)}{\partial u} = i\dfrac{\delta S_Q}{\delta p_Q(t,u)} + \xi(t,u) \end{cases}, \tag{3.35}$$

avec toujours les propriétés standard pour les bruits

$$\begin{cases} \langle \eta(t,u)\xi(t',u')\rangle = 0 \\ \\ \langle \eta(t,u)\eta(t',u')\rangle = \langle \xi(t,u)\xi(t',u')\rangle \ = 2\delta(t-t')\delta(u-u') \end{cases}. \tag{3.36}$$

$$\begin{cases} \langle x_n(t,u)\eta(t,u)\rangle = \langle p_n(t,u)\xi(t,u)\rangle = \delta_{nm}, \\ \\ \langle x_n(t,u)\xi(t,u)\rangle = \langle p_n(t,u)\eta(t,u)\rangle = 0. \end{cases} \tag{3.37}$$

Aprés avoir remplacer dans l'expression de S_Q (3.27) la décomposition en serie de Fourier (3.38), pour séparer les deux variable temporelles t et u

$$\begin{cases} x_Q(t,u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n(u) \sin \frac{n\ \pi}{T}(t-t_i), \\ \\ p_Q(t,u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n(u) \cos \frac{n\ \pi}{T}(t-t_i) + \frac{p_0}{2}, \qquad T = t_f - t_i. \end{cases}. \tag{3.38}$$

Les coefficients de Fourier $x_n(u)$ et $p_n(u)$ dépendent du temps fictif u. Ainsi

$$\frac{\partial x_Q\left(t,u\right)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\left(u\right)\frac{n\pi}{T}\cos\frac{n\pi}{T}\left(t-t_i\right) \tag{3.39}$$

Reportons dans l'expression de l'action (3.27). il vient

$$\begin{aligned}S_Q &= \int_{t_i}^{t_f}\left\{\left[\sum_{n=1}^{\infty}p_n(u)\cos\frac{n\ \pi}{T}(t-t_i)+\frac{p_0}{2}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l\ \pi}{T}x_l(u)\cos\frac{l\ \pi}{T}(t-t_i)\right]\right.\\ &-\frac{1}{2M}\left[\sum_{n=1}^{\infty}p_n(u)\cos\frac{n\ \pi}{T}(t-t_i)+\frac{p_0}{2}\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty}p_l(u)\cos\frac{l\ \pi}{T}(t-t_i)+\frac{p_0}{2}\right]\\ &\left.-\frac{M\omega^2}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n(u)\sin\frac{n\ \pi}{T}(t-t_i)\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty}x_l\sin\frac{l\pi}{T}\left(t-t_i\right)\right)\right\}dt.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Avec

$$\int_{t_i}^{t_f}dt\ \cos\frac{n\pi}{T}\left(t-t_i\right)\cos\frac{l\pi}{T}\left(t-t_i\right)=\frac{T}{2}\delta_{n,l} \tag{3.41}$$

$$\int_{t_i}^{t_f}dt\ \cos\frac{n\pi}{T}\left(t-t_i\right)=T\delta_{n,0} \tag{3.42}$$

$$\int_{t_i}^{t_f}dt\ \sin\frac{n\pi}{T}\left(t-t_i\right)\sin\frac{l\pi}{T}\left(t-t_i\right)=\frac{T}{2}\delta_{n,l} \tag{3.43}$$

l'action S_Q prend la forme

$$S_Q=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\ \pi}{T}x_n\left(u\right)p_n\ \ (u)-\frac{p_n^2\left(u\right)}{2M}-\frac{M\omega^2}{2}x_n^2\right)\frac{T}{2}-\frac{T}{8M}p_0^2 \tag{3.44}$$

et les équations de Langevin (3.35) relatives aux composantes des impulsions et positions sont alors

$$\begin{cases} \dfrac{dx_n}{du} = i\left(\dfrac{n\ \pi}{T}p_n - M\omega^2 x_n\right)\dfrac{T}{2} + \eta_n \\ \\ \dfrac{dp_n}{du} = i\ \left(\dfrac{n\ \pi}{T}x_n - \dfrac{p_n}{M}\right)\dfrac{T}{2} + \xi_n \\ \\ \dfrac{dp_0}{du} = -i\ \dfrac{T}{4M}p_0 + \eta_0 \end{cases} . \tag{3.45}$$

on a

$$H_Q = \frac{P_Q^2}{2M} + \frac{P_Q P_{cl}}{M} + \frac{1}{2}M\omega^2 x_Q^2 + M\omega^2 x_{cl} x_Q \tag{3.46}$$

sa valeur moyenne est

$$\langle H_Q \rangle = \frac{\langle P_Q^2 \rangle}{2M} + \frac{P_{cl}}{M}\langle P_Q \rangle + \frac{1}{2}M\omega^2 \langle x_Q^2 \rangle + M\omega^2 x_{cl}\langle x_Q \rangle \tag{3.47}$$

Utitisons les relations de transformations de Fourier (3.38)dans la dernière expréssion, il vient

$$\begin{aligned} \langle H_Q \rangle \ = \ & \frac{1}{2M}\sum_{n,l=1}^{\infty}\langle p_n p_l \rangle \cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\cos\frac{l\pi}{T}(t-t_i) \\ & + \frac{1}{2M}\sum_{n=1}^{\infty}\langle p_n p_0 \rangle \cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i) + \frac{\langle p_0 \rangle^2}{8M} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\langle p_n \rangle \frac{P_{cl}}{M}\cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i) + \langle p_0 \rangle \frac{P_{cl}}{2M} \\ & + \frac{1}{2}M\omega^2 \sum_{n,l=1}^{\infty}\langle x_n x_l \rangle \sin\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\sin\frac{l\pi}{T}(t-t_i) \\ & + M\omega^2 x_{cl}\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin\frac{n\pi}{T}(t-t_i) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Apartir de (3.45) Il est facile de s'assurer que dans les produits $\left\langle p_n(u)\dfrac{dp_0(u)}{du}\right\rangle$ et $\left\langle p_0(u)\dfrac{dp_0(u)}{du}\right\rangle$ à la limite $u \to \infty$, nous obtenons

$$\left\langle p_n(u)\frac{dp_0(u)}{du}\right\rangle = -i\ \frac{T}{4M}\langle p_n(u)p_0 \rangle + \langle p_n(u)\eta_0 \rangle$$

le premier terme est nul à la limite $u \to \infty$, ainsi que le 3ème terme (propriété standard du bruit blanc $\langle p_m(u)\xi_n \rangle = 0$) donc

$$\langle p_n p_0 \rangle = 0 \tag{3.49}$$

et

$$\left\langle p_0^2 \right\rangle = -i\frac{4M}{T} \tag{3.50}$$

de même pour les deux produits $\left\langle p_m(u)\frac{dx_n(u)}{du} \right\rangle$ et $\left\langle p_m(u)\frac{dp_n(u)}{du} \right\rangle$ à la limite $u \to \infty$, nous obtenons

$$\langle p_m p_n \rangle = \frac{2iM}{T}\frac{\delta_{nm}}{\left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2 - 1} \tag{3.51}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\langle H_Q \rangle &= \frac{\langle p_0 \rangle^2}{8M} + \frac{1}{2M}\sum_{n,l=1}^{\infty} \langle p_n p_l \rangle \cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\cos\frac{l\pi}{T}(t-t_i) \\
&= \frac{-i}{2T} + \sum_{n,l=1}^{\infty} \frac{i}{T\left(\frac{n\pi}{\omega T}\right)^2 - 1}\cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\cos\frac{l\pi}{T}(t-t_i) && (3.52) \\
& && (3.53) \\
&= \frac{1}{2iT} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{\frac{\pi^2}{\omega^2 T}\left(n^2 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2}\right)}\cos\frac{n\pi}{T}(t-t_i)\cos\frac{l\pi}{T}(t-t_i) && (3.54)
\end{aligned}$$

Ainsi à l'équilibre thermique, la valeur moyenne de l'Hamiltonien est

$$\lim_{u\to\infty}\lim_{t_1,t_2\to t_i}\langle H_Q(t_i,u)\rangle = \frac{1}{2iT} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{\frac{\pi^2}{\omega^2 T}\left(n^2 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2}\right)}\cos\frac{n\pi}{T}(t_1-t_i)\cos\frac{n\pi}{T}(t_2-t_i)$$

qui se reécrit à l'aide de [10]

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty}\lim_{t_1,t_2\to t_i}\langle H_Q\left(t_i,u\right)\rangle &= \frac{1}{2iT}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i\omega^2T}{2\pi^2}\left(\frac{\cos\frac{n\pi}{T}\left(t_1+t_2-2t_i\right)}{\left(n^2-\frac{\omega^2T^2}{\pi^2}\right)}+\frac{\cos\frac{n\pi}{T}\left(t_1+t_2\right)}{\left(n^2-\frac{\omega^2T^2}{\pi^2}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{2iT}+\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{i\pi^2}{2T}-\frac{i\omega\cos\left(\omega T\right)\pi^2}{2\sin\left(\omega T\right)}\right)\\
&= -\frac{i\omega}{2}\cot\left(\omega T\right)
\end{aligned}$$

Le propagateur dans ce cas est

$$\begin{aligned}
\langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i\rangle &= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\int_0^{t_i}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(t_i,u)\rangle\,dt_i\right]\\
&= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\int^{t_i}\frac{\omega}{2}\frac{\cos\omega\left(t_f-t_i\right)}{\sin\omega\left(t_f-t_i\right)}dt_i\\
&= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\sin\omega\left(t_f-t_i\right)}}\right]\\
&= \frac{c}{\sqrt{\sin\omega T}}\exp\left[iS_{cl}\right] \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

Donc l'expression du propagateur est la suivante

$$\begin{aligned}
\langle x_f,s_f\ \mid\ x_i,s_i\rangle &= c\frac{1}{\sqrt{\sin\omega T}}\exp iS_{cl}\\
&= c\frac{1}{\sqrt{\sin\omega\ T}}\exp\frac{iM\omega}{2\sin\omega T}\left[\left(x_f^2+x_i^2\right)\cos\omega T-2x_ix_f\right] \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

Fixons la constante c. Comme elle est indépendante de t_i et t_f.

A la limite $T\longrightarrow 0$

$$\lim_{T\to 0}\langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i\rangle=\delta\left(x_f-x_i\right) \qquad (3.57)$$

Par intégration sur x_f sur la gaussienne et de la fonction δ, nous pouvons voir que

$$\int \lim_{T\to 0} \langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i\rangle\, dx_f = \int \delta\left(x_f - x_i\right) dx_f = 1$$

utilisons aussi la règle connue

$$\int dx \exp\left(-ax^2 + bx\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right). \tag{3.58}$$

nous obtenons

$$c = \sqrt{\frac{M\omega \sin\omega T \cos\omega T}{2i\ \sin\omega T\ \pi}} = \sqrt{\frac{M\omega \cos\omega T}{2i\ \pi}}. \tag{3.59}$$

A la limite $T \longrightarrow 0$

$$c = \sqrt{\frac{M\ \omega}{2\pi i}} \tag{3.60}$$

Par conséquant, l'expression du propagateur de l'oscillateur hamonique est :

$$\langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i\rangle = \sqrt{\frac{M\omega}{2\pi i \sin\omega T}} \exp\left\{\frac{iM\omega}{2\sin\omega T}\left[\left(x_f^2 + x_i^2\right)\cos\omega T - 2x_i x_f\right]\right\} \tag{3.61}$$

Déterminons encore le propagateur en considérant cette fois ci l'espace des configurations.

3.2 Formulation dans l'espace de Configuration

3.2.1 Procédure générale

Il est plus avantageux de calculer le propagateur dans l'espace de configuration et donc d'utiliser le formalisme lagrangien au lieu du formalisme hamiltonien qui nécessite deux variables stochastiques (x_Q, p_Q) au lieu d'une seule qui est x_Q .

Effectuons le passage de l'espace des phases à l'espace des configurations.

Notons d'abord qu'en terme de moyenne, nous avons en général

$$\langle H_Q(t_i, u)\rangle = \left\langle p_Q(t_i, u)\frac{\partial x_Q(t_i, u)}{\partial t}\right\rangle - \langle L_Q(t_i, u)\rangle\,, \tag{3.62}$$

avec

$$\langle L_Q(t_i,u)\rangle = \frac{M}{2}\left\langle \frac{\partial x_Q^2}{\partial t}(t_i,u)\right\rangle = \frac{M}{2}\lim_{t_1,t_2\longrightarrow t_i}\partial_{t_1}\partial_{t_2}\left\langle x_Q(t_1,u)x_Q(t_2,u)\right\rangle . \tag{3.63}$$

et la moyenne de $H_Q(t_i,u)$ est égale dans ce cas

$$\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(t_i,s)\rangle = \lim_{u\longrightarrow\infty}\left\langle p_Q(t_i,u)\frac{\partial x_Q(t_i,u)}{\partial t}\right\rangle - \frac{M}{2}\lim_{t_1,t_2\longrightarrow t_i}\partial_{t_1}\partial_{t_2}\lim_{u\longrightarrow\infty}\left\langle x_Q(t_1,u)x_Q(t_2,u)\right\rangle \tag{3.64}$$

Pour notre particule (la particule libre), les deux variables stochastiques se calculent par les deux équations de Langevin qui les régissent

$$\frac{\partial p_Q(t,u)}{\partial u} = i\frac{\delta S_Q}{\delta p_Q(t,u)} + \eta_Q(t,u), \tag{3.65}$$

avec

$$S_Q = \int_{t_i}^{t_f} dt\left(p_Q\frac{\partial x_Q}{\partial t} - \frac{p_Q^2}{2M}\right) \tag{3.66}$$

Alors

$$\frac{\partial p_Q(t,u)}{\partial u} = i\left(\frac{\partial x_Q(t,u)}{\partial t} - \frac{p_Q}{M}\right) + \xi_Q(t,u), \tag{3.67}$$

Il est facile de s'assurer que dans le produit

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial x_Q(t',u)}{\partial t}\frac{\partial p_Q(t,u)}{\partial u}\right\rangle &= i\left\langle \frac{\partial x_Q(t',u)}{\partial t}\frac{\partial x_Q(t,u)}{\partial t}\right\rangle - \frac{i}{M}\left\langle \frac{\partial x_Q(t',u)}{\partial t}p_Q(t,u)\right\rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{\partial x_Q(t',u)}{\partial t}\xi_Q(t,u)\right\rangle ,\end{aligned} \tag{3.68}$$

et utilisons les propriétés des bruits (3.37), le 1èr et le 4ème terme sont nuls à la limite $u \longrightarrow \infty$ et que le 2ème terme est simplement égal à

$$\left\langle p_Q(t,u)\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial t}\right\rangle = M\left\langle \frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial t}\frac{\partial x_Q(t,u)}{\partial t}\right\rangle . \tag{3.69}$$

Autrement dit la substitution de p_Q par $\dfrac{\partial x_Q(t',u)}{\partial t}$ est permise uniquement à l'équilibre ($\lim\limits_{u\longrightarrow\infty}$).

Ainsi donc (3.64)

$$\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(t_i,u)\rangle \;=\; \frac{M}{2}\lim_{t_1,t_2\longrightarrow t_i}\partial_{t_1}\partial_{t_2}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(t_1,u)x_Q(t_2,u)\rangle\,, \tag{3.70}$$

et le propagateur dans ce cas est égale à [4]

$$\langle x_f,t_f\mid x_i,t_i\rangle \;=\; c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\frac{M}{2}\int_0^{t_i}\lim_{t_1,t_2\longrightarrow t_i}\partial_{t_1}\partial_{t_2}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(t_1,u)x_Q(t_2,u)\rangle\,dt_i\right]. \tag{3.71}$$

On a présenté dans l'espace des phases il est nécessaire d'abord de calculer S_{cl} et ensuite le facteur de fluctuation. Commençons par l'action classique qui est plus facile et qui a été déjà calculée précédament.

3.2.2 Calcul de l'action Classique S_{cl}

Considérons un système physique d'un oscillateur harmonique simple à une dimension donné par le lagrangien suivant

$$L=\frac{M}{2}\dot{x}^2-\frac{M\omega^2}{2}x^2 \tag{3.72}$$

et l'action classique est encore donnée par

$$S_{cl}=\int_{t_i}^{t_f}dt\left(\frac{M}{2}\dot{x}^2-\frac{M\omega^2}{2}x^2\right) \tag{3.73}$$

L'équation de la trajectoire se détermine à partir de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{x}_{cl}\left(t\right)+\omega^2x(t)=0$$

c'est équation différentielle des oscillations harmoniques.

Nous voyons que

- l'équation de la trajectoire

- ainsi que l'action classique

sont les mêmes que celles déjà trouvées précédament dans l'espace des phases. Par conséquent, il est inutile de refaire les calculs qui se trouvent dans le chapitre 2

L'action classique est la même.

$$S_{cl} = \frac{M\omega}{2\sin\omega T}\left[\left(x_f^2 + x_i^2\right)\cos\omega T - 2x_i x_f\right] \tag{3.74}$$

3.2.3 Calcul du terme de fluctuation $\left\langle H_{Q(t_i,u)}\right\rangle$

L'action relatif à l'oscillateur harmonique étant

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\frac{M}{2}\dot{x}^2 - \frac{M\omega^2}{2}x^2\right] \tag{3.75}$$

Comme précedament, séparons dans l'action les parties classiques et non classiques

$$\begin{aligned} S &= S_{cl} + S_Q \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\frac{M}{2}\left(\dot{x}_Q + \dot{x}_{cl}\right)^2 - \frac{M\omega^2}{2}\left(x_{cl} + x_Q\right)^2\right] \end{aligned} \tag{3.76}$$

où

$$S_{cl} = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\frac{M}{2}\dot{x}_{cl}^2 - \frac{M\omega^2}{2}x_{cl}^2\right] \tag{3.77}$$

Pour l'action non classique, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} S_Q &= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left(\frac{M}{2}\dot{x}_Q^2 - \frac{M\omega^2}{2}x_Q^2 + M\dot{x}_Q\dot{x}_{cl} - M\omega^2 x_{cl}x_Q\right) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left(\frac{M}{2}\dot{x}_Q^2 - \frac{M\omega^2}{2}x_Q^2\right) \end{aligned} \tag{3.78}$$

Effectuons encore la séparation des variables (t, u) au moyen de la décomposition de Fourier

$$x_Q(t,u) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(u) \sin \frac{n\pi}{T}(t-t_i) \tag{3.79}$$

Ainsi

$$\frac{\partial x_Q(t,u)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(u) \frac{n\pi}{T} \cos \frac{n\pi}{T}(t-t_i) \tag{3.80}$$

et

$$\begin{aligned} S_Q &= \int_{t_i}^{t_f} dt \ \frac{M}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} x_n(u) \frac{n\pi}{T} \cos \frac{n\pi}{T}(t-t_i) \right] \left[\sum_{l=1}^{\infty} x_l(u) \frac{l\pi}{T} \cos \frac{l\pi}{T}(t-t_i) \right] \\ &- \frac{M\omega^2}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n(u) \sin \frac{n\pi}{T}(t-t_i) \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_l(u) \sin \frac{l\pi}{T}(t-t_i) \right) \end{aligned} \tag{3.81}$$

Avec le résultat de l'intégration suivant

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \ \cos \frac{n\pi}{T}(t-t_i) \cos \frac{l\pi}{T}(t-t_i) = \frac{T}{2}\delta_{n,l} \tag{3.82}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \ \cos \frac{n\pi}{T}(t-t_i) = T\delta_{n,0} \tag{3.83}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \ \sin \frac{n\pi}{T}(t-t_i) \sin \frac{l\pi}{T}(t-t_i) = \frac{T}{2}\delta_{n,l} \tag{3.84}$$

Ainsi l'action non classique prends la forme suivante

$$S_Q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M \ \pi^2}{4T} \left[n^2 - \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)^2 \right] x_n^2(u) \tag{3.85}$$

L'équation de Langevin qui régit le mouvement est la suivante

$$\frac{d}{du} x_n = i \ \frac{M \ \pi^2}{2T} \left[n^2 - \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)^2 \right] x_n(u) + \eta_n \tag{3.86}$$

Il est facile de s'assurer que dans le produit $\left\langle x_m(u) \frac{dx_n(u)}{du} \right\rangle$

$$\left\langle x_m(u) \frac{dx_n(u)}{du} \right\rangle = i \frac{M \ \pi^2}{2T} \left[n^2 - \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)^2 \right] \langle x_m x_n \rangle + \langle x_m(u) \eta_n \rangle \tag{3.87}$$

A la limite $u \to \infty$ le premier terme est nul et comme $\langle x_m(u)\eta_n\rangle = \delta_{mn}$ (propriété standard du bruit blanc)

donc

$$\langle x_n x_m\rangle = i\frac{2T}{M\ \pi^2}\frac{\delta_{nm}}{n^2-\left(\frac{T\omega}{\pi}\right)^2} \tag{3.88}$$

par conséquent le propagateur dans l'espace de cofiguration

$$\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i\rangle = c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\int^{t_i}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(t_i,u)\rangle\, dt_i\right]$$

avec

$$\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(t_i,u)\rangle = \frac{1}{2}\lim_{t_1,t_2\longrightarrow t_i}\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_2}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(t_1,u)x_Q(t_2,u)\rangle\,, \tag{3.89}$$

Nous sommes alors en position de calculer la fonction de corrélation à deux points

$$\begin{aligned}
\langle x_Q\left(t_1,u\right)x_Q\left(t_2,u\right)\rangle &= \left\langle\sum_{n=1}^{\infty}x_n\sin\frac{n\pi}{T}\left(t_1-t_i\right)\sum_{l=1}^{\infty}x_l\sin\frac{l\pi}{T}\left(t_2-t_i\right)\right\rangle\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}i\frac{2T}{M\ \pi^2}\frac{1}{n^2-\left(\frac{T\omega}{\pi}\right)^2}\sin\frac{n\pi}{T}\left(t_1-t_i\right)\sin\frac{n\pi}{T}\left(t_2-t_i\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{\frac{M\ \pi^2}{2T}\left(n^2-\frac{\omega^2T^2}{\pi^2}\right)}\sin\frac{n\pi}{T}\left(t_1-t_i\right)\sin\frac{n\pi}{T}\left(t_2-t_i\right)
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Transformons $\left[\sin\frac{n\pi}{T}(t_1-t_i)\sin\frac{n\pi}{T}(t_2-t_i)\right]$ en $\frac{1}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{T}(t_1-t_2)-\cos\frac{n\pi}{T}(t_1+t_2-2t_i)\right]$

Nous obtenons le résultat simple pour le produit de corrélation

$$\begin{aligned}
\langle x_Q\left(t_1,u\right)x_Q\left(t_2,u\right)\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{\frac{M\ \pi^2}{T}\left(n^2-\frac{\omega^2T^2}{\pi^2}\right)}\left(\cos\frac{n\pi}{T}\left(t_1-t_2\right)-\cos\frac{n\pi}{T}\left(t_1+t_2-t_i\right)\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{iT}{M\ \pi^2}\left(\frac{\cos\frac{n\pi}{T}\left(t_1-t_2\right)}{\left(n^2-\frac{\omega^2T^2}{\pi^2}\right)}-\frac{\cos\frac{n\pi}{T}\left(t_1+t_2-t_i\right)}{\left(n^2-\frac{\omega^2T^2}{\pi^2}\right)}\right)
\end{aligned}$$

A l'aide de la table [10] et à la limite $u \to \infty$, nous obtenons

$$\lim_{u\to\infty} \langle x_Q\,(t_{1,}u)\, x_Q\,(t_{2,}u)\rangle = \frac{i}{M\omega \sin\omega T}\left[\sin\omega\,(t_f - t_1)\sin\omega\,(t_2 - t_i)\right] \tag{3.91}$$

En dérivant deux fois par rapport a $t_1$et t_2 et à l'équilibre

$$\langle H_Q(t_i, u)\rangle = \frac{M}{2}\lim_{t_1,t_2\longrightarrow t_i} \partial_{t_1}\partial_{t_2} \lim_{u\longrightarrow\infty} \langle x_Q(t_1, u) x_Q(t_2, u)\rangle. \tag{3.92}$$

$$\lim_{u\to\infty} \langle H_Q\,(t_i, u)\rangle = \frac{-i\ \omega}{2}\cot\omega T \tag{3.93}$$

et pour le propagateur nous obtenons l'expression suivante

$$\begin{aligned}
\langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i\rangle &= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\int_0^{t_i} \lim_{u\longrightarrow\infty} \langle H_Q(t_i, u)\rangle\, dt_i\right] \\
&= c\exp iS_{cl}\exp i\int^{t_i} \frac{-i\ \omega}{2}\cot\omega\,(t_f - t_i)\, dt_i \\
&= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\int^{t_i} \frac{\omega}{2}\frac{\cos\omega\,(t_f - t_i)}{\sin\omega\,(t_f - t_i)} dt_i \\
&= = c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\frac{1}{2}\int^{t_i} \frac{d\sin\omega\,(t_f - t_i)}{\sin\omega\,(t_f - t_i)} dt_i \\
&= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\sin\omega\,(t_f - t_i)}}\right] \\
&= \frac{c}{\sqrt{\sin\omega T}}\exp\left[iS_{cl}\right]
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Appliquons la condition

$$\lim_{T\to 0} \langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i\rangle = \delta\,(x_f - x_i) \tag{3.95}$$

Par intégration sur x_f sur la gaussienne et de la fonction δ, nous pouvons voir que

$$\int \lim_{T\to 0} \langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i\rangle\, dx_f = \int \delta\,(x_f - x_i)\, dx_f = 1$$

nous déterminons la constante c à la limite $T \longrightarrow 0$

$$c = \sqrt{\frac{M\ \omega}{2\pi i}} \tag{3.96}$$

Après avoir remplacé l'expression de l'action classique et la valeur de la constante c, nous obtenons pour le propagateur (3.94) le résultat suivant

$$\langle x_f\ t_f \mid x_i\ t_i \rangle = \sqrt{\frac{M\omega}{2i\pi \sin \omega T}} \exp\left[i \frac{M\omega}{2 \sin \omega T} \left[\left(x_f^2 + x_i^2 \right) \cos \omega \left(t_f - t_i \right) - 2 x_i x_f \right] \right]$$

Par conséquent notre propagateur est le même que celui déterminé dans l'espace des phases.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons calculé le propagateur relatif au potentiel de l'oscillateur harmonique en utilisant le formalisme stochastique de Parisi-Wu dans l'espace des phases puis dans l'espace de cofiguration. Pour cela nous avons procédé

- au calcul de l'action classique en utilisant le chemin classique
- et ensuite au facteur de fluctuation relatif au l'oscillateur harmonique.

Dans l'espace de configuration, en utilisant une seule équation de Langevin, la determination du facteur a été plus simple que dans l'espace des phases.

Le resultat obtenu est identique a celui de H. Hüffel et H. Nakazato [4].

Notre but dans le chapitre suivant est d'ajouter à la liste des propagateurs calculables suivant cette approche (MQS) le propagateur relatif à une particule non relativiste soumise à une force harmonique dépendante du temps. Considérons la solution de ce problème dans l'espace des phases.

Chapitre 4

Propagateur de l'oscillateur harmonique dépendant du temps

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de calculer le propagateur d'un oscillateur harmonique dépendant du temps à une dimension $(1D)$par le formalisme de la MQS de Parisi et Wu [1]. En utilusant les transformations canoniques pour rendre le système indépendant du temp, nous résolvons l'équation de Langevin correspondante en appliquant la métode de séparation des variables, nous obtenons des solutions exactes.

Au chapitre deux, il a été montré que l'expression du propagateur à calculer

$$\langle x_f, t_f \mid x_i, t_i \rangle \quad = \quad c \exp\left[iS_{cl}\right] \exp\left[i \int_0^{t_i} \lim_{u \longrightarrow \infty} \langle H_Q(t_i, u) \rangle \, dt_i\right], \tag{4.1}$$

4.2 Calcul de l'action Classique S_{cl}

Considérons un système physique d'un oscillateur harmonique à fréquence variable à une dimension donné par l'Hamiltonien suivant

$$H_{cl}\left(t\right) = \frac{1}{2M} p^2 + \frac{1}{2} M \omega^2\left(t\right) x^2. \tag{4.2}$$

L'action de ce système peut s'écrire sous la forme

$$S = \int_{t_i}^{t_f} ds \left[p(t)\dot{x}(t) - \left(\frac{1}{2M} p^2 + \frac{1}{2} M\omega^2 (t)\, x^2 \right) \right], \tag{4.3}$$

Soit maintenant la trajectoire classique d'équation x_{cl}. Cette équation se détermine par les deux équations d'Hamilton, puisque nous somme dans l'espace des phases.

$$\begin{cases} \dot{p}_{cl} = -\dfrac{\partial H_{cl}}{\partial x} = -M\omega^2 (t)\, x (t)\,, \\ \\ \dot{x}_{cl} = +\dfrac{\partial H_{cl}}{\partial p} = \dfrac{p}{M}. \end{cases} . \tag{4.4}$$

En utilisant ces deux dernières équations d'Hamilton 4.4, on trouve l'équation différentielle qui donne la trajectoire classique

$$\ddot{x} + \omega^2 (t)\, x = 0, \tag{4.5}$$

On peut trouver cette dernière équation par l'équation d'Euler-Lagrnge dans l'espace de configuration

Pour résoudre l'équation (4.5) nous faisons le changement de variable suivant

$$x(t) = \rho Q(t) \tag{4.6}$$

où $\rho\,(t)$ est une fonction arbitraire sans dimensions, nous avons alors

$$\dot{x}(t) = \dot{\rho} Q(t) + \rho \dot{Q}(t) \tag{4.7}$$

et

$$\ddot{x}(t) = \ddot{\rho} Q(t) + 2\dot{\rho}\dot{Q}(t) + \rho \ddot{Q}(t) \tag{4.8}$$

on remplace 4.6 et 4.8 dans 4.5 et on trouve

$$\rho \ddot{Q} + 2\dot{\rho}\dot{Q} + \frac{\omega_0^2}{\rho^3} Q = 0, \tag{4.9}$$

avec

$$\ddot{\rho} + \omega^2 (t)\, \rho = \frac{\omega_0^2}{\rho^3} \tag{4.10}$$

Nous posons ensuite

$$dt = \rho^2 ds \tag{4.11}$$

Nous obtenons alors les résultats suivants

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\frac{dQ}{ds} = \frac{1}{\rho^2}Q', \quad \text{avec} \qquad Q' = \frac{dQ}{ds} \tag{4.12}$$

$$2\dot{Q}\dot{\rho} = 2\frac{dQ}{\rho^2 ds}\frac{d\rho}{\rho^2 ds} = 2\frac{1}{\rho^4}Q'\rho', \qquad \dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} \text{ et } \rho' = \frac{d\rho}{ds} = \rho^2\dot{\rho} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} \ddot{Q} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dt}\right) = \frac{d}{\rho^2 ds}\left(\frac{dQ}{\rho^2 ds}\right) = \frac{d}{\rho^2 ds}\left(\frac{1}{\rho^2}Q'\right) \\ &= \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{Q''\rho^2 - 2\rho\rho' Q'}{\rho^4}\right), \end{aligned} \tag{4.14}$$

reportons les résultats (4.12) , (4.13) et (4.14) dans (4.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho^5}\left(Q''\rho^2 - 2\rho\rho' Q'\right) + 2\frac{1}{\rho^4}Q'\rho' + \frac{\omega_0^2}{\rho^3}Q = 0, \\ \Rightarrow \quad &\frac{1}{\rho^3}Q'' - 2\frac{1}{\rho^4}\rho' Q' + 2\frac{1}{\rho^4}\rho' Q' + \frac{\omega_0^2}{\rho^3}Q = 0, \\ \Rightarrow \quad &\frac{1}{\rho^3}Q'' + \frac{\omega_0^2}{\rho^3}Q = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Finalement l'équation obtenue pour ces changements est

$$Q'' + \omega_0^2 Q = 0 \quad où \quad \ddot{\rho} + w^2\rho = \frac{\omega_0^2}{\rho^3}. \tag{4.16}$$

la solution de cette dernière équation est donnée par

$$Q(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t \tag{4.17}$$

Nous voyons que, après le changement des variables, l'équation de la trajectoire de l'oscillateur harmonique à fréquence variable à une dimension est la même que celle déjà trouvée au chapitre précédent.

Ayant déterminé complètement la trajectoire classique, calculons l'action qui lui est relative

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_i}^{t_f} dt\,(p\dot{x} - H) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt L \end{aligned}$$

$$S_{cl} = \frac{1}{2}M\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\dot{x}^2 - \omega^2(t)\,x^2\right]$$

Pour résoudre cette équation nou faisons le changement de variable suivant

$$x(t) = \rho Q(t) \tag{4.18}$$

Dans ce cas nous obtenons

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \frac{1}{2}M\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\left(\dot{Q}\rho + Q\dot{\rho}\right)^2 - \omega^2(t)\,Q^2\rho^2\right] \\ &= \frac{1}{2}M\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\dot{Q}^2\rho^2 + Q^2\dot{\rho}^2 + 2Q\dot{Q}\rho\dot{\rho} - \omega^2(t)\,Q^2\rho^2\right] \end{aligned} \tag{4.19}$$

En utilisant l'intégration par partie pour le terme $\frac{1}{2}M\int_{t_i}^{t_f} dt\left(2Q\dot{Q}\rho\dot{\rho}\right)$, il vient

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \frac{1}{2}M\,Q^2\rho\dot{\rho}\Big|_i^f + \frac{1}{2}M\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\dot{Q}^2\rho^2 + Q^2\left(\dot{\rho}^2 - \omega^2(t)\,\rho^2 - \dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}M\,Q^2\rho\dot{\rho}\Big|_i^f + \frac{1}{2}M\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\dot{Q}^2\rho^2 - Q^2\left(\omega^2(t)\,\rho^2 + \rho\ddot{\rho}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}M\,Q^2\rho\dot{\rho}\Big|_i^f + \frac{1}{2}M\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\dot{Q}^2\rho^2 - Q^2\frac{\omega_0^2}{\rho^2}\right], \end{aligned}$$

où $\ddot{\rho} + w^2(t)\,\rho = \frac{\omega_0^2}{\rho^3}$, Nous posons ensuite

$$dt = \rho^2 ds$$

Nous obtenons alors pour l'action classique le résultat suivant :

$$S_{cl} = \frac{1}{2}M\left[\frac{\rho_f'}{\rho_f}Q_f^2 - \frac{\rho_i'}{\rho_i}Q_i^2\right] + \frac{1}{2}M\int_{s_i}^{s_f} ds\rho^2\left[\left(\frac{dQ}{\rho^2 ds}\right)^2\rho^2 - Q^2\frac{\omega_0^2}{\rho^2}\right], \tag{4.20}$$

finalement et après quelques simplifications nous obtenons pour l'action classique l'expression suivante :

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \frac{1}{2}M\left[\frac{\rho'_f}{\rho_f}Q_f^2 - \frac{\rho'_i}{\rho_i}Q_i^2\right] + \frac{1}{2}M\int_{s_i}^{s_f} ds\left[Q'^2 - \omega_0^2 Q^2\right] \\ &= \frac{1}{2}M\left[\frac{\rho'_f}{\rho_f}Q_f^2 - \frac{\rho'_i}{\rho_i}Q_i^2\right] + \frac{M\omega_0}{2\sin\omega_0\left(s_f - s_i\right)}\left[\left(Q_f^2 + Q_i^2\right)\cos\omega_0\left(s_f - s_i\right) - 2Q_iQ_f\right] \end{aligned} \tag{4.21}$$

4.3 Calcul du terme de fluctuation $\langle H_{Q(t_i,u)} \rangle$

L'action de l'oscillateur harmonique à fréquence variable étant

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\frac{M}{2}\dot{x}\left(t\right)^2 - \frac{M}{2}\omega^2\left(t\right)x^2\left(t\right)\right] \tag{4.22}$$

Comme précedament, séparons dans l'action les parties classiques et non classiques

$$\begin{aligned} S &= S_{cl} + S_Q \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\frac{M}{2}\left(\dot{x}_Q + \dot{x}_{cl}\right)^2 - \frac{M\omega^2}{2}\left(x_{cl} + x_Q\right)^2\right] \end{aligned} \tag{4.23}$$

où

$$S_{cl} = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left[\frac{M}{2}\dot{x}_{cl}^2 - \frac{M}{2}\omega\left(t\right)^2 x_{cl}^2\right] \tag{4.24}$$

Pour l'action non classique $S_Q = S - S_{cl}$, nous obtenons alors

$$S_Q = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left(\frac{M}{2}\dot{x}_Q^2 - \frac{M\omega^2}{2}x_Q^2 + M\dot{x}_Q\dot{x}_{cl} - M\omega^2\left(t\right)x_{cl}x_Q\right) \tag{4.25}$$

par une integration par partie et l'utilisation de l'équation de mouvement, nous obtenons

$$S_Q = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left(\frac{M}{2}\dot{x}_Q^2 - \frac{M}{2}\omega^2\left(t\right)x_Q^2\right)$$

Pour résoudre cette équation nous faisons le changement de variable suivant

$$\begin{cases} x_Q(t) = \rho Q(t) \\ \\ dt = \rho^2 ds \end{cases} . \tag{4.26}$$

Effectuons encore la séparation des variables (s, u) au moyen de la décomposition de Fourier

$$Q(s,u) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \frac{n\pi}{(s_f - s_i)} (s - s_i) \tag{4.27}$$

Ainsi

$$\frac{\partial Q(s,u)}{\partial s} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \frac{n\pi}{(s_f - s_i)} \cos \frac{n\pi}{(s_f - s_i)} (s - s_i) \tag{4.28}$$

Par conséquant, l'expression du propagateur de l'oscillateur hamonique à fréquence variable à une dimension est :

$$\begin{aligned} \langle x_f \; t_f \mid x_i \; t_i \rangle &= \sqrt{\frac{M\omega_0}{2\pi i \rho_f \rho_i \sin \omega_0 (s_f - s_i)}} \exp \left[\frac{iM}{2} \left(\frac{\rho'_f}{\rho_f} Q_f^2 - \frac{\rho'_i}{\rho_i} Q_i^2 \right) \right] \\ &\times \exp \frac{iM\omega_0}{2 \sin \omega_0 (s_f - s_i)} \left[\left(Q_f^2 + Q_i^2 \right) \cos \omega_0 (s_f - s_i) - 2 Q_i Q_f \right] \end{aligned} \tag{4.29}$$

avec

$$\rho' = \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho}{dt} \rho^2 = \rho^2 \dot{\rho}, \quad Q_i = \frac{x_i}{\rho_i} \quad \text{et} \quad Q_f = \frac{x_f}{\rho_f} \tag{4.30}$$

Cette expression a la même forme exacte que celle obtenue par l'approche path integral [3]

Chapitre 5

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons présenté les outils fondamentaux du formalisme de la mécanique quantique stochastique de Parisi et Wu, l'amplitude de transition relative à l'oscillateur harmonique simple à une dimension ($1D$) a été déterminée suivant cette approche et ceci dans l'espace des phases et de configurations.

Dans l'espace des phases, l'action classique pour une particule non relativiste soumise à une force harmonique a été d'abord extraite et le facteur de fluctuation a été ensuite déterminé exactement en résolvant les équations de Langevin pour x_Q et p_Q.

En suivant la même démarche précédente, le propagateur relatif à l'oscillateur harmonique a été recalculé pour la 2ème fois dans l'espace des configurations. L'action classique une fois extraite, le facteur de fluctuation a été encore retrouvé grâce aux propriétés du bruit blanc qui ont permis de limiter le nombre de termes et à l'espace de configuration, nous avons utilisé une seule équation de Langevin au lieu de deux pour l'espace des phases.

Nous avons aussi traité le problème de l'oscillateur harmonique à une dimension ($1D$) dépendant du temps. Les résultats obtenus par cette nouvelle approche sont identiques à ceux obtenus par différentes approches [3]

La conclusion essentielle est que même pour les systèmes dépendants du temps nous pouvons appliquer la méthode de quantification stochastique de Parisi-Wu.

Annexe A

La moyenne de deux bruits blancs

Rappelons que la moyenne d'une grandeur $F(x(t))$ est la suivante :

$$\langle F(x(t))\rangle = \int \mathcal{D}\eta F(x(t)) \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 dt\right], \tag{A.1}$$

où

$$\mathcal{D}\eta = \prod_{i=1}^{N} d\eta(t_i). \tag{A.2}$$

Avec cette définition montrons que $\langle \eta(t)\rangle = 0$ et $\langle \eta(\tau)\eta(\omega)\rangle = \Omega\delta(\tau-\omega)$.

$$\tag{A.3}$$

En effet, utilisons la procédure de la source $j(t)$ en revenant à la définition de la moyenne

$$\left\langle \exp\left[\int j(t)\eta(t)dt\right]\right\rangle = \int \mathcal{D}\eta \exp\left[\int j(t)\eta(t)dt\right] \exp\left[\frac{-1}{2\Omega}\int \eta^2 dt\right]. \tag{A.4}$$

Notons que

$$-\frac{1}{2\Omega}\eta^2 + j\eta = -\frac{1}{2\Omega}\left(\eta - \Omega j\right)^2 + \frac{\Omega}{2}j^2, \tag{A.5}$$

et effectuons le changement $\eta' \longrightarrow \eta$ défini par

$$\eta' = \eta - \Omega j. \tag{A.6}$$

Comme la mesure $\mathcal{D}\eta$ reste inchangée

$$\mathcal{D}\eta' = \mathcal{D}\eta, \tag{A.7}$$

la moyenne se calcule $(A.4)$

$$\left\langle \exp\left[\int j(t)\eta(t)dt\right]\right\rangle = \exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2(t)dt\right]\int \mathcal{D}\eta \exp\left[-\int \frac{1}{2\Omega}\eta^2 dt\right]$$

$$= \exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2(t)dt\right] \ . \tag{A.8}$$

Faisons agir l'opérateur $\dfrac{\delta}{\delta j(\tau)}$ sur la dernière équation

$$\left\langle \eta(\tau)\exp\left[\int j(t)\eta(t)dt\right]\right\rangle = \Omega j(\tau)\exp\left[\frac{\Omega}{2}\int j^2(t)dt\right]. \tag{A.9}$$

Fixons $j = 0$, nous avons

$$\langle \eta(\tau)\rangle = 0. \tag{A.10}$$

Faisons agir une 2ème fois l'opérateur $\dfrac{\delta}{\delta j(\omega)}$ sur l'égalité ci-dessus, et posons encore $j = 0$, nous aboutissons à

$$\langle \eta(\tau)\eta(\omega)\rangle = \Omega\delta(\tau - \omega). \tag{A.11}$$

Un bruit blanc est caractérisé par les deux propriétés(A.10), (A.11).

Bibliographie

[1] G.Parisi et Y.-S. Wu, Sci. Sin. 24 (1981), 483.

[2] Namiki M, *Stochastic Quantization* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1992).

[3] L. Chetouani, L. Guechi and Théophile F. Hammann, J. Phys. A 40 (1989).

[4] H. Hüffel et H. Nakazato, Mod. Phys. Lett. A9 (1994), 2953.

[5] K. Yuasa et H. Nakazato, lanl.arXiv.org :hep-th-9610209.

[6] C. Grosche and F. Steiner, *Handbook of Feynman Path Integrals,* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998).

[7] N. Chine and L. Chetouani, Czech. J. Phys. 56 (2006) 565 ; Turk. J. Phys. 31 (2007) 1.

[8] Nakazato H. and Yamanaka Y., Phys. Rev. D **34** (1986) 492.

[9] Nakazato H., Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 20.

[10] I.S.Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, NewYork, 1979.

Résumé

Dans ce travail, le propagateur a été déterminé suivant la mécanique quantique stochastique (MQS) pour deux cas :

On a étudié le cas d'un oscillateur harmonique simple, en utilisant deux formulations différentes :

-Dans l'espace des phases, l'action classique et le facteur de fluctuation ont été déterminées exactement en résolvant les équations de Langevin pour les impulsions et les positions. Enfin, le propagateur a été déterminé.

- De la même manière précédente, le propagateur relatif à l'oscillateur harmonique simple a été également calculé dans l'espace des configurations. Nous étudions aussi le cas d'oscillateur harmonique dépendant du temps en utilisant la méthode de quantification stochastique de Parisi-Wu. Où l'on a résolut les équations de Langevin,

Finalement, les résultats obtenus par la MQS pour les deux cas sont similaires à celle obtenues par d'autres approches.

الملخص:

في هذا العمل ، قمنا بحساب سعة الانتقال باستخدام الميكانيك الكمي العشوائى لباريزي-يو من أجل حالتين:

1. حالة الهزاز التوافقي البسيط، وذلك باستخدام صيغتين مختلفتين:

-في فضاء الأطوار، تم تحديد الفعل الكلاسيكي وعامل التقلب من خلال حل معادلات لانجفين، المتعلقة بالموضع والدفع .في الأخير نقوم بحساب سعة الانتقال.

-باستعمال نفس الطريقة السابقة،نقوم بحساب سعة الانتقال ولكن هذه المرة في فضاء الاحداثيات.

2. حالة الهزاز التوافقي المتعلقة بالزمن باستخدام الميكانيك الكمي العشوائي لباريزي-يو

النتائج المتحصل عليها بواسطة الميكانيك الكمي العشوائى لباريزي- يو هي نفسها المتحصل عليها بطرق أخرى.