REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA - JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N°d'ordre :
Série :

Mémoire

présenté pour obtenir le diplôme de master
Filière : physique

Spécialité : Physique Théorique

Présentée par

Hayet Benchikh

Intitulé

Oscillations de neutrinos dans l'espace-temps R-Minkowski

Soutenue le : 25 /09/2022

Devant le jury:

Président :	Kh. Nouicer	Prof. Univ. de Jijel
Rapporteur :	S. Haouat	Prof. Univ. de Jijel
Examinateurs:	T. Boudjedaa	Prof. Univ. de Jijel

Résumé :

Dans ce travail, nous avons étudié le phénomène des oscillations des neutrinos dans le cadre de la relativité doublement restreinte (DSR) basée sur les transformations non linéaires de Fock-Lorentz du groupe de Poincaré déformé dans l'espace R-Minkowski qui est similaire à l'espace de-Sitter. Nous avons résolu l'équation de Dirac correspondante dans les deux espaces de de-Sitter et R-Minkowski. Ensuite, nous avons calculé la probabilité de changer la saveur du neutrino. Les résultats montrent que la probabilité obtenue est la même dans les deux espaces.

Mots clés : Oscillations de neutrinos - DSR – Transformations de Fock-Lorentz – Espace de de-Sitter – Espace R-Minkowski - Equation de Dirac.

ملخص:

قمنا في هذه المذكرة بدراسة ظاهرة اهتزازات النوترينو في إطار النسبية الخاصة المزدوجة باستعمال تحويلات فوك-لورنتز الغير خطية المستخرجة بناء على زمرة بوانكاريه المشوهة في فضاء R-مينكوفسكي والذي توصلنا إلى أنه متوافق مع فضاء دي سيتر، ومن خلال هذا قمنا بدراسة هذه الإهتزازات في كل من فضاء دي سيتر، وفضاء R-منكوفسكي باستعمال معادلة ديراك ومن خلال حلول هذه المعادلة قمنا بحساب احتمال حدوث هذا الإهتزاز في كلا الفضائين ووجدنا أن النتيجتين متوافقتين .

الكلمات المفتاحية:

اهتزازات النيوترينو، النسبية الخاصة المزدوجة، تحويلات فوك-لورنتز، فضاء R- مينكوفسكي ، فضاء دي سيتر، معادلة ديراك .

Summary:

In this work, we have studied the phenomenon of neutrino oscillations in the framework of doubly special relativity using nonlinear Fock-Lorentz transformations of the deformed Poincaré group in R-Minkowski space which is similar to the de-Sitter space. We have solved the corresponding Dirac equation in both de-Sitter and R-Minkowski spaces. Then we have calculated the probability to change the neutrino flavor. The results show that the probability obtained is the same in the two spaces.

Keywords : Neutrino Oscillations - DSR - Fock-Lorentz Transformations - De-Sitter Space - R-Minkowski Space - Dirac Equation.

Remerciements

Avant tout je remercie Dieu de m'avoir soutenue à continuer le master après plusieurs essaies qui n'a jamais diminué ma détermination et ma volonté et de m'avoir donnée le courage pour continuer malgré tous ce que j'ai passée de difficultés entre travail et études.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur le professeur **Salah Haouat** pour ces précieux conseils ,son aide ,et sa disponibilité. je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Monsieur le professeur **Kh.Nouicer** qui m'a fait l'honneur d'avoir accepter de présider le jury.Mes remerciements sont également adressés Monsieur le professeur **T.Boudjedaa** pour avoir accepter d'examiner ce travail

Et bien sur je n'oublie pas d'adresse mes remerciements à mes parents. ma famille et mes amis et collègues de promo physique théorique 2022 .....

Hayet

Table des matières

1 Introduction générale **3**

2 La R-déformation de la relativité restreinte **8**

2.1 Introdution 9

2.2 Groupe de Lorentz et de Poincaré 9

2.2.1 Le groupe de Lorentz 9

2.2.2 Exemples de transformations de Lorentz 10

2.2.3 Le groupe de Poincaré 13

2.2.4 Opérateur de Casimir P^2 13

2.3 La R-déformation du groupe de Poincaré 14

2.4 La R-transformation des coordonnées 15

2.4.1 La R-transformation infinitésimale des coordonnées 15

2.4.2 La R-transformation finie des coordonnées (transformation de Fock-Lorentz) 16

2.5 Composition de deux transformations de coordonnées 21

2.6 Métrique de l'espace-temps R-Minkowski 24

2.7 La R-transformation des moments conjugués 25

2.7.1 La R-transformation infinitésimale des moments conjugués 25

2.7.2 La R-transformation finie des moments conjugués 25

2.8 Conclusion 28

3 Les oscillations de neutrinos dans l'espace-temps de de-Sitter **29**

3.1 Introduction 30

3.2 Equation de Dirac dans un espace courbe 30

3.3 Equation de Dirac dans l'espace de de-Sitter 32

3.3.1 Coordonnées cartésiennes 34

3.4 Solution de l'équation de Dirac en coordonnées sphériques 35
3.5 Oscillations de neutrinos 41
3.6 Conclusion 43

4 Les oscillations de neutrinos dans L'espace-temps R-Minkowski 44

4.1 Introduction 45
4.2 Equations relativistes dans l'espace-temps de Minkowski 45
4.3 Relation de dispersion dans l'espace-temps R-Minkowski 46
4.4 Equation de Klein-Gordon dans l'espace-temps R-Minkowski 47
4.5 Equation de Dirac dans l'espace-temps R-Minkowski 47
4.6 Solution de l'équation de Dirac dans l'espace-temps R-Minkowski 49
4.7 Oscillations de neutrinos dans l'espace-temps R-Minkowski 53
4.8 Conclusion 54

5 Conclusion générale 55

Chapitre 1

Introduction générale

En 1930, W. Pauli a postulé l'existence du neutrino afin d'expliquer la conservation de l'énergie dans la désintégration radioactive des noyaux, lorsque les neutrons se transforment en protons, avec l'émission d'électrons.

Cependant, ce n'était qu'un ajout théorique car une telle particule n'a pas été découverte à l'époque. Le neutrino postulé n'avait pas de charge électrique et, à toutes fins utiles, n'interagit pas avec la matière ; il sert tout simplement d'agent pour équilibrer l'énergie et le moment cinétique dans la désintégration radioactive. En fait, Pauli a souligné que pour que l'énergie soit conservée, la masse du neutrino doit être moins de 1% de la masse du proton, établissant ainsi la première limite de la masse du neutrino. Après plusieurs tentatives expérimentales, les physiciens F. Reines et C. Cowan, ont pu la découvrir en 1956. Plusieurs expériences sont réalisées avec une précision de plus en plus élevée, atteignant des limites supérieures pour la masse du neutrino électronique de 10^{-9} la masse du proton. Cela a soulevé la question de savoir si les neutrinos sont vraiment sans masse comme les photons.

En 1957, cependant, B. Pontecorvo s'est rendu compte que l'existence de masses de neutrinos implique la possibilité d'oscillations de neutrinos [1]. Le phénomène de l'oscillation des neutrinos se manifeste par le changement de saveur leptonique de la particule lors de sa propagation. Il existe trois saveurs de neutrino, soit la neutrino électronique ν_e, le neutrino muonique ν_μ et le neutrino tauique ν_τ. Dans ce cas, un neutrino créé avec une saveur peut après une certaine distance être détecté avec une saveur différente [2-11].

Les oscillations de saveur des neutrinos ont été recherchées en utilisant soit des faisceaux de neutrinos provenant de réacteurs ou d'accélérateurs, soit des neutrinos naturels générés à des sources astrophysiques (le Soleil donnant le flux le plus important) ou dans l'atmosphère (lors des collisions de rayons cosmiques).

D'autre part, avant la fin du XIXe siècle, on croyait que les trois lois du mouvement de Newton et les idées associées sur les propriétés de l'espace et du temps fournissaient une base sur laquelle la dynamique des particules pouvait être complètement comprise. Cependant, après la formulation de la théorie de l'électromagnétisme par Maxwell, il a été constaté que la propagation des ondes électromagnétiques n'est pas compatible avec certains aspects des idées newtoniennes sur l'espace et le temps. En fin de compte, une modification radicale de ces derniers concepts, et par conséquent des équations de Newton elles-mêmes, s'est avérée nécessaire. C'est Albert Einstein qui, en combinant des résultats expérimentaux et des arguments physiques, a d'abord formulé les nouveaux principes en fonction desquels l'espace, le temps, la matière et l'énergie devaient être compris. Ces principes et leurs conséquences constituent la Théorie de la Relativité Restreinte [12].

Bien entendu, les effets de la relativité restreinte ne deviennent apparents que lorsque les vitesses des particules deviennent comparables à la vitesse de la lumière dans le vide

$$c = 299792458 \ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

La théorie de la relativité restreinte qui remplace la mécanique Newtonienne repose sur deux postulats, à savoir le principe de relativité qui stipule que les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels et un autre principe qui stipule que la vitesse de la lumière est indépendante de la vitesse de sa source. Seule la combinaison des deux principes impose que les formules de transformation entre les coordonnées rectilignes orthogonales dans deux référentiels inertiels soient linéaires. Cependant, dès 1910 on savait que la constance de la vitesse de la lumière est une conséquence du principe de relativité et des propriétés d'homogénéité générale de la variété espace-temps dans le cas des transformations linéaires.

De nombreux auteurs ont ajouté des hypothèses différentes (mais équivalentes) dans le but d'obtenir la constance de la vitesse de la lumière comme conséquence de la relativité. Dans son ouvrage fondamental « Théorie de l'espace, du temps et de la gravitation » [12], Fock a montré que la constance de la vitesse de la lumière équivaut à la linéarité des transformations. Dans le même livre, il a été montré que seulement à partir du principe de relativité, on peut obtenir une forme plus générale de la transformation entre deux référentiels inertiels (transformation non linéaire de Fock-Lorentz). La forme implicite de cette transformation contient deux constantes (invariants) ; la constante c de dimension de vitesse (vitesse de la lumière), et une constante R de dimension de longueur (rayon de l'Univers visible) [13],[14], [15].

Du point de vue géométrique, le principe de la relativité avec l'uniformité de l'espace-temps signifie que [12] :

1. Tous les points de l'espace et les instants dans le temps sont équivalents .
2. Toutes les directions sont équivalentes et
3. Tous les systèmes inertiels, se déplaçant uniformément et en ligne droite les uns par rapport aux autres, sont équivalents.

Ce qui implique l'existence d'un groupe de transformations qui laissent invariant la distance ou l'intervalle à quatre dimensions entre deux points. Nous avons les transformation suivantes :

1. L'équivalence de tous les points et les instants correspond aux translations des coordonnées spatiales et du temps ; Ces transformations impliquent quatre paramètres.
2. L'équivalence de toutes les directions correspond aux rotation des axes de coordonnées spatiales ; Cela implique trois paramètres, les trois angles de rotations.
3. L'équivalence des référentiels inertiels, se déplaçant uniformément et en ligne droite les uns par rapport aux autres, correspond aux boosts de Lorentz avec trois paramètres, les trois composantes de la vitesse relative.

Ces transformations génèrent le groupe de Poincaré, dont la transformation la plus générale implique dix paramètres. Dans ce contexte, les transformations non linéaires de Fock peuvent être considérées comme une déformation du groupe de Poincaré avec un espace-temps R-Minkowskien.

Ce mémoire porte essentiellement sur l'étude des oscillations de Neutrinos dans le cadre de cette relativité déformée. Les oscillations de neutrinos sont l'une des premières preuves de la physique au-delà du modèle standard (SM). Étant donné que l'invariance de Lorentz est une symétrie fondamentale du SM, la physique des neutrinos pourrait très bien servir à vérifier l'éventuelle modification de cette symétrie et ses effets possibles. Dans ce travail, nous étudions les conséquences de l'introduction des transformations non linéaires de Fock dans la propagation des neutrinos de haute énergie.

Ce mémoire se compose cinq chapitres :

Dans le deuxième chapitre, nous considérons la déformation des crochets de Poisson associés au groupe de Poincaré pour établir les transformations de Fock-Lorentz qui décrit le passage d'un référentiel à un autre.

L'objectif du troisième chapitre est d'étudier les oscillations de neutrinos dans l'espace de de-Sitter décrivant un univers en expansion. Nous rappelons en premier lieu comment écrire l'équation de Dirac dans un espace courbe. Ensuite, nous cherchons les solutions de cette équation pour l'espace de de-Sitter. A partir de ces solutions nous calculons la probabilité de l'oscillation des neutrinos.

Dans le quatrième chapitre, nous nous proposons d'étudier les oscillations de neutrino dans un espace-temps R-Minkowskien. Nous commencerons par établir l'équation de Dirac qui décrit le mouvement d'un neutrino. Ensuite nous cherchons les solutions de cette équation pour calculer la probabilité du changement de la saveur du neutrino.

Le cinquième chapitre est une conclusion générale qui récapitule l'ensemble des résultats obtenus.

Chapitre 2

La R-déformation de la relativité restreinte

2.1 Introdution

Dans ce chapitre nous nous proposons de dériver les transformations non linéaires de Fock-Lorentz et d'étudier certaines propriétés de l'espace-temps correspendant. Nous suivons l'approche de la référence [13].

Apres avoir exposé un bref rappel sur le groupe de Lorentz et de Poincaré dans l'espace de Minkowski, nous inroduisons la R-déformation de l'algèbre de Poincaré. A partir de cette algèbre, nous établissons les transformations de Fock-Lorentz.

2.2 Groupe de Lorentz et de Poincaré

L'espace de Minkowski a les même propriétés topologiques de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ sauf que les propriétés métriques sont différentes. L'espace de Minkowski est muni d'un pseudo-scalaire

$$x.y = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^{3} x^i y^i \tag{2.1}$$

L'espace de Minkowski avec la métrique $\eta = \eta_{\mu\nu} = diag\,(1,-1,-1,-1)$ a comme groupe d'isométries le groupe de Poincaré qui a le sous-groupe de Lorentz.

2.2.1 Le groupe de Lorentz

Considérons l'ensemble des transformations de Lorentz (sont des transformations linéaire Λ de E, qui conserve η).Ainsi

$$\begin{aligned} \vee\, X \text{ et } Y \quad &\in \quad E \;\;/\;\; \eta\,(\Lambda.X, \Lambda.Y) = \eta\,(X,Y) \qquad (2.2)\\ &\Rightarrow \quad \Lambda^{\mu}_{\rho} X^{\rho} \eta_{\mu,\nu} \Lambda^{\nu}_{\sigma} Y^{\sigma} = X^{\rho} \eta_{\rho,\sigma} Y^{\sigma} \end{aligned}$$

Le groupe de Lorentz au SO(1,3) qui regroupe les rotations dans l'espace à trois dimensions plus les transformations de Lorentz, plus exactement il est l'ensemble des transformations qui laissent le produit scalaire de l'espace-temps invariant cette propriété peut s'exprimer mathématiquement comme

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta \tag{2.3}$$

Λ représente la matrice de la transformation qui agit sur les 4-vecteurs, et η la métrique du produit scalaire.

A partir de l'équation (2.3), nous pouvons montrer les propriétés suivantes

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \det \Lambda = 1 \\ \det \Lambda = -1 \end{cases} \tag{2.4}$$

et

$$\left(\Lambda^0_0\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(\Lambda^0_i\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\Lambda^0_0\right| \geq 1 \tag{2.5}$$

Pour $\det \Lambda = 1$ et $\Lambda_{00} \geq 1$, $\Lambda \in \mathcal{L}_0$ où $\mathcal{L}_0$ est le groupe propre de Lorentz.

2.2.2 Exemples de transformations de Lorentz

Les rotations

Les rotations autour des trois axes s'écrivent sous forme matricielle comme suis

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

avec les générateurs

$$J_x = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$J_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$J_z = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Les boosts de Lorentz

Par exemple, pour un boost le long de l'axe (OX) nous avons la loi de transformation

$$\begin{cases} ct = \gamma\left(ct' + \beta x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + \beta ct'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \tag{2.12}$$

où

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh u \quad \text{et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh u. \tag{2.13}$$

Ces transformations ont des représentations matricielles

$$L_x(u) = \begin{pmatrix} \cosh u & -\sinh u & 0 & 0 \\ -\sinh u & \cosh u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_y(u) = \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & -\sinh u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh u & 0 & \cosh u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$$L_z(u) = \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & 0 & -\sinh u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh u & 0 & 0 & \cosh u \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

avec les générateurs

$$K_x = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$K_z = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Nous avons alors l'algèbre

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k \tag{2.18}$$

$$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} K_k \tag{2.19}$$

$$[K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k \tag{2.20}$$

Où ε_{ijk} est le tenseur de Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \text{ pour des permutations doublées des indices} \\ -1 \text{ pour des permutations singles des indices} \\ 0 \text{ autre cas} \end{cases} \tag{2.21}$$

Le groupe de Lorentz à deux opérateurs de Casimir qui sont donné par

$$C_1 = J^2 - K^2 \qquad\qquad C_2 = 2J.K \tag{2.22}$$

2.2.3 Le groupe de Poincaré

Une transformation du groupe de Poincaré est une transformation affine de l'espace-temps qui s'écrit sous la forme

$$X \overset{(\Lambda\ ,\ \alpha)}{\rightarrow} X' = \Lambda.X + \alpha \tag{2.23}$$

où α est un quadri-vecteur.

Si P^μ sont les générateurs des translations et $J_{\mu\nu}$ sont les générateurs du groupe de Lorentz, avec

$$J^{\ ij} = -\varepsilon_{ijk} J^k \quad \Leftrightarrow \quad J^k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} J^{\ jk} \quad , \quad J^{0i} = K^i \tag{2.24}$$

nous avons la représentation

$$P_\mu = i\partial_\mu \quad , \quad J_{\mu\nu} = i\left(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu\right) \tag{2.25}$$

et les relations de commutation

$$\left[P^{\ \mu}, P^{\ \nu}\right] = 0 \tag{2.26}$$

$$i\left[J^{\ \mu\nu}, J^{\ \rho\sigma}\right] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} + \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} \tag{2.27}$$

$$i\left[P^{\ \mu},\ J^{\ \rho\sigma}\right] = \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho \tag{2.28}$$

2.2.4 Opérateur de Casimir P^2

Un opérateur Casimir est un invariant et correspond, donc à un opérateur qui doit commute avec tous les générateurs. Nous pouvons montrer que l'opérateur $P^2 = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu$ est un invariant

$$\left[P^2, P^\mu\right] = 0 \tag{2.29}$$

et

$$\left[P^2, J^{\mu\nu}\right] = -i\eta_{\rho\sigma}P^\rho\left(\eta^{\rho\mu}P^\nu - \eta^{\sigma\nu}P^\mu\right) - i\eta_{\rho\sigma}P^\sigma\left(\eta_{\rho\mu}P^\nu - \eta_{\rho\nu}P^\mu\right) = 0 \tag{2.30}$$

Dans la dernière équation nous avons utilisé la propriété

$$\eta_{\rho\sigma}P^\rho\left(\eta^{\rho\mu}P^\nu - \eta^{\sigma\nu}P^\mu\right) = P^\mu P^\nu - P^\nu P^\mu = 0. \tag{2.31}$$

2.3 La R-déformation du groupe de Poincaré

Pour obtenir la R-déformation du groupe de Poincaré nous considérons les crochets de Poisson suivants

$$\{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{R}\eta^{0\nu}x^\mu \tag{2.32}$$

$$\{x^\mu, x^\nu\} = 0 \tag{2.33}$$

et

$$\{p^\mu, p^\nu\} = -\frac{1}{R}\left(p^\mu\eta^{0\nu} - p^\nu\eta^{\mu 0}\right) \tag{2.34}$$

ou bien avec les indices covariants

$$\{x_\mu, x_\nu\} = 0 \tag{2.35}$$

$$\{x_\mu, p_\nu\} = -\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{R}\eta_{0\nu}x_\mu \tag{2.36}$$

et

$$\{p_\mu, p_\nu\} = -\frac{1}{R}\left(p_\mu\eta_{0\nu} - p_\nu\eta_{\mu 0}\right). \tag{2.37}$$

Notons ici que seule la composante p^0 apportent une déformation des crochets de Poisson. De plus, ces crochets de Poisson retrouve leur forme classique si le paramètre de déformation R tend vars l'infini.

D'abord nous calculons les crochets de poisson des coordonnées et des impulsions avec les composantes du moment cinétique $J_{\mu\nu}$ à l'aide du crochet de Poisson de deux fonction f et h

$$\{f, h\} = \{x_\mu, x_\nu\}\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\frac{\partial h}{\partial x_\nu} + \{x_\mu, p_\nu\}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\frac{\partial h}{\partial p_\nu} - \frac{\partial f}{\partial p_\nu}\frac{\partial h}{\partial x_\mu}\right) + \{p_\mu, p_\nu\}\frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial h}{\partial p_\nu} \tag{2.38}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\{J_{\mu\nu}, x_\rho\} &= \{x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, x_\rho\} = \{x_\mu p_\nu, x_\rho\} - \{x_\nu p_\mu, x_\rho\} && (2.39)\\
&= x_\mu \{p_\nu, x_\rho\} + \{x_\mu, x_\rho\} p_\nu - x_\nu \{p_\mu, x_\rho\} - \{x_\nu, x_\rho\} p_\mu\\
&= x_\mu \left(\eta_{\rho\nu} - \frac{1}{R}\eta_{0\nu} x_\rho\right) - x_\nu \left(-\eta_{\rho\mu} - \frac{1}{R}\eta_{0\mu} x_\rho\right)\\
&= \eta_{\rho\nu} x_\mu - \eta_{\rho\mu} x_\nu + \frac{1}{R}\left(\eta_{0\mu} x_\nu - \eta_{0\nu} x_\mu\right) x_\rho && (2.40)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\{J_{\mu\nu}, p_\rho\} &= \{x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, p_\rho\} = \{x_\mu p_\nu, p_\rho\} - \{x_\nu p_\mu, p_\rho\}\\
&= x_\mu \{p_\nu, p_\rho\} + \{x_\mu, p_\rho\} p_\nu - x_\nu \{p_\mu, p_\rho\} - \{x_\nu, p_\rho\} p_\mu\\
&= \eta_{\nu\rho} p_\mu - \eta_{\mu\rho} p_\nu + \frac{1}{R}\left(\eta_{\nu 0} x_\mu - \eta_{\mu 0} x_\nu\right) p_\rho. && (2.41)
\end{aligned}$$

Ici, nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned}
\{J_{\mu\nu}, x_\rho p_\gamma\} &= \{J_{\mu\nu}, x_\rho\} p_\gamma + x_\rho \{J_{\mu\nu}, p_\rho\}\\
&= \eta_{\rho\nu} x_\mu p_\gamma - \eta_{\rho\mu} x_\nu p_\gamma + \eta_{\nu\gamma} x_\rho p_\mu - \eta_{\mu\gamma} x_\rho p_\nu && (2.42)
\end{aligned}$$

ce qui nous donne le crochet de Poisson des deux générateurs

$$\begin{aligned}
\{J_{\mu\nu}, J_{\rho\gamma}\} &= \{J_{\mu\nu}, x_\rho p_\gamma\} - \{J_{\mu\nu}, x_\gamma p_\rho\}\\
&= -\eta_{\mu\rho} J_{\nu\gamma} + \eta_{\nu\rho} J_{\mu\gamma} - \eta_{\nu\gamma} J_{\mu\rho} + \eta_{\mu\gamma} J_{\nu\rho}. && (2.43)
\end{aligned}$$

2.4 La R-transformation des coordonnées

Pour construire une R-transformation, nous devons en premier lieu établir une transformation infinitésimale à l'aide des crochets de Poisson R-déformé.

2.4.1 La R-transformation infinitésimale des coordonnées

Nous définissons la variation infinitésimale δf en fonction des crochets de poisson d'une fonction quelconque $f(x,p)$ avec les générateurs $J_{\mu\nu}$

$$\delta f = -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\{J_{\mu\nu}, f(x,p)\} = \left\{-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}, f(x,p)\right\} \quad (2.44)$$

où $\omega^{\mu\nu}$ sont les paramètre infinitésimaux du groupe R-Lorentz.

Nous posons $f(x,p) = x^{\gamma}$ pour obtenir la loi de transformation infinitésimale suivante

$$\delta x^{\gamma} = \left\{ -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}, x^{\gamma} \right\} = -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\eta^{\gamma\rho} \left\{ J_{\mu\nu}, x_{\rho} \right\} \tag{2.45}$$

A l'aide de l'équation (2.39) nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta x^{\gamma} &= -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\eta^{\gamma\rho} \left[\eta_{\rho\nu} x_{\mu} - \eta_{\rho\mu} x_{\nu} + \frac{1}{R} \left(\eta_{0\mu} x_{\nu} - \eta_{0\nu} x_{\mu} \right) x_{\rho} \right] \\ &= -\omega^{\mu\gamma} x_{\mu} + \frac{1}{R}\omega^{\mu 0} x_{\mu} x^{\gamma} \end{aligned} \tag{2.46}$$

Maintenant nous considérons le cas d'un boost de Lorentz suivant l'axe (ox) avec $\omega^{01} = -\omega^{10} = \delta u$. Pour $\gamma = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta t &= \delta x^{0} = -\omega^{\mu 0} x_{\mu} + \frac{1}{R}\omega^{\mu 0} x_{\mu} x^{0} = -\omega^{10} x_{1} + \frac{1}{R}\omega^{10} x_{1} x^{0} \\ &= \left(-x + \frac{1}{R} x t \right) \delta u \end{aligned} \tag{2.47}$$

Pour $\gamma = 1$, nous avons

$$\delta x = \delta x^{1} = -\omega^{01} x_{0} + \frac{1}{R}\omega^{10} x_{1} x^{1} = \left(-t + \frac{1}{R} x x \right) \delta u \tag{2.48}$$

Pour $\gamma = 2$ et 3, nous avons

$$\delta y = \delta x^{2} = \frac{1}{R}\omega^{10} x_{1} x^{2} = -\frac{1}{R}\omega^{10} x y = \frac{1}{R} x y \delta u \tag{2.49}$$

$$\delta z = \delta x^{3} = \frac{1}{R}\omega^{10} x_{1} x^{3} = -\frac{1}{R}\omega^{10} x z = \frac{1}{R} x z \delta u \tag{2.50}$$

2.4.2 La R-transformation finie des coordonnées (transformation de Fock-Lorentz)

Suivant le théorème fondamental des groupes qui nous permet de définir les transformations finie a partir des transformations infinitésimales, nous pouvons écrire

$$\frac{dt'}{du} = -x' + \frac{1}{R} x' t' \tag{2.51}$$

$$\frac{dx'}{du} = -t' + \frac{1}{R} x' x' \tag{2.52}$$

$$\frac{dy'}{du} = \frac{1}{R} x' y' \tag{2.53}$$

et

$$\frac{dz'}{du} = \frac{1}{R}x'z' \tag{2.54}$$

Par addition et soustraction des équations (2.51)et(2.52), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d\,(t'+x')}{du} &= -\,(t'+x') + \frac{1}{R}x'\,(t'+x') \\
\frac{1}{t'+x'}\frac{d\,(t'+x')}{du} &= -1 + \frac{1}{R}x'
\end{aligned} \tag{2.55}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{d\,(t'-x')}{du} &= (t'-x') + \frac{1}{R}x'\,(t'-x') \\
\frac{1}{t'-x'}\frac{d\,(t'-x')}{du} &= 1 + \frac{1}{R}x',
\end{aligned} \tag{2.56}$$

ce qui nous donne

$$\frac{1}{t'+x'}\frac{d\,(t'+x')}{du} - \frac{1}{t'-x'}\frac{d\,(t'-x')}{du} = -2. \tag{2.57}$$

La dernière équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{t'-x'}{t'+x'}\frac{d}{du}\left(\frac{t'+x'}{t'-x'}\right) = -2 \tag{2.58}$$

ou bien

$$\frac{d}{du}\left(\ln\frac{t'+x'}{t'-x'}\right) = -2. \tag{2.59}$$

En effectuant l'intégration sur u nous obtenons

$$\frac{t'+x'}{t'-x'} = A\exp\left(-2u\right) \tag{2.60}$$

où A est une constante d'intégration. Nous pouvons écrire alors

$$\begin{aligned}
\frac{t'+x'+t'-t'}{t'-x'} &= A\exp\left(-2u\right) \\
\frac{x'-t'}{t'-x'} + \frac{2t'}{t'-x'} &= A\exp\left(-2u\right) \\
-1 + \frac{2t'}{t'-x'} &= A\exp\left(-2u\right) \\
\frac{2t'}{t'-x'} &= 1 + A\exp\left(-2u\right)
\end{aligned} \tag{2.61}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{t' + x' + x' - x'}{t' - x'} &= A \exp(-2u) \\
\frac{t' - x'}{t' - x'} + \frac{2x'}{t' - x'} &= A \exp(-2u) \\
\frac{2x'}{t' - x'} &= -1 + A \exp(-2u)
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Il s'en suit que

$$x' = \frac{-1 + A\exp(-2u)}{1 + A\exp(-2u)} t'$$

En substituant la dernière équation dans l'équation (2.51), nous obtenons

$$\frac{dt'}{du} = \frac{1 - A\exp(-2u)}{1 + A\exp(-2u)} \left(1 - \frac{t'}{R}\right) t'. \tag{2.63}$$

La dernière équation est une équation différentielle du premier ordre qui admet la séparation de variables suivante

$$\int \frac{R}{(R - t')\, t'} dt' = \int \frac{1 - A\exp(-2u)}{1 + A\exp(-2u)} du \tag{2.64}$$

Après intégration nous obtenons l'expression de t'

$$t' = \frac{-BR(\exp u + A\exp(-u))}{1 - B(\exp u + A\exp(-u))} \tag{2.65}$$

où B est aussi une constante d'intégration. En introduisant les nouveaux paramètres C et D, avec

$$A = \frac{C - D}{C + D} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{C + D}{-R}, \tag{2.66}$$

et en utilisant les définitions

$$\cosh u = \frac{\exp u + \exp(-u)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh u = \frac{\exp u - \exp(-u)}{2}, \tag{2.67}$$

nous obtenons

$$t' = \frac{C\cosh u + D\sinh u}{1 + \frac{1}{R}[C\cosh u + D\sinh u]} \tag{2.68}$$

Maintenant nous cherchons de l'expression de x'. Pour cela, nous dérivons la dernière expression de t' par rapport à u

$$\frac{dt'}{du} = \frac{C\sinh u + D\cosh u}{\left[1 + \frac{1}{R}\left(C\cosh u + D\sinh u\right)\right]^2} \tag{2.69}$$

et nous utilisons l'équation (2.51) pour écrire

$$\frac{dt'}{du} = x'\left(\frac{t'}{R} - 1\right) \tag{2.70}$$

A partir de (2.69) et (2.70), nous obtenons

$$x' = \frac{-\left(C\sinh u + D\cosh u\right)}{1 + \frac{1}{R}\left(C\cosh u + D\sinh u\right)} \tag{2.71}$$

Maintenant, pour déterminer les constantes d'intégration nous considérons les conditions initiales quand $u = 0$, $t' = t$ et $x' = x$. Nous avons pour $t' = t$ et $x' = x$,

$$t = t' = \frac{C}{1 + \frac{C}{R}} \tag{2.72}$$

et

$$x = x' = -\frac{D}{1 + \frac{C}{R}} \tag{2.73}$$

et ainsi, nous obtenons

$$C = \frac{t}{1 - \frac{t}{R}} \tag{2.74}$$

et

$$D = \frac{-x}{1 - \frac{t}{R}}. \tag{2.75}$$

Les lois de transformation de t et x sont donc

$$\begin{aligned} t' &= \frac{\frac{Rt}{R-t}\cosh u - \frac{Rx}{R-t}\sinh u}{1 + \frac{1}{R}\left[\frac{Rt}{R-t}\cosh u - \frac{Rx}{R-t}\sinh u\right]} \\ &= \frac{t\cosh u - x\sinh u}{1 + \frac{1}{R}\left[t\left(\cosh u - 1\right) - x\sinh u\right]} \end{aligned} \tag{2.76}$$

et

$$\begin{aligned} x' &= \frac{-\left(\frac{Rt}{R-t}\sinh u - \frac{Rx}{R-t}\cosh u\right)}{1 + \frac{1}{R}\left[\frac{Rt}{R-t}\cosh u - \frac{Rx}{R-t}\sinh u\right]} \\ &= \frac{x\cosh u - t\sinh u}{1 + \frac{1}{R}\left[t\left(\cosh u - 1\right) - x\sinh u\right]} \end{aligned} \tag{2.77}$$

Pour déterminer la transformation de y' et z', nous posons

$$\alpha_R = 1 + \frac{1}{R}\left[t\left(\cosh u - 1\right) - x\sinh u\right] \tag{2.78}$$

Il vient que

$$\frac{d\alpha_R}{du} = \frac{1}{R}\left[t\sinh u - x\cosh u\right] = -\frac{\alpha_R}{R}x' \tag{2.79}$$

ce qui nous donne

$$x' = -\frac{R}{\alpha_R}\frac{d\alpha_R}{du}. \tag{2.80}$$

En substituant la dernière équation dans l'équation (2.53), nous obtenons

$$\frac{dy'}{du} = \frac{1}{R}x'y' = -\frac{y'}{\alpha_R}\frac{d\alpha_R}{du} \tag{2.81}$$

Nous avons par la suite

$$\begin{aligned} \int \frac{dy'}{\acute{y}} &= -\int \frac{d\alpha_R}{\alpha_R} \\ \ln y' &= -\ln \alpha_R + C^{te} \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$y' = \frac{F}{\alpha_R} = \frac{F}{1+\frac{1}{R}\left[t\left(\cosh u - 1\right) - x\sinh u\right]} \tag{2.82}$$

où F est une constante d'intégration qui se détermine à partir des conditions initiales. Quand $u = 0$, nous avons $y' = F = y$. L'expression finale de y' est donc

$$y' = \frac{y}{1+\frac{1}{R}\left[t\left(\cosh u - 1\right) - x\sinh u\right]}. \tag{2.83}$$

De la même manière nous obtenons, à partir de l'équation (2.54) ,

$$\frac{dz'}{du} = \frac{1}{R}x'z' = -\frac{z'}{\alpha_R}\frac{d\alpha_R}{du}.$$

En effectuant l'intégration et en tenant compte de la condition initiale $z'\left(u=0\right) = z$, nous obtenons la loi de transformation de z'

$$z' = \frac{z}{1+\frac{1}{R}\left[t\left(\cosh u - 1\right) - x\sinh u\right]} \tag{2.84}$$

Si nous posons

$$\beta = \tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} \tag{2.85}$$

et

$$\gamma = \cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2.86}$$

il vient

$$\sinh u = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta\gamma. \tag{2.87}$$

et, par conséquent, la R-transformation des coordonnées peut s'écrire sous la forme

$$t' = \frac{\gamma\,(t-\beta x)}{\alpha_R} \tag{2.88}$$

$$x' = \frac{\gamma\,(x-\beta t)}{\alpha_R} \tag{2.89}$$

$$y' = \frac{y}{\alpha_R} \tag{2.90}$$

$$z' = \frac{z}{\alpha_R}. \tag{2.91}$$

2.5 Composition de deux transformations de coordonnées

Dans cette section nous montrons la structure de groupe de l'ensemble des transformations de Fock-Lorentz en considérant la composition de deux transformations de coordonnées. Soit les deux transformations

$$\begin{cases} t' = \frac{\gamma(t-x\beta)}{\alpha_R} \\ x' = \frac{\gamma(x-t\beta)}{\alpha_R} \\ y' = \frac{y}{\alpha_R} \\ z' = \frac{z}{\alpha_R} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} t'' = \frac{\gamma'(t'-\beta' x')}{\alpha'_R} \\ x'' = \frac{\gamma'(x'-\beta' t')}{\alpha'_R} \\ y'' = \frac{y'}{\alpha'_R} \\ z'' = \frac{z'}{\alpha'_R} \end{cases}$$

La composition des deux transformations nous donne

$$t'' = \frac{1}{\alpha_R \alpha'_R} \gamma\gamma' (1 + \beta\beta') \left[t - \frac{(\beta + \beta')}{(1 + \beta\beta')} x \right] \tag{2.92}$$

$$x'' = \frac{1}{\alpha_R \alpha'_R} \gamma\gamma' (1 + \beta\beta') \left[x - \frac{(\beta + \beta')}{(1 + \beta\beta')} t \right] \tag{2.93}$$

$$y'' = \frac{y}{\alpha_R \alpha'_R} \tag{2.94}$$

$$z'' = \frac{z}{\alpha_R \alpha'_R}. \tag{2.95}$$

Sous forme matricielle nous avons

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cosh u_1}{\alpha_R(u_1)} & -\frac{\sinh u_1}{\alpha_R(u_1)} & 0 & 0 \\ -\frac{\sinh u_1}{\alpha_R(u_1)} & \frac{\cosh u_1}{\alpha_R(u_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_R(u_1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_R(u_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.96}$$

et

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cosh u_2}{\alpha_R(u_2)} & -\frac{\sinh u_2}{\alpha_R(u_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{\sinh u_2}{\alpha_R(u_2)} & \frac{\cosh u_2}{\alpha_R(u_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_R(u_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_R(u_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{2.97}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\cosh u_2}{\alpha_R(u_2)} & -\frac{\sinh u_2}{\alpha_R(u_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{\sinh u_2}{\alpha_R(u_2)} & \frac{\cosh u_2}{\alpha_R(u_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_R(u_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_R(u_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cosh u_1}{\alpha_R(u_1)} & -\frac{\sinh u_1}{\alpha_R(u_1)} & 0 & 0 \\ -\frac{\sinh u_1}{\alpha_R(u_1)} & \frac{\cosh u_1}{\alpha_R(u_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_R(u_1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_R(u_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cosh(u_1+u_2)}{\alpha_R(u_1)\alpha_R(u_2)} & -\frac{\sinh(u_1+u_2)}{\alpha_R(u_1)\alpha_R(u_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{\sinh(u_1+u_2)}{\alpha_R(u_1)\alpha_R(u_2)} & \frac{\cosh(u_1+u_2)}{\alpha_R(u_1)\alpha_R(u_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_R(u_1)\alpha_R(u_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_R(u_1)\alpha_R(u_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\alpha_R(u_2)\,\alpha_R(u_1) &= \left(1+\frac{1}{R}\left(t'(\cosh u_2-1)-x'\sinh u_2\right)\right)\alpha_R(u_1) \\
&= \left(1+\frac{1}{R}\left[\frac{t\cosh u_1-x\sinh u_1}{\alpha_R(u_1)}(\cosh u_2-1)-\frac{x\cosh u_1-t\sinh u_1}{\alpha_R(u_1)}\sinh u_2\right]\right)\alpha_R(u_1) \\
&= \alpha_R(u_1)+\frac{1}{R}\left((t\cosh u_1-x\sinh u_1)(\cosh u_2-1)-(x\cosh u_1-t\sinh u_1)\sinh u_2\right) \\
&= 1+\frac{1}{R}\left(t(\cosh u_1-1)-x\sinh u_1\right) \\
&\quad +\frac{1}{R}\left((t\cosh u_1-x\sinh u_1)(\cosh u_2-1)-(x\cosh u_1-t\sinh u_1)\sinh u_2\right),
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned}
\alpha_R(u_1)\,\alpha_R(u_2) &= 1+\frac{1}{R}\left[t\left(\cosh(u_1+u_2)-1\right)-x\sinh(u_1+u_2)\right] \\
&= \alpha_R(u_1+u_2).
\end{aligned}$$

Nous avons alors la loi de composition

$$L_R(u_1)\circ L_R(u_2)=L_R(u_1+u_2). \tag{2.98}$$

A partir de cette loi nous pouvons montrer que l'ensemble des transformations non linéaires de Fock-Lorentz a la structure de groupe :

1. L'associativité :

$$\left[L_R(u_1)\circ L_R(u_2)\right]\circ L_R(u_3)=L_R(u_1)\circ\left[L_R(u_2)\circ L_R(u_3)\right] \tag{2.99}$$

2. L'élement neutre :

$$L_R(u)\circ e=e\circ L_R(u)=L_R(u) \tag{2.100}$$

avec

$$e=L_R(u=0) \tag{2.101}$$

3. L'inverse :

$$L_R(u)\circ L_R^{-1}(u)=e \tag{2.102}$$

avec

$$L_R^{-1}(u)=L_R(-u) \tag{2.103}$$

2.6 Métrique de l'espace-temps R-Minkowski

Considérons deux points $(t, \overrightarrow{x})$ et $(t_0, \overrightarrow{x}_0)$ et cherchons la loi de transformation de la quantité $\Delta^2 = (t - t_0)^2 - (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0)^2$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta'^2 &= (t' - t'_0)^2 - \left(\overrightarrow{x'} - \overrightarrow{x'_0}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\gamma\,(t - x\beta)}{\alpha_R} - \frac{\gamma\,(t_0 - x_0\beta)}{\alpha_{R0}}\right)^2 - \left(\frac{\gamma\,(x - t\beta)}{\alpha_R} - \frac{\gamma\,(x_0 - t_0\beta)}{\alpha_{R0}}\right)^2 \\
&\quad - \left(\frac{y}{\alpha_R} - \frac{y_0}{\alpha_{R0}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\alpha_R} - \frac{z_0}{\alpha_{R0}}\right)^2 \qquad (2.104)
\end{aligned}$$

où α_{R0} est de la mème forme que α_R le changement de t et x par t_0 et x_0

$$\alpha_{R0} = 1 + \frac{1}{R}\left[t_0\left(\cosh u - 1\right) - x_0 \sinh u\right]. \qquad (2.105)$$

A l'ordre deux en $(t - t_0)^2$ et $(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0})^2$ nous avons

$$\left[\frac{\gamma}{\alpha_R}\left[(t - x\beta) - (t_0 - x_0\beta)\right]\right]^2 - \left[\frac{\gamma}{\alpha_R}\left[(x - t\beta) - (x_0 - t_0\beta)\right]\right]^2 =$$
$$\frac{1}{\alpha_R^2}\left[(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2\right]$$

ce qui nous donne

$$(t' - t'_0)^2 - \left(\overrightarrow{x'} - \overrightarrow{x'_0}\right)^2 = \frac{1}{\alpha_R^2}\left[(t - t_0)^2 - (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0)^2\right].$$

Nous remarquons ici que la quantité Δ^2 n'est pas invariante sous les transformations de Fock-Lorentz

$$\Delta'^2 = \frac{1}{\alpha_R^2}\Delta^2 \qquad (2.106)$$

Pour obtenir l'intervalle invariante, nous écrivons d'abord

$$\begin{aligned}
1 - \frac{t'}{R} &= 1 - \frac{\gamma\,(t - x\beta)}{\alpha_R R} \\
&= 1 - \frac{\gamma\,(t - x\beta)}{R + (\gamma - 1)\,t - \gamma\beta x} \\
&= \frac{R - t}{R + (\gamma - 1)\,t - \gamma\beta x} \\
&= \frac{1}{\alpha_R}\left(1 - \frac{t}{R}\right).
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\alpha_R = \left(1 - \frac{t}{R}\right)\left(1 - \frac{t'}{R}\right)^{-1} \tag{2.107}$$

Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{t'}{R}\right)^2}\Delta'^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{R}\right)^2}\Delta^2 \tag{2.108}$$

L'intervalle conservée est donc

$$ds^2 = \left(1 - \frac{t}{R}\right)^{-2}\left(dt^2 - \overrightarrow{dx}^2\right). \tag{2.109}$$

L'espace-temps R-Minkowski est conforme à l'espace-temps de Minkowski.

2.7 La R-transformation des moments conjugués

2.7.1 La R-transformation infinitésimale des moments conjugués

En prenant $f = p^\gamma$ dans l'équation (2.44) , nous obtenons

$$\delta p_t = -\left(p_x + \frac{1}{R} x p_t\right)\delta u \tag{2.110}$$

$$\delta p_x = -\left(p_t + \frac{1}{R} x p_x\right)\delta u \tag{2.111}$$

$$\delta p_y = -\frac{1}{R} x p_y \delta u \tag{2.112}$$

$$\delta p_z = -\frac{1}{R} x p_z \delta u. \tag{2.113}$$

2.7.2 La R-transformation finie des moments conjugués

Maintenant pour la transformation finie des moments conjugués nous devons résoudre les équations différentielles suivantes

$$\frac{dp'_t}{du} = -\left(p'_x + \frac{1}{R}x'p'_t\right) \tag{2.114}$$
$$\frac{dp'_x}{du} = -\left(p'_t + \frac{1}{R}x'p'_x\right) \tag{2.115}$$
$$\frac{dp'_y}{du} = -\frac{1}{R}x'p'_y \tag{2.116}$$
$$\frac{dp'_z}{du} = -\frac{1}{R}x'p'_z \tag{2.117}$$

A partir de la première équation et la loi de transformation de x, nous obtenons

$$\frac{dp'_t}{du} = -\left[p'_x + \frac{1}{R}\left(-\frac{R}{\alpha_R}\frac{d\alpha_R}{du}\right)p'_t\right]$$
$$\frac{dp'_t}{du} = -p'_x + \frac{p'_t}{\alpha_R}\frac{d\alpha_R}{du} \tag{2.118}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{\alpha_R\frac{dp'_t}{du} - p'_t\frac{d\alpha_R}{du}}{\alpha_R} = -\frac{p'_x}{\alpha_R} \tag{2.119}$$

ou bien

$$\frac{d}{du}\left(\frac{p'_t}{\alpha_R}\right) = -\frac{p'_x}{\alpha_R}. \tag{2.120}$$

De la même manière l'équation (2.115) nous donne

$$\frac{dp'_x}{du} = -\left(p'_t + \frac{1}{R}\left(-\frac{R}{\alpha_R}\frac{d\alpha_R}{du}\right)p'_x\right)$$
$$\frac{dp'_x}{du} = -p'_t + \frac{p'_x}{\alpha_R}\frac{d\alpha_R}{du} \tag{2.121}$$

et par conséquent,

$$\frac{d}{du}\left(\frac{p'_x}{\alpha_R}\right) = -\frac{p'_t}{\alpha_R}. \tag{2.122}$$

Les équations (2.120) et (2.122) qui sont deux équations différentielles couplées, nous donnent après découplage

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{p'_t}{\alpha_R}\right) = -\frac{d}{du}\left(\frac{p'_x}{\alpha_R}\right) = \frac{p'_t}{\alpha_R} \tag{2.123}$$

et

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{p'_x}{\alpha_R}\right) = -\frac{d}{du}\left(\frac{p'_t}{\alpha_R}\right) = \frac{p'_x}{\alpha_R} \tag{2.124}$$

Les deux dernières équations sont des équations différentielles d'ordre deux avec coefficients constants dont la solution est de la forme

$$\begin{aligned} \frac{p'_t}{\alpha_R} &= A\cosh u + B\sinh u & (2.125) \\ \frac{p'_x}{\alpha_R} &= -\frac{d}{du}\left(\frac{p'_t}{\alpha_R}\right) = -A\sinh u - B\cosh u & (2.126) \end{aligned}$$

où A et B sont des constantes. Nous avons alors

$$p'_t = \alpha_R\left(A\cosh u + B\sinh u\right) \quad (2.127)$$

$$p'_x = -\alpha_R\left(A\sinh u + B\cosh u\right) \quad (2.128)$$

Pour déterminer les constantes A et B nous tenons compte des conditions initiales $p'_t = p_t$ et $p'_x = p_x$ quand $u = 0$. Il est facile de montrer que pour $u = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} p'_t &= \alpha_R A = p_t & (2.129) \\ p'_x &= -\alpha_R B = p_x & (2.130) \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} A &= p_t & (2.131) \\ B &= -p_x & (2.132) \end{aligned}$$

La loi de transformation de p_t et p_x est donc

$$\begin{aligned} p'_t &= \alpha_R\left(p_t\gamma - \beta\gamma p_x\right) \\ p'_x &= \alpha_R\gamma\left(p_x - \beta p_t\right) & (2.133) \end{aligned}$$

Pour p'_y nous avons

$$\frac{dp'_y}{du} = -\frac{1}{R}\left(-\frac{R}{\alpha_R}\frac{d\alpha_R}{du}\right)p'_y = \frac{p'_y}{\alpha_R}\frac{d\alpha_R}{du} \quad (2.134)$$

ce qui implique que

$$\frac{dp'_y}{p'_y} = \frac{d\alpha_R}{\alpha_R}$$

En effectuant l'intégration

$$\begin{aligned} \int \frac{dp'_y}{p'_y} &= \int \frac{d\alpha_R}{\alpha_R} \\ \ln p'_y &= \ln \alpha_R + C^{te} \end{aligned}$$

nous obtenons

$$p'_y = K\alpha_R$$

où la constante d'intégration K se détermine à partir de la condition initiale $p'_y = p_y$ pour $u = 0$. Le résultat est donc

$$p'_y = \alpha_R p_y \tag{2.135}$$

De la même manière nous obtenons pour p'_z l'équation

$$\frac{dp'_z}{du} = -\frac{1}{R}\left(-\frac{R}{\alpha_R}\frac{d\alpha_R}{du}\right)p'_z = \frac{p'_z}{\alpha_R}\frac{d\alpha_R}{du} \tag{2.136}$$

qui admet la solution

$$p'_z = \alpha_R p_z \tag{2.137}$$

Nous avons finalement la R-transformation des impulsions

$$\begin{aligned} p'_t &= \alpha_R\left(p_t\gamma - \beta\gamma p_x\right) \\ p'_x &= \alpha_R\gamma\left(p_x - \beta p_t\right) && (2.138) \\ p'_y &= \alpha_R p_y && (2.139) \\ p'_z &= \alpha_R p_z. && (2.140) \end{aligned}$$

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit les transformations de Fock-Lorentz par une déformation du groupe de Poincaré. Nous avons montré que l'ensemble de ces transformations non linéaires a la structure de groupe. Nous avons également montré que dans ce cas l'espace-temps est similaire à l'espace-temps de de-Sitter.

Chapitre 3

Les oscillations de neutrinos dans l'espace-temps de de-Sitter

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les oscillations de neutrinos dans l'espace de de-Sitter. Comme l'espace R-Minkowski est identique à l'espace de de-Sitter il nous parait nécessaire de considérer tout d'abord les oscillations de neutrinos dans cet espace qui décrit un univers en expansion. Nous rappelons en premier lieu comment écrire l'équation de Dirac dans un espace courbe. Ensuite, nous nous proposons de résoudre cette équation pour l'espace de de-Sitter. Une fois nous obtenons les solutions exactes qui décrivent les états propres de masse pour le système de neutrino nous pouvons calculer la probabilité de transition de la saveur leptonique du neutrino.

Notons que dans la litterature il y a plusieurs travaux sur les oscillations de neutrinos dans un espace courbe [16, 17, 18, 19, 20]. Ici, nous suivons l'approche de la référence [20].

3.2 Equation de Dirac dans un espace courbe

Dans l'espace temps plat de Minkowski, la forme covariante de l'équation de Dirac est donnée par

$$[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m]\,\psi(x) = 0. \tag{3.1}$$

Il est bien évident que cette équation n'est pas invariante sous la transformation de jauge locale

$$\psi'(x) = e^{i\lambda(x)}\psi(x)\,, \tag{3.2}$$

où $\lambda(x)$ est une fonction de x. Pour obtenir une équation invariante sous les transformations de jauge locales, nous devons remplacer la dérivée ordinaire ∂_{μ} par la dérivée covariante (par rapport aux transformations de jauge) $D_{\mu} = \partial_{\mu} + ieA_{\mu}$, où le champ A_{μ} (de Maxwell) se transforme comme

$$eA'_{\mu} = eA_{\mu} + \partial_{\mu}\lambda(x)\,. \tag{3.3}$$

Ainsi, nous avons introduit l'interaction électromagnétique à la dynamique de la particule relativiste de charge e.

Pour décrire l'interaction de la particule relativiste avec un champ gravitationnel, nous utilisons le même principe de jauge pour les transformations de Lorentz. Considérons d'abord le groupe de Lorentz

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = \left(\delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}\right)x^{\nu} \tag{3.4}$$

où $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ sont des constantes. Pour une transformation infinitésimale nous avons

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \tag{3.5}$$

Il est clair que l'équation de Dirac est invariante sous cette transformation si et seulement si $\psi(x)$ se transforme sous la forme

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi\left(x = \Lambda^{-1}x'\right) \tag{3.6}$$

où l'opérateur $S(\Lambda)$ est donné par

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \tag{3.7}$$

avec

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]. \tag{3.8}$$

Dans cette théorie les éléments de Λ sont des constantes (transformation globale).

Considérons maintenant un transformation Locale où les éléments $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ dépendent de x. Dans ce cas l'équation (3.1), n'est plus invariante. Pour établir une équation invariante, nous devons remplacer la dérivée ordinaire par une dérivée covariante

$$\nabla_{\mu}\psi = (\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu})\psi \tag{3.9}$$

où Γ_{μ} est la connexion de spin donnée par

$$\Gamma_{\mu} = -\frac{1}{8}g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}[\tilde{\gamma}^{\alpha}, \tilde{\gamma}^{\nu}]. \tag{3.10}$$

Ici, $g_{\alpha\lambda}$ est la métrique de l'espace-temps, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ sont les connexion affine (symboles de Christoffel) et $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ sont les matrices de Dirac dans un espace courbe

$$\{\tilde{\gamma}^{\mu}(x), \tilde{\gamma}^{\nu}(x)\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{3.11}$$

Nous avons alors l'équation de Dirac dans un espace courbe

$$[i\tilde{\gamma}^{\mu}(\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu}) - m]\psi(x) = 0. \tag{3.12}$$

3.3 Equation de Dirac dans l'espace de de-Sitter

Considérons maintenant l'espace de de-Sitter décrit par la métrique

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - \mathcal{R}^2(t)\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \tag{3.13}$$

où $\mathcal{R}(t)$ est le facteur d'échelle

$$\mathcal{R}(t) = \exp Ht \tag{3.14}$$

Nous introduisons d'abord les champs tétrades $e_a^\mu(x)$ par la définition

$$g^{\mu\nu} = e_a^\mu(x)\, e_b^\nu(x)\, \eta^{ab} \tag{3.15}$$

où η^{ab} est le tenseur métrique de l'espace-temps de Minkowski. Le champ tétrade dans ce cas est donné par

$$e_a^\mu(x) = \mathrm{diag}\left(1, -\frac{1}{\mathcal{R}(t)}, -\frac{1}{\mathcal{R}(t)\, r}, -\frac{1}{\mathcal{R}(t)\, r\sin\theta}\right) \tag{3.16}$$

Nous avons alors l'équation de Dirac

$$i\gamma^\mu(x)\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu(x)\right]\psi(x) = m\psi(x) \tag{3.17}$$

Les matrices de Dirac dépendantes de la courbure en termes de champ tétrade

$$\tilde{\gamma}^\mu(x) = e_a^\mu(x)\,\gamma^a \tag{3.18}$$

A l'aide des équations (3.16) (3.18), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}^0(x) &= e_a^0(x)\,\gamma^a = e_0^0(x)\,\gamma^0 = \gamma^0 & (3.19)\\
\tilde{\gamma}^1(x) &= e_a^1(x)\,\gamma^a = e_1^1(x)\,\gamma^1 = -\frac{1}{\mathcal{R}(t)}\gamma^1 & (3.20)\\
\tilde{\gamma}^2(x) &= e_a^2(x)\,\gamma^a = e_2^2(x)\,\gamma^2 = -\frac{1}{\mathcal{R}(t)\, r}\gamma^2 & (3.21)\\
\tilde{\gamma}^3(x) &= e_a^3(x)\,\gamma^a = e_3^3(x)\,\gamma^3 = -\frac{1}{\mathcal{R}(t)\, r\sin\theta}\gamma^3 & (3.22)
\end{aligned}$$

Ici, γ^0, γ^i sont les matrices habituelles de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{(2\times2)} & 0 \\ 0 & -I_{(2\times2)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

où $I_{(2\times2)}$ est la matrice identité (2×2) et σ^i avec $i=1,2,3$ sont les matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

$$\sigma^2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

$$\sigma^3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Pour les symboles de Christoffel $\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}$ nous avons

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\rho} = \frac{1}{2} g^{\nu\tau} \left(\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\tau}} \right). \tag{3.26}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{ij} &= \Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{jj} = \Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{0i} = \Gamma^i_{00} = \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{ii} = \Gamma^r_{\theta r} = \Gamma^r_{\varphi r} = \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = 0 \\
\Gamma^0_{rr} &= \mathcal{R}\dot{\mathcal{R}} \qquad \Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^0_{\theta\theta} = r^2\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}} \qquad \Gamma^0_{\varphi\varphi} = r^2\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}\sin^2\theta \qquad \Gamma^i_{0i} = \frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \\
\Gamma^r_{\theta\theta} &= -r \qquad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta \qquad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

A partir de ces expressions, nous obtenons les connexions de spin

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(x) &= 0 \\
\Gamma_1(x) &= \frac{\dot{\mathcal{R}}}{2}\gamma^0\gamma^1 \\
\Gamma_2(x) &= \frac{r\dot{\mathcal{R}}}{2}\gamma^0\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\gamma^1 \\
\Gamma_3(x) &= \frac{r\dot{\mathcal{R}}\sin\theta}{2}\gamma^0\gamma^3 + \frac{\sin\theta}{2}\gamma^3\gamma^1 + \frac{\cos\theta}{2}\gamma^3\gamma^2
\end{aligned}$$

Par un calcul simple, nous pouvons montrer que

$$\gamma^{\mu}(x)\,\Gamma_{\mu}(x) = \frac{3\dot{R}}{2R}\gamma^0 - \frac{1}{Rr}\gamma^1 - \frac{\cos\theta}{2Rr\sin\theta}\gamma^2$$

L'équation de Dirac dans les coordonnées sphériques est donc

$$\left[iR\gamma^0\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{3}{2}\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}}\right)-i\gamma^1\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)\right. \tag{3.28}$$
$$\left.+\frac{1}{r}\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\gamma^3\frac{\partial}{\partial\varphi}-mR\right]\psi\left(t,r,\theta,\varphi\right)=0.$$

3.3.1 Coordonnées cartésiennes

Maintenant considérons l'équation de Dirac dans l'espace de de-Sitter en coordonnées cartésiennes où la métrique est donnée par

$$ds^2=dt^2-\mathcal{R}^2\left(t\right)d\overrightarrow{x}^2=dt^2-\mathcal{R}^2\left(t\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) \tag{3.29}$$

Nous avons dans ce cas le champ tétrade

$$e_a^{\mu}\left(t\right)=diag\left(1,\frac{1}{\mathcal{R}\left(t\right)},\frac{1}{\mathcal{R}\left(t\right)},\frac{1}{\mathcal{R}\left(t\right)}\right) \tag{3.30}$$

Les matrices de Dirac courbes sont données par

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 \tag{3.31}$$
$$\tilde{\gamma}^i = \frac{\gamma^i}{\mathcal{R}}. \tag{3.32}$$

Nous pouvons montrer que les connexions de spin $\Gamma_{\mu}\left(x\right)$ sont cette fois-ci

$$\Gamma_0\left(t\right) = 0 \tag{3.33}$$
$$\Gamma_i\left(t\right) = -\frac{1}{2}\dot{\mathcal{R}}\gamma^0\gamma^i. \tag{3.34}$$

L'équation de Dirac introduite précédemment

$$\left[i\tilde{\gamma}^{\mu}\left(t\right)\left(\partial_{\mu}-\Gamma_{\mu}\left(t\right)\right)-m\right]\psi\left(t,\overrightarrow{x}\right)=0 \tag{3.35}$$

se réduit alors à

$$\left[i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}+\frac{i}{\mathcal{R}}\gamma^i\partial_i-i\frac{1}{\mathcal{R}}\gamma^i\Gamma_i\left(t\right)-m\right]\psi\left(t,\overrightarrow{x}\right)=0 \tag{3.36}$$

En introduisant le temp conforme η avec

$$d\eta=\frac{dt}{\mathcal{R}\left(t\right)}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{R}(t)} \frac{\partial}{\partial \eta} \tag{3.37}$$

nous obtenons

$$\left[\frac{i}{\mathcal{R}}\left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial \eta} + \gamma^i \partial_i\right) - i\frac{1}{\mathcal{R}}\gamma^i \Gamma_i(t) - m\right]\psi(t, \overrightarrow{x}) = 0$$

A ce niveau nous remplaçons les $\Gamma_i(t)$ par leurs définitions et nous utilisons la notation

$$\tilde{\partial}_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \eta}, \partial_i\right). \tag{3.38}$$

L'équation résultante est

$$\left[i\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu + \frac{3}{2}\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}}\gamma^0 - m\mathcal{R}\right]\psi(\eta, \overrightarrow{x}) = 0$$

où $\mathcal{R}' = \frac{d\mathcal{R}}{d\eta}$Pour simplifier encore cette équation nous posons

$$\psi(t, \overrightarrow{x}) = \mathcal{R}^{-\frac{3}{2}}(\eta)\,\varphi(\eta, \overrightarrow{x}) \tag{3.39}$$

Il n'est pas difficile de montrer que le spineur $\varphi(\eta, \overrightarrow{x})$ vérifie l'équation

$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathcal{R}(\eta)\right]\varphi(\eta, \overrightarrow{x}) = 0. \tag{3.40}$$

La dernière équation est similaire à une équation ordinaire de Dirac avec une masse dépendante du temps.

Dans la section suivante nous solutionnons l'équation de Dirac écrite dans les coordonnées sphériques. Nous revenons à l'équation (3.40) au chapitre 4.

3.4 Solution de l'équation de Dirac en coordonnées sphériques

Pour résoudre l'équation de Dirac (3.28) nous faisons en premier lieu la factorisation

$$\psi(t, r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta\ \mathcal{R}^{-\frac{3}{2}}(t)\,\phi(t, r, \theta, \varphi). \tag{3.41}$$

Nous pouvons alors montrer que

$$iR\gamma^0\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3}{2}\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}}\right)\psi\left(t,r,\theta,\varphi\right)=iR\gamma^0\frac{1}{r}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta\mathcal{R}^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(t,r,\theta,\varphi\right), \tag{3.42}$$

$$-i\gamma^1\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\psi\left(t,r,\theta,\varphi\right)=-i\gamma^1\frac{1}{r}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta\mathcal{R}^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial r}\phi\left(t,r,\theta,\varphi\right), \tag{3.43}$$

$$\frac{-i}{r}\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)\psi\left(t,r,\theta,\varphi\right)=\frac{-i}{r}\frac{1}{r}\gamma^2\mathcal{R}^{-\frac{3}{2}}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\phi\left(t,r,\theta,\varphi\right), \tag{3.44}$$

et

$$-i\frac{1}{r\sin\theta}\gamma^3\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi\left(t,r,\theta,\varphi\right)=\frac{-i}{r\sin\theta}\frac{1}{r}\gamma^3\sin^{-\frac{1}{2}}\theta\mathcal{R}^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\phi\left(t,r,\theta,\varphi\right), \tag{3.45}$$

et par conséquent, l'équation de (3.28) se réduit à

$$\left[i\left(\mathcal{R}\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}-\gamma^1\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\gamma^2\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\gamma^3\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)-m\mathcal{R}\right]\phi\left(t,r,\theta,\varphi\right)=0. \tag{3.46}$$

En multipliant la dernière équation par $-i\gamma^0$ nous pouvons l'écrire sous la forme

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial t}+im\gamma^0\right)\phi\left(t,r,\theta,\varphi\right)=\left[\gamma^0\gamma^1\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\gamma^1\hat{K}\left(\theta,\varphi\right)\right]\phi\left(t,r,\theta,\varphi\right) \tag{3.47}$$

où l'opérateur hermitien $\hat{K}$ est donné par

$$\hat{K}\left(\theta,\varphi\right)=\gamma^0\gamma^1\left(\gamma^2\frac{\partial}{\partial\theta}+\gamma^3\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{3.48}$$

Dans l'annexe 1 nous démontrons que les valeurs propres $\hat{K}\left(\theta,\varphi\right)$ sont $\zeta=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$, avec

$$\hat{K}\phi_{\zeta k}\left(t,r,\theta,\varphi\right)=\zeta\phi_{\zeta k}\left(t,r,\theta,\varphi\right) \tag{3.49}$$

où la fonction propre $\phi_{\zeta k}\left(t,r,\theta,\varphi\right)$ est donnée par

$$\phi_{\zeta k}=\begin{pmatrix} Y_\zeta\left(\theta,\varphi\right)\Phi\left(r,t\right) \\ \sigma_1 Y_\zeta\left(\theta,\varphi\right)\chi\left(r,t\right)\end{pmatrix} \tag{3.50}$$

Les fonctions $Y_\zeta\left(\theta,\varphi\right)$ sont les harmoniques sphériques couplées

$$Y_\zeta\left(\theta,\varphi\right)\propto Y_{l,\overline{m}+\frac{1}{2}}\left(\theta,\varphi\right)\propto P_l^{\overline{m}+\frac{1}{2}}\left(\cos\theta\right)\exp i\left(\overline{m}+\frac{1}{2}\right)\varphi \tag{3.51}$$

et

$$Y_\zeta\left(\theta,\varphi\right)\propto Y_{l,\overline{m}-\frac{1}{2}}\left(\theta,\varphi\right)\propto P_l^{\overline{m}-\frac{1}{2}}\left(\cos\theta\right)\exp\left(i\left(\overline{m}-\frac{1}{2}\right)\varphi\right) \tag{3.52}$$

respectivement, pour

$$\zeta = \mp\left(j+\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -(l+1) & \text{for } j = l+\frac{1}{2} \\ l & \text{for } j = l-\frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.53}$$

En insérant la fonction $\phi_{\zeta k}(t,r,\theta,\varphi)$ dans l'équation (3.47) nous obtenons

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial t}+im\right)\Phi(r,t) = \left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\zeta\right)\chi(r,t) \tag{3.54}$$

et

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial t}-im\right)\chi(r,t) = \left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\zeta\right)\Phi(r,t) \tag{3.55}$$

Pour résoudre le dernier système d'équations nous utilisons la méthode habituelle de séparation des variables

$$\Phi(r,t) = U_1(r)\,T_1(t) \tag{3.56}$$

$$\chi(r,t) = U_2(r)\,T_2(t) \tag{3.57}$$

Il vient alors

$$\frac{\mathcal{R}}{T_2(t)}\left(\frac{d}{dt}+im\right)T_1(t) = \frac{1}{U_1(r)}\left[\frac{d}{dr}+\frac{\zeta}{r}\right]U_2(r) \tag{3.58}$$

et

$$\frac{\mathcal{R}}{T_1(t)}\left(\frac{d}{dt}-im\right)T_2(t) = \frac{1}{U_2(r)}\left[\frac{d}{dr}-\frac{\zeta}{r}\right]U_1(r) \tag{3.59}$$

Dans les deux dernières équations chaque membre doit être constant, ce qui nous donne pour $T_1(t)$ et $T_2(t)$

$$\mathcal{R}(t)\left(\frac{d}{dt}+im\right)T_1(t) = ikT_2(t) \tag{3.60}$$

et

$$\mathcal{R}(t)\left(\frac{d}{dt}-im\right)T_2(t) = ikT_1(t) \tag{3.61}$$

où k est une constante de séparation des variables.

Pour les parties radiales nous obtenons

$$ikU_1(r) = \left[\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\zeta\right]U_2(r) \tag{3.62}$$

et

$$ikU_2(r) = \left[\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\zeta\right]U_1(r) \tag{3.63}$$

En multipliant l'équation (3.62) par $i\kappa$ et en remplaçant $i\kappa U_2(r)$ par $\left[\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\zeta\right]U_1(r)$, nous obtenons

$$(ik)^2 U_1(r) = \left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\zeta\right)\left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\zeta\right)U_1(r) \tag{3.64}$$

ce qui nous donne pour $U_1(r)$ l'équation différentielle

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\zeta^2-\zeta}{r^2}+k^2\right)U_1(r)=0. \tag{3.65}$$

Pour $U_2(r)$ nous obtenons

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\zeta^2+\zeta}{r^2}+k^2\right)U_2(r)=0. \tag{3.66}$$

En introduisant la variable $\rho = kr$ et en posant

$$U_{1,2}(r)=\frac{1}{\sqrt{\rho}}u_{1,2}(\rho) \tag{3.67}$$

nous obtenons une équation de type Bessel

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\left(1-\frac{\lambda_{1,2}^2}{\rho^2}\right)\right)u_{1,2}(\rho)=0, \tag{3.68}$$

où les constantes λ_1 et λ_2 sont donnée par

$$\lambda_1 = \pm\left(\zeta-\frac{1}{2}\right) \tag{3.69}$$

$$\lambda_2 = \pm\left(\zeta+\frac{1}{2}\right). \tag{3.70}$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de Bessel

$$U_1(r) = \frac{1}{\sqrt{\kappa r}}J_{\pm\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)}(kr) \tag{3.71}$$

$$U_2(r) = \frac{1}{\sqrt{\kappa r}}J_{\mp\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)}(kr). \tag{3.72}$$

Notons ici que lorsque $\zeta = 0, -1, -2, ...$, nous avons

$$\begin{aligned} J_{-\zeta+\frac{1}{2}}(kr) &= \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\left[\sin\left(kr+\frac{\zeta\pi}{2}\right)\sum_{n=0}^{-\frac{\zeta}{2}}\frac{(-1)^n(-\zeta+2n)!}{(2n)!\,(-\zeta-2n)!\,(2kr)^{2n}}\right. \\ &\left. +\cos\left(kr+\frac{\zeta\pi}{2}\right)\sum_{n=0}^{-\frac{\zeta+1}{2}}\frac{(-1)^n(-\zeta+2n+1)!}{(2n+1)!\,(-\zeta-2n-1)!\,(2kr)^{2n+1}}\right] \end{aligned} \tag{3.73}$$

et

$$J_{\zeta-\frac{1}{2}}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\left[\cos\left(kr-\frac{\zeta\pi}{2}\right)\sum_{n=0}^{-\frac{\zeta}{2}}\frac{(-1)^n(-\zeta+2n)!}{(2n)!(-\zeta-2n)!(2kr)^{2n}}\right.$$
$$\left.-\sin\left(kr-\frac{\zeta\pi}{2}\right)\sum_{n=0}^{-\frac{\zeta+1}{2}}\frac{(-1)^n(-\zeta+2n+1)!}{(2n+1)!(-\zeta-2n-1)!(2kr)^{2n+1}}\right] \quad (3.74)$$

Pour $\zeta = 1, 2, 3, ...,$ nous avons

$$J_{\zeta+\frac{1}{2}}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\left[\sin\left(kr-\frac{\zeta\pi}{2}\right)\sum_{n=0}^{\frac{\zeta}{2}}\frac{(-1)^n(\zeta+2n)!}{(2n)!(\zeta-2n)!(2kr)^{2n}}\right.$$
$$\left.+\cos\left(kr-\frac{\zeta\pi}{2}\right)\sum_{n=0}^{\frac{\zeta+1}{2}}\frac{(-1)^n(\zeta+2n+1)!}{(2n+1)!(\zeta-2n-1)!(2kr)^{2n+1}}\right] \quad (3.75)$$

et

$$J_{-\zeta-\frac{1}{2}}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\left[\cos\left(kr+\frac{\zeta\pi}{2}\right)\sum_{n=0}^{\frac{\zeta}{2}}\frac{(-1)^n(\zeta+2n)!}{(2n)!(\zeta-2n)!(2kr)^{2n}}\right.$$
$$\left.-\sin\left(kr+\frac{\zeta\pi}{2}\right)\sum_{n=0}^{\frac{\zeta+1}{2}}\frac{(-1)^n(\zeta+2n+1)!}{(2n+1)!(\zeta-2n-1)!(2kr)^{2n+1}}\right]. \quad (3.76)$$

Considérons maintenant les deux équations

$$\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}+im\right)T_1(t) = ikT_2(t) \quad (3.77)$$

et

$$\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}-im\right)T_2(t) = ikT_1(t) \quad (3.78)$$

avec, pour l'espace de de-Sitter,

$$\mathcal{R}(t) = \exp(Ht) \quad (3.79)$$

Nous avons alors

$$H = \frac{\dot{\mathcal{R}}(t)}{\mathcal{R}(t)}. \quad (3.80)$$

En introduisant la variable

$$s = \frac{1}{\mathcal{R}(t)} \quad (3.81)$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{ds}{dt}\frac{\partial}{\partial s} = -\frac{\dot{\mathcal{R}}(t)}{\mathcal{R}^2(t)}\frac{\partial}{\partial s} = -Hs\frac{\partial}{\partial s} \tag{3.82}$$

nous obtenons le système d'équations

$$\left(-\frac{\partial}{\partial s} + i\frac{m}{Hs}\right)\tilde{T}_1(s) = i\frac{k}{H}\tilde{T}_2(s) \tag{3.83}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial s} - i\frac{m}{Hs}\right)\tilde{T}_2(s) = i\frac{k}{H}\tilde{T}_1(s) \tag{3.84}$$

qui se découple en produisant les équations différentielles suivantes

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{m^2}{H^2 s^2} + i\frac{m}{H}\frac{1}{s^2} - \frac{k^2}{H^2}\right]\tilde{T}_1(s) = 0 \tag{3.85}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{m^2}{H^2 s^2} - i\frac{m}{H}\frac{1}{s^2} - \frac{k^2}{H^2}\right]\tilde{T}_2(s) = 0. \tag{3.86}$$

Nous faisant le changement de variable $\xi = \frac{ks}{H}$, nous obtenons l'équation

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{m^2}{H^2} \pm i\frac{m}{H}\right)\frac{1}{\xi^2} - 1\right]\tilde{T}_{1,2}(\xi) = 0 \tag{3.87}$$

qui a comme solutions

$$T_1(t) = e^{\frac{1}{2}Ht} J_{\pm\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{H}{k}e^{-Ht}\right) \tag{3.88}$$

$$T_2(t) = e^{\frac{1}{2}Ht} J_{\mp\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{H}{k}e^{-Ht}\right) \tag{3.89}$$

où

$$\nu = \frac{im}{H}.$$

Nous avons donc donné les solutions exactes de l'équation de Dirac dans l'espace-temps de de-Sitter.

La fonction de Bessel admet le développement suivant

$$J_\lambda(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!}\frac{1}{\Gamma(\lambda + l + 1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+\lambda} \tag{3.90}$$

En utilisant la formule de Stirling

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &\simeq z^{\left(z-\frac{1}{2}\right)} e^{-z}\sqrt{2\pi} \\ &\simeq \sqrt{2\pi}\exp\left[-z + \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z\right]\end{aligned}$$

Nous pouvons avoir l'approximation

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \exp\left[(\lambda+1) - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\ln(\lambda+1)\right] \tag{3.91}$$

Donc, pour $\frac{m}{H} >> 1$, nous avons

$$J_{\nu\pm\frac{1}{2}}(z) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{im}{H}\left(1 + \ln\frac{k}{2m}\right) - imt\right] \tag{3.92}$$

D'après la dernière équation l'évolution dans le temps de la fonction d'onde est décrite par la phase

$$T_1(t) \backsim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{im}{H}\left(1 + \ln\frac{k}{2m}\right) - imt\right] \tag{3.93}$$

$$T_2(t) \backsim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{im}{H}\left(1 + \ln\frac{k}{2m}\right) - imt\right] \tag{3.94}$$

Il est bien connu que l'équation de Dirac décrit à la fois la particule et son antiparticule. Ainsi, les fonctions sinus ou cosinus doivent être réécrites comme la fonction exponentielle avec argument imaginaire. D'après les solutions exactes de l'équation de Dirac, nous pouvons extraire la phase totale de la solution générale dans l'espace-temps de de-Sitter qui peut s'écrire

$$phase = \frac{m}{H}\left[1 + \ln\left(\frac{k}{2m}\right)\right] - mt + \kappa r + \left(\overline{m} \pm \frac{1}{2}\right)\varphi \pm \frac{\zeta\pi}{2} + z_{\zeta,\overline{m}}(\theta) \tag{3.95}$$

où $z_{\zeta,\overline{m}}(\theta)$ est une fonction liée aux valeurs propres $\zeta, \overline{m}$ et la coordonnée θ

3.5 Oscillations de neutrinos

Il existe trois états de saveur pour les neutrinos, à savoir le neutrino électronique ν_e, le neutrino muonique ν_μ et le neutrino tauique ν_τ. Ces états peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires

$$\nu_\lambda = \sum_{I=1,2,3} U_{\lambda I}\nu_I \tag{3.96}$$

où $U_{\lambda I}$ est la matrice unitaire de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) servant de matrice de passage entre deux bases orthonormées de l'espace des états des neutrinos ; d'une part la base des états propres de saveur et d'autre part celle des états propres d'énergie ou de masse des neutrinos. Les ν_I avec $I = 1$, 2 et 3 correspondent aux trois états propres de masse avec les masses m_I, $I = 1$, 2 et 3, respectivement

$$\begin{aligned} \nu_e &= U_{e1}\nu_1 + U_{e2}\nu_2 + U_{e3}\nu_3 \\ \nu_\mu &= U_{\mu 1}\nu_1 + U_{\mu 2}\nu_2 + U_{\mu 3}\nu_3 \\ \nu_\tau &= U_{\tau 1}\nu_1 + U_{\tau 2}\nu_2 + U_{\tau 3}\nu_3. \end{aligned}$$

Dans les réactions faisant intervenir les neutrinos, ceux-ci sont produits dans un état de saveur bien défini. Comme cet état se décompose comme une superposition d'états propres de l'hamiltonien, de masses différentes, il n'est pas stationnaire mais évoluera au cours du temps pour donner lieu au phénomène d'oscillations de neutrinos.

Classiquement la matrice de mélange $U_{\lambda I}$ est paramétrée par trois angles de mélange, une phase de violation de la symétrie CP et deux phases de Majorana. Pour les besoins de l'étude des oscillations des neutrinos, nous ignorons la phase de la violation CP. Dans ce travail nous supposons que les neutrinos sont de type Dirac. Par conséquent, en termes d'angles de mélange α, β et η la matrice de mélange est donnée par

$$U\left(\alpha,\beta,\eta\right) = \begin{pmatrix} c_\alpha c_\eta & s_\alpha c_\eta & s_\eta \\ -c_\alpha s_\beta s_\eta & -s_\alpha c_\beta + c_\alpha c_\beta - s_\alpha s_\beta s_\eta & s_\beta c_\eta \\ -c_\alpha c_\beta s_\eta + s_\alpha s_\beta & -c_\alpha s_\beta - s_\alpha c_\beta s_\eta & c_\beta c_\eta \end{pmatrix} \tag{3.97}$$

où $c_\xi = \cos\xi \quad , \; s_\xi = \sin\xi$ avec $\xi = \alpha, \beta, \eta$.

Nous supposons qu'un état propre de saveur, électronique par exemple, est émis en un point $P(t_e, r_e, \theta_e, \varphi_e)$, nous nous intéressons à sa propagation radiale, et nous supposons aussi que les différents états propres de masses ont le même moment cinétique total ζ. Par conséquent, dans la représentation de la quantité de mouvement, les états propres de masse doivent avoir une valeur propre différente k notée par k_I (k_1, k_2, k_3).

Dans l'espace de de-Sitter l'évolution d'un état propre de masse est donnée par

$$\nu_I\left(t > t_e, r\right) = \exp\left\{i\frac{m_I}{H}\left[1 + \ln\left(\frac{k_I}{2m_I}\right)\right] - im_I\left(t - t_e\right) + ik_I\left(r - r_e\right) + i\Pi\right\}\nu_I\left(P\right) \tag{3.98}$$

où Π est le facteur de phase qui est le même pour tous les états propres de masse.

Si un état propre de saveur ν_λ est créé en un point P, alors la probabilité de trouver un état propre de saveur $\nu_{\acute{\lambda}}$ en un point $Q\left(t_f, r_f, \theta_e, \varphi_e\right)$ est donné par :

$$
\begin{aligned}
P\left(\nu_\lambda \longrightarrow \nu_{\acute{\lambda}}\right) &= \left|\nu_{\acute{\lambda}}(Q)\right|^2 \\
&= \sum_{I,J}^{3}\left\{U_{\acute{\lambda}I}\exp\left[-im_I\left(t_f-t_e\right)+ik_I\left(r_f-r_e\right)+i\frac{m_I}{H}\left[1+\ln\left(\frac{k_I}{2m_I}\right)\right]\right]U_{\lambda I}\right\} \\
&\quad \left\{U_{\acute{\lambda}J}\exp\left[+im_I\left(t_f-t_e\right)-ik_I\left(r_f-r_e\right)-i\frac{m_J}{H}\left[1+\ln\left(\frac{k_J}{2m_J}\right)\right]\right]U_{\lambda J}\right\}
\end{aligned} \tag{3.99}
$$

Compte tenu du fait que la matrice U est unitaire, nous obtenons

$$
P\left(\nu_\lambda \longrightarrow \nu_{\acute{\lambda}}\right) = \delta_{\acute{\lambda}\lambda} - 2\sum_{I,J}^{3} U_{\acute{\lambda}I}U_{\lambda I}U_{\acute{\lambda}I}U_{\lambda J}\sin^2\left(\omega_{IJ}\right)
$$

où

$$
\omega_{IJ} = \frac{\Delta k_{IJ}\Delta r}{2} - \frac{\Delta m_{IJ}\Delta t}{2} + \frac{\Delta m_{IJ}}{2H} + \frac{1}{2H}\ln\left[\left(\frac{k_J}{2m_J}\right)^{m_J}\left(\frac{2m_I}{k_I}\right)^{m_I}\right] \tag{3.100}
$$

avec

$$
\Delta r = r_f - r_e \ , \qquad \Delta t = t_f - t_e \tag{3.101}
$$

et

$$
\Delta k_{IJ} = k_I - k_J \ , \qquad \Delta m_{IJ} = m_J - m_I. \tag{3.102}
$$

Nous avons alors l'expression de la probabilité d'oscillation des neutrinos dans l'espace-temps de de-Sitter, qui montre que cette probabilité dépend non seulement des positions, masses et impulsions, mais aussi de la constante de Hubble H.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les oscillations des neutrinos dans l'espace-temps de de-Sitter en considérant l'équation covariante de Dirac. Les solutions exactes de l'équation de Dirac sont obtenues dans les coordonnées sphériques. La phase de la fonction d'onde de spin 1/2 est obtenue. Ensuite, l'expression de la probabilité d'oscillation des neutrinos dans l'espace-temps de de-Sitter est obtenue. Notre résultat est assez différent de la forme standard dans l'espace-temps de Minkowski en raison de la topologie différente de l'espace de de-Sitter.

Chapitre 4

Les oscillations de neutrinos dans L'espace-temps R-Minkowski

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier les oscillations de neutrino dans un espace-temps R-Minkowskien. Nous commencerons par établir l'équation de Dirac qui décrit le mouvement d'un neutrino. Ensuite nous cherchons les solutions de cette équation pour calculer la probabilité du changement de la saveur du neutrino.

D'abord nous cherchons l'équation de Klein Gordon en considérons l'opérateur de Casimir et le principe de correspondance. Pour l'équation de Dirac nous nous proposons de linéariser l'opérateur de Klein Gordon en tenant compte de l'effet du spin.

En écrivant l'équation de Dirac obtenue en coordonnées sphérique nous pouvons construire les ondes sphériques qui décrit la propagation du neutrino, ce qui nous permet de calculer la probabilité de transition d'une saveur à une autre.

4.2 Equations relativistes dans l'espace-temps de Minkowski

La première équation pour une particule relativiste libre en mécanique quantique résulte de l'application du principe de correspondance, qui consiste à remplacer les observables classiques par des opérateurs agissant sur les fonctions d'onde. Dans la représentation de position, le principe de correspondance stipule que l'énergie est associée à l'opérateur

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \tag{4.1}$$

tandis que la quantité de mouvement $\vec{p}$ est associée au gradient $\overrightarrow{\nabla}$,

$$\vec{p} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla}. \tag{4.2}$$

L'incorporation de ces opérateurs dans la relation de dispersion relativiste

$$E^2 = p^2 + m^2 \tag{4.3}$$

donne directement l'équation de Klein Gordon

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\varphi = 0, \tag{4.4}$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme covariante

$$\left[\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right] \varphi = 0. \tag{4.5}$$

Pour l'équation de Dirac nous pouvons linéariser l'opérateur $\partial^\mu \partial_\mu + m^2$ comme suit

$$\partial^\mu \partial_\mu + m^2 = -\left(i\gamma^\mu \partial_\mu + m\right)\left(i\gamma^\nu \partial_\nu - m\right). \tag{4.6}$$

Ici, les matrices γ^μ vérifient l'algèbre

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}.$$

L'équation de Dirac est donc

$$\left(i\gamma^\nu \partial_\nu - m\right)\psi = 0. \tag{4.7}$$

4.3 Relation de dispersion dans l'espace-temps R-Minkowski

Pour trouver un invariant relativiste et ainsi pouvoir écrire une relation entre l'énergie E et la quantité de mouvement p considérons la quantité $\eta_{\mu\nu}p'^\mu p'^\nu$, où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski. Nous avons

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}p'^\mu p'^\nu &= \left(p'^{0^2} - \overrightarrow{p'}^2\right) = \alpha_R^2\gamma^2\left[(E-\beta p_x)^2 - (p_x - \beta E)^2 - p_y^2 - p_z^2\right] \\
&= \alpha_R^2\left(E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2\right) = \eta_{\mu\nu}\alpha_R^2 p^\mu p^\nu.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Il vient alors que

$$\eta_{\mu\nu}p'^\mu p'^\nu = \alpha_R^2 \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \tag{4.9}$$

La quantité $\eta_{\mu\nu}p'^\mu p'^\nu$ n'est pas donc invariante sous les R-transformations. Cependant, comme

$$\alpha_R = \left(1 - \frac{t}{R}\right)\left(1 - \frac{t'}{R}\right)^{-1} \tag{4.10}$$

nous pouvons écrire

$$\eta_{\mu\nu}p'^\mu p'^\nu = \left(1 - \frac{t}{R}\right)^2\left(1 - \frac{t'}{R}\right)^{-2}\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu \tag{4.11}$$

ce qui montre que la quantité $\left(1 - \frac{t}{R}\right)^2\left(E^2 - \overrightarrow{p}^2\right)$ est conservée. La relation de dispersion est donc

$$\left(1-\frac{t}{R}\right)^2\left(E^2-\overrightarrow{p}^2\right)=m^2 \tag{4.12}$$

ou bien

$$E^2=\overrightarrow{p}^2+\frac{m^2}{\left(1-\frac{t}{R}\right)^2}. \tag{4.13}$$

4.4 Equation de Klein-Gordon dans l'espace-temps R-Minkowski

Comme dans le cas ordinaire, le principe de correspondance appliqué à la relation de dispersion nous donne l'équation de Klein-Gordon dans l'espace-temps R-Minkowski

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi=\left[\left(-i\overrightarrow{\nabla}\right)^2+\frac{m^2}{\left(1-\frac{t}{R}\right)^2}\right]\psi \tag{4.14}$$

La dernière équation peut s'écrire aussi sous la forme

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu+\left(\frac{mR}{R-t}\right)^2\right]\psi=0 \tag{4.15}$$

4.5 Equation de Dirac dans l'espace-temps R-Minkowski

En introduisant les matrices de Dirac γ^μ nous pouvons écrire

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu+\frac{mR}{R-t}\right)\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-\frac{mR}{R-t}\right)=-\left[\partial_\mu\partial^\mu+\left(\frac{mR}{R-t}\right)^2\right]+.... \tag{4.16}$$

Ici, les points dans le second membre représente un additionnel terme qui représente l'effet du spin. A partir de cette factorisation nous en déduisons l'opérateur linéaire de Dirac et l'équation correspondante

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-\frac{mR}{R-t}\right)\psi=0. \tag{4.17}$$

Notons que cette équation est équivalente à l'équation de Dirac (3.40) dans un l'espace de de-Sitter avec le temps conforme

$$\eta=t-R \tag{4.18}$$

et le facteur d'échelle

$$\mathcal{R}\left(\eta\right)=\frac{R}{R-t}=-\frac{R}{\eta}. \tag{4.19}$$

Nous avons alors l'équation

$$\left[i\gamma^{\mu}\tilde{\partial}_{\mu}-m\mathcal{R}\left(\eta\right)\right]\psi\left(\overrightarrow{r},\eta\right)=0 \tag{4.20}$$

qui est similaire à l'équation (3.40) dérivée pour l'espace de de-Sitter.

Etudions la covariance de l'équation (4.17)

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-\frac{m}{1-\frac{t}{R}}\right)\psi=0. \tag{4.21}$$

Nous avons la loi de transformation

$$i\partial_{\mu}^{\prime}=\alpha_{R}\Lambda_{\mu}{}^{\nu}i\partial_{\nu} \tag{4.22}$$

où $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ est la matrice de transformation de Lorentz. Nous supposons que $\psi\left(x\right)$ se transforme comme

$$\psi\left(x\right)\rightarrow\psi^{\prime}\left(x^{\prime}\right)=S\left(\Lambda\right)\psi\left(x\right) \tag{4.23}$$

où $S\left(\Lambda\right)$ vérifie la condition suivante

$$S^{-1}\left(\Lambda\right)\Lambda^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu}S\left(\Lambda\right)=\gamma^{\nu} \tag{4.24}$$

Partons alors de l'équation

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}^{\prime}-\frac{m}{1-\frac{t^{\prime}}{R}}\right)\psi^{\prime}\left(x^{\prime}\right)=0. \tag{4.25}$$

Il vient donc

$$\left(\alpha_{R}i\gamma^{\mu}\Lambda_{\mu}{}^{\nu}\partial_{\nu}-\frac{m}{1-\frac{t^{\prime}}{R}}\right)S\left(\Lambda\right)\psi\left(x\right)=0 \tag{4.26}$$

Multipliant la dernière équation par $S^{-1}\left(\Lambda\right)$ et tenant compte de la condition (4.24), nous obtenons

$$\left(\alpha_{R}i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}-\frac{m}{1-\frac{t^{\prime}}{R}}\right)\psi\left(x\right)=0. \tag{4.27}$$

Mais α_{R} est donnée par

$$\alpha_{R}=\left(1-\frac{t}{R}\right)\left(1-\frac{t^{\prime}}{R}\right)^{-1} \tag{4.28}$$

L'équation (4.27) devient

$$\left(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}-\frac{m}{\left(1-\frac{t}{R}\right)}\right)\psi\left(x\right)=0. \tag{4.29}$$

ce qui montre la covariance de l'équation (4.17).

4.6 Solution de l'équation de Dirac dans l'espace-temps R-Minkowski

Pour résoudre l'équation précédente nous écrivons d'abord $\psi\left(\overrightarrow{r},\eta\right)$ sous la forme

$$\psi\left(\overrightarrow{r},\eta\right)=\begin{pmatrix}\varphi_1\left(\overrightarrow{r},\eta\right)\\ \varphi_2\left(\overrightarrow{r},\eta\right)\end{pmatrix} \tag{4.30}$$

avec la décomposition habituelle

$$\varphi_1\left(\overrightarrow{r},\eta\right)=Y_J^M\left(\theta,\varphi\right)\varphi\left(r,\eta\right) \tag{4.31}$$

et

$$\varphi_2\left(\overrightarrow{r},\eta\right)=\left(\frac{\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{r}}{r}\right)Y_J^M\left(\theta,\varphi\right)\chi\left(r,\eta\right). \tag{4.32}$$

Dans l'équation de Dirac (4.20), nous remplaçons $i\gamma^\mu\partial_\mu$ par

$$i\gamma^\mu\partial_\mu=i\gamma^0\frac{\partial}{\partial\eta}+i\overrightarrow{\gamma}.\overrightarrow{\nabla}$$

pour obtenir l'équation

$$\left[i\gamma^0\frac{\partial}{\partial\eta}+i\overrightarrow{\gamma}.\overrightarrow{\nabla}-m\mathcal{R}\left(\eta\right)\right]\psi\left(\overrightarrow{r},\eta\right)=0$$

Maintenant en utilisant la propriété $\overrightarrow{\gamma}=\gamma^0\gamma^5\overrightarrow{\Sigma}$ et la définition $\overrightarrow{p}=-i\overrightarrow{\nabla}$, nous pouvons écrire la dernière équation sous la forme

$$\left[i\frac{\partial}{\partial\eta}-\gamma^5\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{p}-\gamma^0 m\mathcal{R}\left(\eta\right)\right]\psi\left(\overrightarrow{r},\eta\right)=0 \tag{4.33}$$

Pour introduire les coordonnées sphériques, nous utilisons les deux propriétés suivantes

$$\left(\frac{\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{r}}{r}\right)^2=1 \tag{4.34}$$

et

$$\left(\frac{\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{r}}{r}\right)\left(\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{p}\right)=\left(\frac{\overrightarrow{r}}{r}.\overrightarrow{p}\right)+i\overrightarrow{\Sigma}.\left(\frac{\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{p}}{r}\right). \tag{4.35}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{p} &= \left(\frac{\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{r}}{r}\right)^2\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{p}\\ &= \left(\frac{\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{r}}{r}\right)\left(\frac{\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{r}}{r}\right)\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{p}\\ &= \left(\frac{\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{r}}{r}\right)\left[\left(\frac{\overrightarrow{r}}{r}.\overrightarrow{p}\right)+i\overrightarrow{\Sigma}.\left(\frac{\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{p}}{r}\right)\right].\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{r}.\overrightarrow{p} = -i\overrightarrow{r}.\overrightarrow{\nabla} = -i\frac{\partial}{\partial r}$ et $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} = \overrightarrow{L}$, nous obtenons l'équation

$$\left[i\frac{\partial}{\partial \eta} - \gamma^5\left(\frac{\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{r}}{r}\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} + i\frac{K}{r}\right) - \gamma^0 m\mathcal{R}(\eta)\right]\psi(\overrightarrow{r},\eta) = 0$$

où K est l'opérateur de Dirac

$$K = \overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{L} + 1 = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L}+1 & 0 \\ 0 & \overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L}+1 \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Sous forme matricielle la dernière équation s'écrit

$$i\frac{\partial}{\partial \eta}\begin{pmatrix} \varphi_1(\overrightarrow{r},\eta) \\ \varphi_2(\overrightarrow{r},\eta) \end{pmatrix} - m\mathcal{R}(\eta)\begin{pmatrix} \varphi_1(\overrightarrow{r},\eta) \\ -\varphi_2(\overrightarrow{r},\eta) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & i\frac{\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{r}}{r}\left[i\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right) + i\frac{\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L}+1}{r}\right] \\ i\frac{\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{r}}{r}\left[i\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right) - i\frac{\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L}+1}{r}\right] & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1(\overrightarrow{r},\eta) \\ \varphi_2(\overrightarrow{r},\eta) \end{pmatrix}.$$

Les composantes $\varphi_1(\overrightarrow{r},\eta)$ et $\varphi_2(\overrightarrow{r},\eta)$ vérifient alors le système d'équations

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + im\mathcal{R}(\eta)\right)\varphi_1(\overrightarrow{r},\eta) = i\frac{\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{r}}{r}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right) + \frac{\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L}+1}{r}\right]\varphi_2(\overrightarrow{r},\eta) \tag{4.37}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} - im\mathcal{R}(\eta)\right)\varphi_2(\overrightarrow{r},\eta) = i\frac{\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{r}}{r}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right) - \frac{\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L}+1}{r}\right]\varphi_1(\overrightarrow{r},\eta) \tag{4.38}$$

Comme les fonctions $Y_J^M(\theta,\varphi)$ sont des fonctions propre à l'opérateur $\left(\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L}+1\right)$

$$\left(\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L}+1\right)Y_J^M(\theta,\varphi) = \kappa Y_J^M(\theta,\varphi) \tag{4.39}$$

et compte tenu du fait que

$$\left[\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{L}+1, \overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{r}\right] = 0 \tag{4.40}$$

nous obtenons pour les parties radiales dépendant du temps $\varphi(r,\eta)$ et $\chi(r,\eta)$ le système d'équations suivant

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + im\mathcal{R}(\eta)\right)\varphi(r,\eta) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right) + \frac{\kappa}{r}\right]\chi(r,\eta) \tag{4.41}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} - im\mathcal{R}(\eta)\right)\chi(r,\eta) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right) - \frac{\kappa}{r}\right]\varphi(r,\eta) \tag{4.42}$$

En faisant la séparation des variables

$$\varphi(r,\eta) = \frac{1}{r}U_1(r)\,T_1(\eta) \tag{4.43}$$
$$\chi(r,\eta) = \frac{1}{r}U_2(r)\,T_2(\eta) \tag{4.44}$$

nous obtenons les deux équations

$$\frac{1}{T_2(\eta)}\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + im\mathcal{R}(\eta)\right)T_1(\eta) = \frac{1}{U_1(r)}\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\kappa}{r}\right]U_2(r) \tag{4.45}$$

et

$$\frac{1}{T_1(\eta)}\left(\frac{\partial}{\partial\eta} - im\mathcal{R}(\eta)\right)T_2(\eta) = \frac{1}{U_2(r)}\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\kappa}{r}\right]U_1(r) \tag{4.46}$$

Nous avons alors pour les parties dépendantes du temps

$$\frac{1}{T_2(\eta)}\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + im\mathcal{R}(\eta)\right)T_1(\eta) = ik \tag{4.47}$$
$$\frac{1}{T_1(\eta)}\left(\frac{\partial}{\partial\eta} - im\mathcal{R}(\eta)\right)T_2(\eta) = ik \tag{4.48}$$

où k est une constante.

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + im\mathcal{R}(\eta)\right)T_1(\eta) = ikT_2(\eta) \tag{4.49}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} - im\mathcal{R}(\eta)\right)T_2(\eta) = ikT_1(\eta) \tag{4.50}$$

Pour les parties radiales, nous obtenons le système d'équations

$$ikU_1(r) = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\kappa}{r}\right)U_2(r) \tag{4.51}$$
$$ikU_2(r) = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\kappa}{r}\right)U_1(r) \tag{4.52}$$

qui, par itération, nous mène aux équations du second ordre suivantes

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} + k^2\right)U_1(r) = 0 \tag{4.53}$$
$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2} + k^2\right)U_2(r) = 0. \tag{4.54}$$

En posant $\rho = kr$, $U_1(r) = \frac{1}{\sqrt{\xi}}u_1(\xi)$ et $U_2(r) = \frac{1}{\sqrt{\xi}}u_2(\xi)$, nous obtenons pour $u_1(\xi)$ et $u_2(\xi)$ deux équations similaires à celle de Bessel

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \left(1 - \frac{\lambda_{1,2}^2}{\rho^2}\right)\right)u_{1,2}(\rho) = 0, \tag{4.55}$$

avec

$$\lambda_1 = \pm\left(\kappa + \frac{1}{2}\right) \tag{4.56}$$

$$\lambda_2 = \pm\left(\kappa - \frac{1}{2}\right). \tag{4.57}$$

Nous avons alors les solutions

$$U_1(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{\pm\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)}(kr) \tag{4.58}$$

et

$$U_2(r) = \frac{1}{\sqrt{k}} J_{\pm\left(k-\frac{1}{2}\right)}(kr) \tag{4.59}$$

Considérons maintenant les deux équations (4.49) et (4.50)

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} - i\frac{mR}{\eta}\right) T_1(\eta) = ikT_2(\eta) \tag{4.60}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + i\frac{mR}{\eta}\right) T_2(\eta) = ikT_1(\eta) \tag{4.61}$$

Il n'est pas difficile d'obtenir les deux équations différentielles

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{m^2R^2}{\eta^2} + i\frac{mR}{\eta^2} + k^2\right] T_1(\eta) = 0 \tag{4.62}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{m^2R^2}{\eta^2} - i\frac{mR}{\eta^2} + k^2\right] T_2(\eta) = 0 \tag{4.63}$$

Comme dans le cas précédent nous pouvons intervenir l'équation de Bessel

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \left(1 - \frac{\Lambda_{1,2}^2}{\xi^2}\right)\right) F_{1,2}(\xi) = 0, \tag{4.64}$$

en posant $\xi = k\eta$ et $F_{1,2}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{k\eta}} T_{1,2}(\eta)$. Les constantes Λ_1 et Λ_2 sont données par

$$\Lambda_1 = \Lambda = \frac{1}{2} + imR \tag{4.65}$$

$$\Lambda_2 = \Lambda^* = \frac{1}{2} - imR. \tag{4.66}$$

Nous avons alors les solutions

$$T_1(\eta) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{\pm\left(\frac{1}{2}+imR\right)}(k\eta) \tag{4.67}$$

et

$$T_1(\eta) = \frac{1}{\sqrt{k}} J_{\mp\left(\frac{1}{2}-imR\right)}(k\eta) \tag{4.68}$$

Comme dans le chapitre précédent nous pouvons écrire

$$J_{\nu-\frac{1}{2}}(k(t-R)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{imR + imR\ln\left(1-\frac{t}{R}\right) + imR\ln\left(\frac{\kappa}{m}\right)\right\} \tag{4.69}$$

En utilisant l'approximation

$$\ln\left(1-\frac{t}{R}\right) \sim -\frac{t}{R}$$

nous obtenons la phase

$$\varphi_\eta \backsim mR\left(1+\ln\left(\frac{\kappa}{m}\right)\right) - mt.$$

4.7 Oscillations de neutrinos dans l'espace-temps R-Minkowski

En faisant les mêmes étapes que dans l'espace de de-Sitter

$$\nu_I(t \succ t_e, r) = \exp\left\{im_I\left[1+\ln\left(\frac{k_I}{2m_I}\right)\right] - im_I(t-t_e) + ik_I(r-r_e) + i\Pi\right\}\nu_I(P) \tag{4.70}$$

nous obtenons la probabilité de trouver un état propre de saveur $\nu_{\acute{\lambda}}$ en un point $Q(t_f, r_f, \theta_e, \varphi_e)$

$$\begin{aligned} P(\nu_\lambda \longrightarrow \nu_{\acute{\lambda}}) &= \sum_{I,J}^{3}\left\{U_{\acute{\lambda}I}\exp\left[-im_I(t_f-t_e) + ik_I(r_f-r_e) + i\frac{m_I}{H}\left[1+\ln\left(\frac{k_I}{2m_I}\right)\right]\right]U_{\lambda I}\right\} \\ &\quad \left\{U_{\acute{\lambda}J}\exp\left[+im_I(t_f-t_e) - ik_I(r_f-r_e) - i\frac{m_J}{H}\left[1+\ln\left(\frac{k_J}{2m_J}\right)\right]\right]U_{\lambda\acute{\lambda}}\right\} \end{aligned} \tag{4.71}$$

qui se réduit à

$$P(\nu_\lambda \longrightarrow \nu_{\acute{\lambda}}) = \delta_{\acute{\lambda}\lambda} - 2\sum_{I,J}^{3} U_{\acute{\lambda}I}U_{\lambda I}U_{\acute{\lambda}I}U_{\lambda J}\sin^2(\omega_{IJ}) \tag{4.72}$$

où

$$\omega_{IJ} = \frac{\Delta k_{IJ}\Delta r}{2} - \frac{\Delta m_{IJ}\Delta t}{2} + \frac{R}{2}\Delta m_{IJ} + \frac{R}{2}\ln\left[\left(\frac{k_J}{2m_J}\right)^{m_J}\left(\frac{2m_I}{k_I}\right)^{m_I}\right] \tag{4.73}$$

avec

$$\Delta r = r_f - r_e\ , \qquad \Delta t = t_f - t_e \tag{4.74}$$

et

$$\Delta k_{IJ} = k_I - k_J\ , \qquad \Delta m_{IJ} = m_J - m_I\ . \tag{4.75}$$

L'équation (4.72) montre que la probabilité d'oscillation de neutrinos dans l'espace-temps R-Minkowski est similaire à celle de l'espace de de-Sitter avec le changement $H \to \frac{1}{R}$.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons voulu étudier les oscillations de neutrinos en considérant l'espace-temps R-Minkowski dans lequel les transformations qui décrivent le changement d'un référentiel à un autre sont celles de Fock-Lorentz.

En premier lieu nous avons établi les équations relativistes de Klein Gordon et de Dirac. Ensuite, nous avons pu résoudre l'équation de Dirac en coordonnées sphérique. A partir des solutions obtenues nous avons pu calculer la probabilité du changement de saveur de neutrino. L'expression de la probabilité obtenue est identique à celle des oscillations de neutrinos dans l'espace de de-Sitter.

Chapitre 5

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous pouvons voir qu'il a été principalement question d'étude d'un phénomène physique dans le cadre de la relativité R-déformée. Contrairement à la relativité restreinte, le passage d'un référentiel à un autre dans la relativité R-déformée est décrit par des transformations non linéaires dites de Fock-Lorentz. En plus de la constante c, cette théorie possède un autre invariant R qui a la dimension d'une longueur et qui peut être interprété comme le rayon observable de l'univers. Le phénomène considéré est le changement de la saveur du neutrino lors de sa propagation (oscillations de neutrinos).

Dans le deuxième chapitre nous avons établit les transformations de Fock-Lorentz à partir d'une déformation du groupe de Poincaré. Nous avons montré que l'ensemble de ces transformations non linéaires a la structure de groupe. Nous avons également montré que dans ce cas l'espace-temps est similaire à l'espace-temps de de-Sitter.

Comme l'espace R-Minkowski est identique à l'espace de de-Sitter, nous avons considéré dans le troisième chapitre, les oscillations de neutrinos dans un espace-temps de de-Sitter qui décrit un univers en expansion avec un facteur d'échelle en exponentielle. En premier lieu, nous avons montré comment écrire l'équation de Dirac dans un espace courbe. Ensuite, nous avons obtenu les solutions de cette équation pour l'espace de de-Sitter. La phase de la fonction d'onde de spin $1/2$ est obtenue, nous avons calculé la probabilité d'oscillation des neutrinos dans l'espace-temps de de-Sitter.

Dans le quatrième chapitre nous avons étudié les oscillations de neutrinos dans l'espace-temps R-Minkowski en considérant les transformations de Fock-Lorentz. D'abord, nous avons établi l'équation de Dirac. Ensuite, nous avons pu résoudre cette équation en coordonnées sphériques. A partir des solutions obtenues nous avons pu calculer la probabilité du changement de saveur du neutrino. L'expression de la probabilité obtenue est identique à celle des oscillations de neutrino dans l'espace de de-Sitter.

Bibliographie

[1] B. Pontecorvo, Mesonium and antimesonium, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 33 (1957).

[2] Y. Fukuda, T. Hayakawa, E. Ichihara, K. Inoue, K. Ishihara, Hirokazu Ishino, Y. Itow, T. Kajita, J. Kameda, S. Kasuga, et al., Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos, Phys. Rev. Lett. 81(8) (1998) 1562.

[3] M. Beuthe, Oscillations of neutrinos and mesons in quantum field theory, Phys. Rep. 375(2–3) (2003) 105–218.

[4] C. Giunti, C. W. Kim, J.A. Lee, U.W. Lee, Treatment of neutrino oscillations without resort to weak eigen-states, Phys. Rev. D 48(9) (1993) 4310.

[5] C. Y. Cardall, Coherence of neutrino flavor mixing in quantum field theory, Phys. Rev. D 61(7) (2000) 073006.

[6] W. Grimus, S. Mohanty, P. Stockinger, Field-theoretical treatment of neutrino oscillations : the strength of the canonical oscillation formula, arXiv preprint, arXiv :hep -ph /9909341, 1999.

[7] F. del Aguila, J. Syska, M. Zrałek, Neutrino oscillations beyond the standard model, J. Phys. Conf. Ser. 136 (2008) 042027.

[8] V. Antonelli, L. Miramonti, M.D.C. Torri, Neutrino oscillations and Lorentzinvariance violation in a Finsleriangeometrical model, Eur. Phys. J. C 78(8) (2018) 667.

[9] P. Hernandez, Neutrino physics, arXiv preprint, arXiv :1708 .01046, 2017.

[10] R. W. Rasmussen, L. Lechner, M. Ackermann, M. Kowalski, W. Winter, Astrophysical neutrinos flavored with beyond the standard model physics, Phys. Rev. D 96(8) (2017) 083018.

[11] H. Päs, Neutrino masses and particle physics beyond the standard model, Ann. Phys. 11(8) (2002) 551–572.

[12] V. Fock, The Theory of Space, Time and Gravitation, Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris (1964).

[13] A. Bouda and T. Foughali, Mod. Phys. Lett. A27, 1250036 (2012), arXiv e-print : 1204.6397.

[14] T. Foughali and A. Bouda, Can. J. Phys. 93, 734 (2015), arXiv e-print : 1605.01943.

[15] S. N. Manida, Fock-Lorentz transformations and time-varying speed of light, arXiv : gr-qc/9905046.

[16] J.G. Pereira, C.M. Zhang, Some remarks on the neutrino oscillation phase in a gravitational field, Gen. Relativ. Gravit. 32(8) (2000) 1633–1637.

[17] L. Visinelli, Neutrino flavor oscillations in a curved space-time, Gen. Relativ. Gravit. 47(5) (2015) 62.

[18] M. Adak, T. Dereli, Lewis H. Ryder, Neutrino oscillations induced by spacetime torsion, Class. Quantum Gravity 18(8) (2001) 1503.

[19] N. Fornengo, C. Giunti, C.W. Kim, J. Song, Gravitational effects on the neutrino oscillation, Phys. Rev. D 56(4) (1997) 1895.

[20] Huang Xiu-Ju, Li Ze-Jun, Wang Yong-Jiu, Mass neutrino oscillations in Robertson–Walkerspace–time, Chin. Phys. 15(1) (Jan 2006) 229–231.

[21] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover (1964).

[22] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series, and Products, Corrected and Enlarged Edition, Academic Press, Inc, New York (1980).