REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique

N° d'ordre :
Série :

Mémoire

présenté pour obtenir le diplome de

Master en physique

Option : Physique Théorique

par

Chettibi Ahlam

Thème
Formulation hamiltonienne de la relativité générale

Soutenu le : 12 /07/2022

Devant le Jury :

Président	Kh. Nouicer	Prof.	Univ. Jijel
Encadreur	N. Ferkous	MCA	Univ. Jijel
Examinateur	T. Boudjedaa	Prof.	Univ. Jijel

Table des matières

1 Introduction générale **5**

2 Quelques notions Mathématiques **7**

2.1 Introduction 7
2.2 Quelques formules et définitions de base 7
2.3 La dérivée de Lie 8
2.4 La décomposition 3+1 de l'espace temps 9
2.5 La fonctions Shift et Lapse 11
2.6 Géométrie des hypersurfaces 12
2.7 Les courbures intrinsèque et extrinséque 17
2.8 Décomposition du tenseur de courbure 18

3 Formulation lagrangienne de la relativité générale **19**

3.1 Introduction 19
3.2 Variation de l'action 20

4 Formulation hamiltonienne de la relativité générale **23**

4.1 Introduction 23
4.2 L'action d'Einstein Hilbert en décomposition (3+1) 24
4.3 Formalisme hamiltonien de la RG 25

5 Conclusion **28**

A Annexes **30**

A.1 Annexe A 30
A.2 Annexe B 32

A.3 Annexe C 37
A.4 Annexe D 39

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur ***Nourredine Ferkous****, Maître de conférences à l'université de Jijel, pour ces précieux conseils et sa disponibilité. Merci Monsieur pour la confiance que vous m'avez accordée au cours de ce travail. Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Monsieur le Professeur* ***Kh. Nouicer*** *qui m'a fait l'honneur d'avoir accepter de présider le jury. Mes remerciements sont également adressés Monsieur le Professeur* ***T. Boudjedaa*** *pour avoir accepter d'examiner ce travail.*

Et bien sûr, je n'oublie pas d'adresse mes remerciements à Lamri Houria, la secrétaire de LPTh pour son aide.

Enfin, je tiens à exprimer mes sincères remerciements et mes gratitudes à mes parents pour leur patience et leurs encouragements afin d'atteindre un tel jour spécial dans ma vie, sans oublier de remercier mes proches et mes amies.

Ahlam

Chapitre 1

Introduction générale

La relativité générale est l'une des théories les plus élégantes et les plus puissantes de la physique. Elle repose sur le principe d'équivalence, qui stipule que la gravité affecte tous les corps de la même manière, rendant impossible de distinguer les effets d'un champ gravitationnel de ceux d'un référentiel en accélération uniforme, et sur l'indépendance des lois physiques par rapport au référentiel. Ces hypothèses, combinées à l'hypothèse que l'espace-temps est une structure courbe décrite par une métrique, conduisent à attribuer la distribution de la matière à la géométrie de l'espace-temps lui-même. Cette relation est décrite par les équations du champ d'Einstein.

La théorie de la relativité générale est introduite généralement via le formalisme lagrangien. Comme en mécanique classique ordinaire, le formalisme hamiltonien ou canonique est une description équivalente au formalisme lagrangien, cela est également vrai dans le contexte de la relativité générale. Mais ce formalisme hamiltonien de la relativité générale n'est pas aussi trivial puisque dans le formalisme lagrangien, l'espace et le temps sont traités sur le même pied d'égalité, alors que dans l'approche hamiltonienne, nous devons paramétrer le temps et créer un feuilletage (temps + espace) de l'espace-temps. Puisque seules les dérivées temporelles sont transformées en moments conjugués mais pas les dérivées spatiales. Ceci n'est pas trivial car la relativité générale n'admet pas de paramétrisation naturelle pour le temps et donc le choix d'une coordonnée temporelle particulière reste arbitraire dans l'approche hamilotnienne.

Le but de ce mémoire est de passer en revue les détails de cette procédure canonique et de présenter un formalisme canonique de la relativité générale dit le formalisme ADM développé par R. Arnowitt, S. Deser et C. W. Misner en 1959 [1, 2] , c'est un premier pas vers une quantification possible. Ce formalisme suppose que l'espace-temps est feuilleté en une famille de surfaces de genre espace Σ_t, marquées par un temps t. Les variables dynamiques de cette théorie sont considérées comme étant le tenseur métrique h_{ij} des surfaces spatiales 3-dimensionnelles et leurs moments conjugués π^{ij}. En utilisant ces variables, il est possible de définir un hamiltonien et d'écrire ainsi les équations du mouvement pour la relativité générale sous la forme des équations de Hamilton-Jacobi. Pour simplier, nous allons ignorer toujours les termes de divergence (termes aux limites). Par conséquent, deux concepts importants manquants dans ce travail sont : la masse et l'impulsion ADM. Le signe de la métrique de l'espace-temps $g_{\mu\nu}$ sera pris égal à $(-,+,+,+)$ et la constante cosmologique Λ sera mise à zéro. Les unités avec lesquelles nous allons travailler sont les unités naturelles où nous fixons la constante gravitationnelle de Newton G et la vitesse de la lumière c, toutes deux égales à 1.

Le reste de ce mémoire est organisé comme suit : le deuxième chapitre contient un rappel de quelques outils et notions mathématiques nécéssaires pour ce travail. Le troisième chapitre fournit une dérivation brève des équations du champ d'Einstein en utilisant l'action d'Einstein-Hilbert dans la formulation lagrangienne. Au quatrième chapitre, on expose le formalisme ADM de la relativité générale. Nous terminons ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 2

Quelques notions Mathématiques

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous commençons par définir les opérations mathématiques de base et les formules utiles qui sont inévitables dans l'étude de la relativité générale. Puis, on va expliquer la décomposition (3+1) de l'espace-temps et se préparer à la formulation hamiltonienne qui sera discutée en détail au chapitre 4.

2.2 Quelques formules et définitions de base

On considére une variété différentielle sans torsion $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ où $g_{\mu\nu}$ est la métrique associée. On définit le symbole de Chistoffel comme

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \right) \tag{2.1}$$

La dérivée covariante d'un tenseur de rang 2 est définie selon

$$\nabla_\lambda T^{\nu}_{\mu} = \partial_\lambda T^{\nu}_{\mu} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\lambda} T^{\sigma}_{\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} T^{\nu}_{\sigma} \tag{2.2}$$

que l'on puisse généraliser facilement pour un tenseur de rang quelconque. Par définition, la dérivée covariante de la métrique est nulle $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Le tenseur de Riemann est

$$\mathcal{R}^{\rho}_{\mu\nu\kappa} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^{\rho}_{\mu\kappa,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \Gamma^{\rho}_{\lambda\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} \tag{2.3}$$

ce tenseur vérifié les propriétés

$$i)\ \mathcal{R}_{\rho\mu\nu\kappa} = -\mathcal{R}_{\rho\mu\kappa\nu}$$
$$ii)\ \mathcal{R}_{\rho\mu\nu\kappa} = -\mathcal{R}_{\mu\rho\kappa\nu}$$
$$iii)\ \mathcal{R}_{\rho\mu\nu\kappa} = \mathcal{R}_{\nu\kappa\rho\mu}$$
$$iv)\ \mathcal{R}_{\rho\mu\nu\kappa} + \mathcal{R}_{\rho\nu\kappa\mu} + \mathcal{R}_{\rho\kappa\mu\lambda} = 0$$

L'action du commutateur $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ sur un vecteur V^γ est donnée par la formule bien connue

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\, V^\gamma = \mathcal{R}^\gamma_{\lambda\alpha\beta} V^\lambda \tag{2.4}$$

Le tenseur de Ricci est déduit à partir du tenseur de Riemann par une contraction comme

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^\rho_{\mu\rho\nu} = g^{\rho\sigma}\mathcal{R}_{\sigma\mu\rho\nu} \tag{2.5}$$

Le scalaire de Ricci est défini par

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^\mu_\mu \tag{2.6}$$

La 4-divergence d'un vecteur V^μ est donnée la formule

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{(-g)}}\partial_\alpha \left(\sqrt{(-g)} V^\alpha\right) \tag{2.7}$$

Le 4-laplacien d'une fonction scalaire f est donné par l'expression

$$\nabla_\mu \nabla^\mu f = \frac{1}{\sqrt{(-g)}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{(-g)}\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\right) \tag{2.8}$$

2.3 La dérivée de Lie

La dérivée de Lie est une opération de différentiation naturelle sur les champs de tenseurs, généralisant la dérivation directionnelle d'une fonction sur une variété différentielle. Pour un espace-temps sans torsion, la dérivée de Lie d'un tenseur de rang 2 le long d'un vecteur **x** est donnée par l'expression

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} T^\mu_\nu = x^\lambda \nabla_\lambda T^\mu_\nu - T^\lambda_\nu \nabla_\lambda x^\mu + T^\mu_\lambda \nabla_\nu x^\lambda \tag{2.9}$$

Pour un champ scalaire f , la dérivée de Lie est

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} f = x^\mu \partial_\mu f$$

Les dérivées de Lie sont utiles en physique car elles décrivent l'invariance. Pour une fonction f où $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}f = 0$ signifie que la fonction f ne change pas le long du flot de $\mathbf{x}$: Donc le flot de $\mathbf{x}$ préserve f ou laisse f invariante.

La dérivée de lie d'un tenseur de rang arbitraire s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{x}}T^{\mu_1......\mu_r}_{\nu_1........\nu_s} &= x^\lambda \nabla_\lambda T^{\mu_1......\mu_r}_{\nu_1........\nu_s} - T^{\lambda......\mu_r}_{\nu_1........\nu_s}\nabla_\lambda x^{\mu_1} - .... - T^{\mu_1......\lambda}_{\nu_1........\nu_s}\nabla_\lambda x^{\mu_r} \\ &+T^{\mu_1......\mu_r}_{\lambda........\nu_s}\nabla_{\nu_1}x^\lambda + ... + T^{\mu_1......\mu_r}_{\nu_1........\lambda}\nabla_{\nu_s}x^\lambda + \end{aligned} \tag{2.10}$$

et pour un tenseur de rang 1 (vecteur), on a

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\upsilon^\mu = x^\lambda\nabla_\lambda\upsilon^\mu - \upsilon^\lambda\nabla_\lambda x^\mu = [\mathbf{x}, \boldsymbol{\upsilon}] \tag{2.11}$$

La dérivée de lie $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}T$, pour un tenseur T , est linéaire à la fois en $\mathbf{x}$ et en T.

2.4 La décomposition 3+1 de l'espace temps

Dans cette section, nous allons définir l'espace qu'il sera utile pour introduire le formalisme ADM qu'on va le discuter au chapitre 4. Pour ce but, on considére un feuilletage (un découpage) dimensionnel de l'espace-temps $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ en i) une partie purement spatiale (des hypersurfaces) Σ_t en dotant chacune d'elles d'un système de coordonnées et d'une métrique induite h_{ij} (*première forme fondamentale*) et ii) une partie temporelle t de façon que

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \Sigma_t \tag{2.12}$$

ces hypersurfaces Σ_t sont supposées de vérifier les suppositions suivantes

i) Pas d'intersection entre les Σ_t.

ii) L'hypersurface initiale $\Sigma_{t=0}$ contient toutes les conditions intiales et de pouvoir formuler un problème de Cauchy bien posé.

iii) Toutes les Σ_t sont de genre espace.

Cependant, ces conditions ne déterminent pas complètement la géométrie de l'espace-temps : il faut en plus fixer la géométrie entre deux hypersurfaces voisines. Pour cela, nous allons définir ci-dessous quatre nouvelles fonctions, qui complètent les informations nécessaires pour une description complète de $\mathcal{M}$. La faisabilité de ce processus restreint l'analyse à une classe spécifique d'espace-temps, appelée espace-temps globalement hyperbolique.

Définition : un espace-temps $\mathcal{M}$ est dit globalement hyperbolique s'il admet une hypersurface Σ_t telle que toute courbe de genre temps ou de genre lumière, sans extrémités, coupe Σ_t en un seul point seulement.

En réalité la supposition iii) est notre choix ici mais en général le feuilletage permet d'avoir des hypersurfaces Σ_t de trois types :

a) de genre espace si la métrique induite associée h_{ij} est définie positive $(+,+,+)$ ayant un vecteur normal de genre temps.

b) de genre temps si la métrique induite associée h_{ij} est Lorentzienne $(-,+,+)$ ayant un vecteur normal de genre espace.

c) de genre lumière si la métrique induite associée h_{ij} est $(0,+,+)$.

Rappelons encore une fois que nous choisissons un feuilletage en hypersurfaces Σ_t de genre espace. Cette construction nous permet de définir un vecteur normal $\mathbf{n}$ de genre temps de maniére unique en tout point comme un vecteur unitaire colinéaire à ∂t de norme

$$n^{\mu}n_{\mu} = -1 \tag{2.13}$$

avec $\mu = 0, 1, 2, 3$.On peut interpréter n^{μ} comme la 4-vitesse d'un observateur normal dont la ligne d'univers est toujours orthogonale à Σ_t (voir Fig.01[4]).

Fig.01. Feuilletage de la variété espace-temps

La causalité est obtenue en construisant des cônes de lumière locaux, comme celui montré, qui est orienté vers l'avenir (Fig.01).

On choisit la coordonnée temporelle $t\left(x^{\mu}\right)$ comme un champ scalaire défini dans l'espace-temps de façon que $t = c^{te}$ décrit une famille des hypersurfaces de genre espace Σ_t sans intersections mutuelles. Le vecteur normal $\mathbf{n}$ à Σ_t est alors $\mathbf{n} \propto \partial_{\mu}t$. Par conséquent, nous écrivons n_{μ} comme

$$n_{\mu} = \Omega\partial_{\mu}t \tag{2.14}$$

où $\Omega = \Omega\left(x^{\alpha}\right)$ est une constante de normalisation fixée par la condition $n^{\mu}n_{\mu} = -1$. On a donc

$$n^{\mu}n_{\mu} = n_{\mu}n_{\nu}g^{\nu\mu} = \Omega^2 g^{00} = -1$$

ce qui donne

$$\Omega = \pm\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}} \tag{2.15}$$

On choisit le signe $(-)$ pour permettre à n_μ d'être un vecteur de genre temps. On obtient donc

$$n_\mu = -\frac{\delta^0_\mu}{\sqrt{-g^{00}}} \tag{2.16}$$

$$n^\mu = -\frac{g^{0\mu}}{\sqrt{-g^{00}}} \tag{2.17}$$

Dans la section suivante, nous procédons à introduire des fonctions connues comme fonctions lapse et shift pour compléter la description de notre espace-temps $\mathcal{M}$.

2.5 La fonctions Shift et Lapse

La fonction lapse N est définie par

$$N = -\Omega = \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}} \tag{2.18}$$

La fonction shift **N** est définie par ses composantes

$$N^i = N^2 g^{0i} \tag{2.19}$$

L'interprétation géométrique de ces fonctions est montrée sur la Fig.(02) [5]. En effet, considérons deux hyeprsurfaces voisines Σ_t et Σ_{t+dt} . On va montrer dans la section suivante qu'on peut décomposer un vecteur t^μ de l'espace-temps en une composante suivant le vecteur normal **n** qui est Nn^μ (un lapse du temps) ce qui conduit le point "a" à l'hypersurface voisine Σ_{t+dt} au point "b" et autre composante sur Σ_{t+dt} qui $N^{\ \mu}$ (un shift) ce qui conduit le point "b" au point "c". La fonction shift mesure la différence de coordonnées sur l'hypersurface Σ_{t+dt} entre "b" et "c". Ainsi, les fonctions lapse et shift indiquent comment relier les coordonnées en passant d'un hypersurface à une autre.

Fig.02 : L'interprétation géométrique des fonctions lapse et shift

Ainsi, l'ensemble $\{\mathbf{N}, N^i, h_{ij}\}$ détermine complètement la géométrie de l'espace-temps $\mathcal{M}$ qui est décrit aussi par la métrique $g_{\mu\nu}$.

2.6 Géométrie des hypersurfaces

Sur chaque hypersurface Σ_t paramétrée par t, on introduit des coordonnées spatiales y^i, $i = 1, 2, 3$. Pour relier les coordonnées spatiales de deux hypersurfaces différentes, nous introduisons des courbes (γ) qui coupent ces surfaces et on note ces courbes par le paramètre t. (Les courbes ne sont pas nécessairement des géodésiques). Cette procédure introduit un système de coordonnées 4-dimensionnel $x^\mu = x^\mu(t, y^i)$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ à l'espace-temps avec un vecteur tangent

$$t^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \tag{2.20}$$

aux courbes qui satisfait la contrainte

$$t^\mu \partial_\mu t = 1 \tag{2.21}$$

Soient e_i^μ des vecteurs tangents aux courbes contenues dans Σ_t et par conséquent sont normals à n_μ ses vecteurs sont définis par

$$e_i^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \tag{2.22}$$

avec

$$e_i^\mu n_\mu = 0 \tag{2.23}$$

On peut donc décomposer t^μ en une partie suivant le normal $\mathbf{n}$ et une autre sur Σ_t engendrée par les e_i^μ comme

$$t^\mu = N n^\mu + N^i e_i^\mu \tag{2.24}$$

Si on se limite a une diplacement infinitésimale sur Σ_t, l'élément ds^2 sera

$$\begin{aligned} ds^2 \quad | \quad {}_{\Sigma_t} &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \,|_{\Sigma_t} \\ &= g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^i \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} dy^j \right) \\ &= g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu dy^i dy^j \\ &= h_{ij} dy^i dy^j \end{aligned}$$

ce qui définit la métrique induite h_{ij} sur Σ_t comme

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu \tag{2.25}$$

une autre relation entre $h_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ est

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \tag{2.26}$$

La différentielle de $x^\mu = x^\mu (t, y^i)$ s'écrit

$$\begin{aligned} dx^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial t} dt + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^i \\ &= t^\mu dt + e_i^\mu dy^i \\ &= \left(N n^\mu + N^i e_i^\mu\right) dt + e_i^\mu dy^i \\ &= (N dt)\, n^\mu + \left(N^i dt + dy^i\right) e_i^\mu \end{aligned} \tag{2.27}$$

par suite l'élément d'éspace-temps $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$ est

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^\mu dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} \left[(N dt)\, n^\mu + \left(N^i dt + dy^i\right) e_i^\mu\right] \\ &\quad \times \left[(N dt)\, n^\mu + \left(N^i dt + dy^i\right) e_i^\mu\right] \end{aligned} \tag{2.28}$$

comme $n_\mu e_i^\mu = 0$ et $h_{ij} = g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu$ l'expression 2.28 se simplifier à

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij} \left(dy^i + N^i dt\right) \left(dy^j + N^j dt\right) \tag{2.29}$$

ce dernier résultat exprime les composantes temps-temps , temps-espace et espace-espace de la métrique $g_{\mu\nu}$ en fonction de l'ensemble $\{\mathbf{N}, N^i, h_{ij}\}$ comme

$$g_{00} = N_i N^i - N^2 \quad , \tag{2.30}$$

$$g_{0i} = N_i \tag{2.31}$$

$$g_{ij} = h_{ij} \tag{2.32}$$

sous forme matricielle

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N_i N^i & N_i \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

reste à déterminer son inverse qui vérifie la relation bien connue

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu \tag{2.34}$$

on a de (2.18)

$$g^{00} = -N^{-2} \tag{2.35}$$

la relation (2.34) pour $\mu = i$ et $\nu = 0$ s'écrit

$$g_{i\alpha} g^{\alpha 0} = 0$$

ou bien

$$g_{i0} g^{00} + g_{ij} g^{j0} = 0$$

mais suivant (2.35) , (2.31) et (2.32) la dernière relation devient

$$\begin{aligned} N_i \left(-N^{-2}\right) + h_{ij} g^{j0} &= 0 \\ \Rightarrow h_{ij} g^{j0} = N_i N^{-2} \end{aligned}$$

puis multiplions les deux membres par N^j on aura

$$g^{0i} = N^{-2} N^i \tag{2.36}$$

la relation (2.34) pour $\mu = i$ et $\nu = j$ s'écrit

$$\begin{aligned} g_{i\alpha} g^{\alpha j} &= \delta_i^j \\ \Rightarrow g_{i0} g^{0j} + g_{ik} g^{kj} &= \delta_i^j \end{aligned}$$

qui donne

$$N_i N^{-2} N^j + h_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$$

c'est-à-dire

$$h_{ik} g^{kj} = \delta_i^j - N_i N^{-2} N^j$$

multiplions les deux membre par h^{il}, il vient

$$h^{il} h_{ik} g^{kj} = h^{il} \delta_i^j - h^{il} N_i N^{-2} N^j$$

c'est-à-dire

$$\delta_k^l g^{kj} = h^{jl} - N^l N^{-2} N^j$$

et on l'élément g^{ij} comme

$$g^{ij} = h^{ij} - N^i N^j N^{-2} \tag{2.37}$$

Ainsi, les composantes de la matrice inverse sont données en fonction de l'ensemble $\{\mathbf{N}, N^i, h_{ij}\}$ par

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{0i} \\ g^{i0} & g^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N^{-2} & N^i N^{-2} \\ N^i N^{-2} & h^{ij} - N^i N^j N^{-2} \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

On est aussi besoin d'exprimer la relation entre le déterminant g de la métrique $g_{\mu\nu}$ de l'espace-temps et le déterminant h de la métrique induite h_{ij}. En effet, l'élément de la matrice inverse g^{00} se calcul par la formule bien connue

$$A^{-1} = \frac{{}^t com\,(A)}{\det{(A)}} \tag{2.39}$$

où ${}^t com\,(A)$ désigne la transposée de la comatrice de A. L'élément g^{00} est alors

$$g^{00} = \frac{(-1)^{0+0}\,h}{g}$$

mais $g^{00} = -N^{-2}$ on obtient

$$\begin{aligned} -N^{-2} &= \frac{h}{g} \\ \Rightarrow \sqrt{-g} &= N\sqrt{h} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Les composantes covariantes du vecteur normal $\mathbf{n}$ sont

$$\begin{aligned} n_\mu &= -N\partial_\mu t = -N\delta^0_\mu \\ &\Rightarrow \quad n_0 = -N \quad \text{et } n_i = 0 \qquad (2.41) \\ \text{c-à-d} \quad &: \quad n_\mu = (-N, 0, 0, 0) \qquad (2.42) \end{aligned}$$

et ses composantes contravariantes sont

$$n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu = -N g^{\mu\nu} \delta^0_\nu = -N g^{\mu 0}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} n^0 &= -N g^{00} = \frac{1}{N} \\ n^i &= -N g^{i0} = -\frac{N^i}{N} \qquad (2.43) \\ \text{c-à-d :} \quad & n^\mu = \left(\frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N}\right) \qquad (2.44) \end{aligned}$$

et comme

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \tag{2.45}$$

cela conduit au composantes

$$\begin{aligned} h_{00} &= N^i N_i \\ h_{0i} &= N_i \end{aligned} \tag{2.46}$$

et bien sur les composantes d'espace

$$h_{ij} = g_{ij}$$

Nous soulignons que, même si $h_{\mu\nu}$ est une métrique sur le 3-espace, h_{00} et h_{0i} sont non nuls car on peut la considérer comme un objet vivant dans l'espace-temps.

On introduit aussi le projecteur h_μ^ν sur Σ_t qui vérifié la relation

$$h_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + n_\mu n^\nu \tag{2.47}$$

On a deux types de projection :

i) Projection spatiale : soit un vecteur V^μ alors sa parite spatiale est donnée par

$$V^S = h_\nu^\mu V^\nu \tag{2.48}$$

ii) Projection normale (de genre temps) : la projection normale N_ν^μ est définie par $N_\nu^\mu = -n_\nu n^\mu = \delta_\nu^\mu - h_\nu^\mu$. Ainsi, la partie temps d'un vecteur V^μ est

$$V^T = N_\nu^\mu V^\nu \tag{2.49}$$

On peut donc décomposer V^μ en une partie spatiale et temporelle comme

$$V^\mu = \delta_\nu^\mu V^\nu = \left(h_\nu^\mu + N_\nu^\mu\right) V^\nu = V^S + V^T \tag{2.50}$$

Tout comme la dérivée covariante ∇_α de l'espace-temps $\mathcal{M}$ qui vérifier la relation bien connue

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \tag{2.51}$$

on définit une dérivée covariante D_α qui agit sur des vecteur tangents à Σ_t et qui vérifier une relation similaire pour la métrique induite $h_{\mu\nu}$ à savoir

$$D_\alpha h_{\mu\nu} = 0 \tag{2.52}$$

La relation entre ces deux dérivées existe à travers les projecteurs, on peut voir pour la démonstration la référence [6]. En particulier, pour une scalaire

$$D_\mu f = h_\mu^\beta \nabla_\beta f \tag{2.53}$$

et pour un vecteur contravariant V^μ cette relation est exprimée comme

$$D_\nu V^\mu = h^\mu_\alpha h^\beta_\nu \nabla_\beta V^\alpha \tag{2.54}$$

et pour un vecteur covariant V_μ elle est

$$D_\nu V_\mu = h^\alpha_\nu h^\beta_\mu \nabla_\alpha V_\beta \tag{2.55}$$

également pour un tenseur $T^\mu_{\ \nu}$ de rang 2 on a

$$D_\alpha T^\mu_{\ \nu} = h^\mu_\gamma h^\beta_\nu h^\sigma_\alpha \nabla_\sigma T^\gamma_{\ \beta} \tag{2.56}$$

la généralisation pour un tenseur de rang quelconque ne pose pas de problème.

2.7 Les courbures intrinsèque et extrinséque

Nous disposons maintenant d'une métrique induite et d'une dérivée covariante intrinsèques aux hypersurfaces spatiales Σ_t capables de décrire les propriétés intrinsèques locales des feuilletage spatiales. Pour obtenir toutes les informations sur la structure de l'espace-temps, nous devons également savoir comment ces hypersurfaces Σ_t sont plongées dans la géométrie de l'espace-temps. Intuitivement, on s'attendrait à ce que cette information soit contenue dans la manière dont la normale à Σ_t varie d'un point à l'autre. Pour quantifier cette variation, nous définissons une grandeur appelée la courbure extrinsèque de Σ_t (*la seconde forme fondamentale*) par

$$K_{\mu\nu} = -h^\alpha_\mu h^\beta_\nu \nabla_\alpha n_\beta \tag{2.57}$$

ce tenseur est symétrique par construction $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$ et de trace

$$K = -\nabla_\rho n^\rho \tag{2.58}$$

La signification géométrique de la courbure extrinsèque $K_{\mu\nu}$ peut être liée à la dérivée de Lie de la métrique spatiale $h_{\mu\nu}$ le long de la normale par la relation (voir annexe A)

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbf{n}} h_{\mu\nu} \tag{2.59}$$

Étant donné la dérivée covariante tridimensionnelle D_α, nous pouvons définir le tenseur de courbure intrinsèque 3-dimensionnel ${}^{(3)}\mathcal{R}^\delta_{\mu\alpha\beta}$ comme

$$[D_\alpha, D_\beta]\, V^\gamma = {}^{(3)}\mathcal{R}^\gamma_{\mu\alpha\beta} V^\mu \tag{2.60}$$

pour n'importe quel vecteur V^δ sur Σ_t et ${}^{(3)}\mathcal{R}^{\delta}_{\mu\alpha\beta}$ est donné par (2.3) en utilisant le symbole de Chistoffel comme

$$ {}^{(3)}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h^{\rho\alpha} \left(\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu} \right) \tag{2.61} $$

A partir du tenseur ${}^{(3)}\mathcal{R}^{\gamma}_{\mu\alpha\beta}$ on peut obtenir le tenseur de Ricci ${}^{(3)}\mathcal{R}_{\mu\nu}$ et la courbure scalaire ${}^{(3)}\mathcal{R}$ par des contractions similaires à celles d'un espace 4-dimensionnel.

2.8 Décomposition du tenseur de courbure

Pour un feuilletage donné de l'espace-temps, $h_{\mu\nu}$ et $K_{\mu\nu}$ contiennent les informations nécessaires sur les propriétés intrinsèques et extrinsèques de Σ_t. En particulier, on peut exprimer la courbure scalaire complet ${}^{(4)}\mathcal{R}$ de l'espace-temps à quatre dimensions en termes du tenseur extrinsèque et la courbure scalaire du sous-espace à trois dimensions ${}^{(3)}\mathcal{R}$, la décomposition est donnée par l'équation de Gauss scalaire (voir annexe B)

$$ {}^{(4)}\mathcal{R} + 2n^\mu n^\rho \; {}^{(4)}\mathcal{R}_{\mu\rho} = \left({}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 - K^{ij}K_{ij} \right) \tag{2.62} $$

c'est une généralisation du fameux théorème de Gauss (la remarquable théorème) qui a été initialement construite pour une surface à 2 dim immergée dans un espace Euclidien à 3 dim . En effet, comme la courbure de ce dernier est nulle, le coté gauche de (2.62) est nul également. De plus, la métrique $g_{\mu\nu}$ est Riemannienne pas Lorentzienne et le vecteur normal est dans ce cas de genre espace, et par conséquent on doit avoir $h^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu - n_\mu n^\nu$ au lieu de $h^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu + n_\mu n^\nu$ ainsi le terme $(K^2 - K^{ij}K_{ij})$ doit avoir un signe opposé et on a bien le théorème de Gauss

$$ {}^{(2)}\mathcal{R} - K^2 + K^{ij}K_{ij} = 0 \tag{2.63} $$

si on considère les courbure principales κ_1 et κ_2 de Σ alors $K = \kappa_1 + \kappa_2$ et $K^{ij}K_{ij} = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$ et ainsi on

$$ {}^{(2)}\mathcal{R} = 2\kappa \tag{2.64} $$

où $\kappa = \kappa_1\kappa_2$ est la courbure de Gauss de .

On montre également la décomposition suivante (voir annexe B)

$$ {}^{(4)}\mathcal{R} = {}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 + K^{ij}K_{ij} - 2n^\rho \nabla_\rho K - \frac{2}{N} D_i D^i N \tag{2.65} $$

qu'on va l'utiliser pour formuler la décomposition ADM.

Chapitre 3

Formulation lagrangienne de la relativité générale

3.1 Introduction

En relativité générale, la métrique $g_{\mu\nu}$ est le champ dynamique de la théorie. Pour déterminer la densité lagrangienne $\mathcal{L}_g$ correspondante, on pense à considérer cette densité comme fonction de la métrique et de ses dérivées $\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g(g_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu})$. Pour le terme cinétique, il peut être construit à partir de $\partial_\rho g_{\mu\nu}$. Cependant, $\partial_\rho g_{\mu\nu}$ n'est pas une quantité covariante, et même la forme covariante $\nabla_\rho g_{\mu\nu}$ ne peut être utilisée puisqu'elle est toujours nule. Par conséquent, on peut porter notre attention à la dérivée seconde, $\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}$ mais cette quantité n'est pas covariante. La quantité covariante qui contient les dérivées première et seconde de la métrique est le tenseur de courbure de Reimann $\mathcal{R}^{\rho}_{\mu\nu\lambda}$. Cependant, la densité lagrangienne doit être une quantité scalaire puisque un scalaire est invariant sous une transformation de coordonnées. Le seul scalaire construit à partir de $\mathcal{R}^{\rho}_{\mu\nu\lambda}$ est le scalaire de courbure $\mathcal{R}$. Par conséquent, l'action peut être exprimée par

$$S_g = \frac{1}{16\pi} \int_\Omega \sqrt{-g} \mathcal{R} d^4x \tag{3.1}$$

où Ω un volume sur lequel on fait l'intégration. A cette action on doit ajouter l'action représentant la distrubution de la matière S_m de la forme

$$S_m = \int_\Omega \sqrt{-g} \mathcal{L}_m \left(\phi, \partial_\alpha \phi; g_{\mu\nu}\right) d^4x \tag{3.2}$$

pour certains champs de matière ϕ. Comme indiqué dans (3.2) on suppose que seulement $g_{\mu\nu}$ et non pas ses dérivées qui doivent apparaitre dans l'action matière, cette supposition est prise pour simplifier. Ainsi, l'action totale est donc

$$S = S_g + S_m \tag{3.3}$$

Dans ce chapitre, on va dériver les équations du champ d'Einstein à savoir

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

à partir de l'action (3.3) où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci et $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergée-impulsion.

3.2 Variation de l'action

Le principe de moindre action stipule que l'action doit être stationnaire

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_m = 0$$

. Considérons d'abord la variation δS_g :

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \frac{1}{16\pi}\int_\Omega \delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{R}\right) d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi}\int_\Omega \delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}\right) d^4x \end{aligned} \tag{3.5}$$

Nous écrivons d'abord

$$\delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}\right) = \delta\left(\sqrt{-g}\right)\mathcal{R} + \left(\delta g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\ ,$$

la variation $\delta\left(\sqrt{-g}\right)$ est donnée par la formule (voir annexe C.1)

$$\delta\left(\sqrt{-g}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{3.6}$$

on remplaçe dans (3.5), on aura

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi}\int_\Omega d^4x\left[\left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}\right)\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g} \tag{3.7}$$

La variation du tenseur de Ricci est donnée par l'identité de Platini comme suit (voir annexe C.2)

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = \nabla_\rho\left(\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}\right) - \nabla_\mu\left(\delta\Gamma^\rho_{\rho\nu}\right) \tag{3.8}$$

et par introduction du vecteur contravariant

$$V^{\rho} = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\rho\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} \tag{3.9}$$

on peut transformer le dernier terme dans (3.7) en divergence. En effet

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left[\nabla_{\rho}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\right) - \nabla_{\mu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\nu}\right)\right] \\ &= \sqrt{-g}\nabla_{\rho}\left[g^{\mu\nu}\left(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\right) - g^{\rho\nu}\left(\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}\right)\right] \\ &= \sqrt{-g}\nabla_{\rho}V^{\rho} = \partial_{\rho}\left(\sqrt{-g}V^{\rho}\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

où on a utilisé le fait que $\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} = 0$ et la relation (2.7).

Introduisons ce divergence dans (3.7) et utilisant le théorème de Stokes, en supposant que V^{ρ} est nul sur la surface (on ne considère pas ici la contribution des termes aux limites). Ainsi, la variation (3.7) se simplifier à

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi}\int_{\Omega}\left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \tag{3.11}$$

On considère maintenant la variation δS_m :

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int_{\Omega}\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m\right)d^4x \\ &= \int_{\Omega}\left[\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + \mathcal{L}_m\delta\left(\sqrt{-g}\right)\right]d^4x \end{aligned}$$

mais $\delta\left(\sqrt{-g}\right)$ est donnée par (3.6), on a donc

$$\delta S_m = \int_{\Omega}\left[\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\mathcal{L}_m g_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x$$

si on définit le tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ comme

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} + \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} \tag{3.12}$$

alors

$$\delta S_m = -\frac{1}{2}\int_{\Omega}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \tag{3.13}$$

Ainsi, la variation de l'action totale δS d'après (3.11) et (3.13) est donc

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{16\pi}\int_{\Omega}\left[\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} - 8\pi T_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

et puisque la variation $\delta g^{\mu\nu}$ est arbitraire dans Ω,on obtient les équations du champ d'Einstein

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{3.15}$$

Comme nous le savons, une matrice symétrique de dimension $n \times n$ a $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments indépendents, donc les équations du champ d'Einstein sous forme covariante (3.15) est un ensemble de 16 équations dont 6 sont dépendantes et 10 équations indépendantes (puisque $n = 4$). Ces 10 équations indépendantes sont exprimées avec 10 composantes indépendantes de la métrique $g_{\mu\nu}$.

D'autre part, on peut séparer les 10 équations d'Einstein en des équations dynamiques et des contraintes grace à l'identité de Bianchi : $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ ce qui donne

$$\partial_0 G^{0\nu} = -\partial_i G^{i\nu} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda} G^{\lambda\nu} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} G^{\mu\lambda} \tag{3.16}$$

La partie droite du dernière équation ne contient pas de dérivée temporelle troisième de la métrique, donc la partie gauche non plus. Ainsi même si le tenseur d'Einstein $G^{\mu\nu}$ contient de manière générale des dérivées temporelles secondes, les composantes $G^{0\nu}$ n'en contiennent pas. Donc parmi les 10 équations indépendantes d'Einstein, les 4 suivantes

$$G^{0\nu} = 8\pi T^{0\nu}$$

sont en fait des contraintes à imposer sur ces conditions initiales à $t = 0$ et qui seront conservées par les 6 autres équations du mouvement

$$G^{i\nu} = 8\pi T^{i\nu} \tag{3.17}$$

On a donc 6 équations dynamiques pour déterminer les 10 composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique. Il en résulte nécessairement une ambiguité qui est due à l'invariance de jauge (par difféomorphisme). Pour pouvoir formuler un problème de Cauchy bien posé on doit donc, imposer un choix de jauge particulier. On utilise souvent la jauge harmonique

$$\nabla_\nu \nabla^\nu x^\mu = 0 \tag{3.18}$$

Chapitre 4

Formulation hamiltonienne de la relativité générale

4.1 Introduction

La formulation hamiltonienne traite l'espace et le temps d'une manière différente. C'est exactement ce que l'on ne veut pas lorsqu'il s'agit d'une théorie explicitement covariante comme la relativité générale. Nous nous rendons compte que la relativité générale n'admet pas a priori de paramétrisation naturelle pour le temps et qu'il reste toujours un choix. Mais avoir une telle séparation (temps+espace) nous permet de traiter des champs tensoriels variant dans le temps sur des hypersurfaces spatiales et permet ainsi de formuler le problème de Cauchy en relativité générale. C'est donc probablement le meilleur cadre pour étudier la gravité quantique.

Dans ce chapitre, nous développons le formalisme canonique de la relativité générale basé sur les travaux d'Arnowitt-Deser-Misner [1, 2, 3, 4, 6]. On a déjà introduit dans le chapitre 2 quatre nouvelles fonctions à savoir la fonction lapse N et les fonctions shift $\mathbf{N}$, qui fournissent avec la métrique induite $h_{\mu\nu}$ définie sur les hypersurfaces Σ_t les informations nécessaires pour une description complète de la variété espace-temps qu'on suppose ici d'être golobalement hyperbolique.

4.2 L'action d'Einstein Hilbert en décomposition (3+1)

Nous commençons par l'action d'Einstein-Hilbert pour la gravitation pure

$$S_g = \int_{\Omega} \mathcal{L}_g \; d^4x \tag{4.1}$$

où

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{16\pi} \; {}^{(4)}\mathcal{R}\sqrt{-g} \tag{4.2}$$

Grace à la décomposition $(3+1)$ de l'espace-temps, on a montré au chapitre 2 que la courbure scalaire totale de l'espace-temps à quatre dimensions ${}^{(4)}\mathcal{R}$ peut être écrite en termes du tenseur extrinséque $K_{\mu\nu}$ et la courbure scalaire du sous-espace à trois dimensions ${}^{(3)}\mathcal{R}$ plus des termes de divergence comme

$${}^{(4)}\mathcal{R} = \; {}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 + K^{ij}K_{ij} - 2n^{\rho}\nabla_{\rho}K - \frac{2}{N}D_iD^iN \tag{4.3}$$

on remplace dans (4.2), on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g &= \frac{1}{16\pi}\left\{ {}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 + K^{ij}K_{ij} - 2n^{\rho}\nabla_{\rho}K - \frac{2}{N}D_iD^iN \right\}\sqrt{-g} \\ &= \frac{1}{16\pi}\left\{ N\sqrt{h}\; {}^{(3)}\mathcal{R} + N\sqrt{h}K^2 + N\sqrt{h}K^{ij}K_{ij} - 2N\sqrt{h}n^{\rho}\nabla_{\rho}K - 2\sqrt{h}D_iD^iN \right\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

où on a utilisé le fait $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$. Pour simplier l'expression (4.4), on considére le vecteur V^{ρ} tel que

$$V^{\rho} = Kn^{\rho} \tag{4.5}$$

ainsi, l'expression de la 4-divergence $\nabla_{\rho}V^{\rho}$ exprimée dans (2.7) nous donne

$$\partial_{\rho}\left(\sqrt{-g}V^{\rho}\right) = \sqrt{-g}\nabla_{\rho}V^{\rho}$$

soit

$$\begin{aligned} \partial_{\rho}\left(\sqrt{-g}V^{\rho}\right) &= N\sqrt{h}\nabla_{\rho}\left(Kn^{\rho}\right) \\ &= N\sqrt{h}\left(\nabla_{\rho}n^{\rho}\right)K + N\sqrt{h}n^{\rho}\left(\nabla_{\rho}K\right) \end{aligned}$$

mais d'aprés (2.58) $K = -\nabla_{\rho}n^{\rho}$ ce qui nous permet à écrire

$$\partial_{\rho}\left(\sqrt{(-g)}V^{\rho}\right) = -N\sqrt{h}K^2 + N\sqrt{h}n^{\rho}\nabla_{\rho}K$$

alors le $4^{\text{éme}}$ terme dans (4.4) est

$$-2N\sqrt{h}n^{\rho}\nabla_{\rho}K = -2\partial_{\rho}\left(\sqrt{(-g)}V^{\rho}\right) - 2N\sqrt{h}K^2 \tag{4.6}$$

le $5^{\text{éme}}$ terme s'écrit d'aprés (2.8) et en considérant la dérivée intrinséque D_i comme

$$\sqrt{h}D_iD^iN = \partial_i\left(\sqrt{h}\partial_iN\right) \tag{4.7}$$

on remplace maintenant dans (4.4) il vient

$$\mathcal{L}_g = \frac{N\sqrt{h}}{16\pi}\left\{ {}^{(3)}\mathcal{R} - K^2 + K^{ij}K_{ij} - 2\partial_{\rho}\left(\sqrt{(-g)}V^{\rho}\right) - 2\partial_i\left(\sqrt{h}\partial_iN\right)\right\} \tag{4.8}$$

La décomposition en dimension $(3+1)$ permet de poursuivre l'intégration sur Ω en subdivisant cette région en une famille d'hypersurfaces Σ_t, étiquetées par le temps t. Ignorons les termes de divergence et le facteur $(16\pi)^{-1}$, l'action d'Einstien-Hilbert (**??**) s'écrit simplement

$$S_g = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} N\sqrt{h}\left({}^{(3)}\mathcal{R} - K^2 + K^{ij}K_{ij}\right) d^3x \tag{4.9}$$

4.3 Formalisme hamiltonien de la RG

Considérons la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}_g = N\sqrt{h}\left({}^{(3)}\mathcal{R} - K^2 + K^{ij}K_{ij}\right) \tag{4.10}$$

on montre en annexe D que le tenseur K_{ij} a la forme

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(D_jN_i + D_iN_j - \dot{h}_{ij}\right) \tag{4.11}$$

La première observation est que l'action S_g (ou $\mathcal{L}_g$) ne dépend pas de $\left\{\dot{N}, \dot{N}^i\right\}$. Ainsi, seulement les h_{ij} et leur moments conjugués (notés par π^{ij}) qui sont dynamiques, alors que $\{N, N^i\}$ sont des multiplicateurs de Lagrange (ne sont pas dynamiques) et conduisant à des contraintes.

La transformation de Legendre donne la densité hamiltonienne

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_g \tag{4.12}$$

et on définit le moment conjugué par

$$\pi^{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}_g}{\partial\dot{h}_{ij}}$$

le calcul est en annexe D, on arrive à

$$\pi^{ij} = \sqrt{h}\left(h^{ij}K - K^{ij}\right)$$

Notons qu'on a pris l'ensemble $\left\{h_{ij}, \pi^{ij}, \dot{h}_{ij}, \dot{\pi}^{ij}\right\}$ comme variables indépendantes. Le moment conjugué π^{ij} est symétrique et contient six composantes indépendantes. On peut calculer la "vitesse" $\dot{h}_{ij}$ à partir de (4.11) comme

$$\dot{h}_{ij} = -2NK_{ij} + D_j N_i + D_i N_j \tag{4.13}$$

Construisons maintenant l'hamiltonien à partir de (4.12) comme

$$\begin{aligned} H &= \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d^3x \\ &= \int_{\Sigma_t} \left(\pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_g\right) d^3x \end{aligned} \tag{4.14}$$

on obtient

$$H = \int_{\Sigma_t} \left[-\sqrt{h}\left[N\left({}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 - K^{ij}K_{ij}\right) + 2N^i\left(D_iK - D_jK_i^j\right)\right] + 2\sqrt{h}D_j\left(KN^J - K_i^jN^i\right)\right] d^3x \tag{4.15}$$

le dernier terme est un terme de divergence qu'on ignore sa contribution H se réduit à

$$H = -\int_{\Sigma_t} \sqrt{h}\left[NC_0 + 2N^iC_i\right]\sqrt{h}d^3x \tag{4.16}$$

avec

$$C_0 = \mathcal{R} + K^2 - K^{ij}K_{ij} \tag{4.17}$$

$$C_i = D_jK_i^j - D_iK \tag{4.18}$$

et les moments conjugués

$$\pi^N = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{N}} = 0 \tag{4.19}$$

et

$$\pi_i^N = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{N}^i} = 0 \tag{4.20}$$

Calculons maintenant $\mathcal{H}$ en fonction des variables $(\pi^{ij}, N, N^i, h_{ij})$ pour finalement obtenir la densité hamiltonienne ADM

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\left(D_iN_j + D_jN_i - N\sqrt{h}\ {}^{(3)}\mathcal{R}\right) - \frac{N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2}\right) \tag{4.21}$$

cherchons les equations d'Hamilton

$$\dot{h}_{ij} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{ij}} \tag{4.22}$$

$$\dot{\pi}^{ij} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h_{ij}} \tag{4.23}$$

$$\dot{\pi}^{N} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N} \tag{4.24}$$

$$\dot{\pi}_i^{N} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N^i} \tag{4.25}$$

on obtient après un long calcul (voir annexe D)

$$\dot{h}_{ij} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{ij}} = D_i N_j + D_j N_i - \frac{N}{\sqrt{h}} \left(2\pi_{ij} - \pi h_{ij}\right) \tag{4.26}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ij} = & -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h_{ij}} = -\frac{N}{2\sqrt{h}} \left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2}\right) h^{ij} + \frac{2N}{\sqrt{h}} \left(\pi^i_a \pi^{aj} - \frac{1}{2}\pi\pi^{ij}\right) + N\sqrt{h} \left(\mathcal{R}^{ij\,(3)} - \frac{1}{2} h^{ij} \mathcal{R}^{(3)}\right) \\ & -\sqrt{h} \left(D^i D^j N - h^{ij} D_c D^c N\right) - D_c \pi^{ic} N^j + \pi^{jc} D_c N^i + \pi^{ij} D_c N^c \end{aligned} \tag{4.27}$$

avec

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N} = C_0 = 0 \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N^i} = C_i = 0 \tag{4.29}$$

$C_0 = 0$ et $C_i = 0$ sont des contraintes (au nombre de 4). N et N^i sont des multiplicateurs de Lagrange.

Notons aussi que $\dot{h}_{ij} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{ij}}$ (au nombre de 6 équations) et $\dot{\pi}^{ij} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h_{ij}}$ (6 équations), cependant on peut le vérifier que ces équations sont les mêmes (juste une redondance). Donc, au total on a

4 contraintes + 6 équations dynamiques = 10 équations indépendantes

ce résultat est en accord avec la formulation lagrangienne (les équations d'Einstein).

Chapitre 5

Conclusion

La relativité générale est habituelement introduite par le formalisme covariant (lagrangien). Tout comme en mécanique classique, il existe une description équivalente de la relativité générale utilisant l'approche hamiltonienne. On a donné dans ce mémoire une introduction simple à ce formalisme. Pour ce but, on a construit les pré-requis mathématiques ainsi que la décomposition $(3+1)$ de l'espace-temps en hypersurfaces qui évoluent dans le temps, puis on a discuté le formalisme canonique d'Arnowitt-Deser-Misner (ADM) de la relativité générale pour le cas de la gravité pure. Les variables nécéssaires pour cette descriptions sont :

1) la métrique induite h_{ij} des hypersurface et leur moments conjugués π^{ij}.

2) les fonctions lapse et shift N et $\mathbf{N}$.

On a obtenu les équations d'Hamilton pour les variables (h_{ij}, π^{ij}, N et $\mathbf{N}$) et il s'avéré que :

i) les variables (h_{ij}, π^{ij}) sont dynamiques et vérifient bien une équation de mouvement.

ii) les variable (N , $\mathbf{N}$) sont des multiplicateurs de Lagrange associé à 4 contraintes.

Enfin, par contrainte du temps, on n'a pas pu appliquer ce formalisme à des exemples comme la cosmologie homogène. Cela sera l'objet principale pour des travaux futures.

Annexe A

Annexes

A.1 Annexe A

On veut montrer la relation (2.59) à savoir

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbf{n}} h_{\mu\nu} \tag{A.1}$$

En effet, on d'après la définition (2.57) on a

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu} &= -h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \nabla_\alpha n_\beta \\
&= -\left(\delta_\mu^\alpha + n^\alpha n_\mu\right)\left(\delta_\nu^\beta + n^\beta n_\nu\right)\nabla_\alpha n_\beta \\
&= -\left(\delta_\mu^\alpha + n^\alpha n_\mu\right)\delta_\nu^\beta \nabla_\alpha n_\beta \quad \text{; puisque } n^\beta \nabla_\alpha n_\beta = 0 \\
&= -\nabla_\mu n_\nu - n_\mu \left(n^\alpha \nabla_\alpha n_\nu\right)
\end{aligned}$$

Il existe un concept associé connu sous le nom "accélération d'une feuilletage" a_μ qui capture la rapidité avec laquelle la courbure change d'une hypersurface à l'autre. Il est défini comme

$$a_\mu = n^\alpha \nabla_\alpha n_\mu \tag{A.2}$$

qu'on montrer qu'il vérifie aussi la relation

$$a_\mu = D_\mu \ln N \tag{A.3}$$

en effet, comme $n_\mu = -N\nabla_\mu t$, et $\nabla_\alpha \nabla_\mu t = \nabla_\mu \nabla_\alpha t$ donc

$$
\begin{aligned}
a_\mu &= n^\alpha \nabla_\alpha \left(-N \nabla_\mu t\right) = -n^\alpha \left(\nabla_\alpha N\right)\left(\nabla_\mu t\right) - N n^\alpha \nabla_\alpha \nabla_\mu t \\
&= -n^\alpha \left(\nabla_\alpha N\right)\left(\nabla_\mu t\right) - N n^\alpha \nabla_\mu \nabla_\alpha t \\
&= n^\alpha n_\mu \left(\frac{\nabla_\alpha N}{N}\right) + N n^\alpha \nabla_\mu \left(\frac{n_\alpha}{N}\right) \\
&= n^\alpha n_\mu \nabla_\alpha \ln(N) + n^\alpha \nabla_\mu n_\alpha - N n^\alpha n_\alpha \left(\frac{\nabla_\mu N}{N^2}\right) \\
&= n^\alpha n_\mu \nabla_\alpha \ln(N) + \underbrace{n^\alpha \nabla_\mu n_\alpha}_{\frac{1}{2}\nabla_\mu(n^\alpha n_\alpha)=0} + \nabla_\mu (\ln N) \\
&= n^\alpha n_\mu \nabla_\alpha \ln(N) + \nabla_\mu (\ln N) \\
&= \left(n_\mu n^\alpha + \delta^\alpha_\mu\right) \nabla_\alpha \ln(N) = h^\alpha_\mu \nabla_\alpha \ln(N) \\
&= D_\mu \ln N \qquad \text{suivant (2.53)}
\end{aligned}
$$

Alors le tenseur extrinsèque $K_{\mu\nu}$ est alors égal à

$$K_{\mu\nu} = -\nabla_\mu n_\nu - n_\mu D_\nu \ln N \tag{A.4}$$

D'autre part, la dérivée de Lie (2.10) pour un tenseur de rang 2 deux fois covariant suivant le vecteur $\mathbf{m} = N\mathbf{n}$

$$\mathcal{L}_\mathbf{m} h_{\mu\nu} = m^\alpha \nabla_\alpha h_{\mu\nu} + h_{\alpha\nu} \nabla_\mu m^\alpha + h_{\mu\alpha} \nabla_\nu m^\alpha \tag{A.5}$$

$\mathbf{m}$ est connu comme vecteur d'évolution normal ($m^\alpha = N n^\alpha$). D'apèrs (A.4)

$$\nabla_\mu n^\nu = -K^\nu_\mu - n_\mu D^\nu \ln N$$

ainsi

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu m^\alpha &= \nabla_\mu \left(N n^\alpha\right) = n^\alpha \nabla_\mu (N) + N \nabla_\mu (n^\alpha) \\
&= n^\alpha \nabla_\mu (N) - N K^\alpha_\mu - n_\mu D^\alpha N
\end{aligned}
$$

Alors (A.5) s'exprime comme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\mathbf{m} h_{\mu\nu} &= m^\alpha \nabla_\alpha \left(g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu\right) + h_{\alpha\nu} \left(n^\alpha \nabla_\mu (N) - N K^\alpha_\mu - n_\mu D^\alpha N\right) \\
&\quad + h_{\mu\alpha} \left(n^\alpha \nabla_\nu (N) - N K^\alpha_\nu - n_\nu D^\alpha N\right) \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}
$$

puisque $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ et comme $h_{\mu\nu}n^\nu = 0$ et $\nabla_\alpha (g_{\mu\nu}) = 0$ il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbf{m}} h_{\mu\nu} &= m^\alpha \nabla_\alpha (g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu) + h_{\alpha\nu} \left(n^\alpha \nabla_\mu (N) - N K^\alpha_\mu - n_\mu D^\alpha N \right) \\
&\quad + h_{\mu\alpha} \left(n^\alpha \nabla_\nu (N) - N K^\alpha_\nu - n_\nu D^\alpha N \right) \\
&= n_\nu m^\alpha \nabla_\alpha n_\mu + n_\mu m^\alpha \nabla_\alpha n_\nu + n_\nu \nabla_\mu (N) - N K_{\nu\mu} - n_\mu D_\nu N \\
&\quad + n_\mu \nabla_\nu (N) - N K_{\mu\nu} - n_\nu D_\mu N \\
&= -2 N K_{\mu\nu} \quad \text{(utilisons (A.2) et (A.3))}
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2N} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{n}} h_{\mu\nu} \;\; \text{(la linéairité)} \tag{A.7}$$

A.2 Annexe B

Le but est de démontrer la décomposition

$$^{(4)}\mathcal{R} = {}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 + K^{ij} K_{ij} - 2 n^\rho \nabla_\rho K - \frac{2}{N} D_i D^i N \tag{A.8}$$

la dérivée covariante compatible avec la métrique induite $h_{\mu\nu}$

$$D_\mu V_\nu = h^\delta_\mu h^\rho_\nu \nabla_\delta V_\rho \tag{A.9}$$

qui vérifie la commutation

$$[D_\alpha, D_\beta] V^\gamma = {}^{(3)}\mathcal{R}^\gamma_{\lambda\alpha\beta} V^\lambda \tag{A.10}$$

où V^γ est un vecteur sur Σ_t donc

$$(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha) V^\gamma = {}^{(3)}\mathcal{R}^\gamma_{\lambda\alpha\beta} V^\lambda$$

calculons

$$\begin{aligned}
D_\alpha D_\beta V^\gamma &= D_\alpha (D_\beta V^\gamma) \\
&= h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\rho \nabla_\mu (D_\nu V^\rho) \\
&= h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\rho \nabla_\mu \left(h^\delta_\nu h^\rho_\lambda \nabla_\delta V^\lambda \right)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

où on a utilisé la relation $(A.9)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} D_\alpha D_\beta V^\gamma &= h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\rho \left(\nabla_\mu h^\delta_\nu\right) h^\rho_\lambda \nabla_\delta V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\rho h^\delta_\nu \left(\nabla_\mu h^\rho_\lambda\right) \nabla_\delta V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\rho h^\delta_\nu h^\rho_\lambda \nabla_\mu \nabla_\delta V^\lambda \\ &= h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\rho \left(\nabla_\mu n^\delta\right) n_\nu h^\rho_\lambda \nabla_\delta V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\rho n^\delta \left(\nabla_\mu n_\nu\right) h^\rho_\lambda \nabla_\delta V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\rho h^\delta_\nu \left(\nabla_\mu n^\rho\right) n_\lambda \nabla_\delta V^\lambda \\ &\quad + h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\rho h^\delta_\nu n^\rho \left(\nabla_\mu n_\lambda\right) \nabla_\delta V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\rho h^\delta_\nu h^\rho_\lambda \nabla_\mu \nabla_\delta V^\lambda \end{aligned}$$

et comme $h^\mu_\nu n^\nu = 0$, et $h^\mu_\nu h^\nu_\rho = h^\mu_\rho$ on arrive à

$$D_\alpha D_\beta V^\gamma = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\lambda n^\delta \left(\nabla_\mu n_\nu\right) \nabla_\delta V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\delta_\beta h^\gamma_\rho \nabla_\mu n^\rho n_\lambda \nabla_\delta V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\delta_\beta h^\gamma_\lambda \nabla_\mu \nabla_\delta V^\lambda \tag{A.12}$$

et comme $n_\lambda \nabla_\delta V^\lambda = -V^\lambda \nabla_\delta n_\lambda$ il vient

$$D_\alpha D_\beta V^\gamma = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta h^\gamma_\lambda n^\delta \nabla_\mu n_\nu \nabla_\delta V^\lambda - h^\mu_\alpha h^\delta_\beta h^\gamma_\rho V^\lambda \nabla_\mu n^\rho \nabla_\delta n_\lambda + h^\mu_\alpha h^\delta_\beta h^\gamma_\lambda \nabla_\mu \nabla_\delta V^\lambda \tag{A.13}$$

le tensuer de la courbure extrinséque $K_{\mu\nu}$

$$K_{\mu\nu} = -h^\alpha_\mu h^\beta_\nu \nabla_\alpha n_\beta = -h^\alpha_\mu \nabla_\alpha n_\nu \quad (\text{puisque } h^\beta_\nu = \delta^\beta_\nu + n_\nu n^\beta \text{ et } \; n^\beta \nabla_\alpha n_\beta = 0) \tag{A.14}$$

donc (A.13) se simplifier à

$$D_\alpha D_\beta V^\gamma = -K_{\alpha\beta} h^\gamma_\lambda n^\delta \nabla_\delta V^\lambda - K^\gamma_\alpha K_{\beta\lambda} V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\delta_\beta h^\gamma_\lambda \nabla_\mu \nabla_\delta V^\lambda \tag{A.15}$$

un calcul similaire donne

$$D_\beta D_\alpha V^\gamma = -K_{\alpha\beta} h^\gamma_\lambda n^\delta \nabla_\delta V^\lambda - K^\gamma_\beta K_{\alpha\lambda} V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\delta_\beta h^\gamma_\lambda \nabla_\delta \nabla_\mu V^\lambda \tag{A.16}$$

alors le commutateur est

$$\begin{aligned} \left[D_\alpha, D_\beta\right] V^\gamma &= \left(K^\gamma_\alpha K_{\beta\lambda} - K^\gamma_\beta K_{\alpha\lambda}\right) V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\delta_\beta h^\gamma_\lambda \left(\nabla_\mu \nabla_\delta - \nabla_\delta \nabla_\mu\right) V^\lambda \\ &= \left(K^\gamma_\alpha K_{\beta\lambda} - K^\gamma_\beta K_{\alpha\lambda}\right) V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\delta_\beta h^\gamma_\rho \left(\nabla_\mu \nabla_\delta - \nabla_\delta \nabla_\mu\right) V^\rho \end{aligned} \tag{A.17}$$

et donc

$${}^{(3)}\mathcal{R}^\gamma_{\lambda\alpha\beta} V^\lambda = \left(K^\gamma_\beta K_{\alpha\lambda} - K^\gamma_\alpha K_{\beta\lambda}\right) V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\delta_\beta h^\gamma_\rho \; {}^{(4)}\mathcal{R}^\rho_{\sigma\mu\delta} V^\sigma \tag{A.18}$$

et comme $V^\sigma = h^\sigma_\lambda V^\lambda$, on a

$${}^{(3)}\mathcal{R}^\gamma_{\lambda\alpha\beta} V^\lambda = \left(K^\gamma_\beta K_{\alpha\lambda} - K^\gamma_\alpha K_{\beta\lambda}\right) V^\lambda + h^\mu_\alpha h^\delta_\beta h^\gamma_\rho \; {}^{(4)}\mathcal{R}^\rho_{\sigma\mu\delta} h^\sigma_\lambda V^\lambda \tag{A.19}$$

mais V^λ est arbitraire, donc on obtient *la relation de Gauss*

$$^{(3)}\mathcal{R}^{\gamma}_{\lambda\alpha\beta} + K^{\gamma}_{\alpha}K_{\beta\lambda} - K^{\gamma}_{\beta}K_{\alpha\lambda} = h^{\mu}_{\alpha}h^{\delta}_{\beta}h^{\gamma}_{\rho}h^{\sigma}_{\lambda}\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta} \tag{A.20}$$

contractons γ et α avec

$$h^{\mu}_{\alpha}h^{\alpha}_{\rho} = h^{\mu}_{\rho}, \quad K^{\alpha}_{\alpha} = K \ \text{ et } \ h^{\mu}_{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho} + n^{\mu}n_{\rho}$$

il vient

$$\begin{aligned}
^{(3)}\mathcal{R}_{\lambda\beta} + KK_{\beta\lambda} - K^{\alpha}_{\beta}K_{\alpha\lambda} &= \left(\delta^{\mu}_{\rho} + n^{\mu}n_{\rho}\right) h^{\delta}_{\beta}h^{\sigma(4)}_{\lambda}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta} \\
&= \delta^{\mu}_{\rho}h^{\delta}_{\beta}h^{\sigma(4)}_{\lambda}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta} + h^{\delta}_{\beta}h^{\sigma}_{\lambda}n^{\mu}n_{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta} \\
&= h^{\sigma}_{\lambda}h^{\delta(4)}_{\beta}\mathcal{R}_{\sigma\delta} + h^{\delta}_{\beta}h^{\sigma}_{\lambda}n^{\mu}n_{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta} \\
&= h^{\sigma}_{\lambda}h^{\delta(4)}_{\beta}\mathcal{R}_{\sigma\delta} + h^{\delta}_{\beta}h^{\sigma}_{\lambda}n^{\mu}n^{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\mu\delta\rho} \qquad \text{(A.21)}
\end{aligned}$$

et $^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\mu\delta\rho} = {}^{(4)}\mathcal{R}_{\delta\mu\sigma\rho}$, alors

$$\begin{aligned}
^{(3)}\mathcal{R}_{\lambda\beta} + KK_{\beta\lambda} - K^{\alpha}_{\beta}K_{\alpha\lambda} &= h^{\sigma}_{\lambda}h^{\delta}_{\beta}\ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\delta} + h^{\delta}_{\beta}h^{\sigma}_{\lambda}n^{\mu}n^{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\delta\mu\sigma\rho} \\
&= h^{\sigma}_{\lambda}h^{\delta}_{\beta}\ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\delta} + h_{\delta\beta}h^{\sigma}_{\lambda}n^{\mu}n^{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\delta}_{\mu\sigma\rho} \qquad \text{(A.22)}
\end{aligned}$$

nous obtenons le résultat suivant

$$^{(3)}\mathcal{R}_{\lambda\beta} + KK_{\beta\lambda} - K^{\alpha}_{\beta}K_{\alpha\lambda} = h^{\sigma}_{\lambda}h^{\delta}_{\beta}\ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\delta} + h_{\delta\beta}h^{\sigma}_{\lambda}n^{\mu}n^{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\delta}_{\mu\sigma\rho} \tag{A.23}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
K^{\mu\nu} &= -h^{\alpha\mu}h^{\beta\nu}\nabla_{\alpha}n_{\beta} \qquad \text{(A.24)} \\
K^{\mu\nu}n_{\nu} &= -h^{\alpha\mu}h^{\beta\nu}n_{\nu}\nabla_{\alpha}n_{\beta} \\
&= -h^{\alpha\mu}n^{\beta}\nabla_{\alpha}n_{\beta} = 0
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
K^{\mu 0}n_0 + K^{\mu i}n_i &= 0 \\
K^{\mu 0}n_0 &= 0 \qquad \text{(A.25)}
\end{aligned}$$

puisque $n_\mu = (-N, 0, 0, 0)$ alors $K^{\mu 0} = 0$ donc les indices sont des composantes spasciales avec la métrique d'éspace et $K^{\lambda}_{\lambda} = K^{i}_{i} = K$, et , $K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = K_{ij}K^{ij}$. On multiplie l'équation $(A.23)$

par $h^{\lambda\beta}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
h^{\lambda\beta}\left(h^{\sigma}_{\lambda}h^{\delta(4)}_{\beta}\mathcal{R}_{\sigma\delta}+h_{\delta\beta}h^{\sigma}_{\lambda}n^{\mu}n\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\delta}_{\mu\sigma\rho}\right) &= h^{\lambda\beta}\left({}^{(3)}\mathcal{R}_{\lambda\beta}+KK_{\beta\lambda}-K^{\alpha}_{\beta}K_{\alpha\lambda}\right)\\
h^{\lambda\beta}\left(h^{\sigma}_{\lambda}h^{\delta}_{\beta}\ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\delta}+h_{\delta\beta}h^{\sigma}_{\lambda}n^{\mu}n^{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\delta}_{\mu\sigma\rho}\right) &= \left({}^{(3)}\mathcal{R}+K^{2}-K^{\alpha\lambda}K_{\alpha\lambda}\right)\\
h^{\lambda\beta}h^{\sigma}_{\lambda}h^{\delta}_{\beta}\ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\delta}+h^{\lambda\beta}h_{\delta\beta}h^{\sigma}_{\lambda}n^{\mu}n^{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\delta}_{\mu\sigma\rho} &= \left({}^{(3)}\mathcal{R}+K^{2}-K^{ij}K_{ij}\right)\\
{}^{(4)}\mathcal{R}+\delta^{\lambda}_{\delta}h^{\sigma}_{\lambda}n^{\mu}n^{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\delta}_{\mu\sigma\rho} &= \left({}^{(3)}\mathcal{R}+K^{2}-K^{ij}K_{ij}\right)\\
{}^{(4)}\mathcal{R}+h^{\sigma}_{\delta}n^{\mu}n^{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\delta}_{\mu\sigma\rho} &= \left({}^{(3)}\mathcal{R}+K^{2}-K^{ij}K_{ij}\right) \qquad \text{(A.26)}
\end{aligned}
$$

contractons σ et δ

$$
{}^{(4)}\mathcal{R}+h^{\sigma}_{\sigma}n^{\mu}n^{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\mu\rho}=\left({}^{(3)}\mathcal{R}+K^{2}-K^{ij}K_{ij}\right) \qquad \text{(A.27)}
$$

comme $h^{\sigma}_{\sigma}=\delta^{\sigma}_{\sigma}-1=3-1=2$ on obtient donc l'équation de *Gauss scalair*

$$
{}^{(4)}\mathcal{R}+2n^{\mu}n^{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\mu\rho}=\left({}^{(3)}\mathcal{R}+K^{2}-K^{ij}K_{ij}\right) \qquad \text{(A.28)}
$$

On a

$$
\left(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}-\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\right)n^{\delta}={}^{(4)}\ \mathcal{R}^{\delta}_{\mu\alpha\beta}n^{\mu} \qquad \text{(A.29)}
$$

si on projette cette relation sur Σ_{t} , on obtient

$$
h^{\mu}_{\alpha}h^{\delta}_{\beta}h^{\gamma(4)}_{\rho}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta}n^{\sigma}=h^{\mu}_{\alpha}h^{\delta}_{\beta}h^{\gamma}_{\rho}\left(\nabla_{\mu}\nabla_{\delta}-\nabla_{\mu}\nabla_{\delta}\right)n^{\rho} \qquad \text{(A.30)}
$$

nous savons que

$$
\nabla_{\mu}n^{\nu}=-K^{\nu}_{\mu}-n_{\mu}a^{\nu} \qquad \text{(A.31)}
$$

alors (A.30) devient

$$
\begin{aligned}
h^{\mu}_{\alpha}h^{\delta}_{\beta}h^{\gamma(4)}_{\rho}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta}n^{\sigma} &= h^{\mu}_{\alpha}h^{\delta}_{\beta}h^{\gamma}_{\rho}\left[\nabla_{\mu}\left(-K^{\rho}_{\delta}-n_{\delta}a^{\rho}\right)-\nabla_{\delta}\left(-K^{\rho}_{\mu}-n_{\mu}a^{\rho}\right)\right]\\
&= h^{\mu}_{\alpha}h^{\delta}_{\beta}h^{\gamma}_{\rho}\left(-\nabla_{\mu}K^{\rho}_{\delta}-\nabla_{\mu}n_{\delta}a^{\rho}-n_{\delta}\nabla_{\mu}a^{\rho}+\nabla_{\delta}K^{\rho}_{\mu}+\nabla_{\delta}n_{\mu}a^{\rho}+n_{\mu}\nabla_{\delta}a^{\rho}\right) \qquad \text{(A.32)}
\end{aligned}
$$

et comme $h^{\mu}_{\nu}n^{\nu}=0$, $h^{\mu}_{\nu}a^{\nu}=a^{\mu}$, $K_{\mu\nu}=-h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu}\nabla_{\alpha}n_{\beta}$,et $K_{\mu\nu}$ symétrique on arrive à la forme réduite

$$
h^{\mu}_{\alpha}h^{\delta}_{\beta}h^{\gamma}_{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta}n^{\sigma}=D_{\beta}K^{\gamma}_{\alpha}-D_{\alpha}K^{\gamma}_{\beta} \qquad \text{(A.33)}
$$

qui est l'équation de *Godazzi-Mainardi.* Si nous contractons α et γ on aura

$$
\begin{aligned}
h^{\mu}_{\alpha}h^{\delta}_{\beta}h^{\alpha}_{\rho}\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta}n^{\sigma} &= D_{\beta}K^{\alpha}_{\alpha}-D_{\alpha}K^{\alpha}_{\beta}\\
h^{\mu}_{\rho}h^{\delta}_{\beta}\ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta}n^{\sigma} &= D_{\beta}K-D_{\mu}K^{\mu}_{\beta}
\end{aligned}
$$

et comme $h^{\mu}_{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho} + n^{\mu} n_{\rho}$ le coté gauche devient

$$\left(\delta^{\mu}_{\rho} + n^{\mu} n_{\rho}\right) h^{\delta}_{\beta} \ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta} n^{\sigma} = \delta^{\mu}_{\rho} h^{\delta}_{\beta} \ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta} n^{\sigma} + h^{\delta}_{\beta} \ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta} n^{\sigma} n^{\mu} n_{\rho}$$

et ${}^{(4)}\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\delta} n^{\sigma} n^{\mu} n_{\rho} = 0$ (du fait de la symétrie et antisymétrie des indices $\{\rho, \sigma\}$), On obtient ainsi la relation de *Godazzi contractée*

$$h^{\delta}_{\beta} n^{\sigma} \ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\delta} = D_{\beta} K - D_{\mu} K^{\mu}_{\beta} \tag{A.34}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\rho} n^{\mu (4)}\mathcal{R}^{\delta}_{\mu\sigma\rho} &= h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\rho} \left(\nabla_{\sigma}\nabla_{\rho} - \nabla_{\rho}\nabla_{\sigma}\right) n^{\delta} \\ &= h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\rho} \left(\nabla_{\sigma}\nabla_{\rho} n^{\delta} - \nabla_{\rho}\nabla_{\sigma} n^{\delta}\right) \end{aligned} \tag{A.35}$$

avec $\nabla_{\mu} n_{\nu} = -K_{\mu\nu} - n_{\mu} a_{\nu}$, $a_{\mu} = n^{\alpha}\nabla_{\alpha} n_{\mu} = D_{\mu} \ln N$, $K^{\mu}_{\alpha} n^{\alpha} = K^{\mu}$ et $h^{\alpha}_{\mu} n_{\alpha} = 0$ alors

$$\begin{aligned} h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\rho} n^{\mu (4)}\mathcal{R}^{\delta}_{\mu\sigma\rho} &= h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\rho} \left\{\nabla_{\sigma}\left(-K^{\delta}_{\rho} - n_{\rho} a^{\delta}\right) - \nabla_{\rho}\left(-K^{\delta}_{\sigma} - n_{\sigma} a^{\delta}\right)\right\} \\ &= h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\rho} \left\{-\nabla_{\sigma} K^{\delta}_{\rho} - \nabla_{\sigma} n_{\rho} a^{\delta} - n_{\rho}\nabla_{\sigma} a^{\delta} \right. \\ &\quad \left. +\nabla_{\rho} K^{\delta}_{\sigma} + \nabla_{\rho} n_{\mu} a^{\delta} + n_{\sigma}\nabla_{\rho} a^{\delta}\right\} \\ &= h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\rho} \left\{-\nabla_{\sigma} K^{\delta}_{\rho} - \nabla_{\sigma} n_{\rho} D^{\delta} \ln N - n_{\rho}\nabla_{\sigma} D^{\delta} \ln N \right. \\ &\quad \left. \left(+\nabla_{\rho} K^{\delta}_{\sigma} + \nabla_{\rho} n_{\mu} D^{\delta} \ln N + n_{\sigma}\nabla_{\rho} D^{\delta} \ln N\right)\right\} \\ &= h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\rho} \left\{-\nabla_{\sigma} K^{\delta}_{\rho} n^{\rho} - n^{\rho}\nabla_{\sigma} n_{\rho} D^{\delta} \ln N - n^{\rho} n_{\rho}\nabla_{\sigma} D^{\delta} \ln N \right. \\ &\quad \left. +n^{\rho}\nabla_{\rho} K^{\delta}_{\sigma} + n^{\rho}\nabla_{\rho} n_{\mu} D^{\delta} \ln N + n^{\rho} n_{\sigma}\nabla_{\rho} D^{\delta} \ln N\right\} \\ &= h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda} K^{\delta}_{\rho}\nabla_{\sigma} n^{\rho} + h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda}\nabla_{\sigma} D^{\delta} \ln N + h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\rho}\nabla_{\rho} K^{\delta}_{\sigma} \\ &\quad +h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda}\left(D_{\sigma} \ln N\right)\left(D^{\delta} \ln N\right) \\ &= -K_{\rho\beta} K^{\rho}_{\lambda} + D_{\lambda} D_{\beta} \ln N + h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\rho}\nabla_{\rho} K^{\delta}_{\sigma} + \left(D_{\lambda} \ln N\right)\left(D_{\beta} \ln N\right) \\ &= -K_{\rho\beta} K^{\rho}_{\lambda} + h^{\delta}_{\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\rho}\nabla_{\rho} K_{\sigma\delta} + \frac{1}{N} D_{\beta} D_{\lambda} N \end{aligned}$$

Puis, on remplace le dernier terme de l'équation $(A.23)$ par l'expression précédente on aura

$$\begin{aligned} h^{\sigma}_{\lambda} h^{\delta}_{\beta} \ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\delta} &= {}^{(3)}\mathcal{R}_{\lambda\beta} + K K_{\beta\lambda} - K^{\alpha}_{\beta} K_{\alpha\lambda} - h_{\delta\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\mu} n^{\rho} \ {}^{(4)}\mathcal{R}^{\delta}_{\mu\sigma\rho} \\ &= {}^{(3)}\mathcal{R}_{\lambda\beta} + K K_{\beta\lambda} - \underbrace{K_{\alpha\lambda} K^{\alpha}_{\beta} + K_{\rho\beta} K^{\rho}_{\lambda}}_{=0} \\ &\quad -h^{\delta}_{\beta} h^{\sigma}_{\lambda} n^{\rho}\nabla_{\rho} K_{\sigma\delta} - \frac{1}{N} D_{\beta} D_{\lambda} N \end{aligned}$$

puisque $K_{\alpha\beta}$ est symétrique. On a donc

$$h^{\sigma}_{\lambda}h^{\delta}_{\beta}\ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\delta} = {}^{(3)}\mathcal{R}_{\lambda\beta} + KK_{\beta\lambda} - h^{\delta}_{\beta}h^{\sigma}_{\lambda}n^{\rho}\nabla_{\rho}K_{\sigma\delta} - \frac{1}{N}D_{\beta}D_{\lambda}N \tag{A.36}$$

contractons l'équation $(A.36)$ avec $h^{\lambda\beta}$

$$\begin{aligned}
h^{\lambda\beta}h^{\sigma}_{\lambda}h^{\delta}_{\beta}\ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\delta} &= h^{\lambda\beta}\ {}^{(3)}\mathcal{R}_{\lambda\beta} + h^{\lambda\beta}KK_{\beta\lambda} - h^{\lambda\beta}h^{\delta}_{\beta}h^{\sigma}_{\lambda}n^{\rho}\nabla_{\rho}K_{\sigma\delta} - h^{\lambda\beta}\frac{1}{N}D_{\beta}D_{\lambda}N \\
h^{\sigma\delta}\ {}^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\delta} &= {}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 - h^{\sigma\delta}n^{\rho}\nabla_{\rho}K_{\sigma\delta} - h^{\lambda\beta}\frac{1}{N}D_{\beta}D_{\lambda}N \qquad (A.37) \\
h^{\sigma\delta(4)}\mathcal{R}_{\sigma\delta} &= {}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 - h^{ij}n^{\rho}\nabla_{\rho}K_{ij} - \frac{1}{N}h^{ij}D_iD_jN \qquad (A.38)
\end{aligned}$$

et comme $h^{\sigma\delta} = g^{\sigma\delta} + n^{\sigma}n^{\delta}$ il en résult

$${}^{(4)}\mathcal{R} + {}^{(4)}\mathcal{R}_{\sigma\delta}n^{\sigma}n^{\delta} = {}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 - h^{ij}n^{\rho}\nabla_{\rho}K_{ij} - \frac{1}{N}h^{ij}D_iD_jN \tag{A.39}$$

Nous comparons maintenant les équations$(A.39)$ avec la relation scalaire de Gauss (A.28) ce qui aide à supprimer le deuxième terme de la relation précédente et nous obtenons finalement la décomposition

$${}^{(4)}\mathcal{R} = {}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 + K^{ij}K_{ij} - 2n^{\rho}\nabla_{\rho}K - \frac{2}{N}D_iD^iN \tag{A.40}$$

A.3 Annexe C

C.1 : On a la relation

$$g^{\alpha\lambda}g_{\lambda\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{A.41}$$

la variation de cette relation donne

$$g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\beta} = -g_{\lambda\beta}\delta g^{\alpha\lambda}$$

multiplions les deux membres par $g_{\alpha\mu}$

$$g_{\alpha\mu}g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\beta} = -g_{\lambda\beta}g_{\alpha\mu}\delta g^{\alpha\lambda}$$

on obtient

$$\delta^{\lambda}_{\mu}\delta g_{\lambda\beta} = -g_{\lambda\beta}g_{\alpha\mu}\delta g^{\alpha\lambda}$$

Alors

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{A.42}$$

la variation du déterminant métrique δg peut se trouver en considérant la forme de l'inverse

$$g^{\mu\nu} = \frac{(A^{\mu\nu})^T}{g} \tag{A.43}$$

où $A^{\mu\nu}$est le cofacteur associé

$$g = g_{\mu\nu} A^{\nu\mu} \tag{A.44}$$

soit

$$\delta g = \frac{\delta g}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = A^{\nu\mu} \delta g_{\mu\nu}$$

donc

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{A.45}$$

il vient

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{A.46}$$

C.2 : On cherche à montrer

$$\delta \mathcal{R}_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\mu \delta \Gamma^\rho_{\rho\nu} \tag{A.47}$$

avec $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci donnée en terme des symboles de Christoffel

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\rho_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \tag{A.48}$$

la variation $\delta \mathcal{R}_{\mu\nu}$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R}_{\mu\nu} &= \delta \left(\partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\rho_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \right) \\ &= \partial_\rho \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\mu \delta \Gamma^\rho_{\rho\nu} + \delta \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \delta \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \\ &\quad - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\rho\nu} + \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \end{aligned} \tag{A.49}$$

les dérivées covariantes

$$\nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \partial_\rho \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \delta \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \tag{A.50}$$

et

$$\nabla_\mu \delta \Gamma^\rho_{\rho\nu} = \partial_\mu \delta \Gamma^\rho_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \delta \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \tag{A.51}$$

remplaçons on aura

$$\delta \mathcal{R}_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\mu \delta \Gamma^\rho_{\rho\nu} \tag{A.52}$$

cette relation est comme l'identité de Platini.

A.4 Annexe D

D1. Nous allons montrer la relation

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(D_j N_i + D_i N_j - \dot{h}_{ij}\right) \tag{A.53}$$

la dérivée de Lie de la métrique est définie par

$$\mathcal{L}_m h_{ij} = m^\alpha \nabla_\alpha h_{ij} + h_{\alpha j}\nabla_i m^\alpha + h_{i\alpha}\nabla_j m^\alpha \tag{A.54}$$

avec $m^i = Nn^i$ et $\nabla_i n_j = -K_{ij} - n_i a_j$ alors

$$\begin{aligned}\nabla_j m^i &= \nabla_j\left(Nn^i\right)\\ &= n^i\nabla_j N + N\nabla_j n^i\\ &= n^i\nabla_j N - NK^i_j - n_j D^i N\end{aligned} \tag{A.55}$$

$a_\mu = n^\alpha \nabla_\alpha n_i = D_i \ln N$, et $h_{ij}n^j = 0$ ainsi

$$\begin{aligned}L_m h_{ij} &= m^\alpha \nabla_\alpha\left(g_{ij} + n_i n_j\right) + h_{\alpha j}\left(n^\alpha \nabla_i N - NK^\alpha_i - n_i D^\alpha N\right) + h_{i\alpha}\left(n^\alpha \nabla_j N - NK^\alpha_j - n_j D^\alpha N\right)\\ &= Nn^\alpha n_j \nabla_\alpha n_i + Nn^\alpha n_i \nabla_\alpha n_j + n_j\nabla_i N - NK_{ji} - n_i D_j N + n_i \nabla_j N - NK_{ij} - n_j D_i N\end{aligned} \tag{A.56}$$

$$L_m h_{ij} = -2NK_{ij} \tag{A.57}$$

séparons m en $\left(\partial_t - N^k\partial_k\right)$ et réécrivons la dérivée de Lie comme suit

$$\begin{aligned}L_m h_{ij} &= m^\lambda \nabla_\lambda h_{ij} - h_{\lambda j}\nabla_i m^\lambda - h_{i\lambda}\nabla_j m^\lambda\\ &= N\left(n^\lambda \nabla_\lambda h_{ij} - h_{\lambda j}\nabla_i n^\lambda - h_{i\lambda}\nabla_j n^\lambda\right)\\ &= N\left(\left(n^0 + n^k\right)\nabla_\lambda h_{ij} - h_{Kj}D_i n^K - h_{iK}D_j n^K\right)\\ &= Nn^0\nabla_0 h_{ij} + N^k D_k h_{ij} - h_{Kj}D_i N^K - h_{iK}D_j N^K\\ &= \partial_t h_{ij} - \left(N^k D_k h_{ij} + h_{Kj}D_i N^K + h_{iK}D_j N^K\right)\end{aligned} \tag{A.58}$$

avec $D_k h_{ij} = 0$

$$L_m h_{ij} = \partial_t h_{ij} - h_{kj}D_i N^k + h_{ik}D_j N^k \tag{A.59}$$

la combinaison de cette équation avec l'équation (A.56) donne un résultat utile

$$\partial_t h_{ij} - h_{kj}D_i N^k - h_{ik}D_j N^k = -2NK_{ij} \tag{A.60}$$

ce qui donne

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(D_jN_i + D_iN_j - \dot{h}_{ij}\right) \tag{A.61}$$

D2. Dans cette partie nous calculons le moment conjugué π^{ij}

$$\begin{aligned}
\pi^{ij} &= \frac{N\sqrt{h}\partial\left(K^{ij}K_{ij} - K^2\right)}{\partial\dot{h}_{ij}} \\
&= \frac{N\sqrt{h}\partial\left(h^{ik}h^{jm}\left(K_{ij}K_{km} - K_{ik}K_{jm}\right)\right)}{\partial\dot{h}_{ij}} \\
&= N\sqrt{h}\left(h^{ik}h^{jm}\frac{\partial K_{ij}}{\partial\dot{h}_{ij}}K_{km} + h^{ik}h^{jm}K_{ij}\frac{\partial K_{km}}{\partial\dot{h}_{ij}} - h^{ik}h^{jm}\frac{\partial K_{ik}}{\partial\dot{h}_{ij}}K_{jm} - h^{ik}h^{jm}K_{ik}\frac{\partial K_{jm}}{\partial\dot{h}_{ij}}\right) \\
&= \frac{N\sqrt{h}}{2N}\left(-h^{ik}h^{jm}\delta^i_i\delta^j_jK_{km} - h^{ik}h^{jm}K_{ij}\delta^i_k\delta^j_m + h^{ik}h^{jm}\delta^i_i\delta^j_kK_{jm} + h^{ik}h^{jm}K_{ik}\delta^i_j\delta^j_m\right) \\
&= \frac{\sqrt{h}}{2}\left(2h^{ij}K - 2K^{ij}\right)
\end{aligned} \tag{A.62}$$

ce qui donne

$$\pi^{ij} = \sqrt{h}\left(h^{ij}K - K^{ij}\right)$$

D3. Dans cette partie nous calculons les equations d'Hamilton Jacobi. On a

$$\pi^{ij} = \sqrt{h}\left(h^{ij}K - K^{ij}\right)$$

contractons avec h_{ij} donne pour $h_{ij}K^{ij} = K$ comme suit (en utilisant $h_{ij}h^{ij} = 3$,et $h_{ij}\pi^{ij} = \pi$)

$$\begin{aligned}
h_{ij}\pi^{ij} &= \sqrt{h}\left(h_{ij}h^{ij}K - h_{ij}K^{ij}\right) \\
&= \sqrt{h}\left(3K - K\right) \\
\pi &= 2\sqrt{h}K
\end{aligned} \tag{A.63}$$

ce qui donne

$$K = \frac{1}{2\sqrt{h}}\pi \tag{A.64}$$

on remplace l'équation $(A.64)$ dans l'équation (**??**), et on trouve K_{ij}

$$K_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{h}}\left(h^{ij}\pi - 2\pi^{ij}\right) \tag{A.65}$$

Enfin, nous pouvons écrire l'équation d'évolution de h_{ij} en utilisant l'expression de l'équation($A.61$) et remplaçant K_{ij} par l'équation ($A.65$) pour obtenir

$$\dot{h}_{ij} = D_i N_j + D_j N - \frac{N}{\sqrt{h}} \left(\pi h^{ij} - 2\pi^{ij}\right) \tag{A.66}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_g &= N\sqrt{h}\left({}^{(3)}\mathcal{R} - K^2 + K^{ij}K_{ij}\right) \\
&= N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R} - N\sqrt{h}\frac{\pi^2}{4h} + N\sqrt{h}\left(\frac{1}{2\sqrt{h}}\right)^2 \left(\pi h^{ij} - 2\pi^{ij}\right)\left(\pi h_{ij} - 2\pi_{ij}\right) \\
&= N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R} - \frac{N\pi^2}{4\sqrt{h}} + \frac{N}{4\sqrt{h}}\left(3\pi^2 - 2\pi^2 - 2\pi^2 + 4\pi^{ij}\pi_{ij}\right) \\
&= N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R} + \frac{N}{4\sqrt{h}}\left(4\pi^{ij}\pi_{ij} - 2\pi^2\right) \\
\mathcal{L}_g &= N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R} + \frac{N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{A.67}$$

La densité hamiltonienne est définie par

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_g \tag{A.68}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi^{ij}\left[D_i N_j + D_j N_i - \frac{N}{\sqrt{h}}\left(\pi h^{ij} - 2\pi^{ij}\right)\right] - \left[N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R} + \frac{N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2}\right)\right] \\
&= \pi^{ij}\left(D_i N_j + D_j N_i - N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R}\right) - \frac{N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{A.69}$$

pour finalement obtenir la densité hamiltonienne ADM

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\left(D_i N_j + D_j N_i - N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R}\right) - \frac{N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2}\right) \tag{A.70}$$

Calculons $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{ij}}$ avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi^2}{\partial \pi^{ij}} &= 2\pi\frac{\partial \pi}{\partial \pi^{ij}} \\
&= 2\pi\frac{\partial \pi^{ab}h_{ab}}{\partial \pi^{ij}} \\
&= 2\pi h_{ab}\frac{\partial \pi^{ab}}{\partial \pi^{ij}} \\
&= 2\pi h_{ab}\delta_i^a\delta_j^b \\
&= 2\pi h_{ij}
\end{aligned} \tag{A.71}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\pi^{kl}\pi_{kl}\right)}{\partial\pi^{ij}} &= \frac{\partial\pi^{kl}}{\partial\pi^{ij}}\pi_{kl}+\pi^{kl}\frac{\partial\pi_{kl}}{\partial\pi^{ij}} \\ &= \delta_i^k\delta_j^l\pi_{kl}+\pi^{kl}\delta_k^i\delta_l^j \\ &= \pi_{ij}+\pi^{ij} \\ &= \pi_{ij}+h_{ik}h_{jl}\pi^{ij} \\ &= 2\pi_{ij} \end{aligned} \tag{A.72}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi^{ij}} = D_iN_j+D_jN_i-\frac{N}{\sqrt{h}}\left(2\pi_{ij}-\pi h_{ij}\right) \tag{A.73}$$

et comme $K_{ij}=\frac{1}{2\sqrt{h}}\left(h^{ij}\pi-2\pi^{ij}\right)$ on aura

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi^{ij}} = D_iN_j+D_jN_i-2NK_{ij} \tag{A.74}$$

calculons $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial h_{ij}}$

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial h_{ij}} = -\frac{\partial\left(\pi^{ij}\left(D_iN_j+D_jN_i-N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R}\right)-\frac{N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij}-\frac{\pi^2}{2}\right)\right)}{\partial h_{ij}} \tag{A.75}$$

on utilise la relation suivante $\delta h = hh^{\mu\nu}\delta h_{\mu\nu}$ notons que $\frac{\partial\pi^{ab}}{\partial h_{ij}}\neq 0$, comme $\pi_{ab}=\pi^{rs}h_{ra}h_{sb}$ alors

$$\begin{aligned}\frac{\delta\pi_{ab}\pi^{ab}}{\delta h_{ij}} &= \frac{\delta}{\delta h_{ij}}\left(\pi_{ab}\pi^{ab}\right) \\ &= \frac{\delta}{\delta h_{ij}}\left(\pi^{rs}h_{ra}h_{sb}\pi^{ab}\right) \\ &= \left[\frac{\delta\pi^{rs}}{\delta h_{ij}}h_{ra}h_{sb}\pi^{ab}+\pi^{rs}\left(\frac{\delta h_{ra}}{\delta h_{ij}}h_{sb}+h_{ra}\frac{\delta h_{sb}}{\delta h_{ij}}\right)\pi^{ab}\right] \end{aligned} \tag{A.76}$$

comme $\frac{\delta\pi^{rs}}{\delta h_{ij}}=0$ et , $\frac{\delta h_{ra}}{\delta h_{ij}}=\delta_r^i\delta_a^j \Rightarrow$

$$\frac{\delta\pi_{ab}\pi^{ab}}{\delta h_{ij}} = 2\pi_b^i\pi^{jb} \tag{A.77}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\left(\frac{N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij}-\frac{\pi^2}{2}\right)\right)}{\delta h_{ij}} &= \frac{\delta}{\delta h_{ij}}\left(\frac{N}{\sqrt{h}}\right)\left(\pi^{ij}\pi_{ij}-\frac{\pi^2}{2}\right)+\frac{N}{\sqrt{h}}\frac{\delta\left(\pi^{ij}\pi_{ij}-\frac{\pi^2}{2}\right)}{\delta h_{ij}} \\ &= -\frac{N}{2\sqrt{h}}\delta_a^i\delta_b^jh^{ab}\left(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{\pi^2}{2}\right)+\frac{N}{\sqrt{h}}\left(2\pi_a^i\pi^{aj}-\pi\pi^{ab}\right) \\ &= \frac{N}{\sqrt{h}}\left(-\frac{1}{2}\left(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{\pi^2}{2}\right)h^{ij}+2\pi_a^i\pi^{aj}-\pi\pi^{ij}\right) \end{aligned} \tag{A.78}$$

ce qui donne

$$\frac{\delta\left(\frac{N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij}-\frac{\pi^2}{2}\right)\right)}{\delta h_{ij}}=\frac{N}{\sqrt{h}}\left(-\frac{1}{2}\left(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{\pi^2}{2}\right)h^{ij}+2\pi^i_a\pi^{aj}-\pi\pi^{ij}\right) \tag{A.79}$$

le deuxiéme terme est relativement simple également si on fait appel à la forme de la variation du 4-scaliare de Ricci et appliquons la même formule pour le cas 3-scaliare de Ricci

$$\begin{aligned}\delta\left(-N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R}\right) &= -N\delta\left(\sqrt{h}\right)^{(3)}\mathcal{R}-N\sqrt{h}\delta^{(3)}\mathcal{R}\\ &= -\frac{N}{2}\sqrt{h}h^{ab(3)}\mathcal{R}\delta h_{ab}-N\sqrt{h}\delta^{(3)}\mathcal{R}\end{aligned} \tag{A.80}$$

c-à-d

$$\delta\left(-N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R}\right)=-\frac{N}{2}\sqrt{h}h^{ab}\delta h_{ab}-N\sqrt{h}\delta^{(3)}\mathcal{R} \tag{A.81}$$

l'expression de la variation du symbole de christoffel est

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\delta g_{\lambda\nu,\mu}+\delta g_{\mu\lambda,\nu}-\delta g_{\mu\nu,\lambda}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\nabla_\mu g_{\lambda\nu}+\nabla_\nu g_{\mu\lambda}-\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\right)+\frac{1}{2}\left(\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\delta g_{\sigma\nu}+\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\sigma}+\Gamma^\sigma_{\nu\mu}\delta g_{\mu\sigma}-\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}\delta g_{\sigma\nu}-\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\delta g_{\mu\sigma}\right)\end{aligned} \tag{A.82}$$

c-à-d

$$\delta\Gamma_{\lambda\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\nabla_\mu g_{\lambda\nu}+\nabla_\nu g_{\mu\lambda}-\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\right)+\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\sigma} \tag{A.83}$$

nous aurons également besion

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} &= \delta g^{\rho\lambda}\Gamma_{\lambda\mu\nu}+g^{\rho\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\mu\nu}\\ &= -g^{\rho\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\delta g_{\sigma\lambda}+\frac{1}{2}g^{\rho\lambda}\left(\nabla_\mu g_{\lambda\nu}+\nabla_\nu g_{\mu\lambda}-\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\right)+g^{\rho\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\sigma}\end{aligned} \tag{A.84}$$

c-à-d

$$\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\rho\lambda}\left(\nabla_\mu g_{\lambda\nu}+\nabla_\nu g_{\mu\lambda}-\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\right) \tag{A.85}$$

contraction de ρ et μ

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^\mu_{\mu\nu} &= \delta g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\mu\nu}+g^{\mu\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\mu\nu}\\ &= -g^{\alpha\mu}g^{\beta\lambda}\delta g_{\alpha\beta}\Gamma_{\lambda\mu\nu}+g^{\mu\lambda}\left[\frac{1}{2}\left(\nabla_\mu g_{\lambda\nu}+\nabla_\nu g_{\mu\lambda}-\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\right)+\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\sigma}\right]\\ &= -\Gamma^\beta_{\mu\nu}g^{\alpha\mu}\delta g_{\alpha\beta}+g^{\mu\lambda}\frac{1}{2}\left(\nabla_\mu g_{\lambda\nu}+\nabla_\nu g_{\mu\lambda}-\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\right)+\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\sigma}\end{aligned} \tag{A.86}$$

c-à-d

$$\delta\Gamma^\mu_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\nabla_\nu g_{\lambda\mu} \tag{A.87}$$

considérons le vecteur

$$\delta V^{\rho} = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\rho\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} \tag{A.88}$$

qui apparaît dans la variation de $\mathcal{R}$ .Cela équivaut à

$$\delta V^{\rho} = \left(g^{\mu\nu}\delta g^{\rho\lambda} - g^{\rho\nu}\delta g^{\mu\lambda}\right)\Gamma_{\lambda\mu\nu} + \left(g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda} - g^{\rho\nu}g^{\mu\lambda}\right)\delta\Gamma_{\lambda\mu\nu} \tag{A.89}$$

on a

$$\begin{aligned}\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda} - g^{\rho\nu}g^{\mu\lambda}\right)\delta\Gamma_{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left[\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda} - g^{\rho\nu}g^{\mu\lambda}\right)\left((\delta g_{\lambda\nu,\mu} + \delta g_{\mu\lambda,\nu} - \delta g_{\mu\nu,\lambda})\right)\right] \\ &= g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}\delta g_{\lambda\nu,\mu} - g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}\delta g_{\mu\nu,\lambda}\end{aligned} \tag{A.90}$$

utilisons l'équations $(A.85)$ et $(A.88)$ on a

$$\begin{aligned}\delta V^{\rho} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}\left(\nabla_{\mu}g_{\lambda\nu} + \nabla_{\nu}g_{\mu\lambda} - \nabla_{\lambda}g_{\mu\nu}\right) - g^{\rho\nu}\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\nabla_{\nu}g_{\lambda\mu} \\ &= g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}\left(\nabla_{\mu}g_{\lambda\nu} - \nabla_{\lambda}g_{\mu\nu}\right)\end{aligned} \tag{A.91}$$

on a déja peut montrer

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu} \tag{A.92}$$

maintenant, en utilisant l'équation $(A.92)$. Nous pouvons également calculer la variation du scalaire de Ricci par rapport à la métrique comme suit

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{R} &= -\mathcal{R}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} \\ &= -\mathcal{R}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\left(\nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}\right) \\ &= -\mathcal{R}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \nabla_{\lambda}\delta V^{\lambda}\end{aligned} \tag{A.93}$$

$\Rightarrow$

$$\delta\mathcal{R} = -\mathcal{R}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \nabla_{\lambda}\delta V^{\lambda} \tag{A.94}$$

mais en utilisant le tenseur de variation 4-Ricci pour la 3-D ,pour obtenir

$$\delta^{(3)}\mathcal{R} = -^{(3)}\mathcal{R}^{\mu\nu}\delta h_{\mu\nu} + D_{\lambda}\delta V^{\lambda} \tag{A.95}$$

on remplace l'équation $(A.95)$ dans l'équation $(A.81)$

$$\begin{aligned}\delta\left(-N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R}\right) &= -\frac{N}{2}\sqrt{h}h^{ab(3)}\mathcal{R}\delta h_{ab} - N\sqrt{h}\left(-^{(3)}\mathcal{R}^{ab}\delta h_{ab} + D_a\delta V^a\right) \\ &= N\sqrt{h}\left(^{(3)}\mathcal{R}^{ab} - \frac{1}{2}h^{ab(3)}\mathcal{R}\right)\delta h_{ab} - N\sqrt{h}D_a\delta V^a \\ &= N\sqrt{h}\left(^{(3)}\mathcal{R}^{ab} - \frac{1}{2}h^{ab(3)}\mathcal{R}\right)\delta h_{ab} + \sqrt{h}\delta V^a D_a N - \sqrt{h}D_a\left(N\delta V^a\right)\end{aligned} \tag{A.96}$$

nous appliquons l'intégration par parties sur le dernier terme et ignorons les termes aux limites pour obtenir $(D_a h = 0)$

$$\delta\left(-N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R}\right) = N\sqrt{h}\left({}^{(3)}\mathcal{R}^{ab} - \frac{1}{2}h^{ab(3)}\mathcal{R}\right)\delta h_{ab} + \sqrt{h}\delta V^a D_a N \tag{A.97}$$

maintenant , nous simplifions l'expression de δV^a en utilisant l'expression de la variation de Christoffel

$$\begin{aligned}\delta V^a D_a N &= h^{ab}h^{cd}\left(D_a\delta h_{bc} - D_c\delta h_{ab}\right)D_d N \\ &= D_d\left[\left(h^{ab}D^c N - h^{bc}D^a N\right)\delta h_{bc}\right] - \left(D^a D^b N - h^{ab}D_c D^c N\right)\delta h_{ab}\end{aligned} \tag{A.98}$$

et comme $D_a h = 0$

$$\delta V^a D_a N = -\left(D^a D^b N - h^{ab}D_c D^c N\right)\delta h_{ab} \tag{A.99}$$

donc le le deuxiéme terme ce qui donne

$$\frac{\delta\left(-N\sqrt{h}^{(3)}\mathcal{R}\right)}{\delta h_{ij}} = N\sqrt{h}\left({}^{(3)}\mathcal{R}^{ij} - \frac{1}{2}h^{ij(3)}\mathcal{R}\right) - \sqrt{h}\left(D^i D^j N - h^{ij}D_c D^c N\right) \tag{A.100}$$

On exprime maintenant la variation du premier terme

$$\frac{\delta\left(2\pi^{ab}D_a N_b\right)}{\delta h_{ij}} = \frac{\delta\pi^{ab}}{\delta h_{ij}}2D_a N_b + 2\pi^{ab}\frac{\delta D_a N_b}{\delta h_{ij}} \tag{A.101}$$

avec

$$D_a N_b = \frac{\partial N_b}{\partial x^a} - \Gamma^{(3)c}_{ab}N_c$$

et comme N et h_{ij} sont des variables indépendante on a

$$\frac{\delta\left(2\pi^{ab}D_a N_b\right)}{\delta h_{ij}} = -2\pi^{ab}\frac{\delta\Gamma^{(3)c}_{ab}}{\delta h_{ij}}N_c \tag{A.102}$$

compte tenu du fait que

$$\delta\Gamma^{(3)c}_{ab} = \frac{1}{2}h^{cd}\left(D_a\delta h_{db} + D_b\delta h_{ad} - D_d\delta h_{ab}\right) \tag{A.103}$$

on remplace dans l'équation $(A.102)$, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\delta\left(2\pi^{ab}D_a N_b\right)}{\delta h_{ij}} &= -2\pi^{ab}\frac{\delta\left[\frac{1}{2}h^{cd}\left(D_a\delta h_{db} + D_b\delta h_{ad} - D_d\delta h_{ab}\right)\right]}{\delta h_{ij}}N_c \\ &= -2\pi^{ab}\left(h^{cd}D_a\frac{\delta h_{db}}{\delta h_{ij}}N_c - \frac{h^{cd}}{2}D_d\frac{\delta h_{ab}}{\delta h_{ij}}N_c\right) \\ &= -2\pi^{aj}D_a N^i + \pi^{ij}D_d N^d\end{aligned}$$

En vertu des trois contraintes, à savoir $D_i \pi^{ij} = 0$. Alors

$$\frac{\delta\left(2\pi^{ab} D_a N_b\right)}{\delta h_{ij}} = D_a\left(\pi^{ia} N^j + \pi^{ja} N^i - \pi^{ij} N^a\right) \tag{A.104}$$

finalement, nous remplaçons les équations $(A.79)$ et $(A.100)$ et $(A.104)$ dans la relation $(A.75)$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial h_{ij}} &= \frac{N}{2\sqrt{h}}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2}\right) h^{ij} - \frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\pi^i_a \pi^{aj} - \frac{1}{2}\pi\pi^{ij}\right) - N\sqrt{h}\left({}^{(3)}\mathcal{R}^{ij} - \frac{1}{2}h^{ij(3)}\mathcal{R}\right) + \\ &\quad \sqrt{h}\left(D^i D^j N - h^{ij} D_c D^c N\right) + D_c \pi^{ic} N^j - \pi^{jc} D_c N^i - \pi^{ij} D_c N^c \end{aligned} \tag{A.105}$$

.

Bibliographie

[1] R. L. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, "*The Dynamics of General Relativity*", Gen. Rel. Grav. **40**,1997 (2008).

[2] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, "*Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity*", Physical Review, **116 (5)**, 1322(1959).

[3] P. A. M. Dirac, "*The Theory of Gravitation in Hamiltonian Form*", Proc. Roy. Soc. **A 246**, 333 (1958).

[4] J. Rishabh, " *Introduction to Hamiltonian Formulation of General Relativity et Homogeneous Cosmologies*", Lectures notes (arxiv :2204.03537v1).

[5] A. Barrau, T. Cailleteau, J. Grain, J. Mielczarek, "*Observational Issues in Loop Quantum Cosmology*", Class.Quant.Grav. 31 (2014) 053001, arXiv :1309.6896v2 (2014)

[6] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press (1984).

Résumé

La relativité générale est habituelement introduite par le formalisme covariant (lagrangien). Tout comme en mécanique classique, il existe une description équivalente de la relativité générale utilisant l'approche hamiltonienne. Le but de ce mémoire est de passer en revue les détails de cette procédure canonique et de présenter un formalisme hamiltonien de la relativité générale dit le formalisme ADM. On a construit les pré-requis mathématiques ainsi que la décomposition $(3+1)$ de l'espace-temps en hypersurfaces marquées par un temps t. Les variables nécéssaires pour cette descriptions sont i) la métrique induite h_{ij} des hypersurface et leur moments conjugués π_{ij} ii) les fonctions lapse et shift N et **N.** On a obtenu les équations d'Hamilton pour ces variables et il s'avéré que :

i) les variables (h_{ij}, π_{ij}) sont dynamiques et vérifient bien une équation de mouvement.

ii) les variable (N , **N**) sont des multiplicateurs de Lagrange associé à 4 contraintes.

Enfin, on a montré l'équivalence entre les équations du champs d'Einstein du formalisme lagrangien et celles du formalisme hamiltonien.

Mots clés : formalisme ADM, métrique induite, hypersurface, équations du champs d'Einstein.

Abstract

General relativity is usually introduced by covariant formalism (Lagrangian). As in classical mechanics, there is an equivalent description of general relativity using the Hamiltonian approach. The purpose of this brief is to review the details of this canonical procedure and to present a Hamiltonian formalism of general relativity known as ADM formalism. We have constructed the mathematical prerequisites as well as the decomposition (3+1) of space-time into hypersurfaces marked by a time t. The variables necessary for this description are i) the induced metric, hypersurface and their conjugated moments π_{ij} ii) the functions lapse and shift Net N. We obtained the Hamilton equations for these variables and it turned out that:

i) the variables (h_{ij}, π_{ij}) are dynamic and verify a motion equation.

ii) the variables (N, N) are Lagrange multipliers associated with 4 constraints.

Finally, the equivalence between the Einstein field equations of Lagrangian formalism and those of Hamiltonian formalism has been shown.

Keywords: ADM formalism, induced metric, hyersurface, Einstein field equations.

الملخص

عادة ما يتم تقديم النسبية العامة من خلال الصيغة المتغيرة لاغرانج تماما كما هو الحال في الميكانيك الكلاسيكية, يوجد وصف مكافئ للنسبية العامة باستخدام نهج هاملتوني الغرض من هذه الأطروحة هو مراجعة تفاصيل هذا الإجراء الكنسي و تقديم الصيغة الهملتونية للنسبية العامة تسمى صيغة . .ADM لقد قمنا ببناء المتطلبات الرياضية الأساسية وكذلك تقسم الفضاء-زمن (3 + 1) إلى أسطح فائقة تتميز بوقت .t المتغيرات اللازمة لهذا الوصف هي 1) المترية المستحثة ، الأسطح الفوقية واللحظات المقترنة بها (2 π_{ij} وظائف الزوال والتحول N و .N لقد حصلنا على معادلات هاملتون لهذه المتغيرات واتضح أن:

1 (المتغيرات h_{ij}) ، (π_{ij}ديناميكية وتفي بمعادلة الحركة.

2 (المتغيرات N) ، (Nهي مضاعفات لاغرانج المرتبطة بـ 4 قيود.

أخيرًا ، أظهرنا التكافؤ بين معادلات مجال أينشتاين لصيغة لاغرانج وتلك الخاصة بالشكلية في هاملتون.

الكلمات المفتاحية: صيغة ADM ، الصيغة الهملتونية، المقياس المستحث ، السطح الفائق، معادلات المجال لأينشتاين.

Résumé

La relativité générale est habituellement introduite par le formalisme covariant (lagrangien). Tout comme en mécanique classique, il existe une description équivalente de la relativité générale utilisant l'approche hamiltonienne. Le but de ce mémoire est de passer en revue les détails de cette procédure canonique et de présenter un formalisme hamiltonien de la relativité générale dit le formalisme ADM. On a construit les pré-requis mathématiques ainsi que la décomposition (3+1) de l'espace-temps en hypersurfaces marquées par un temps t. Les variables nécessaires pour cette descriptions sont i) la métrique induite, des hypersurface et leur moments conjuguésπ_{ij} ii) les fonctions lapse et shift Net N. On a obtenu les équations d'Hamilton pour ces variables et il s'avéré que :

i) les variables (h_{ij}, π_{ij}) sont dynamiques et vérifient bien une équation de mouvement.

ii) les variable (N, N) sont des multiplicateurs de Lagrange associé à 4 contraintes.

Enfin, on a montré l'équivalence entre les équations du champs d'Einstein du formalisme lagrangien et celles du formalisme hamiltonien.

Mots clés : formalisme ADM, métrique induite, hyersurface, équations du champs d'Einstein.