REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK
BEN YAHIA JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique

N° d'ordre :
Série :

Mémoire

présenté pour obtenir le diplome de

Master en physique

Option : Physique théorique

par

Mobarki Nazha

Thème

Création des particules de Dirac neutres

Devant le Jury :

Président :	N.Ferkous	M.C.A	Univ.de Jijel
Rapporteur :	B.Guettou	M.A.A	Univ.de Jijel
Examinatrice :	N.Chine	M.C.B	Univ.de Jijel

Remerciements

Je tien à remercier en premier lieu **Dieu** tout puissant pour la volanté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour achever ce mémoire de master.

Ma profonde gratitude et mes grands remerciements sont adressés à mon encadreur **B. Guettou** M.A.A à l'université de Jijel, pour toute l'aide qu'elle m' apportée au cours de la réalisation de ce travail. Ses discussions, sa disponibilité, son soutien moral ont constitué pour moi un apport très important.

Je remercie vivement **Dr N.Ferkous** M.C.A à l'université de Jijel qui m'a fait l'honneur d'être le président de jury.

Mes vifs remerciements vont ensuite à **N.Chine** M.C.B à l'université de Jijel qui a bien accepté de juger ce mémoire de master.

Mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années de master.

Je souhaite remercier avec un soin particulier tous les membres du laboratoire de physique théorique (LPTh), dont ce travail a été réalisé. Particulièrement Lamri Houria, secrétaire du LPTh et mes collègues de master.

Je tiens à remercier très chaleureusement mes parents, mes frères, mes

sœurs et toute ma famille qui ont accepté de faire beaucoup de sacrifices pour que je réussisse dans mon travail.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

L'idée émise selon laquelle le vide est exempt de matière, sans interaction et incapable de créer de la matière à partir de rien a changé depuis l'avènement de la mécanique quantique.

La théorie des trous a en outre modifié profondément cette vision et le vide devient non vide puisqu'en perpétuellement se créent et disparaissent des particules sans laisser de traces.

Ainsi d'après D.Bohm, le vide n'est pas un vide mais "un plénum" réellement actif, néamoins ce vide quantique qui décrit une réalité virtuelle d'un monde inaccessible ou encore d'une mer impénétrable pose quelques problèmes malgré qu'il a permis de prédire plusieurs faits expérimentaux dont le plus important est l'existence de positron.

Ce vide est constitué donc de particules virtuelles, peut avoir ainsi des effets sur le monde qui nous entoure, du point de vue théorique, l'élaboration de la théorie quantique de champs a été nécessaire pour décrire cette interaction entre ces deux mondes réel et virtuel.

Parmis les phénomènes physiques qui sont été assez étudiés dans le cadre de la théorie quantique des champs L'effet de Schwinger [1], qui a trouvé une justification théorique après l'introduction de la théorie de trous de Dirac qui a prédit l'existence d'antiparticules associées aux particules [2]. Selon cette théorie le vide n'est pas vraiment "vide" mais une "mer" de Dirac qui contient des particules virtuelles ayant une énergie négative. Dans ce cas la diffusion des particules est accompagnée par la transition des particules virtuelles de la mer de dirac en particules réelles par L'effet tunnel [3], cette transition ne peut y avoir lieu que pour une barrière du potentiel supérieur au double de la masse de la particule.

Généralement, le calcul de l'amplitude de transition en mécanique quantique utilise l'intensité du champ comme paramètre pour justifier la série de perturbation, notons au passage que la création d'une paire nécessite un champ électrique supérieur à la valeur critique $E_c \simeq 1.3 \times 10^{16} v/cm$ et que tout champ électrique peut créer des particules chargées à partir du vide [4]. Pour étudier ce phénomène à partir du vide par un champ éléctrique nous pouvons utiliser plusieurs méthodes : la technique des intégrales de chemin et la méthode semi-classique, la méthode de projection [5], basée sur le calcul de la fonction de Green. Par contre il est bien connue qu'un champ magnétique constant ne créer pas de particules chargées [6], ainsi que les particules neutres ne donent pas une création de paires des particules, mais l'interaction des particules neutres avec un champ électrique ou magnétique dépend du temps résulte une densité de paires crées [7].[8].

Le but de ce mémoire est de calculer la probabilité de création des particules de Dirac neutres dans un es en interaction avec un champ éléctrique et magnétique, on basons sur la transformation de Bogoliubov [9] qui relie les états "in" et "out" pour exprimer la probabilité de création d'une paire à partir du vide et le nombre de particules neutres crées en termes de coefficientd de Bogoliubov.

Ce mémoire se compose essentiellement de trois parties :

Dans la première partie nous exposons la théorie quantique des champs en présence d'un champ extérieur de nature électrique, on détermine les étas "in" et "out" se qui implique que le vide est instable, cette instabilité est due à la présence du champ extérieur, ensuite nous effectuons la relation entre les modes "in" et "out" pour exprimer la probabilité de création d'une paire, ainsi la densité de paires crées. Après ce bref exposé nous considérons un exemple explicite pour lequel l'équation de Dirac est soluble.

Dans la deux ième partie nous proposons d'étudier la création des particules de Dirac neutres par un champ électrique à partir du vide, pour cet raisons nous utilisons la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov qui reliant les états "in" avec les états "out". Nous considérons un champ constant pour lequel l'équation de Dirac est éxactement soluble.

Ensuite,nous cherchons à classer ces solutions en états "in" et "out".Pour cet objectif, nous résoudrons l'équation d'Hamilton-Jacobi .Enfin nous utilisons la transformation de Bogoliubov pour calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules crées.

Dans la troisième partie nous considérons la création des particules neutres en intéraction avec un champ magnétique à partir du vide pour le quel l'équation de Dirac admet des solutions analytiques exactes. A partir de ces solutions, les étas "in" et "out" seron classé et la probabilité de création d'une paire et la densité des particules serons exprimées en termes des coefficients de Bogoliubov.

Le dernier chapitre est réservé à une conclusion générale.

Chapitre 2

Quantification d'un champ de Dirac

2.1 Introduction

En théorie des champs, l'intéraction est en général considérée comme une perturbation et l'amplitude de probabilité et calculée à différents ordres de cette perturbation.

Schématiquement suivant Feymann, ces ordres sont représentés chacun par un diagramme.

Certaines intéractions, cependant, ne nécessite pas un traitement perturbatif puisque les amplitudes peuvent être déterminées exactement par la méhode canonique de Bogoliubov [8]

Le but de ce chapitre est d'introduire la méthode canonique de Bogoliubov, nous commençons par une brève description de la quantification canonique d'un champ de Dirac libre. Ensuite, nous considérons le cas d'un champ spinoriel en présence d'un champ extérieur. Dans ce cas l'instabilité de vide est due à la présence du champ extérieur [6]. Les états de particules engendrés à partir de ces deux vides sont dits les états" in" et "out", qui sont rien d'autre que les solutions de l'équation de Dirac en présence du champ électrique.

Il est nécessaire pour cela de déterminer d'abord les états" in" et "out" et ensuite effectuer la transformation de Bogoliubov pour extraire les coefficients de Bogoliubov qui entre en jeu dans le calcul des amplitudes de probabilité et la probabilité de création de paires de particules [8]

2.2 Champ quantique libre

L'équation de Dirac est du premier ordre et covariante de Lorentz. Elle fait naturellement apparaître un spineur ψ a quatre composantes ainsi que des solutions à énergie soit positive soit négative. Nous nous proposons de quantifier de manière canonique ce champ qui obeit a la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\psi) - (\partial_{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\mu}\psi] - m\bar{\psi}\psi \tag{2.1}$$

L'équation de Dirac qui régie ce système est donnée par

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi = 0 \tag{2.2}$$

où m désigne la masse du fermion et γ^{μ} est une matrice 4×4 qui vérifie l'algèbre

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu}$$

La solution générale de L'équation (2.2)

$$\psi(x,t) = \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[C_{s,k} f_{k,s}\ (x,t) + C'^{*}_{s,k}\ g_{k,s}\ (x,t)\right] \tag{2.3}$$

$$\psi^{*}(x,t) = \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[C^{*}_{s,k} f^{*}_{k,s}\ (x,t) + C'_{s,k}\ g^{*}_{k,s}\ (x,t)\right]. \tag{2.4}$$

où $f_{k,s}\ (x,t)$ et $g_{k,s}\ (x,t)$ sont les solutions à énergie positive et à énergie négative donnée par

$$f_{k,s}\ (x,t) = \frac{m}{\omega_k} u_s(k) e^{-ikx} \tag{2.5}$$

$$g_{k,s}\ (x,t) = \frac{m}{\omega_k} v_s(k) e^{ikx} \tag{2.6}$$

où $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$

Avant de passer à la quantification noton que le moment conjugué de $\psi(x,t)$ est donnée par :

$$\pi(x,t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}} = i\sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[C^{*}_{s,k} f^{*}_{k,s}\ (x,t) + C'_{s,k}\ g^{*}_{k,s}\ (x,t)\right] \tag{2.7}$$

$$\pi^{*}(x,t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}^{*}} = i\sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[C^{*\prime}_{s,k}\dot{g}^{*}_{k,s}\ (x,t) + C_{s,k}\ \dot{f}^{*}_{k,s}\ (x,t)\right] \tag{2.8}$$

on considère les champs $\psi(x,t)$ et $\pi(x,t)$ comme des opérateurs qui satisfaits les équations d'anti- commutations suivantes

$$\left\{\hat{\psi}_i(x,t), \hat{\pi}_j(x',t)\right\} = i\delta_{ij}\delta^3(x-x') \tag{2.9}$$

$$\left\{\hat{\psi}_s(x,t), \hat{\psi}^+_{s'}(x',t)\right\} = \delta_{ss'}\delta^3(x-x') \tag{2.10}$$

Suivant la procédure de quantification canonique les constantes $C_{s,k}, C'_{s,k}, C^*_{s,k}$ et $C'^*_{s,k}$ deviennent des opérateurs qui doivent satisfaire aux relations d'anti-commutations suivantes

$$\left\{\hat{b}^+_s(\vec{k}), \hat{b}_{s'}(\vec{q})\right\} = (2\pi)^3\frac{\omega_k}{m}\delta_{ss'}(\vec{k}-\vec{q}) \tag{2.11}$$

$$\left\{\hat{d}^+_s(\vec{k}), \hat{d}_{s'}(\vec{q})\right\} = (2\pi)^3\frac{\omega_k}{m}\delta_{ss'}(\vec{k}-\vec{q}) \tag{2.12}$$

Tous les autres anticommutateurs sont nuls, et les champs $\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x,t)$ s'écrivent comme suit

$$\hat{\psi}(x,t) = \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\hat{b}_s(k) f_{k,s}(x,t) + \hat{d}^+_s(k) g_{k,s}(\vec{r},t)\right] \tag{2.13}$$

$$\hat{\psi}^+(x,t) = \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}[\hat{b}^+_s(k) f^*_{k,s}(x,t) + \hat{d}_s(k) g^*_{k,s}(x,t)]. \tag{2.14}$$

$\hat{b}_s(k)$ et $\hat{b}^+_s(k)$ sont respectivement l'opérateur d'annihilation et de création d'une particule. $\hat{d}_s(k)$ et $\hat{d}^+_s(k)$ sont respectivement l'opérateur d'annihilation et de création d'une antiparticule. Calculons maintenant le Hamiltonien du système, qui est définie par

$$H = i\int d^3x \psi^+ \partial_0 \psi \tag{2.15}$$

Aprés un calcul éxplicite, nous arrivons à la forme suivante

$$: H := \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} m(\hat{b}^+_k\ \hat{b}_k + \hat{d}^+_k\ \hat{d}_k) \tag{2.16}$$

De la même manière, nous obtenons l'opérateur de charge

$$Q = e\int d^3x : \psi^+\psi : \tag{2.17}$$

$$Q = e\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{\omega_k}(\hat{b}^+_k\ \hat{b}_k - \hat{d}^+_k\ \hat{d}_k) \tag{2.18}$$

Avec

$$N_b = \int d^3k \ N_b(k) \ , N_d = \int d^3k \ N_d(k) \tag{2.19}$$

$$N_b(k) = \frac{m}{(2\pi)^3\omega_k} \sum_{s,k} b_s^+(k) b_s(k) \tag{2.20}$$

$$N_d(k) = \frac{m}{(2\pi)^3\omega_k} \sum_{s,k} d_s^+(k) d_s(k) \tag{2.21}$$

représentent respectivements le nombre de particule et d'antiparticule

On définit alors un état du vide $|0\rangle$ par

$$\begin{aligned} b_s(k)\,|0\rangle &= 0 \quad d_s(k)\,|0\rangle = 0 \\ N_b(k)\ \,|0\rangle &= 0 \quad N_d(k)\,|0\rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

2.3 Instabilité du vide

Considérons maintenant un champ electrique et choisissons la jauge

$$A_\mu = (0, 0, 0, Et)$$

dans ce cas l'équation de Dirac devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (k_z + eEt)^2 + ieE + k_\perp^2 + m^2\right] \psi_{s,+}(t) = 0 \tag{2.23}$$

A $\pm\infty$, les états $\psi_{in}^{\pm}(t)$ et $\psi_{out}^{\pm}(t)$ doivent se comportent comme suit

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty} \psi_{in}^{\pm}(t) &\simeq \exp(\mp\frac{i}{2}eEt^2) \\ \lim_{t\to+\infty} \psi_{out}^{\pm}(t) &\simeq \exp(\mp\frac{i}{2}eEt^2) \end{aligned} \tag{2.24}$$

On remarque qu'il éxiste 4 solutions parmi ces dernières

$$\begin{aligned} \psi_{in}^{+} &= \alpha_{\hat{k}} \psi_{out}^{+} + \beta \psi_{out}^{-} \\ \psi_{in}^{-} &= \alpha_{\vec{k}}^{*} \psi_{out}^{-} + \beta_{\vec{k}}^{*} \psi_{out}^{+} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Cette écriture est dite "transformation de Bogoliubov", où les coefficients $\alpha_{\vec{k}}, \beta_{\vec{k}}$ (de Bogoliubov) vérifient la condition

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Cette transformation nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \hat{b}_{out} &= \alpha_{\vec{k}}\, \hat{b}_{in} - \beta^*_{\vec{k}}\, \hat{d}^+_{in} \\ \hat{d}^+_{out} &= \beta_{\vec{k}} \hat{b}_{in} + \alpha^*_{\vec{k}} \hat{d}^+_{in} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Il est évident qu'en présence d'un champ éxtèrieur,la solution donnée pour le cas de Dirac libre n'est plus la même,

alors

$$\hat{\psi} = \sum_n \left(\hat{b}_{in} \psi^+_{in} + \hat{d}^+_{in} \psi^-_{in} \right) \tag{2.27}$$

$$= \sum_n \left(\hat{b}_{out} \psi^+_{out} + \hat{d}^+_{out} \psi^-_{out} \right) \tag{2.28}$$

et

$$\begin{aligned} Q &= e \sum_\alpha \int d^3k (\hat{b}^+_{in,k} \hat{b}_{in,k} - \hat{d}^+_{in,k} \hat{d}_{in,k}) \\ &= e \sum_\alpha \int d^3k (\hat{b}^+_{out,k} \hat{b}_{out,k} - \hat{d}^+_{out,k} \hat{d}_{out,k}) \end{aligned} \tag{2.29}$$

L'amplitude de probabilité que nous nous proposons de calculer est

$$A = \left\langle 0_{out} \left| \hat{d}_{out} \hat{b}_{out} \right| 0_{in} \right\rangle \tag{2.30}$$

Tenant compte que

$$\hat{d}_{out} = \frac{1}{\alpha^*_{\vec{k}}} \hat{d}_{in} + \frac{\beta^*_{\vec{k}}}{\alpha^*_{\vec{k}}} \hat{b}^+_{out} \tag{2.31}$$

On obtient

$$A = \frac{\beta^*_{\vec{k}}}{\alpha^*_{\vec{k}}} \left\langle 0_{out} \right| \left. 0_{in} \right\rangle \tag{2.32}$$

Alors ,la probabilité de création d'une paire à partir du vide

$$P_{creat} = \left| \frac{\beta^*_{\vec{k}}}{\alpha^*_{\vec{k}}} \right|^2 . \tag{2.33}$$

Chapitre 3

Création des particules de Dirac Neutres par un champ éléctrique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier la création des particules de Dirac neutres par un champ électrique à partir du vide, pour cet raisons nous utilisons la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov qui reliant les états "in" avec les états "out". Nous considérons un champ constant pour lequel l'équation de Dirac est éxactement soluble.

Ensuite,nous cherchons à classer ces solutions en états "in" et "out".Pour cet objectif, nous résoudrons l'équation d'Hamilton-Jacobi .Enfin nous utilisons la transformation de Bogoliubov pour calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules crées.

3.2 L'équation de Dirac (Le potentiel pseudoscalaire)

Considérons d'abord le mouvement d'un fermion neutre de mase m en présence d'un champ électrique de la la forme $\vec{E} = E\left(t\right) \overrightarrow{i}$,ou $E\left(t\right)$ est un fonction de temp,ce mouvement est décrit par l'équation de Dirac à quatre dimension [10]

$$\left[i\Gamma^{0}\frac{\partial}{\partial t} + i\overrightarrow{\Gamma}\overrightarrow{\nabla} - m - \frac{1}{2}\mu\sigma^{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]\Psi\left(t,\vec{x}\right) = 0 \tag{3.1}$$

où $\vec{\Gamma} = (\Gamma^{1},\Gamma^{2},\Gamma^{3})$sont les matrices gamma $(4\times 4)\,,\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\Gamma^{\mu},\Gamma^{\nu}\right]$ et μ est le moment magnétique anomal de la particule.

Le tenseur antisymétrique $F_{\mu\nu}$est donner par

$$F_{\mu\nu} = [\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 1} - \delta_{\mu 1}\delta_{\nu 0}] E_0(t). \tag{3.2}$$

pour résoudre cette équation nous écrivons le spineur $\Psi(t, \vec{x})$ sous la form .

$$\Psi(t, \vec{x}) = \exp\left[i\left(\vec{k}, \vec{x}\right)\right]\Gamma^0\Gamma^3\chi(t). \tag{3.3}$$

L'équation (3.1) se réduit à l'équation

$$D\prime\chi(t) = K\prime\chi(t) \tag{3.4}$$

où

$$D\prime = i\Gamma^1\frac{\partial}{\partial t} - \Gamma^0 k_1 - i\mu E(t) - m\Gamma^0\Gamma^1 \tag{3.5}$$

et

$$K\prime = (k_\perp.\Gamma_\perp)\Gamma^0\Gamma^1 \tag{3.6}$$

comme $\left[\hat{D}', \hat{K}'\right] = 0$,nous pousons construire une base propre commune aux opérateurs $\hat{D}'$et $\hat{K}'$.Il n'est pas difficile de montrer que le spineur

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \chi(t)\gamma_s \\ \chi(t)\sigma_x\gamma_s \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

où γ_s est un vecteur propre de la matrice $(\sigma_y k_{z-}\sigma_z k_y)$ avec la valeur propre $sk_\perp$,avec $s = \pm 1$,est une valeur propre de l'opérateur K correspondant à la valeur propre $isk_\perp$.

pour que $\chi(t)$ soit un vecteur propre de l'opérateur D',les fonction $\chi_1(t)$et $\chi_2(t)$ doivent vérifient le system d'équation

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + m\right)\chi_1(t) = (k_1 - i\nu k_\perp - i\mu E(t))\chi_2(t) \tag{3.8}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - m\right)\chi_2(t) = (k_1 + i\nu k_\perp + i\mu E(t))\chi_1(t) \tag{3.9}$$

Tenant compte du fait que $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + \epsilon_{ijk}\sigma_k$,nous pouvent écrire le systéme précident sous la forme

$$\left(i\sigma_z \frac{\partial}{\partial t} - i\sigma_y k_1 - m - i\sigma_x V_p(t)\right) \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{pmatrix} = 0 \tag{3.10}$$

où

$$V_p(t) = sk_\perp + \mu E(t). \tag{3.11}$$

En définissant les matrices gamma (2×2)

$$\gamma^0 = \sigma_z, \gamma^1 = i\sigma_y, \gamma^5 = i\sigma_x \tag{3.12}$$

nous obtenons l'équation de Dirac avec un potentiele pseudoscalaire

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - \gamma^1 k_1 - \gamma^5 V_p(t) - m\right] \tilde{\Psi}(t) = 0, \tag{3.13}$$

où

$$\tilde{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \chi_2(t) \\ \chi_1(t) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Utilisons maintenant la transformation unitaire $\tilde{\Psi}(t) = U\zeta(t)$ avec

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

compte tenu des propriétés suivant

$$U^+\sigma_x U = \sigma_x,\ U^+\sigma_y U = \sigma_z,\ U^+\sigma_z U = -\sigma_y \tag{3.16}$$

le nouveau spineur $\zeta(t)$ satisfait l'équation

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - \sigma_x k_1 + \sigma_z V_p(t) + \sigma_y m\right] \zeta(t) = 0, \tag{3.17}$$

donc les composantes $\zeta_1(t)$ et $\zeta_2(t)$ vérifient le systéme d'équation

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + V_p(t)\right) \zeta_1(t) = (k_1 + im)\,\zeta_2(t) \tag{3.18}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - V_p(t)\right)\zeta_2(t) = (k_1 - im)\,\zeta_1(t) \tag{3.19}$$

par itération nous obtenons l'équation différentielle

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial^2 t} + iV_p' - V_p^2(t) - k_1 - m^2\right]\zeta_2(t) = 0 \tag{3.20}$$

Pour simplifier les calculs nous cnsidérons le cas où $k_\perp = 0$.

3.3 Cas d'un champ électrique de la forme $V_p(t) = \mu E_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

3.3.1 Solution éxactes de l'équation effective

pour

$$V_p(t) = \mu E_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \tag{3.21}$$

l'équation (3.20)prend la forme

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - i\frac{\mu E_0}{\tau}\left(\frac{-t}{\tau}\right) - \mu^2 E_0^2 \exp\left(\frac{-2t}{\tau}\right) - k_1^2 - m^2\right]\zeta_2(t) = 0. \tag{3.22}$$

Afin d'obtenir les solution de cette équation nous effectuons le changement de variable

$$\rho = \delta \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{3.23}$$

où δ est une constante .

Ensuite,nous posons

$$\zeta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}F_2(\rho) \tag{3.24}$$

Dans ce cas la fonction $F_2(\rho)$ vérifie l'équation

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial^2 \rho} + \frac{(k_1 + m^2)\,\tau^2 + \frac{1}{4}}{\rho^2} + i\frac{\tau\mu E_0}{\delta\rho} + \frac{\mu^2 E_0^2 \tau^2}{\delta^2}\right]F(\eta) = 0 \tag{3.25}$$

Si nous choisissons leparametre δ de sort que

$$\delta = 2i\mu E_\tau \tag{3.26}$$

nous arrivons à l'équation de Whitaker

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2\rho}-\frac{1}{4}+\frac{\lambda_2}{\rho}+\frac{\frac{1}{4}-\mu_2^2}{\rho^2}\right)F_+(\eta)=0 \tag{3.27}$$

avec

$$\mu_2=i\tau\sqrt{k_1^2+m^2} \tag{3.28}$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2} \tag{3.29}$$

Il est connu que les solution de la deriére équation sont $M_{\lambda_2,\mu_2}(\rho)$et $M_{\lambda_2,-\mu_2}(\rho)$ ou bien $W_{\lambda_2,\mu_2}(\rho)$ et $W_{-\lambda_2,\mu_2}(-\rho)$.

3.4 Etats "in" et "out" et création de particules

Pour un potentiel pseudosclaire l'équation d'Hamilton -Jacobi s'écrit

$$\partial_\mu S\partial^\mu S-m^2-V_p^2(t)=0 \tag{3.30}$$

Si nous écrivons l'action classique solution de cette équation sous la forme

$$S=k_1x+G(t) \tag{3.31}$$

nous pouvons voir que la fonction $G(t)$ est donné par

$$G(t)=\pm\int\sqrt{k^2+m^2+\mu^2E^2\exp\left(\frac{-2t}{\tau}\right)}dt \tag{3.32}$$

Au voisinage de $+\infty$,$G(t)$ se comport comme

$$G(t)=\mp\sqrt{k^2+m^2t} \tag{3.33}$$

et pour $t\rightarrow-\infty$,nous avons

$$G(t)=\mp\mu E\tau\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{3.34}$$

Ce résultat nous permet de classer nos solutions en état "in "et"out" comme suit

$$\zeta^{+}_{2,out}\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{\rho}}M_{\lambda_2,-\mu_2}\left(\rho\right) \tag{3.35}$$

$$\zeta^{-}_{2,out}\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{\rho}}M_{\lambda_2,\mu_2}\left(\rho\right) \tag{3.36}$$

$$\zeta^{+}_{2,in}\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{\rho}}W_{-\lambda_2,\mu_2}\left(-\rho\right) \tag{3.37}$$

$$\zeta^{-}_{2,in}\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{\rho}}W_{\lambda_2,\mu_2}\left(\rho\right) \tag{3.38}$$

En suivant méthode canonique de Bogoliobov nous obtenons pour la probabilité de création d'un paire de particules neutre l'expresion suivante

$$P_{s,\ \vec{k}}=\left|\frac{\beta_{s,\vec{k}}}{\alpha_{s,\vec{k}}}\right|=\exp\left(-2\pi\sqrt{k_{\perp}+m^2\tau}\right). \tag{3.39}$$

la densité des particules crées est

$$n\left(s,\vec{k}\right)=\frac{1}{\exp\left(2\pi\sqrt{k_1+m^2\tau}\right)+1} \tag{3.40}$$

Ansi,un champ électrique dependant du temps peut créer des pairses de particules neutre.

Chapitre 4

Création des particules de Dirac neutres par un champ magnétique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la possibilité de création des particules de Dirac neutres parun champ magnétique dépendant du temps à partir du vide, pour cela nous utilisons la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov reliant les états d'énergies négatives $''in''$ avec les états d'énergies positives$''out''$

D'abord, nous montrons que l'équation de Dirac d'une particule neutre en présence d'un champ magnétique à (3+1) dimensions peut ce réduire à une équation de Dirac avec un potentiel pseudo-scalaire à(1+1) dimension (en éliminant les dimensions par l'utilisation de la matriceγ^5). En suite, nous considérons un champ magnétique pour lequel l'équation de Dirac a des solutions éxactes .

En fin,nous utilisons la transformation de Bogoliubov pou calculer la probabilité de création d'une paire de particule neutre et la densité des particules crées. Le résultats le plus important de cet section est que un champ magnétique variable$V_p(t) = B_0(\frac{1+\tanh(\lambda t)}{2})$ peut crée des particules neutres.

4.2 L'équation de Dirac en présence d'un champ magnétique dépendant du temps

Considérons une particule de Dirac neutre de masse m et de charge nulle en présence d'un champ magnétique de la forme :

$$\vec{B} = B(t)\ \vec{k}. \tag{4.1}$$

Où $B(t)$ est une fonction du temps.

L'équation de Dirac associée à cette particule s'écrit :

$$\left[i\ \Gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\ \vec{\Gamma}.\vec{\nabla} - m - \frac{1}{2}\mu\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\ \psi(t,\vec{r}) = 0 \tag{4.2}$$

ou Γ^μ sont les matrices de Dirac

$$\Gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_{2\times 2} & 0 \\ 0 & 1_{2\times 2} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

On a :

$$\left(\Gamma^i\right)^2 = -\mathbf{1}, \left(\Gamma^0\right)^2 = 1, \left(\sigma^i\right)^2 = \mathbf{1} \tag{4.5}$$

σ^i sont les matrices de Pauli (2×2) :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\right]$, μ le moment magnétique anomal de la particule.

Le tenseur antisymétrique $F_{\mu\nu}$ est donner par :

$$F_{\mu\nu} = (\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 3} - \delta_{\mu 3}\delta_{\nu 0})B_0(t). \tag{4.7}$$

Pour résoudre cette équation nous posons

$$\psi(t,\vec{r}) = e^{i\vec{k}.\vec{r}}\ \Gamma^0\Gamma^3\chi(t) \tag{4.8}$$

Où : $\chi(t)$ est un spineur qui satisfait l'équation suivante

$$\hat{D}\ \chi(t) = \hat{K}\chi(t) \tag{4.9}$$

où

$$\hat{D} \ = i\ \Gamma^3 \frac{\partial}{\partial t} - \Gamma^0 k_z - m\ \Gamma^0\Gamma^3 - i\mu B(t) \tag{4.10}$$

et

$$\hat{K} \ = \Gamma^1\ \Gamma^0\ \Gamma^3\ k_x + \Gamma^2\ \Gamma^0\ \Gamma^3 k_y \tag{4.11}$$

Après un calcul détaillé(Annex c), il est bien claire que

$$\left[\hat{D}, \hat{K}\right] = 0. \tag{4.12}$$

Ainsi, nous pouvons trouver une base propre commune aux opérateurs $\hat{D}$ et $\hat{K}$. En plus nous

pouvons voir que : $\hat{K}^2 = -(k_x^2 + k_y^2)$,ce qui montre que l'opérateur K̂ a deux valeurs propres

$$\lambda_s = isk_\perp \tag{4.13}$$

avec : $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, et $s = \pm 1$

aprés le calcul des vecteurs propres communs aux opérateurs $\hat{D}$ et$\hat{K}$ qui correspond aux valeurs propres λ_s , dans ce cas les vecteurs propres communs aux opérateurs $\hat{D}$ et $\hat{K}$ sont

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \chi_1(t)\ \Upsilon_s(k) \\ \chi_2(t)\sigma_3\Upsilon_s(k) \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

ou $\Upsilon_s(k)$ sont les vecteurs propres de la matrice $(\sigma_y k_x - \sigma_x k_y)$.

Comme $\chi(t)$ est un vecteur propre de l'opérateur $\hat{D}$, les fonctions$\chi_1(t)$ et $\chi_2(t)$ vérifient le système d'équation suivant :

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + m\right)\chi_1(t) \ = \ (k_z - isk\perp - i\mu B(t))\,\chi_2(t) \tag{4.15}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - m\right)\chi_2(t) \ = \ (k_z + isk_\perp + i\mu B(t))\,\chi_1(t) \tag{4.16}$$

En utilisant la propriété de $\sigma_i\sigma_j = \ \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}\sigma_k$, en peut écrir le système précident sous la forme suivante

$$\left(i\sigma_z\frac{\partial}{\partial t} - i\sigma_y k_z - m - i\sigma_x V_p(t)\right)\begin{pmatrix}\chi_2(t)\\ \chi_1(t)\end{pmatrix} = 0 \tag{4.17}$$

avec

$$V_p(t) = sk\perp + \mu B(t) \tag{4.18}$$

En utilisant la définition des martices gamma suivante :

$$\gamma^0 = \sigma_z, \gamma^1 = i\sigma_y, \gamma^5 = i\sigma_x \tag{4.19}$$

On obtient l'équation de Dirac avec un potentiel pseudo-scalaire

$$\left[\gamma^0 i\frac{\partial}{\partial t} - \gamma^1 k_z - \gamma^5 V_p(t) - m\right]\tilde{\psi}(t) = 0 \tag{4.20}$$

où

$$\tilde{\psi}(t) = \begin{pmatrix}\chi_2(t)\\ \chi_1(t)\end{pmatrix} \tag{4.21}$$

En utilisant une transformation unitaire

$$\tilde{\psi}(t) = U\ \xi(t) \tag{4.22}$$

tel que,

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix} \tag{4.23}$$

Tenant compte les propriétés suivantes

$$U^+\sigma_x U = \sigma_x, U^+\sigma_Y U = \sigma_z, U^+\sigma_z U = -\sigma_y \tag{4.24}$$

La propriéte (4.22) vérifie

$$\left[i\sigma_z\frac{\partial}{\partial t} - i\sigma_y k_z - m - i\sigma_x V_p(t)\right]U\xi(t) = 0 \tag{4.25}$$

En multipliant par U^+,on obtient

$$U^+\left[i\sigma_z\frac{\partial}{\partial t} - i\sigma_y k_z - m - i\sigma_x V_p(t)\right]U\xi(t) = 0 \tag{4.26}$$

Et en utilisant la prpriété $\sigma_i\ \sigma_j = i\sigma_k$,donc le nouveau spineur$\xi(t)$ satisfait l'équation :

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - \sigma_x k_z + \sigma_z V_p(t) + m\sigma_y\right]\xi(t) = 0 \tag{4.27}$$

Où

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix};$$

nous écrivons l'équation (4.27) sous forme matricielle

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial t} + V_p(t)\right)\xi_1(t) &= (k_z + im)\,\xi_2(t) \\ \left(i\frac{\partial}{\partial t} - V_p(t)\right)\xi_2(t) &= (k_z - im)\,\xi_1(t) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Par remplacement en obtient l'équations différentielles

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + iV_p'(t) - V_p^2(t) - k_z^2 - m^2\right]\xi_1(t) = 0 \tag{4.29}$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - iV_p'(t) - V_p^2(t) - k_z^2 - m^2\right]\xi_2(t) = 0 \tag{4.30}$$

4.3 Cas d'un champ magnétique $V_p(t) = B_0(\frac{1+\tanh(\lambda t)}{2})$

4.3.1 Solution éxacte de l'équation effictive

Pour $V_p(t) = B_0\left(\frac{1+\tanh(\lambda t)}{2}\right)$, l'équation (**??**) prend la forme

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + i\frac{B_0}{2}\frac{\lambda}{(\cosh(\lambda t))^2} - \frac{B_0^2}{4}(1+\tanh(\lambda t))^2 - k_z^2 - m^2\right]\xi_1(t) = 0 \tag{4.31}$$

Effectuons le changement de variable suivant

$$y = \frac{1+\tanh(\lambda t)}{2} \tag{4.32}$$

Avec

$$\frac{\partial}{\partial t} = 2\lambda y(1-y) \tag{4.33}$$

Pour la dérivée seconde, nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(2\lambda y(1-y)\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(2\lambda y(1-y)\frac{\partial}{\partial y}\right) = 4\lambda^2 y^2 (1-y)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 4\lambda^2 y (1-y)(1-2y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.34}$$

Compte tenu de ces changements, l'équation (4.31) se réduit à

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{y(1-y)}\left(-i\frac{B_0}{2\lambda} - \frac{B_0^2}{4\lambda^2} + \frac{\frac{k_z^2+m^2+B_0^2}{4\lambda^2}}{(1-y)} + \frac{\frac{k_z^2+m^2}{4\lambda^2}}{y}\right)\right]\xi_1(y) = 0 \tag{4.35}$$

C'est ainsi que nous faisons l'arrangement suivant (Annex c)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1-y}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{y(1-y)}\left(\frac{\alpha\alpha'}{y} + \frac{\gamma\gamma'}{(1-y)} - \beta\beta'\right)\right]\xi_1(y) = 0 \tag{4.36}$$

Où

$$\alpha = -\alpha' = \frac{i}{2\lambda}k_{in} \tag{4.37}$$

$$\beta' = (1-\beta) = \frac{iB_0}{2\lambda} \tag{4.38}$$

$$\gamma = -\gamma = \frac{i}{2\lambda}\sqrt{k_z^2 + m^2 + B_0^2} = \frac{i}{2\lambda}k_{out} \tag{4.39}$$

L'équation (4.36) n'est rien d'autre qu'un cas particulier de l'équation différentielle de Riemann [12]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{Z-a'} + \frac{1-\beta-\beta'}{Z-b'} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{Z-c'}\right)\frac{\partial u}{\partial Z} + \left(\frac{\alpha\alpha'(a'-b')(a'-c')}{Z-a'} - \frac{\beta\beta'(b'-c')(b'-a')}{Z-b'} + \frac{\gamma\gamma'(c'-a')(c'-b')}{Z-c'}\right)\frac{u}{(Z-a')(Z-b')(Z-c')} \tag{4.40}$$

Avec $a' = 0, c' = 1, b' \to +\infty$, les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ vérifient la condition

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1 \tag{4.41}$$

Dans ce cas particulier les deux solutions linéairement indépendantes sot données par

$$\xi_{s,1} = N\ y^{\alpha}(1-y)^{\gamma}F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, 1+\alpha-\alpha', y) \tag{4.42}$$

$$\xi_{s,2} = N\ y^{\alpha'}(1-y)^{\gamma}F(\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma, 1+\alpha'-\alpha, y) \tag{4.43}$$

Ou bien par

$$\xi_{s,3} = N\ y^{\alpha}(1-y)^{\gamma}F(\alpha+\beta+\gamma, \gamma+\beta'+\alpha, 1+\gamma-\gamma', 1-y) \quad (4.44)$$

$$\xi_{s,4} = N\ y^{\alpha}(1-y)^{\gamma'}F(\alpha+\beta+\gamma', \alpha+\beta'+\gamma', 1+\gamma'-\gamma, 1-y) \quad (4.45)$$

Où les fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma)$ sont les fonctions hypergéométriques [12]. Pour avoir les solutions éxactes, il faut d'abord étudier le comportement asymptotique des solutions obtenues quand $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$,pour avoir la bonne définition de la fonction d'onde qui se propageant à gauche ainsi que la fonction d'onde qui se propageant à droite. Pour cela nous fesons le changement de variable suivant

$$z = \frac{1}{1+\exp(2\lambda t)} \quad (4.46)$$

Alors, on voi que

$$y = \frac{1}{2}(1+\tanh(2\lambda)) = \frac{1}{1+\exp(-2\lambda t)} = 1-z, \quad (4.47)$$

et

$$1-y = 1-\frac{1}{1+\exp(-2\lambda t)} = \frac{1}{1+\exp(2\lambda t)} = z \quad (4.48)$$

Donc les solutions précédent devient

$$\xi_{+,1} = z^{\frac{ik_{out}}{2\lambda}}(1-z)^{\frac{ik_{in}}{2\lambda}}F(\frac{i}{2\lambda}(k_{out}+k_{in})+1-l, \frac{i}{2\lambda}(k_{in}+k_{out})+l, 1+\frac{i}{\lambda}k_{in}; 1-z) \quad (4.49)$$

$$\xi_{+,2} = z^{\frac{ik_{out}}{2\lambda}}(1-z)^{-\frac{ik_{in}}{2\lambda}}F(\frac{i}{2\lambda}(k_{out}-k_{in})+1-l, \frac{i}{2\lambda}(k_{out}-k_{in})+l, 1-\frac{i}{\lambda}k_{in}; 1-z) \quad (4.50)$$

$$\xi_{+,3} = z^{\frac{ik_{out}}{2\lambda}}(1-z)^{\frac{ik_{in}}{2\lambda}}F(\frac{i}{2\lambda}(k_{in}+k_{out})+1-l, \frac{i}{2\lambda}(k_{in}+k_{out})+l, 1+\frac{i}{\lambda}k_{out}; z) \quad (4.51)$$

$$\xi_{+,4} = z^{-\frac{ik_{out}}{2\lambda}}(1-z)^{\frac{ik_{in}}{2\lambda}}F(\frac{i}{2\lambda}(k_{in}-k_{out})+1-l, \frac{i}{2\lambda}(k_{in}-k_{out})+l, 1-\frac{i}{\lambda}k_{out}; z) \quad (4.52)$$

Avec $l = \frac{iB_0}{2\lambda}$

En étudiant maintenant le comportement asymptotique des solutions, on voi que

$z \to \exp(-2\lambda t)$ quand $t \to +\infty$ et $1-z \to \exp(2\lambda t)$ quand $t \to -\infty$. Tenant compte de la propriété $F(a,b,c;0) = 1$

Quand $t \to -\infty$

$$\xi_{+,1} \sim \exp(ik_{in}t) \tag{4.53}$$
$$\xi_{+,2} \sim \exp(-ik_{in}t) \tag{4.54}$$

et quand $t \to +\infty$ nous avons

$$\xi_{+,3} \sim \exp(-ik_{out}t) \tag{4.55}$$
$$\xi_{+,4} \sim \exp(ik_{out}t) \tag{4.56}$$

Donc

$$\begin{aligned} \xi_{+,1} &= \xi^{+}_{+,in} \\ \xi_{+,2} &= \xi^{-}_{+,in} \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned} \xi_{+,3} &= \xi^{-}_{+,out} \\ \xi_{+,4} &= \xi^{+}_{+,out} \end{aligned} \tag{4.58}$$

En utilisant maintenant la transformation des fonctions hypergéométrique pour voir le comportement asymptotique

$$\begin{aligned} F(u,v,w,z) &= \frac{\Gamma(w)\ \Gamma(w-u-v)}{\Gamma(w-u)\Gamma(w-v)} F(u,v;u+v-w+1;1-z) \\ &+(1-z)^{w-u-v}\frac{\Gamma(w)\ \Gamma(u+v-w)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} F(w-u,w-v;w-v-u+1;1-z). \end{aligned} \tag{4.59}$$

En utilisant la propriété (Annex c)

$$\left[z(1-z)\frac{\partial}{\partial z} - bz + \frac{b(a-c)}{a-b-1}\right] F(a,b,c;z) = \frac{b(a-c)}{a-b-1} F(a-1,b+1,c;z), \tag{4.60}$$

pour obtenir les fonctions $\xi^{\pm}_{-,out}$ et $\xi^{\pm}_{-,in}$.

Les résultats sont données par

$$\xi^{+}_{-,in} = \frac{2\lambda}{m-ik_z}\frac{1}{\sqrt{k_{in}}}z^{\gamma}(1-z)^{\alpha}\alpha\ F(\alpha+\beta+\gamma-1,\alpha+\beta'+\gamma+1,1+2\alpha;1-z \tag{4.61}$$

$$\xi^{-}_{-,in} = \frac{2\lambda}{m-ik_z}\frac{1}{\sqrt{k_{in}}}z^{\gamma}(1-z)^{\alpha'}\alpha' F(\alpha'+\beta+\gamma-1,\alpha'+\beta'+\gamma+1,1-2\alpha;1-z) \tag{4.62}$$

$$\xi^{+}_{-,out} = \frac{2\lambda}{ik_z-m}\frac{1}{\sqrt{k_{out}}}z^{\gamma'}(1-z)^{\alpha}(\beta'-\gamma)\ F(\alpha+\beta+\gamma'-1,\alpha+\beta'+\gamma'+1,1-2\gamma;z \tag{4.63}$$

$$\xi^{-}_{-,out} = \frac{2\lambda}{ik_z-m}\frac{1}{\sqrt{k_{out}}}z^{\gamma}(1-z)^{\alpha}(\beta'+\gamma)\ F(\alpha+\beta+\gamma-1,\alpha+\beta'+\gamma+1,1+2\gamma;z) \tag{4.64}$$

4.4 Transformation de Bogoliubov et création des particules

Tenant compte des solutions obtenues, l'opérateur du champ de Dirac s'écrit sous l'une des deux formes suivantes

$$\hat{\psi}(t,\vec{r}) = \sum_{s,\vec{k}}\left[b_{s,\vec{k},in}\Gamma^0\Gamma^3\chi^{+}_{s,\vec{k},in}(t)e^{i\ \vec{k}\ \vec{r}} + d^{+}_{s,\vec{k},in}\Gamma^0\Gamma^3\chi^{-}_{s,\vec{k},in}(t)e^{-i\ \vec{k}\ \vec{r}}\right] \tag{4.65}$$

$$\hat{\psi}(t,\vec{r}) = \sum_{s,\vec{k}}\left[b_{s,\vec{k},out}\Gamma^0\Gamma^3\chi^{+}_{s,\vec{k},out}(t)e^{i\ \vec{k}\ \vec{r}} + d^{+}_{s,\vec{k},out}\Gamma^0\Gamma^3\chi^{-}_{s,\vec{k},out}(t)e^{-i\ \vec{k}\ \vec{r}}\right] \tag{4.66}$$

Où les solutions $\chi^{+}_{s,\vec{k},in}(t)$ et $\chi^{-}_{s,\vec{k},in}(t)$ sont associées aux états d'énergie positive et d'énergie négative.

Maintenant, nous calculons la probabilité de création, d'abord on a

$$\chi^{+}_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^{+}_{+,in} + i\xi^{+}_{-,in}), \tag{4.67}$$

avec

$$\xi^{+}_{+,in} = \sqrt{\frac{k_{out}}{k_{in}}}(A_2\xi^{-}_{+,out} + B_2\xi^{+}_{+,out}). \tag{4.68}$$

Où

$$A_2 = \frac{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta'-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta'-\gamma+1)} \tag{4.69}$$

$$B_2 = \frac{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+\beta'+\gamma)}$$

$$\xi^{+}_{-,in} = -\sqrt{\frac{k_{out}}{k_{in}}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\alpha}{\beta'+\gamma}A_1\xi^{-}_{-,out} + \frac{\alpha}{\beta'-\gamma}B_1\xi^{+}_{-,out}\right] \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta'-\gamma+1)\Gamma(\alpha-\beta'-\gamma)} \\ B_1 &= \frac{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta'+\gamma+1)\Gamma(\alpha-\beta'+\gamma)} \end{aligned} \tag{4.71}$$

Nous utilisons la propriété

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{4.72}$$

Alors

$$\begin{aligned} A_1 &= (\frac{\alpha-\beta'-\gamma}{\alpha+\beta'-\gamma})(\frac{\alpha}{\beta'+\gamma})A_2 \\ B_1 &= (\frac{\alpha-\beta'+\gamma}{\alpha+\beta'+\gamma})(\frac{\alpha}{\beta'-\gamma})B_2, \end{aligned} \tag{4.73}$$

Donc

$$\chi^{+}_{in} = \sqrt{\frac{k_{out}}{k_{in}}}\left(B_2\chi^{+}_{out} + A_2\chi^{-}_{out}\right) \tag{4.74}$$

où

$$\alpha_{s,k} = B_2\sqrt{\frac{k_{out}}{k_{in}}}, \tag{4.75}$$

$$\beta_{s,k} = A_2\sqrt{\frac{k_{out}}{k_{in}}}, \tag{4.76}$$

$\alpha_{s,k}$, $\beta_{s,k}$ sont les coefficients de Bogoliubov, pour cela

$$\chi^{+}_{in} = \alpha\chi^{+}_{out} + \beta\chi^{-}_{out} \tag{4.77}$$

Avec

$$\alpha_{s,k} = \sqrt{\frac{k_{out}}{k_{in}}}\,\frac{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+\beta'+\gamma)} \tag{4.78}$$

$$\beta_{s,k} = \sqrt{\frac{k_{out}}{k_{in}}}\,\frac{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta'-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta'-\gamma+1)} \tag{4.79}$$

A partir de ces coefficients nous pouvons calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules dans l'état $(s, \vec{k}\ )$, pour la probabilité de création nous avons

$$p_{s,k} = \left|\frac{\beta_{s,k}}{\alpha_{s,k}}\right|^2 \tag{4.80}$$

En utilisant les propriétés de la fonction gamma(Annex A) , nous obtenons

$$p_{s,k} = \frac{\cosh(\frac{\pi}{\lambda}(k_{in} + k_{out})) - \cosh(-\frac{\pi}{\lambda}B_0)}{\cosh(\frac{\pi}{\lambda}(k_{in} - k_{out})) - \cosh(\frac{\pi}{\lambda}B_0)} \tag{4.81}$$

Désignons en outre par $C_{s,k}$ la probabilité relative pour qu'aucunne pair ne soit créer dans l'état $(s, \vec{k}\ )$ par

$$C_{s,k} = 1 - p_{s,k} \tag{4.82}$$

En utilisant les propriétés de la fonction gamma(Annex A)

$$C_{s,k} = \frac{\cosh(\frac{\pi}{\lambda}(k_{in} - k_{out})) - \cosh(\frac{\pi}{\lambda}(k_{in} + k_{out}))}{\cosh(\frac{\pi}{\lambda}(k_{in} - k_{out})) - \cosh(\frac{\pi}{\lambda}B_0)} \tag{4.83}$$

La densité des particules crées est par définition

$$n(s, \vec{k}) = \left|\beta_{_{s,k}}\right|^2 \tag{4.84}$$

Donc, on peut écrire

$$n(s, \vec{k}) = \frac{\cosh(\frac{\pi}{2\lambda}(k_{in} - 3k_{out} + B_0)) - \cosh(-\frac{\pi}{2\lambda}(B_0 + k_{in} + k_{out})}{\cosh(\frac{\pi}{\lambda}(k_{in} - k_{out})) - \cosh(\frac{\pi}{\lambda}(k_{in} + k_{out}))}. \tag{4.85}$$

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la création des particules à partir du vide par un champ magnétique dépendant du temps. Nous avons pu trouver des solutions analytiques exactes pour l'équation de Dirac qui régie un système des particules neutres. Apartir de ces solutions, nous avons calculé la probabilité de création d'une paire et la densité des particules crées ainsi que la probabilité pour qu'aucune paire ne soit crée.

Chapitre 5

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons déterminer la probabilité de création de paires des particules, en perturbons le vide par un champ éxterieur où nousavons déterminé à chaque fois les états in" et "out" de chaque problème. En premier lieu nous avons concidéré des particules de Dirac neutres où nous avons calculé la probabilité de création d'une paire en intéraction avec un champ électrique.

Ensuite nous avons considéré la création des particules de Dirac neutres par un champ magnétique variable, où nous avons pu montré l'influence de ce dernier sur le comportment des particules de Dirac neutres.

le résultat le plus important de ce travail et qu'un champ magnétique dépendant de la position ne peut pas crées des particules, par contre un champ magnétique variable dépendant du temps peut produire et créer des paires de particules neutres.

Résumé

Dans ce mèmoire on a ètudier le phènomene de la crèation de paire des particules de Dirac neutres dans le vide par un champ éléctrique et magnétique dépendant du temps on a appliqué la théorie Hamilton-Jacobie pour extraire les états "in "et "out" .

La théorique de la quantification canonique à été appliqué dont le but d'avoire les coefficient de" Nikishove" qui jouent un role très important dans le calcule de la probabilité de création de paires.

5.1 Abstract

In this work, we have studied the phenomenon of the creation of a pair of neutral Dirac particules in vaccum by an electric and magnétique field we applied the jacobie hamilton théorie to extract the in and out states.

The theory of cononical quantification has been applied .the purpose of wich is to have the" Nikishove "coefficients whiche play a very important role in the calculation of the probability of pair création.

Annexe A

le commutateur $\left[\hat{D},\hat{K}\right]$

$$\begin{aligned}\left[\hat{D},\hat{K}\right] &= \left(i\Gamma^{3}\frac{\partial}{\partial t}-\Gamma^{0}K_{z}-m\Gamma^{0}\Gamma^{3}-i\mu\beta\left(t\right)\right)\left(\Gamma^{1}\Gamma^{0}\Gamma^{3}K_{x}+\Gamma^{2}\Gamma^{0}\Gamma^{3}K_{y}\right)\\ &\quad-\left(\Gamma^{1}\Gamma^{0}\Gamma^{3}K_{x}+\Gamma^{2}\Gamma^{0}\Gamma^{3}K_{y}\right)\left(i\Gamma^{3}\frac{\partial}{\partial t}-\Gamma^{0}K_{z}-m\Gamma^{0}\Gamma^{3}-i\mu\beta\left(t\right)\right)\end{aligned}$$

Aprés un calcul simple

$$\left[\hat{D},\hat{K}\right]=0$$

Annexe B

La fonction Gamma

La fonction Gamma $\Gamma(z)$ définie par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt \qquad [\mathrm{Re}\, z \succ 0]$$

Satisfiant les propriétés suivantes :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \sinh \pi x}$$

$$|\Gamma(ix+1)|^2 = \frac{\pi x}{\sinh \pi x}.$$

Annexe C

L'équation différentielle de Riemann

L'équation différentielle de Riemann s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} + \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{Z-a'} + \frac{1-\beta-\beta'}{Z-b'} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{Z-c'} \right] \frac{du}{dZ} + \left[\frac{\alpha\alpha'(a'-b')(a'-c')}{Z-a'} \right.$$
$$\left. - \frac{\beta\beta'(b'-c')(b'-a')}{Z-b'} + \frac{\gamma\gamma'(c'-a')(c'-b')}{Z-c'} \right] \frac{u}{(Z-a')(Z-b')(Z-c')} = 0$$

Où les coefficients $\alpha, \alpha', \beta, \beta'\gamma, \gamma'$ vérifient la relation

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' - 1 = 0$$

La permutation des ces indices d'une manière adéqute permet d'écrire ses solutions sous plusieurs formes :

$$\begin{aligned}
u_1 &= \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} F\left\{\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma; 1+\alpha-\alpha'; \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\} \\
u_2 &= \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} F\left\{\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma; 1+\alpha'-\alpha; \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\} \\
u_3 &= \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'} F\left\{\alpha+\beta+\gamma', \alpha+\beta'+\gamma'; 1+\alpha-\alpha'; \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\} \\
u_4 &= \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} F\left\{\alpha'+\beta+\gamma', \alpha'+\beta'+\gamma'; 1+\alpha'-\alpha; \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_5 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha} F\left\{\beta+\gamma+\alpha, \beta+\gamma'+\alpha; 1+\beta-\beta'; \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\} \\
u_6 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha} F\left\{\beta'+\gamma+\alpha, \beta'+\gamma'+\alpha; 1+\beta'-\beta; \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\} \\
u_7 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'} F\left\{\beta+\gamma+\alpha', \beta+\gamma'+\alpha'; 1+\beta-\beta'; \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\} \\
u_8 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'} F\left\{\beta'+\gamma+\alpha', \beta'+\gamma'+\alpha'; 1+\beta'-\beta; \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_9 &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta} F\left\{\gamma+\alpha+\beta, \gamma+\alpha'+\beta; 1+\gamma-\gamma'; \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\} \\
u_{10} &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta} F\left\{\gamma'+\alpha+\beta, \gamma'+\alpha'+\beta; 1+\gamma-\gamma'; \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\} \\
u_{11} &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'} F\left\{\gamma+\alpha+\beta', \gamma'+\alpha'+\beta; 1+\gamma'-\gamma; \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\} \\
u_{12} &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'} F\left\{\gamma+\alpha+\beta', \gamma+\alpha'+\beta'; 1+\gamma-\gamma'; \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{13} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta} F\left\{\alpha+\gamma+\beta, \alpha+\gamma'+\beta; 1+\alpha-\alpha'; \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\} \\
u_{14} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta} F\left\{\alpha'+\gamma+\beta, \alpha'+\gamma'+\beta; 1+\alpha'-\alpha; \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\} \\
u_{15} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'} F\left\{\alpha+\gamma+\beta', \alpha+\gamma'+\beta'; 1+\alpha-\alpha'; \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\} \\
u_{16} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'} F\left\{\alpha'+\gamma+\beta', \alpha'+\gamma'+\beta'; 1+\alpha'-\alpha; \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{17} &= \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} F\left\{\gamma+\beta+\alpha, \gamma+\beta'+\alpha; 1+\gamma-\gamma'; \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\} \\
u_{18} &= \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} F\left\{\gamma'+\beta+\alpha, \gamma'+\beta'+\alpha; 1+\gamma'-\gamma; \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\} \\
u_{19} &= \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'} F\left\{\gamma+\beta+\alpha', \gamma+\beta'+\alpha'; 1+\gamma-\gamma'; \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\} \\
u_{20} &= \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'} F\left\{\gamma'+\beta+\alpha', \gamma'+\beta'+\alpha'; 1+\gamma'-\gamma; \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\}
\end{aligned}
$$

Annexe D

Fonctions hypergeometrique

En utilisant les propriétés des fonctions hypergeometrique suivante [11]

$$\left[z(1-z)\frac{\partial}{\partial z} - bz + c - 1\right] F(a,b,c;z) = (c-1)F(a-1,b,c-1;z)$$

et

$$(a-b)\ c\ F(a,b,c;z) + (b-c)\ a\ F(a+1,b,c+1;z)\ = (a-c)\ bF(a,b+1,c+1;z)$$

nous obtenons

$$\left[z(1-z)\frac{\partial}{\partial z} - bz + \frac{b(a-c)}{a-b-1}\right] F(a,b,c;z) = \frac{b(a-c)}{a-b-1}F(a-1,b+1,c;z)$$

et

$$\left[z(1-z)\frac{\partial}{\partial z} - bz + \frac{a(b-c)}{b-a-1}\right] F(b,a,c;z) = \frac{a(b-c)}{b-a-1}F(b-1,a+1,c;z)$$

Bibliographie

[1] J.Schwinger, Phys. Rev.82.D2 (1951) 664.

[2] A. Calogeracos, N. Dombey, Contemp. Phys. **40**, 313 (1999).

[3] . O. Klein, Z. Phys. **53**, 157 (1929).

[4] R.Ruffin, G.Vershchagin, S-S. Xue, phys. Rep.487(2010).

[5] H. Ayoama and M. Kobayashi, prog. Theor. Phys. **64**, 1045 (1980).

[6] S.P Gavrilov, D.M.Gitman, Phys. Rev. D53(1996) 7162.F.

[7] F. Boufersada and B.Guettou, Mémoire de Master, université de jijel (2018).

[8] A.I. Nikishov, arxiv : hep-th/0111137

[9] A.I. Nikishov, arxiv : hep-ph/020224 V1.

[10] V.G. Bagrov and D.M. Gitman, Exact Solutions of Relativistic Wave Equations, (Kluwer, Dordrecht, 1990)

[11] M.Benzeka, Mémoire de Master, université de jijel 2012

[12] I.S.Gradshteyn and I.M.Ryzhik, Table of integrals, series, and products, academic press, new york,(1979).