

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques



Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : E.D.P et application.

Thème

Étude asymptotique de la méthode de
trajectoire centrale pour la programmation
semi-définie

Présenté par :

- Kara Kenza.
- Meghachi Amel.

Devant le jury :

Président	: Chikouche Wided	MCA	Université de Jijel
Encadreur	: Touil Imene	MCB	Université de Jijel
Examineur	: Boufenouche Razika	MCB	Université de Jijel

Table des matières

1	Préliminaires et notions fondamentales	6
1.1	Analyse convexe	6
1.1.1	Notions de convexité	6
1.1.2	Convexité et dérivée	7
1.2	Analyse matricielle	8
1.3	Programmation mathématique	8
1.3.1	Définitions :	8
1.3.2	Principaux résultats d'existence et d'unicité	10
1.3.3	Conditions d'optimalité	10
1.4	Programmation linéaire (<i>PL</i>)	11
1.4.1	Formes usuelles d'un programme linéaire	11
1.4.2	Dualité en programmation linéaire	13
1.5	Programmation semi-définie	15
1.5.1	Dualité en programmation semi-définie	16
2	Méthode de trajectoire centrale via les fonctions noyaux pour la programmation linéaire	18
2.1	Méthode (<i>TC</i>) primale-duale basée sur les fonctions noyaux	19
2.1.1	Introduction de la notion des fonctions noyaux.	19

2.1.2	Algorithme prototype de la méthode (TC) primale-duale	21
2.2	Nouvelle fonction noyau	22
2.2.1	Propriétés de la nouvelle fonction noyau	22
2.3	Quelques fonctions noyaux et leurs complexité	23
2.4	Analyse de la complexité	31
2.4.1	Calcul du pas de déplacement	31
2.5	Nombre total d'itérations	40
3	Extension de la méthode de trajectoire centrale en programmation semi-définie	41
3.1	Méthode de trajectoire centrale pour la programmation semi-définie	41
3.1.1	Calcul de direction	43
3.2	Fonction noyau et leurs propriétés	44
3.2.1	Propriétés de $\Psi(V)$ et $\sigma(V)$	46
3.3	Analyse de l'algorithme	48
3.3.1	Trois lemmes techniques	48
3.3.2	Décroissement de la fonction de proximité pendant une itération . .	50
3.3.3	La borne supérieure uniforme de Ψ	53
3.4	La complexité	54
3.4.1	Méthode à grand et à petit-pas	55
	Bibliography	57

Introduction

La programmation mathématique, branche de l'optimisation, s'occupe de la minimisation (ou maximisation) sous contraintes (ou domaine réalisable) d'une fonction à plusieurs variables, schéma très général s'appliquant à de nombreuses situations pratiques dans beaucoup de domaines (minimisation de coûts, de durées, etc.).

La programmation semi-définie (*SDP*) est l'un des problèmes d'optimisation. L'étude de ce genre de problèmes a connu un fantastique regain d'intérêt depuis les années 90, entre autres parce que l'on a disposé depuis d'algorithmes efficaces permettant de les résoudre : les algorithmes de méthodes de points intérieurs.

On désigne par méthode de point intérieur, toute procédure de résolution générant une suite de points appartenant à l'intérieur (relatif) du domaine réalisable (admissible) et convergent vers une solution optimale du programme considéré. Il y a principalement trois grandes catégories des méthodes de points intérieurs : les méthodes affines, les méthodes de réduction du potentiel et les méthodes de trajectoire centrale.

Dans notre étude, nous avons pris comme modèle la méthode de trajectoire centrale primale-duale, à cause de ses avantages par rapport aux autres classes de méthodes de points intérieurs.

Dans notre travail on a choisi de détailler l'article de **S. Fathi-Hafshejani**, et **M. Reza peyghami** [10] pour la programmation linéaire, dans ce dernier les auteurs ont proposé une nouvelle fonction noyau de type trigonométrique à un paramètre p . Après on a fait l'extension de cette théorie en programmation semi-définie (SDP). Les résultats de la complexité algorithmique obtenus en SDP sont similaires et coïncident avec à ceux des auteurs. Le mémoire est organisé et composé en trois chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre, on présente une introduction de certaines notions et résultats qui seront utiles dans la suite, à savoir : l'analyse matricielle, l'analyse convexe et la programmation mathématique.

Dans Le deuxième chapitre, on étudie la méthode de trajectoire centrale primale-duale

basée sur la notion des fonctions noyaux pour la programmation linéaire.

Le troisième chapitre est consacré à l'extension de la méthode de trajectoire centrale pour la programmation semi-définie.

Notations générales

$\ \cdot\ _F$: la norme de Frobenius définie par $\ M\ _F = (\langle M, M \rangle)^{\frac{1}{2}}$.
KKT	: <i>Karush-Kuhn-Tucker</i> .
PM	: <i>Programme mathématique</i> .
PL	: <i>Programme linéaire</i> .
e	: Vecteur tel que $e = (1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$.
P	: <i>Programme linéaire primal</i> .
D	: <i>Programme linéaire dual</i> .
P_μ	: <i>Problème perturbé primal</i> .
D_μ	: <i>Problème perturbé dual</i> .
SDP	: <i>Programme semi-défini primal</i> .
SDD	: <i>Programme semi-défini dual</i> .
$MPIs$: <i>Les méthodes de points intérieurs</i> .
IPC	: <i>Condition de points intérieurs</i> .
NT	: <i>La direction de Nesterov et Todd</i> .
$CNS(P_\mu)$: <i>conditions de (KKT) sur le Problème (P_μ)</i> .
$CNS(D_\mu)$: <i>conditions de (KKT) sur le Problème (D_μ)</i> .
$\ \cdot\ $: La norme Euclidienne définie par $\ x\ = (\sum_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.
$\succeq 0$: Matrice semi-définie positive.
$\succ 0$: Matrice définie positive.
\mathbb{R}^n	: L'ensemble des vecteurs avec n composantes réelles.
\mathbb{R}^m	: L'ensemble des vecteurs avec m composantes réelles.
\mathbb{R}_+^n	: L'orthant positif de l'espace \mathbb{R}^n .
\mathbb{R}_{++}^n	: L'orthant strictement positif de l'espace \mathbb{R}^n .
S^n	: L'ensemble des matrices symétrique d'ordre n.
S_{++}^n	: L'ensemble des matrices symétrique définies positives.
xs	= $(x_1 s_1, \dots, x_n s_n)^T$ (produit de hadamard).
$\Delta x, \Delta s$: Les directions de Newton.
d_x	= $\frac{v \Delta x}{x}$.
d_s	= $\frac{v \Delta s}{s}$.
$\Psi(x, s; \mu)$: La fonction barrière logarithmique de type primal-dual.
$\Psi(v)$	= $\sum_{i=1}^n \psi(v_i)$ mesure de proximité.
$\nabla \Psi(v)$: Désigne le gradient de la fonction logarithmique barrière Ψ .
$\psi(t)$: Fonction noyau.

$\psi'(t)$:	La dérivée de la fonction noyau .
X	=	$\text{diag}(x)$.
S	=	$\text{diag}(s)$.
D_X	=	$\frac{1}{\sqrt{\mu}}D^{-1}\Delta XD^{-1}$.
D_S	=	$\frac{1}{\sqrt{\mu}}D\Delta SD$.
α	:	Le pas de déplacement .
$f(x)$ et $g(x)$:	Fonctions de \mathbb{R}_{++}^n dans \mathbb{R}_{++}^n .
k	:	Le nombre total d'itérations .
c-à-d	:	c'est à dire.
i.e.,	:	identiquement.
s.c.	:	sous contrainte.

Chapitre 1

Préliminaires et notions fondamentales

1.1 Analyse convexe

1.1.1 Notions de convexité

La notion de convexité est un outil mathématique important pour l'étude théorique et numérique des problèmes d'optimisation. À ce propos, nous présentons dans cette partie quelques notions de base d'usage courant.

Définition 1.1. *Un ensemble C est dit convexe si pour tout points $x, y \in C$ le segment $[x, y]$ est inclus dans C , i.e.,*

$$\forall t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in C.$$

Exemple 1.2. 1. *Les singletons, les segments, les espaces \mathbb{R}^n et les sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^n sont des ensembles convexes.*

2. *Toutes les boules de \mathbb{R}^n sont convexes.*

3. *Par contre $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$ n'est pas convexe (car $0 = \frac{1}{2}(x + (-x)) \notin S$, avec $x \in S$).*

Définition 1.3. *Un ensemble C est dit affine si*

$$\forall x, y \in C, \forall t \in \mathbb{R} : tx + (1 - t)y \in C.$$

Définition 1.4. *Une fonction f définie sur un ensemble convexe C est dite convexe si*

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1] : f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \quad (1.1)$$

f est dite strictement convexe si l'inégalité (1.1) est stricte quand $x \neq y$.

Définition 1.5. Une fonction f définie sur un ensemble affine C est dite affine si

$$\forall x, y \in C, \forall t \in \mathbb{R} : f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad (1.2)$$

Définition 1.6. Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est un cône si : $\mathbb{R}_+^* C \subseteq C$ i.e.,

$$\forall x \in C, \forall \lambda > 0, \quad \lambda x \in C.$$

Un cône est dit pointé si $C \cap (-C) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Si C est convexe, on l'appelle cône convexe.

Définition 1.7. Soit P une partie de E , on appelle enveloppe convexe, notée $\text{conv}(P)$, l'intersection de tous les ensembles convexes contenant P .

Définition 1.8. Un ensemble C est un polyèdre convexe s'il s'écrit comme suit

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : A_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Où A_i est un vecteur non nul de \mathbb{R} et b_i est un scalaire pour $i = 1, \dots, m$.

Définition 1.9. Un polyèdre convexe compact (c'est-à-dire fermé borné) de \mathbb{R}^n , appelé aussi polytope de \mathbb{R}^n , tout ensemble C définie par :

1. $C = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, \text{ avec } A \text{ une matrice de dimension } (m \times n)\}$ et C est borné.

ou par

2. $C = \text{conv}(v_1, \dots, v_{n+1}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$.

Les points v_1, \dots, v_{n+1} s'appellent les sommets.

Remarque 1. Les opérations algébriques suivantes conservent la convexité

1. L'intersection quelconque.
2. Le produit cartésien.
3. Les transformations affines.
4. Les combinaisons linéaires.
5. La translation.

1.1.2 Convexité et dérivée

Proposition 1.10. (*Caractérisation de la convexité*)

Soit f une fonction différentiable définie sur un convexe $C \subseteq \mathbb{R}^n$ alors :

1. f est convexe ssi

$$\forall x, y \in C : \langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq f(x) - f(y). \quad (1.3)$$

2. f est strictement convexe ssi l'inégalité (1.3) est stricte quand $x \neq y$.

1.2 Analyse matricielle

Une matrice réelle A de dimension $(n \times n)$ est dite :

1. Semi-définie positive (*s.d.p*) si :

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Définie positive (*d.p*) si :

$$\langle Ax, x \rangle > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

3. Semblable à une matrice B de dimension $(n \times n)$, s'il existe une matrice inversible P d'ordre n telle que $B = P^{-1}AP$.

Définition 1.11. La trace de $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie par la somme des éléments diagonaux

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Propriétés 1.12. Les propriétés suivantes sont satisfaites pour la trace

1 - Linéarité : $\text{trace}(A + B) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B)$,

$$\text{trace}(\alpha A) = \alpha \text{trace}(A), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

2 - Invariance par permutation : $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$.

3 - $\text{Trace}(A) = \sum_i \lambda_i$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A .

4 - Si A et B sont semblables alors, $\text{trace}(A) = \text{trace}(B)$.

Propriétés 1.13. (Convexité par la Hessienne)

Soit $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et deux fois différentiable sur le convexe C , si la matrice Hessienne $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in C$ (resp. définie positive) alors f est convexe sur C (resp. strictement convexe).

1.3 Programmation mathématique

1.3.1 Définitions :

Problème d'optimisation :

Définition 1.14. Un problème d'optimisation sans contraintes s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{trouver } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que} \\ f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Un problème d'optimisation avec contraintes s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \text{trouver } \bar{x} \in S \text{ tel que} \\ f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in S, \end{cases}$$

où $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelé ensemble des contraintes.

Programme mathématique :

Un programme mathématique noté (PM) est un problème d'optimisation sous contrainte qui peut s'écrire de la façon suivante :

$$(PM) \begin{cases} \min(\text{ou max}) f(x) \\ S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, n \text{ et } h_j(x) = 0, j = 1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Où

- S est une partie de \mathbb{R}^n et x un vecteur appelé variable, ses n composantes sont dites les inconnues du problème (PM) .
- La fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction objective ou économique.
- Les fonctions $g_i : S \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n, h_j : S \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, m$, sont appelées les contraintes du problème.
- Si $S = \mathbb{R}^n$, on dit que (PM) est un problème d'optimisation sans contraintes.
- Un vecteur \bar{x} vérifiant les contraintes de (PM) est dit solution réalisable du (PM) , l'ensemble des solutions réalisables d'un (PM) forme un domaine de définition, ce domaine peut être : vide, dans ce cas le problème (PM) n'admet aucune solution, sous certaines conditions, il peut exister des solutions x^* dites optimales, c'est-à-dire minimiser (ou maximiser) la fonction $f(x)$ sur toutes les solutions réalisables du (PM) .

Définition 1.15. (*minimum local*)

Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}, S \subset \mathbb{R}^n$. On dit que f admet un minimum local (solution optimale locale) en $x^* \in S$ ssi :

$$\exists B(x^*, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - x^*\| < \varepsilon\} \text{ tel que } f(x) \geq f(x^*), \forall x \in B(x^*, \varepsilon).$$

L'ensemble des minimums locaux de (PM) est noté par : $\text{loc min}_S f(x)$.

Définition 1.16. (*minimum global*)

Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}, S \subset \mathbb{R}^n$. On dit que f admet un minimum global (solution optimale globale) en $x^* \in S$ ssi : $f(x) \geq f(x^*), \forall x \in S$.

L'ensemble des minimums globaux de (PM) est noté par : $\arg \min_S f(x)$.

Remarque 2. On a toujours : $\arg \min_S f(x) \subseteq \text{loc min}_S f(x)$.

Remarque 3. On classifie le problème (PM) à partir de deux propriétés fondamentales à savoir la convexité et la différentiabilité des fonctions du problème. A ce propos,

- (PM) est convexe si les fonctions f, g_i sont convexes et les fonctions h_j sont affines.
- (PM) est différentiable si les fonctions f, g_i et h_j sont différentiables.

1.3.2 Principaux résultats d'existence et d'unicité

Théorème 1.17. (Weierstrass) [3] Si S est compact (fermé et borné) et f est continue sur S ; alors (PM) admet au moins une solution optimale globale $x^* \in S$.

Théorème 1.18. Si S est convexe et f est strictement convexe, alors il existe au plus une solution optimale de (PM) .

1.3.3 Conditions d'optimalité

Définition 1.19. Le lagrangien d'un programme mathématique (PM) est défini par :

$$L(x, \lambda, y) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m y_j h_j(x), \lambda_i, y_j \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.20. (Karush-Kuhn-Tucker(KKT))

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur D , si x^* est un minimum local du problème (PM) , alors il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ tel que :

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^m y_j \nabla h_j(x^*) = 0 & (\text{condition nécessaire d'optimalité}), \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n & (\text{condition de complémentarité}), \\ h_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Les λ_i et les y_j sont appelés multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker.

Remarque 4. Si (PM) est convexe, alors les conditions d'optimalité (KKT) sont à la fois nécessaires et suffisantes.

1.4 Programmation linéaire (PL)

Définition 1.21. *Un programme linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées "contraintes" qui sont linéaires et à partir de ces contraintes on doit optimiser une fonction également linéaire appelée "objective" (économique) sous la forme :*

$$(PL) \begin{cases} \text{opt}(\sum_{j=1}^n c_j x_j) \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, =, \geq) b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

ou bien sous la forme matricielle :

$$(PL) \begin{cases} \text{opt}(c^t x) \\ \text{s.c. } Ax (\leq, =, \geq) b, \\ x \in \mathbb{R}_+^n. \end{cases}$$

tels que

$\text{opt} = (\text{max ou min})$

$c^t x = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ est la fonction à optimiser, $c \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur **coût**,

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ et $b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, m$.

1.4.1 Formes usuelles d'un programme linéaire

a) La forme canonique

On dit que le problème de programmation linéaire est sous forme canonique s'il vérifie les conditions suivantes :

- 1) Toutes ses variables sont non négatives.
- 2) Toutes les contraintes sont de même signe (\geq ou \leq).
 - a) Si la fonction objective est du type de maximisation, alors le signe est inférieur ou égal (\leq).
 - b) Si la fonction objective est du type de minimisation, alors le signe est supérieur ou égal (\geq).
- 3) Le signe de b_i , $i = 1, \dots, m$ est non déterminé.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cas de maximisation} \\ \max(z = \sum_{j=1}^n c_j x_j) \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cas de minimisation} \\ \min(z = \sum_{j=1}^n c_j x_j) \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Exemple 1.22. :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(400x_1 + 500x_2) \\ \text{s.c. } x_1 + 2x_2 \leq 200, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2200, \\ 0 \leq x_1, x_2 \leq 400. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(400x_1 + 500x_2) \\ \text{s.c. } \frac{1}{4}x_1 + x_2 \geq 600, \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 900, \\ x_1, x_2 \geq 600. \end{array} \right.$$

b) La forme standard

On dit que le problème de programmation linéaire est sous forme standard s'il vérifie les conditions suivantes :

- 1) Toutes ses variables sont non négatives.
- 2) Toutes les contraintes sont sous forme des équations.
- 3) La fonction objective soit maximiser ou minimiser.
- 4) Les $b_i, i = 1, \dots, m$, sont non négatives.

Le cas de maximisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(z = \sum_{j=1}^n c_j x_j) \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Le cas de minimisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(z = \sum_{j=1}^n c_j x_j) \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Exemple 1.23. :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(30x_1 + 12x_2) \\ \text{s.c. } 80x_1 + 60x_2 = 42, \\ 12x_1 + 60x_2 = 45, \\ 6x_1 + 2x_2 = 18, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(30x_1 + 12x_2) \\ \text{s.c. } 80x_1 + 60x_2 = 42, \\ 12x_1 + 60x_2 = 45, \\ 6x_1 + 2x_2 = 18, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

c) La forme mixte

On dit que le problème de programmation linéaire est sous forme mixte s'il n'est écrit pas ni sous forme canonique ni sous forme standard.

Exemple 1.24. :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(16x_1 + 21x_2 + 10x_3) \\ s.c. \ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 57, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 73, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

Relation entre forme standard et forme canonique

1) On peut minimiser le problème (PL), comme on peut le maximiser de la manière suivante :

$$\min c^t x = -\max(-c^t x), \text{ c'est-à-dire } \min z = -\max(-z).$$

2) Une contrainte d'égalité $Ax = b$ peut être remplacée par deux inégalités, c'est-à-dire $Ax = b \Leftrightarrow Ax \leq b$ et $Ax \geq b$.

3) Une contrainte d'inégalité peut être transformée en égalité.

a) $Ax \leq b \Leftrightarrow Ax + e = b$, avec $e \geq 0$.

b) $Ax \geq b \Leftrightarrow Ax - e = b$, avec $0 \leq e$ appelée variable d'écart (ou artificielle).

1.4.2 Dualité en programmation linéaire

Etant donné le programme linéaire (P) (désigné comme primal) on peut toujours associer à ce programme un autre programme linéaire appelé programme dual.

Dual d'un programme linéaire sous forme standard

Considérons le programme linéaire (sous forme standard)

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min(c^t x) \\ s.c. \ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{array} \right.$$

Nous associons à chaque contrainte i , $i = 1, \dots, m$, une variable y_i positive, négative ou nulle (appelée variable duale) et considérons le programme linéaire :

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \max(b^t y) \\ s.c. \ A^t y \leq c. \end{array} \right.$$

où y est le m -vecteur $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, le programme linéaire dual (D) est très lié au

programme linéaire primal (P), tel que :

- 1) La matrice des contraintes de (D) est la transposée de la matrice des contraintes de (P).
- 2) Le vecteur des coûts de (P) est le vecteur des seconds membres de (D) et vice-versa. Donc (D) est appelé le dual du programme linéaire (P) par opposition au dual, le programme (P) est appelé le primal.

Définition du dual dans le cas général

Évidemment, on peut définir le dual d'un programme linéaire quelconque (pas nécessairement sous forme standard). Le tableau suivant résume les correspondances entre primal et dual et permet d'écrire directement le dual d'un programme linéaire quelconque.

primal	min	max	Dual
contraintes	$\geq b_i$	≥ 0	variables
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	libre	
variables	≥ 0	$\leq c_j$	contraintes
	≤ 0	$\geq c_j$	
	libre	$= c_j$	

Remarque 5. :

- 1) On note que le nombre de variables duales est égal au nombre de contraintes primales de même le nombre de contraintes duales est égal au nombre de variables primales.
- 2) Le dual du programme dual (D) est le programme primal (P).
- 3) On peut transformer un problème de maximisation à un problème de minimisation il suffit d'écrire $\max(f) = -\min(-f)$.

Exemple 1.25. :

Soit le programme linéaire primal écrit sous forme mixte :

$$(P) \begin{cases} \min(2x_1 - 3x_2) \\ s.c. \ x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 > 0. \end{cases}$$

alors son dual est :

$$(D) \begin{cases} \max(y_1 + 4y_2 + 3y_3) \\ \text{s.c. } y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2, \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 = -3, \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 < 0. \end{cases}$$

Théorèmes de la dualité

Définition 1.26. 1. On appelle ensemble admissible (réalisable) du problème (P) sous forme standard l'ensemble $R(P) = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax = b\}$, dans ce cas x est appelée solution réalisable primale.

2. On appelle ensemble admissible (réalisable) du problème (D) sous forme standard l'ensemble $R(D) = \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^n \mid A^t y + s = c\}$, dans ce cas (y, s) est appelée solution réalisable duale.

Théorème 1.27. (Dualité faible) Si x et y sont des solutions réalisables des problèmes (P) et (D) respectivement alors $c^t x \geq b^t y$.

Théorème 1.28. (Dualité forte) Si x^* et y^* sont des solutions réalisables des problèmes (P) et (D) respectivement telles que $b^t y^* = c^t x^*$, alors x^* et y^* sont des solutions optimales de (P) et (D) respectivement.

Proposition 1.29. :

Soit $R(P)$ l'ensemble des solutions admissibles du problème (P), on suppose que $R(P)$ est non vide, alors il existe au moins un sommet de $R(P)$.

1.5 Programmation semi-définie

On note par S^n l'ensemble de $(n \times n)$ matrices symétriques.

Et par S_+^n (S_{++}^n) l'ensemble de $(n \times n)$ matrices symétriques semi-définies (définies) positives

$$S_+^n = \{A \in S^n \mid A \text{ est semi-définie positives (ou bien } A \succeq 0)\}.$$

$$S_{++}^n = \{A \in S^n \mid A \text{ est définie positives (ou bien } A \succ 0)\} = \text{int}(S_+^n).$$

Signalant que la programmation semi-définie (SDP) est une généralisation (extension) de la programmation linéaire (PL), où les vecteurs sont remplacés par des matrices et l'orthant positif (\mathbb{R}_+^n) par le cône convexe S_+^n .

Le problème primal de la programmation semi-définie sous forme standard, s'écrit comme suit :

$$(SDP) \begin{cases} \min \langle C, X \rangle \\ s.c. \operatorname{tr}(A_i X) = b_i, i = 1, \dots, m, \\ X \in S_+^n. \end{cases}$$

Où :

- C et $A_i, i = 1, \dots, m$, sont des matrices dans S^n .

- $\langle C, X \rangle = \operatorname{tr}(C^t X) = \sum_{ij} C_{ij} X_{ji}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Remarque 6. Si X est une matrice diagonale, le problème (SDP) se réduit à un problème de programmation linéaire, néanmoins, plusieurs problèmes de programmation non linéaire peuvent se formuler sous la forme (SDP), tel que la programmation quadratique convexe, la programmation combinatoire, les problèmes de coupure maximale dans la théorie des graphes, ainsi que les problèmes de min-max des valeurs propres.

1.5.1 Dualité en programmation semi-définie

Pour obtenir le problème dual de (SDP), on considère la fonction Lagrangienne suivante :

$$\begin{aligned} q(y) &= \min_{X \in S_+^n} [\langle C, X \rangle + \sum_{i=1}^m (b_i - \langle A_i, X \rangle) y_i, y \in \mathbb{R}^m] \\ &= \min_{X \in S_+^n} [\langle C - \sum_{i=1}^m y_i A_i, X \rangle] + \sum_{i=1}^m b_i y_i \end{aligned}$$

d'où

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} q(y) = \begin{cases} \max b^t y & \text{si } C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \in S_+^n, \\ -\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Le problème dual (SDD) de (SDP) est donc :

$$(SDD) = \begin{cases} \max b^t y \\ s.c. C - \sum_{i=1}^m y_i A_i = S, \\ y \in \mathbb{R}^m, S \in S_+^n. \end{cases}$$

Théorème 1.30. (Dualité faible) Si X et (y, S) sont des solutions réalisables de (SDP) et (SDD) respectivement, alors on a toujours :

$$\langle C, X \rangle - b^t y = \langle S, X \rangle \geq 0.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
 \langle C, X \rangle - b^t y &= \langle C, X \rangle - \sum_{i=1}^m b_i y_i \\
 &= \langle C, X \rangle - \sum_{i=1}^m y_i \langle A_i, X \rangle \\
 &= \langle C - \sum_{i=1}^m y_i A_i, X \rangle = \langle S, X \rangle.
 \end{aligned}$$

Puisque les matrices S et X sont toutes les deux semi-définies positives, la trace de leur produit est un nombre positif ou nul i.e., $tr(XS) \geq 0$.

Ce qui donne :

$$\langle C, X \rangle - b^t y = \langle S, X \rangle \geq 0.$$

D'où le résultat . ■

Théorème 1.31. (Dualité forte)[17] Si le problème (SDP) est strictement réalisable i.e.,

$$\exists X \in S_{++}^n : \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Alors, les valeurs optimales de (SDP) et (SDD) sont égales.

De même si le problème (SDD) est strictement réalisable i.e.,

$$\exists y \in \mathbb{R}^m : S = C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \in S_{++}^n.$$

Alors, les valeurs optimales de (SDP) et (SDD) sont égales.

Chapitre 2

Méthode de trajectoire centrale via les fonctions noyaux pour la programmation linéaire

Dans ce chapitre, on va étudier la méthode de trajectoire centrale primale-duale basée sur la notion des fonctions noyaux. A cet effet, on a choisi de détailler l'article de F.Hafshejani et al [10], dont les auteurs ont introduit une fonction noyau à terme barrière de type trigonométrique, pour trouver une nouvelle classe de directions dans le but d'obtenir un nouveau résultat de complexité.

Rappelons que le problème de la programmation linéaire, considéré comme primal est défini par

$$(P) \quad \begin{cases} \min \langle c, x \rangle \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\text{rang}(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $\langle c, x \rangle = c^t x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$.

Le problème dual associé à (P) est défini par

$$(D) \quad \begin{cases} \max \langle b, y \rangle \\ A^t y + s = c, \\ s \geq 0, y \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

2.1 Méthode (TC) primale-duale basée sur les fonctions noyaux

Rappelons que les méthodes de trajectoires centrales primales-duales reposent sur les principes suivants

- On associe au problème primal (P) le problème perturbé (P_μ).
- On applique les conditions **KKT** sur ce dernier, on obtient le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} Ax = b, \\ A^T y + s = c, \\ xs = \mu e, \\ x > 0, s > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où on suppose que les ensembles S_{int} et T_{int} sont non vides. Cette condition est appelée aussi condition de point intérieur (CPI), sous cette condition (CPI) le système (2.1) admet une solution unique $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ pour chaque $\mu > 0$.

- On résout le système (2.1) par la méthode Newton, cette dernière consiste à trouver la direction $\Delta w = (\Delta x, \Delta y, \Delta s)$, en résolvant le système linéaire suivant

$$\begin{cases} A\Delta x = 0, \\ A^T \Delta y = 0, \\ s\Delta x + x\Delta s = \mu e - xs. \end{cases} \quad (2.2)$$

L'itéré de Newton s'écrit comme suit

$$x_+ = x + \alpha\Delta x, \quad s_+ = s + \alpha\Delta s, \quad y_+ = y + \alpha\Delta y, \quad (2.3)$$

où α est un paramètre positif ($\alpha > 0$) introduit d'une façon à maintenir la stricte faisabilité des nouveaux itérés x_+ et s_+ .

2.1.1 Introduction de la notion des fonctions noyaux.

Pour faciliter l'étude de ces méthodes, on aura besoin de définir le vecteur v comme suit

$$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}, \quad xs = (x_1 s_1, x_2 s_2, \dots, x_n s_n), \quad (2.4)$$

où v est appelé "le vecteur mis à l'échel" (en anglais scaling vector).

En utilisant (2.4), le système (2.1) peut se réécrire comme suit

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0, \\ \bar{A}^T \Delta y + d_s = 0 \\ d_x + d_s = v^{-1} - v, \end{cases} \quad (2.5)$$

où

$$\bar{A} = \frac{1}{\mu} AV^{-1}X, \quad V = \text{diag}(v), \quad X = \text{diag}(x),$$

et

$$d_x = \frac{v\Delta_x}{x}, \quad d_s = \frac{v\Delta_s}{s}, \quad (2.6)$$

d_x et d_s sont appelées "les directions de Newton mise à l'échelle" (en anglais scaling directions).

Notons que le côté droit de la troisième équation de (2.5) est égal au gradient négatif de la fonction barrière logarithmique $\Psi(v)$, i.e.,

$$d_x + d_s = -\nabla\Psi(v),$$

dans ce cas (2.5), devient

$$\begin{cases} \bar{A}d_x = 0, \\ \bar{A}^T \Delta y + d_s = 0, \\ d_x + d_s = -\nabla\Psi(v). \end{cases} \quad (2.7)$$

Où la fonction barrière $\Psi(v)$ est définie de \mathbb{R}_{++}^n dans \mathbb{R}_+^n par

$$\Psi(v) = \Psi(x, s; \mu) = \sum_{i=1}^n \psi_c(v_i), \quad (2.8)$$

telle que ψ_c est appelée la fonction noyau classique de la fonction barrière logarithmique $\Psi(v)$, définie par

$$\psi_c(t) = \frac{t^2 - 1}{2} - \log t. \quad (2.9)$$

Remarque 7. Si $(d_x, \Delta y, d_s)$ est une solution du système (2.7), alors d_x et d_y sont orthogonaux.

Tout au long de ce chapitre nous utilisons $\Psi(v)$ la fonction de proximité pour mesurer la distance entre l'itéré et le μ -centre et la trajectoire centrale pour $\mu > 0$ donné. Nous

définissons également la mesure de proximité, basée sur la norme, $\delta(v) : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ comme suit

$$\delta(v) = \frac{1}{2} \|\nabla \Psi(v)\| = \frac{1}{2} \|d_x + d_s\| = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_t^n (\psi'(v_i))^2}. \quad (2.10)$$

Ainsi on a :

$$\Psi(v) = 0 \Leftrightarrow \delta(v) = 0 \Leftrightarrow v = e.$$

2.1.2 Algorithme prototype de la méthode (TC) primale-duale

Début algorithme

Données

ψ La fonction de proximité,
 $\tau > 1$, un paramètre de tolérance,
 $\epsilon > 0$, un paramètre de précision,
 $0 < \theta < 1$, un paramètre barrière,

Initialisation :

$x = e; s := e; \mu = 1; v = e.$

Tant que $n\mu \geq \epsilon$ faire

$\mu := (1 - \theta)\mu;$

Tant que $\Psi(x, y, s) > \tau$ faire

- Résoudre le système (2.7), et utiliser (2.4) pour déterminer $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$;
- Calculer le pas de déplacement α ;
- Poser : $x := x + \alpha\Delta x$;
 $y := y + \alpha\Delta y$;
 $s := s + \alpha\Delta s$;
 $v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}};$

Fin tant que

Fin tant que

Fin algorithme.

2.2 Nouvelle fonction noyau

Dans ce qui suit, au lieu d'utiliser la fonction noyau classique ψ_c , on utilise la fonction noyau proposée dans [10] définie comme suit

$$\psi(t) = \frac{t^2 - 1}{2} - \int_1^t e^{5p \tan(h(x))} dx, \quad h(t) = \frac{1-t}{2+4t}\pi, \quad p \geq 1. \quad (2.11)$$

2.2.1 Propriétés de la nouvelle fonction noyau

Dans cette section, Nous étudions certaines propriétés de la nouvelle fonction noyau à terme barrière trigonométrique, qui sont essentielles pour l'analyse de la complexité algorithmique. Avant d'étudier les propriétés de cette nouvelle fonction noyau, nous avons besoin de donner la définition d'une fonction noyau.

Définition 2.1. *Soit $\psi(t) : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_+$, une fonction deux fois continûment différentiable. Alors ψ est dite fonction noyau, si elle vérifie les conditions suivantes*

1. $\psi(1) = \psi'(1) = 0$,
2. $\psi''(t) > 0$,
3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = +\infty$.

Les deux premières conditions montrent que ψ est strictement convexe et minimale en 1 avec $\psi(1) = 0$, et implique que $\psi(t)$ s'écrit comme suit

$$\psi(t) = \int_1^t \int_1^\xi \psi''(\zeta) d\zeta d\xi. \quad (2.12)$$

La condition (3) indique que ψ est une fonction barrière.

Maintenant, nous donnons les trois premières dérivées de cette nouvelle fonction noyau

$$\psi'(t) = t - e^{5p \tan(h(t))}, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \psi''(t) &= 1 - 5ph'(t) (1 + \tan^2(h(t))) e^{5p \tan(h(t))} \\ &= 1 + \frac{30p\pi}{(2+4t)^2} (1 + \tan^2(h(t))) e^{5p \tan(h(t))}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \psi'''(t) &= - (1 + \tan^2(h(t))) e^{5p \tan(h(t))} \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 10p \tan(h(t)) + \\ 25p^2 (1 + \tan^2(h(t))) \end{array} \right] (h'(t))^2 + \\ 5ph''(t) \end{array} \right] \\ &= (1 + \tan^2(h(t))) e^{5p \tan(h(t))} k(t), \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec

$$h'(t) = \frac{-6\pi}{(2+4t)^2}; h''(t) = \frac{48\pi}{(2+4t)^3}, \quad (2.16)$$

et

$$k(t) = -\frac{240p\pi}{(2+4t)^3} - \frac{360p\pi^2}{(2+4t)^4} \tan(h(t)) - \frac{900p^2\pi^2}{(2+4t)^4} (1 + \tan^2(h(t))).$$

2.3 Quelques fonctions noyaux et leurs complexité

Dans le tableau suivant, on donne les différentes fonctions noyaux connues dans la littérature [1, 2] et la complexité de leurs algorithmes pour les méthodes de points intérieurs à petit- et à grand-pas.

	Fonction noyau	Complexité algorithmique	Complexité algorithmique
	$\Psi_i(t)$	Petit-pas	Grand-pas
1	$\frac{1}{2}(t^2 - 1) - \log t$	$O(\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(n \log \frac{n}{\varepsilon})$
2	$\frac{t^2-1}{2} + \frac{t^{1-q}-1}{q(q-1)} - \frac{q-1}{q(q-1)}(t-1), q > 1$	$O(q\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(qn^{\frac{q+1}{2q}} \log \frac{n}{\varepsilon})$
3	$\frac{t^2-1}{2} + \frac{(e-1)^2}{e} \frac{1}{e-1} - \frac{e-1}{e}$	$O(\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(n^{\frac{3}{4}} \log \frac{n}{\varepsilon})$
4	$\frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})^2$	$O(\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(n^{\frac{2}{4}} \log \frac{n}{\varepsilon})$
5	$\frac{t^2-1}{2} + e^{\frac{1}{t-1}} - 1$	$O(\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(\sqrt{n}(\log n)^2 \log \frac{n}{\varepsilon})$
6	$\frac{t^2-1}{2} - \int_1^t e^{\frac{1}{\xi}} d\xi$	$O(\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(\sqrt{n} \log^2 n \log \frac{n}{\varepsilon})$
7	$\frac{t^2-1}{2} + \frac{t^{1-q}-1}{(q-1)}, q > 1$	$O(q^2\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(qn^{\frac{q+1}{2q}} \log \frac{n}{\varepsilon})$
8	$t - 1 + \frac{t^{1-q}-1}{q-1}, q > 1$	$O(q^2\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(qn \log^2 n \log \frac{n}{\varepsilon})$
9	$\frac{t^{1+p}-1}{p+1} - \log t, p \in [0, 1]$	$O(\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(n \log \frac{n}{\varepsilon})$
10	$\frac{t^{1+p}-1}{p+1} + \frac{t^{1-q}-1}{q-1}, p \in [0, 1], q > 1$	$O(\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(qn^{\frac{p+q}{q(1+p)}} \log \frac{n}{\varepsilon})$
11	$t^2 - 1 + \frac{t^{1-q}-1}{q-1} - \log t, p > 1, q > 1$	$O(\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(qn^{\frac{q+1}{2q}} \log \frac{n}{\varepsilon})$
12	$(m+1)t^2 - (m+2)t + \frac{1}{t^m}, m > 4$	$O(q^2\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(m^{\frac{2m+1}{2m}} \log \frac{n}{\varepsilon})$
13	$t^2 - 2t + \frac{1}{\sin(\frac{\pi t}{1+t})}, t > 0$	$O(\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(n^{\frac{3}{4}} \log \frac{n}{\varepsilon})$
14	$\frac{t^2-1}{2} + \frac{4}{\pi p} [\tan^p h(t) - 1], t > 0$	$O(\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(n^{\frac{3}{4}} \log \frac{n}{\varepsilon})$
15	$\frac{t^2-1}{2} - \int_1^t e^{5p \tan(h(x))} dx, p \geq 1$	$O(\sqrt{n} \log \frac{n}{\varepsilon})$	$O(\sqrt{n} \log n \log \frac{n}{\varepsilon}), p = O(\ln n)$

TABLE 2.1 – La complexité à petit- et à grand-pas

Lemme 2.2. Soit $\psi(t)$ une fonction deux fois différentiable, alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\psi(\sqrt{t_1 t_2}) \leq \frac{\psi(t_1) + \psi(t_2)}{2}$, pour tout $t_1, t_2 > 0$.
2. $t\psi''(t) + \psi'(t) \geq 0, t > 0$.
3. $\psi(e^\xi)$ est convexe.

Lemme 2.3. Pour $h(t)$ définie dans (2.11) et $p \geq 1$, nous avons les propriétés suivantes

$$-\frac{\pi}{4} < h(t) < \frac{\pi}{2}, \forall t > 0. \quad (2.17)$$

$$\tan(h(t)) \geq 0, \forall t \in]0, 1] \text{ et } \tan(h(t)) \in]-1, 0[, \forall t > 1. \quad (2.18)$$

$$\tan(h(t)) - \frac{1}{3\pi t} > 0, \quad 0 < t \leq \frac{1}{2}. \quad (2.19)$$

Démonstration. Pour (2.17), tant que $h(t)$ est une fonction décroissante dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = -\frac{\pi}{4}$. Alors, on a

$$-\frac{\pi}{4} < h(t) < \frac{\pi}{2}, \forall t > 0.$$

Pour (2.18), et comme $h(1) = 0$, on utilise (2.17) on trouve

$$\forall t \in]0, 1] : 0 \leq h(t) < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall t > 1 : -\frac{\pi}{4} < h(t) < 0,$$

tant que $\tan(h(t))$ est une fonction croissante dans l'intervalle $]0, \infty[$, alors

$$\forall t \in]0, 1] : \tan 0 \leq \tan(h(t)) < \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \forall t > 1 : \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) < \tan(h(t)) < \tan 0,$$

ce qui donne

$$\forall t \in]0, 1] : \tan(h(t)) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall t > 1 : -1 < \tan(h(t)) < 0,$$

d'où (2.18).

Pour prouver (2.19), on définit la fonction g comme suit

$$g(t) = \tan(h(t)) - \frac{1}{3\pi t},$$

la première dérivée de g est donnée par

$$\begin{aligned} g'(t) &= (1 + \tan^2(h(t)))h'(t) + \frac{1}{3\pi t^2} \\ &= \left(1 + \frac{\sin^2(h(t))}{\cos^2(h(t))}\right) h'(t) + \frac{1}{3\pi t^2} \\ &= \frac{h'(t)}{\cos^2(h(t))} + \frac{1}{3\pi t^2} \\ &= \frac{3\pi t^2 h'(t) + \cos^2(h(t))}{3\pi t^2 \cos^2(h(t))} \\ &= \frac{-18\pi^2 t^2 + (2 + 4t)^2 \cos^2(h(t))}{3\pi t^2 (2 + 4t)^2 \cos^2(h(t))}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue par l'utilisation de (2.16).

On sait que $\cos(h(t)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - h(t)\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - h(t)\right) < \frac{\pi}{2} - h(t)$. Alors

$$g'(t) < \frac{-18\pi^2 t^2 + (2 + 4t)^2 \left(\frac{\pi}{2} - h(t)\right)^2}{3\pi t^2 (2 + 4t)^2 \cos^2(h(t))}. \quad (2.20)$$

Calculons $(2 + 4t)^2 \left(\frac{\pi}{2} - h(t)\right)^2$.

$$\begin{aligned} (2 + 4t)^2 \left(\frac{\pi}{2} - h(t)\right)^2 &= (2 + 4t)^2 \left(\frac{\pi^2}{4} + h(t)^2 - \pi h(t)\right) \\ &= (2 + 4t)^2 \left[\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2(1-t)^2}{(2+4t)^2} - \frac{\pi^2(1-t)}{(2+4t)}\right] \\ &= \frac{\pi^2}{4} (2 + 4t)^2 + \pi^2(1-t)^2 - (2 + 4t)\pi^2(1-t) \\ &= \frac{\pi^2}{4} (4 + 16t^2 + 16t) + \pi^2(1 + t^2 - 2t) - \pi^2(2 - 2t + 4t - 4t^2) \\ &= \pi^2 + 4\pi^2 t^2 + 4\pi^2 t + \pi^2 + \pi^2 t^2 - 2\pi^2 t - 2\pi^2 + 2\pi^2 t - 4\pi^2 t + 4\pi^2 t^2 \\ &= 9\pi^2 t^2, \end{aligned}$$

on remplace dans (2.20), on trouve

$$\begin{aligned} g'(t) &< \frac{-18\pi^2 t^2 + 9\pi^2 t^2}{3\pi t^2 (2 + 4t)^2 \cos^2(h(t))} \\ &= \frac{-9\pi^2 t^2}{3\pi t^2 (2 + 4t)^2 \cos^2(h(t))} \\ &= \frac{-3\pi}{(2 + 4t)^2 \cos^2(h(t))} < 0. \end{aligned}$$

Donc, g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}]$ et on a

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) - \frac{2}{3\pi} \\ &\simeq 0.3926 - 0.2122 \\ &\simeq 0.1804 > 0. \end{aligned}$$

D'où

$$g(t) > 0, \quad 0 < t \leq \frac{1}{2},$$

ce qui termine la preuve. ■

Le lemme suivant sert à prouver l'efficacité de notre nouvelle fonction noyau (2.11).

Lemme 2.4. *Soit $\psi(t)$ la fonction noyau définie dans (2.11). Alors, $\forall t > 0$, on a*

$$\psi''(t) > 1. \quad (2.21)$$

$$\psi'''(t) < 0. \quad (2.22)$$

$$t\psi''(t) - \psi'(t) > 0. \quad (2.23)$$

$$t\psi''(t) + \psi'(t) > 0. \quad (2.24)$$

Démonstration. Pour (2.21), on voit que tous les termes de l'expression (2.14) sont positifs, d'où (2.21).

Pour prouver (2.22), on a

$$\psi'''(t) = (1 + \tan^2(h(t))) e^{5p \tan(h(t))} k(t),$$

avec

$$k(t) = -\frac{240p\pi}{(2+4t)^3} - \frac{360p\pi^2}{(2+4t)^4} \tan(h(t)) - \frac{900p^2\pi^2}{(2+4t)^4} (1 + \tan^2(h(t))).$$

Il suffit de montrer que $k(t) < 0, \forall t > 0$, alors on distingue deux cas :

1^{ière} cas : pour $0 < t \leq 1$, et d'après (2.18), on a :

$$k(t) = -\left(\frac{240p\pi}{(2+4t)^3} + \frac{360p\pi^2}{(2+4t)^4} \tan(h(t)) + \frac{900p^2\pi^2}{(2+4t)^4} (1 + \tan^2(h(t))) \right) < 0,$$

ce qui donne $\psi'''(t) < 0$.

2^{ème} cas : pour $t > 1$, on a d'après (2.18) :

$$\begin{aligned} k(t) &\leq -\frac{240p\pi}{(2+4t)^3} - \frac{360p\pi^2}{(2+4t)^4} \tan(h(t)) - \frac{900p^2\pi^2}{(2+4t)^4} \\ &\leq -\frac{240p\pi}{(2+4t)^3} + \frac{360p\pi^2}{(2+4t)^4} - \frac{900p^2\pi^2}{(2+4t)^4} \\ &= \frac{-240p\pi(2+4t) + 360p\pi^2 - 900p^2\pi^2}{(2+4t)^4} < 0. \end{aligned}$$

Pour (2.23), nous utilisons (2.13) et (2.14), nous avons pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} t\psi''(t) - \psi'(t) &= t + \frac{30p\pi t}{(2+4t)^2} (1 + \tan^2(h(t))) e^{5p \tan(h(t))} - t + e^{5p \tan(h(t))} \\ &= \left[\frac{30p\pi}{(2+4t)^2} (1 + \tan^2(h(t))) + 1 \right] e^{5p \tan(h(t))} > 0. \end{aligned}$$

Ce qui prouve (2.23).

Pour la dernière inégalité (2.24), en utilisant à nouveau (2.13) et (2.14), on trouve :

$$t\psi''(t) + \psi'(t) = 2t + \left[\frac{30p\pi}{(2+4t)^2} (1 + \tan^2(h(t))) - 1 \right] e^{5p \tan(h(t))}.$$

Pour la preuve, on distingue ici trois cas :

1^{ier} cas : si $t \in]0, \frac{1}{4}]$, on utilise (2.19) et (2.18) on trouve :

$$\begin{aligned} t\psi''(t) + \psi'(t) &> 2t + \left[\frac{30p\pi t}{(2+4t)^2} \left(1 + \frac{\tan(h(t))}{3\pi t} \right) - 1 \right] e^{5p \tan(h(t))} \\ &= 2t + \left[\frac{30p\pi t}{(2+4t)^2} + \frac{10p \tan(h(t))}{(2+4t)^2} - 1 \right] e^{5p \tan(h(t))} \\ &\geq 2t + \left[\frac{30p\pi t}{(2+4t)^2} \frac{10p}{(2+4t)^2} - 1 \right] e^{5p \tan(h(t))} > 0. \end{aligned}$$

2^{ème} cas : si $t \in]\frac{1}{4}, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} t\psi''(t) + \psi'(t) &\geq 2t + \left[\frac{30p\pi}{4(2+4t)^2} (1 + \tan^2(h(t))) - 1 \right] e^{5p \tan(h(t))} \\ &= 2t + \left[\frac{15p\pi}{2(2+4t)^2} (1 + \tan^2(h(t))) - 1 \right] e^{5p \tan(h(t))} \\ &\geq 2t + \left[\frac{15p\pi}{(2+4t)^2} - 1 \right] e^{5p \tan(h(t))} > 0. \end{aligned}$$

3^{ème} cas : si $t > 1$, on utilise $\psi'(1) = 0$ et $\psi''(t) > 1$, d'où $\psi'(t)$ est strictement croissante et elle est positive, alors

$$t\psi''(t) + \psi'(t) > 0, \forall t > 1.$$

■

Lemme 2.5. Pour $\psi(t)$, la fonction noyau définie dans (2.11), nous avons

$$\frac{1}{2}(t-1)^2 \leq \psi(t) \leq \frac{1}{2} [\psi'(t)]^2, \forall t > 0. \quad (2.25)$$

$$\psi(t) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{5\pi}{12p} \right) (t-1)^2. \quad (2.26)$$

$$\|v\| \leq \sqrt{n} + \sqrt{2\Psi(v)}, \forall v > 0. \quad (2.27)$$

Démonstration. Pour (2.25), en utilisant (2.19) dans (2.12), on obtient

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_1^t \int_1^\xi \psi''(\zeta) d\zeta d\xi \geq \int_1^t \int_1^\xi d\zeta d\xi \\ &= \int_1^t (\xi - 1) dx \\ &= [(\xi - 1)^2]_1^t \\ &= \frac{1}{2}(t-1)^2, \end{aligned}$$

d'où le côté gauche de l'inégalité (2.25). De même pour le côté droit de cette inégalité, on trouve

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \int_1^t \int_1^\xi \psi''(\zeta) d\zeta d\xi \leq \int_1^t \int_1^\xi \psi''(\zeta) \psi''(\xi) d\zeta d\xi \\
&= \int_1^t \psi''(\xi) [\psi'(\zeta)]_1^\xi d\xi \\
&= \int_1^t \psi''(\xi) \psi'(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{2} [\psi'(t)]^2.
\end{aligned}$$

Pour (2.26), on utilise le développement de Taylor en $t = 1$ avec $\psi(1) = \psi'(1) = 0$, $\psi''(1) = (1 + \frac{5\pi}{6}p)$ et $\psi'''(t) < 1$, on trouve

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \psi(1) + \psi'(1)(t-1) + \frac{\psi''(1)}{2}(t-1)^2 + \frac{\psi'''(\xi)}{6}(t-1)^3, \quad 1 \leq \xi \leq t. \\
&= \frac{\psi''(1)}{2}(t-1)^2 + \frac{\psi'''(t)}{6}(\xi-1)^3, \quad 1 \leq \xi \leq t. \\
&\leq \frac{(1 + \frac{5\pi}{6}p)(t-1)^2}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{5\pi}{12}p\right)(t-1)^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\psi(t) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{5\pi}{12}p\right)(t-1)^2, \quad \forall t > 0.$$

Pour la dernière inégalité en utilisant (2.8) et le coté gauche de l'inégalité (2.25), on trouve

$$\begin{aligned}
2\Psi(v) &= 2 \sum_{i=1}^n \psi(v_i) \\
&\geq \sum_{i=1}^n (v_i - e_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (v_i^2 + e_i^2 - 2v_i) \\
&= \|v\|^2 + n - 2 \sum_{i=1}^n v_i \\
&\geq (\|v\| - \sqrt{n})^2.
\end{aligned}$$

Alors

$$\sqrt{2\Psi(v)} \geq \|v\| - \sqrt{n}.$$

D'où

$$\|v\| \leq \sqrt{v} + \sqrt{2\Psi(v)}.$$

Ce qui complète la preuve. ■

Lemme 2.6. Soient $\sigma : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la fonction inverse de la fonction $\Psi(t)$ pour $t \geq 1$ et $\rho : [0, +\infty[\rightarrow]0, 1]$ la fonction inverse de la fonction $-\frac{1}{2}\Psi'(t)$ pour $t \in]0, 1]$, alors on a

$$1 + \sqrt{\frac{12s}{6 + 5\pi p}} \leq \sigma(s) \leq 1 + \sqrt{2s}, \forall s \geq 0, \quad (2.28)$$

$$\tan h(t) \leq \frac{\ln(2z + 1)}{5p}, \forall z \geq 0. \quad (2.29)$$

Démonstration. Pour (2.28), soit $s = \psi(t)$, $t \geq 1$, i.e., $\sigma(s) = t$, $t \geq 1$.

D'après (2.25), on a $\psi(t) \geq \frac{1}{2}(t - 1)^2$,

ce qui implique

$$2s \geq (t - 1)^2, \quad t \geq 1,$$

alors, pour tout $t \geq 1$, on a

$$t - 1 = |t - 1| \leq \sqrt{2s},$$

d'où, d'une part

$$\sigma(s) = t \leq 1 + \sqrt{2s}, \quad t \geq 1.$$

D'autre part et d'après (2.26), on a

$$s = \psi(t) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{5\pi}{12}p \right) (t - 1)^2, \quad t \geq 1,$$

ce qui donne

$$\frac{12s}{(6 + 5\pi p)} \leq (t - 1)^2,$$

ceci implique

$$t - 1 = |t - 1| \geq \sqrt{\frac{12s}{6 + 5\pi p}},$$

d'où

$$t = \sigma(s) \geq 1 + \sqrt{\frac{12s}{6 + 5\pi p}}.$$

Pour (2.29), soit $z = -\frac{1}{2}\psi'(t)$, $t \in]0, 1]$ qui est équivalent à

$$2z = -\psi'(t), \quad t \in]0, 1].$$

De (2.13), on trouve

$$2z = -t + e^{5p \tan(h(t))}.$$

Ce qui implique

$$e^{5p \tan(h(t))} = 2z + t \leq 2z + 1,$$

alors

$$\ln(e^{5p \tan h(t)}) \leq \ln(2z + 1),$$

d'où

$$\tan h(t) \leq \frac{1}{5p} \ln(2z + 1), z \geq 0.$$

Ce qui achève la preuve. ■

Lemme 2.7. *Supposons que $\beta \geq 1$ et la fonction noyau $\psi(t)$ définie dans (2.11).*

$$\psi(\beta t) \leq \psi(t) + \frac{1}{2} (\beta^2 - 1) t^2. \quad (2.30)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{t^2 - 1}{2} - \int_1^t e^{5p \tan(h(x))} dx \\ &= \frac{t^2 - 1}{2} + \omega(t). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \psi(\beta t) - \psi(t) &= \frac{(\beta t)^2 - 1}{2} - \int_1^{\beta t} e^{5p \tan(h(x))} dx - \frac{t^2 - 1}{2} + \int_1^t e^{5p \tan(h(x))} dx \\ &= \frac{(\beta t)^2 - t^2}{2} + \omega(\beta t) - \omega(t). \end{aligned}$$

Pour montrer (2.30), il suffit de montrer que $\omega(t)$ est une fonction décroissante.

On a

$$\omega'(t) = \left[- \int_1^t e^{5p \tan(h(x))} dx \right]' = -e^{5p \tan(h(t))} < 0.$$

Donc $\omega(t)$ est une fonction décroissante.

D'où le lemme. ■

Le théorème suivant, nous a permis d'obtenir l'estimation de $\psi(t)$ après une μ -mise à jour.

Théorème 2.8. *Soit $v > 0$ et $\beta \geq 1$, alors on a*

$$\Psi(\beta v) \leq \Psi(v) + \frac{\beta^2 - 1}{2} \left(2\Psi(v) + 2\sqrt{2n\Psi(v)} + n \right).$$

Démonstration. Par l'utilisation du Lemme 2.7 avec $\beta \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\Psi(\beta v) &\leq \Psi(v) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\beta^2 - 1) v_i^2 \\
&= \Psi(v) + \frac{1}{2} (\beta^2 - 1) \sum_{i=1}^n v_i^2 \\
&= \Psi(v) + \frac{1}{2} (\beta^2 - 1) \|v\|^2 \\
&\leq \Psi(v) + \frac{\beta^2 - 1}{2} \left(\sqrt{n} + \sqrt{2\Psi(v)} \right)^2 \\
&= \Psi(v) + \frac{\beta^2 - 1}{2} \left(n + 2\Psi(v) + 2\sqrt{n}\sqrt{2\Psi(v)} \right) \\
&= \Psi(v) + \frac{\beta^2 - 1}{2} \left(n + 2\Psi(v) + 2\sqrt{2n\Psi(v)} \right),
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité, est obtenue de la relation (2.27).

D'où le résultat. ■

Remarque 8. Pour $0 \leq \theta \leq 1$, et $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$ et d'après le théorème précédent, on trouve

$$\Psi\left(\frac{v}{\sqrt{1-\theta}}\right) = \Psi(v_+) \leq \Psi(v) + \frac{\theta}{2(1-\theta)} \left(n + 2\Psi(v) + 2\sqrt{2n\Psi(v)} \right),$$

et comme $\Psi(v) \leq \tau$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Psi(v_+) &\leq \tau + \frac{\theta}{2(1-\theta)} \left(n + 2\tau + 2\sqrt{2n\tau} \right) \\
&= \frac{\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n\theta}}{2(1-\theta)}.
\end{aligned}$$

Notons par

$$(\Psi)_0 := \frac{2\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n\theta}}{2(1-\theta)},$$

où, $(\Psi)_0$ devient une borne supérieure de $\Psi(v_+)$ durant le processus de l'algorithme.

2.4 Analyse de la complexité

2.4.1 Calcul du pas de déplacement

Dans cette partie, nous calculons le pas de déplacement par défaut α et nous prouvons le décroissement de la fonction barrière. Après une itération, nous avons

$$x_+ = x + \alpha\Delta x; \quad y_+ = y + \alpha\Delta y; \quad s_+ = s + \alpha\Delta s.$$

Utilisons (2.6), nous avons

$$x_+ = x \left(e + \alpha \frac{\Delta x}{x} \right) = x \left(e + \alpha \frac{d_x}{v} \right) = \frac{x}{v} (v + \alpha d_x),$$

$$s_+ = s \left(e + \alpha \frac{\Delta s}{s} \right) = s \left(e + \alpha \frac{d_s}{v} \right) = \frac{s}{v} (v + \alpha d_s),$$

d'où

$$v_+ = \sqrt{\frac{x_+ s_+}{\mu}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} v_+^2 &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{x}{v} (v + \alpha d_x) \frac{s}{v} (v + \alpha d_s) \right] \\ &= \frac{xs}{v^2 \mu} [(v + \alpha d_x)(v + \alpha d_s)] \\ &= \frac{v^2}{v^2} [(v + \alpha d_x)(v + \alpha d_s)] \\ &= (v + \alpha d_x)(v + \alpha d_s), \end{aligned}$$

d'où

$$v_+ = \sqrt{(v + \alpha d_x)(v + \alpha d_s)}.$$

Pour tout $\alpha > 0$, on définit la fonction f comme suit

$$f(\alpha) = \Psi(v_+) - \Psi(v). \quad (2.31)$$

Donc, $f(\alpha)$ est la différence de la proximité entre le nouvel itéré et le courant itéré. Pour μ fixé et du Lemme 2.2, nous avons

$$\Psi(v_+) = \Psi \left(\sqrt{(v + \alpha d_x)(v + \alpha d_s)} \right) \leq \frac{1}{2} (\Psi(v + \alpha d_x) + \Psi(v + \alpha d_s)).$$

Et par conséquent $f(\alpha) \leq f_1(\alpha)$, telle que

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2} (\Psi(v + \alpha d_x) + \Psi(v + \alpha d_s)) - \Psi(v). \quad (2.32)$$

Pour $\alpha = 0$, on a

$$\begin{aligned} f(0) &= \Psi(\sqrt{v^2}) - \Psi(v) = \Psi(v) - \Psi(v) = 0, \\ f_1(0) &= \frac{1}{2} (\Psi(v) + \Psi(v)) - \Psi(v) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$f(0) = f_1(0) = 0.$$

De (2.8), la relation (2.32) devient

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\psi(v_i + \alpha d_{x_i}) + \psi(v_i + \alpha d_{s_i}) + \psi(v_i)).$$

Prenant les deux premières dérivées de $f_1(\alpha)$ par rapport à α , nous obtenons

$$f_1'(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\psi'(v_i + \alpha d_{x_i}) d_{x_i} + \psi'(v_i + \alpha d_{s_i}) d_{s_i}).$$

Et

$$f_1''(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\psi''(v_i + \alpha d_{x_i}) d_{x_i}^2 + \psi''(v_i + \alpha d_{s_i}) d_{s_i}^2),$$

où d_{x_i} et d_{s_i} désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de vecteurs d_x et d_s , respectivement.

Pour $\alpha = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} f_1'(0) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\psi'(v_i) d_{x_i} + \psi'(v_i) d_{s_i}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \psi'(v_i) (d_{x_i} + d_{s_i}). \end{aligned}$$

En utilisant la dernière équation de (2.7) et la relation, (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} f_1'(0) &= \frac{1}{2} \nabla \Psi(v)^T (d_x + d_s) \\ &= \frac{1}{2} \langle \nabla \Psi(v), (d_x + d_s) \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \nabla \Psi(v)^T \nabla \Psi(v) \\ &= -2\delta(v)^2. \end{aligned}$$

Lemme 2.9. Soit $\delta(v)$ définie par (2.10), alors nous avons

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{1}{2} \Psi(v)}. \quad (2.33)$$

Démonstration. En utilisant (2.25), nous avons

$$\Psi(v) = \sum_{i=1}^n \psi(v_i) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\psi'(v_i))^2 = \frac{1}{2} \|\nabla \Psi(v)\|^2 = 2\delta(v)^2,$$

ce qui donne

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{1}{2} \Psi(v)}.$$

Pour $\Psi(v) \geq 1$, on trouve $\delta(v) \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$. ■

Remarque 9. *Tout au long de ce chapitre, nous supposons que $\tau > 1$. En utilisant le Lemme 2.9 et la supposition de $\Psi(v) \geq \tau$, nous avons de les Lemmes 4.1- 4.4 de [1] les Lemmes 2.10-2.13 suivants.*

Lemme 2.10. *Soient $f_1(\alpha)$ et $\delta(v)$ définies dans (2.32) et (2.10) respectivement. Alors*

$$f_1''(\alpha) \leq 2\delta^2\psi''(v_1 - 2\alpha\delta),$$

où $\delta(v) := \delta$ et $v_1 := \min_{1 < i \leq n} v_i$.

Démonstration. De la dernière égalité de (2.7) et de (2.10), on trouve $\|d_x + d_s\| = 2\delta$, d'où

$$\|d_x + d_s\|^2 = \|d_x\|^2 + \|d_s\|^2 + 2\|d_x d_s\| = (2\delta)^2.$$

Puisque d_x et d_s sont orthogonaux, nous avons $\|d_x\| \leq 2\delta$ et $\|d_s\| \leq 2\delta$, i.e.,

$$\|d_x\| = \left(\sum_{i=1}^n d_{x_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\delta.$$

$$\|d_s\| = \left(\sum_{i=1}^n d_{s_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\delta.$$

Donc

$$-2\delta \leq |d_{x_i}| \leq 2\delta \quad \text{et} \quad -2\delta \leq |d_{s_i}| \leq 2\delta, 1 \leq i \leq n.$$

Alors

$$-2\alpha\delta \leq \alpha|d_{x_i}| \leq 2\alpha\delta \quad \text{et} \quad -2\alpha\delta \leq \alpha|d_{s_i}| \leq 2\alpha\delta, 1 \leq i \leq n.$$

On obtient

$$v_i + \alpha d_{x_i} \geq v_1 + \alpha d_{x_i} \geq v_1 - 2\alpha\delta \quad \text{et} \quad v_i + \alpha d_{s_i} \geq v_1 - \alpha d_{s_i} \geq v_1 - 2\alpha\delta, 1 \leq i \leq n.$$

De (2.22), ψ'' est strictement décroissante, donc la substitution de ces inégalités à f_1'' , nous donne

$$\begin{aligned} f_1''(\alpha) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\psi''(v_i + \alpha d_{x_i}) d_{x_i}^2 + \psi''(v_i + \alpha d_{s_i}) d_{s_i}^2) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\psi''(v_1 - 2\alpha\delta) d_{x_i}^2 + \psi''(v_1 - 2\alpha\delta) d_{s_i}^2) \\ &= \frac{1}{2} \psi''(v_1 - 2\alpha\delta) \sum_{i=1}^n (d_{x_i}^2 + d_{s_i}^2) \\ &= \frac{1}{2} \psi''(v_1 - 2\alpha\delta) \|d_x + d_s\|^2 = 2\delta^2 \psi''(v_1 - 2\alpha\delta). \end{aligned}$$

■

Lemme 2.11. *Si le pas de déplacement α vérifie l'inégalité suivante*

$$\psi'(v_1) - \psi'(v_1 - 2\alpha\delta) \leq 2\delta, \quad (2.34)$$

alors

$$f'_1(\alpha) \leq 0.$$

Démonstration. On a

$$f'_1(\alpha) = f'_1(0) + \int_0^\alpha f''_1(\xi) d\xi,$$

comme $f'_1(0) = -2\delta^2$ et d'après le Lemme 2.10, nous avons

$$\begin{aligned} f'_1(\alpha) &= f'_1(0) + \int_0^\alpha f''_1(\xi) d\xi \\ &\leq -2\delta^2 + 2\delta^2 \int_0^\alpha \psi''(v_1 - 2\xi\delta) d\xi, \end{aligned}$$

on utilise le changement de variable suivant

$$x = v_1 - 2\xi\delta,$$

ce qui implique

$$dx = 2\delta d\xi,$$

pour $0 < \xi < \alpha$, on a $v_1 - 2\alpha\delta < x < v_1$,

d'après (2.34)

$$\begin{aligned} f'_1(\alpha) &\leq -2\delta^2 - \delta \int_{v_1-2\alpha}^{v_1} \psi''(x) dx \\ &\leq -2\delta^2 - \delta(\psi'(v_1) - \psi'(v_1 - 2\alpha\delta)) \\ &= -2\delta^2 + \delta(\psi'(v_1 - 2\alpha\delta) - \psi'(v_1)) \\ &\leq -2\delta^2 + 2\delta^2 = 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 2.12. *Soit $\rho : [0, +\infty[\rightarrow]0, 1]$ la fonction inverse de la fonction $[-\frac{1}{2}\psi'(t)]$, pour $t \in]0, 1]$, alors la valeur maximale du pas de déplacement α vérifiant l'inégalité (2.34) est donnée par*

$$\bar{\alpha} = \frac{\rho(\delta) - \rho(2\delta)}{2\delta}.$$

Lemme 2.13. *Soient ρ et $\bar{\alpha}$ le pas de déplacement définies dans le Lemme 2.12, alors*

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))}.$$

Démonstration. Par définition de ρ , on a

$$\delta = -\frac{1}{2}\psi'(\rho(\delta)),$$

qui est équivalent à

$$2\delta = -\psi'(\rho(\delta)).$$

On dérive par rapport à δ , on trouve

$$-\psi''(\rho(\delta))\rho'(\delta) = 2,$$

ce qui implique

$$\rho'(\delta) = -\frac{2}{\psi''(\rho(\delta))} < 0.$$

Donc ρ est une fonction strictement décroissante dans $[0, +\infty[$.

D'après le Lemme 2.12, on a

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \frac{1}{2\delta} \int_{2\delta}^{\delta} \rho'(\xi) d\xi \\ &= -\frac{1}{\delta} \int_{2\delta}^{\delta} \frac{d\xi}{\psi''(\rho(\delta))}.\end{aligned}$$

Comme ρ et ψ'' sont des fonctions décroissantes, alors

$$\psi''(\rho(\delta)) = \min_{\xi \in [\delta, 2\delta]} \psi''(\rho(\xi)).$$

On sait que $\psi''(\rho(\delta)) > 0$ et ψ'' est décroissante, donc le maximum est atteint lorsque $\rho(\xi)$ est minimale, i.e.,

$$\psi''(\rho(2\delta)) = \max_{\xi \in [\delta, 2\delta]} \psi''(\rho(\xi)),$$

d'où

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{\delta} \frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))} \int_{\delta}^{2\delta} d\xi = \frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))}.$$

■

Lemme 2.14. Soient ρ et $\bar{\alpha}$ définies dans le Lemme 2.13. Si $\Psi(v) \geq \tau \geq 1$, alors nous avons

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{1 + \frac{15p\pi}{2} \left(1 + \frac{(\ln(4\delta+1))^2}{25p^2}\right) (4\delta+1)}.$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 2.13, pour $\rho(2\delta) = t$, $t \in]0, 1]$, et d'après (2.29), pour $z = 2\delta$, nous avons

$$\tan(h(\rho(2\delta))) \leq \frac{1}{5p} \ln(4\delta+1), \quad \tan^2 h(\rho(2\delta)) \leq \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta+1)\right)^2,$$

En remplaçant par ces inégalités, on trouve

$$\begin{aligned}\psi''(t) &\leq 1 + \frac{30p\pi}{(2+4t)^2} \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta+1) \right)^2 \right) e^{5p \frac{\ln(4\delta+1)}{5p}} \\ &= 1 + \frac{30p\pi}{(2+4t)^2} \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta+1) \right)^2 \right) (4\delta+1).\end{aligned}$$

Pour $0 < t \leq 1$, on a

$$4 < (2+4t)^2 \leq 36$$

ce qui implique

$$\frac{1}{36} < \frac{1}{(2+4t)^2} < \frac{1}{4}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\psi''(t) &\leq 1 + \frac{30p\pi}{4} \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta+1) \right)^2 \right) (4\delta+1) \\ &= 1 + \frac{15p\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta+1) \right)^2 \right) (4\delta+1)\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{1 + \frac{15p\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta+1) \right)^2 \right) (4\delta+1)}.$$

■

Notons par

$$\tilde{\alpha} := \frac{1}{1 + \frac{15p\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta+1) \right)^2 \right) (4\delta+1)}. \quad (2.35)$$

Donc, $\tilde{\alpha}$ est la borne inférieure du pas de déplacement par défaut et on a

$$\tilde{\alpha} \leq \bar{\alpha}.$$

Lemme 2.15. *On suppose que g est une fonction convexe et deux fois différentiable avec*

$$g(0) = 0, \quad g'(0) < 0,$$

et g atteint son minimum global à $t^ > 0$ et g'' est croissante pour tout t , alors pour tout $t \in [0, t^*]$, on a*

$$g(t) \leq \frac{tg'(0)}{2}.$$

Lemme 2.16. [1] *Si la valeur du pas de déplacement α satisfait $\alpha \leq \bar{\alpha}$, alors*

$$f(\alpha) \leq -\alpha\delta^2.$$

Démonstration. Soit g une fonction définie par

$$g(\alpha) = -2\alpha\delta^2 + \alpha\delta\psi'(v_1) - \frac{1}{2}\psi(v_1) + \frac{1}{2}\psi(v_1 - 2\alpha\delta),$$

alors

$$g(0) = 0 = f_1(0).$$

Par dérivation par rapport à α , on trouve

$$g'(\alpha) = -2\delta^2 + \delta\psi'(v_1) - \delta\psi'(v_1 - 2\alpha\delta).$$

D'après (2.34)

$$g'(\alpha) \leq -2\delta^2 + 2\delta^2 = 0.$$

Pour $\alpha = 0$, on trouve

$$g'(0) = -2\delta^2 = f_1'(0).$$

La dérivée seconde de $g(\alpha)$, est donnée par

$$g''(\alpha) = 2\delta^2\psi''(v_1 - 2\alpha\delta) \geq f_1''(\alpha)$$

D'après le Lemme 2.10.

Par conséquent

$$\begin{cases} f_1'(\alpha) \leq g'(\alpha) \\ f_1(\alpha) \leq g(\alpha). \end{cases}$$

Alors, si $\alpha \leq \bar{\alpha}$, on a

$$g'(\alpha) = g'(0) + \int_0^\alpha g''(\xi)d\xi,$$

on utilise à nouveau le changement de variable $x = v_1 - 2\alpha\delta$, on obtient

$$g'(\alpha) = -2\delta^2 + \delta(-\psi'(v_1 - 2\alpha\delta) + \psi'(v_1)).$$

De (2.31) et (2.32), on a g est une fonction convexe et deux fois différentiable, alors d'après le Lemme 2.15, on a

$$\begin{aligned} f(\alpha) \leq f_1(\alpha) \leq g(\alpha) &\leq \frac{\alpha g'(0)}{2} \\ &= \frac{\alpha f'(0)}{2} \\ &= \frac{-2\alpha\delta^2}{2} \\ &= -\alpha\delta^2. \end{aligned}$$

D'où

$$f(\alpha) \leq -\alpha\delta^2.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Lemme 2.17. *Soient $\Psi(v) \geq 1$ et $\tilde{\alpha}$ défini dans (2.35), alors on a*

$$f(\tilde{\alpha}) \leq \frac{-\Psi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}p \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(\sqrt{8\Psi_0} + 1) \right)^2 \right) \right)}. \quad (2.36)$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 2.16 avec $\alpha = \tilde{\alpha}$, nous avons

$$\begin{aligned} f(\tilde{\alpha}) &\leq -\tilde{\alpha}\delta^2 \\ &= \frac{-\delta^2}{1 + \frac{15p\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta + 1) \right)^2 \right) (4\delta + 1)} \\ &\leq \frac{-\delta^2}{2\delta + 45p\pi\delta \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta + 1) \right)^2 \right)} \\ &= \frac{-\delta^2}{\delta p \left(\frac{2}{p} + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta + 1) \right)^2 \right) \right)} \\ &\leq \frac{-\delta}{p \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta + 1) \right)^2 \right) \right)}, \end{aligned}$$

d'après (2.33), nous avons

$$\begin{aligned} f(\tilde{\alpha}) &\leq \frac{-\Psi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}p \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(2\sqrt{2\Psi} + 1) \right)^2 \right) \right)} \\ &= \frac{-\Psi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}p \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(\sqrt{8\Psi} + 1) \right)^2 \right) \right)} \\ &\leq \frac{-\Psi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}p \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(\sqrt{8\Psi_0} + 1) \right)^2 \right) \right)}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue de la supposition $\Psi_0 \geq \Psi \geq \tau \geq 1$.

Ce qu'il fallait démontrer. ■

2.5 Nombre total d'itérations

Nous avons besoin de compter combien d'itération interne nécessaire pour retourner à la situation $\Psi(v) \leq \tau$ après une μ -mise à jour. On définit la valeur de $\Psi(v)$ après la première mise à jour de μ par $(\Psi)_0$ et on note par $(\Psi)_k, k = \overline{1, K}$, la suite des valeurs dans la même itération externe où K désigne le nombre total d'itération interne dans une itération externe. Par la diminution de $f(\tilde{\alpha})$ pour $k = \overline{0, K-1}$, on a

$$(\Psi_{k+1}(v)) \leq (\Psi_k(v)) - \frac{(\Psi_k(v))^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2p} \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(\sqrt{8\Psi_0} + 1) \right)^2 \right) \right)}.$$

Lemme 2.18. Soit t_0, t_1, \dots, t_k , une suite des nombres positives, avec

$$t_{k+1} \leq t_k - \beta t_k^{1-\gamma}, k = \overline{0, K-1}, \beta > 0, 0 \leq \gamma \leq 1,$$

alors

$$K \leq \frac{t_0^\gamma}{\beta\gamma}.$$

Si on prend $t_k = (\Psi_k(v))_k, \gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{2p} \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(\sqrt{8\Psi_0} + 1) \right)^2 \right) \right)}$. Le nombre total d'itérations internes est borné par

$$K \leq 2 \left(\sqrt{2p} \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(\sqrt{8\Psi_0} + 1) \right)^2 \right) \right) \right) \Psi_0^{\frac{1}{2}}$$

En multipliant le nombre d'itérations externes par le nombre d'itérations internes, nous obtenons une borne supérieure pour le nombre total d'itérations.

Donc, le nombre total d'itérations pour avoir une solution approchée avec $n\mu < \epsilon$ est majoré par

$$2 \left(\sqrt{2p} \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(2\sqrt{2\Psi_0} + 1) \right)^2 \right) \right) \right) \Psi_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln n}{\theta}. \quad (2.37)$$

• Pour les méthodes à grand-pas avec $\tau = O(n)$ et $\theta = \Theta(1)$, on a $\Psi_0 = O(n)$, et l'algorithme trouve la solution optimale après

$$O \left(p\sqrt{n} \left(\frac{\ln n}{5p} \right)^2 \ln \frac{n}{\epsilon} \right) \text{ itérations.}$$

• Pour les méthodes à petit-pas avec $\tau = O(1)$ et $\theta = \Theta(\frac{1}{\sqrt{n}})$, on a $\Psi_0 = O(1)$, et l'algorithme trouve la solution optimale après

$$O \left(\sqrt{n} \ln \frac{n}{\epsilon} \right) \text{ itérations.}$$

Remarque 10. Pour $p = O(\ln n)$, l'algorithme trouve la solution optimale après

$$O \left(\sqrt{n} \ln n \ln \frac{n}{\epsilon} \right) \text{ itérations.}$$

Chapitre 3

Extension de la méthode de trajectoire centrale en programmation semi-définie

Le but de ce chapitre est de présenter la fonction noyau proposée par S. Fathi-Hafshejani, M. Reza peyghami [10] et obtenir un nouveau résultat de complexité par l'utilisation de la fonction de proximité définie par Y. Q. Bai et autre [1] pour le problème de programmation semi-définie (*SDP*).

3.1 Méthode de trajectoire centrale pour la programmation semi-définie

Rappelons que le problème primal de programmation semi-définie sous forme standard est :

$$(SDP) \begin{cases} \min tr(CX) \\ s.c \ tr(A_i X) = b_i, i = 1, \dots, m, \\ X \succeq 0. \end{cases}$$

Et son dual est

$$(SDD) \begin{cases} \max b^t y \\ s.c \ \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C, \\ S \succeq 0. \end{cases}$$

Où $A_i, i = 1, \dots, m$ et C sont des matrices symétriques de S^n, b et $y \in \mathbb{R}^m$.

Tout au long de ce chapitre, nous formulons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : Les matrices $A_i, i = 1, \dots, m$, sont linéairement indépendantes i.e.,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i A_i = 0 \implies \lambda_i = 0, i = 1, \dots, m.$$

Hypothèse 2 : On suppose que les deux problèmes (SDP) et (SDD) vérifient la condition de point intérieur (CPI)[16], c-à-d : il existe une solution initiale (X^0, y^0, S^0) tel que :

$$\begin{cases} tr(A_i X^0) = b_i, i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m y_i^0 A_i + S^0 = C, S^0 \succ 0, X^0 \succ 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Supposons que les conditions de CPI sont satisfaites, alors on peut vérifier facilement que la recherche d'une solution optimale (X^*, y^*, S^*) de (SDP) et (SDD) est équivalente à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} tr(A_i X) = b_i, i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C, \\ XS = 0, \quad X, S \succeq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

L'idée de base des méthodes de points intérieurs ($MPIs$) de type primales-duales consiste à remplacer la troisième équation du système (3.2) (condition de complémentarité) par l'équation paramétrisée $XS = \mu I$ avec $\mu > 0$; où I est la matrice d'identité d'ordre n . Donc le système (3.2) devient :

$$\begin{cases} tr(A_i X) = b_i, i = 1, \dots, m, X \succ 0 \\ \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C, S \succ 0 \\ XS = \mu I, \quad \mu > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Si les problèmes (SDP) et (SDD) satisfaits les conditions de points intérieurs ($CPIs$), alors pour chaque $\mu > 0$, le système (3.3) admet une solution unique $(X(\mu), y(\mu), S(\mu))$, qu'on l'appelle μ -centre de (SDP) et (SDD). L'ensemble des μ -centres $\Lambda = \{X(\mu), y(\mu), S(\mu), \mu > 0\}$, construit la trajectoire centrale de (SDP) et (SDD). En générale, les méthodes de points intérieurs ($MPIs$) pour (SDP) se composent de deux stratégies : La première stratégie consiste à déterminer une solution paramétrisée strictement réalisable et vérifie certaines conditions (condition de proximité) et la seconde consiste à diminuer le paramètre μ à $\mu := (1 - \theta)\mu$; $0 < \theta < 1$, pour déterminer la qualité de la solution.

3.1.1 Calcul de direction

La méthode de Newton est une procédure bien connue pour résoudre un système d'équations non linéaire de problème de (*SDP*), la plupart des (*MPIs*) emploient des différentes directions de descentes avec des stratégies convenables pour suivre la trajectoire centrale (chemin central). Sans perte de généralité de (*MPIs*), on suppose que $(X(\mu), y(\mu), S(\mu))$ est une solution pour $\mu > 0$. Par exemple, en raison des hypothèses 1 et 2 citées précédemment, on peut supposer que pour $\mu^0 = 1$, avec X^0 et S^0 .

Nous diminuons ensuite μ à $\mu := (1 - \theta)\mu$; $0 < \theta < 1$. En remplaçant X, y, S par

$$X_+ := X + \Delta X, y_+ := y + \Delta y, S_+ := S + \Delta S, \quad (3.4)$$

Donc en appliquant la méthode de Newton sur le système (3.3), on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} tr(A_i \Delta X) = 0, i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m \Delta y_i A_i + \Delta S = 0, \\ X \Delta S + \Delta X S = \mu I - X S. \end{cases}$$

L'observation décisive est que le système de Newton précédent peut avoir une solution non symétrique ΔX . Pour surmonter cette difficulté . Y. Zhang [20] a proposé une symétrisation généralisée de la forme

$$H_p(XS) = \frac{1}{2}(PXS P^{-1} + P^{-t}SXP^t),$$

où P est une matrice inversible. Y. Zhang [20] a montré aussi que l'équation $XS = \mu I$ est équivalente à l'équation $H_p(XS) = \mu I$. En appliquant la méthode de Newton sur le nouveau système, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} tr(A_i \Delta X) = 0, i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m \Delta y_i A_i + \Delta S = 0, \\ \frac{1}{2}(P(X \Delta S + \Delta X S)P^{-1} + P^{-t}(S \Delta X + \Delta S X)P^t) = \mu I - \frac{1}{2}(PXS P^{-1} + P^{-t}SXP^t). \end{cases}$$

M. J. Todd [18] a présenté plusieurs directions pour (*SDP*). Parmi eux, on considère la direction de Nesterov- Todd (NT)[19].

Laissez-nous définir la matrice P par :

$$P = [X^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}SX^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}} = [S^{-\frac{1}{2}}(S^{\frac{1}{2}}XS^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}S^{-\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}} \text{ et } D = P^{-1} \quad (3.5)$$

La matrice D peut être utilisée pour écrire X et S par la même matrice V comme suit :

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu}}D^{-1}XD^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}DSD = \frac{1}{\sqrt{\mu}}(D^{-1}XSD)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

Èvidemment, les matrices D et V sont symétriques et définies positives. Aussi, si on définit

$$\bar{A}_i := \frac{1}{\sqrt{\mu}} D A_i D, i = 1, \dots, m, \quad D_X := \frac{1}{\sqrt{\mu}} D^{-1} \Delta X D^{-1}, \quad D_S := \frac{1}{\sqrt{\mu}} D \Delta S D, \quad (3.7)$$

alors la direction de descente de (NT) peut être écrite comme solution du système suivant :

$$\begin{cases} tr(\bar{A}_i D_X) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m \Delta y_i \bar{A}_i + D_S = 0, \\ D_X + D_S = V^{-1} - V. \end{cases} \quad (3.8)$$

On peut dire que $Tr(D_X D_S) = 0$, qui provient des deux premières équations de (3.8) ou à partir de l'orthogonalité de ΔX et ΔS .

3.2 Fonction noyau et leurs propriétés

Dans cette sous section on s'intéresse à l'étude de la fonction noyau définie dans (2.11), ainsi ses propriétés en programmation semi-définie (SDP).

Rappelons que cette fonction est définie comme suit

$$\psi(t) = \frac{t^2 - 1}{2} - \int_1^t e^{5p \tan(h(x))} dx, \quad h(t) = \frac{1 - t}{2 + 4t} \pi, \quad p \geq 1. \quad (3.9)$$

Alors, on a les dérivées successives de la fonction ψ sont :

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= t - e^{5p \tan(h(t))}, \quad \psi''(t) = 1 + \frac{30p\pi}{(2 + 4t)^2} (1 + \tan^2(h(t))) e^{5p \tan(h(t))}, \\ \psi'''(t) &= (1 + \tan^2(h(t))) e^{5p \tan(h(t))} k(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

et

$$k(t) = -\frac{240p\pi}{(2 + 4t)^3} - \frac{360p\pi^2}{(2 + 4t)^4} \tan(h(t)) - \frac{900p^2\pi^2}{(2 + 4t)^4} (1 + \tan^2(h(t))). \quad (3.11)$$

Il est clair que $\psi(t)$ est une fonction noyau.

La fonction de proximité (ou de mesure) pour (SDP) est donnée par :

$$\Phi(X, S, \mu) := \Psi(V) := tr(\psi(V)) = \sum_{i=1}^n \psi(\lambda_i(V)), \quad (3.12)$$

avec $\psi(V)$ est la fonction de matrice définie par

$$\psi(V) = Q_V^t \text{diag}(\psi(\lambda_1(V)), \psi(\lambda_2(V)), \dots, \psi(\lambda_n(V))) Q_V, \quad (3.13)$$

où V est une matrice inversible de valeurs propres λ_i , $i = 1, \dots, n$ positives et Q_V est la matrice obtenue par la décomposition spectrale.

Notons que $\Psi(I) = 0$, qui est $XS = \mu I$, et autrement $\Psi(V) > 0$, dû aux propriétés de la nouvelle fonction noyau. Suivant [10], en remplaçant la fonction noyau classique définie dans (2.9) par notre nouvelle fonction noyau ψ , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \text{tr}(\bar{A}_i D_X) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m \Delta y_i \bar{A}_i + D_S = 0, \\ D_X + D_S = -\psi'(V). \end{cases} \quad (3.14)$$

Algorithme Primal-Dual de MPI pour SDP

Début algorithme

$\tau > 0$, Un paramètre de proximité ;

$\epsilon > 0$, un paramètre de précision ;

$\theta \in (0, 1)$, un paramètre barrière ;

$(X^0, S^0) \in \text{CPI}$ et $\mu^0 = 1$ telle que $\Phi(X^0, S^0, \mu^0) \leq \tau$;

begin

$X := X^0; S := S^0; \mu := \mu^0$;

Tant que $n\mu \geq \epsilon$ **faire**

begin

$\mu := (1 - \theta)\mu$;

Tant que $\Phi(X, S, \mu) \geq \tau$ **faire**

begin

Résoudre le système (3.14) pour trouver $(\Delta X, \Delta y, \Delta S)$.

Déterminer le pas de déplacement α ;

$X := X + \alpha \Delta X; y := y + \alpha \Delta y; S := S + \alpha \Delta S; V := \frac{V}{\sqrt{1-\theta}}$;

Fin Tant que

Fin Tant que

Fin algorithme.

Le lemme suivant sert à prouver que la nouvelle fonction noyau (3.9) est éligible.

Lemme 3.1. *Soit $\psi(t)$ la fonction noyau définie dans (3.9) et $t > 0$, alors on a :*

$$\psi''(t) > 1, \quad (3.15)$$

$$t\psi''(t) + \psi'(t) > 0, \quad (3.16)$$

$$t\psi''(t) - \psi'(t) > 0, \quad (3.17)$$

$$\psi'''(t) < 0. \quad (3.18)$$

Il s'ensuit que $\psi(1) = \psi'(1) = 0$ et $\psi''(1) \geq 0$, montre que ψ est définie en fonction de $\psi''(t)$ par

$$\int_1^t \int_1^\xi \psi''(\tau) d\tau d\xi. \quad (3.19)$$

La deuxième propriété (3.16) est liée à la définition 2.1 et le Lemme 2.4 du chapitre 2. Cette propriété est équivalente à la convexité de la fonction composée $z \mapsto \psi(e^z)$ et cela vaut si et seulement si $\psi(\sqrt{t_1 t_2}) \leq \frac{(\psi(t_1) + \psi(t_2))}{2}$, pour tous $t_1, t_2 > 0$. Suivant [3], nous disons donc que ψ est exponentiellement convexe, ou e -convexe, pour $t > 0$.

Lemme 3.2. *Soit ψ définie dans (3.9), alors on a*

$$\psi(t) < \frac{1}{2}\psi''(1)(t-1)^2, \text{ si } t > 1.$$

Démonstration. Par l'utilisation du théorème de Taylor avec $\psi(1) = \psi'(1) = 0$, on obtient

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\psi''(1)(t-1)^2 + \frac{1}{6}\psi'''(\xi)(\xi-1)^3,$$

où $1 < \xi < t$ si $t > 1$. Ce qui complète la preuve puisque $\psi'''(t) < 0$. ■

Lemme 3.3. *Soit ψ définie dans (3.9), alors on a*

$$t\psi'(t) \geq \psi(t), \text{ si } t \geq 1.$$

Démonstration. Posons $g = t\psi'(t) - \psi(t)$ on a $g(1) = 0$ et $g'(t) = t\psi''(t) \geq 0$. Donc $g(t) \geq 0$, ce qui achève la preuve. ■

3.2.1 Propriétés de $\Psi(V)$ et $\sigma(V)$

Dans cette section, nous étendons le théorème 4.9 dans [1] au cône des matrices définie-positives. Le théorème donne une borne inférieure de la mesure de proximité $\sigma(V)$ basée sur la norme de Frobenius, définie par

$$\sigma(V) = \frac{1}{2}\|\psi'(V)\| = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^n \psi'(\lambda_i(V))^2} = \frac{1}{2}\|D_X + D_S\|, \quad (3.20)$$

en fonction de $\Psi(V)$. Tant que $\Psi(V)$ est strictement convexe et atteint sa valeur minimale zéro à $V = I$, on a

$$\Psi(V) = 0 \Leftrightarrow \sigma(V) = 0 \Leftrightarrow V = I.$$

Théorème 3.4. Soit $\varrho : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la fonction inverse de $\psi(t)$ pour $t \geq 1$. Alors

$$\sigma(V) \geq \frac{1}{2} \psi'(\varrho(\Psi(V))).$$

Démonstration. Si $V = I$ alors $\sigma(V) = \Psi(V) = 0$. Tant que $\varrho(0) = 1$ et $\psi'(1) = 0$, l'inégalité devient une égalité si $V = I$. Par ailleurs, par les définition de $\sigma(V)$ dans (3.20) et $\Psi(V)$ dans (3.12), on a $\sigma(V) > 0$ et $\Psi(V) > 0$.

Soit $v_i := \lambda_i(V)$, $1 \leq i \leq n$. Alors $v > 0$ et on a

$$\sigma(V) = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \psi'(\lambda_i(V))^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \psi'(v_i)^2}.$$

Tant que $\psi(t)$ satisfait (3.18), on peut appliquer le théorème 4.9 dans [1] au vecteur v .

Cela donne

$$\sigma(V) \geq \frac{1}{2} \psi' \left(\varrho \left(\sum_{i=1}^n \psi(v_i) \right) \right).$$

Puisque

$$\sum_{i=1}^n \psi(v_i) = \sum_{i=1}^n \psi(\lambda_i(V)) = \Psi(V),$$

la preuve du théorème est complétée. ■

Lemme 3.5. Si $\Psi(V) \geq 1$, alors

$$\sigma \geq \frac{1}{6} \Psi(V)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

Démonstration. Pour prouver ce lemme, on utilise le théorème 3.4 et le lemme 3.3.

Posons $s = \Psi(V)$, on obtient à partir du théorème 3.4

$$\sigma(V) \geq \frac{1}{2} \psi'(\varrho(s)).$$

Posons $t = \varrho(s)$, donc on a

$$\psi(t) = \frac{t^2 - 1}{2} - \int_1^t e^{5p \tan(h(x))} dx = s, \quad h(t) = \frac{1-t}{2+4t} \pi, \quad p \geq 1.$$

Ici on cherche alors une borne supérieure à t , puisque cela suffit à notre étude. On a de (3.19) et $\psi''(t) \geq 1$,

$$s = \psi(t) = \int_1^t \int_1^\xi \psi''(\zeta) d\zeta d\xi \geq \int_1^t \int_1^\xi d\zeta d\xi = \frac{1}{2} (t-1)^2,$$

ce qui implique

$$t = \varrho(s) \leq 1 + \sqrt{2s}.$$

on suppose que $s \geq 1$, on obtient $t = \varrho(s) \leq \sqrt{s} + \sqrt{2s} \leq 3\sqrt{s}$.

Maintenant, on applique le lemme 3.3, on peut écrire

$$\sigma(V) \geq \frac{1}{2}\psi'(\varrho(s)) \geq \frac{\psi(\varrho(s))}{2\varrho(s)} = \frac{s}{2\varrho(s)} \geq \frac{s}{6\sqrt{s}} = \frac{1}{6}s^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\Psi(V)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Notons qu'à partir de $\tau \geq 1$, nous avons $\Psi(V) \geq 1$ au début de chaque itération interne. La substitution en (3.21) donne

$$\sigma(V) \geq \frac{1}{6}. \tag{3.22}$$

3.3 Analyse de l'algorithme

Dans l'analyse de l'algorithme, le concept de convexité exponentielle est encore un ingrédient crucial. Dans cette section, nous dérivons une valeur par défaut pour le pas du déplacement et nous obtenons une borne supérieure. Pour le décroissement de $\Psi(V)$ pendant une itération (étape) de Newton.

3.3.1 Trois lemmes techniques

Le lemme suivant est cité dans [[11], Lemme 3.3.14(c)].

Lemme 3.6. *Soient $A, B \in S^n$ deux matrices non singulières et $f(t)$ une fonction réelle donnée telle que $f(e^t)$ est une fonction convexe. Alors on a*

$$\sum_{i=1}^n f(\eta_i(AB)) \leq \sum_{i=1}^n f(\eta_i(A)\eta_i(B)),$$

où, $\eta_i(A)$, et $\eta_i(B)$, $i = 1, 2, \dots, n$ désignent les valeurs singulières de A et B respectivement.

Lemme 3.7. *Soient $A, A + B \in S_+^n$, alors on a*

$$\lambda_i(A + B) \geq \lambda_1 - |\lambda_n(B)|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Démonstration. Il est évident que $\lambda_i(A + B) \geq \lambda_1(A + B)$.

Par le théorème de Rayleigh-Ritz (voir [11]), il existe un vecteur non nul $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tel que

$$\lambda_1(A + B) = \frac{x_0^T(A + B)x_0}{x_0^T x_0} = \frac{x_0^T(A)x_0}{x_0^T x_0} + \frac{x_0^T(B)x_0}{x_0^T x_0}.$$

Donc, on peut écrire

$$\begin{aligned}\lambda_1(A+B) &\geq \frac{x_0^T A x_0}{x_0^T x_0} - \left| \frac{x_0^T B x_0}{x_0^T x_0} \right| \\ &\geq \min_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} - \max_{x \neq 0} \left| \frac{x^T B x}{x^T x} \right| = \lambda_1 - |\lambda_n(B)|.\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve du lemme. ■

Une conséquence de la condition (3.16) est que toute fonction noyau éligible exponentiellement convexe (voir Lemme 2.2)

$$\Psi(\sqrt{t_1 t_2}) \leq \frac{1}{2} [\Psi(t_1) + \Psi(t_2)], \quad \forall t_1, t_2 > 0. \quad (3.23)$$

Ceci implique le lemme suivant qui est crucial dans notre étude.

Lemme 3.8. *Soit X_1 et X_2 deux matrices symétriques définies positives, alors*

$$\Psi\left(\left(X_1^{\frac{1}{2}} X_2 X_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{1}{2} (\Psi(X_1) + \Psi(X_2)), \quad \forall X_1, X_2 > 0.$$

Démonstration. Pour toute matrice non singulière $U \in S^n$, on a

$$\eta_i(U) = (\lambda_i(U^T U))^{\frac{1}{2}} = (\lambda_i(U U^T))^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Prenons $U = X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{\frac{1}{2}}$, on peut écrire

$$\eta_i\left(X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\lambda_i\left(X_1^{\frac{1}{2}} X_2 X_1^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda_i\left(\left(X_2^{\frac{1}{2}} X_1 X_2^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Comme X_1 et X_2 sont symétriques définies positives, en utilisant le lemme 3.6, on a

$$\Psi\left(\left(X_1^{\frac{1}{2}} X_2 X_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \sum_{i=1}^n \psi\left(\eta_i\left(X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{\frac{1}{2}}\right)\right) \leq \sum_{i=1}^n \psi\left(\eta_i\left(X_1^{\frac{1}{2}}\right) \eta_i\left(X_2^{\frac{1}{2}}\right)\right).$$

Tant que $\eta_1(X_1^{\frac{1}{2}}), \eta_2(X_2^{\frac{1}{2}}) > 0$, on peut utiliser que $\psi(t)$ satisfait (3.16) pour $t > 0$. En utilisant (3.23), donc on obtient

$$\begin{aligned}\Psi\left(\left(X_1^{\frac{1}{2}} X_2 X_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\psi\left(\eta_i^2\left(X_1^{\frac{1}{2}}\right)\right) + \psi\left(\eta_i\left(X_2^{\frac{1}{2}}\right)\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\psi(\lambda_i(X_1)) + \psi(\lambda_i(X_2))) = \frac{1}{2} (\Psi(X_1) + \Psi(X_2)).\end{aligned}$$

Ce que complète la preuve. ■

3.3.2 Décroissement de la fonction de proximité pendant une itération

Dans cette sous-section, nous allons calculer une valeur par défaut du pas de déplacement α afin de donner un nouveau triplet (X_+, y_+, S_+) qui est définie dans (3.4). Donc après une étape (itération) de Newton et par l'utilisation de (3.7), on a

$$\begin{aligned} X_+ &= X + \alpha \Delta X = X + \alpha \sqrt{\mu} D D_X D = \sqrt{\mu} D (V + \alpha D_X) D, \\ y_+ &= y + \alpha \Delta y, \\ S_+ &= S + \alpha \Delta S = S + \alpha \sqrt{\mu} D^{-1} D_S D^{-1} = \sqrt{\mu} D^{-1} (V + \alpha D_S) D^{-1}. \end{aligned}$$

Notons par V_+ la matrice V après une étape, on a

$$V_+ = \frac{1}{\sqrt{\mu}} (D^{-1} X_+ S_+ D)^{\frac{1}{2}}.$$

On voit que V_+^2 est similaire à la matrice $\frac{1}{\mu} X_+^{\frac{1}{2}} S_+ X_+^{\frac{1}{2}}$ et donc aussi à

$$(V + \alpha D_X)^{\frac{1}{2}} (V + \alpha D_S) (V + \alpha D_X)^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci implique que les valeurs propres de V_+ sont les mêmes que ceux de la matrice

$$\tilde{V}_+ := \left((V + \alpha D_X)^{\frac{1}{2}} (V + \alpha D_S) (V + \alpha D_X)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La définition de $\Psi(V)$ implique que ses valeurs ne dépend que des valeurs propres de V . Nous avons donc

$$\Psi(\tilde{V}_+) = \Psi(V_+).$$

Notre objectif est de trouver α tel que

$$f(\alpha) := \Psi(V_+) - \Psi(V) = \Psi(\tilde{V}_+) - \Psi(V), \quad (3.24)$$

est décroissante de telle sorte que possible. Due au lemme 3.8, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \Psi(\tilde{V}_+) &= \Psi \left(\left((V + \alpha D_X)^{\frac{1}{2}} (V + \alpha D_S) (V + \alpha D_X)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} [\Psi(V + \alpha D_X) + \Psi(V + \alpha D_S)]. \end{aligned}$$

De la relation (3.24), on sait que $f(\alpha) \leq f_1(\alpha)$, où

$$f_1(\alpha) := \frac{1}{2} [\Psi(V + \alpha D_X) + \Psi(V + \alpha D_S)] - \Psi(V).$$

Notons $f_1(\alpha)$ est convexe en α , puisque Ψ est convexe. Évidemment, $f(0) = f_1(0) = 0$. En prenant la dérivée par rapport à α , on obtient

$$f_1'(\alpha) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\psi'(V + \alpha D_X) D_X + \psi'(V + \alpha D_S) D_S).$$

En utilisant la dernière égalité dans (3.14), et la relation (3.20), ceci donne

$$f_1'(0) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\psi'(V)(D_X + D_S)) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\psi'(V)^2) = -2\delta(V)^2.$$

Nous dérivons une fois encore, nous obtenons

$$f_1''(0) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\psi''(V + \alpha D_X) D_X^2 + \psi''(V + \alpha D_S) D_S^2). \quad (3.25)$$

Dans la suite, on utilise les notations suivantes

$$\lambda_1 := \min(\lambda_i(V)), \quad \sigma := \sigma(V).$$

Lemme 3.9. *On a*

$$f_1''(\alpha) \leq 2\sigma^2 \psi''(\lambda_1 - 2\alpha\sigma).$$

Démonstration. La dernière égalité de (3.14) et la relation (3.20) implique que $\|D_X + D_S\|^2 = \|D_X\|^2 + \|D_S\|^2 = 4\sigma^2$. Donc, on a $|\lambda_n(D_X)| \leq 2\sigma$ et $|\lambda_n(D_S)| \leq 2\sigma$. En utilisant le lemme 3.7 et $V + \alpha D_X \geq 0$, par conséquent, pour chaque i , on a

$$\lambda_i(V + \alpha D_X) \geq \lambda_1 - \alpha |\lambda_n(D_X)| \geq \lambda_1 - 2\alpha\sigma,$$

$$\lambda_i(V + \alpha D_S) \geq \lambda_1 - \alpha |\lambda_n(D_S)| \geq \lambda_1 - 2\alpha\sigma.$$

De (3.18), ψ'' est strictement décroissante. Donc les inégalités ci-dessus impliquent que

$$\psi''(\lambda_i(V + \alpha D_X)) \leq \psi''(\lambda_1 - 2\alpha\sigma), \quad \psi''(\lambda_i(V + \alpha D_S)) \leq \psi''(\lambda_1 - 2\alpha\sigma).$$

La substitution dans (3.25) donne

$$f_1''(\alpha) \leq \frac{1}{2} \psi''(\lambda_1 - 2\alpha\sigma) \text{Tr}(D_X^2 + D_S^2) = \frac{1}{2} \psi''(\lambda_1 - 2\alpha\sigma) (\|D_X\|^2 + \|D_S\|^2).$$

Maintenant, utilisons que D_X et D_S sont orthogonales, et aussi $\|D_X + D_S\|^2 = 4\delta^2$, puis par (3.20), on obtient

$$f_1''(\alpha) \leq 2\sigma^2 \psi''(\lambda_1(V) - 2\alpha\sigma).$$

ce qui prouve le lemme. ■

Utilisons à nouveau la notation $v_i = \lambda_i(V)$, $1 \leq i \leq n$, on a

$$f_1''(\alpha) \leq 2\sigma^2\psi''(v_1 - 2\alpha\sigma). \quad (3.26)$$

qu'elle est exactement la même inégalité que du lemme 2.10 dans le chapitre 2. Cela signifie que notre analyse ressemble beaucoup à l'analyse du cas linéaire (PL) dans le chapitre 2. À partir de ce résultat, on peut appliquer des arguments similaires à ceux de LP. En particulier, les deux lemmes suivants peuvent être énoncés sans démonstration.

Lemme 3.10. [Lemme 3.3 et 3.4 [9]] Soit ρ la fonction inverse de $-\frac{1}{2}\psi'(t)$ pour $t \in]0, 1]$. Alors la plus grande valeur du pas de déplacement α qui satisfait (3.26) est donnée par

$$\hat{\alpha} := \frac{1}{2\sigma}[\rho(\sigma) - \rho(2\sigma)].$$

De plus

$$\hat{\alpha} \geq \frac{1}{\psi''(\rho(2\sigma))}.$$

Pour une utilisation plus tard, on définit

$$\tilde{\alpha} := \frac{1}{\psi''(\rho(2\sigma))}. \quad (3.27)$$

À partir du lemme 3.10 ce pas de déplacement satisfait (3.26).

Lemme 3.11. Si le pas de déplacement α satisfait $\alpha \leq \tilde{\alpha}$, alors

$$f(\alpha) \leq -\alpha\sigma^2.$$

Utilisons les lemmes précédents, on procède au théorème suivant.

Théorème 3.12. Soit ρ définie dans le lemme 3.10 et $\tilde{\alpha}$ dans (3.27) et $\Psi(v) \geq 1$. Alors

$$f(\tilde{\alpha}) \leq -\frac{\sigma^2}{\psi(\rho(2\sigma))} \leq \frac{-\Psi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6p} \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(\sqrt{24\Psi_0} + 1) \right)^2 \right) \right)}$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 3.11 avec $\alpha = \tilde{\alpha}$, nous avons

$$\begin{aligned}
f(\tilde{\alpha}) &\leq -\tilde{\alpha}\delta^2 \\
&= \frac{-\delta^2}{1 + \frac{15p\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta + 1)\right)^2\right) (4\delta + 1)} \\
&\leq \frac{-\delta^2}{2\delta + 45p\pi\delta \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta + 1)\right)^2\right)} \\
&= \frac{-\delta^2}{\delta p \left(\frac{2}{p} + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta + 1)\right)^2\right)\right)} \\
&\leq \frac{-\delta}{p \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(4\delta + 1)\right)^2\right)\right)},
\end{aligned}$$

d'après (3.24), nous avons

$$\begin{aligned}
f(\tilde{\alpha}) &\leq \frac{-\Psi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}p \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(2\sqrt{6\Psi} + 1)\right)^2\right)\right)} \\
&= \frac{-\Psi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}p \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(\sqrt{24\Psi} + 1)\right)^2\right)\right)} \\
&\leq \frac{-\Psi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}p \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(\sqrt{24\Psi_0} + 1)\right)^2\right)\right)},
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue de la supposition $\Psi_0 \geq \Psi \geq \tau \geq 1$.

Ce qu'il fallait démontrer. ■

3.3.3 La borne supérieure uniforme de Ψ

Dans cette sous-section, nous étendons le théorème 3.2 du [1] au cône des matrices définies positives. Comme nous le verrons, la preuve du théorème suivant découle facilement du théorème 3.2 dans [1].

Théorème 3.13. *Soit $\varrho : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la fonction inverse de $\psi(t)$ pour $t \geq 1$. Alors pour tout vecteur positif v et tout $\beta \geq 1$, on a*

$$\Psi(\beta V) \leq n\psi \left(\beta\varrho \left(\frac{\Psi(V)}{n} \right) \right).$$

Démonstration. Soit $v_i := \lambda_i(V)$, $1 \leq i \leq n$. Alors $v > 0$ et

$$\Psi(\beta V) = \sum_{i=1}^n \psi(\lambda_i(V)) = \sum_{i=1}^n \psi(\beta \lambda_i(V)) = \sum_{i=1}^n \psi(\beta v_i) = \Psi(\beta v).$$

Comme $\psi(t)$ est vérifiée (3.17), on peut alors utiliser le théorème 3.2 dans [1], ce qui donne

$$\Psi(\beta v) \leq n \left(\left(\beta \varrho \frac{\Psi(v)}{n} \right) \right),$$

puisque

$$\Psi(v) = \sum_{i=1}^n \psi(v_i) = \sum_{i=1}^n \psi(\lambda_i(V)) = \Psi(V).$$

D'où le théorème. ■

Avant une μ -mise à jour, nous avons $\Psi(V) \leq \tau$, et après la mise à jour de μ à $(1-\theta)\mu$, nous avons $V_+ = \frac{V}{\sqrt{1-\theta}}$. L'application du théorème 3.13, avec $\beta = \frac{1}{1-\theta}$, donne

$$\Psi(V_+) \leq n \psi \left(\frac{\varrho \left(\frac{\tau}{n} \right)}{\sqrt{1-\theta}} \right).$$

Par conséquent, on définit

$$L = L(n, \theta, \tau) := n \psi \left(\frac{\varrho \left(\frac{\tau}{n} \right)}{\sqrt{1-\theta}} \right). \quad (3.28)$$

Dans la suite, la valeur $L(n, \theta, \tau)$ est notée simplement L . Une observation cruciale (mais triviale) est que, au cours de l'algorithme la valeur de $\Psi(V)$ ne dépasse jamais L , puisque pendant les itérations internes la valeur de Ψ diminue toujours.

3.4 La complexité

Dans cette section, on va calculer le nombre total d'itérations pour les méthodes à petit et à grand-pas. Une borne supérieure pour le nombre total d'itération est obtenue en multipliant la borne supérieure de nombre d'itérations internes entre deux mises à jour successives de μ par le nombre

$$\frac{1}{\theta} \ln \frac{n}{\epsilon},$$

pour plus de détails voir [16] Lemme II.17, page 116.

Pour obtenir une borne supérieure K du nombre d'itérations entre deux mises à jours successives, nous avons besoin de quelques lemmes techniques supplémentaires.

Le lemme suivant est obtenu de la proposition 1.3.2 dans [15]. Sa pertinence est due au fait que les valeurs de la fonction barrière entre deux mise à jours successives de μ produisent une suite décroissante de nombres positifs. Nous allons noter cette suite par Ψ_0, Ψ_1, \dots

Lemme 3.14. Soit t_0, t_1, \dots, t_k , une suite des nombres positives, tels que

$$t_{k+1} \leq t_k - \beta t_k^{1-\gamma} \quad k = 0, \overline{K-1},$$

où $\beta > 0$, $0 \leq \gamma \leq 1$. Alors $K \leq \lceil \frac{t_0^\gamma}{\beta\gamma} \rceil$.

Lemme 3.15. Si K désigne le nombre d'itérations internes entre deux mise à jours successives de μ , alors

$$K \leq 2 \left(\sqrt{6p} \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(\sqrt{24\Psi_0} + 1) \right)^2 \right) \right) \right) \Psi_0^{\frac{1}{2}}. \quad (3.29)$$

Démonstration. La définition de K implique $\Psi_{K-1} > \tau$, et selon le théorème 3.12,

$\Psi_K \leq \tau$ et

$$\Psi_{k+1} \leq \Psi_k - k(\Psi_k)^{1-\gamma}, \quad k = 0, 1, \dots, K-1,$$

avec $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{6p}(2+45\pi(1+(\frac{1}{5p}\ln(\sqrt{24\Psi_0}+1))^2))}$. L'application du lemme 3.14, avec $t_k = \Psi_k$ produit l'inégalité souhaitée. ■

En utilisant $\psi_0 \leq L$, où le nombre L est donné dans (3.28). À partir du lemme précédente, on obtient la borne supérieure suivante de nombre total d'itérations

$$2 \left(\sqrt{6p} \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{1}{5p} \ln(\sqrt{24L} + 1) \right)^2 \right) \right) \right) L^{\frac{1}{2}} \frac{\ln \frac{n}{\epsilon}}{\theta}. \quad (3.30)$$

3.4.1 Méthode à grand et à petit-pas

Dans la remarque 8 du chapitre 2, on a montré que

$$(\psi_0) = L(n, \theta, \tau) = \frac{\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n\theta}}{2(1-\theta)}.$$

En utilisant (3.30), donc le nombre total d'itérations pour trouver une solution optimale est bornée par

$$\frac{K}{\theta} \ln \frac{n}{\epsilon} \leq 2 \left(\sqrt{6p} \left(2 + 45\pi \left(1 + \left(\frac{\ln\left(\left(\frac{12(\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n\theta})}{1-\theta}\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right)}{5p} \right)^2 \right) \right) \right) \left(\frac{\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n\theta}}{2(1-\theta)} \right) \frac{\ln \frac{n}{\epsilon}}{\theta}.$$

• Les méthodes à grand-pas, utilise $\tau = O(n)$ et $\theta = \Theta(n)$. Dans ce cas l'algorithme trouve la solution optimale après

$$O \left(p\sqrt{n} \left(\frac{\ln n}{5p} \right)^2 \ln \frac{n}{\epsilon} \right) \text{ itérations.}$$

• Les méthodes des à petit-pas, utilise $\tau = O(n)$ et $\theta = \Theta(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}})$. Dans ce cas l'algorithme trouve la solution optimale après

$$O\left(\sqrt{n} \ln \frac{n}{\epsilon}\right) \text{ itérations.}$$

Remarque 11. Pour $p = O(\ln n)$, l'algorithme trouve la solution optimale après

$$O\left(\sqrt{n} \ln n \ln \frac{n}{\epsilon}\right) \text{ itérations.}$$

Cette complexité coïncide avec la bonne complexité trouvée par les chercheurs pour les méthodes à grand-pas.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étendu les résultats obtenus pour les méthode de points intérieurs (IPMs) basées sur la fonction noyau proposée dans [10] pour la programmation linéaire (LP) aux problèmes de programmation semi définie (SDP). L'analyse de la complexité présentée dans ce travail est nouvelle et différente de celle utilisée en LP. Plusieurs nouveaux outils et techniques sont utilisés dans le dernier chapitre.

Si on prend le choix du paramètre $p = O(\ln n)$, on obtient la complexité $O(\sqrt{n} \ln n \ln \frac{n}{\epsilon})$ itérations. Cette dernière est la meilleure jusqu'à ce jour pour les méthodes à grand-pas. Pour les méthodes à petit-pas, on trouve la bonne complexité qui est $O(\sqrt{n} \ln \frac{n}{\epsilon})$ itérations.

Bibliographie

- [1] **Bai, Y.Q., El Ghami, M., Roos, C.**, A comparative study of Kernel function for primal-dual interior-point algorithms in linear optimization, *SIAM J. Optim.* 15 (1)(2004) [101-128].
- [2] **Bai, Y. Q., El Ghami, M., Roos, C.**, A new efficient large-update primal-dual interior- point method based on a finite barrier. *SIAM Journal on Optimization*, 13 No 3 (2003), 766–782, doi : 10.1137/S1052623401398132.
- [3] **Bazarra, S., Sherali, H. D., and Shetty, C. M.** , *Nonlinear programming, theory and algorithm*, Second edition (1939).
- [4] **Chioukh, A., Kirat, Z.**, Étude théorique d’une classe de méthode de points intérieurs pour la programmation semi-définie linéaire, mémoire de Master, Encadrer par Touil Imene, Département de mathématique, Université de jijel, Algérie 2011 /2012.
- [5] **Choi, B.K., Lee, G.M.**, On complexity analysis of the primal-dual interior-point method for semidefinite optimization problem based on a new proximity function, *Nonlinear Analysis.* 71(2009) 2628-2640.
- [6] **Djeddou, F., Fermas, W., Moussa, W.**, L’étude théorique d’une méthode de points intérieurs pour la programmation semi-définie linéaire, mémoire de license, Encadrer par Touil Imene, Département de mathématique, Université de jijel, Algérie 2011.1983.
- [7] **El ghamie, M.**, New primal-dual interior-point methods based on kernel functions, *Certicat d’études approfondies Mathématiques (C.E.A) Université Mohammed V, Rabat, Marokkogeborn te Tamsamane,Marokko.*
- [8] **El Ghami, M., Guennoun, Z.A., Bouali, S., Steihaug, T.**, Primal-Dual Interior-Point Meth-ods for Linear Optimization Based on a Kernel Function with Trigonometric Barrier Term. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236 No 15 (2012), 3613-3623, doi : 10.1016/j.cam.2011.05.036.

- [9] **El Ghami, M., Roos, C.**, Generic Primal-dual Interior Point Methods Based on a New Kernel Function. *International Journal RAIRO-Operations Research*, 42 No 2 (2008), 199-213, doi : 10.1051/ro :2008009.
- [10] **Fathi-Hafshejani, S., Reza peyghami, M.**, A new trigonometric kernel function yielding the best known iteration bound for IPM.
- [11] **Horn, R.A., Johnson, C.R.**, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991 .
- [12] **Klerk, E.**, *Aspects of semidefinite Programming, Interior Point Algorithms and Selected Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.
- [13] **Klerk, E.**, *Interior point methods for semidefinite programming*. Ph. D. Thesis, Faculty of ITS/TWI, Delft University of Technology, The Netherlands, 1997.
- [14] **Peng, J., Roos, C., Terlaky, T.**, *Self-Regularity : A New Paradigm for Primal-Dual Interior-Point Algorithms*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002.
- [15] **Peng, J., Roos, C., Terlaky, T.**, Self-regular functions and new search directions for linear and semidefinite optimization, *Math. Program.* 93 (2002) 129-171.
- [16] **Roos, C., Terlaky, T., Ph Vial, J.**, *Theory and Algorithms for linear optimization, An interior Approach*, John Wiley,Sons, Chichester, U. K., 1997.
- [17] **Touil, I.**, Étude comparative des performances d'une méthode de points intérieurs de type trajectoire centrale pour la programmation semi-définie linéaire, mémoire de magister, Département de mathématiques, université de FERHAT ABBAS, Sétif, Algérie (2005).
- [18] **Todd, M.J.**, A study of search directions in primal-dual interior point methods for semidefinite programming, *Optim Methods Softw.* 11(1999)1-46.
- [19] **Todd, M.J.**, K.C. Toh, R.H.Tütüncü, On the Nesterov-Todd direction in semidefinite programming, *SIAMJ. Optim.* 8(1998)769-796.
- [20] **Zhang, Y.**, On extending some primal-dual algorithms from linear programming to semidefinite programming, *SIAM J. Optim.* 8(1998)365-386.
- [21] **Horn, R.A., Johnson, C.R.**, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1985).
- [22] **Zhang, M.W.**, A large-update interior-point algorithm for convex quadratic semidefinite optimization based on a new kernel function, *Acta Math Sinica Engl. Ser.* 28 (2012), 2313-2328.