REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ Mohamed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacts et d'informatique

Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : **Master**

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Etude d'une inclusion différentielle avec retard

Présenté par :

Boudermine Selma

Boudjaàdar Amira

Devant le jury :

Président	**: W.Boukrouk**	**M.C.B**	Université de Jijel
Encadreur	**: N.Fetouci**	**M.C.B**	Université de Jijel
Examinateur	**: M.Benguessoum**	**M.A.A**	Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Remerciements

Nous rendons grâce à **Dieu** qui nous donné la force, le courage, et l'espoir nécessaire Pour accomplir ce travail et surmonter l'ensemble des difficultés.

Nous adressons tout d'abord nos remerciements les plus sincères, au **Dr. Fetouci Nora**, qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail. Sa grande connaissance dans le domaine, ainsi que son expérience, ont joué un rôle important dans la conception de ce travail.

Nous voudrions également remercier les membres de mon jury : **W.Boukrouk** et **M.Benguessoum**, pour l'honneur qu'ils nous ont fait en portant leur attention sur ce travail.

Nos remerciements s'adressent aussi à tous les enseignants et les professeurs qui nous ont contribué à notre formation et à tous ceux qui notre ont aidé pendant la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'objectif entrepris dans ce mémoire est l'étude de l'existence de solutions pour des inclusions différentielles du premier ordre avec retard.

Les inclusions différentielles représentent un sujet de plus en plus abordé ces dernières années. Cette notion consiste à étudier une équation différentielle multivoque du type :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) \ p.p. \ sur \ [0,T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Où F est une multifonction, autrement dit une application dont l'image est un sous ensemble de l'espace d'arrivé. Ce nouveau concept a permis de résoudre de nombreux problèmes émergeant dans divers domaines comme la théorie de contrôle, l'économie et la biologie.

Le problème (1) a été étudié par *J.P.Aubin et A.Cellina* dans le cas où F est semi continue supérieurement à valeurs convexes compactes.

Les inclusions différentielle à mémoire ou avec retard souvent appelées "Functional differential inclusions" sont des inclusions différentielles où le système ne dépend pas seulement comme dans les inclusions différentielles ordinaires de la valeur initiale mais aussi de l'état antérieur du système. Ce type de problèmes se présente sous la forme

$$\dot{x}(t) \in F(t, T(t)x) \quad p.p.,$$

où pour tout $t > 0$, pour tout $x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$, $T(t)x \in \mathcal{C}([-r, 0], E)$ est définie par

$$(T(t)x)(\tau) = x(t + \tau) \quad \forall \tau \in [-r, 0].$$

Ce mémoire comprend trois chapitres. Dans le premier chapitre nous définissons et présentons brièvement les notions que nous utiliserons tout au long de notre travail. Nous commençons par quelques concepts de l'analyse convexe, puis nous introduisons la notion de la topologie faible et faible*, la continuité des fonctions et nous terminons par les multifonction et leurs propriétés qui jouent un rôle central dans les résultats que nous établirons au chapitre 2 et 3.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'une inclusion différentielle du premier ordre avec retard.

On présente un résultat d'existence pour le problème suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, T(t)x) \quad p.p.\ sur\ [0, T], \\ x(t) \in D \quad \forall t \in [0, T], \\ T(0)x = \varphi_0. \end{cases}$$

Où D est un convexe compact d'un espace de Banach, $r > 0$ *et* $\varphi_0 \in \mathcal{C}_0$,
$F : [0, T] \times \mathcal{C}_0 \longrightarrow ck(E)$ est une multifonction à valeurs compactes convexes semi-continue supérieurement par rapport à la deuxième variable.

Ce résultat a été obtenu par *A.Syam* [14], via une méthode de discrétisation et en se basant sur un résultat de *C.Castaing.Moussaoui.A.Syam* [5] pour le problème sans retard.

En fin, dans le dernier chapitre nous traitons l'existence d'une solution lipschitzienne pour le problème d'évolution suivant gouverné par le cône normal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{K(t)}(x(t)) + F(t, x_t) \ \ p.p.\ sur\ [0, T], \\ x(t) \in K(t) \quad \forall t \in [0, T], \\ x(0) = \varphi \ \ sur\ [-r, 0]. \end{cases}$$

où $N_{K(t)}(.)$ est le cône normal à $K(.)$ au point $x(.)$ au sens d'analyse convexe, ce qu'on appelle processus de la rafle avec une perturbation retardée. Ce type d'inclusions différentielles à été étudié pour la modélisation de certains problèmes liés aux systèmes de réaction, diffusion, jeux différentiels, et en dynamique des populations. Nous détaillons l'article de *C.Castaing et M.D.P.Monteiro Marques* dans lequel la démonstration repose sur la construction d'une suite approximante de la solution à l'aide d'une discrétisation de l'intervalle et un algorithme de projection successive dit de rattrapage.

Notations

Nous utilisons les notations suivante tout au long du travail :

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,

$\mathbb{R}_+$: l'ensemble des nombres réels positifs,

$\mathbb{R}^n$: l'ensemble des vecteurs de dimension n, à coordonnées réelles,

$\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels réels,

$\mathcal{C}([0,T],X)$: l'espace de Banach de toutes les applications continues muni de la norme

$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{C}} = \max\limits_{t\in I} \|x(t)\|$,

E : espace Banach,

E' : espace dual de E,

H : espace de Hilbert,

$\mathcal{C}_0([-r,0],X)$: les fonctions continues définies sur $[-r,0]$ à valeurs dans X, (fonctions de retard)

$L^1_H[0,T]$: espace des applications intégrable définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H,

$L^\infty_H[0,T]$: espace des applications essentiellement bornées définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H,

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: désigne le produit de dualité entre X et X',

$\sigma(X,X')$: est la topologie faible sur X,

$\rightharpoonup$: signifie la convergence faible dans X,

$\sigma(X',X)$: est la topologie faible* sur X',

$\overset{*}{\rightharpoonup}$: signifie la convergence faible* dans X',

$\delta_A(.)$: la fonction indicatrice de l'ensemble A,

$\delta^*_A(.)$: fonction de support,

f^* : fonction conjuguée de f,

f^{**} : fonction biconjuguée de f,

$\partial f(x)$: sous-différentiel de f au point x,

$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$: la dérivée d'une fonction dérivable x par rapport à t,

$co(f)$: enveloppe convexe de f,

$ck(H)$: l'ensemble des convexes non vides compacts de H,

$c\omega k(H)$: l'ensemble des convexes non vides faiblement compacts de H,

$d_A(x)$: La distance de x à A ,

$e(A, B)$: excès de A sur B,

$h(A, B)$: la distance de Hausdorff,

$proj(x, A)$: projection de x sur l'ensemble A,

$epi(f)$: épigraphe de la fonction f,

$dom(f)$: domaine effectif de f,

$graph(F)$: graphe de la multifonction F,

$\bar{A}$: l'adhérence de A,

$v(x)$: voisinage de x,

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions et résultats de base qui nous seront très utiles pour la démonstration de nos résultats d'existence de solutions. Nous présentons des définitions et concepts fondamentaux ainsi que quelques résultats sur la mesurabilité, l'analyse convexe, les multifonction et nous terminons par des résultats de compacité.

1.1 Quelques concepts de l'analyse convexe

Pour plus de détails sur cette section voir [2],[13], [15] et [16]

1.1.1 Ensemble compact-Espace compact

Définition 1.1.1. *Soit X un espace topologique.*

1) *Un* ***recouvrement*** *de X est une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que $X = \bigcup_{i\in I}(A_i)$.*
   Si de plus I est un ensemble fini, on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un ***recouvrement fini*** *de X.*

2) *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. Soit $J \subset I$ tel que $X = \bigcup_{j\in J}(A_j)$, on dit que $(A_j)_{j\in J}$ est un* ***sous-recouvrement*** *de $(A_i)_{i\in I}$.*

3) *Un recouvrement ouvert de* X *est une famille d'ouverts* $(U_i)_{i\in I}$ *telle que* $X = \bigcup_{i\in I} U_i$

Définition 1.1.2. *Soit* X *un espace topologique.*

- *On dit que* X *est* ***compact*** *s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de* X*, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.1.3. *Soient* E *un espace métrique,* $K \subset E$.

On dit que K *est compact si de tout recouvrement ouverts de* K *on peut extraire un sous-recouvrement fini c'est à dire, si* $(U_i)_{i\in I}$ *est une famille d'ouverts de* K *telle que* $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ *alors il existe un sous-ensemble fini* $J \subset I$ *tel que* $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$

Définition 1.1.4. *Soient* E *un espace métrique,* $K \subset E$.

- *On dit que* K *est compact si toute suite d'éléments de* K *admet une sous suite convergente dans* K.
- *On dit que* K *est relativement compact si* $\overline{K}$ *est compact.*

Proposition 1.1.1. *Les parties compactes de* $\mathbb{R}^n$ *sont les parties fermées bornées.*

1.1.2 Ensembles convexes

Définition 1.1.5. *(**Ensemble convexe**).*

Soit E *un espace vectoriel. Un ensemble* $K \subset E$ *est dit convexe si*

$$\forall (x, y) \in K^2, \forall t \in [0, 1], \quad tx + (1-t)y \in K.$$

Définition 1.1.6. *(**Enveloppe convexe**).*

Soient E *un espace vectoriel,* $A \subset E$. *On appelle enveloppe convexe de* A *qu'on note* $co(A)$*, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de* E *qui contiennent* A. *C'est en fait le plus petit convexe de* E *qui contient* A.

Théorème 1.1.2. *Soient* E *un espace vectoriel et* A *un sous ensemble de* E. *Alors*

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i / k \in N, (\lambda_i) \in \Delta_{k+1}, (x_i)_{1\leq i\leq k+1} \subset A \right\};$$

où

$$\Delta_{k+1} = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k+1}) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

.

1.1.3 Fonctions convexes

Définition 1.1.7. ***(Domaine effectif).***

Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On appelle domaine effectif de f l'ensemble défini par

$$dom(f) = \{x \in E : f(x) < \infty\}.$$

Définition 1.1.8. ***(Fonction convexe).***

Soit E un espace vectoriel, on dit qu'une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si pour tout $x, y \in dom(f)$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Définition 1.1.9. ***(Fonction propre).***

La fonction f est dite propre si et seulement si $f(x) \neq -\infty, \forall x \in E$ et $f(x) \not\equiv +\infty$ (i.e, il existe $x_0 \in E$, $f(x_0) \neq +\infty$).

Définition 1.1.10. ***(Epigraphe).***

On appelle épigraphe de f l'ensemble défini par

$$epi f = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

1.2 Fonction conjuguée

Définition 1.2.1. *Soient E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique et f une fonction définie sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On définit la conjugée de f par :*

$$f^*(x) = \sup_{x \in E} [\langle x', x \rangle - f(x)], \text{ pour tout } x' \in E'.$$

Définition 1.2.2. *On appelle biconjugée de f qu'on note f^{**} la fonction conjugée de f^* définie par :*

$$\begin{aligned} f^{**} :&E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ &x \longmapsto f^{**}(x) = \sup_{x' \in E'} [\langle x', x\rangle - f^*(x')]. \end{aligned}$$

Définition 1.2.3. ***(Fonction indicatrice)****.*

Soit E un espace vectoriel et soit A un sous ensemble de E (i.e, $A \subset E$). On appelle fonction indicatrice de A qu'on note δ_A la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \delta_A :&E' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ &x \longmapsto \delta_A(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in A, \\ +\infty & si\ x \in E \setminus A. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1. *La fonction δ_A est convexe si et seulement si A est convexe.*

Définition 1.2.4. ***(Fonction support)****.*

Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. On appelle fonction support de A notée par $\delta^*_A(.)$ la fonction définie sur E' par :

$$\begin{aligned} \delta^*_A :&E' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ &x' \longmapsto \delta^*_A(x') = \sup_{x \in A} \langle x', x\rangle. \end{aligned}$$

C'est la fonction conjuguée de la fonction indicatrice.

1.3 Continuité des fonctions

1.3.1 Fonction absolument continue

Définition 1.3.1. *Soit E un espace de Banach. Une fonction $f : [a, b] \longmapsto E$ est dite absolument continue si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tels que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ on a*

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| \leq \epsilon.$$

Théorème 1.3.1. *Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow E$ est absolument continue si et seulement s'il existe une fonction intégrable $g : [a,b] \longrightarrow E$ telle que*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(t)dt.$$

De plus une fonction absolument continue est dérivable presque partout et

$f'(x) = g(x),$ *p.p.*

Remarques 1.3.1. *Une fonction absolument continue est continue.*

1.3.2 Fonction lipschitzienne

Définition 1.3.2. *Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace métrique (X,d) est dite Lipschitzienne (continue Lipschitzienne) de rapport k ou k-Lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k\ d(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Proposition 1.3.2. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, alors on a :*

- *Si f est Lipschitzienne alors f est absolument continue.*

Remarques 1.3.2. *Une fonction Lipschitzienne de rapport $k \in [0,1[$ est appelée une contraction.*

1.3.3 Théorème de compacité

Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques, et soit $\mathcal{F}(X,Y)$ l'espace de toutes les applications $f : X \longrightarrow Y$.

Définition 1.3.3. *Un sous ensemble H de $\mathcal{F}(X,Y)$ est dit équicontinu au point $x \in X$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X,\ d(x,y) < \delta \Longrightarrow \forall f \in H,\ d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Corollaire 1.3.3. *Soit H un sous ensemble de $\mathcal{F}(X,Y)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *H est relativement compact.*
2. *Il existe une partie compacte de X contenant H.*
3. *Toute suite dans H possède une sous suite convergente dans X.*

Théorème 1.3.4. ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà).*** *Soit X un espace métrique compact, (Y, d) un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $\mathcal{C}(X; Y)$, l'espace des applications continues définies sur X à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et pour tout $x \in X$, $H(x) = \{f(x) : f \in H\}$ est relativement compact.*

Théorème 1.3.5. ***(Conséquence du Théorème d'Ascoli-Arzelà).*** *Soit $(x_k)_k$ une suite de fonctions absolument continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace X de dimension finie tel que*

$$\begin{cases} i. \ \ \forall t \in I, \{x_k(t)\}_k \text{ est relativement compact de } X, \\ ii. \ \ \text{il existe une fonction positive } c \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \text{ tel que } \|x_k'(t)\| \leq c(t), \text{ p.p. sur } I. \end{cases}$$

Alors il existe une sous-suite (notée encore $(x_k)_k$) et une fonction absolument continue $x : I \longrightarrow X$ telles que

$$\begin{cases} 1. \ \ (x_k) \text{ converge uniformment vers } x \text{ sur un ensemble compact de } I, \\ 2. \ \ (x_k') \text{ converge faiblement vers } x' \text{ dans } L^1(I, X). \end{cases}$$

1.3.4 Fonction mesurable

Définition 1.3.4. ***(Fonction mesurable).***

Soient $(X, \Sigma), (Y, \xi)$ deux espaces mesurables et $f : X \rightrightarrows Y$ une fonction. On dit que f est (Σ, ξ) mesurable si $f^{-1}(\xi) \subset \Sigma$. Autrement dit $\forall V \in \xi, f^{-1}(V) \in \Sigma$.

1.3.5 Semi-continuité inférieure

Définition 1.3.5. *Soient E un espace topologique et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i en abrégé) en $x_0 \in E$ si Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > \lambda$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(x) > \lambda$, pour tout $x \in U$. On dit que f est s.c.i si et seulement si elle est s.c.i, en tout point de E.*

Remarques 1.3.3. *Soient $x_0 \in E$ et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors on a*

1. *Si f est s.c.i, au point $x_0 \in X$ et si $f(x_0) = +\infty$, alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = +\infty,$$

2. *Si $f(x_0) = -\infty$, alors f est semi-continue inférieurement en x_0.*

Définition 1.3.6. *Soient $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction définie sur un espace topologique E et $x_0 \in E$. Alors*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{V \in v(x_0)} \inf_{x \in V} f(x) \text{ et } \limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{V \in v(x_0)} \sup_{x \in V} f(x).$$

Proposition 1.3.6. *Soit E un espace topologique et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors f est s.c.i au point $x_0 \in E$ si et seulement si*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0).$$

Définition 1.3.7. *Soit E un espace topologique et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors f est semi-continue inférieurement au point $x_0 \in E$ si pour toute suite $(x_n)_{n \in N}$ qui converge vers x_0 on a*

$$\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geqslant f(x_0).$$

Théorème 1.3.7. *Soit E un espace topologique et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$epif$ est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.*
2. *$x \in E, f(x) \leqslant \lambda$ est fermé pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
3. *f est s.c.i en x_0.*

Théorème 1.3.8. *Soit H un espace de Hilbert, soit $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe qui est semi-continue inférieurement et $\lim\limits_{\|x\| \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Alors il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = \inf\limits_{x \in X} f(x)$.*

1.3.6 Semi-continuité supérieure

Définition 1.3.8. *Soient E un espace topologique et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est semi-continue supérieurement (s.c.s, en abrégé) en $x_0 \in E$ si Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel* *que $f(x_0) < \lambda$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(x) < \lambda$, pour tout $x \in U$. On dit que f est s.c.s, si et seulement si elle est s.c.s, en tout point de E.*

Théorème 1.3.9. *Soit E un espace topologique et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, alors f est s.c.s, au point $x_0 \in E$ si et seulement si $\limsup_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$.*

Remarques 1.3.4. 1. *$f$est s.c.i, si et seulement si $-f$ est s.c.s.*

2. *f est continue si et seulement si elle est s.c.s, et s.c.i.*

Pour plus des détails sur la semi-continuité voir [2], [15] et [12]

1.4 Topologie faible et faible *

Pour plus de détails sur cette section voir [3]

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$: On désigne par $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient $(\varphi_f)_{f \in E'}$ une famille d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.4.1. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*

notation

- On notera $x_n \rightharpoonup x$ pour être précis, la convergence faible dans E.
- On notera $x_n \longrightarrow x$ pour être précis, la convergence forte dans E.

Proposition 1.4.1. *Soit $(x_n)_{n \in N}$ une suite de E. On a :*

1. $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x, \rangle, \forall f \in E'$.
2. *Si $x_n \longrightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.*
4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \longrightarrow f$ fortement dans E', (i.e., $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$), alors $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.*

Définition 1.4.2. *La topologie faible* * *désignée aussi par* $\sigma(E', E)$ *est la topologie la moins fine sur* E' *rendant continues toutes les applications* $(\varphi_x)_{x\in E}$ *; où*

$$\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle.$$

Proposition 1.4.2. *Soit* $(f_n)_{n\in N}$ *une suite de* E'. *On a :*

(a) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E) \Longleftrightarrow \langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \forall x \in E.$

(b) *Si* $f_n \longrightarrow f$ *fortement, alors* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E'E)$.

(c) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$, *alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $\|f\| \leq \liminf_n \|f_n\|$.

(d) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$ *et si* $x_n \longrightarrow x$ *fortement dans* E, *alors* $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

1.5 Multi-applications

Pour plus de détails sur les multifonction voir [1] et [10]

Définition 1.5.1. *Soient* X *et* Y *deux ensembles non vides. On appelle multifonction (fonction multivoque ou multifonction) de* X *dans* Y *toute application* F *définie sur* X *à valeurs dans* $\mathcal{P}(Y)$ *(ensemble des parties de* Y *) et on note* $F : X \rightrightarrows Y$ *où* $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$. *Alors* $\forall x \in X, F(x)$ *est un sous ensemble de* Y.
Les sous ensembles $F(x)$ *sont appelés les images ou les valeurs de* F.

Définition 1.5.2. *Soient* X *et* Y *deux ensembles non vides. On appelle*

1. *Domaine de* F *qu'on note* $dom(F)$ *le sous ensemble de* X *défini par*

$$dom(F) = \{x \in X, F(x) \neq 0\}.$$

2. *Graphe de* F *le sous ensemble de* $X \times Y$ *noté par* $graph(F)$ *défini par*

$$graph(F) = \{(x, y) \in X \times Y, y \in F(x)\}.$$

3. *Image de* F *notée* $Img(F)$ *le sous ensemble de* Y *défini par*

$$Img(F) = \{y \in Y, \exists x \in X, y \in F(x)\},$$

où

$$Img(F) = \bigcup_{x \in X} F(x).$$

4. *Considérons la multifonction $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par*

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow \; y \in F(x).$$

Remarques 1.5.1.

$$dom(F^{-1}) = Img(F) \text{ et } Img(F^{-1}) = dom(F).$$

Définition 1.5.3. *Soit $V \subset Y$*

- *On appelle l'image réciproque large de V par la multifonction F le sous ensemble de X défini par*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X, F(x) \cap V \neq 0\}.$$

- *On appelle l'image réciproque étroite de V par la multifonction F le sous ensemble de X défini par*

$$F_{+}^{-1}(V) = \{x \in X, F(x) \subseteq V\}.$$

Définition 1.5.4. *Soient $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : X \rightrightarrows Y$ deux multifonctions, alors on définit*

L'union :

$$\begin{aligned} F \cup G : & X \rightrightarrows Y \\ & x \longmapsto (F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x). \end{aligned}$$

L'intersection :

$$\begin{aligned} F \cap G : & X \rightrightarrows Y \\ & x \longmapsto (F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x). \end{aligned}$$

Le produit cartésien :

$$\begin{aligned} F \times G : & X \rightrightarrows Y \\ & x \longmapsto (F \times G)(x) = F(x) \times G(x). \end{aligned}$$

• *Si $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : Y \rightrightarrows Z$, on définit*

la composition :

$$\begin{aligned} G \circ F : & X \rightrightarrows Z \\ & x \longmapsto (G \circ F)(x) = G(F(x)) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y). \end{aligned}$$

Définition 1.5.5. ***(multi-application mesurable)****. Soient (X, Σ) un espace mesurable, (Y, d) un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est Σ-mesurable si pour tout ouvert V de Y, $F^{-1}(V) \in \Sigma$.*

1.6 Continuité des multi-applications

1.6.1 Semi-continuité supérieure

Définition 1.6.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s. en abrégé) en $x_0 \in X$, si pour tout ouvert U de Y contenant $F(x_0)$ (i.e., $F(x_0) \subset U$), il existe un voisinage de x_0 tel que $F(\Omega) \subset U$ i.e, $F(z) \subset U, \forall z \in \Omega$.*
On dit que F est s.c.s. sur X si elle est s.c.s. en tout point $x \in X$.

Proposition 1.6.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On a équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. *F est s.c.s.*
2. *$F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de X pour tout ouvert V de Y.*
3. *$F^{-1}(U)$ est un fermé de X pour tout fermé U de Y.*
4. *$\overline{F^{-1}(M)} \subseteq F^{-1}(M)$, pour tout sous ensemble M de Y.*

Proposition 1.6.2. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s à valeurs fermées. Alors le graphe de F est fermé.*

Théorème 1.6.3. *Soient F, G deux multi-applications définies sur X à valeurs dans Y telles que : $\forall x \in X, F(x) \cap G(x) \neq 0$. On suppose*

$$\begin{cases} 1)\ F \text{ s.c.s au point } x_0 \in X, \\ 2)\ F(x_0) \text{ est compact}, \\ 3)\ \text{graphe de } G \text{ est fermé}. \end{cases}$$

Alors la multi-application $F \cap G : X \rightrightarrows Y$ est s.c.s. au point x_0.

Proposition 1.6.4. *Soient X et Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s. à valeurs compactes. Si X est un espace compact, alors $F(X)$ est compact.*

Théorème 1.6.5. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : M \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes, alors F est semi-continue supérieurement sur X si et seulement si pour chaque $x \in X$ et chaque suite $(x_n)_n$ de X telle que $x_n \longrightarrow x$, et $(y_n)_n$ de Y avec $y_n \in F(x_n)$, il existe une sous-suite $(y_m)_m$ de $(y_n)_n$ telle que $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} y_m \in F(x)$.*

Théorème 1.6.6. *Soient X un espace métrique, M un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et $F : X \rightrightarrows M$ une multi-application. Donc*
Si F est semi-continue supérieurement, alors la multi-application
$co(F) : x \in X \longmapsto co(F(x)) \subset \mathbb{R}^n$ est aussi semi-continue supérieurement.

1.6.2 Semi-continuité inférieure

Définition 1.6.2. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est semi-continue inférieurement (s.c.i en abrégé) en $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y vérifiant $F(x_0) \cap U \neq 0$, il existe un voisinage Ω dex_0 tel que $F(z) \cap U \neq 0, \forall z \in \Omega$ i.e., $F^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0.*
On dit que F est s.c.i sur X où s.c.i si elle est s.c.i en tout point $x \in X$.

Proposition 1.6.7. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On a équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. *F est s.c.i,*
2. *$F^{-1}(V)$ est un ouvert de X pour tout ouvert V de Y,*
3. *$F_+^{-1}(U)$ est un fermé de X pour tout fermé U de Y,*
4. *$\overline{F_+^{-1}(M)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{M})$, pour tout sous ensemble M de Y.*

Théorème 1.6.8. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-fonction. F est s.c.i au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ de points de X, telle que $x_n \longrightarrow x_0$ et pour tout $y_0 \in F(x_0)$, il existe une suite $(y_n)_{n\in N}$ telle que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \longrightarrow y_0$.*

Définition 1.6.3. *(**Continuité d'une multifonction**). Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On dit que F est continue au point x_0 si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i au point $x_0 \in X$.*
F est continue si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i.

1.6.3 Scalaire semi-continuité supérieure

Définition 1.6.4. *Soient X, Y deux espaces topologiques muni de la topologie faible et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On dit que F est scalairement semi-continue supérieurement en x_0 si pour tout $p \in Y'$ la fonction $\delta^*_{F(x_0)}(p)$ est semi-continue supérieurement en x_0. On dit que F est scalairement s.c.s si et seulement si elle est scalairement s.c.s en tout point $x_0 \in X$.*

Proposition 1.6.9. *Toute multi-application semi-continue supérieurement définie de X à valeurs dans Y qui est muni de la topologie faible est scalairement semi continue supérieurement.*

Théorème 1.6.10. *(**Théorème de convergence**). Soient X un espace localement convexe et séparé, Y un espace de Banach, $K \subset Y$ un sous ensemble convexe fermé et $F : X \rightrightarrows K$ une multi-application scalairement semi-continue supérieurement à* *valeurs convexes. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_k et y_k des fonctions mesurables de I à valeurs dans X (respectivement Y) vérifiant :*

Pour presque tout $t \in I$, et tout voisinage V de 0 dans $X \times Y$, $\exists k_0 = k_0(t, v)$ tel que

$$\forall k \geq k_0, (x_k(t), y_k(t)) \in graph(F) + V.$$

Si

$$\begin{cases} 1)\ (x_k) \text{ converge presque partout vers une fonction } x \text{ de } I \text{ dans } X, \\ 2)\ (y_k) \subset L^1(I, Y) \text{ et converge faiblement vers } y \text{ dans } L^1(I, Y). \end{cases}$$

Alors

$$(x(t), y(t)) \in graph(F) \ i.e.,\ y(t) \in F(x(t)) \text{ pour presque tout } t \in I.$$

CHAPITRE 2

RÉSULTAT D'EXISTENCE POUR UNE INCLUSION DIFFÉRENTIELLE AVEC RETARD

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une inclusion différentielle du premier ordre avec retard, du type

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, T(t)x) \quad p.p. \ sur \ [0, T], \\ x(t) \in D \quad \forall t \in [0, T], \\ T(0)x = \varphi_0 \quad sur \ [-r, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

où F est une multifonction de $[0, T] \times \mathcal{C}_0$ à valeurs dans l'ensemble des compacts convexes, D est un convexe fermé d'un espace de Banach E, r est un réel strictement positif.

Les premier travaux concernant les problèmes avec retard a été entrepris par *V.Lakchmikanthan, A.R.Michell et R.W.Michell* [11] dans le cas des équations différentielles.

Le problème (2.1) a été résolu par *G.Haddad* [8] dans le cas où la dimension de E est finie et a été généralisé par *J.P.Aubin et A.Cellina* au contexte d'un espace de Hilbert. Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenu par $A.Syam$ dans un espace de Banach séparable.

2.1 Inclusions différentielles avec retard : Définition-Quelques exemples

2.1.1 Définition

Les inclusions différentielles avec retard sont des équations différentielles multi-fonction où le système ne dépend pas seulement de la valeur initiale mais aussi de l'état antérieur du système. Si une inclusion différentielle exprime qu'à tout instant la vélocité du système dépend de son état à tout instant, les inclusions différentielles avec mémoire expriment que la vélocité dépend non seulement de l'état du système à cet instant, mais aussi de l'histoire de la trajectoire jusqu'à cet instant.

Pour formaliser ce concept, on introduit pour tout $T > 0$ et $r > 0$, l'espace de Banach $\mathcal{C} := \mathcal{C}([-r, T], E)$ (resp $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}([-r, 0], E)$) des fonctions continues de $[-r, T]$ (resp $[-r, 0]$) dans l'espace de Banach E, muni de la topologie de la convergence uniforme sur des intervalles compacts.

L'opérateur $T(t)$ de $\mathcal{C}([-r, T], E)$ dans $\mathcal{C}([-r, 0], E)$ défini par :

pour tout $x \in \mathcal{C}([-r, T], E)$ on associe $T(t)x \in \mathcal{C}([-r, 0], E)$ défini par

$$(T(t)x)(\tau) = x(t + \tau) \quad \forall \tau \in [-r, 0].$$

Étant donnée une fonction $\varphi_0 \in \mathcal{C}([-r, 0], E)$, on recherche $T > 0$, et une solution $x \in \mathcal{C}([-r, T], E)$ de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, T(t)x) \quad p.p. \ sur \ [0, T], \\ T(0)x = \varphi_0 \quad sur \ [-r, 0]. \end{cases}$$

Ce genre de problèmes se rencontre en théorie de contrôle optimale, dans les problèmes de collision, en électrodynamique, ainsi que dans les procédures de planning en microéconomie et dans les problèmes d'évolution biologiques. Nous nous intéressons ici aux problèmes avec retard fini.

2.1.2 Quelques exemples

Soit X un espace de dimension finie

Exemples 2.1.1. *Soit l'inclusion différentielle*

$$\dot{x}(t) \in G(t, x(t)),$$

où G est une multifonction définie sur $\mathbb{R} \times X$ à valeurs dans X. On pose :

$$F(t,\varphi) := G(t,\varphi(0)) \quad \text{pour tout } (t,\varphi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}([-r,0],X),$$

on obtient une inclusion différentielle avec retard.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} F(t,(T(t)x)) &= G(t,(T(t)x)(0)) \\ &= G(t, x(t+0)) \\ &= G(t, x(t)). \end{aligned}$$

Exemples 2.1.2. *L'inclusion différentielle définie par*

$$\dot{x}(t) \in G(t, x(t - r_1(t)), ..., x(t - r_p(t))),$$

où $G : \mathbb{R} \times X^p \rightrightarrows X, \quad p > 0,$ et r_i $(1 \leq i \leq p)$ sont appelées les fonctions de retard, fait partie à la classe des inclusions différentielles avec retard. En effet, on a :

$$F(t,\varphi) := G(t, \varphi(-r_1(t)), ..., \varphi(-r_p(t))),$$

on trouve

$$\begin{aligned} F(t,T(t)x) &= G(t, T(t)x(-r_1(t)), ..., T(t)x(-r_p(t))) \\ &= G(t, x(t - r_1(t)), ..., x(t - r_p(t))). \end{aligned}$$

Exemples 2.1.3. *L'inclusion différentielle de Volterra qui se présente sous la forme :*

$$\dot{x}(t) \in G(t, \int_{-\infty}^{t} K(t, s, x(s))ds),$$

où K est une fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X$ à valeurs dans X.

On met :

$$F(t, \varphi) := G(t, \int_{-\infty}^{0} K(t, t + \tau, \varphi(\tau))\ d\tau),$$

on a :

$$\begin{aligned} F(t, T(t)x) &= G(t, \int_{-\infty}^{0} K(t, t + \tau, T(t)x(\tau))\ d\tau) \\ &= G(t, \int_{-\infty}^{0} K(t, t + \tau, x(t + \tau))\ d\tau). \end{aligned}$$

On utilise le changement de variable :

$$s = t + \tau$$

si $\tau \longrightarrow -\infty \Longrightarrow s \longrightarrow -\infty$

si $\tau = 0 \Longrightarrow s = t$

donc

$$F(t, T(t)x) = G(t, \int_{-\infty}^{t} K(t, s, x(s))\ ds).$$

Ce qui prouve que l'inclusion différentielle de Volterra est une inclusion différentielle avec retard.

Lemme 2.1.1. ***(Lemme de Gronwall : forme intégrale)***

Soit $T \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et $a, b \in L^{\infty}_{\mathbb{R}}([T_0, T])$ et $c \in L^{1}_{\mathbb{R}}([T_0, T])$, $c(t) \leq 0$ pour presque tout $t \in [T_0, T]$ alors

$$a(t) \leq b(t) + \int_{T_0}^{t} c(s)a(s)\ ds \text{ p.p. sur } [T_0, T],$$

implique que pour tout $t \in [T_0, T]$

$$a(t) \leq b(t) + \int_{T_0}^{t} \exp\left(\vartheta(t) - \vartheta(s)\right)c(s)b(s)\ ds,$$

où $\vartheta(t) = \int_{T_0}^{t} c(\tau)\ d\tau.$

Définition 2.1.1. *Soit E un espace vectoriel topologique sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Une partie U de E est dite équilibrée si :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in U, \ |\lambda| \leq 1 \Longrightarrow \lambda v \in U.$$

2.2 Résultat d'existence

Énonçons d'abord un résultat de Casting-Moussaoui-Syam [5], pour le problème sans retard

Théorème 2.2.1. *Soit D un convexe fermé non vide de E. Soit F une multifonction définie sur $[0,T] \times D$ à valeurs dans $ck(E)$ satisfaisant à*

(i) F est $\mathscr{T}_\lambda([0,T]) \otimes \mathscr{B}(D)$-mesurable,

(ii) pour tout t fixé dans $[0,T], F(t,.)$ est semi-continue supérieurement sur D,

(iii) il existe $K \in ck(E)$ et équilibré tel que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times E$,

$$F(t,x) \subset (1 + \|x\|)K,$$

(iv) $F(t,x) \cap T_D(x) \neq \emptyset, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times D$.

Alors, pour tout $x_0 \in D$, il existe une fonction absolument continue $x : [0,T] \longrightarrow E$ telle que :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \ \textit{p.p. sur} \ [0,T], \\ x(t) \in D \quad \forall t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $T_D(x_0) := \{y \in E : \lim_{h \longrightarrow 0^+} \inf \frac{1}{h} d(x + hy, D) = 0\}$ *est le cône de Bouligand de D en x_0.*

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 2.2.2. *[5] Soit D un convexe fermé non vide de E. Soit F une multi-fonction définie sur $[0,T]\times\mathcal{C}([-r,0],E)$ à valeurs dans $ck(E)$ vérifiant les conditions suivantes*

(i) F est $\mathscr{T}_\lambda([0,T])\otimes\mathscr{B}(\mathcal{C}_0)$ mesurable,

(ii) pour tout t fixé dans $[0,T], F(t,.)$ est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{C}_0$,

(iii) il existe $K\in ck(E)$ et équilibré tel que pour tout $(t,\theta)\in[0,T]\times\mathcal{C}_0$,

$$F(t,\theta)\subset(1+\|\theta(0)\|)K,$$

(iv) $F(t,\theta)\cap T_D(\theta(0))\neq\emptyset,\ \forall(t,\theta)\in[0,T]\times\mathcal{C}_0$.

Alors, pour tout $\varphi_0\in\mathcal{C}_0$, il existe une fonction continue $x:[-r,T]\longrightarrow E$, absolument continue sur $[0,T]$ et vérifiant :

$$\begin{cases}\dot{x}(t)\in F(t,T(t)x)\ \text{p.p. sur }[0,T],\\ x(t)\in D\quad\forall t\in[0,T],\\ T(0)x=\varphi_0.\end{cases}$$

Preuve.

Pour l'existence, on prend $T=1$. Soit une subdivision de $[0,T]$ définie par $\mathcal{P}_n=\{t_i^n=i2^{-n}\ :i=0,1,2,...,2^n\}$.

$1^{\text{ère}}$ **étape. Construction des solutions approchées**.

On va construire une suite $(x_n)_n$ de fonctions de $\mathcal{C}([-r,T],E)$ absolument continues sur $[0,T]$, et pour tout $t\in[0,T]$, suite de fonctions $(f_n^{x_n(t)})_n$ de $\mathcal{C}([-r,T],E)$, deux suites $(\theta_n)_n$ *et* $(\delta_n)_n$ d'applications étagées de $[0,T]$ *dans* $[0,T]$ telles que $\lim\limits_n\theta_n(t)=t$ et $\lim\limits_n\delta_n(t)=t\ \forall t\in[0,T]$ vérifiant :

$$\begin{cases}\dot{x}_n(t)\in F(t,T(\delta_n(t))f_n^{x_n(t)})\ \ \text{p.p. sur }[0,T],\\ x_n(t)=\varphi_0(0)+\int_0^t\dot{x}_n(s)ds,\quad\forall t\in[0,T],\\ x_n(t)\in D\ \ \forall t\in[0,T],\\ x_n(t)=\varphi_0(t)\ \ \forall t\in[-r,0].\end{cases}$$

Pour tout $x\in D$, on définit $f_1^x:[-r,t_1^n]\longrightarrow E$ par

$$\begin{cases} f_1^x = \varphi_0 \quad sur \ [-r, 0], \\ f_1^x(t) = \varphi_0(0) + \frac{t}{2^{-n}}(x - \varphi_0(0)) \quad \forall t \in [0, t_1^n]. \end{cases}$$

Il est clair que $f_1^x(t_1^n) = x$ et $f_1^x \in \mathcal{C}([-r, t_1^n], E)$.

On définit alors la multifonction S_1^n sur $[0, t_1^n] \times D$ à valeurs dans $ck(E)$ par

$$S_1^n(t, x) = F(t, T(t_1^n) f_1^x), \quad \forall (t, x) \in [0, t_1^n] \times D.$$

On démontre que S_1^n vérifie les conditions du Théorème 2.2.1. En effet, la fonction définie par $x \mapsto T(t_1^n) f_1^x$ est 1-lipschitzienne en vertu de

$$\begin{aligned} \|T(t_1^n) f_1^x - T(t_1^n) f_1^y\|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s \in [-r, 0]} \|f_1^x(t_1^n + s) - f_1^y(t_1^n + s)\| \\ &= \sup_{s + t_1^n \in [0, t_1^n]} \|f_1^x(t_1^n + s) - f_1^y(t_1^n + s)\| \\ &= \sup_{s \in [-2^{-n}, 0]} \|\varphi_0(0) + \frac{s + t_1^n}{2^{-n}}(x - \varphi_0(0)) - \varphi_0(0) - \frac{s + t_1^n}{2^{-n}}(y - \varphi_0(0))\| \\ &= \sup_{s \in [-2^{-n}, 0]} \|\frac{s + t_1^n}{2^{-n}}(x - y)\| \\ &\leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

Pour tout t fixé dans $[0, t_1^n]$, $F(t, .)$ étant semi-continue supérieurement sur $\mathcal{C}_0$, on déduit que $S_1^n(t, .)$ est semi-continue supérieurement sur D.

D'autre part, d'après la condition (iii), on a pour tout $t \in [0, t_1^n]$ et $x \in D$,

$$F(t, T(t_1^n) f_1^x) = S_1^n(t, x) \subset (1 + \|f_1^x(t_1^n)\|) K = (1 + \|x\|) K,$$

donc $S_1^n(t, x) \subset (1 + ||x||) K$.

La condition (iv) implique que

$$S_1^n(t, x) \cap T_D(x) = F(t, T(t_1^n) f_1^x) \cap T_D(f_1^x(t_1^n)) \neq \emptyset, \ \forall (t, x) \in [0, t_1^n] \times D.$$

Par ailleurs, S_1^n est globalement mesurable de façon évidente car l'application $x \mapsto T(t_1^n) f_1^x$ est 1-lipschitzienne. En appliquant le Théorème 2.2.1 à S_1^n, il existe une application

$x_1^n : [0, t_1^n] \longrightarrow E$ absolument continue telle que

$$\begin{cases} \dot{x}_1^n(t) \in S_1^n(t, x_1^n(t)) \ \ p.p. \ sur \ [0, t_1^n], \\ x_1^n(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \dot{x}_1^n(s) \ ds \ \ \forall t \in [0, t_1^n], \\ x_1^n(t) \in D \ \ \forall t \in [0, t_1^n], \\ x_1^n(0) = \varphi_0(0). \end{cases}$$

Et donc x_1^n est solution de

$$\begin{cases} \dot{x}_1^n(t) \in F(t, T(t_1^n) f_1^{x_1^n(t)}) \ \ p.p. \ sur \ [0, t_1^n], \\ x_1^n(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \dot{x}_1^n(s) \ ds \ \ \forall t \in [0, t_1^n], \\ x_1^n(t) \in D \ \ \forall t \in [0, t_1^n] \\ x_1^n(0) = \varphi_0(0). \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} x_n(t) = \varphi_0(t) \ \ \forall t \in [-r, 0], \\ x_n(t) = x_1^n(t) \ \ \forall t \in [0, t_1^n]. \end{cases}$$

Comme précédemment, pour tout $x \in D$, on définit $f_2^x : [-r, t_2^n] \longrightarrow E$ par

$$\begin{cases} f_2^x(s) = x_n(s) \ \ \forall s \in [-r, t_1^n], \\ f_2^x(s) = x_n(t_1^n) + \frac{s - t_1^n}{2^{-n}}(x - x_n(t_1^n)) \ \ \forall s \in [t_1^n, t_2^n]. \end{cases}$$

De la même façon, on considère la multifonction S_2^n définie sur $[t_1^n, t_2^n] \times D$ à valeurs dans $ck(E)$ par

$$S_2^n(t, x) = F(t, T(t_2^n) f_2^x) \ \ \forall (t, x) \in [t_1^n, t_2^n] \times D.$$

Comme dans le cas précédent, S_2^n vérifie les conditions du Théorème 2.2.1. En effet, la fonction : $x \mapsto T(t_2^n) f_2^x$ est 1-lipschitzienne car, pour tout $x, y \in D$

$$\|T(t_2^n) f_2^x - T(t_2^n) f_2^y\|_{\mathcal{C}_0} = \sup_{s \in [-r, 0]} \|f_2^x(t_2^n + s) - f_2^y(t_2^n + s)\|$$

Pour tout $s \in [-r, -2^{-n}]$, $t_2^n + s \in [-r, t_1^n]$, *et* $f_1^x = f_1^y = x_n$ *sur* $[-r, t_1^n]$, *on a*

$$\begin{aligned}
\|T(t_2^n)f_1^x - T(t_2^n)f_1^y\|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s\in[-2^{-n},0]} \|f_1^x(t_2^n + s) - f_1^y(t_2^n + s)\| \\
&= \sup_{s\in[-2^{-n},0]} \|\varphi_0(0) + \frac{t_2^n + s}{2^{-n}}(x - \varphi_0(0)) - \varphi_0(0) - \frac{t_2^n + s}{2^{-n}}(y - \varphi_0(0))\| \\
&= \sup_{s\in[-2^{-n},0]} \|\frac{2^{-n} + s}{2^{-n}}(x - y)\| \\
&\leq \|x - y\|.
\end{aligned}$$

De plus comme pour tout t fixé dans $[t_1^n, t_2^n]$, la multifonction $F(t, .)$ est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{C}_0$, on déduit que la multifonction $S_2^n(t, .)$ est aussi semi-continue supérieurement sur D. Le même raisonnement implique que S_2^n est globalement mesurable.

D'autre part, d'après la condition (iii), il existe $K \in ck(E)$ tel que, pour tout $(t, x) \in [t_1^n, t_2^n] \times D$,

$$S_2^n(t, x) \subset (1 + \|T(t_2^n)f_2^x(0)\|)K,$$

avec $(T(t_2^n)f_2^x)(0) = x$, *et donc* $S_2^n(t, x) \subset (1 + \|x\|)K$.

De plus, d'après la condition (iv), on a pour tout $(t, x) \in [t_1^n, t_2^n] \times D$,

$$S_2^n(t, x) \cap T_D(x) = F(t, T(t_2^n)f_2^x) \cap T_D(T(t_2^n)f_2^x(0)) \neq \emptyset.$$

Toujours par application du Théorème 2.2.1 à S_2^n il existe une fonction x_2^n absolument continue sur $[t_1^n, t_2^n]$ telle que

$$\begin{cases}
\dot{x}_2^n(t) \in S_2^n(t, x_2^n(t)) \;\; p.p. \; sur \; [t_1^n, t_2^n], \\
x_2^n(t) = x_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t \dot{x}_2^n(s)\, ds \;\; \forall t \in [t_1^n, t_2^n], \\
x_2^n(t) \in D \;\; \forall t \in [t_1^n, t_2^n], \\
x_2^n(t_1^n) = x_n(t_1^n).
\end{cases}$$

Et donc x_2^n vérifie

$$\begin{cases} \dot{x}_2^n(t) \in F(t, T(t_2^n) f_2^{x_2^n(t)}) \ \ p.p. \ sur \ [t_1^n, t_2^n], \\ x_2^n(t) = x_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t \dot{x}_2(s) \ ds \ \ \forall t \in [t_1^n, t_2^n], \\ x_2^n(t) \in D \ \ \forall t \in [t_1^n, t_2^n], \\ x_2^n(t_2^n) = x_n(t_1^n). \end{cases}$$

Supposons ainsi construite une solution x_n sur $[-r, t_k^n]$ telle que x_n est absolument continue sur $[0, t_k^n]$ et vérifiant

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) \in F(t, T(t_k^n) f_k^{x_n(t)}) \ \ p.p. \ sur \ [t_{k-1}^n, t_k^n], \\ x_n(t) = x_n(t_{k-1}^n) + \int_{t_{k-1}^n}^t \dot{x}_n(s) \ ds \ \ \forall t \in [t_{k-1}^n, t_k^n], \\ x_n(t) \in D \ \ \forall t \in [t_{k-1}^n, t_k^n]. \end{cases}$$

Et construisons une solution sur $[t_k^n, t_{k+1}^n]$. Pour tout $x \in D$, on définit $f_{k+1}^x : [-r, t_{k+1}^n] \longrightarrow E$ par

$$\begin{cases} f_{k+1}^x = x_n \ \ sur \ [-r, t_k^n], \\ f_{k+1}^x(t) = x_n(t_k^n) + \frac{t - t_k^n}{2^{-n}} (x - x_n(t_k^n)) \ \ \forall t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]. \end{cases}$$

On remarque que $(T(t_{k+1}^n) f_{k+1}^x)(0) = x$ et $f_{k+1}^x \in \mathcal{C}([-r, t_{k+1}^n], E)$.

Considérons la multifonction S_{k+1}^n définie sur $[t_k^n, t_{k+1}^n] \times D$ à valeurs dans $ck(E)$ par

$$S_{k+1}^n(t, x) = F(t, T(t_{k+1}^n) f_{k+1}^x) \quad \forall (t, x) \in [t_k^n, t_{k+1}^n] \times D.$$

On démontre que S_{k+1}^n vérifie les conditions (i),(ii),(iii) et (iv) du théorème 2.2.1. En effet, la fonction définie par $x \longrightarrow T(t_{k+1}^n) f_{k+1}^x$ est 1-lipschitzienne car pour tout $x, y \in D$

$$||T(t_{k+1}^n) f_{k+1}^x - T(t_{k+1}^n) f_{k+1}^y||_{\mathcal{C}_0} = \sup_{s \in [-r, 0]} ||f_{k+1}^x(t_{k+1}^n + s) - f_{k+1}^y(t_{k+1}^n + s)||.$$

Pour tout $s \in [-r, -2^{-n}]$, $\ t_{k+1}^n + s \in [-r, t_k^n]$ et $f_k^x = f_k^y = x_n \ sur \ [-r, t_k^n]$, on a

$$
\begin{aligned}
||T(t^n_{k+1})f^x_k - T(t^n_{k+1})f^y_k||_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s\in[-2^{-n},0]} ||f^x_k(t^n_{k+1}+s) - f^y_k(t^n_{k+1}+s)|| \\
&= \sup_{s\in[-2^{-n},0]} ||x_n(t^n_{k-1}) + \frac{s+t^n_{k+1}-t^n_{k-1}}{2^{-n}}(x - x_n(t^n_{k-1})) \\
&- x_n(t^n_{k-1}) - \frac{s+t^n_{k+1}-t^n_{k-1}}{2^{-n}}(y - x_n(t^n_{k-1}))|| \\
&= \sup_{s\in[-2^{-n},0]} ||\frac{s+t_{k+1}-t^n_{k-1}}{2^{-n}}(x-y)|| \\
&\leq ||x-y||.
\end{aligned}
$$

De plus comme pour tout t fixé dans $[t^n_k, t^n_{k+1}]$, la multifonction $F(t,.)$ est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{C}_0$, on déduit que la multifonction $S^n_{k+1}(t,.)$ est aussi semi-continue supérieurement sur D, le même raisonnement implique que S^n_{k+1} est globalement mesurable.

D'après la condition (iii), il existe $K \in ck(E)$ tel que, pour tout $(t,x) \in [t^n_k, t^n_{k+1}] \times D$ $S^n_{k+1}(t,x) \subset (1 + ||T(t^n_{k+1})f^x_{k+1}(0)||)K$, avec $T(t^n_{k+1})f^x_{k+1}(0) = x$, donc

$$S^n_{k+1}(t,x) \subset (1 + ||x||)K.$$

De plus d'après la condition (iv), on a pour tout $(t,x) \in [t^n_k, t^n_{k+1}] \times D$

$$S^n_{k+1}(t,x) \cap T_D(x) = F(t, T(t^n_{k+1})f^x_{k+1} \cap T_D(T(t^n_{k+1})f^x_{k+1})(0) \neq \emptyset.$$

Donc S^n_{k+1} vérifie les conditions (i),(ii),(iii) et (iv) du théorème 2.2.1 d'où l'existence d'une fonction x^n_{k+1} absolument continue sur $[t^n_k, t^n_{k+1}]$ et vérifiant :

$$
\begin{cases}
\dot{x}^n_{k+1}(t) \in S^n_{k+1}(t, x^n_{k+1}(t)) \;\; p.p. \; sur \; [t^n_k, t^n_{k+1}], \\
x^n_{k+1}(t) = x_n(t^n_k) + \int_{t^n_k}^t \dot{x}^n_{k+1}(s)\, ds \;\; \forall t \in [t^n_k, t^n_{k+1}], \\
x^n_{k+1}(t) \in D \;\; \forall t \in [t^n_k, t^n_{k+1}], \\
x^n_{k+1}(t^n_k) = x_n(t^n_k).
\end{cases}
$$

Et donc x^n_{k+1} vérifie

$$\begin{cases} \dot{x}^n_{k+1}(t) \in F(t, T(t^n_{k+1}) f^{x^n_{k+1}(t)}_{k+1}) \;\; p.p. \; sur \; [t^n_k, t^n_{k+1}], \\ x^n_{k+1}(t) = x^n_k(t^n_k) + \int_{t^n_k}^t \dot{x}^n_{k+1}(s)\, ds \;\; \forall t \in [t^n_k, t^n_{k+1}], \\ x^n_{k+1}(t) \in D \;\; \forall t \in [t^n_k, t^n_{k+1}], \\ x^n_{k+1}(t^n_k) = x^n_k(t^n_k). \end{cases}$$

Par suite, on pose $x_n = x^n_{k+1}$ sur $[t^n_k, t^n_{k+1}]$ et pour tout $t \in [0, T]$, on pose $\theta_n(t) = t^n_i$ et $\delta_n(t) = t^n_{i+1}$ pour tout $t \in [t^n_i, t^n_{i+1}[$ et $\theta_n(T) = T$.

On définit pour tout t fixé de $[0, T]$, $f^{x_n}_n(t) \in \mathcal{C}([-r, \delta_n(t)], E)$ par

$$\begin{cases} f^{x_n(t)}_n(s) = x_n(s) \;\; \forall s \in [-r, \theta_n(t)], \\ f^{x_n(t)}_n(s) = x_n(\theta_n(t)) + \dfrac{s - \theta_n(t)}{2^{-n}}(x_n(t) - x_n(\theta_n(t))) \;\; \forall s \in [\theta_n(t), \delta_n(t)]. \end{cases}$$

Il est clair que par construction, x_n est continue sur $[-r, T]$, absolument continue sur $[0, T]$ et vérifie

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) \in F(t, T(\delta_n(t)) f^{x_n(t)}_n) \;\; p.p. \; sur \; [0, T], \\ x_n(t) = \varphi_(0)(0) + \int_0^t \dot{x}_n(s)\, ds \;\; \forall t \in [0, T], \\ x_n(t) \in D \;\; \forall t \in [0, T], \\ x_n(t) = \varphi_0(t) \;\; \forall t \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ce qui termine la démonstration de la $1^{\text{ère}}$ étape.

$2^{\text{ème}}$ étape. La convergence des suites approchées.

Maintenant, on est en mesure de démontrer la convergence de la suite approximante.

D'après ce qui précède, il existe une suite $(x_n)_n$ des fonctions continues sur $[-r, T]$ absolument continues sur $[0, T]$, une suite $(f^{x_n(t)}_n)_n \in \mathcal{C}([-r, T], E)$ pour tout t fixé dans $[0, T]$ et vérifiant (2.2). On va maintenant prouver que la suite $(x_n)_n$ converge uniformément vers une fonction absolument continue sur $[0, T]$.

En effet ; d'après la condition (iii) et (2.2), pour presque tout $t \in [0,T]$, il existe $K \in ck(E)$ tel que

$$\dot{x}_n(t) \in F(t, T(\delta_n(t))f_n^{x_n(t)}) \subset (1 + ||T(\delta_n(t))f_n^{x_n(t)}(0)||)K,$$

avec $T(\delta_n(t))f_n^{x_n(t)}(0) = x_n(t)$.

Puisque K est un compact, il existe alors une constante $M > 0$ tel que

$$||F(t,\varphi_0)|| \leq (1 + ||\varphi_0(0)||)M \textit{ pour tout } (t,\varphi_0) \in [0,T] \times \mathcal{C}_0,$$

d'où

$$||\dot{x}_n(t)|| \leq ||F(t, T(\delta_n(t))f_n^{x_n(t)})|| \leq (1 + ||x_n(t)||)M.$$

De plus, x_n étant absolument continue sur $[0,T]$, on a

$$||x_n(t) - \varphi_0(0)|| \leq \int_0^t M(1 + ||x_n(s)||)\, ds,$$

Par conséquent

$$||x_n(t)|| \leq ||\varphi_0(0)|| + MT + M\int_0^t ||x_n(s)||ds, \ \forall t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

D'après l'inégalité de *Gronwall*, on obtient pour tout t,

$$||x_n(t)|| \leq (||\varphi_0(0)|| + MT)exp(MT) := e,$$

et donc pour tout t,

$$\dot{x}_n(t) \in F(t, T(\delta_n(t))f_n^{x_n(t)}) \subset (1+e)K, \tag{2.4}$$

Comme K est convexe compact et grâce à (2.4), la suite $(\dot{x}_n)_n$ est relativement compacte dans $L^1_E([0,T])$. On peut alors extraire une sous suite encore notée $(\dot{x}_n)_n$ qui converge $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers une fonction $y \in L^1_E$. D'autre part de (2.2), et du fait que x_n est absolument continue sur $[0,T]$, on obtient

- $||\dot{x}_n(t)|| \leq (1+e)M$ et la suite $(x_n)_n$ est équicontinue, i.e.

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - x_n(a)\| &= \| \int_a^t \dot{x}_n(s)\ ds\| \\
&\leq \int_a^t \|\dot{x}(s)_n\|\ ds \\
&\leq \int_a^t (1+e)M\ ds \\
&\leq (1+e)M|t-a| \\
&\leq |t-a| \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

D'où on a : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta = (1+e)M > 0; |t-a| < \eta \Longrightarrow \|x_n(t) - x_n(a)\| < \epsilon.$

- Pour tout $t \in [0,T], par(2.2)$ $(x_n(t))_n$ est inclus dans $\varphi_0(0) + MT(1+e)K$.

D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, il s'ensuit que $(x_n)_n$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers x où

$$x(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t y(s)\ ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

donc $\dot{x}(t) = y(t)$ p.p. D étant fermé, implique que $x(t) \in D$ pour tout $t \in [0,T]$. Puisque $x_n = \varphi_0$ sur $[-r,0]$, on prolonge de manière évidente x par φ_0 sur $[-r,0]$. Démontrons maintenant que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\lim_n T(\delta_n(t)) f_n^{x_n(t)} = T(t)x \quad dans\ \mathcal{C}([-r,0],E).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
||T(\delta_n(t)) f_n^{x_n(t)} - T(t)x||_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s\in[-r,0]} ||f_n^{x_n(t)}(\delta_n(t)+s) - x(s+t)|| \\
&= \sup_{s\in[-r,-2^{-n}]} ||f_n^{x_n(t)}(\delta_n(t)+s) - x(s+t)|| \\
&+ \sup_{s\in[-2^{-n},0]} ||f_n^{x_n(t)}(\delta_n(t)+s) - x(s+t)||.
\end{aligned}$$

Pour le premier terme de l'inégalité, pour tout $s \in [-r, -2^{-n}]$ et $t \in [0, T]$, on a $\delta_n(t) + s \in [-r, \theta_n(t)]$ et donc

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[-r,-2^{-n}]} ||f_n^{x_n(t)}(\delta_n(t)+s) - x(s+t)|| &= \sup_{s\in[-r,-2^{-n}]} ||x_n(\delta_n(t)+s) - x(s+t)|| \\
&\leq \sup_{s\in[-r,-2^{-n}]} ||x_n(\delta_n(t)+s) - x(\delta_n(t)+s)|| \\
&+ \sup_{s\in[-r,-2^{-n}]} ||x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)||.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

D'autre part, pour le second terme de l'inégalité, pour tout $s \in [-2^{-n}, 0]$ on a

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[-2^{-n},0]} ||f_n^{x_n(t)}(\delta_n(t)+s) - x(s+t)|| &= \sup_{s\in[-2^{-n},0]} ||x_n(\theta_n(t)) \\
&+ \frac{s+2^{-n}}{2^{-n}}(x_n(t) - x_n(\theta_n(t))) - x(t+s)|| \\
&\leq \sup_{s\in[-2^{-n},0]} ||\frac{s}{2^{-n}}(x_n(\theta_n(t) - x_n(t)|| \\
&+ \sup_{s\in[-2^{-n},0]} ||x_n(t) - x(s+t)|| \\
&\leq ||x_n(\theta_n(t)) - x_n(t)|| + ||x_n(t) - x(t)|| \\
&+ \sup_{s\in[-2^{-n},0]} ||x(t) + x(s+t)||.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Les suites $(\theta_n(t))_n$ et $(\delta_n(t))_n$ vérifient $|\theta_n(t) - t| \leq 2^{-n}$ et $|\delta_n(t) - t| \leq 2^{-n}$, $\forall t \in [0, T]$. Par suite, elles convergent simplement vers t à l'infini. D'autre part, la suite $(x_n)_n$ converge uniformément vers la fonction x. En passant à la limite dans (2.5) et (2.6), on obtient donc

$$\lim_n \sup_{-r\leq s\leq -2^{-n}} ||f_n^{x_n(t)}(\delta_n(t)+s) - x(s+t)|| = 0,$$

et

$$\lim_n \sup_{-2^{-n}\leq s\leq 0} ||f_n^{x_n(t)}(\delta_n(t)+s) - x(s+t)|| = 0.$$

En appliquant le Théorème 1.6.10, on en déduit que

$\dot{x}(t) \in F(t, T(t)x)$ p.p. sur $[0, T]$.

Et donc x vérifie :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, T(t)x) \quad p.p. \ sur \ [0, T], \\ x(t) \in D \quad \forall t \in [0, T], \\ T(0)x = \varphi_0. \end{cases}$$

Ce qui termine la démonstration.

□

CHAPITRE 3

PROCESSUS DE LA RAFLE DU PREMIER ORDRE AVEC UNE PERTURBATION RETARDÉE

Introduction

Le processus de la rafle («*sweeping process*» en anglais) est une inclusion différentielle de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{K(t)}(x(t)) \qquad \text{p.p. sur } [0,T], \\ x(t) \in K(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in K(0), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $K(t)$ est un ensemble non vide convexe fermé, $N_{K(t)}(x(t))$ est le cône normal à $K(t)$ en $x(t)$. Les premiers travaux concernant ce type de problèmes on été entrepris dans les les années 70 par **J.J Moreau**, pour la modélisation d'un certain nombre de situations pratiques en mécanique des systèmes avec contrainte unilatérale. Intuitivement on peut définir le processus de la rafle comme suit : un ensemble convexe fermé mobile $K(t)$ d'un espace de Hilbert varie avec le temps, à l'instant initial, un point $x_0 \in K(0)$ au cours de temps ce point est éventuellement poussé par le bord de $K(t)$ dans la direction de la normale rentrante et reste dans $K(t)$, c-à-d le point mobile reste fixe dans H tant qu'il est interne à $K(t)$, lorsque x est rejoint par la frontière de cet ensemble, il est poussé par cette frontière dans la direction de la normale rentrante de manière à rester dans $K(t)$ pour tout t.

Ce chapitre est consacré à l'étude du processus de la rafle du premier ordre avec une perturbation retardée dans un espace de Hilbert séparable. La perturbation se présente par une multi-application scalairement semi continue supérieurement. Soit H un espace de Hilbert réel et $[0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On s'intéresse ici à l'étude du processus de la rafle avec une perturbation retardée

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{K(t)}(x(t)) + F(t, x_t) \quad p.p. \ sur \ [0, T], \\ x(t) \in K(t) \quad \forall t \in [0, T], \\ x_0 = \varphi \quad [-r, 0]. \end{cases} \tag{3.2}$$

où $K : [0, T] \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides fermées, $N_{K(t)}$ désigne le cône normal à $K(t)$, F est une multi-application bornée définie sur $[0, T] \times \mathcal{C}_0$ à valeurs convexes faiblement compactes dans H et scalairement s.c.s.

3.1 Résultats auxiliaires

Nous allons commencer par rappeler quelques résultats qui nous seront utiles dans la suite.

Dans tout ce chapitre $[0, T](0 < T)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et H est un espace de Hilbert réel séparable muni d'un produit scalaire noté par $\langle ., . \rangle$ et de la norme qui lui est associée et qu'on note par $||.||$.

Définition 3.1.1. *(**Fonction distance**). Soit A un sous ensemble non vide de H et $x \in H$. La distance de x à A, noté par $d_A(x)$ où $d(x, A)$, est définie par*

$$d_A(x) := inf\{||x - y|| : y \in A\}.$$

Définition 3.1.2. *(**La projection**). On définit l'ensemble des points de A dont la distance à A est minimale par*

$$proj_A(x) := \{y \in A : d_A(x) = ||x - y||\}.$$

Proposition 3.1.1. *Soit A un convexe fermé d'un espace de Hilbert H. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *y est la projection de x sur A,*

(ii) *$y \in A$, $\langle y - x, y - x_0 \rangle \leq 0 \quad \forall x_0 \in A$,*

(iii) *$y \in A$, $x - y \in N_A(y)$.*

Définition 3.1.3. *(**Distance de Hausdorff**).*

Soient X un espace métrique, A et B deux sous ensembles fermés non vides de X. L'écart de A sur B (resp. de B sur A) est défini par :

$$e(A, B) = \sup\{d(x, B); x \in A\}.$$

On appelle distance de Hausdorff la fonction numérique $h(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}$.

Définition 3.1.4. *Soit la multifonction $t \mapsto F(t)$ définie de $[0, T]$ à valeurs dans H. On dit que F est γ-lipschitzienne s'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :*

$$h(F(t), F(s)) \leq \gamma|t - s|, \quad t, s \in [0, T].$$

Lemme 3.1.2. *[16] Soit $(u_n)_{n \in N}$ une suite de fonctions, $u_n : [0, T] \longrightarrow H$ telle que $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u_*$ dans $L^\infty_H([0, T]), i.e,$*

$$\int_0^T \langle u_n(t), \varphi(t) \rangle \, dt \longrightarrow \int_0^T \langle u_*(t), \varphi(t) \rangle \, dt, \; n \longrightarrow \infty \; \forall \varphi \in L^1_H([0, T]).$$

Supposons que

1. *$F(t) \subset H$ est convexe fermé $\forall t \in [0, T]$,*
2. *F est γ-lipschitzienne sur $[0, T]$.*

Soit

$$\phi(u) = \int_0^T \delta^*(u(t), F(t)) \, dt \quad \text{pour } u \in L^\infty_H([0, T]).$$

Alors ϕ est semi-continue inférieurement, i.e, $\phi(u_*) \leq \liminf\limits_{n \longrightarrow \infty} \phi(u_n)$.

Proposition 3.1.3. *Soit K une multifonction γ-lipschitzienne définie sur $[0, T]$ à valeurs convexes compactes dans H, on a :*

$$\forall s, t \in [0, T], \quad ||proj(x, K(s)) - proj(x, K(t))|| \leq h(K(s), K(t)).$$

Définition 3.1.5. *[2] (**Sous différentiel**).*

Soient E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique, f une fonction convexe définie de E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in domf$.
Le sous différentiel de f au point x_0, noté $\partial f(x_0)$ est le sous ensemble de E' défini par

$$\partial f(x_0) = \{x' \in E' : f(x) \geq f(x_0) + \langle x', x - x_0 \rangle,\ \forall x \in E\}.$$

Proposition 3.1.4. *Soient f une fonction convexe sur E à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $x_0 \in domf$. Alors, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $x' \in \partial f(x_0)$,
2. $f^*(x') + f(x_0) \leq \langle x', x_0 \rangle$,
3. $f^*(x') + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle$,
4. *pour tout $x \in E$, on a : $f(x) \geq \langle x', x - x_0 \rangle + f(x_0)$, autrement dit f admet une minorante affine exacte continue en x_0.*

De plus $\partial f(x_0)$ est un sous ensemble convexe fermé de E'.

Preuve.

• Montrons que si $x' \in \partial f(x_0)$, alors $f^*(x') + f(x_0) \leq \langle x', x_0 \rangle$.

$$\begin{aligned} x' \in \partial f(x_0) &\Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + \langle x', x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in E \\ &\Leftrightarrow \langle x', x \rangle - f(x) \leq \langle x', x_0 \rangle - f(x_0), \quad \forall x \in E \\ &\Leftrightarrow \sup_{x \in E}[\langle x', x \rangle - f(x)] + f(x_0) \leq \langle x', x_0 \rangle \\ &\Leftrightarrow f^*(x) + f(x_0) \leq \langle x', x_0 \rangle. \end{aligned}$$

• On sait que $f^*(x') \geq \langle x', x \rangle - f(x)$ pour tout x dans E. En particulier pour $x = x_0$, on aura $f^*(x') + f(x_0) \geq \langle x', x_0 \rangle$, donc d'après la propriété (2), il en résulte que

$$f^*(x') + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle.$$

• L'équivalence de (1) et (4) résulte de la définition.

• $\partial f(x_0)$ est un sous ensemble convexe de E'. En effet, soient $x', y' \in \partial f(x_0)$ et

$t \in [0,1]$, montrons que : $tx' + (1-t)y' \in \partial f(x_0)$.

$$x' \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow f^*(x') + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle,$$

$$y' \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow f^*(y') + f(x_0) = \langle y', x_0 \rangle.$$

En multipliant ces deux dernières inégalités par $t, (1-t)$ respectivement et en additionnant on obtient

$$tf^*(x') + (1-t)f^*(y') + f(x_0) = \langle tx' + (1-t)y', x_0 \rangle,$$

et comme f^* est convexe on trouve

$$f^*(tx' + (1-t)y') + f(x_0) \leq \langle tx' + (1-t)y', x_0 \rangle,$$

d'où $tx' + (1-t)y' \in \partial f(x_0)$, donc la convexité de ∂f.

• Soit $(x'_n)_{n \in N}$ une suite de $\partial f(x_0)$ telle que x'_n converge vers $x' \in E'$ quand n tend vers $+\infty$.

Alors

$$\begin{aligned}
\textit{Soit} \quad x'_n \in \partial f(x_0) \quad \forall n \in N &\Leftrightarrow f^*(x'_n) + f(x_0) = \langle x'_n, x_0 \rangle \quad \forall n \in N \\
&\Rightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} f^*(x'_n) + f(x_0) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \langle x'_n, x_0 \rangle \\
&\Leftrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} f^*(x'_n) + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\
&\Leftrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} (\sup_{x \in E} [\langle x'_n, x \rangle - f(x)]) + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\
&\Leftrightarrow \sup_{x \in E} (\lim_{n \longrightarrow +\infty} [\langle x'_n, x \rangle - f(x)]) + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\
&\Leftrightarrow f^*(x') + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\
&\Leftrightarrow x' \in \partial f(x_0).
\end{aligned}$$

Donc $\partial f(x_0)$ est un sous ensemble fermé de E'. $\square$

Définition 3.1.6. *Soit E un espace vectoriel normé, $A \subset E$, on dit que A est un cône si est seulement si*

$$\forall x \in A, \ \forall \lambda \geq 0, \ \lambda x \in A.$$

Définition 3.1.7. *(**Cône normal**).*

Soient E un espace vectoriel normé, $A \subset E$ un sous ensemble convexe et $x_0 \in A$. On appelle cône normal à A au point x_0 l'ensemble noté $N_A(x_0)$ défini par :

$$N_A(x_0) = \{x' \in E' : \langle x', x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in A\}.$$

On vérifie aisément que $N_A(x_0)$ est un cône et que $0 \in N_A(x_0)$.

Proposition 3.1.5. *Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble convexe fermé de H et $y \in H$. Alors*

1- $x_0 = proj_A(y) \Longleftrightarrow y - x_0 \in N_A(x_0)$.

2- $x' \in N_A(x_0) \Longleftrightarrow x_0 \in A$ et $\langle x', x_0 \rangle = \delta^*_A(x')$.

Proposition 3.1.6. *Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble convexe fermé de H et $x_0 \in A$. Alors :*

$$\partial \delta_A(x_0) = N_A(x_0).$$

Si $x_0 \notin A$. Alors :

$$\partial \delta_A(x_0) = 0$$

Théorème 3.1.7. *(**Banach-Alaoglu-Bourbaki**).*

L'ensemble $B_{E'} = \{x' \in E' : ||x'|| \leq 1\}$ est compact pour la topologie faible* $\sigma(E', E)$.

Proposition 3.1.8. *[7] Soit E un espace de Banach séparable. Alors, toute suite bornée dans E' admet une sous suite faiblement* convergente dans E'.*

Remarques 3.1.1. *Lorsque E est de dimension finie les trois topologies forte, faible et faible* coïncident.*

Définition 3.1.8. *Une multifonction $K : [0, T] \rightrightarrows ck(H)$ à valeurs convexes compactes non vides dans H est dite absolument continue si sa fonction variation est absolument continue. La variation $v : [0, T] \longrightarrow [0, +\infty]$ de K est donnée par*

$$v(t) = \sup_{(t_i)_{i=1}^n} h(K(t_i), K(t_{i-1})).$$

où le suprémum est pris sur toutes les partitions

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T.$$

comme conséquence à cette définition, on a

$$h(K(t), K(s)) \leq v(t) - v(s) = \int_s^t \dot{v}(z)\ dz \quad \forall\ 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Définition 3.1.9. *Une fonction $x : [0,T] \longrightarrow H$ est dite solution du problème* (3.1) *si*

$$\begin{cases} (a) & x(0) = x_0, \\ (b) & x(t) \in K(t), \quad \forall t \in [0,T], \\ (c) & x \text{ est différentiable presque par tout sur } [0,T], \\ (d) & -\dot{x}(t) \in N_{K(t)}(x(t)) \ \text{ p.p. sur } [0,T]. \end{cases}$$

Voici le résultat du initialement à **J.J.Moreau**.

Proposition 3.1.9. *Soit $K : [0,T] \rightrightarrows ck(H)$ absolument continue de variation v, alors pour tout $a \in K(0)$, il existe une unique solution x, absolument continue vérifiant :*

$$-\dot{x}(t) \in N_{K(t)}(x(t)) \ \text{ p.p. sur } [0,T], \ x(0) = a \in K(0),$$

avec $|\dot{x}(t)| \leq \dot{v}(t)$ presque partout dans $[0,T]$, de plus si x et v sont deux solutions avec $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$, alors

$$||x(t) - v(t)|| \leq ||x_0 - v_0||, \quad \forall t \in [0,T].$$

La démonstration repose sur la construction d'une suite approximante de la solution à l'aide d'une discrétisation de l'intervalle $[0,T]$ et un algorithme dit de rattrapage de la forme suivante : pour tout $n \in N^*$

$$0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T, \quad t_{i+1} - t_i \leq \frac{1}{n},$$

$$x_0^n = x_0, \ x_{i+1}^n = proj_{K(t_{i+1})}(x_i^n) \in K(t_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

L'approximation x_{i+1}^n est tenue de rattraper l'ensemble $K(t_{i+1})$. Pour montrer l'existence de la solution, on doit s'assurer que la suite construite des fonctions approximantes admet des variations uniformément bornées et on utilise le lemme suivant (de compacité) qui permet de choisir une sous suite convergente.

Lemme 3.1.10. *Soit $(x_n)_n$ une suite de fonctions de $[0,T]$ dans H uniformément bornée en norme et en variation, i.e.*

$$||x_n(t)|| \leq M_1,\ \forall n \in N,\ t \in [0,T] \quad et \quad var(x_n) \leq M_2,\ \forall n \in N,$$

pour deux constantes $M_1,\ M_2 > 0$ indépendamment de n et t, alors il existe une sous suite (x_{n_k}) et une fonction $x : [0,T] \longrightarrow H$ telle que $var(x) \leq M_2$ et $x_{n_k}(t) \rightharpoonup x(t)$ converge faiblement dans H pour $t \in [0,T]$.

3.2 Résultat d'existence

Théorème 3.2.1. *[6] Soit H un espace de Hilbert séparable. Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*
$(\mathcal{H}_1)$ $K : [0,T] \rightrightarrows ck(H)$ est une multifonction γ-lipschitzienne définie sur $[0,T]$ à valeurs convexes compactes dans H.
$(\mathcal{H}_2)$ $F : [0,T] \times \mathcal{C}_0 \rightrightarrows cwk(H)$ est une multifonction à valeurs convexes faiblement compactes telle que F est scalairement semi-continue supérieurement sur $[0,T] \times \mathcal{C}_0$ et vérifie

$$||F(t,x)|| = \sup\{||y||, y \in F(t,x)\} \leq m,$$

tel que m est une constante positive.
Alors, pour chaque $\varphi \in \mathcal{C}_0$ avec $\varphi(0) \in K(0)$, il existe une fonction continue $x : [-r,T] \longrightarrow H$ telle que x est lipschitzienne sur $[0,T]$ et satisfait :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{K(t)}(x(t)) + F(t,x_t) \ p.p.\ t \in [0,T], \\ x(t) \in K(t) \quad \forall t \in [0,T], \\ x_0 = \varphi \quad dans\ [-r,0]. \end{cases} \tag{3.3}$$

Preuve.

La démonstration de l'existence de la solution se fait en quatre étapes :

$1^{\text{ère}}$ **étape : Discrétisation de l'intervalle [0,T] :**

Pour tout $n \geq 1$, considérons la subdivision de l'intervalle $[0,T]$ définie par :

$t_i^n = \frac{iT}{n} \quad \forall i \in [0, n]$,

$$t_0^n = 0 < t_1^n = \frac{T}{n} < t_2^n = \frac{2T}{n} < t_3^n = \frac{3T}{n} < ...t_n^n = \frac{nT}{n} = T.$$

$2^{\text{ème}}$ **étape : Algorithme de rattrapage :**

On définit une suite d'applications $(x_n)_n$ sur $C_T = \mathcal{C}([-r, T], H)$ comme suit :

on pose :

$$x_n(t) = \varphi(t), \quad \textit{pour tout } t \in [-r, 0]. \tag{3.4}$$

et

$$x_{i+1}^n = proj(x_i^n + h_n f_0(t_i^n, T(t_i^n)x_n), K(t_{i+1}^n)) \tag{3.5}$$

Si on pose $h_n = \frac{T}{n}$

$T(t_i^n)x_n(\tau) = x_n(t_i^n + \tau)$ où $f_0(t_i^n, T(t_i^n)x_n)$ est l'élément de norme minimale de $F(t_i^n, T(t_i^n)x_n)$ c-à-d

$$||f_0(t_i^n, T(t_i^n)x_n)|| = \min\{||y||, \ y \in F(t_i^n, T(t_i^n)x_n)\},$$

cette construction est possible grâce à la convexité des images de K.

On a par construction $x_i^n \in K(t_i^n)$, pour tout $0 \leq i \leq n$.

$3^{\text{ème}}$ **étape : Suite des solutions approchées :**

On va construire une suite des solutions approchées $x_n : [0, T] \longrightarrow H$ sur chaque sous intervalle $[t_i^n, t_{i+1}^n], \quad 0 \leq i \leq n$, par l'interpolation linéaire.

$$x_n(t) = x_i^n + (\frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n})(x_{i+1}^n - x_i^n), \qquad t \in [t_i^n, t_{i+1}^n].$$

De cette formule, la relation (3.5) ainsi que les propriétés du cône normal, on obtient :

$$x_{i+1}^n \in -N_{K(t_{i+1}^n)}(x_n(t_{i+1}^n)) + (x_i^n + h_n f_0(t_i^n, T(t_i^n)x_n) \quad \textit{sur } [t_i^n, t_{i+1}^n], \tag{3.6}$$

donc

$$x_{i+1}^n - x_i^n - h_n f_0(t_i^n, T(t_i^n)x_n) \in -N_{K(t_{i+1}^n)}(x_n(t_{i+1}^n)) \quad \textit{sur } [t_i^n, t_{i+1}^n].$$

on trouve

$$\frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{\frac{(i+1-i)T}{n}} \in -N_{K(t_{i+1}^n)}(x_n(t_{i+1}^n)) + f_0(t_i^n, T(t_i^n)x_n) \quad sur\ [t_i^n, t_{i+1}^n].$$

Ce qui implique :

$$\frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \in -N_{K(t_{i+1}^n)}(x_n(t_{i+1}^n)) + f_0(t_i^n, T(t_i^n)x_n) \quad sur\ [t_i^n, t_{i+1}^n]$$

d'où

$$\dot{x}_n(t) \in -N_{k(t_{i+1}^n)}(x_n(t_{i+1}^n)) + f_0(t_i^n, T(t_i^n)x_n) \quad sur\ [t_i^n, t_{i+1}^n].$$

$4^{\text{ème}}$ **étape : Convergence de la suite des solutions approchées :**

On va trouver une sous suite de $(x_n)_{n\in N}$ qui converge vers la solution du problème (3.3) :

on a

$$||\dot{x}_n(t)|| = ||\frac{x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n)}{t_{i+1}^n - t_i^n}|| = \frac{1}{h_n}||x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n)|| \quad p.p.sur\ [0,T]$$

et

$$\begin{aligned} ||x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n)|| &= ||x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n) + proj(x_i^n, K(t_{i+1}^n)) - proj(x_i^n, K(t_{i+1}^n))|| \\ &\leq ||x_n(t_{i+1}^n) - proj(x_i^n, K(t_{i+1}^n))|| + ||proj(x_i^n, K(t_{i+1}^n)) - x_n(t_i^n)||. \end{aligned}$$

d'une part :

$$\begin{aligned} ||x_n(t_{i+1}^n) - proj(x_i^n, K(t_{i+1}^n))|| &= ||proj(x_i^n + h_n f_0(t_i^n, T(t_i^n)x_n, K(t_{i+1}^n)) - proj(x_i^n, K(t_{i+1}^n))|| \\ &= ||proj(x_i^n + h_n f_0(t_i^n, T(t_i^n)x_n - x_i^n, K(t_{i+1}^n))|| \\ &\leq ||h_n f_0(t_i^n, T(t_i^n)x_n)|| \\ &\leq h_n||f_0(t_i^n, T(t_i^n)x_n)|| \\ &\leq h_n m. \end{aligned} \tag{3.7}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
||proj(x_i^n, K(t_{i+1}^n)) - x_n(t_i^n)|| &= ||proj(x_i^n, K(t_{i+1}^n)) - proj(x_i^n, K(t_i^n))|| \\
&\leq h(K(t_{i+1}^n), K(t_i^n)) \\
&\leq \gamma|t_{i+1}^n - t_i^n| \\
&\leq \gamma|\frac{(i+1)T}{n} - \frac{iT}{n}| \\
&\leq \gamma\frac{T}{n} \\
&\leq \gamma h_n. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

De (3.7) et (3.8) on trouve :

$$||x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n)|| \leq h_n(\gamma + m) \Longrightarrow \frac{1}{h_n}||x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n)|| \leq \gamma + m.$$

Donc : $||\dot{x}_n(t)|| \leq \gamma + m \quad \forall n$,Alors $(\dot{x}_n)_n$ est bornée.

Pour tout $t \in [0, T]$, pour chaque n, et tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, pour un certain i on a :

$$\begin{aligned}
d(x_n(t), K(t)) &= \inf_{k \in K(t)}(||x_n(t) - k||) \\
&= \inf_{k \in K(t)}(||x_n(t) - k - x_n(t_i^n) + x_n(t_i^n)|| \\
&\leq ||x_n(t) - x_n(t_i^n)|| + \inf_{k \in K(t)} ||x_n(t_i^n) - k|| \\
&\leq ||x_n(t) - x_n(t_i^n)|| + \sup \inf_{k \in K(t)} ||x_n(t_i^n) - k|| \\
&\leq ||x_n(t) - x_n(t_i^n)|| + h(K(t), K(t_i^n)) \\
&\leq (m+\gamma)|t - t_i^n| + \gamma|t - t_i^n| \\
&= (2\gamma + m)|t - t_i^n| \\
&\leq (2\gamma + m)\frac{T}{n} \\
&\leq (m + 2\gamma)h_n. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

$K(t)$ étant compact, (3.9) implique que l'ensemble $\{x_n(t), n\}$ est relativement compact dans H. Via le théorème d'Ascoli-Arzélà, on conclut que $(x_n)_n$ admet une sous suite notée aussi $(x_n)_n$ qui converge uniformément vers une application continue x

dans $[-r, T]$, $x_0 = \varphi$ sur $[-r, 0]$. Par passage à la limite dans (3.9), on obtient :

$$x(t) \in K(t), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.10}$$

Maintenant, on considère les fonctions $\sigma_n(t)$ et $\theta_n(t)$ définie de $[0, T]$ vers $[0, T]$ par

$\sigma_n(t) = t_i^n \quad et \quad \theta_n(t) = t_{i+1}^n \qquad si\ t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

et

$$\theta_n(t) \longrightarrow t \quad et \quad \sigma_n(t) \longrightarrow t \ \text{ uniformément sur } [0, T]. \tag{3.11}$$

De (3.6), on obtient

$$\dot{x}_n(t) \in -N_{K(\theta_n(t))}(x(\theta_n(t))) + f_0(\sigma_n(t), T(\sigma_n(t))x_n) \ \ sur\ [0, T], \tag{3.12}$$

et

$$h(K(\theta_n(t)), K(t)) < \gamma|\theta_n(t) - t|,$$

par passage à la limite $|\theta_n(t) - t| \longrightarrow 0$ pour $n \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_n ||x_n(\theta_n(t) - x(t)|| &= \lim_n ||x_n(\theta_n(t) - x(t) + x_n(t) - x_n(t)|| \\ &\leq \lim_n ||x_n(\theta_n(t) - x_n(t)|| + \lim_n ||x_n(t) - x(t)|| \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Posons pour tout fonction ψ à valeurs réelles définie sur l'intervalle I :

$$\omega(\psi, I, \epsilon) = \sup\{||\psi(s) - \psi(t)||, s, t \in I, |s - t| < \epsilon\}.$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} ||T(\sigma_n(t))x_n - T(t)x_n|| &= \sup\{||x_n(\sigma_n(t) + \tau) - x_n(t + \tau)|| : \tau \in [-r, 0], \ \ t \in [0, T], |\sigma_n(t) - t| < \frac{T}{n}\} \\ &\leq \omega(x_n, [-r, T], \frac{T}{n}) \\ &\leq \omega(\varphi, [-r, 0], \frac{T}{n}) + \omega(x_n, [0, T], \frac{T}{n}) \\ &\leq \omega(\varphi, [-r, 0], \frac{T}{n}) + (m + \gamma)\frac{T}{n}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Comme φ est continue

$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, t_1, t_2 \in [-r, 0]$ *tel que* $|t_1 - t_2| < \eta \Longrightarrow ||\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \epsilon$

on choisit $t_1 = \sigma_n(t)$ *et* $t_2 = t$ tel que $|\sigma_n(t) - t| < \frac{T}{n}$,

on prend $\eta = \frac{T}{n}$ donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta = \frac{T}{n} > 0, |\sigma_n(t) - t| < \eta \Longrightarrow ||\varphi(\sigma_n(t)) - \varphi(t)|| < \epsilon,$$

par passage à la limite

$||\varphi(\sigma_n(t)) - \varphi(t)|| \longrightarrow 0$ pour $n \longrightarrow +\infty$ ce qui implique

$$\omega(\varphi, [-r, 0], \frac{T}{n}) = 0$$

donc

$$||T(\sigma_n(t))x_n - T(t)x_n|| \leq h_n(m + \gamma)$$

et

$$\lim_n ||T(\sigma_n(t))x_n - T(t)x_n|| \leq \lim_n h_n(m + \gamma) = 0$$

$(x_n)_n$ converge uniformément sur $[-r, T]$ i.e.

$$x_n \longrightarrow x \Longrightarrow T(t)x_n \longrightarrow T(t)x,$$

donc

$$T(\sigma_n(t))x_n \longrightarrow T(t)x = x_t, \quad sur\ \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}([-r, 0], H). \tag{3.15}$$

On note $f_n(t) = f_0(\sigma_n(t), T(\sigma_n(t)x_n)$

$(f_n)_n$ est une suite bornée dans $L^\infty_H([0, T])$, $(\dot{x}_n)_n$ est une suite bornée dans $L^\infty_H([0, T])$, alors, par extraction de sous suite, on peut supposer que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ et $\dot{x}_n \overset{*}{\rightharpoonup} \dot{x}$ converge faiblement* dans $L^\infty_H([0, T])$.

Donc, on trouve

$$f_n(t) \in F(\sigma_n(t), T(\sigma_n(t)x_n)),$$

de (3.11) et(3.15), on conclut

$$f(t) \in F(t, x_t) \quad p.p.\ sur\ [0, T]. \tag{3.16}$$

Montrons que

$$\dot{x}(t) \in -N_{K(t)}(x(t)) + f(t).$$

De (3.12) on a

$$\dot{x}_n(t) \in -N_{k(\theta_n(t))}(x(\theta_n(t))) + f_0(\sigma_n(t), T(\sigma_n(t))x_n) \quad sur\ [0,T],$$

ce qui est équivalent à :

$$\dot{x}_n(t) - f_0(\sigma_n(t), T(\sigma_n(t))x_n) \in -N_{k(\theta_n(t))}(x(\theta_n(t))) \quad sur\ [0,T],$$

par définition du cône on obtient

$$\int_0^T \delta^*_{K(\theta_n(t))}(\dot{x}_n(t) - f_n(t))dt = \int_0^T \sup_{z \in k(\theta_n(t))} \langle \dot{x}_n(t) - f_n(t), z \rangle \, dt$$

comme $x_n(\theta_n(t)) \in k(\theta_n(t))$

$$\int_0^T \delta^*_{K(\theta_n(t))}(\dot{x}_n(t) - f_n(t)dt \leq \int_0^T \langle \dot{x}_n(t) - f_n(t), x_n(\theta_n(t)) \rangle \, dt \tag{3.17}$$

on définit $\psi(t,x) = \delta^*_{K(t)}(x)$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times H$ et en utilisant (3.11), (3.13) et par application du lemme 3.1.2, on obtient

$$\liminf_n \int_0^T \psi(\theta_n(t), -\dot{x}_n(t) + f_n(t)) \geq \int_0^T \psi(t, \dot{x}(t) - f(t))dt$$

comme la deuxième intégrale dans (3.17) converge vers $\int_0^T \langle -\dot{x}(t) + f(t), x(t) \rangle \, dt$, on obtient

$$\int_0^T \delta^*(\dot{x}(t) - f(t), K(t)))dt \leq \int_0^T \langle -\dot{x}(t) + f(t), x(t) \rangle \, dt$$

la dernière inégalité plus (3.10) et (3.16) donne

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{K(t)}(x(t)) + F(t, x_t) \quad p.p.sur\, [0,T], \\ x(t) \in K(t) \quad \forall t \in [0,T], \\ x_0 = \varphi \quad [-r, 0]. \end{cases}$$

Ce qui termine la démonstration.

□

CONCLUSION

Nous nous sommes intéressées dans ce mémoire à l'études de deux inclusions différentielles avec retard, par deux méthodes différentes. La première étant de ramener le problème avec retard à un problème sans retard sur chaque sous intervalle de la subdivision et d'utiliser les résultats obtenus pour le problème sons retard. La deuxième méthode appliquée au processus de la rafle du premier ordre avec une perturbation retardeé consiste à utiliser les projections successives, ce qu'on appelle l'algorithme de rattrapage, sur chaque sous intervalle de la subdivision pour construire la suite des solutions approchées. D'autres résultats d'existence ont été obtenu dans les cas de :

1) Perturbation retardée à valeurs non convexes.
2) Deux perturbations retardées.
3) Cône normal à un ensemble non convexe.
4) Problème d'ordre supérieur.
5) Retard infini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **J. P. Aubin et A. Cellina**, Differential inclusions, set-valued maps and viability theory, *Springer-Verlag, Berlin* (1984),

[2] **D. AZE**, Eléments d'analyse convexe et variationnelle, *ellipses, édition marketing S.A.,Paris*, (1997)

[3] **H. Brezis**, Analyse fonctionnelle, *MASSON, Paris, New York*, (1987),

[4] **H. Brézis**, Opéateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, *North-Holland, Amsterdam* (1973),

[5] **C. Castaing, M.Mousaoui and A.Syam**, Multivalued differntial equation on closed moving sets in Banach spaces *Set-Valud Anal*, 1 : 329-353 (1994),

[6] **C. Castaing and M.D.P. Monteiro Marques**,Topologcal properties of solution set, *Portugaliae Math.*, 54 : 488-492(1997),

[7] **D.Français et D.Gilbert**, Convexité dans les espaces fonctionnels, Ellipses, édition marketing S.A., 2004.

[8] **G.Haddad**, Manatane trajectiries of differential inclusions and functianal differential inclusionswith

[9] **J.Jacques Moreau**, Evolutionn Proplem Assosiated with amoving convex set in Hilpert Space .J.Differnetial Equations , 26 : 347-374,(1977),

[10] **M.Kisielewiez**. Approximation theorem for multifunction. *Discussion.Mathematica T.V.*, 89-94(1981), memory*Israel.J.Math* 36 : 347-374(1977),

[11] **V.Lakshmikanthan, A.R.Mitchell and R.W.Michell** , On the existence of solutions differential equation or retard typ in Banach space,*Ann.Polonia.Math.* XXXV (1978),

[12] **R. R. Phelps**, Convex funtions, Monotone operateurs and differentiability . *SpringerVerlag Berlin Heidelberg*, (1989).

[13] **Y. Sonntag**, Topologie et Analyse Fonctionnelle, *Berlin* 23-4-1880, (1997)

[14] **A.Syam**,Contributions aux inclusions différentielles, PHD thesis, *Université Montpellier ll*,(1993)

[15] **J.V. Tiel**, Convex analysis an introductory text, *New York, Singapore*, (1984).

[16] **R.T.Rockafellar**, Convex integral functionals and duality. In : E.H.Zarantonello (Ed). Cotributions to nonlinear functional analysis. Academic press, *New York*, 215-236, 1971.