République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre :
№ de série :

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Sur l'indice du point fixe

par

Bounneche Chaima

Soutenu le **2022**

Devant le jury

Président	Nadir Arada	MCA. Université de Jijel
Encadreur	Wafiya Boukrouk	MCB. Université de Jijel
Examinateur	Nora Fetouci	MCB. Université de Jijel

Promotion **2021/2022**

⋇ Remerciements ⋇

En premier lieu, nous remercions ALLAH le tout puissant pour la volonté et la santé qu'il nous a donné tout au long des années de nos études pour terminer ce mémoire.

Nous voudrions présenter nos sincères remerciements à notre encadreur Mme Wafia Boukrouk, pour ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion, et surtout pour sa disponibilité et sa gentillesse.

Nous exprimons notre gratitude et nos remerciements aux membres du jury Mme Fatoussi et M Arada, qui nous ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail.

BOUNNECHE Chaima

⋇ ***Dédicace*** ⋇

A la lumière de ma vie, la source de mes efforts et mon bonheur, maman que j'adore.

Bounneche Chaima

Table des matières

Introduction

Plusieurs phénomènes naturels de la vie réelle s'expriment mathématiquement sous forme d'**équations différentielles non linéaires.** En revanche, de nombreuses questions, liées à l'existence et à l'unicité de solutions de certains types d'équation peuvent *ê*tre ramenées *à* la question d'existence et d'unicité d'**un point fixe** pour une application (fonction) appropriée sur un espace approprié. Donc la théorie du point fixe joue un r*ô*le clé dans la de résolution de nombreux problémes de mathématiques appliquées. La théorie elle-m*ê*me a été dévelopée dans de nombreuses directions à partir du théor*è*me du **point fixe de** Brouwer (1910), du principe de contraction de Banach (1922) qui affirme qu'une contraction sur un espace métrique complet dans lui même a un point fixe unique , en arrivant au théor*è*me du point fixe de et du théor*è*me du point fixe de Schauder pour les applications compactes (1930) qui lui affirme qu'une application compacte (compl*è*tement continue)définie sur un ensemble fermé, borné, convexe d'un espace de Banach dans lui m*ê*me, a un point fixe .

La théorie du point fixe a également été fortement influencée par les progrés paralléles des travaux de recherche efectués sur **le degrés topologique** pour différentes classes de fonctions . A cet égard, les travaux poinniers de Petryshyn ([14], [15]) ont initié des étapes importantes dans l'établissement de la relation entre la théorie du point fixe et une autre notion dite "l'indexe du point fixe".

D'abord , le degré topologique est un outil précisement **un nombre**, qui donne des informations sur les solutions des équations de la forme

$$f(x) = y_0, \quad x \in \Omega,$$

o*ù* $f : X \to Y$ est une fonction donnée, au moins continue ; X et Y sont des espaces de Banach ; y_0 est un élément fixe Y ; et Ω est un sous-ensemble ouvert de X. Dans le cas o*ù* un calcul direct ne résout pas une équation pareille, et ne donne pas non plus des approximations appropriées des solutions, nous pouvons rechercher d'autres méthodes pour

obtenir des informations sur l'ensemble des solutions. Par exemple on peut se demander si l'ensemble des solutions n'est pas vide, ...ainsi que d'autre questions. Le degrès topologique dans ce cas peut nous aider, mais on l'utilise aussi pour démontrer les théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs types de degrès topologique, on trouve celui de Brouwer pour la dimention finie, celui de Leray-Schauder pour la dimention infinie, etc. Le degrè de Leray-Schauder par exemple permet de montrer l'existence de points fixes pour une application définie sur un sous-ensemble ouvert borné d'un espace de Banach vers cet espace. Le problème est qu'il existe de nombreux problèmes intéressants pour lesquels nous ne pouvons pas utiliser tout l'espace de Banach, mais plutôt une fonction d'un sous-ensemble convexe fermé d'un espace de Banach qui n'est pas un sous-espace vectoriel.
Il existe une généralisation du degrè de Leray-Schauder, appelée indice de point fixe, qui est justement conçu pour trouver des points fixes d' une telle fonction. Dans ce manuscrait on procède comme suit : on commence par rappeler des notions de base a travers un premier chapitre.
Le deuxième chapitre est consacré à la notion de "mesure de non compacité", en particulier celle de "Minkowski", qui permet de définir certaines classes de fonctions, en particulier celles dites les k-set contractions,qui est en fait une sorte de généralisation des fonctions contractives classiques. Ce chapitre représente la partie du mémoire où le grand travail a été fait.
On termine par un dernier chapitre où nous présentons la notion de "l'indice du point fixe" pour une classe de fonctions. On commence d'abord par présenter un bref résumé sur la notion du degrè topologique puis nous présentons briévement aussi la notion de l'indice du point fixe comme étant un concept plus général que le premier.
Ce mémoire est un point de départ vers une analyse approfondie de la théorie de l'indice du point fixe. Nous nous sommes référés basiquement, pas uniquement sur la référence [6], en traitant certaines et preuves à notre façon.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous précisons nos notations et rappelons certaines définitions, propositions et théorèmes dont on aura besoin tout au long de ce mémoire.

1.1 Notations générales

On note

- $\mathbb{R}^d$ l'ensemble des vecteurs de dimension d, à coordonnées réelles.
- X un ensemble non vide.
- (X, θ) un espace topologique.
- (X, d) un espace métrique.
- $B_X(y, r)$ la boule ouverte de X de centre y et de rayon r.
- $\overline{B}_X(y, r)$ la boule fermée de X de centre y et de rayon r.
- $\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties fermées de X.

Soit E un espace de Banach et $\|\cdot\|$ la norme de E. On note par

- $co(A)$ l'enveloppe convexe de A ($A \subset E$).
- $\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermée de A.
- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ l'espace des applications continues $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} | f(x) | .$$

- $k(\overline{\Omega})$ le sous-espace de $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ défini par

$$k(\overline{\Omega}) = \{f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \ y_0 \notin f(\partial\Omega)\}$$

où y_0 et un élément de $\mathbb{R}^n$.

1.2 Espace topologique, espace normé et espace métrique

Définition 1.1. *Soit X un ensemble non vide. Soit θ une famille de parties de $X(\theta \subset \mathcal{P}(X))$. On dit que θ est une topologie sur X si et seulement si*

1. $\emptyset \in \theta$, $X \in \theta$.
2. $\forall (A_i)_{i\in I} \subset \theta \Rightarrow \underset{i\in I}{\cup} A_i \in \theta$ *(stabilité par union quelconque)*
3. $\forall (A_i)_{i=1,\cdots,n} \subset \theta \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \theta$ *(stabilité par intersection finie).*

Définition 1.2. *Soit θ une topologie sur X. Alors (X, θ) est appelé un espace topologique. On appelle ensemble ouvert de X tout ensemble appartenant àθ, c'est-à-dire*

$$A \text{ est ouvert dans } X \Leftrightarrow A \in \theta.$$

Définition 1.3. *Soit (X, θ) un espace topologique et $B \subset X$. On dit que B est fermé dans X si et seulement si son complémentaire C_X^B est ouvert.*

Définition 1.4. *Soient (X_1, θ_1) et (X_2, θ_2) deux espaces topologiques et soit*

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2)/x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}.$$

1. *On appelle ouvert premier tout ensemble*

$$O = \{O_1 \times O_2/O_1 \in \theta_1, O_2 \in \theta_2\}.$$

2. *On appelle ouvert de X tout union d'ouverts premier, i.e.*

$$\theta = \{\cup_k (O_1^k \times O_2^k)/O_1^k \in \theta_1, O_2^k \in \theta_2\}$$

est une topologie sur X appelée la topologie produit de $\theta_1 \times \theta_2$ et le couple (X, θ) est appelée l'espace topologique produit de (X_1, θ_1) et (X_2, θ_2).

Définition 1.5. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ et soit*

$$\begin{aligned} \varphi :& E \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

on dit que φ est une norme sur E si et seulement si

1. *Pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.*

2. *Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x)$.*

3. *Pour tout $x, y \in E$, on a $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$.*

Définition 1.6. *Soit X un ensemble non vide quelconque. On appelle distance sur X une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ qui à $(x, y) \in X \times X$ fait correspondre le nombre réel fini positif $d(x, y)$ appelé distance de x à y, et satisfaisant aux trois conditions suivantes*

(i) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$ *(relation de symétrie),*

(iii) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, x)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.7. *On appelle espace métrique le couple (X, d) formé d'un ensemble X et d'une distance d définie sur X.*

Définition 1.8. *Soit (X, d) un espace métrique, soient $x_0 \in X$ et $r > 0$. On appelle boule de centre x_0 et de rayon r, notée $B_X(x_0, r)$ l'ensemble*

$$\{x \in X/d(x_0, x) < r\}.$$

Définition 1.9. *Soient (X, d_X) un espace métrique, et A une partie non vide de X. La distance d'un point $x \in X$ à l'ensemble A est donnée par*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d_X(x, a).$$

Définition 1.10. ***(L'adhérence)**. Soient (X, d_X) un espace métrique, et A une partie non vide de X. On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$, le sous-ensemble de X défini par*

$$\overline{A} = \{x \in X, d(x, A) = 0\}.$$

Définition 1.11. *Soit (X, d_X) un espace métrique et soit $(x_n)_n \subset X$. On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}; \quad p > q \geqslant n_0 \Rightarrow d_X(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Définition 1.12. *Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (X, d_X), et soit $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in N}$ converge vers $x \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow d_X(x_n, x) < \varepsilon$$

Définition 1.13. *Un espace métrique (X, d_X) est dit complet lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente dans X.*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tout $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$.
On vérifie facilement que d est une distance sur E, appelée distance associée à la norme. La topologie correspondante sera appelée topologie normique.

Définition 1.14. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.*

Définition 1.15. *Soient A, B deux parties d'un espace métrique X telles que $A \subset B$.*
- *On dit que A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$.*
- *On dit que A est partout dense dans X si $\overline{A} = X$.*

1.3 Ensemble compact, relativement compact, précompact

Définition 1.16 (Ensemble compact)**.** *Soit A un sous-ensemble d'un espace normé E. A est dit compact si de tout recouverement de A par des ouverts de A on peut extraire un sous-recouverement fini, i.e.*

$$\forall V_{j\in J}(ouverts);\ U \subset \bigcup_{j\in J} V_j, \exists V_{j(k)}, k = 1, 2, ..., n \text{ tel que } U \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j(k)}.$$

Définition 1.17 (Ensemble relativement compact)**.** *On dit qu'un ensemble A de E est relativement compact si et seulement si son adhérence $\overline{A}$ est compacte.*

Définition 1.18 (Ensemble précompact)**.** *Soit (E, d) un espace métrique . On dit que (E, d) est précompact (totalement borné)si :*
pour tout $\epsilon > 0$ il existe un recouverement fini de E par des parties de E dont les diamaitres infirieurs à ϵ,i.e.

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists (A_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ telle que } \forall\ 1 \leqslant i \leqslant n\ \ A_i \subset E\ diam A_i < \epsilon \text{ et } E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Nous avons

- *$A \subset E$ est dit précompact si le sous-espace métrique $(A, d\,|_{A\times A})$ est précompact.*
- *A est compact $\Leftrightarrow$ A est précompact et complet.*
- *A est précompact $\Rightarrow$ $\overline{A}$ est précompact.*

1.4 Ensembles convexes

Définition 1.19. *Soit E un espace vectoriel, $a, b \in E$.*
• On appelle segment fermé d'extrémités a et b (ou tout simplement segment) que l'on note $[a, b]$, l'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda)b \quad \text{tel que} \quad \lambda \in [0, 1]\}$.
• On appelle segment ouvert que l'on note $]a, b[$ l'ensemble $\{\lambda a+(1-\lambda)b$ tel que $\lambda \in]0, 1[\}$. De la même manière on définit les segments $]a, b]$ et $[a, b[$.

Définition 1.20. *Une partie A de l'espace vectoriel E est dite convexe si à chaque fois que deux points a, b appartiennent à A le segment $[a, b]$ est contenu dans A, i.e,*

$$\lambda A + (1-\lambda)A \subset A, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

ou encore

$$\forall a, b \in A, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda a + (1-\lambda)b \in A.$$

On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ le sous ensemble Δ_n, tel que

$$\Delta_n = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_i \geq 0\ ,\ i = 1...n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Définition 1.21. *Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tout élément x qui s'écrit comme suit*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{tel que} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_n\,.$$

Proposition 1.22. *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Alors A est convexe si et seulement si n'importe quelle combinaison convexe des vecteurs de A est un vecteur de A.*

Définition 1.23. *Soit A un sous-ensemble de l'espace vectoriel E. On appelle enveloppe convexe de A, qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les convexes de E contenant A. C'est en fait le plus petit convexe de E contenant A.*

Définition 1.24. *Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle enveloppe convexe fermée de A, qu'on note $\overline{co}(A)$, le plus petit convexe fermé de E contenant A.*

Théorème 1.25. *Si $A \subset E$. Alors,*

$$\overline{co}(A) = \overline{co(A)}.$$

Proposition 1.26. *Soient E un espace vectoriel, $A, B \subset E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. $co(\alpha A) = \alpha co(A)$.
2. $co(A + B) = co(A) + co(B)$.

   Si E un espace vectoriel topologique, alors
3. *Si A est un sous ensemble convexe de E alors $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ le sont aussi.*
4. $\overline{co}(\alpha A) = \alpha \overline{co}(A)$.

1.5 Distance de Hausdorff

Dans la suite on considère un espace métrique (X, d) et $A, B, C \subset X$.

Définition 1.27. *On appelle distance d'un point $x \in X$ à A, la quantité notée $d(x, A)$ et définie par*

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x,\, y).$$

Définition 1.28. *On appelle écart entre A et B la quantité notée $e(A, B)$ et définie par*

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} d(x,\, y) \right).$$

Définition 1.29. *On appelle distance de Hausdorff entre A et B la quantité $\mathcal{H}(A, B)$ définie par*

$$\mathcal{H}(A, B) = \max \Big(e(A, B), e(B, A) \Big),$$

avec la convention

$$\sup \emptyset = 0 \text{ et } \inf \emptyset = +\infty.$$

Propriétés

1. $e(A, \emptyset) = +\infty$ si $A \neq \emptyset$
2. $e(\emptyset, B) = 0$
3. $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$
4. $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
5. $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$
6. $\mathcal{H}(A, C) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$.

1.6 Applications continues, complètement continues, bornées, compactes

Pour plus de détails concernant les notions et les résultats énoncés dans cette section, voir [2],[6].

Définition 1.30. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $F : X \to Y$ une application. Alors f est continue si pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage V de $f(x_0)$ dans Y , il existe un voisinage U de x_0 dans X, tel que $f(U) \subset V$. Ou encore, si pour tout ouvert(resp fermé) V de Y , $f^{-1}(V)$ est un ouvert (resp fermé) de X.*

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une application. Ω_E désignera la famille de tous les sous-ensembles bornés de E.

Définition 1.31. *Soit $f : D \subset E \to F$ une application. On dit que f est :*

(1) borné si elle transforme des ensembles bornés en ensembles bornés ;

(2) compacte si l'ensemble $f(D)$ est relativement compact ;

(3) complètement continue si elle est continue, et qu'elle transforme des ensembles bornés en ensembles relativement compacts.

Remarque 1.32. *1. Si f est une application continue et D est un ensemble borné, alors les définitions (2)et (3)concident.*

2. Pour les espaces de dimension finie, les opérateurs continus et complètement continus sont les mêmes.

Définition 1.33. *(retrait d'un espace métrique) Soit Y un espace métrique et $D \subset Y$ un sou-ensemble non vide. D est appelé un retrait de Y s'il existe une application continue $r : Y \to D$ (qu'on appelle rétraction) telle que $r(x) = x, \ \forall x \in D$.*

Théorème 1.34. *(Dugunji) Si X est un sous-ensemble fermé, non vide, convexe d'un espace de Banach E, alors X est un retrait de E.*

Définition 1.35. *(homotopie) On appelle deux applications $f, g \in k(\overline{\Omega})$ homotopes s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que*

- $H(t, \cdot) \in k(\overline{\Omega})$, *pour tout* $t \in [0, 1]$,
- $H(0, \cdot) = f$,
- $H(1, \cdot) = g$.

On appelle l'application H homotopie joignant les applications f et g.

1.7 Applications Lipschitziennes

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application.

- On dit que f et Lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ tell que

$$\forall x_1, x_2 \in X, \qquad d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant k.d_x(x_1, x_2).$$

- La plus petite valeur k satisfaisant cette propriétè pour f est appelée la constante de Lipschitzienne.
- Si $K < 1$ on appelle f une contraction. Dans ce cas, on aura $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant d_x(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X$, d'ou le terme"contraction".
- Si $K > 1$, f est dite "expansive"(voir section, chapitre 2).
- Si $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces de Banach, alors

$$(f \ est \ k - Lipschitzienne \ \Leftrightarrow \ (\forall x_1, x_2 \in E, \qquad \|f(x_1) - f(x_2)\|_F \leqslant k.\|x_1 - x_2\|_E).$$

1.8 Diamètre

Soit (X, d) un espace métrique. Soit $A \subset X$.

Définition 1.36. *On appelle diamàtre de A, et on note $diam(A)$, la quantité*

$$diam A = sup\{d(x, y); \ \ x, y \in A\}.$$

Remarque 1.37. *Nous avons*

- $diam(A) \in [0, +\infty]$.
- $diam(\emptyset) = 0$, *car* $diam(\emptyset) = \sup\{d(x, y); \ x, y \in \emptyset\} = \sup \emptyset = 0$.
- $diam(\{a\}) = 0$, *car* $diam(\{a\}) = \sup\{d(x, y); x, y \in \{a\}\} = \sup\{d(a, a)\} = \sup\{0\} = 0$.
- *Si* $diam(A) < +\infty$, *on dit que* A *est* ***borné***.

Propriétès.

1. $(\text{diam } (A) = 0) \Leftrightarrow (A = \{x\} \vee A = \emptyset)$.
2. $A \subset B \Rightarrow \text{diam } (A) \leqslant \text{diam } (B)$.
3. $\text{diam } (A \cup B) \leqslant \text{diam } (A) + d(A, B) + \text{diam } (B)$.

Propriété 1.38. *Soient E un espace de Banach et $A \subset E$.*

1. *$diam(A) =$ $diam$ $(\overline{A})$.*
2. *$diam(\lambda.A) = |\lambda| diam(A), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.*
3. *$diam(A + B) \leqslant$ $diam$ $(A) +$ $diam$ (B).*
4. *$diam$ $(co(A)) = diam$ (A).*

Démonstration. Nous avons

1. $\Rightarrow$)

$$\text{diam } A = \sup\{\|x - x'\|; \quad x, x' \in A\},$$

$$\text{diam } \overline{A} = \sup\{\|z - z'\|; \quad z, z' \in \overline{A}\}.$$

Comme $A \subset \overline{A}$, alors $\{\|x - x'\|; \quad x, x' \in A\} \subset \{\|z - z'\|; \quad z, z' \in \overline{A}\}$, donc

$$\sup\{\|x - x'\|; \quad x, x' \in A\} \leqslant \sup\{\|z - z'\|; \quad z, z' \in \overline{A}\}$$

ie

$$\text{diam } A \leqslant \text{diam}\overline{A}.$$

$\Leftarrow$) Montrons que diam $A \geqslant$ diam $\overline{A}$. Autrement dit montrons que

$$\sup\{\|z - z'\|; \quad z, z' \in \overline{A}\} \leqslant \text{ diam } A.$$

Soit $r \in \{\|z - z'\|; \quad z, z' \in \overline{A}\}$, alors il existe $z, z' \in \overline{A}$ tels que

$$r = \|z - z'\|.$$

Montrons que $r \leqslant \text{diam}(A)$.
$z \in \overline{A} \Leftrightarrow d(z, A) = 0$
soit $\varepsilon > 0$
$d(z, A) = \inf\limits_{x \in A} d(z, x) < \varepsilon \Rightarrow \exists x \in A; \quad d(z, x) < \varepsilon$
$d(z', A) = \inf\limits_{x' \in A} d(z', x) < \varepsilon \Rightarrow \exists x' \in A; \quad d(z', x') < \varepsilon,$

donc

$$\begin{array}{rcl} d(z,z') & = & \|z-z'\| \\ & = & \|z-x+x-x'+x'-z'\| \\ & \leqslant & \|z-x\|+\|z'-x'\|+\|x'-x\| \\ & \leqslant & \varepsilon+\varepsilon+\|x-x'\| \\ & \leqslant & 2\varepsilon+\|x-x'\| \\ & \leqslant & 2\varepsilon+diam(A) \end{array}$$

ε étant arbitraire

$\Rightarrow r = \|z-z'\| \leqslant dima(A)$.

2. Nous avons

$$\text{diam } (\lambda A) = \sup\{\|y_1-y_2\|_E; \quad y_1,y_2 \in \lambda A\}$$

$y_1 \in \lambda A \Leftrightarrow \exists x_1 \in A; \quad y_1 = \lambda x_1$

$y_2 \in \lambda A \Leftrightarrow \exists x_2 \in A; \quad y_2 = \lambda x_2$

$\|y_1-y_2\|_E = \|\lambda x_1 - \lambda x_2\|_E = |\lambda|\|x_1-x_2\|_E$

$$\begin{array}{rcl} diam(\lambda A) & = & \sup\{|\lambda|\|x_1-x_2\|_E; \quad x_1,x_2 \in A\} \\ & = & |\lambda|\sup\{\|x_1-x_2\|_E; \quad x_1,x_2 \in A\} \\ & = & |\lambda| diam A. \end{array}$$

3. Soient $x, y \in A+B$.

$$x \in A+B \Leftrightarrow \exists a \in A \ \ et \ \exists b \in B \ \ tq \ x = a+b$$

$$y \in A+B \Leftrightarrow \exists a' \in A \ \ et \ \exists b' \in B \ \ tq \ y = a'+b'$$

donc

$$\begin{array}{rcl} d(x,y) & = & \|x-y\| \\ & = & \|(a+b)-(a'+b')\| \\ & = & \|(a-a')+(b-b')\| \\ & \leqslant & \|a-a'\|+\|b-b'\| \\ & \leqslant & diam(A)+diam(B) \end{array}$$

D'oừ

$$sup\{d(x,y); \ \ x,y \in A+B\} \leqslant diam(A)+diam(B).$$

4. Puisque $A \subset co(A)$, alors

$$diam(A) \leqslant diam(co(A)).$$

Réciproqement

Soient $x, y \in co(A)$. Par théorème de Carathéodory,

il existe $p, q \leqslant n+1$ et $x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q \in A$

tel que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i,$$

$$y = \sum_{j=1}^{q} \gamma_j y_j,$$

$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = \sum_{j=1}^{q} \gamma = 1$, et $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, ..., P$, $\gamma_j \geqslant 0$, $j = 1, ..., q$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= \|x-y\| \\
&= \|\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i - y\| \\
&= \|\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{p}(\lambda_i y)\| \\
&= \|\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i x_i - \lambda_i y)\| \\
&= \|\sum_{i=1}^{p}\lambda_i (x_i - y)\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{p}\{\lambda_i \|(x_i - y)\|\} \\
&= \sum_{i=1}^{p}\{\lambda_i \|x_i - \sum_{j=1}^{q}\gamma_j y_j\|\} \\
&= \sum_{i=1}^{p}\{\lambda_i \|\sum_{j=1}^{q}\gamma_j x_i - \sum_{j=1}^{q}\gamma_j y_j\|\} \\
&= \sum_{i=1}^{p}\{\lambda_i \|\sum_{j=1}^{q}(\gamma x_i - \gamma_j y_j)\|\} \\
&= \sum_{i=1}^{p}\{\lambda_i \sum_{j=1}^{q}\gamma_j \|(x_i - y_j)\|\} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{p}\{\lambda_i \sum_{j=1}^{q}\gamma_j \|x_i - y_j\|\} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{p}\{\lambda_i diam(A)\} \\
&\leqslant diam(A)
\end{aligned}$$

D'où $diam(co(A)) \leqslant diam(A)$. ■

Chapitre 2

Mesure de non compacité, k-set contractions et applications expansives

Il existe plusieurs grandeurs en analyse sous le non de mesure de nom-compacité qui quantifient à quel point un ensemble est éloigné d'une classe donnée de compacité .Par exemple ,on peut considérer le diamétre $diam(A)$ comme le plus simple . Il mesure à quel point un ensemble est un singleton .

2.1 Mesure de non compacité

Soient E un espace de Banach et soit Ω_E =$\{A \subset E; \quad \text{A est bornée}\}$

.

Définition 2.1. *Une fonction $\varphi : \Omega_E \to [0, +\infty[$ est dite mesure de non compacité si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. $\varphi(A) = 0 \Leftrightarrow A$ *est relativement compact.*
2. $\varphi(A) = \varphi(\overline{A}), \quad \forall A \in \Omega_E$
3. $\varphi(A_1 \cup A_2) = max\{\varphi(A_1), \varphi(A_2)\}, \quad \forall A_1, A_2 \in \Omega_E.$

Il existe de nombreuses mesures des non compacité. Dans ce qui suit, nous présentons l'une des plus utilisée en application : il s'agit de la mesure de non compacité de Kuratowski.

Définition 2.2. *(La mesure de non compacité de Kuratowski KMNC en abrégé) est la fonction* $\alpha : \Omega_E \to [0, +\infty[$ *définie par*

$$\alpha(\boldsymbol{A}) = \inf \mathcal{A}_{\boldsymbol{A}}$$

où

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{A}} = \Big\{\delta > 0 : \exists (A_i)_{i=1}^{n} \subset E \ \text{ tel que } \ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ \text{ et } \ \text{diam}\ (A_i) \leqslant \delta\ ,\ \forall i\Big\}.$$

Autrement dit, la mesure Kuratowski est l'infimum des nombres $r > 0$ tels que l'ensemble A peut être couvert par un nombre fini d'ensembles de diamètre inferieur *à* r, et elle mesure jusqu'*á* quel point l'ensemble A est compact.

Remarque 2.3. *Pour tout* $A \in \Omega_E$, *Nous avons*

1) $\alpha(A) \leqslant$ *diam* A .

2) $0 \leqslant \alpha(A) < +\infty$ (α *prend ses valeurs dons* $[0, +\infty[$) .

3) $\alpha(\phi) = 0, \quad \alpha(\{a\}) = 0.$

Démonstration. 1) $\alpha(A) = \inf \mathcal{A}_A \leqslant \text{diam}\ (A)$ car diam $(A) \in \mathcal{A}_A$,

il suffit de prendre la famille $(A_i)_{i=1}^{1} = A_1 = A$ *et* $diam(A_1) \leqslant diam(A) = \delta$

Donc $diam(A) \in \mathcal{A}_A$

D'où $\alpha(A) \leqslant diam(A)$.

2) D'aprés 1) $\alpha(A) \leqslant \text{diam}\ A < +\infty$, (car A est bornée). D'autre part, il est clair que $\mathcal{A}_A \subset]0, +\infty[$,

d'ou $\inf \mathcal{A}_A \geqslant \inf]0, +\infty[$, ,ie, $\alpha(A) \geqslant 0$.

3) D'aprés 2) $\alpha(\phi) \geqslant 0$

D'autre part d'aprés 1) ona $\alpha(\phi) \leqslant \text{diam}\ (\phi)$

et comme $\text{diam}(\phi) = 0$ alors $\alpha(\phi) \leqslant 0$

donc $\alpha(\phi) = 0$.

D'aprés 2) ona $\alpha(\{a\}) \geqslant 0$ D'autre part ona d'aprés 1) $\alpha(\{a\}) \leqslant \text{diam } (\{a\})$
et comme diam $(\{a\}) = 0$ alors $\alpha(\{a\}) \leqslant 0$
donc $\alpha(\{a\}) = 0$.

■

Proposition 2.4. *1.* $A \subset B \Rightarrow \mathcal{A}_B \subset \mathcal{A}_A$.

2. $A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \leqslant \alpha(B)$.

3. $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$.

4. $\alpha(\lambda.A) = |\lambda|.\alpha(A), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. 1. Soit $\delta \in \mathcal{A}_B$. *Alors, il existe* $(B_i)_{i=1}^{n(\delta)} \subset E$ telle que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i \text{ } et \text{ diam } B_i \leqslant \delta, \ \forall i.$$

comme $A \subset B$, alors

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \ avec \text{ diam } B_i \leqslant \delta, \ \forall i.$$

Donc $\delta \in \mathcal{A}_A$.

2. $A \subset B \overset{d'après 1.}{\Longrightarrow} \mathcal{A}_B \subset \mathcal{A}_A \Rightarrow \inf \mathcal{A}_A \leqslant \inf \mathcal{A}_B \Leftrightarrow \alpha(A) \leqslant \alpha(B)$.

3. Comme $A \subset \overline{A}$, alors d'aprés 1. $\mathcal{A}_{\overline{A}} \subset \mathcal{A}_A$. D'autre part, $\mathcal{A}_A \subset \mathcal{A}_{\overline{A}}$ alors $\mathcal{A}_A = \mathcal{A}_{\overline{A}}$, et donc $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$. Montrons que $\mathcal{A}_A \subset \mathcal{A}_{\overline{A}}$. En effet, soit $\delta \in \mathcal{A}_A$. Alors,

$$\exists (A_i)_{i=1}^{n} \subset E \text{ tel que } A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ et diam } A \leqslant \delta, \quad \forall i.$$

Comme $\overline{A} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ et comme diam $(\overline{A_i}) =$ diam $(A_i) \leqslant \delta, \quad \forall i$, on obtient

$$\alpha(\overline{A}) \leqslant \alpha(A).$$

4. Si $\lambda = 0$,

$$\begin{cases} \alpha(0.A) = \alpha(\{0_E\}) = 0 \\ 0.\alpha(A) = 0, \ car \ \alpha(A) \ est \ fini. \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 0$, soit $\delta \in \mathcal{A}_A$. Alors,

$$\exists (A_i)_{i=1}^{n} \subset E \text{ tel que } A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ et diam } A_i \leqslant \delta, \ \forall i = 1, ..., n$$

ceci implique

$$\lambda A \subset \lambda(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \text{ et } \lambda \text{ diam } A_i \leqslant \lambda\delta,\ \forall i = 1, ..., n$$

alors

$$\lambda A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\lambda A_i) \text{ et } |\lambda| \text{ diam } A_i \leqslant |\lambda|\delta,\ \forall i = 1, ..., n$$

$\Rightarrow$

$$\lambda A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\lambda A_i) \text{ et } \text{ diam } \lambda A_i \leqslant |\lambda|\delta,\ \forall i = 1, ..., n$$

donc

$$|\lambda|\delta \in \mathcal{A}_{\lambda A}$$

$\Rightarrow$

$$\alpha(\lambda A) \leqslant |\lambda|\delta$$

et

$$\frac{\alpha(\lambda A)}{|\lambda|} \leqslant \delta.$$

Donc

$$\frac{\alpha(\lambda A)}{|\lambda|} \leqslant \delta, \quad \forall \delta \in \mathcal{A}_A$$

Donc

$$\frac{\alpha(\lambda A)}{|\lambda|} \leqslant \alpha(A)$$

alors

$$\alpha(\lambda A) \leqslant \text{ł}|\lambda|\alpha(A).$$

$\Leftarrow$) Maintenant montrons que

$$|\lambda|\alpha(A) \leqslant \alpha(\lambda A).$$

On a par ce qui précède

$$\alpha(A) = \alpha(\frac{1}{\lambda}(\lambda A)) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\alpha(\lambda A),$$

donc

$$|\lambda|\alpha(A) \leqslant \alpha(\lambda A).$$

■

Proposition 2.5.

1. $\alpha(A + B) \leqslant \alpha(A) + \alpha(B)$.

2. $\alpha(A + \{x\}) = \alpha(A)$.

3. $\alpha(co(A)) = \alpha(A)$.

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta \in \mathcal{A}_A; \quad \delta < \alpha(A) + \varepsilon \tag{2.1}$$

$$\exists \delta' \in \mathcal{A}_B; \quad \delta' < \alpha(B) + \varepsilon \tag{2.2}$$

$$\exists (A_i)_{i=1}^{n} \subset E \text{ tel que } A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ et } \text{ diam } A_i \leqslant \delta, \quad \forall i = 1, ..., n$$

$$\exists (B_j)_{j=1}^{m} \subset E \text{ tel que } B \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_j \text{ et } \text{ diam } B_j \leqslant \delta', \quad \forall j = 1, ..., m$$

alors

$$A + B \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i + B_j) \text{ et diam } (A_i + B_j) \leqslant \delta + \delta', \quad \forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., m$$

donc

$$\delta + \delta' \in \mathcal{A}_{A+B}$$

$$\Rightarrow \alpha(A + B) \leqslant \delta + \delta'$$

combinant (2.1) et (2.2), on obtient

$$\alpha(A + B) \leqslant \delta + \delta' < \alpha(A) + \alpha(B) + 2\varepsilon$$

ε étant arbitraire,on a

$$\alpha(A + B) \leqslant \alpha(A) + \alpha(B). \tag{2.3}$$

2. On a d'aprés (2.3).

$$\alpha(A + \{x\}) \leqslant \alpha(A) + \alpha\{x\} = \alpha(A)$$

Donc

$$\alpha(A + \{x\}) \leqslant \alpha(A) \tag{2.4}$$

D'autre part

$$\alpha(A) = \alpha(A + \{x\} + \{-x\}) \leqslant \alpha(A + \{x\}) + \alpha\{-x\} \leqslant \alpha(A + \{x\})$$

Donc

$$\alpha(A) \leqslant \alpha(A + \{x\}) \tag{2.5}$$

De (2.4) et (2.5)

$$\alpha(A + \{x\}) = \alpha(A).$$

3. Comme
$$A \subset co(A),$$
on a
$$\alpha(A) \leqslant \alpha(co(A)).$$
Montrons que
$$\alpha(co(A)) \leqslant \alpha(A).$$
Soit $\delta \in \mathcal{A}_A$. Alors,
$$\exists (A_i)_{i=1}^n \subset E \text{ tel que } A \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i \text{ et } \text{ diam } A_i \leqslant \delta, \quad \forall i = 1, ..., n.$$
Par conséquent
$$co(A) \subset co(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i) \text{ et } \text{ diam } (A_i) \leqslant \delta, \quad \forall i = 1, ..., n$$
et
$$co(A) \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} co(A_i) \text{ et } \text{ diam } co(A_i) \leqslant \delta, \quad \forall i = 1, ..., n$$
ceci prouve
$$\delta \in \mathcal{A}_{co(A)}$$
et
$$\mathcal{A}_A \subset \mathcal{A}_{co(A)},$$
impliquant que
$$\alpha(co(A)) \leqslant \alpha(A).$$

■

Proposition 2.6. *1. $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est relativement compact.*

2. $\alpha(A_1 \cup A_2) = max\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}, \quad \forall A_1, A_2 \in \Omega_E$.

3. $|\alpha(A) - \alpha(B)| \leq 2.\mathcal{H}(A, B)$.

Démonstration. 1. $\Rightarrow$)

Suppossons que $\alpha(A) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Puique $\alpha(A) = \inf \mathcal{A}_A$ alors,
$$\exists \delta \in \mathcal{A}_A : \quad \delta < \alpha(A) + \varepsilon$$
et comme $\alpha(A) = 0$, il vient que
$$\delta < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \delta \in \mathcal{A}_A \quad &\Rightarrow \quad \exists (A_i)_{i=1}^n \subset E \ \ tel\ que\ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ et } \operatorname{diam} A_i \leqslant \delta,\ \forall i = 1, ..., n \\ &\Rightarrow \quad \exists (A_i)_{i=1}^n \subset E \ \ tel\ que\ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ et } \operatorname{diam} A_i < \varepsilon,\ \forall i = 1, ..., n \end{aligned}$$

Autrement dit A est précompact.

Par conséquent $\overline{A}$ est précompact

et comme $\overline{A}$ est fermé dans l'espace complet E, elle est compacte.

Donc A est relativement compact.

Réciproquement, supposons que A est relativement compact, i.e $\overline{A}$ est compact.

Alors $\overline{A}$ est précompact. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists (A_i)_{i=1}^n \subset E : \ \overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ et \ \operatorname{diam} A_i < \varepsilon,\ \forall i = 1, ..., n$$

ceci implique que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ et \ \operatorname{diam} A_i < \varepsilon,\ \forall i = 1, ..., n$$

et donc

$$\varepsilon \in \mathcal{A}_A,$$

ainsi

$$\alpha(A) \leqslant \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0$$

donc

$$\alpha(A) \leqslant 0.$$

Or

$$0 \leqslant \alpha(A),$$

et par conséquent

$$\alpha(A) = 0.$$

2. Soient $A, B \in \Omega_E$. Montrons que $\max\{\alpha(A), \alpha(B)\} \leqslant \alpha(A \cup B)$.

   Nous avons

$$A \subset A \cup B \Rightarrow \alpha(A) \leqslant \alpha(A \cup B),$$

   et

$$B \subset A \cup B \Rightarrow \alpha(B) \leqslant \alpha(A \cup B).$$

   Donc

$$\max\{\alpha(A), \alpha(B)\} \leqslant \alpha(A \cup B).$$

   Réciproquement, soit $\epsilon > 0$. Alors, par définition de l'inf

$$\exists \delta \in \mathcal{A}_A; \quad \delta < \alpha(A) + \epsilon,$$

$$\exists \delta' \in \mathcal{A}_B; \quad \delta' < \alpha(B) + \epsilon.$$

$$\delta \in \mathcal{A}_A \Rightarrow \exists (A_i)_{i=1}^n \subset E \text{ tel que } A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ et } \ \text{diam } A_i \leqslant \delta, \ \forall i$$

donc

$$\text{diam} A_i < \alpha(A) + \epsilon, \ \forall i$$

alors

$$\text{diam} A_i < \max\{\alpha(A), \alpha(B)\} + \epsilon, \ \forall i.$$

De même,

$$\delta' \in \mathcal{A}_B \Rightarrow \exists (B_j)_{j=1}^m \subset E \text{ tel que } A \subset \bigcup_{j=1}^m B_j \text{ et } \ \text{diam } B_j \leqslant \delta', \ \forall j$$

donc

$$\text{diam} B_j < \alpha(B) + \epsilon, \ \forall j$$

alors

$$\text{diam} B_j < \max\{\alpha(A), \alpha(B)\} + \epsilon, \ \forall j.$$

on conclut que

$$A \cup B \subset (\bigcup_{i=1}^n A_i) \cup (\bigcup_{j=1}^m B_j) = \bigcup_{k=1}^{p=n+m} C_k$$

avec

$$C_k = \begin{cases} A_i \\ ou \\ B_j \end{cases} \quad \text{et diam} C_k = \begin{cases} \text{diam}(A_i) < \max\{\alpha(A)\} + \epsilon, \\ ou \\ \text{diam}(B_J) < \max\{\alpha(B)\} + \epsilon. \end{cases}$$

Ainsi

$$\max\{\alpha(A), \alpha(B)\} + \epsilon \in \mathcal{A}_{A\cup B}$$

et donc

$$\alpha(A \cup B) \leqslant \max\{\alpha(A), \alpha(B)\} + \epsilon.$$

ε étant arbitraire, nous déduisons que $\alpha(A \cup B) \leqslant \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.

3. Soient $A, B \in \Omega_E$. Il suffit de montrer que

$$-2\mathcal{H}(A, B) \leqslant \alpha(A) - \alpha(B) \leqslant 2\mathcal{H}(A, B).$$

Montrons d'abord que

$$\alpha(A) - \alpha(B) \leqslant 2\mathcal{H}(A, B).$$

Soit $\epsilon > 0$. Alors, $\exists \delta_\epsilon \in \mathcal{A}_A : \ \delta_\epsilon < \alpha(A) + \epsilon$.

$$\delta_\epsilon \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists (A_i)_{i=1}^n \subset E \text{ tel que } A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ et diam} A_i \leqslant \delta_\epsilon, \ \forall i$$

alors,

$$\text{diam} A_i < \alpha(A) + \epsilon, \ \forall i \tag{2.6}$$

Notons par $\mu_\epsilon = H(A,B) + \epsilon$, et considérons l'ensemble i

$$B_i^\epsilon = \{y \in B; \ \exists x \in A_i : \ \|y - x\|_E < \mu_\epsilon\}.$$

Alors,

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i^\epsilon.$$

En effet, soit $y \in B$. On sait que

$$d(y, A) \leqslant \sup_{b \in B} d(b, A) = e(B, A) \leqslant \mathcal{H}(A, B)$$
$$\Rightarrow d(y, A) < \mu_\varepsilon,$$

$\Rightarrow$

$$\exists x \in A, \ \ d(y, x) < \mu_\varepsilon,$$

alors et *comme* $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *alors* $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, d'où

$$\exists i \in \{1, ..., n\}; \ x \in A_i,$$

par conséquent

$$y \in B_i^\epsilon$$

D'où

$$y \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i^\epsilon.$$

Maintenant on va montrer que $\forall i$,

$$\text{diam} B_i^\epsilon < 2(H(A, B) + 3\epsilon + \alpha(A).$$

$$\text{diam} B_i^\epsilon = \sup\{\|y_1 - y_2\|, \ \ y_1, y_2 \in B_i^\epsilon\},$$

Soient donc $y_1, y_2 \in B_i^\epsilon$.

$$y_1 \in B_i^\epsilon \Rightarrow \exists x_1 \in A_i, \ \|y_1 - x_1\| < \mu_\epsilon$$

$$y_2 \in B_i^\epsilon \Rightarrow \exists x_2 \in A_i, \ \|y_2 - x_2\| < \mu_\epsilon$$

Donc

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\| &= \|(y_1 - x_1) + (x_1 - x_2) + (x_2 - y_2)\| \\ &\leqslant \|y_1 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \|y_2 - x_2\| \end{aligned}$$

d'où par (2.6)

$$\leqslant 2\mu_\epsilon + \text{diam} A_i,$$

$$\|y_1 - y_2\| < 2\mathcal{H}(A, B) + 2\epsilon + \alpha(A) + \epsilon.$$

et

$$\text{diam} B_i^\epsilon \leqslant 2\mathcal{H}(A,B) + 3\epsilon + \alpha(A),$$

par conséquent

$$2\mathcal{H}(A,B) + 3\epsilon + \alpha(A) \in \mathcal{A}_B,$$

alors

$$\alpha(B) \leqslant 2\mathcal{H}(A,B) + 3\epsilon + \alpha(A),$$

ceci implique

$$\alpha(B) - \alpha(A) \leqslant 2\mathcal{H}(A,B) + 3\epsilon,$$

ε étant arbitraire,on trouve que

$$\alpha(B) - \alpha(A) \leqslant 2\mathcal{H}(A,B),\ \forall A, B \in \Omega_E.$$

On en déduit aussi que

$$\alpha(A) - \alpha(B) \leqslant 2\mathcal{H}(B,A),$$

or $\mathcal{H}(B,A) = \mathcal{H}(A,B)$ donc

$$\alpha(A) - \alpha(B) \leqslant 2\mathcal{H}(A,B),$$

d'o$\grave{u}$

$$-2\mathcal{H}(A,B) \leqslant \alpha(B) - \alpha(A).$$

La preuve est ainsi achevée. ∎

2.2 k-set contractions

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une application.

Proposition 2.7. *une fonction f est K-Lipschitzienne si et seulement si* $\forall A \in \Omega_E$, *diam* $(f(A)) \leqslant k$. *diam* (A).

Démonstration. $\Rightarrow$) On Suppose que f est k Lipschitz,ie, qu'elle vérifie

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ \cdot f(x_1) - f(x_2) \cdot_F \leqslant K. \cdot x_1 - x_2 \cdot_E \tag{2.7}$$

Soit $A \in \Omega_E$,ie, un sous-ensemble bornée de E. Il faut vérifie que : diam $(f(A)) \leqslant k$. diam (A).

$$\text{diam } (f(A)) = \sup\{d(z,z');\ z,z' \in f(A)\} \sup\{\|z-z'\|;\ z,z' \in \{f(x_1), f(x_2)\}\}$$

Soient $z, z' \in f(A)$,
alors $\exists x, x' \in A;\ \ z = f(x)\ et\ z' = f(x')$
donc par (2.7), on a

$$\|z - z'\|_F = \|f(x) - f(x')\|_F \leqslant k.\|x - x'\|_E$$

$\leqslant k \sup\{\|x_1 - x_2\|_E, x_1, x_2 \in A\} = k diam(A)$,

z, z' étant arbitraires dans $f(A)$, on conclut que

$$\sup\{\|z - z'\|_F; \quad z, z' \in f(A)\} \leqslant k.\text{ diam } (A),$$

c'est $\grave{a}$ dire

$$diam(f(A)) \leqslant k.diam(A).$$

Réciproquement, on suppose que

$$\forall A \in \Omega_E, \quad \text{diam}(f(A)) \leqslant k.\text{diam } (A). \tag{2.8}$$

Soient $x_1, x_2 \in E$. L'ensemble $A_0 = \{x_1, x_2\} \in \Omega_E$. On a

$$\begin{array}{rcl} diam(A_0) = \text{ diam } (\{x_1, x_2\}) & = & \sup\{d(x,y); \quad x, y \in \{x_1, x_2\}\} \\ & = & \sup\{d(x_1,x_1), d(x_2,x_1), d(x_1,x_1), d(x_2,x_2)\} \\ , & = & \sup\{0, d(x_1,x_2)\} \\ & = & d(x_1,x_2) \\ & = & \|x_1 - x_2\|_E. \end{array}$$

De plus,
$f(A_0) = \{f(x);\ \ x \in A_0\} = \{f(x);\ \ x \in \{x_1, x_2\}\} = \{f(x_1), f(x_2)\}$,
et donc

$$\begin{array}{rcl} \text{diam } (f(A_0)) = \sup\{d(z,z');\ \ z, z' \in f(A_0)\} & = & \sup\{d(z,z'); \quad z, z' \in \{f(x_1), f(x_2)\}\} \\ & = & \sup\{0, d(f(x_1), f(x_2))\} \\ & = & d(f(x_1)), f(x_2)) \\ & = & \|f(x_1) - f(x_2)\|_F. \end{array}$$

Prenaut alors au compte (2.8), on obtient

$$diam(f(A_0)) = \|f(x_1) - f(x_2)\|_F \leqslant k.diam(A_0) = k\|x_1 - x_2\|_E.$$

■

Définition 2.8. *Si f est continue, bornée et pour $k \geqslant 0$ elle vérifie*

$$\alpha(f(A)) \leqslant k.\alpha(A), \qquad \forall A \in \Omega_E$$

alors on appelle f une k-set contraction.

- *Si $k = 1$, on appelle f une 1-set contraction .*
- *Si $k < 1$, on appelle f une k-set contraction "stricte ".*
- *Si pour tous les ensembles $A \in \Omega_E$ vérifiant $\alpha(A) > 0$ nous avons $\alpha(f(A)) < \alpha(A)$, alors on appelle f une "condensing ".*

Proposition 2.9. *Si f est k-lipschitzienne alors f est une k-set contraction.*

Démonstration. Suposons que f est k-lipschitzienne. Alors

$$\forall A \in \Omega_E, \quad \text{diam } (f(A)) \leqslant k. \text{ diam } (A) \tag{2.9}$$

Soit $A \in \Omega_E$ et Soit $\delta \in \mathcal{A}_A$. Alors, $\exists (A_i)_{i=1}^{n} \subset E$ tel que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \;\; et \;\; \text{diam } A_i \leqslant \delta, \quad \forall i$$

$\Rightarrow f(A) \subset f(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} f(A_i)$ *et par* (2.9) diam $(f(A_i)) \leqslant k.\delta$. Donc

$$k.\delta \in \mathcal{A}_{f(A)},$$

et

$$\delta \in \frac{1}{k}\mathcal{A}_{f(A)}.$$

ceci implique que

$$\mathcal{A}_A \subset \frac{1}{k}\mathcal{A}_{f(A)},$$

et

$$\alpha(\frac{1}{k}f(A)) \leq \alpha(A)$$

donc

$$\frac{1}{\mid k \mid}\alpha(\mathcal{A}_{f(A)}) \leq \alpha(A)$$

d'où

$$\alpha(f(A)) \leqslant k.\alpha(A).$$

■

Il s'agit donc d'une généralisation de la k-Lipschitzité. L'ensemble des k-set contractions est plus large que celui des applications k-Lipschitziennes. Ces dernières ne sont qu'un cas particulier, et les cotractions encore plus. Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$,$(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$,et $(E_3, \|\cdot\|_{E_3})$ des espaces de Banach.

Proposition 2.10. *Soit $f : E_1 \to E_2$ une k_1-set contraction, et soit $g : E_2 \to E_3$ une k_2-set contraction. Alors $f+g$ est une (k_1+K_2)-set contraction.*

Démonstration. Par définition on a

$$\begin{aligned} f+g :& E_1 \to E_2 \\ & x \mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x). \end{aligned}$$

Soit $A \in \Omega_{E_1}$. Comme f est une k_1-set contraction et g une k_2-set contraction, alors

$$\alpha(f(A)) \leqslant k_1.\alpha(A) \;\; et \alpha(g(A)) \leqslant k_2.\alpha(A)$$

Donc

$$\alpha(f(A))+\alpha(g(A)) \leqslant k_1.\alpha(A)+k_2.\alpha(A)$$

et utilisant (2.3)

$$\alpha((f(A)+g(A)) \leqslant k_1.\alpha(A)+K_2.\alpha(A)$$

autrement dit

$$\alpha((f+g)(A)) \leqslant (k_1+k_2).\alpha(A).$$

■

Proposition 2.11. *Soit $f : E_1 \to E_2$ une k_1-set contraction, et soit $g : E_2 \to E_3$ une k_2-set contraction. Alors gof est une $(k_1.k_2)$-set contraction.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} gof :& E_1 \to E_3 \\ & A \mapsto gof(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

Soit $A \in \Omega_{E_1}$. Comme g est une k_2-set contraction et f k_1 set contraction, alors

$$\begin{aligned} \alpha(gof(A)) = \alpha(g(f(A))) &\leqslant k_2.\alpha(f(A)) \\ &\leqslant k_2.k_1.\alpha(A)) \\ &\leqslant (k_1.k_2).\alpha(A) \\ &= (k_1.K_2).\alpha(A). \end{aligned}$$

■

2.3 Application expansive et non expansive

Soit (X, d) un espace métrique et $D \subset X$.

Définition 2.12. *Soit $f : D \to X$ une application.*

(1) f est dite expansive, s'il existe une constante $k > 1$ telle que

$$d(f(x), f(x')) \geqslant k.d(x, x'), \quad \forall x, x' \in D.$$

(2) f est dite non-expansive, si

$$d(f(x), f(x')) \leqslant d(x, x'), \quad \forall x, x' \in D.$$

(3) f est dite ψ-expansive, si

$$d(f(x), f(x')) \geqslant \psi(d(x, x')) \quad \forall x, x' \in D;$$

ograveu $\psi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est une fonction vérifiant $\psi(0) = 0$ et $\psi(t) > t, \ \forall t \in [0, +\infty[$.

Examples.

1) Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^n + 4x + 5$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ *et* $n \in \mathbb{N}$.
Alors pour tout $x, x' \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x')) = |f(x) - f(x')| &= |x^n + 4x + 5 - x'^n - 4x' - 5| \\ &= |(x - x')(x^{n-1}) + x'x^{n-2} + ... + x'^{n-1}) + 4(x - x')| \\ &\geqslant 4|x - x'|. \end{aligned}$$

Par conséquent, f est une application expansive avec une constant $k = 4$.

2) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est une fonction non expansive pour la constante $k = 1$. Il suffit de voir que

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x')) &= |f(x) - f(x')| \\ &= |\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x'}| \\ &= |\frac{(1+x') - (1+x)}{(1+x)(1+x')}| \\ &= \frac{|x - x'|}{(1+x)(1+x')} \\ &\leqslant |x - x'|. \end{aligned}$$

3) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, définie par $f(x) = e^x$ est une application ψ-expansive telle que $\phi(t) = t + \frac{1}{2}\, t^2$.

Il faut montrer que

$$|e^x - e^{x'}| \geqslant |x - x'| + \frac{1}{2}.|x - x'|^2,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}.$$

Soient $x, x' \in \mathbb{R}$. Nous avons

- Si $x = x'$ c'est trivial

- Si $x < x'$ alors $\begin{cases} min(x,x') = x \\ et \\ x' = x' - x + x \end{cases}$

  donc

$$\begin{aligned} |e^x - e^{x'}| &= |e^x - e^{x'-x+x}| \\ &= |e^x - e^{x'-x}.e^x| \\ &= |e^x - e^{-(x-x')}.e^x| \\ &= |e^{min(x,x')} - e^{|x-x'|}.e^{min(x,x')}| \\ &= e^{min(x,x')}(e^{|x-x'|} - 1) \\ &= e^x(e^{|x-x'|} - 1) \\ &\geq \mathrm{e}^x(1 + |x - x'| + \tfrac{1}{2}.|x - x'|^2 - 1) \\ &= e^x(|x - x'| + \tfrac{1}{2}.|x - x'|^2) \end{aligned}$$

- De même si $x > x'$.

Proposition 2.13. *Si $f : D \to X$ est expansive, alors elle est injective. D'où elle est bijective de D dans $f(D)$.*

Démonstration. Soient $x, x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$. Comme f est k-expansive, alors

$$d(f(x), f(x')) \geqslant d(x, x'),$$

or $d(f(x), f(x')) = 0$, d'où

$$d(x, x') \leq 0$$

$\Rightarrow d(x, x') = 0 \Rightarrow x = x'$. ■

Proposition 2.14. *Si $f : D \to X$ est k-expansive, alors $f^{-1} : f(D) \to D$ est une contraction de constante $\frac{1}{k}$.*

Démonstration.

$$f^{-1} : f(D) \to D$$
$$y \mapsto f^{-1}(y).$$

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Soient $y, y' \in f(D)$. Alors, il existe $x, x' \in D,\ \ y)f(x)\ \ et\ \ y' = f(x')$. Comme f est k-expansive, alors

$$d(f(x), f(x')) \geqslant kd(x, x')$$

donc

$$d(y, y') \geqslant kd(f^{-1}(y), f^{-1}(y')).$$

Par conséquent

$$kd(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \leqslant d(y, y'),$$

puisque $k > 1\ \ d(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \leqslant d(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \leqslant d(y, y')$,$d(y, y')$,$d'où\quad f^{-1}$ est une contraction de constant $\frac{1}{k}$. ∎

Chapitre 3

L'indice du point fixe et le point fixe

Avant d'introduire la notion de l'indice, notons que les travaux de Petryshyn [14], [15] ont initié des étapes importantes dans l'établissement de la relation entre la théorie du point fixe et l'indice du point fixe. Notons aussi que la théorie du point fixe a été fortement influencée par les travaux de recherche concernant la notion du degrè topologique qui est en fait *à* l'origine de la notion de l'indice. Citons d'abord quelques théorèmes de point fixe.

3.1 Quelques théorèmes de point fixe

Théorème 3.1. *(théorème de point fixe de Banach)*

Soit (X, d) un espace métrique complet non vide et soit $f : X \to X$ une k-contraction. Alors f possède un unique point fixe.

Démonstration. (i) l'unicité :

On suppose qu'il existe deux points fixes $x, x' \in X$, i.e. $x \neq x'$, $f(x) = x$ et $f(x') = x'$. Comme f est une contraction, alors

$$d(f(x), f(x')) \leqslant k.d(x, x') < d(x, x')$$

car $k < 1$ et $d(x, x') > 0$ puisque $x \neq x'$
Or $d(f(x), f(x')) = d(x, x')$, d'où

$$d(x, x') < d(x, x'),$$

contradiction, donc $x = x'$.

(ii) Existence :

On choisit un point $x_0 \in X$ quelconque et on définit la suite $x_n = f(x_{n-1})$, on montre par récurrence que $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k^n.d(x_0, x_1)$ pour tout $n \in N$, Par conséquent

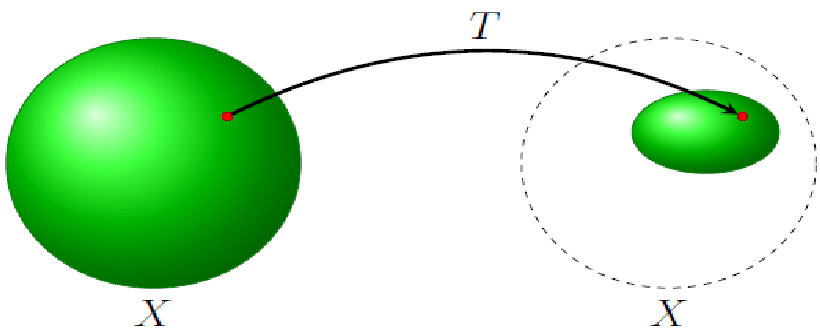
$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leqslant \sum_{n=0}^{p-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{p-1} k^{n+k}.d(x_0, x_1) \\ &\leqslant k^n \sum_{n=0}^{p-1} k^k.d(x_0, x_1) \\ &\leqslant k^n.\frac{1-k^p}{1-k}.d(x_0, x_1) \\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k}.d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Et donc $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Ceci exprime le fait que (x_n) est une suite de Cauchy dans X, et comme X est un espace complet, il existe $x \in X$ tel que $x_n \to x$. Prenant en compte la continuté de f passant à la limite dans , $x_{n+1} = f(x_n)$ on obtient $f(x) = x$.

i.e. x est un point fixe.

■

La contraction de Banach



Le suivant est un résultat de point fixe pour les applications expansives qui accompagne le théorème classique de Banach pour les contractions.

Proposition 3.2. *(un théorème de point fixe pour les fonctions expansives)* *Soient (X, d) un espace métrique complet et D un sous-ensemble fermé de X. Supposons que l'application $f : D \to X$ est expansive et $D \subset f(D)$, alors il existe un point unique $x^\star \in D$ tel que $f(x^\star) = x^\star$.*

Démonstration. Comme f est expansive, alors, d'après la (Proposition 2.14), l'application $f^{-1} : f(D) \to D$ est une contraction de constante $\frac{1}{k}$.

Or, $D \subset f(D)$, de plus D est complet puisque il est fermé dans le complet X. En appliquant le théorème du point fixe de Banach (Théorème 3.1) sur la restriction de f^{-1} ă D, on déduit que f^{-1} admet un unique point fixe dans D, ie,

$$\exists!\ x \in D : \quad f^{-1}(x) = x$$

d'où

$$\exists!\ x \in D : \quad x = f(x).$$

■

Le théorème de Banach ainsi que beaucoup d'autres concernent les fonctions définies sur l'espace X *à* valeurs dans lui même. Par contre, une fonction définie seulement sur un **sous-ensemble** de X n'aura pas forcément de point fixe. Pour assurer l'existence de ce dernier, des conditions supplémentaires sont nécessaires, par exemple :

Théorème 3.3. *([7]) Soient (X, d) un espace métrique complet et $K \subset X$ un ensemble fermé. Soit $f : K \to X$ une α-contraction. Supposons qu'il existe $x_0 \in K$ et $r > 0$ tels que*

$$\overline{B}(x_0, r) \subset K \text{ et } d(x_0, f(x_0)) < (1 - \alpha)r.$$

Alors f possède un unique point fixe $z \in B(x_0, r)$.

Théorème 3.4. *(théorème de point fixe de Schauder) Soit E un espace de Banach, et $f : \overline{B} \to \overline{B}$ une application complètement continue. Alors f admet un point fixe dans $\overline{B}$.*

Théorème 3.5. *(théorèmes de point fixe de Brouwer) Soit $f : \overline{B}_{\mathbb{R}^n} \to \overline{B}_{\mathbb{R}^n}$ une application continue. Alors f admet un point fixe dans $\overline{B}_{\mathbb{R}^n}$.*

Le théorème de Brouwer est un cas particulier de celui de Schauder, puisque toute application continue est complètement continue en dimension finie. Gràce *à* ce qu'on appelle "degrès topologique", on peut donner une preuve rapide et commune aux deux théorèmes.

3.2 Degrè topologique

Pour plus de détails, voir [12],[9].
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ l'espace des applications continues $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \mid f(x) \mid .$$

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^{\ltimes}$,et considérons $k(\overline{\Omega})$ le sous-espace de $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ défini par

$$k(\overline{\Omega}) = \{f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \ y_0 \notin f(\partial\Omega)\};$$

=

$$\{f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})/f(x) \neq y_0 \ pour \ x \in \partial\Omega\}.$$

Définition 3.6. *(définition axiomatique) Par degrè topologique on entend la famille des applications* $deg(., \Omega, y_0) : \ k(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{Z}$*, définie pour un sous-ensemble ouvert et borné* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *et satisfaisant les axiomes suivants :*
(A_1) *(Normalisation) Si* $y_0 \in \Omega$*, alors* $deg(I, \Omega, y_0) = 1$*, où* I *est l'application d'identité dans* $\mathbb{R}^n$*;*
(A_2) *(Additivité) Soient* $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ *des sous-ensembles ouverts disjoints tels que* $y_0 \notin f(\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$*. Alors*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f|_{\overline{\Omega_1}}, \Omega_1, y_0) + deg(f|_{\overline{\Omega_2}}, \Omega_2, y_0);$$

(A_3) *(Invariance par homotopie) Si* $f, g \in k(\overline{\Omega_1})$ *sont homotop, alors*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0).$$

On appelle le nombre entier $deg(f, \Omega, y_0)$ *le degrè topologique (de Brouwer) de l'application* f *sur* y_0 *par rapport à* Ω*.*

Proposition 3.7. *(Propriétè d'existence) Si* $deg(f, \Omega, y_0) \neq 0$*, alors il existe* $x_0 \in \Omega$*, tel que* $f(x_0) = y_0$*.*

Cela veut dire que l'équation $f(x) = y_0$ admet une solution sur Ω.
Comme déja mentienné, gràce *à* ce au degrè topologique de Brouwer par exemple, on peut donner une preuve rapide au théorème du point fixe de Brouwer en haut (3.5), comme suit

Démonstration. Nous allons noter $B = B_{\mathbb{R}^n}$. Nous avons

$$\overline{B} = \partial B \cup B$$

• S'il existe un point fixe dans ∂B, la preuve est terminé
• Sinon, cela veut dire que

$$\forall x \in \partial B, \ f(x) \neq x. \tag{3.1}$$

Pour $\Omega = B$ et $y_0 = 0_{\mathbb{R}^n}$,

$$\mathcal{C}(\overline{\Omega}) = \mathcal{C}(\overline{B}) = \{f : \overline{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n;\ \ f \textit{ est continue}\},$$

$$K(\overline{\Omega}) = K(\overline{B}) = \{f \in \mathcal{C}(\overline{B});\ 0_{\mathbb{R}^n} \notin f(\partial B)\}.$$

Nous pouvons vérifier que les deux fonctions Id (l'identité sur $\overline{B}$) et $Id - f$ appartiennent *à* $K(\overline{B})$. En effet,

• $Id \in \mathcal{C}(\overline{B})$ (car $Id : \overline{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue), de plus $0_{\mathbb{R}^n} \notin \partial B$ puisque $\cdot 0_{\mathbb{R}^n} \cdot_{\mathbb{R}^n} = 0 \neq 1$ Donc $Id \in K(\overline{B})$.

• $Id - f$ est continue (parceque Id et f le sont), de plus $0_{\mathbb{R}^n} \notin (Id - f)(\partial B)$ car d'après (3.1) $\forall x \in \partial B,\ f(x) \neq x$, d'o*ù*

$$\forall x \in \partial B,\ x - f(x) = (Id - f)(x) \neq 0.$$

Donc $Id - f \in K(\overline{B})$.

De plus , les fonctions Id et $Id - f$ sont homotopiques, il pourvoir ça suffit de prendre la fonction continue

$$\begin{aligned} H :&[0,1] \times \overline{B} \to \mathbb{R}^n \\ &(t, x) \mapsto H(t, x) = x - tf(x). \end{aligned}$$

Il est clair que :

• $\forall x \in \overline{B},\ H(0, x) = x;$ *donc* $H(0, \cdot) = Id,$

• $\forall x \in \overline{B},\ H(1, x) = x - f(x);$ *donc* $H(1, \cdot) = Id - f,$

• $H(t, \cdot) \in K(\overline{B})$, car $0_{\mathbb{R}^n} \notin H_t(\partial B)$. En effet si on suppose le contraire, cela veut dire que

$$\exists x \in \partial B,\ \exists t \in [0, 1];\ 0_{\mathbb{R}^n} = x - t.f(x)$$

ie,

$$\exists x \in \partial B,\ \exists t \in [0, 1];\ x = t.f(x)$$

$$\begin{cases} x \in \partial B \Longrightarrow \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1 \\ t \in [0, 1] \Longrightarrow 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ f(x) \in \overline{B} \Longrightarrow \|f(x)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant 1 \Rightarrow t.\|f(x)\| \leq t \end{cases}$$

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1 \Rightarrow \|tf(x)\|_{\mathbb{R}^n} = 1 \Leftrightarrow t.\|f(x)\|_{\mathbb{R}^n} = 1 \overset{t.\|f(x)\| \leq t}{\Longrightarrow} 1 \leq t$$

Donc $t = 1$, d'o*ù* $x = 1.f(x) = f(x)$, ce qui contredit avec (3.1) Par consiquent $0_{\mathbb{R}}^n \notin H_t(\partial B)$.

Maintenant, en appliquant la propriétè d'invariance par homotopie (A_3) pour $f = Id$ et $g = Id - f$, on obtient

$$deg(Id - f, B, 0_{\mathbb{R}^n}) = deg(Id, B, 0_{\mathbb{R}^n})$$

Mais d'aprės la propriétè de normalisation (A_1),

$$deg(Id, B, 0) = 1$$

Donc on obtient

$$deg(Id - f, B, 0) = 1$$

et

$$deg(Id - f, B, 0) \neq 0,$$

utilisant (Proposition 3.7) nous déduisons que l'application $Id - f$ admet au moins un zéro dans B, ie,

$$\exists x \in B : \ (Id - f)(x) = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$x - f(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(x)$$

Autrement dit ,
f admet un point fixe dans B. ■

Le degrè de Brouwer est pour la dimention finie. Il existe d'autres types de degrè topologique, on trouve par exemple celui de Leray-Schauder pour la dimention infinie, ... etc. Ce dernier est un outil important en analyse non linéaire, permettant de montrer l'existence de points fixes pour une application définie sur un sous-ensemble ouvert borné d'un espace de Banach dans cet espace. Mais il existe de nombreux problèmes pour lesquels nous ne pouvons pas utiliser tout l'espace de Banach, mais plutôt, un sous-ensemble convexe fermé qui n'est pas un sous-espace vectoriel.

Il existe **une généralisation** du degrès de Leray-Schauder, appelée indice (ou bien indexe ou encore indexeur) de point fixe, qui a pour but de trouver des points fixes d'une telle application. Dans ce qui suit, nous allons donner la définition de cet indice ainsi que quelques unes de ses popriétěs pour la classe des applications complètement continues.

3.3 L'indice du point fixe

Soit E un espace de Banach, et soit X un retrait de E.

Théorème 3.8. *([7]) Pour tout sous-ensemble ouvert borné $U \subset X$ et toute application compacte $f : \overline{U} \to X$ sans points fixes sur la frontière ∂U, il existe **un unique entier** $i(f, U, X)$ satisfaisant les conditions suivantes :*

(1) (propriétĕ de normalisation) L'entier $i(f, U, X) = 1$ lorsque où f est constante sur $\overline{U}$.

(2) (propriétĕ d'additivité) Soient U_1,U_2 deux ouverts disjoints de U tels que f n'a pas de points fixes sur $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$, alors

$$i(f, U, X) = i(f, U_{\boldsymbol{1}}, X) + i(f, U_{\boldsymbol{2}}, X)$$

où $i(f, U_{\boldsymbol{k}}, X) = i(f \setminus \overline{U}_k, U_k, X), \quad k = 1, 2.$

(3) (propriétĕ d'invariance d'homotopie) L'entier $i(h(., t), U, X)$ ne dépend pas du paramètre $t \in [0, 1]$, où $h : \overline{U} \times [0, 1] \to X$ est une application compacte et $h(x, t) \neq x$ pour tout $x \in \partial U$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$.

(4) (Propriétĕ de permanance) Si Y est un retrait de X et $f(\overline{U}) \subset Y$, alors

$$i(f, U, X) = i(f, U \cap Y, Y)$$

où $i(f, U \cap Y, Y) = i(f \setminus_{\overline{U \cap Y}}, U \cap Y, Y)$.

L'entier $i(f, U, X)$ est appelé l'indice (ou bien l'indexe, ou encore indexeur) de points fixes de f sur U par rapport à X.

Proposition 3.9.

$$i(f, \emptyset, X) = 0.$$

Démonstration. Si on prernd $U_1 = \emptyset$ et $U_2 = U$:

- ils sont disjoints car $U_1 \cap U_2 = \emptyset \cap U = \emptyset$,
- on a $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2) = \overline{U} \setminus U = \partial U$,

et par hypothèse f n'admet pas de points fixes sur ∂U. Il suffit d'appliquer la propriétĕ d'additivité, on obtient

$$i(f, U, X) = i(f, \emptyset, X) + i(f, U, X)$$

ce qui implique

$$i(f, \emptyset, X) = 0.$$

■

Proposition 3.10. *Soit $V \subset U$ un sous-ensemble ouvert tel que f n'admet pas de points fixes dans $\overline{U} \setminus V$. Alors,*

$$i(f, U, X) = i(f, V, X).$$

Démonstration. Si on prend $U_1 = V$ et $U_2 = \emptyset$:
• ils sont disjoints car $U_1 \cap U_2 = V \cap \emptyset = \emptyset$,
• $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2) = \overline{U} \setminus V$,
et par hypothèse f n'admet pas de points fixes sur $\overline{U} \setminus V$. Il suffit d'appliquer la propriétĕ d'additivité, on trouve alors

$$\begin{aligned} i(f, U, X) &= i(f, U_1, X) + i(f, U_2, X) \\ &= i(f, V, X) + i(f, \emptyset, X), \end{aligned}$$

et par la proposition précédente, ceci implique

$$i(f, U, X) = i(f, V, X).$$

■

Corollaire 3.11. *(Propriétĕ d'existence)*
Si $i(f, U, X) \neq 0$, alors f admet un point fixe dans U.

Démonstration. On suppose que f n'admet pas de points fixes dans U. Comme f n'en admet pas sur la frontière ∂U, alors elle n'en admet pas sur $U \cup \partial U = \overline{U}$. Or $\overline{U} = \overline{U} \setminus \emptyset$. Donc, pour $V = \emptyset$, d'après la Proposition précédente

$$i(f, U, X) = i(f, V, X) = i(f, \emptyset, X)$$

ce qui implique que

$$i(f, U, X) = 0,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. On conclut que f admet un point fixe dans U. ■

La propriétè d'existence montre bien l'intéret de l'indice.
Cette notion d'index a été étendue *à* des classes plus larges comme la classe des k-set contractions strictes, les applications expansives, ... etc. Pour plus de détatils voir ([11], [6], [7]). Dans [8] les auteurs ont même développé un nouveau concept d'indice. Ce mémoire est une référence qui ouvre juste la porte pour ceux qui veulent s'approfondir.

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier la notion de mesure de non compacité, en particulier celle de Kuratowski, qui permet de définir certaines classes de fonctions. Puis intruduire la notion de l'indice de point fixe pour une classe de ces fonctions, et qui peut s'étendre pour toutes les autres. La notion d'indice généralise celle du degrè topologique. Les deux concepts permettent d'étudier l'existence de points fixes.

Bibliographie

[1] D. Azzam-Laouir, *Cours d'analyse convexe*, polycopié, Département de Mathématiques, Université de Jijel (2014).

[2] J. Appell,*Measures of non compactness*, condensing operators and fixed point : an application -oriented survey, Fixed Point Theory 6(2005),2, 157-229.

[3] F. Bienvenu, *Notes de Cours, Math-Bio, Introduction à la topologie*, Université de Montpellier (2015).

[4] S. Benslimane, S. Djebali and K. Mebarki, *On the fixed point index for sums of operators*, Fixed Point Theory, 23(2020), no. 1.,143-162.

[5] S. Benslimane, S.G. Geogiev and k. Mebarki, *Expansion-Compression fixed point theorem of Legget -Williams type for the sum of two operators and application in three-point BVPs*, Studia UBB Math, to appear.

[6] S. Benslimane, S.G. Geogiev and K.Mebarki, Multiple nonegative solutions for a class fourth-orther BVPs, Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications 6(2022) No. 3, 390-404.

[7] S. Benslimane,*Sur la théorie du point fixe dans des espaces de Banach ordonnés et applications*,thése de Doctorat, Université A. Mira de Béjaia (2021).

[8] S. Djebali et k. Mebarak, Fixed point index theory for perturbation of expansive mappings by k-set contractions, Topol.Méthods Non linéair Anal .54(2019),613-640, DOI : 10.12775/TMNA. 2019.055.

[9] L.E.J. Brouwer, *Uber abbildungen von mannigfaltigkeiten* Math .Ann. 71(1912), 97-115.

[10] c.Dazé, Théorème du point fixe et principe variationnel d'ekelend, mémoire présenté dans la faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de Maitre des siences (M.Sc.)(2010), université de Montréal.

[11] S. Djebali et K.Mebarak, Fixed point index theory for perturbation of expansive mappings by k-set contractions, Topol. MéthodS Non linear Anal. 54(2019), 613-640, DOI :10.12775/MNA.2019.055.

[12] J. Mawhin,*Topological degree methods in nonlinear boundary value problems* , Amer .Math .Soc.40, Providence, RI, 1979.

[13] N. EL Haga Hassan, *Topologie générale et espace normés*, Université d'Orléans, août (2011).

[14] W.V. Petryshyn, *Fixed point theoreme for various classes of 1-set -contractive and 1-ballcontractive mappings in Banach spaces*, Trans .A.M.S.Vol.182(1973), pp. 323-352.

[15] W.V. Petryshyn, *Remarks on condensing and k-set contractive mappings*, J.Math.Anal.Appl.39(1972), 717-741.