République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik BenYahia - Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Sur les systèmes dynamiques p-adiques

Présenté par :

Fafa Afaf

Devant le jury :

Président :	**T. Zerzaihi**	Prof. Université de Jijel
Encadreur :	**B. Saoudi**	M.C.B Université de Jijel
Examinateur :	**R. Belhadef**	M.C.A Université de Jijel

Promotion **2021/2022**

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à **Dieu** tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a donné durant ces longues années d'étude et le courage pour terminer ce mémoire.

Un sentiment particulier de gratitude envers encadreur **M. Bilal Saoudi**, pour ses précieux conseils, sa patience, sa motivation et son soutien tout au long de mes études pour l'obtention le master. C'est un réel privilège et un honneur pour moi de travailler avec lui et de partager avec lui ses remarquables connaissances académiques et ses qualités humaines, sans ses conseils ce travail n'aurait pas été achevé.

La réalisation de ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'expérience du comité de discussion, le professeur **T. Zerzaihi**, et le docteur **R. Belhadef**, merci pour le temps que vous avez consacré à la lecture de mon travail.

Je dédie ce travail à mon cher père qui a cru en moi et m'a appris la valeur du travail acharné et les mots d'encouragement et de pression pour persévérer résonnent encore à mes oreilles, j'adresse toute ma gratitude à ma mère bien-aimée qui m'a soutenu et encouragé le long du chemin difficile et sinueux et mes chères soeurs et amies pour être mes piliers de soutien.

Un grand merci à tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de Jijel qui nous ont suivi pendant cinq ans d'études, et enfin je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.

$\mathbb{K}$	:	Un corps.
p	:	Un nombre premier.
$B_r^+(a)$	:	La boule fermée de centre a et de rayon r.
$B_r(a)$	:	La boule ouverte de centre a et de rayon r.
$S_r(a)$	:	La sphère de centre a et de rayon r.
v_p	:	La valuation p-adique.
$\lvert \cdot \rvert_p$	:	La norme p-adique.
$\mathbb{Z}_p$	:	Anneau des entiers p-adiques.
$\mathbb{Q}_p$	:	Corps des nombres p-adiques.
$\overline{\mathbb{Q}}_p$	:	La clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$.
$\mathbb{C}_p$	:	Corps des nombres complexes p-adiques.
$\mathcal{A}(B_r(a))$	:	L'ensemble des fonctions analytiques sur $B_r(a)$.
$\mathbb{K}[x]$	:	L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}(X)$	:	L'ensemble des fonctions rationnelles sur $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}[[x]]$	:	L'ensemble des séries entières dans $\mathbb{K}$
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$	:	L'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[X]$	:	L'ensemble des fonctions entières transcendantes sur $\mathbb{C}_p$.
$\lvert . \rvert (r)$	:	Le module de maximum.
r_f	:	Le rayon de convergence d'une série entière.
$Fix(f)$	:	L'ensemble de tous les points fixes de f.
$SI(x_0)$	:	La boule de Siegel maximum.
$N(f,r)$	:	Le nombre des zéros de f dans la boule $B_r^+(0)$
$n(f,r)$	:	Le nombre des zéros de f dans la boule $B_r(0)$

INTRODUCTION

L'étude de la dynamique d'une fonction rationnelle complexe est classique et elle a été initiée par Fatou et Julia dans les années 1910. Depuis ces premiers travaux, et notamment dans les vingt dernières années, la dynamique des fonctions rationnelles complexes a connu un grand développement, même si des questions fondamentales comme la densité de l'hyperbolicité sont encore ouvertes.

L'étude de la dynamique des fonctions rationnelles sur des corps non-archimédiens est plus récente ; voir [2], [5], [6] et [7]. Ce mémoire est consacré à l'étude de la dynamique d'une fonction rationnelle dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}_p$. Parfois il est plus facile d'étudier la dynamique d'une fonction rationnelle sur $\mathbb{C}_p$ que sur $\mathbb{Q}_p$, car on profite du fait que $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clos.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres et une introduction.

Dans le premier chapitre, on donne quelques rappels sur un corps valué (archimédien et non-archimédien). Ensuite, on construit le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$, qui est la plus petite extension complète et algébriquement clos de $\mathbb{Q}_p$. Puis, on présente ces propriétés, qu'ils seront très utiles tout au long de notre étude.

Le deuxième chapitre contient quelques rappelles concernant les systèmes dynamiques (f, U) sur $\mathbb{C}_p$, où $f : z \in U \longrightarrow f(z) \in U$ est une fonction analytique et $U = \mathbb{C}_p$ ou $B_r(a)$, $a \in \mathbb{C}_p$. On présente les fonctions analytiques complexes p-adiques et l'image d'une boule par une fonction analytique. Á la fin de ce chapitre, on signale quelques propriétés des systèmes engendrés par des fonctions analytiques au voisinage d'un point fixe (point fixe attractif, point fixe indifférent, point fixe répulsif, bassin d'attraction et la boule de Siegel).

Dans le troisième chapitre, on étudie le système dynamique $(1, 2)$-rationnel associé à la fonction $f(z) = \dfrac{az + b}{z^2 + cz + d}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{C}_p$ et $a \neq 0$, lorsque f admet un seul point fixe $z_0 = 0$. On trouve que ce point fixe est indifférent, et on remarque que le système dynamique p-adique associé à la fonction f est directement lié à un autre système dynamique réel associé à une fonction φ_A où $A = |a|_p$. Puis, on étudie le système dynamique associé à la fonction $f(z) = \dfrac{az}{z^2 + a}$ sur chaque sphère invariante. On termine ce chapitre par l'étude des points 2-périodiques de la fonction f (i.e, les points fixes de $g = f^2$, pour $p = 2$, pour $p = 3$ et pour $p \geq 5$).

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR L'ANALYSE P-ADIQUE

1.1 Corps valué

Un *corps valué* $(\mathbb{K}, \| \,.\, \|)$ est un corps $\mathbb{K}$ muni d'une application $\| \,.\, \|: \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes

1. $\| x \| \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{K}$.
2. $\| x \| = 0$ si et seulement si $x = 0_k$, pour tout $x \in \mathbb{K}$.
3. $\| x.y \| = \| x \| \,.\, \| y \|$, pour tous $x, y \in \mathbb{K}$.
4. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, pour tous $x, y \in \mathbb{K}$.

On dit que $(\mathbb{K}, \| \,.\, \|)$ est *non-archimédien* ou *ultramétrique*, si de plus on a

(4.)′ $\| x + y \| \leq \max(\| x \|, \| y \|)$, pour tous $x, y \in \mathbb{K}$.

Si $\mathbb{K}$ est complet pour la distance induite par la norme $\| \,.\, \|$, on dit que $(\mathbb{K}, \| \,.\, \|)$ est *complet*. Le groupe $|\mathbb{K}| = \{\| x \|; x \in \mathbb{K}^*\}$ s'appelle le *groupe de valuation* de $\mathbb{K}$.

Théorème 1.1 *[3][8]**(Caractéristique non-archimédienne)***

Soit $(\mathbb{K}, \| \,.\, \|)$ *un corps valué. Les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *$\| . \|$ est non-archimédienne.*
2. *$\| n \| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (i.e, $\mathbb{N}$ est borné).*

Preuve.

1. **D'une part**, on suppose que la norme $\| . \|$ est non-archimédienne et on montre par récurrence que $\| n \| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   − Pour $n = 1$, on a $\| n \| = \| 1 \| = 1 \leq 1$.
   − On suppose que $\| n \| \leq 1$ est vraie pour $n \geq 1$, et on montre que $\| n + 1 \| \leq 1$.
   On a
   $$\| n + 1 \| \leq \max\{\| n \|, \| 1 \|\} \leq 1,$$
   donc
   $$\| n \| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. **D'autre part**, on suppose que $\| n \| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et on montre que $\| . \|$ est non-archimédienne. Comme $\| . \|$ est une norme, il suffit de prouver l' I.T.F, i.e $\| x + y \| \leq \max\{\| x \|, \| y \|\}, \forall x, y \in \mathbb{K}$. En effet,
   $$\begin{aligned} \| x + y \|^n = \| (x + y)^n \| &= \| \sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^k . y^{n-k} \| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \| C_n^k \| . \| x \|^k . \| y \|^{n-k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} 1. \| x \|^k . \| y \|^{n-k} \ (car \ \| C_n^k \| \leq 1, C_n^k \in \mathbb{N}^*). \end{aligned}$$
   Et comme
   $$\| x \| \leq \max\{\| x \|, \| y \|\} \ et \ \| y \| \leq \max\{\| x \|, \| y \|\},$$
   alors
   $$\| x \|^k \leq (\max\{\| x \|, \| y \|\})^k \ et \ \| y \|^{n-k} \leq (\max\{\| x \|, \| y \|\})^{n-k}.$$

Donc

$$\| x + y \|^n \leq \sum_{k=0}^{n} (\max(\| x \|, \| y \|))^n$$
$$\leq (n+1)(\max\{\| x \|, \| y \|\})^n,$$

d'où

$$\| x + y \| \leq (n+1)^{1/n} \max(\| x \|, \| y \|).$$

Par passage a la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\| x + y \| \leq max(\| x \|, \| y \|),$$

alors $\| \, . \, \|$ est une norme non-archimédienne .

■

Proposition 1.1 *[8]*
Soient a, x *deux éléments d'un corps valué* $(\mathbb{K}, \| \, . \, \|)$, *on a*

$$\| x - a \| < \| a \| \Rightarrow \| x \| = \| a \| \, .$$

C'est la propriété des ***triangules isocèles*** *.*

Preuve.
On suppose que $\| x - a \| < \| a \|$, on a

$$\| x \| = \| x - a + a \| \leq \max\{\| x - a \|, \| a \|\} = \| a \|,$$

d'autre part, on a

$$\| a \| = \| a - x + x \| \leq \max\{\| a - x \|, \| x \|\}.$$

Si $\max\{\| x - a \|, \| x \|\} = \| x - a \|$, alors

$$\| a \| \leq \| x - a \| \, .$$

C'est une contradiction avec l'hypothèse, donc

$$\max\{\| x-a \|, \| x \|\} = \| x \| .$$

D'où $\| a \| \leq \| x \|$, alors $\| x \| = \| a \|$. ■

Lemme 1.1 *[3][8](Normes équivalentes sur un corps)*
Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\| . \|_1$ et $\| . \|_2$ deux normes sur $\mathbb{K}$. Les normes $\| . \|_1$ et $\| . \|_2$ sont équivalentes ($\| . \|_1 \sim \| . \|_2$) si et seulement si

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \text{ et } a \in \mathbb{K} : a_n \underset{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow} a \Leftrightarrow a_n \underset{\|\cdot\|_2}{\longrightarrow} a.$$

Proposition 1.2 *[3][8]*
Soit $\mathbb{K}$ un corps, $\| . \|_1$ et $\| . \|_2$ deux normes équivalentes sur $\mathbb{K}$, on a

1. $\| x \|_1 < 1 \Leftrightarrow \| x \|_2 < 1, \forall x \in \mathbb{K}$.
2. $\| x \|_1 > 1 \Leftrightarrow \| x \|_2 > 1, \forall x \in \mathbb{K}$.
3. $\| x \|_1 = 1 \Leftrightarrow \| x \|_2 = 1, \forall x \in \mathbb{K}$.

Théorème 1.2 *[3]*
Soient $\| . \|_1$ et $\| . \|_2$ deux normes sur $\mathbb{K}$, on a l'équivalence suivante

$$\| . \|_1 \sim \| . \|_2 \Leftrightarrow \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \| x \|_2 = \| x \|_1^{\alpha}, \forall x \in \mathbb{K}$$

Preuve.
On montre facilement que si $\| . \|_1$ est triviale et $\| . \|_1 \sim \| . \|_2$, alors $\| . \|_2$ est aussi triviale par conséquent, on a $\| x \|_2 = \| x \|_1^1, \forall x \in \mathbb{K}$.
On suppose que $\| . \|_1$ n'est pas triviale, il existe $a \in \mathbb{K} - \{0\}$ tel que $\| a \|_1 \neq 1$. On prend $\| a \|_1 < 1$ (si $\| a \| > 1$ on prend $a' = a^{-1}$) et on pose

$$\alpha = \frac{\log \| a \|_2}{\log \| a \|_1}.$$

Donc $\alpha > 0$, car $\| a \|_1 < 1 \Rightarrow \| a \|_2 < 1$ (d'après 1 de la Proposition (1.2)). D'où

1. **Si** $x = 0$, on a $\| 0 \|_2 = 0 = \| 0 \|_1^{\alpha}$.

2. **Si** $0 <\| x \|_1 < 1$, on note, $S = \{r = \dfrac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}^*, \| x \|_1^r <\| a \|_1\}$, alors on a

$$\| x \|_1^m <\| a \|_1^n, \forall r \in S$$

d'où

$$\| \frac{x^m}{a^n} \|_1 < 1 \Leftrightarrow \| \frac{x^m}{a^n} \|_2 < 1.$$

Donc $\| x \|_1^r <\| a \|_1 \Leftrightarrow \| x \|_2^r <\| a \|_2$. Par conséquent

$$S = \{r = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}^*, \| x \|_2^r <\| x \|_2\}.$$

Par l'introduction de log, on trouve

$$S = \{r \in \mathbb{Q}_+^* : r > \frac{\log \| a \|_2}{\log \| x \|_2}\} = \{r \in \mathbb{Q}_+^* : r > \frac{\log \| a \|_1}{\log \| x \|_1}\}.$$

Alors

$$\frac{\log \| a \|_2}{\log \| x \|_2} = \frac{\log \| a \|_1}{\log \| x \|_1} = \inf S,$$

d'où

$$\frac{\log \| a \|_2}{\log \| a \|_1} = \frac{\log \| x \|_2}{\log \| x \|_1} = \alpha,$$

donc $\log \| x \|_2 = \log \| x \|_1^\alpha$, (c-à-d $\| x \|_2 =\| x \|_1^\alpha$).

3. **Si** $\| x \|_1 > 1$, alors $0 <\| x^{-1} \|_1 = \dfrac{1}{\| x \|_1} < 1$, donc $\| x^{-1} \|_2 =\| x^{-1} \|_1^\alpha$, d'où $\dfrac{1}{\| x \|_2} = \dfrac{1}{\| x \|_1^\alpha}$, alors $\| x \|_2 =\| x \|_1^\alpha$.

4. **Si** $\| x \|_1 = 1$, alors d'après la Proposition (1.2) on a $\| x \|_2 = 1$, donc $\| x \|_2 =\| x \|_1^\alpha = 1$ où $\alpha = \dfrac{\log \| a \|_2}{\log \| a \|_1}$.

■

Proposition 1.3 *[8]*
Soit $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels et $| \cdot |$ la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$, alors $\| x \| =| x |^\alpha, \forall x \in \mathbb{Q}$, est une norme sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si $0 < \alpha \leq 1$.

Preuve.
D'une part, on suppose que $0 < \alpha \leq 1$, et on montre que $\| x \| =| x |^\alpha, \forall x \in \mathbb{Q}$, est une norme sur $\mathbb{Q}$. Les deux premières propriétés de la norme sont évidentes,

il suffit donc de vérifier l'inégalité triangulaire. Soit $x, y \in \mathbb{Q}$, on peut supposer que $\mid y \mid \leq \mid x \mid$, alors on a

$$\| x + y \| = \mid x + y \mid^{\alpha} \overset{IT}{\leq} (\mid x \mid + \mid y \mid)^{\alpha} = (\mid x \mid (1 + \frac{\mid y \mid}{\mid x \mid}))^{\alpha} = \mid x \mid^{\alpha} (1 + \frac{\mid y \mid}{\mid x \mid})^{\alpha}$$
$$\overset{(1)}{\leq} \mid x \mid^{\alpha} (1 + \frac{\mid y \mid}{\mid x \mid}) \overset{(2)}{\leq} \mid x \mid^{\alpha} (1 + (\frac{\mid y \mid}{\mid x \mid})^{\alpha}) = \mid x \mid^{\alpha} + \mid y \mid^{\alpha} = \| x \| + \| y \| .$$

La première inégalité découle du fait que $t^{\alpha} \leq t$, pour $t \geq 1$, et la deuxième car $t^{\alpha} \geq t$, pour $0 \leq t \leq 1$.
D'autre part, si $\alpha > 1$ l'inégalité triangulaire n'est pas satisfait. Par exemple

$$\mid 1 + 1 \mid^{\alpha} = 2^{\alpha} > \mid 1 \mid^{\alpha} + \mid 1 \mid^{\alpha} = 2.$$

■

1.2 La norme p-adique sur $\mathbb{Q}$

1.2.1 La valuation p-adique

Définition 1.1
Soit p un nombre premier et $x \in \mathbb{Z}^*$, la valuation p-adique de x est le plus grand entier naturel α tel que p^{α} divise x i.e, $v_p(x) = \max\{\alpha \in \mathbb{N}, x = p^{\alpha} y, y \in \mathbb{Z}\}$.
Par convention $v_p(0) = +\infty$.

Remarque 1.1
Si $x \in \mathbb{Z}^*$, alors $x = p^{v_p(x)} y,\ \ y \in \mathbb{Z}$ où $(p, y) = 1$.

Proposition 1.4
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, on a

1. $v_p(a.b) = v_p(a) + v_p(b)$.
2. $v_p(a + b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$.

Preuve.
C'est évident, pour $a = 0$ *ou* $b = 0$. Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$, alors

$$\begin{cases} a & = p^{v_p(a)} \times n_1, n_1 \in \mathbb{Z}^*, \ et \ (n_1, p) = 1 \ (i.e \ v_p(a) = \alpha), \\ b & = p^{v_p(b)} \times n_2, n_2 \in \mathbb{Z}^*, \ et \ (n_2, p) = 1 \ (i.e \ v_p(b) = \beta). \end{cases}$$

D'une part, on a

$$a \times b = p^{\alpha+\beta}(n_1 \times n_2)$$

où p ne divise pas $n_1 \times n_2$, donc

$$v_p(a \times b) = \alpha + \beta = v_p(a) + v_p(b).$$

D'autre part, on a

$$a + b = p^{v_p(a)} \times n_1 + p^{v_p(b)} \times n_2.$$

On suppose que $v_p(a) \leq v_b(b)$
On a

$$a + b = p^{v_p(a)}(n_1 + p^{v_p(b)-v_p(a)} \times n_2),$$

d'où

$$v_p(a + b) \geq v_p(a) = \min(v_p(a), v_p(b)).$$

■

Remarque 1.2
1) *Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$*

$$v_p(a) \neq v_p(b) \Rightarrow v_p(a \pm b) = \min(v_p(a), v_p(b)).$$

2) *Si $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, alors $v_p(x) = v_p(\dfrac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$.*
3) *La Proposition* (1.4) *et la partie* 1) *de cette remarque restent vrais si on remplace $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Q}$.*

Exemple 1.1

1. *Soit $n = 945 = 3^3 \times 5 \times 7$, on a $v_3(n) = 3, v_5(n) = 1, v_7(n) = 1$ et $v_p(n) = 0$, pour tout nombre premier $p \notin \{3, 5, 7\}$.*

2. *On a* $v_2(\frac{36}{50}) = 1, v_3(\frac{36}{50}) = 2$, *et* $v_5(\frac{36}{50}) = -2$, *pour* $p \notin \{2,3,5\}$, *on a* $v_p(\frac{36}{50}) = 0$.
3. *Soit* $n = 2 + p^2 + 2 \times p^5$, *on a* $v_p(n) = 0$, *pour* $p > 2$ *et* $v_2(n) = 1$.

Proposition 1.5 *[8]*
La valuation p-adique de $(n!)_{n\geq 0}$ *est donnée par*

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}, \forall n \geq 0$$

Où $S_p(n)$ *désigne la somme de chiffres de l'écriture de n en base p.*

1.2.2 La norme p-adique

Définition 1.2
Soit p un nombre premier, la norme p-adique est l'application $|\ .\ |_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définit comme suite*

$$| x |_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, & si\ \ x \neq 0 \\ 0, & si\ \ x = 0 \end{cases}$$

Exemple 1.2

1. $x = 5p^2 + 5p^5 + 5p^7, \forall p > 5$, *alors* $| x |_p = p^{-v_p(x)} = p^{-2}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, | \frac{1}{n!} |_p = p^{\frac{n-s_p(n)}{p-1}}$.

Proposition 1.6 *[3]*
La norme p-adique est une norme non-archimedienne sur $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.7 *[3]*
Soit $x, y \in \mathbb{Q}$, *si* $| x |_p \neq | y |_p$, *alors* $| x \pm y |_p = max(| x |_p, | y |_p)$.

Proposition 1.8 *[8]*
Deux normes $|\ .\ |_{p_1}$ *et* $|\ .\ |_{p_2}$ *sont équivalentes si et seulement si* $p_1 = p_2$.

Preuve.
Il suffit de considérer la suite $(p_1^n)_{n\geq 0}$. Cette suite converge vers 0, pour la norme $|\,.\,|_{p_1}$ car $|\, p_1^n \,|_{p_1}= p_1^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mais elle ne converge pas vers 0, pour la norme $|\,.\,|_{p_2}$ si $p_1 \neq p_2$, car $|\, p_1^n \,|_{p_2}= 1 \neq 0, \forall n \geq 0$. ■

Théorème 1.3 *[8](Ostrawski)*
Toute norme $\|\,.\,\|$ non triviale sur $\mathbb{Q}$ est équivalente soit à une norme p-adique $|\,.\,|_p$, soit à la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$.

Preuve.
On suppose que $\|\,.\,\|$ est une norme archimédienne, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\| k \|> 1$. Comme $\| x.1 \|=\| x \| . \| 1 \|$, il vient que $\| 1 \|= 1$, et d'après l'inégalité triangulaire on a

$$k = \underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{k fois} \Rightarrow \| k \|\leq \underbrace{\| 1 \| +...+ \| 1 \|}_{k fois} = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{k fois} = k$$

et de plus, il existe $\alpha \in]0, 1]$ tel que l'on ait $\| k \|= k^\alpha$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire m en base k sous la forme

$$m = \sum_{i=0}^{n} a_i k^i, \;\; avec \;\; a_i \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}, \quad et \quad a_n \neq 0$$

de telle sorte que l'on a $m \geq k^n \geq 0$. Comme $\| a_i \|\leq a_i \leq k-1, \forall i = \overline{0, n}$, et $\| k^i \|=\| k \|^i= k^{i.\alpha}$, on obtient la majoration

$$\begin{aligned}\| m \| =\| \sum_{i=0}^{n} a_i k^i \|\leq \sum_{i=0}^{n} \| a_i \| . \| k^i \|\leq \sum_{i=0}^{n}(k-1)k^{i\alpha} = (k-1)\sum_{i=0}^{n} k^{i\alpha} \\ = (k-1)\frac{(k^\alpha)^{n+1}-1}{k^\alpha-1} \leq (k-1)\frac{(k^\alpha)^{n+1}}{k^\alpha-1} = (k^\alpha.\frac{k-1}{k^\alpha-1}).k^{n\alpha} \leq c.m^\alpha,\end{aligned}$$

où la constant $c = \dfrac{k^\alpha(k-1)}{k^\alpha-1}$ est indépendante de m. On peut appliquer cette inégalité à m^n, ce qui nous donne $\| m \|^n\leq c.m^{n\alpha}$, prenant la racine n-i ème de cette inégalité et passant à la limite, on trouve

$$\| m \|\leq m^\alpha, \forall m \in \mathbb{N}^*. \tag{1.1}$$

L'inégalité (1.1) est une égalité si $\| m \| > 1$ car, d'une part, on a

$$\frac{\log \| m \|}{\log m} \leq \alpha = \frac{\log \| k \|}{\log k}. \tag{1.2}$$

D'autre part, par symétrie, on déduit que il existe $\alpha' \in]0, 1]$ tel que

$$\frac{\log \| k \|}{\log k} \leq \alpha' = \frac{\log \| m \|}{\log m}. \tag{1.3}$$

Donc de (1.2) et (1.3) on trouve $\dfrac{\log \| m \|}{\log m} = \alpha$, d'où, $\forall m \in \mathbb{N}^*, \| m \| = | m |^\alpha$. De plus, $\| 0 \| = 0 = | 0 |^\alpha$, donc $\forall m \in \mathbb{N}, \| m \| = m^\alpha = | m |^\alpha$ et, pour tout $m \in \mathbb{Z}^* - \mathbb{N}$, on a $-n \in \mathbb{N}$ donc $\| -n \| = | -n |^\alpha$ alors $\| n \| = | n |^\alpha$. Et aussi, pour tout $x \in \mathbb{Q}$ alors $x = \dfrac{a}{b}$, ou $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$, donc $\| x \| = \| \dfrac{a}{b} \| = \dfrac{\| a \|}{\| b \|} = \dfrac{| a |^\alpha}{| b |^\alpha} = | \dfrac{a}{b} |^\alpha = | x |^\alpha$, alors d'après la Proposition (1.3), $\| \, . \, \|$ est équivalente à la norme usuelle.

Dans le cas contraire, on a $\| l \| \leq 1$ pour tout nombre premier l. Comme on a supposé $\| \, . \, \|$ non trivial, il existe au moins un nombre premier p tel que $\| p \| < 1$. S'il existe un autre q, alors d'après le théorème de **Bezout**, on peut trouver $u_n, v_n \in \mathbb{Z}$ telle que l'on ait $u_n p^n + v_n q^n = 1$. On obtient donc

$$\begin{aligned} 1 = \| 1 \| &= \| u_n p^n + v_n q^n \| \\ &\leq \| u_n \| . \| p^n \| + \| v_n \| . \| q^n \| \\ &\leq \| p^n \| + \| q^n \| \end{aligned}$$

Ce qui est impossible pour n assez grand , il existe donc un seul nombre premier p tel que $\| p \| < 1$ et $\| \, . \, \|$ est équivalente à la norme p-adique. Ce qui termine la démonstration. ∎

1.3 Le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$

Le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour la norme p-adique $| \, . \, |_p$, on note $\mathbb{Q}_p$ son complété, la norme p-adique s'étend de manière unique en une norme non-archimédienne sur $\mathbb{Q}_p$, comme suite

$$\forall x \in \mathbb{Q}_p, \mid x \mid_p = \lim_{n \to +\infty} \mid x_n \mid_p,$$

où $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans de $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.9 *[8](Développement de Hensel)*
Tout $x \in \mathbb{Q}_p$ admet un unique développement de Hensel $x = \sum_{n\geq n_0} a_n p^n$ où $0 \leq a_n \leq p-1$ et $n_0 \in \mathbb{Z}$, si $a_{n_0} \neq 0$ alors $n_0 = v_p(x)$.

Exemple 1.3
Le développement de Hensel de $x = -1$ est donné par

$$-1 = \sum_{k=0}^{+\infty} (p-1)p^k = ...(p-1)(p-1)(p-1).$$

Définition 1.3
L'ensemble des entiers p-adiques est défini comme suit

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p,\ x = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i\}.$$

C'est-à-dire

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, \mid x \mid_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p,\ v_p(x) \geq 0\}.$$

Remarque 1.3
Les corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ est défini par

$$\mathbb{Q}_p = \{\frac{a}{b},\ a,\ b \in \mathbb{Z}_p \, et \, b \neq 0\}.$$

L'ensemble des entiers p-adiques inversibles est donné par

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Z}_p, \mid x \mid_p = 1\} = \{x \in \mathbb{Z}_p,\ v_p(x) = 0\}.$$

Exemple 1.4

1. *On a* $|2|_2 = 2^{-1}$, *alors* $|\sqrt{2}|_2 = |2|_2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{-1}{2}}$, *et comme* $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, *alors* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}_2$,
2. $\forall p \geq 3, |\sqrt{2}|_p = |2|_p^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$, *donc* $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}_p^*$.
3. *On a* $|\sqrt{2} - 1|_p = |\sqrt{2} + 1|_p = 1, \forall p -$ *premier. En effet*

   - Pour $p = 2$, *on a*

   $$|\sqrt{2} - 1|_2 = |\sqrt{2} + 1|_2 = \max(|\sqrt{2}|_2, |\pm 1|_2) = 1, \ (car\ |\sqrt{2}|_2 < |\pm 1|_2).$$

   - Pour $p \neq 2$, *on a*

   $$|\sqrt{2} - 1|_p \in \mathbb{Z}_p, \ (car\ |\sqrt{2} - 1|_p \leq \max(|\sqrt{2}|_p, |-1|_p) = 1),$$

   et

   $$|\sqrt{2} + 1|_p \in \mathbb{Z}_p, \ (car\ |\sqrt{2} + 1|_p \leq \max(|\sqrt{2}|_p, |1|_p) = 1).$$

   Et comme on a

   $$|\sqrt{2} - 1|_p \times |\sqrt{2} + 1|_p = |(\sqrt{2})^2 - 1^2|_p = |2 - 1|_p = |1|_p = 1.$$

   Donc

   $$|\sqrt{2} - 1|_p = |\sqrt{2} + 1|_p = 1.$$

Théorème 1.4 *[8](**Lemme de Hensel**)*
Soit $F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n \in \mathbb{Z}_p[x]$ *(i.e un polynôme où* $c_i \in \mathbb{Z}_p, \forall i = \overline{1, n}$*).*
Si il existe $\overline{a_0} \in \mathbb{Z}_p$ *tel que*

$$\begin{cases} F(\overline{a_0}) \equiv 0[p] \\ F'(\overline{a_0}) \not\equiv 0[P], \end{cases}$$

alors

$$\exists!\, a \in \mathbb{Z}_p \ \ telque \ \begin{cases} F(a) = 0 \\ a \equiv \overline{a_0}[p]. \end{cases}$$

Exemple 1.5

On pose $F(x) = x^2 + 1$ dans $\mathbb{Z}_p$, donc $F'(x) = 2x$. Pour $a_0 = 2$, on a $F(2) = 5 \equiv 0[5]$ et $F'(2) = 4 \not\equiv 0[5]$, donc d'après le Lemme de Hensel

$$\exists\,!\, a \in \mathbb{Z}_5 \text{ tel que } F(a) = 0 \text{ et } a \equiv 2[5]$$

i.e, $\exists\ a \in \mathbb{Z}_5$ telque $a^2 = -1$, alors $\sqrt{-1} = a \in \mathbb{Z}_5$.

Théorème 1.5 *[8]*

Soit $F(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$, on a l'équivalence entre

1. *$F(x)$ possède une racine dans $\mathbb{Z}_p$.*
2. *$F(x)$ possède une racine entier (mod p^k), $\forall k \geq 1$.*

Définition 1.4

Soit $a \in \mathbb{Z}$ un entier non divisible par p (i.e $p \nmid a$). On dit que a est ***un résidu quadratique*** *(mod p) ($p \neq 2$), si l'équation $x^2 \equiv a[p]$ possède une racine dans $\{1, 2, ..., p-1\}$.*

Proposition 1.10 *[8]*

Soit a un entier tel que $p \nmid a$, on a l'équivalence entre

1. *a est un résidu quadratique (mod p).*
2. *a possède une racine carrée $a_0 \in \mathbb{Z}_p$, ($p \neq 2$).*

Preuve.

1 $\Rightarrow$ 2) Soit $F(x) = x^2 - a$, alors on a $F'(x) = 2x$. D'une part, a est un résidu quadratique (mod p), alors $\exists \overline{a_0} \in \{1, 2, ..., P-1\}$, tel que $\overline{a_0}^2 \equiv a[p]$. D'où $F(\overline{a_0}) = \overline{a_0}^2 - a \equiv 0[p]$.

D'autre part

$$F'(\overline{a_0}) = 2\overline{a_0} \not\equiv 0[p]\,(\text{ car } p \neq 2).$$

Donc d'après le Lemme de Hensel $\exists! a_0 \in \mathbb{Z}_p$ *tel que* $F(a_0) = 0$, alors $a_0^2 = a$. C'est-à-dire a possède une racine carrée a_0 dans $\mathbb{Z}_p$.

2 $\Rightarrow$ 1) On suppose que a n'est pas un résidu quadratique ($modp$), donc

$$\forall a_0 \in \{1, 2, ..., p-1\},\ \ a_0^2 \not\equiv a[p].$$

D'où

$$a_0^2 - a \not\equiv 0[p], \forall a_0 \in \{1, 2, ..., p-1\}.$$

Et comme on a $p \nmid a$, alors $a \neq 0$, et $0^2 \not\equiv a[p]$, donc

$$a_0^2 - a \not\equiv 0[p], \forall a_0 \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}.$$

Alors $F(a_0) \not\equiv 0[p]$, d'où d'après le Théorème (1.5), $F(x)$ ne possède pas une racine dans $\mathbb{Z}_p$, donc a ne possède pas une racine carrée dans $\mathbb{Z}_p$. ■

Proposition 1.11

Soit $f(x) = x^2 - a$ et $a \in \mathbb{Z}_p^*$. Si x_0 est une racine de f dans $\mathbb{Q}_p$, alors $x_0 \in \mathbb{Z}_p^*$.

Preuve.

On suppose que x_0 est une racine de f dans $\mathbb{Q}_p$, alors $f(x_0) = 0$ (i. e, $x_0^2 - a = 0$). Donc $x_0^2 = a$, d'où $| x_0 |_p^2 = | a |_p = 1$. C'est-à-dire $| x_0 |_p = 1$ et $x_0 \in \mathbb{Z}_p^*$. ■

Exemple 1.6

Soit $F(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$, on a $3 \nmid -1, 3 \neq 2$ et

$$\begin{cases} 1^2 = 1 \not\equiv -1[3] \\ 2^2 = 4 \not\equiv -1[3], \end{cases}$$

alors, -1 n'est pas un résidu quadratique (mod 3), donc d'après la Proposition (1.10) on a -1 ne possède pas une racine carrée dans $\mathbb{Z}_3$. Comme $-1 \in \mathbb{Z}_3^*$, alors d'après la Proposition (1.11), on a $\sqrt{-1} \notin \mathbb{Q}_3$.

1.3.1 Propriétés de $\mathbb{Q}_p$

Proposition 1.12 *[3][8]*

P1. *Une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} | a_{n+1} - a_n |_p = 0$.*

P2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $| a_n |_p = | a_{n_0} |_p, \ \forall n \geq n_0$.*

P3. *Une série* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *converge dans* $\mathbb{Q}_p$ *si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty} | a_n |_p = 0$*. De plus, on a* $| \sum_{n\geq 0} a_n |_p \leq \max_{n\geq 0} | a_n |_p$.

Exemple 1.7

1. *La série* $\sum_{n\geq 0} p^{n^4}$ *converge dans* $\mathbb{Q}_p$ *car*

$$\lim_{n\to+\infty} | p^{n^4} |_p = \lim_{n\to+\infty} p^{-n^4} = 0.$$

   Mais cette série diverge dans $\mathbb{R}$ *car*

$$\lim_{n\to+\infty} | p^{n^4} | = p^{n^4} = +\infty.$$

2. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est diverge dans* $\mathbb{Q}_p$*. En effet*

$$\lim_{n\to+\infty} | \frac{1}{n^2} |_p = \lim_{n\to+\infty} p^{v_p(n^2)} \neq 0,$$

   Car $p^{v_p(n^2)} = p^{2v_p(n)} \geq 1$*. Mais cette série converge dans* $\mathbb{R}$ *d'après la règle de* ***Riemann****.*

Proposition 1.13 *[3]*
Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ *et* $r \in]0, +\infty]$*, on a les propriétés suivantes*

P1. *La sphère* $S_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p, | x - a |_p = r\}$*, est un ensemble ouvert et fermé dans* $\mathbb{Q}_p$*.*

P2. *Toute boule ouverte* $B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p, | x - a |_p < r\}$*, est un ensemble fermé dans* $\mathbb{Q}_p$*.*

P3. *La boule fermée* $B_r^+(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p, | x - a |_p \leq r\}$*, est un ensemble ouvert dans* $\mathbb{Q}_p$*.*

P4. *Tout point d'une boule est un centre de cette boule.*

P5. *Deux boules de* $\mathbb{Q}_p$ *sont disjoints ou l'une est contenue dans l'autre.*

Preuve.

Soient $a, b \in \mathbb{Q}_p$, et r, r_0 des réels positifs.

P1. Pour montrer que $S_r(a)$ est un ensemble ouvert on montre que

$$\forall x \in S_r(a), \exists B_{r_0}(x) \subset S_r(a).$$

Soit $x \in \mathbb{Q}_p$, on choisit r_0 tel que $r_0 < r$, on a

$$\begin{aligned} y \in B_{r_0}(x) &\Rightarrow \mid y - x \mid_p < r_0 < r \\ &\Rightarrow \mid y - x \mid_p < \mid x - a \mid_p \\ &\Rightarrow \mid y - a + a - x \mid_p < \mid x - a \mid_p \\ &\Rightarrow \mid (y - a) - (x - a) \mid_p < \mid x - a \mid_p . \end{aligned}$$

D'après la Proposition (1.1) on obtient $\mid y-a \mid_p = \mid x-a \mid_p = r$, alors $y \in S_r(a)$ ce qui montre que $S_r(a)$ est un ensemble ouvert. $S_r(a)$ est fermée d'après la théorème générale de espace normés.

P2. On a

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{Q}_p}^{B_r(a)} &= \{x \in \mathbb{Q}_p, \mid x - a \mid_p \geq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{Q}_p, \mid x - a \mid_p > r\} \cup S_r(a) \\ &= C_{\mathbb{Q}_p}^{B_r^+(a)} \cup S_r(a). \end{aligned}$$

Comme $S_r(a)$ est un ensemble ouvert d'après **P1.**, et la boule $B_r^+(a)$ est un ensemble fermé. Alors $C_{\mathbb{Q}_p}^{B_r(a)}$ est un ensemble ouvert. Donc $B_r(a)$ est un ensemble fermé.

P3. On a

$$B_r^+(a) = B_r(a) \cup S_r(a).$$

Comme $S_r(a)$ est un ensemble ouvert d'après **P1.**, et $B_r(a)$ est un ensemble ouvert. Alors l'union de deux ouvert est ouvert.

P4. Pour montrer cette propriété, il suffit de montrer que

$$\forall x \in B_r(a), B_r(a) = B_r(x).$$

(a) Soit $y \in B_r(a)$, donc $\mid y - a \mid_p < r$, d'autre part on a

$$\mid y - x \mid_p = \mid y - a + a - x \mid_p \leq \max\{\mid y - a \mid_p, \mid x - a \mid_p\} < r.$$

D'où $y \in B_r(x)$, alors $B_r(a) \subset B_r^+(x)$.

(b) Soit $y \in B_r(x)$, donc $\mid y - x \mid_p < r$, d'autre part on a

$$\mid y - a \mid_p = \mid y - x + x - a \mid_p \leq \max\{\mid y - x \mid_p, \mid x - a \mid_p\} < r.$$

D'où $y \in B_r(a)$, alors $B_r(x) \subset B_r(a)$, donc $B_r(a) = B_r(x)$. On fait les même étapes pour montrer que si $x \in B_r^+(a)$, on a $B_r^+(a) = B_r^+(x)$.

P5. Soient $B_r^+(a)$ et $B_{r_0}^+(b)$ deux boules de $\mathbb{Q}_p$. On suppose que $B_r^+(a) \cap B_{r_0}^+(b) \neq 0$, pour tout r et $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et on montre que

$$B_r^+(a) \subset B_{r_0}^+(b) \ ou \ B_{r_0}^+(b) \subset B_r^+(a).$$

On suppose que $r < r_0$, soit $x \in B_r^+(a) \cap B_{r_0}^+(b)$ on a $x \in B_r^+(a)$ et $x \in B_{r_0}^+(b)$. D'après **P4.**, on a

$$B_r^+(a) = B_r^+(x) \ et \ B_{r_0}^+(b) = B_{r_0}^+(x).$$

Mais $B_r^+(x) \subset B_{r_0}^+(x)$, donc $B_r^+(a) \subset B_{r_0}^+(b)$.

■

1.4 Corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$

Un corps $\mathbb{K}$ est dit algébriquement clos si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[x]$ admet des racines dans $\mathbb{K}$.

Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos pour tout p premier. Par exemple on considère le polynôme

$$P(x) = x^5 - p^7 \in \mathbb{Q}_p[x].$$

Supposons que les racines de $P(x)$ sont dans $\mathbb{Q}_p$, alors

$$\begin{aligned} x^5 - p^7 = 0 &\Leftrightarrow x^5 = p^7 \\ &\Leftrightarrow \mid x \mid_p^5 = p^{-7} \\ &\Leftrightarrow \mid x \mid_p = p^{\frac{-7}{5}} \\ &\Leftrightarrow v_p(x) = \frac{7}{5}, \end{aligned}$$

donc $v_p(x) = \dfrac{7}{5} \notin \mathbb{Z}$, c'est une contradiction avec $v_p(x) \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$. D'où les racines de $P(x)$ ne sont pas dans $\mathbb{Q}_p$, alors $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos.

Soit $\overline{\mathbb{Q}_p}$ une clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_p$. La norme p-adique s'étend de manière unique à $\overline{\mathbb{Q}_p}$ mais ce corps n'est pas complet. Son complété, le corps des *nombres complexes p-adique* est alors noté $\mathbb{C}_p$, c'est un corps complet et algébriquement clos.

L'ensemble $\mid \mathbb{Q}_p^* \mid$ des valeurs prises par la norme p-adique sur $\mathbb{Q}_p^*$ coïncide avec l'ensemble $p^{\mathbb{Z}}$ des puissances entières de p, celui des valeurs prises par la norme p-adique sur $\overline{\mathbb{Q}_p^*}$ est égal à $p^{\mathbb{Q}}$, et ceci reste vrai pour $\mathbb{C}_p^*$.

CHAPITRE 2

SYSTÈMES DYNAMIQUES SUR $\mathbb{C}_p$

Dans ce chapitre on rappelle quelques faits connus concernant les systèmes dynamiques (f, U) sur $\mathbb{C}_p$, où $f : z \in U \longrightarrow f(z) \in U$ est une fonction analytique et $U = \mathbb{C}_p$ ou $B_r(a),\ a \in \mathbb{C}_p$.
Pour $f : U \longrightarrow U$ une fonction analytique, on note $f^n(z) = \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n}(z)$.

2.1 Fonctions analytiques complexes p-adiques

2.1.1 Séries entières dans $\mathbb{C}_p$

Dans cette section, on étudie les séries entières complexes p-adiques et les fonctions analytiques dans $\mathbb{C}_p$.

Définition 2.1
Une série entière dans $\mathbb{C}_p$ est une série de la forme $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite des nombres complexes p-adiques appelée suite de coefficients.

Définition 2.2 ***(Le rayon de convergence)***
Le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, qu'on le note r_f est défini par

$$r_f = sup\{| z |_p, z \in \mathbb{C}_p \ et \ \sum_{n\geq 0} a_n z^n \ \ converge \ \} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

De plus, le rayon de convergence est calculé par la formule

$$r_f = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} sup \sqrt[n]{| a_n |_p}}.$$

Proposition 2.1 *[8]*
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, où $a_n \in \mathbb{C}_p$ et $0 \leq r_f \leq +\infty$. On a

1. *Si $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $| z |_p < r_f$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge.*
2. *Si $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $| z |_p > r_f$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge.*
3. *Si $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $| z |_p = r_f$, alors on peut avoir*
   - *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} | a_n |_p \, r_f^n = 0$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est converge sur la totalité de la sphère $S_{r_f}(0)$.*
   - *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} | a_n |_p \, r_f^n \neq 0$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est diverge sur la totalité de la sphère $S_{r_f}(0)$.*

Remarque 2.1
Le domaine de convergence d'une série entière p-adique est toujours une boule.

Exemple 2.1

1. *Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ dans $\mathbb{C}_p[[z]]$, on a*

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \ \ donc \ \ | a_n |_p = p^{v_p(n^2)} = p^{2.v_p(n)}.$$

D'où

$$r_f = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sup | a_n |_p^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sup p^{\frac{2.v_p(n)}{n}}} = 1.$$

De plus, pour $\mid z \mid_p = 1$, *on a*

$$\mid \frac{z^n}{n^2} \mid_p = \mid \frac{1}{n^2} \mid_p \mid z \mid_p^n = p^{2.v_p(n)} \geq 1.$$

Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ *converge sur* $B_{r_f}(0) = \{z \in \mathbb{C}_p, \mid x \mid_p < 1\}$.

2. *Soit la série* $\cos_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ *dans* $\mathbb{C}_p[[z]]$, *on a* $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$.
   Donc
   $$\mid a_n \mid_p = \mid \frac{(-1)^n}{(2n)!} \mid_p = p^{\frac{2n - Sp(2n)}{p-1}}.$$
   D'où
   $$\begin{aligned} \frac{1}{r_f} &= \lim_{n \to +\infty} \sup \mid a_n \mid_p^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \to +\infty} \sup p^{\frac{1}{p-1}(\frac{2n - Sp(n)}{2n})} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sup p^{\frac{1}{p-1}(1 - \frac{Sp(2n)}{2n})} = p^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$
   Donc $r_f = p^{-\frac{1}{p-1}}$. *De plus, pour* $\mid z \mid_p = r_f$ *la série diverge. D'où la série converge sur la boule* $B_{r_f}(0) = \{z \in \mathbb{C}_p, \mid z \mid_p < p^{-\frac{1}{p-1}}\}$.

2.1.2 Fonction analytique dans $\mathbb{C}_p$

Définition 2.3

La fonction $f : B_r^+(0) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ *est analytique sur* $B_r^+(0)$ *pour tout* $r > 0$, *s'il existe une suit* $(b_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ *telle que* $\mid b_n r^n \mid_p \longrightarrow 0$, *et on a*

$$\forall z \in B_r^+(0), f(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n.$$

Définition 2.4

La fonction $f : B_r(0) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ *est analytique sur* $B_r(0)$ *où* $r > 0$, *s'il existe une suite* $(b_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ *satisfaisant* $\mid b_n \rho^n \mid_p \longrightarrow 0$, *pour* $0 < \rho < r$, *et telle que*

$$\forall z \in B_r(0), f(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n.$$

Remarque 2.2

1. *Une fonction de variable complexe p-adique définie sur la boule $B_r(0)$ est dite analytique sur cette boule lorsqu'elle admet un développement en série entière en tout point de $B_r(0)$.*
2. *Si $r = +\infty$, alors f est analytique sur tout $\mathbb{C}_p$ et on dit que f est entière.*

Exemple 2.2
Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} p^{n^4} z^n, z \in \mathbb{C}_p$ on a

$$r_f = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{| a_n |_p}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} p^{-n^3}} = +\infty.$$

Alors $\sum_{n\geq 0} p^{n^4} z^n$ est convergente sur $\mathbb{C}_p$, donc f est une fonction entière.

Définition 2.5 *(**Zéros d'une fonction analytique**)*
Soit f une fonction analytique non nulle sur une boule $B_r(0)$, on dit que $\alpha \in B_r(0)$ est un zéro de f si $f(\alpha) = 0$.

Notation 2.1
On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$, et $\mathcal{A}(B_r(0))$ l'ensemble des fonctions analytiques sur la boule $B_r(0)$.

Définition 2.6
*Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{A}(B_r^+(0))$ où $r > 0$. On définit **le module maximum** de f par la formule*

$$| f | (r) = \max_{n\geq 0} | a_n |_p r^n.$$

Proposition 2.2 *[4]*
Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{A}(B_r^+(0))$ où $r > 0$. L'application

$$r \to | f | (r) = \max_{n\geq 0} | a_n |_p r^n (\textbf{module maximum}),$$

est une norme ultramétrique sur $\mathcal{A}(B_r^+(0))$.

Si f est une fonction analytique sur $B_r(0)$, on a

$$\| f \| = \sup_{z \in B(0,r)} | f(z) |_p = | f | (r),$$

cette relation est appelée **égalité de Cauchy**.

Proposition 2.3 *[4]*
Soit $f \in \mathcal{A}(B_r(0))$ *avec* $r > 0$*, une fonction non nulle. Alors*

1. *La fonction* $| f | (r)$ *est continue et croissante.*
2. *Si f a un zéro b dans la boule* $B_r(0)$*, la fonction* $| f | (r)$ *est strictement croissante pour* $r > | b |_p$.

Notation 2.2
On note

1. $N(f, r)$ *le nombre de zéros de* f *dans la boule* $B_r^+(0)$ *(le plus grand entier tel que* $\max_{n \geq 0} | a_n |_p r^n$ *atteint).*
2. $n(f, r)$ *le nombre de zéros de* f *dans la boule* $B_r(0)$ *(le plus petit entier tel que* $\max_{n \geq 0} | a_n |_p r^n$ *atteint).*

2.2 Image d'une boule

L'image d'une boule fermée $B_r^+(0)$ par une fonction analytique est une boule de même nature et l'image d'une boule ouverte $B_r(0)$ par une fonction analytique est aussi une boule de même nature.

Théorème 2.1 *[4]*
Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathcal{A}(B_r^+(0))$ *et soit* $t = \max_{n \geq 1} | a_n |_p r^n$*. Alors*

$$f(B_r^+(0)) = B_t^+(a_0) \ \ et \ \ | f - a_0 | (r) = t.$$

Preuve.

D'après la Définition de module maximum on a

$$\mid f - a_0 \mid (r) = \max_{n\geq 1} \mid a_n \mid_p r^n = t.$$

De plus, **d'une part**, il est clair que $f(B_r^+(0))$ est inclus dans $B_t^+(a_0)$ car si $y \in f(B_r^+(0))$, alors il existe $z_0 \in B_r(0)$ tel que $y = f(z_0)$, d'où

$$\begin{aligned}\mid y - a_0 \mid_p = \mid f(z_0) - a_0 \mid_p &\leq \sup_{z\in B_r^+(0)} \mid f(z) - a_0 \mid_p \\ &= \mid f - a_0 \mid (r) = \max_{n\geq 1} \mid a_n \mid_p r^n = t,\end{aligned}$$

donc $y \in B_t^+(a_0)$.

D'autre part, on prend $b \in B_t^+(a_0)$ et on considère la fonction

$$g(z) = f(z) - b = a_0 - b + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n.$$

D'ailleurs, le Théorème (2.1) est trivial quant $t = 0$, donc on peut supposer $t > 0$. D'où

$$\mid a_0 - b \mid_p \leq t = \max_{n\geq 1} \mid a_n \mid_p r^n,$$

alors d'après l'hypothèse on a $N(g, r) \geq 1$. Ensuite, g admet au moins un zéro dans $B_r^+(0)$ et donc b appartient à $f(B_r^+(0))$. ∎

Corollaire 2.1 *[4]*

Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(B_r(0))$ *, et soit* $t = \max\limits_{n\geq 1} \mid a_n \mid_p \rho^n$ *où* $0 < \rho < r$*. Si* $t > 0$*, alors*

$$f(B_\rho(0)) = B_t(a_0).$$

Théorème 2.2 *[4]*

Soient $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ *non constante et* $b \in \mathbb{C}_p$*. Alors* $f - b$ *admet au moins un zéro dans* $\mathbb{C}_p$*. De plus, si* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[z]$*, alors* $f - b$ *a une infinité de zéros dans* $\mathbb{C}_p$*.*

2.3 Système dynamique associé à une fonction analytique sur $\mathbb{C}_p$

Définition 2.7

Soit $f : z \in U \longrightarrow f(z) \in U$ *une application. On dit que* $z_0 \in U$ *est un point fixe de* f *si*

$$f(z_0) = z_0.$$

L'ensemble de tous les points fixes de f *est noté* $Fix(f)$.

Remarque 2.3

D'après le Théorème (2.2), *si* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[z]$, *alors* f *a une infinité de points fixes.*

Définition 2.8

Le point fixe z_0 *est appelé un* ***attracteur****, s'il existe un voisinage* $U(z_0)$ *de* z_0 *tel que pour tout point* $z \in U(z_0)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f^n(z) = z_0$.

Si z_0 *est un* ***attracteur*** *alors son* ***bassin d'attraction*** *est*

$$A(z_0) = \{z \in \mathbb{C}_p, f^n(z) \longrightarrow z_0, n \longrightarrow +\infty\}.$$

Définition 2.9

Le point fixe z_0 *est dit* ***indifférent****, s'il existe un voisinage* $U(z_0)$ *de* z_0 *tel que*

$$| f(z) - z_0 |_p = | z - z_0 |_p, \forall z \in U(z_0).$$

Le point fixe z_0 *est dit* ***répulsif****, s'il existe un voisinage* $U(z_0)$ *de* z_0 *tel que*

$$| f(z) - z_0 |_p > | z - z_0 |_p, \forall z \in U(z_0), z \neq z_0.$$

Définition 2.10

La boule $B_r(z_0)$ *est dite une boule de* ***Siegel****, si chaque sphère* $S_\rho(z_0)$ *où* $\rho < r$ *est une sphère invariante de* $f(z)$, *(i.e si* $z \in S_\rho(z_0)$ *alors tous les points itérés* $f^n(z) \in S_\rho(z_0)$ *pour tout* $n = 1, 2, \ldots$*).*

L'union de toutes les boules de ***Siegel*** *avec le centre en* z_0 *est dite une boule de* ***Siegel maximum*** *et est notée* $SI(z_0)$.

Proposition 2.4 *[7]*

*Soit z_0 un point fixe d'une fonction $f(z)$, on pose $\lambda = f'(z_0)$ (**le multiplicateur**). On a la classification suivante*

1. *Si $\mid \lambda \mid_p < 1$ alors z_0 est **attractif**. De plus, si $\lambda = 0$, alors on dit que z_0 est **super-attractif**.*
2. *Si $\mid \lambda \mid_p = 1$ alors z_0 est **indifférent**.*
3. *Si $\mid \lambda \mid_p > 1$ alors z_0 est **répulsif**.*

Exemple 2.3

Soit $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}_p[z]$, alors $f(0) = 0$ si $a_0 = 0$, donc $z_0 = 0$ est un point fixe de f, et on a $f'(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$, alors $f'(0) = a_1$, d'où

- *Si $\mid a_1 \mid_p < 1$, alors le point 0 est **attractif**.*
- *Si $\mid a_1 \mid_p = 1$, alors le point 0 est **indifférent**.*
- *Si $\mid a_1 \mid_p > 1$, alors le point 0 est **répulsif**.*

*De plus, si $a_1 = 0$ alors $\lambda = f'(0) = 0$ et on dit que 0 est **super-attractif**.*

Proposition 2.5 *[7](**Lemme de Schwarz**)*

Soit f une série de la forme $f(z) = z(a_1 + a_2 z + ...)$ et $r < r_f$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *$\mid f'(0) \mid_p \leq 1$.*
2. *$\mid a_k \mid_p r^{k-1} \leq 1$, pour tout $k \geq 1$.*
3. *$f(B_r(0)) \subset B_r(0)$.*

De plus, si $\mid f'(0) \mid_p < 1$ alors $B_r(0) \subset A(z_0)$.

CHAPITRE 3

SYSTÈMES DYNAMIQUES $(1,2)$-RATIONNELS P-ADIQUES

Dans ce chapitre, on étudie le système dynamique associé à la fonction $(1,2)$-rationnelle $f : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p$ définie par

$$f(z) = \frac{az+b}{z^2+cz+d} \ , \ a,b,c,d \in \mathbb{C}_p \ et \ a \neq 0. \tag{3.1}$$

où $z \neq z_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2-4d}}{2}$.
Pour calculer les points fixes de f, on résout l'équation $f(z) = z$. Ce qui équivaut à l'équation suivante

$$z^3 + cz^2 + (d-a)z - b = 0. \tag{3.2}$$

Comme $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clôs, alors l'équation (3.2) peut avoir trois solutions avec l'un des cas suivants

1. Une solution multiple trois fois.
2. Deux solutions (une solution simple et l'autre multiple deux fois).
3. Trois solutions distinctes.

La **trajectoire** issue d'un point $z \in \mathbb{C}_p$ est la suite des points $z_n = f^n(z)$ où $n \geq 1$. Dans cette section, on étudie le comportement des trajectoire d'un système dynamique $(1,2)$-rationnel arbitraire dans le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$ lorsque f admet un seul point fixe, c'est-à-dire on considère le cas (1.).

Le lemme suivant donne un critère sur les paramètres de la fonction (3.1) garantissant l'unicité de son point fixe.

Lemme 3.1 *[12]*
La fonction (3.1) *admet un point fixe unique si et seulement si*

$$\frac{-c}{3} = -\sqrt{\frac{d-a}{3}} = \sqrt[3]{b} \quad ou \quad \frac{-c}{3} = \sqrt{\frac{d-a}{3}} = \sqrt[3]{b}. \tag{3.3}$$

Preuve.
Nécessité, on suppose que la fonction (3.1) possède un seul point fixe z_0, alors l'équation (3.2) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} z^3 + cz^2 + (d-a)z - b &= (z - z_0)^3 \\ &= z^3 - 3z^2 z_0 + 3zz_0^2 - z_0^3. \end{aligned}$$

En comportant, on obtient

$$\begin{cases} -3z_0 = c \\ 3z_0^2 = d - a \\ -z_0^3 = -b. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$z_0 = \frac{-c}{3} = \pm\sqrt{\frac{d-a}{3}} = \sqrt[3]{b}.$$

Suffisance, on suppose que les coefficients de la fonction (3.1) vérifient (3.3). En substituant $b = \frac{-c^3}{27}$ et $d = \frac{c^2}{3} + a$, donc

$$f(z) = \frac{az - \frac{c^3}{27}}{z^2 + cz + \frac{c^2}{3} + a}, \quad a \neq 0, \quad a, c \in \mathbb{C}_p. \tag{3.4}$$

D'où

$$\begin{aligned} f(z) = z \Leftrightarrow z^3 + cz^2 + (\frac{c^2}{3} + a)z &= az - \frac{c^3}{27} \\ \Leftrightarrow z^3 + cz^2 + \frac{c^2}{3}z + \frac{c^3}{27} &= 0 \\ \Leftrightarrow (z + \frac{c}{3})^3 &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi $f(z)$ a un point fixe unique $z_0 = \frac{-c}{3}$. ■

Il résulte de ce lemme que si la fonction (3.1) a un point fixe unique point alors elle est de la forme (3.4). On étudie donc le système dynamique $(f, \mathbb{C}_p)$ avec f est donné par la forme (3.4). Le cas $c \in \mathbb{C}_p$ est étudié par *U.A.Rozikov, I.A.Sattarov et S. Yam* (voir [11] et [12]).
Dans ce qui suit, on considère le cas $c = 0$ dans (3.4). Par conséquent, on étudie le système dynamique de la fonction suivante

$$f(z) = \frac{az}{z^2 + a}, \quad a \neq 0, \quad a \in \mathbb{C}_p \ \textit{tel que} \ z \neq \hat{z_1}, \hat{z_2} = \pm\sqrt{-a}. \tag{3.5}$$

Conséquence 3.1

1. *La fonction* (3.5) *a un seul point fixe* $z_0 = 0$.
2. *Le point fixe* $z_0 = 0$ *est* ***indifférent*** *(car* $f'(0) = 1$*).*
3. *Il découle de* (3.5) *que*

$$| f(z) - z_0 |_p = | f(z) |_p = | z |_p \frac{| a |_p}{| z^2 + a |_p}. \tag{3.6}$$

On prend $A = |a|_p$*, alors*

$$|f(z)|_p = |z|_p \frac{A}{|z^2+a|_P}.$$

Notation 3.1

Notons

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}_p, \exists n \in \mathbb{N}, f^n(z) \in \{\hat{z_1}, \hat{z_2}\}\}. \tag{3.7}$$

Le système dynamique p-adique associé à la fonction (3.5) *est directement lié au système dynamique réel associé à la fonction* $\varphi_A : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *définie comme suit*

$$\varphi_A(r) = \begin{cases} r, & si \;\; r < \sqrt{A} \\ A^*, & si \;\; r = \sqrt{A} \\ \dfrac{A}{r}, & si \;\; r > \sqrt{A} \end{cases}$$

où A^* *est un nombre positif tel que* $A^* \geq \sqrt{A}$.

Lemme 3.1 *[12]*

La fonction φ_A *vérifie les propriétés suivantes*

1. $Fix(\varphi_A) = \{r, \;\; 0 \leq r < \sqrt{A}\} \cup \{\sqrt{A}, \;\; si \;\; A^* = \sqrt{A}\}$.
2. *Si* $r > \sqrt{A}$*, alors* $\varphi_A^n(r) = \dfrac{A}{r}$ *pour tout* $n \geq 1$.
3. *Si* $r = \sqrt{A}$ *et* $A^* > \sqrt{A}$*, alors* $\varphi_A^n(\sqrt{A}) = \dfrac{A}{A^*}$ *pour tout* $n \geq 2$.

Preuve.

1. D'après la définition de $\varphi_A(r)$ on obtient
   * Pour $r < \sqrt{A}$, on a $\varphi_A(r) = r$, donc $r \in Fix(\varphi_A)$.
   * Pour $r = \sqrt{A}$ *et* $A^* = \sqrt{A}$, on a $\varphi_A(\sqrt{A}) = A^* = \sqrt{A}$, donc $\sqrt{A} \in Fix(\varphi_A)$.
   * Pour $r = \sqrt{A}$ *et* $A^* > \sqrt{A}$, on a $\varphi_A(r) = A^* > r$, donc $r \notin Fix(\varphi_A)$.
   * Pour $r > \sqrt{A}$, on a $\varphi_A(r) = \dfrac{A}{r} \neq r$. Car sinon on a $\dfrac{A}{r} = r$, alors $A = r^2$ i.e $\sqrt{A} = r$, contradiction, donc $r \notin Fix(\varphi_A)$.

D'où
$$Fix(\varphi_A) = \{r,\ \ 0 \leq r < \sqrt{A}\} \cup \{\sqrt{A},\ \ si\ \ A^* = \sqrt{A}\}.$$

2. Si $r > \sqrt{A}$, alors

$$\begin{cases} \varphi_A(r) = \dfrac{A}{r}; \\ \varphi_A^2(r) = \varphi_A(\varphi_A(r)) = \varphi_A(\dfrac{A}{r}) = \dfrac{A}{r},\ \ (car\ \ \dfrac{A}{r} < \sqrt{A}); \\ \quad \vdots \\ \varphi_A^n(r) = \varphi_A^{n-1}(\varphi_A(r)) = \varphi_A^{n-1}(\dfrac{A}{r}) = \dfrac{A}{r},\ \ pour\ \ tout\ \ n \geq 2\ \ (car \dfrac{A}{r} < \sqrt{A}). \end{cases}$$

Donc
$$\varphi_A^n(r) = \frac{A}{r},\ \ pour\ \ tout\ \ n \geq 1.$$

3. Si $r = \sqrt{A}$ et $A^* > \sqrt{A}$, alors

$$\begin{cases} \varphi_A(r) = A^*; \\ \varphi_A^2(r) = \varphi_A(\varphi_A(r)) = \varphi_A(A^*) = \dfrac{A}{A^*}\ \ (car\ \ A^* > \sqrt{A}); \\ \quad \vdots \\ \varphi_A^n(r) = \varphi_A^{n-2}(\varphi_A(r)^2) = \varphi_A^{n-2}(\dfrac{A}{A^*}) = \dfrac{A}{A^*},\ \ pour\ \ tout\ \ n \geq 3\ \ (car\ \ \dfrac{A}{A^*} < \sqrt{A}). \end{cases}$$

Donc
$$\varphi_A^n(r) = \frac{A}{A^*},\ \ pour\ \ tout\ \ n \geq 2.$$

■

Conséquence 3.2

Pour tout $r > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi^n(r) = \begin{cases} r\quad , \qquad si\ \ 0 < r < \sqrt{A} \\ \sqrt{A},\ \ si\ \ r = \sqrt{A},\ \ A^* = \sqrt{A}\} \\ \dfrac{A}{A^*},\ \ si\ \ r = \sqrt{A},\ \ A^* > \sqrt{A}\} \\ \dfrac{A}{r},\ \ si\ \ r > \sqrt{A}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Lemme 3.2 *[12]*

Si $z \in S_r(0)$*, alors pour la fonction* (3.5) *on a*

$$| f^n(z) |_p = \varphi_A^n(r), \ \forall n \geq 1.$$

Preuve.

Soit $z \in S_r(0)$ (i.e $| z |_p = r$). Par récurrence, on a

1- Pour $n = 1$,

- Si $r < \sqrt{A}$, alors $| z |_p^2 = r^2 < A = | a |_p$, donc

$$| f(z) |_p = | z |_p \frac{A}{| z^2 + a |_P} = r\frac{A}{\max(| z |_p^2, | a |_p)}$$
$$= r\frac{A}{| a |_p} = r = \varphi_A(r).$$

- Si $r > \sqrt{A}$, alors $| z |_p^2 = r^2 > A = | a |_p$, donc

$$| f(z) |_p = | z |_p \frac{A}{| z^2 + a |_P} = r\frac{A}{\max(| z |_p^2, | a |_p)}$$
$$= r\frac{A}{r^2} = \frac{A}{r} = \varphi_A(r).$$

- Si $r = \sqrt{A}$, on a

$$| f(z) |_p = | z |_p \frac{A}{| z^2 + a |_P} = r\frac{A}{| z^2 + a |_P}$$
$$= \frac{\sqrt{A}A}{| z^2 + a |_P} = A^* = \varphi_A(r).$$

car

$$| z^2 + a |_p \leq \max(| z |_p^2, | a |_p) = | a |_p = A.$$

Alors

$$\frac{1}{| z^2 + a |_p} \geq \frac{1}{A}.$$

Donc

$$\varphi_A(r) = A^* = \frac{\sqrt{A}A}{| z^2 + a |_p} \geq \frac{\sqrt{A}A}{A} = \sqrt{A}.$$

2- On suppose que $|f^n(z)|_p = \varphi_A^n(r)$**, pour** $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} | f^{n+1}(z) |_p &= | f(f^n(z)) |_p = | f^n(z) |_p \frac{A}{| (f^n(z))^2 + a |_p} \\ &= \varphi_A^n(r) \frac{A}{| (f^n(z))^2 + a |_p}. \end{aligned}$$

D'où,

- Si $r < \sqrt{A}$, alors $| f^n(z) |_p = \varphi_A^n(r) = r$, pour tout $n \geq 1$, et $| f^n(z) |_p^2 = r^2 < A = | a |_p$, donc

$$\begin{aligned} | f^{n+1}(z) |_p &= r \frac{A}{\max(| f^n(z) |_p^2, | a |_p)} \\ &= r \frac{A}{| a |_p} = r = \varphi_A^{n+1}(r). \end{aligned}$$

- Si $r > \sqrt{A}$, alors $| f^n(z) |_p = \varphi_A^n(r) = \frac{A}{r}$, pour tout $n \geq 1$, et $\frac{A}{r} < \sqrt{A}$ *i.e* $\frac{A^2}{r^2} < A$, donc

$$\begin{aligned} | f^{n+1}(z) |_p &= \frac{A}{r} \frac{A}{\max(| f^n(z) |_p^2, | a |_p)} \\ &= \frac{A}{r} \frac{A}{| a |_p} = \frac{A}{r} = \varphi_A^{n+1}(r). \end{aligned}$$

- Si $r = \sqrt{A}$ **et** $A^* > \sqrt{A}$, alors

$$\begin{aligned} | f^{n+1}(z) |_p &= \frac{\varphi_A^n(r) A}{\max(| f^n(z) |_p^2, | a |_p)} \\ &= \frac{\frac{A}{A^*} A}{| a |_p} = \frac{A}{A^*} = \varphi_A^{n+1}(r). \end{aligned}$$

- Si $r = \sqrt{A}$ **et** $A^* = \sqrt{A}$, alors on a $z \in S_{\sqrt{A}}(0)$ (*i.e* $| z |_p = \sqrt{A}$), donc $f(z) \in S_{\sqrt{A}}(0)$ (*i.e*
$| f(z) |_p = \sqrt{A}$). D'où

$$| f^{n+1}(z) |_p = | f^n(f(z)) |_p = \varphi_A^n(r) = \sqrt{A} = \varphi^{n+1}(r), \quad pour \ \ tout \ \ n \geq 1.$$

Alors $| f^n(z) |_p = \varphi_A^n(r), \ \ pour \ \ tout \ \ n \geq 1.$ ■

Notation 3.2

On note

$$A^*(z) = \mid f(z) \mid_p, \ \ si \ \ z \in S_{\sqrt{A}}(0).$$

Théorème 3.1 *[12]*

Le système dynamique p-adique associé a la fonction (3.5) *vérifie les propriétés suivants*

1. *Si* $r > \sqrt{A}$ *et* $z \in S_r(0)$*, alors*

$$f^n(z) \in S_{\frac{A}{r}}(0), \ \ \forall n \geq 1.$$

2. *Soit* $z \in S_{\sqrt{A}}(0) \setminus \mathcal{P}$
   - *Si* $A^*(z) = \sqrt{A}$*, alors* $f(z) \in S_{\sqrt{A}}(0)$*.*
   - *Si* $A^*(z) > \sqrt{A}$*, alors* $f^n(z) \in S_{\frac{A}{A^*(z)}}(0), \forall n \geq 2$*.*

3. *a)* $SI(z_0) = B_{\sqrt{A}}(0)$*.*

   b) $\mathcal{P} \subset S_{\sqrt{A}}(0)$*.*

Preuve.

1. Soient $r > \sqrt{A}$ et $z \in S_r(0)$, alors d'après le Lemme (3.2), on a

$$\mid f^n(z) \mid_p = \varphi_A^n(r), \ \ \forall n \geq 1.$$

   On utilise la partie (2) du Lemme (3.1) on obtient

$$\varphi_A^n(r) = \frac{A}{r}, \forall n \geq 1,$$

   c'est à dire

$$\mid f^n(z) \mid_p = \frac{A}{r}, \ \ \forall n \geq 1.$$

   Donc

$$f^n(z) \in S_{\frac{A}{r}}(0), \ \ \forall n \geq 1.$$

2. • Si $z \in S_{\sqrt{A}}(0) \setminus \mathcal{P}$ et $A^* = \sqrt{A}$, on a

$$\mid f(z) \mid_p = \sqrt{A} \ \ (i.e \ f(z) \in S_{\sqrt{A}}(0)).$$

- Si $A^*(z) > \sqrt{A}$, alors d'après la partie (1.) de ce théorème on a

$$f^n(z) \in S_{\frac{A}{A^*(z)}}(0), \forall n \geq 2.$$

3. a) Soient $r > \sqrt{A}$ et $z \in S_r(0)$, alors d'après le Lemme (3.2), on a $| f^n(z) |_p = \varphi_A^n(r)$. On utilise la partie (1.) du Lemme (3.1), on trouve

$$Fix(\varphi_A) = \{r, \ 0 \leq r < \sqrt{A}\} \cup \{ \sqrt{A}, \ si \ A^* = \sqrt{A}\}.$$

Donc, la sphère $S_r(0)$ est invariante pour f si et seulement si $r < \sqrt{A}$. Par conséquent, $SI(z_0) = B_{\sqrt{A}}(0)$.

b) Soit $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}_p, \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, f^n(z) \in \{\hat{z_1}, \hat{z_2}\}\}$, où $\hat{z_1} = \hat{z_2} = \pm\sqrt{-a}$. On a

$$| \hat{z_1} |_p = | \hat{z_2} |_p = | \sqrt{-a} |_p = | -a |_p^{\frac{1}{2}} = | a |_p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}, \ i.e \ \{\hat{z_1}, \hat{z_2}\} \subset S_{\sqrt{A}}(0).$$

D'après les parties a) et (1.) de ce théorème si $z \in S_r(0), r \neq \sqrt{A}$, alors

- **Pour** $r < \sqrt{A}$, on a $f(z) \in S_r(0) \notin S_{\sqrt{A}}(0)$.
- **Pour** $r > \sqrt{A}$, on a $f(z) \in S_{\frac{A}{r}}(0) \notin S_{\sqrt{A}}(0)$.

Donc

$$\forall r \neq \sqrt{A}, f(z) \notin S_{\sqrt{A}}(0).$$

Par la définition de l'ensemble $\mathcal{P}$, on peut conclure que $\mathcal{P} \subset S_{\sqrt{A}}(0)$.

■

Corollaire 3.1
La sphère $S_r(0)$ *est* ***invariante*** *pour* f *si et seulement si* $0 < r < \sqrt{A}$.

3.1 Dynamique locale de la fonction $f(z) = \dfrac{az}{z^2 + a}$

Dans cette section, on étudie le système dynamique associé à la fonction (3.5) sur chaque sphère invariante.

Lemme 3.2

Pour toute $B^+_\rho(c) \subset S_r(0)$, *où* $0 < r < \sqrt{A}$, *on a*

$$f(B^+_\rho(c)) = B^+_\rho(f(c)). \tag{3.9}$$

Preuve.

On suppose $B^+_\rho(c) \subset S_r(0)$, alors $c \in S_r(0)$, donc $\mid c \mid_p = r$. D'où si $z \in B^+_\rho(c)$ (i.e $\mid z - c \mid_p \leq \rho$), alors

$$\begin{aligned} \mid f(z) - f(c) \mid_p &= \mid \frac{az}{z^2+a} - \frac{ac}{c^2+a} \mid_p \\ &= \mid \frac{az(c^2+a) - ac(z^2+a)}{(z^2+a)(c^2+a)} \mid_p \\ &= \mid \frac{azc^2 + a^2z - acz^2 - a^2c}{(z^2+a)(c^2+a)} \mid_p \\ &= \mid \frac{a(a-zc)(z-c)}{(z^2+a)(c^2+a)} \mid_p \\ &= \mid z - c \mid_p \frac{\mid a \mid_p \mid a - zc \mid_p}{\mid z^2 + a \mid_p \mid c^2 + a \mid_p} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Comme $\mid z.c \mid_p = \mid z \mid_p . \mid c \mid_p = r^2$ (car $z \in B^+_\rho(c) \subset S_r(0)$) et $\mid a \mid_p = A$, alors si $0 < r < \sqrt{A}$, on a $\mid z^2 \mid_p = \mid z.c \mid_p = r^2 < A$. Puis, d'après l'égalité (3.10), on trouve

$$\mid f(z) - f(c) \mid_p = \mid z - c \mid_p \leq \rho.$$

■

Lemme 3.3

Si $c \in S_r(0)$, *et* $0 < r < \sqrt{A}$, *alors* $\mid f(c) - c \mid_p = \dfrac{r^3}{A}$.

Preuve.

Soit $c \in S_p(0)$ (i.e $\mid c \mid_p = r$), et $0 < r < \sqrt{A}$, alors on obtient l'égalité suivante

$$\mid f(c) - c \mid_p = \mid \frac{ac}{c^2+a} - c \mid_p = \mid \frac{-c^3}{c^2+a} \mid_p = \frac{\mid c^3 \mid_p}{\mid c^2 + a \mid_p} = \frac{r^3}{A}. \tag{3.11}$$

(car $\mid c^2 \mid_p = r^2 < A = \mid a \mid_p$). ■

Remarque 3.1

D'après le Lemme (3.3)*, on remarque que* $| f(c) - c |_p$ *dépend de* r*, mais ne dépend pas de* $c \in S_r(0)$*, donc on définit*

$$\rho(r) = | f(c) - c |_p, \ \ si \ \ c \in S_r(0).$$

Théorème 3.2 *[12]*

Si $c \in S_r(0)$ *et* $0 < r < \sqrt{A}$*, alors*

1. $| f^{n+1}(c) - f^n(c) |_p = \rho(r), \forall n \geq 1.$
2. $f(B^+_{\rho(r)}(c)) = B^+_{\rho(r)}(c).$
3. *Si pour* $\theta > 0$*, la boule* $B^+_\theta(c) \subset S_r(0)$ *est invariante pour* f*, alors* $\theta \geq \rho(r)$*.*

Preuve.

1. Pour tout $z \in B^+_{\rho(r)}(c)$, alors d'après la définition de $\rho(r)$, on a

   $$| z |_p = | (z - c) + c |_p = \max(| z - c |_p, | c |_p) = | c |_p = r.$$

   (car $| z - c |_p \leq \rho(r) = \dfrac{r^3}{A} = r.(\dfrac{r^2}{A}) < r.1 = r$).
   Donc $z \in S_r(0)$, d'où

   $$B^+_{\rho(r)}(c) \subset S_r(0).$$

   Comme $| f^n(c) |_p = \varphi_A(r) = r$ $(0 < r < \sqrt{A})$ donc $f^n(c) \in S_r(0)$, alors d'après le Lemme (3.3) on a

   $$| f^{n+1}(c) - f^n(c) |_p = | f(f^n(c)) - f^n(c) |_p = \rho(r).$$

2. D'après la partie (1.) de ce théorème, on a $B^+_{\rho(r)}(c) \subset S_r(0)$, et d'après le Lemme (3.2) on a

   $$f(B^+_{\rho(r)}(c)) = B^+_{\rho(r)}(f(c)). \tag{3.12}$$

   Comme $| f(c) - c |_p = \rho(r)$, donc $f(c) \in B^+_{\rho(r)}(c)$. Alors

   $$B^+_{\rho(r)}(c) = B^+_{\rho(r)}(f(c)). \tag{3.13}$$

(car tout points d'un boule est un centre de ce boule, Voir la Proposition (1.13)).

Donc de (3.12) et (3.13), on trouve

$$f(B^+_{\rho(r)}(c)) = B^+_{\rho(r)}(c).$$

3. On suppose que $\theta > 0$, et $B^+_\theta(c) \subset S_r(0)$ est invariante (i.e $f(B^+_\theta(c)) = B^+_\theta(c)$). D'après le Lemme (3.2), on a

$$f(B^+_\theta(c)) = B^+_\theta(f(c)).$$

Alors

$$B^+_\theta(c) = B^+_\theta(f(c))\,(i.e\, f(c) \in B^+_\theta(c)).$$

Donc

$$\rho(r) = \mid f(c) - c \mid_p \leq \theta.$$

■

3.2 Les points 2-périodiques

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude des points 2-périodiques de la fonction $f(z) = \dfrac{az}{z^2 + a}$.

Définition 3.1

*Soit U un ouvert de $\mathbb{C}_p$ et $f : U \to \mathbb{C}_p$ une application. Un point $z_0 \in U$ est **périodique** s'il existe $k \geq 1$ tel que $z_0, f(z_0), ..., f^{k-1}(z_0) \in U$ et $f^k(z_0) = z_0$. On appelle k **période** de z_0, si k est le plus petit entier avec cette propriété, alors k est appelé **la période primitive** de z_0 et on dit que $\{z_0, f(z_0), ..., f^{k-1}(z_0)\}$ est le cycle de z_0.*

Proposition 3.1 *[12]*

Si la fonction (3.5) admet les points k-périodiques $\{z_0 \xrightarrow{f} z_1 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} z_{k-1} \xrightarrow{f} z_0\}$, alors

$$\mid z_0 \mid_p = \mid z_1 \mid_p = ... = \mid z_{k-1} \mid_p \leq \sqrt{A}.$$

Preuve.

On suppose que la fonction (3.5) admets les points k-périodiques $\{z_0 \xrightarrow{f} z_1 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} z_{k-1} \xrightarrow{f} z_0\}$. Si $\mid z_i \mid_p > \sqrt{A}$ pour certains $i \in \{0,1,2,\dots,k-1\}$, alors d'après la partie (1.) du Théorème (3.1) on a $z_{i+1} = f(z_i) \in B_{\sqrt{A}}(0)$ i.e $\mid z_{i+1} \mid_p = r = \dfrac{A}{|z_i|_p} < \sqrt{A}$, et $S_r(0)$ est une sphère invariante de la fonction (3.5), donc

$$\mid f(z_i) \mid_p = \mid z_{i+1} \mid_p = \mid z_{i+2} \mid_p = \dots = \mid z_{k-1} \mid_p = \mid z_0 \mid_p = \dots = \mid f^k(z_i) \mid_p = \mid z_i \mid_p < \sqrt{A}.$$

Cela contredit notre hypothèse. Par conséquent $\mid z_i \mid_p \leq \sqrt{A}, \forall i \in \{0,1,\dots,k-1\}$. De plus, si $\mid z_i \mid_p = r < \sqrt{A}$ pour certains $i \in \{0,1,2,\dots,k-1\}$, alors

$$\mid z_0 \mid_p = \mid z_1 \mid_p = \dots = \mid z_{k-1} \mid_p < \sqrt{A}$$

(car $S_r(0)$ est invariante pour tout $r < \sqrt{A}$). Sinon $\mid z_0 \mid_p = \mid z_1 \mid_p = \dots = \mid z_{k-1} \mid_p = \sqrt{A}$.
■

Pour étudier les points 2-périodiques de la fonction (3.5), on étudie les points fixes de la fonction $g(z) = f^2(z)$. Comme on a

$$\begin{aligned} g(z) = f(f(z)) = \frac{a.f(z)}{(f(z))^2 + a} &= \frac{a\dfrac{az}{z^2+a}}{\dfrac{a^2z^2}{(z^2+a)^2} + a} \\ &= \frac{a^2z(z^2+a)}{a^2z^2 + az^4 + a^3 + 2a^2z^2} = \frac{a(az^3 + a^2z)}{a(z^4 + 3az^2 + a^2)} \\ &= \frac{az^3 + a^2z}{z^4 + 3az^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} g(z) = z \Leftrightarrow & \frac{az^3 + a^2z}{z^4 + 3az^2 + a^2} = z \\ & \Leftrightarrow az^3 + a^2z = z^5 + 3az^3 + a^2z \\ & \Leftrightarrow az^2 + a^2 = z^4 + 3az^2 + a^2 \\ & \Leftrightarrow z^4 + 3az^2 + az^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow z^2(z^2 + 2a) = 0 \end{aligned}$$

Comme $z=0$ est l'unique point fixe de f, alors $z=0$ est un point fixe de g. On suppose que $z\neq 0$, alors l'équation $g(z)=z$ est équivalente à $z^2+2a=0$, donc les deux solutions sont $t_{1,2}=\pm\sqrt{-2a}$. Pour ces points on a

- Si $p\neq 2$, alors

$$|t_1|_p=|t_2|_p=|\pm\sqrt{-2a}|_p=|(-2a)^{\frac{1}{2}}|_p=(|-2|_p|a|_p)^{\frac{1}{2}}=|a|_p^{\frac{1}{2}}=\sqrt{A}.$$

- Si $p=2$, alors

$$\begin{aligned}|t_1|_2=|t_2|_2&=|\pm\sqrt{-2a}|_2=|(-2a)^{\frac{1}{2}}|_2=(|-2|_2|a|_2)^{\frac{1}{2}}=(|2|_2|a|_2)^{\frac{1}{2}}\\&=2^{-1}(|a|_2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|a|_2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{A}{2}}.\end{aligned}$$

D'où

$$|t_1|_p=|t_2|_p=\begin{cases}\sqrt{A}, & si\ \ p\neq 2\\ \sqrt{\dfrac{A}{2}}, & si\ \ p=2.\end{cases}$$

Remarque 3.2

C'est une coïncidence que $g'(t_1)=g'(t_2)=9$, i.e que la valeur ne dépend pas du paramètre a. Par conséquent on a

$$|g'(t_1)|_p=|g'(t_2)|_p=\begin{cases}1, & si\ \ p\neq 3\\ \dfrac{1}{9}, & si\ \ p=3.\end{cases}$$

En effet

On a $g(z)=\dfrac{az^3+a^2z}{z^4+3az^2+a^2}$, alors

$$\begin{aligned}g'(z)&=\frac{(3az^2+a^2)(z^4+3az^2+a^2)-(4z^3+6az)(az^3+a^2z)}{(z^4+3az^2+a^2)^2}\\&=\frac{3az^6+9a^2z^4+3a^3z^2+a^2z^4+3a^3z^2+a^4-4az^6-4a^2z^4-6a^2z^4-6a^3z^3}{(z^4+3az^2+a^2)^2}\\&=\frac{a(a^3-z^6)}{(z^4+3az^2+a^2)^2}.\end{aligned}$$

Donc

$$g'(t_1) = g'(t_2) = g'(\pm\sqrt{-2a}) = \frac{a(a^3 - (\pm\sqrt{-2a})^6)}{((\pm\sqrt{-2a})^4 + 3a(\pm\sqrt{-2a})^2 + a^2)^2}$$
$$= \frac{a(a^3 + 8a^3)}{(4a^2 - 6a^2 + a^2)^2} = \frac{a^4 + 8a^4}{(-a^2)^2} = 9.$$

D'où

- Si $p = 3$, alors $| g'(t_1) |_3 = | g'(t_2) |_3 = | 9 |_3 = | 3^2 |_3 = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

- Si $p \neq 3$, alors $| g'(t_1) |_p = | g'(t_2) |_p = | 9 |_p = | 3^2 |_p = 3^0 = 1$.

Donc

$$| g'(t_1) |_p = | g'(t_2) |_p = \begin{cases} 1, & si \;\; p \neq 3 \\ \frac{1}{9}, & si \;\; p = 3. \end{cases}$$

Remarque 3.3

La fonction g est définie dans

$$\mathbb{C}_p \setminus \left\{ \hat{z}_{1,2} = \pm\sqrt{-a},\; \hat{\hat{z}}_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{(-3 \pm \sqrt{5})a}{2}} \right\}.$$

On définit l'ensemble $\mathcal{P}_2$ *comme suit*

$$\mathcal{P}_2 = \{z \in \mathbb{C}_p, \exists n \in \mathbb{N},\; tel \;\; que \;\; , f^n(z) \in \{\hat{z}_{1,2},\; \hat{\hat{z}}_{1,2,3,4}\}\}.$$

3.2.1 Le cas $p = 2$

Dans ce cas on a

$$| t_1 |_2 = | t_2 |_2 = \sqrt{\frac{A}{2}} < \sqrt{A},\; et \;\; | t_2 - t_1 |_2 = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{2}}.$$

Car

$$| t_2 - t_1 |_2 = | 2\sqrt{-2a} |_2 = | 2 |_2 | -2a |_2^{\frac{1}{2}} = 2^{-1} | 2 |_2^{\frac{1}{2}} | a |_2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(2^{-1})^{\frac{1}{2}} \sqrt{A} = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{2}}.$$

D'après le Lemme (3.3), on trouve

$$\rho(\sqrt{\frac{A}{2}}) = \mid f(t_1) - t_1 \mid_2 = \frac{(\sqrt{\frac{A}{2}})^3}{A} = \frac{(\sqrt{\frac{A}{2}})^2(\sqrt{\frac{A}{2}})}{A} = \frac{\frac{A}{2}\sqrt{\frac{A}{2}}}{A} = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{2}}.$$

Et d'après la partie (2.) du Théorème (3.2) et comme $\sqrt{\frac{A}{2}} < \sqrt{A}$, on a

$$f(B^+_{\rho(\sqrt{\frac{A}{2}})}(t_1)) = B^+_{\rho(\sqrt{\frac{A}{2}})}(t_1), \ \ (i.e \ \ f(B^+_{\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{2}}}(t_1)) = B^+_{\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{2}}}(t_1)).$$

De plus, $\mid g'(t_1) \mid_2 = \mid g'(t_2) \mid_2 = 1$, alors chaque point de $\{t_1,\ t_2\}$ est un point fixe **indifférant** de g, et il est une centre d'une boule de **Siegel**.

Théorème 3.3 *[12]*
Si $p = 2$*, alors*

$$f(S_r(t_1) \setminus \mathcal{P}_2) \subseteq S_r(t_2), f(S_r(t_2) \setminus \mathcal{P}_2) \subseteq S_r(t_1),$$

pour tout $0 < r \leq \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{2}}$.

Preuve.
On utilise les égalités suivantes

$$f(t_1) = t_2, f(t_2) = t_1.$$

Soit $t_1 = \sqrt{-2a}$ *et* $z \in S_r(t_1) \setminus \mathcal{P}_2 \subset B^+_{\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{2}}}(t_1)$, $(i.e \ \mid x - t_1 \mid_2 = r \leq \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{2}})$. On a

$$\begin{aligned}
\mid f(z) - t_2 \mid_2 &= \mid f(z) - f(t_1) \mid_2 = \mid \frac{az}{z^2+a} - \frac{at}{t_1^2+a} \mid_2 \\
&= \mid \frac{-a(z-t_1)(t_1 z - a)}{(z^2+a)(-2a+a)} \mid_2 = \mid \frac{(z-t_1)(t_1 z - 3a - (-2a))}{(z^2+a)} \mid_2 \\
&= r \cdot \mid \frac{(t_1(z-t_1) - 3a)}{[z - t_1 + \sqrt{-a}(\sqrt{2}-1)][z - t_1 + \sqrt{-a}(\sqrt{2}+1)]} \mid_2,
\end{aligned}$$

alors

$$\mid f(z) - t_2 \mid_2 = r \cdot \mid \frac{-3a + \sqrt{-2a}(z - t_1)}{[z - t_1 + \sqrt{-a}(\sqrt{2}-1)][z - t_1 + \sqrt{-a}(\sqrt{2}+1)]} \mid_2 . \tag{3.14}$$

Comme on a

* $|-3a|_2 = |-3|_2 |a|_2 = A.$
* $|\sqrt{-2a}(z-t_1)|_2 = |\sqrt{-2a}|_2 |z-t_1|_2 = r\sqrt{\frac{A}{2}} \leq \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{2}} = \frac{A}{4} < A.$
* $|\sqrt{2}-1|_2 = |\sqrt{2}+1|_2 = \max(|\sqrt{2}|_2, |1|_2) = \max(2^{-\frac{1}{2}}, 1) = \max(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = 1.$
* $|\sqrt{-a}|_2 = |a|_2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}.$

Alors

$$|f(z)-t_2|_2 = |f(z)-f(t_1)|_2 = r\frac{A}{\sqrt{A}\sqrt{A}} = r.$$

Donc $|f(z)-t_2|_2 = r$ $(i.e\ \ f(x) \in S_r(t_2))$, d'où $f(S_r(t_1) \setminus \mathcal{P}_2) \subseteq S_r(t_2)$.
On fait les mêmes procédures, pour $z \in S_r(t_2) \setminus \mathcal{P}_2 \subset B^+_{\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{2}}}(t_1)$. Alors on a

$$\begin{aligned} |f(z)-t_1|_2 &= |f(z)-f(t_2)|_2 \\ &= r\left|\frac{-3a-\sqrt{-2a}(z-t_2)}{[z-t_2-\sqrt{-a}(\sqrt{2}-1)][z-t_2-\sqrt{-a}(\sqrt{2}+1)]}\right|_2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Par conséquent

$$|f(z)-t_1|_2 = |f(z)-f(t_2)|_2 = r\ \ (i.e\ \ f(z) \in S_r(t_1)).$$

■

3.2.2 Le cas $p = 3$

Dans ce cas on a $|t_1|_3 = |t_2|_3 = |t_2 - t_1|_3 = \sqrt{A}$ et $|g'(t_1)|_3 = |g'(t_2)|_3 = \frac{1}{9} < 1$. Donc chaque point fixe t_1 et t_2 de g est une point **attractif**.

Théorème 3.4 *[12]*
Si $p = 3$ *et* $r < \sqrt{A}$*, alors*

a) Pour tout $z \in S_r(t_1) \setminus \mathcal{P}_2$, $\lim_{n\to+\infty} f^{2n}(z) = t_1$ *et* $\lim_{n\to+\infty} f^{2n+1}(z) = t_2$.

b) Pour tout $z \in S_r(t_2) \setminus \mathcal{P}_2$, $\lim_{n\to+\infty} f^{2n}(z) = t_2$ *et* $\lim_{n\to+\infty} f^{2n+1}(z) = t_1$.

Preuve.

Soit $S_r(t_1) \subset S_{\sqrt{A}}(0), r < \sqrt{A}$ *et* $z \in S_r(t_1) \setminus \mathcal{P}_2$ (*i.e* $\mid z - t_1 \mid_3 = r$). Alors

$$\begin{aligned} \mid f(z) - t_2 \mid_3 &= \mid f(z) - f(t_1) \mid_3 \\ &= \mid z - t_1 \mid_3 \frac{\mid -3a + \sqrt{-2a}(z - t_1) \mid_3}{\mid z - t_1 + \sqrt{-a}(\sqrt{2} - 1) \mid_3 \mid z - t_1 + \sqrt{-a}(\sqrt{2} + 1) \mid_3}. \end{aligned}$$

Comme on a

* $\mid -3a \mid_3 = \mid -3 \mid_3 \mid a \mid_3 = 3^{-1} A = \dfrac{A}{3}.$
* $\mid \sqrt{-2a}(z - t_1) \mid_3 = \mid \sqrt{-2a} \mid_3 \mid z - t_1 \mid_3 = r \mid a \mid_3^{\frac{1}{2}} = r\sqrt{A}.$
* $\mid \sqrt{2} - 1 \mid_3 = \mid \sqrt{2} + 1 \mid_3 = 1.$
* $\mid \sqrt{-a} \mid_3 = \mid a \mid_3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}.$

D'où

- Si $r < \dfrac{\sqrt{A}}{3}$, alors $\mid f(z) - t_2 \mid_3 = r \dfrac{\frac{A}{3}}{\sqrt{A}\sqrt{A}} = \dfrac{r}{3}.$

- Si $\dfrac{\sqrt{A}}{3} < r < \sqrt{A}$, alors $\mid f(z) - t_2 \mid_3 = r \dfrac{r\sqrt{A}}{\sqrt{A}\sqrt{A}} = \dfrac{r^2}{\sqrt{A}}.$

- Si $r = \dfrac{\sqrt{A}}{3}$, alors on a

$$\begin{aligned} \mid -3a + \sqrt{-2a}(z - t_1) \mid_3 &\leq \max(\mid -3a \mid_3, \mid \sqrt{-2a}(z - t_1) \mid_3) \\ &= \max(\frac{A}{3}, r\sqrt{A}) = \max(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}) = \frac{A}{3}. \end{aligned}$$

Donc

$$\mid f(z) - t_2 \mid_3 \leq r \frac{\frac{A}{3}}{\sqrt{A}\sqrt{A}} = \frac{\frac{\sqrt{A}}{3}\frac{A}{3}}{A} = \frac{\sqrt{A}}{9}.$$

Alors d'après les calcules présidents on a

$$\mid f(z) - t_2 \mid_3 = \phi(r) = \begin{cases} \dfrac{r^2}{\sqrt{A}}, & si \ \dfrac{\sqrt{A}}{3} < r < \sqrt{A}, \\ \leq \dfrac{\sqrt{A}}{9}, & si \ r = \dfrac{\sqrt{A}}{3}, \\ \dfrac{r}{3}, & si \ r < \dfrac{\sqrt{A}}{3}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Pour f^2, on obtient

$$
\begin{aligned}
| f^2(z) - t_1 |_3 &=| f^2(z) - f^2(t_1) |_3 \\
&=| f(z) - t_2 |_3 \cdot \frac{| -3a + \sqrt{-2a}(f(z) - t_2) |_3}{| f(z) - t_2 + \sqrt{-a}(\sqrt{2} - 1) |_3 | f(z) - t_2 + \sqrt{-a}(\sqrt{2} + 1) |_3} \\
&= \phi(\phi(r)) = \begin{cases} \dfrac{(\phi(r))^2}{\sqrt{A}}, & si \ \dfrac{\sqrt{A}}{3} < \phi(r) < \sqrt{A}, \\ \leq \dfrac{\sqrt{A}}{9}, & si \ \phi(r) = \dfrac{\sqrt{A}}{3}, \\ \dfrac{\phi(r)}{3}, & si \ \phi(r) < \dfrac{\sqrt{A}}{3}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

En itérant cet argument, on obtient les formules suivantes pour $z \in S_r(t_1) \setminus \mathcal{P}_2$

$$
| f^{2n}(z) - t_1 |_3 = \phi^{2n}(r), | f^{2n+1}(z) - t_2 |_3 = \phi^{2n+1}(r). \tag{3.17}
$$

Ainsi le système dynamique réel associé à la fonction $\phi : [0, \sqrt{A}[\to [0, \sqrt{A}[$ vérifie les propriétés suivantes

1. L'ensemble des points fixes de $\phi(r)$ est $Fix(\phi) = \{0\}$.
2. Le point fixe $r = 0$ est **attractif** de bassin d'attraction $[0, \sqrt{A}[$.

En utilisant (3.17), il est facile de voir que l'assertion (a) est vérifiée. ■

3.2.3 Le cas $p \geq 5$

Dans ce cas on a $| t_1 |_p =| t_2 |_p =| t_2 - t_1 |_p = \sqrt{A}$ et $| g'(t_1) |_p =| g'(t_2) |_p = 1$. Donc chaque point fixe t_1 et t_2 de g est une point **indifférent** et est le centre d'une boule de **Siegel**.

Théorème 3.5 *[12]*
Si $p \geq 5$*, alors*

$$
f(S_r(t_1) \setminus \mathcal{P}_2) \subseteq S_r(t_2), \ f(S_r(t_1) \setminus \mathcal{P}_2) \subseteq S_r(t_1),
$$

pour tout $0 < r < \sqrt{A}$.

Preuve.
Soit $z \in S_r(t_1) \setminus \mathcal{P}_2 \subset V_{\sqrt{A}}(t_1)$ ($i.e$ $| z - t_1 |_p = r < \sqrt{A}$). Comme on a

* $\mid -3a\mid_p = \mid -3\mid_p \mid a\mid_p = A$.
* $\mid \sqrt{-2a}(z-t_1)\mid_p = \mid \sqrt{-2a}\mid_p \mid z-t_1\mid_p = r\mid -2a\mid_p^{\frac{1}{2}} = r\mid a\mid_p^{\frac{1}{2}} = r\sqrt{A}$.
* $\mid \sqrt{2}-1\mid_p = \mid \sqrt{2}+1\mid_p = 1$.
* $\mid \sqrt{-a}\mid_p = \mid a\mid_p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}$.

Alors d'après l'égalité (3.15) on a

$$\begin{aligned}\mid f(z)-t_2\mid_p = \mid f(z)-f(t_1)\mid_p &= r\frac{\max(A, r\sqrt{A})}{\max(r, \sqrt{A})\max(r, \sqrt{A})}\\ &= r\frac{A}{\sqrt{A}\sqrt{A}} = r \ (car\ r\sqrt{A} < A).\end{aligned}$$

Donc

$$\mid f(z)-t_2\mid_p = \mid f(z)-f(t_1)\mid_p = r \ \ (i.e\ \ f(z)\in S_r(t_2)).$$

D'où

$$f(S_r(t_1)\setminus \mathcal{P}_2)\subseteq S_r(t_2).$$

On fait les mêmes procédures, pour $z\in S_r(t_2)\setminus \mathcal{P}_2 \subset B^+_{\sqrt{A}}(t_1)$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] **S. Albeverio, U. A. Rozikov, and I. A. Sattarov**. *p-Adic* $(2,1)$*-rational dynamical systems*. J. Math. Anal. Appl. 398(2), $553-566$(2013).

[2] **R. Benedetto**. *Fatou components in p-adic dynamics*. Thesis,Brown University 1998.

[3] **B. DIARRA**. *Analyse p-adique*. Cours de DEA - Algèbre commutative FAST - Université du Mali Décembre 1999 - Mars 2000 - Décembre 2000.

[4] **A. Escassut**. *Analytic Elements in p-adique Anaysis*. World scientific publushing (1995).

[5] **L. C. Hsia**. *Closure of periodic points over a non-archimidean field*. J. London Math.Soc 62(2000), $685-700$.

[6] **P. Morton, J. Silverman**. *Rational periodic points of rational fonctions*. Inter. Math. Res. Notices.1(1994), $97-122$.

[7] **Juan Rivera-Letelier**. *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux*. Astérisque, tome 287(2003), p, $147-230$.

[8] **S. Katok**. *Real and p-adic analysis*. Course notes for MATH 497C MASS Program, FALL 2000 Revised, Novembre 2001.

[9] **N. Koblitz**. *p-Adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Function* (Springer, Berlin, 1977).

[10] **H. O. Peitgen, H. Jungers and D. Saupe**. *Chaos Fractals* (Springer, Heidelberg-New York, 1992).

[11] **U. A. Rozikov and I. A. Sattarov**. *p-adic dynamical systems of* $(2,2)$*-rational functions with unique fixed point*. Chaos Solit. Fract. $105, 260-270$(2017).

[12] **U. A. Rozikov, I. A. Sattarov and S. Yam**. *p-adic dynamical systems of the function* $\frac{ax}{x^2+a}$. p-Adic Num. Ultrametr. Anal. Appl. 11(1), $77-87$(2019).

[13] **W. H. Schikhof**. *Ultrametric Calculus : An introduction to p-adic analysis, Cambridge Studies in Advanced Math.* 4 (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006).

[14] **V. S. Vladimirov, I. V. Volovich and E. I. Zelenov**. *p-Adic Analysis and Mathematical Physics* (World Scientific, River Edge, N. Y. 1994).