République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahya - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématique

№ d'ordre ....

№ de séries ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Présenté par

–Zineb Laouici *– Rania Ghebghoub*

Devant le jury :

Président		Prof Université de Jijel
Encadreur	M.F. Yarou	Grade Université de Jijel
Examinateur	N. Fetouci	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

REMERCIEMENTS

Nous commençons par remercier Dieu pour nous avoir donné le courage et la volonté pour mener à terme ce travail.
Nous voudrions présenter nos sincères remerciements à notre encadreur le professeur M.F. Yarou pour sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion.

Nous exprimons notre gratitude et nos remerciements au Prof qui nous a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Nos plus vifs remerciements sont adressés à pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant d'examiner et de juger ce mémoire.

Bien évidemment, ce mémoire n'aurait pu voir le jour sans l'enseignement de qualité reçu tout au long de notre formation. Nous remercions donc très sincèrement tous les enseignants du département de mathématiques et les personnes qui ont contribué par leurs conseils grâce à leurs compétences, à la réalisation de ce travail.

Enfin, nous souhaitons remercier nos familles. Elles ont toujours cru en nous. Elles nous ont toujours soutenues au fil des années. Ce soutien sans faille est l'élément le plus précieux à nos yeux.

Zineb LAOUICI & Rania GHEBGHOUB

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité de solution pour certaines classes d'inclusions différentielles du premier ordre régit par un opérateur maximal monotone dans le cas autonome et non autonome.
Les opérateurs monotones (en général, multivoques), et notamment ceux qui sont maximaux jouent un rôle très important dans beaucoup de domaines mathématiques. Notons, par exemple l'optimisation (les sous différentiels des fonctions propres convexes et semi continues inférieurement sont des opérateurs maximaux monotones), équations différentielles (souvent l'opérateur qui engendre l'équation est maximal monotone). Tous ça a abouti à une large étude de ces opérateurs.
Puisque la nature d'un opérateur monotone peut être assez difficile à manipuler, soit du point de vue théorique, soit du point de vue numérique, de nombreux auteurs se sont intéressés à chercher des approximations ou régularisations d'un opérateur, pour obtenir à partir d'un opérateur monotone donné, un autre qui a plus de propriétés régulière par exemple la régularité de Yosida.
Les problèmes gouvernés par les opérateurs maximaux monotones constituent une classe importante d'inclusion différentielle

Un bref schéma du contenue présenté dans ce mémoire peut se décrire comme suit :
Le premier chapitre intitulé "Notions de base et résultats préliminaires ", il contient des notations ainsi qu'un ensemble de définitions, propositions et théorèmes sur l'analyse multivoque et convexe et qui vont nous servir de clé dans les deux chapitres qui suivent .
Le deuxième chapitre intitulé "Opérateurs maximaux monotones", qui contient des résultats et des propriétés sur les opérateurs monotones et maximaux monotones, l'approximation de Yosida et la résolvante qui seront utilisés, en plus on expose la distance de Vladimirov entre deux opérateurs maximaux monotones avec ses propriétés, enfin ces concepts sont des outils fondamentaux pour nos problèmes.

Le troisième chapitre intitulé "Étude d'une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone", scindé en trois section, dans la première section on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de solution pour l'inclusion différentielle du premier ordre autonome qui ne dépend pas du temps de la forme

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \dot{x}(t) \in -Ax(t), \quad p.p \ sur \ [0,T], \\ x(0) = x_0 \in D(A). \end{cases}$$

où $A : H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone. Ensuite dans la deuxième section, nous considérons le cas non autonome, ie lorsque l'opérateur dépend séparément du temps et de l'état ce problème est défini comme suit

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) \in A(t)u(t) \ dr - p.p \ dans \ [0,T] \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

Enfin, dans la dernière section, nous généralisons l'étude au problème non autonome gouverné par un opérateur maximal monotone et contenant une perturbation ie, des forces extérieur appliquées au système.

Chapitre 1

Notions de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base, quelques résultats fondamentaux sur les multi-applications et on rappelle aussi quelques théorèmes utiles dans les démonstrations de nos résultats principaux.

1.1 Notations générales

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

- H un espace de Hilbert muni de la norme $\|.\|$ et du produit scalaire $<.,.>$.
- E un espace vectoriel normé.
- X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$, X' son dual, c'est à dire, l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in \bar{B}} |\langle f, x \rangle|.$$

- $\sigma(X, X')$ la topologie faible sur X.
- N l'ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
- I_d l'identité de H.
- $|.|$ la valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$.

- $D(A)$ le domaine de A.
- $V(x_0)$ est l'ensemble des voisinages du point x_0.
- $\Gamma_0(H)$ est l'ensemble des fonctions propres convexes semi continue inférieurement définie de H à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$.
- $x_n \rightharpoonup x$ exprime que la suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers x.
- $x_n \to x$ exprime que la suite $(x_n)_n$ converge fortement vers x.
- p.p. presque partout
- $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$x \longmapsto \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

- $B(a,r)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon r.
- $\overline{B}(a,r)$ est la boule fermée de centre a et de rayon r.
- $\mathcal{B}(H)$ espace des opérateurs linéaires bornés de H dans H.
- $\mathcal{B}(H_1,H_2)$ espace des opérateurs linéaires bornés de H_1 dans H_2.
- $P(H) = 2^H$ est l'ensemble des parties de H.
- (T,Σ,μ) espace mesuré.
- $L^P(T,H,\mu)$ l'espace des applications p^{me} intégrable $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ définies sur T à valeurs dans H, muni de la norme

$$\|f(.)\|_{L^p} = \left(\int_T \|f(t)\|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $C([0,T],H)$ l'espace de toutes les applications continues définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H muni de la norme

$$\|f(.)\|_C = \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|.$$

1.2 Notions sur les Multi-applications.

Nous donnons dans cette section quelques définitions concernant les multi-applications, aussi appelées correspondances, applications multivoques ou multifonctions, pour une étude détaillée à propos de ce sujet on peut se référer à [1], [2], [7] et [17],

Définition 1.1. *Soient T, Y deux ensembles non vides, on appelle multi-application définie sur T à valeurs dans Y , toute application de T ayant ses valeurs dans 2^Y. On note*

$$F : T \rightrightarrows Y \, ou \, F : T \to 2^Y.$$

C'est à dire $\forall t \in T$, $F(t)$ est un sous ensemble de Y.

Définition 1.2. *Soit $F : T \to 2^Y$ une multi-application.*

1. *On appelle domaine de F qu'on note $D(F)$ l'ensemble suivant*

$$D(F) = \{t \in T; F(t) \neq \emptyset\}.$$

2. *On appelle image de F qu'on note $R(F)$ l'ensemble*

$$R(F) = \{x \in Y; \exists t \in T, x \in F(t)\} = \bigcup_{t \in D(F)} F(t).$$

3. *La multi-application inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows T$ est définie par*

$$t \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(t),$$
$$F^{-1}(y) = \{t \in T; y \in F(t)\}, \forall y \in Y.$$

4. *On appelle graphe de F qu'on note $Gr(F)$, le sous ensemble de $T \times Y$ défini par*

$$Gr(F) = \{(t, y) \in T \times Y; y \in F(t)\}.$$

5. *On a les relations suivantes :*

$$D(F^{-1}) = R(F), \; R(F^{-1}) = D(F) \; et \; (F^{-1})^{-1} = F.$$

Nous pouvons définir de nouveaux opérations à partir des propriétés suivantes pour la somme, la multiplication par un scalaire pour les opérateurs multivoques,

- Pour $S, F : T \to 2^Y$,

$$(S + F)(x) = S(x) + F(x).$$

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F : T \to 2^Y$,

$$(\lambda \; F)(x) = \lambda \; F(x).$$

Définition 1.3. *Pour une fonction $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ propre, le sous-différentiel de f est l'opérateur multivoque noté $\partial f : H \to 2^H$ défini par*

$$\partial f(x) := \{x' \in H, \; f(y) \geq f(x) + \langle x', y - x\rangle \; \forall y \in H\}.$$

Les éléments du sous-différentiel sont appelés sous-gradients.
*On dit que f est **sous-différentiable** au point x **si et seulement si** $\partial f(x) \neq \emptyset$.*

Définition 1.4. *Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique* (X, d).

- *On a* $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y)$.
- *On appelle* **écart** *entre A et B que l'on note e(A,B) la quantité définie par*

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} d(x, y) \right).$$

- *On appelle* **distance de Hausdorff** *entre A et B et on la note* $d_H(A, B)$ *la quantité définie par*

$$d_H(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Remarquons que $d_H(A, B) = d_H(B, A)$.

1.3 Quelques notions sur l'analyse convexe et fonctions semi continue inférieurement

Les résultats suivants sont pris des références [4] et [17] .
Soit E un espace vectoriel et A un sous ensemble non vide de E.

Définition 1.5. *On dit que A est* ***convexe*** *si et seulement si,*

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda) y \in A \Leftrightarrow \lambda A + (1 - \lambda) A \subset A, \ \forall \ \lambda \in [0, 1].$$

Autrement dit, pour tout $(x, y) \in A^2$, *le segment de droite*

$$[x, y] = \lambda x + (1 - \lambda) y : \lambda \in [0, 1] \subset A.$$

Rappel sur les fonctions convexes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.6. *Soit* $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, *on dit que* f *est* ***convexe*** *sur I si et seulement si,*

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

f *est dite* ***strictement convexe*** *si l'inégalité est stricte,*

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda) y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Définition 1.7. *le* ***domaine effectif*** *de* f *est l'ensemble noté* $D(f)$ *et définie par*

$$D(f) = \{x \in E, f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.8. *Soit $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$, on dit que f est* ***propre*** *si et seulement si $f(x) \neq -\infty$, pour tout $x \in E$ et $\exists\, x_0 \in E$ tel que $f(x_0) < +\infty$.*
Alors une fonction $f : E \to]-\infty, +\infty]$ est ***propre*** *si et seulement si $D(f) \neq \emptyset$.*

Proposition 1.9. *Soit $f : E \to]-\infty, +\infty]$. Alors la fonction f est dite* ***convexe*** *si et seulement si,*

$$\forall x, y \in D(f), \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Définition 1.10. ***L'épigraphe*** *de f est l'ensemble défini par*

$$Epi(f) = \{(x,r) \in E \times \mathbb{R}; f(x) \leq r\}.$$

Proposition 1.11. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f est convexe* ***si et seulement si*** *son épigraphe est convexe.*

Définition 1.12. *Soit $C \subset E$, alors la* ***fonction indicatrice*** *de C, noté i_C est définie par*

$$\begin{aligned} i_C : &E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ &x \longmapsto i_C(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in C \\ +\infty & sinon \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 1.13. *Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors*

1. *f est dite* ***semi-continue inférieurement (s.c.i)*** *au point $x_0 \in H$ si,*

$$\forall\ h \in \mathbb{R},\ h < f(x_0),\ \exists\ V \in V(x_0), \forall\ x \in V,\ h < f(x).$$

2. *f est dite* ***semi-continue supérieurement (s.c.s)*** *au point $x_0 \in H$ si,*

$$\forall\ h \in \mathbb{R},\ h > f(x_0),\ \exists\ V \in V(x_0), \forall\ x \in V,\ h > f(x).$$

Définition 1.14. *Soient $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in H$, alors*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{v \in V(x_0)} [\inf_{x \in v} f(x)].$$

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{w \in V(x_0)} [\sup_{x \in w} f(x)].$$

Proposition 1.15. *Soient $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in H$. Alors*

1. *f est s.c.i au point $x_0 \Leftrightarrow \liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$.*
2. *f est s.c.s au point $x_0 \Leftrightarrow \limsup\limits_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$.*

Proposition 1.16. *Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *f est s.c.i sur H,*
2. *les ensembles de niveaux $A_\lambda(f) = \{x \in H,\ f(x) \leq \lambda\ \}, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ sont fermés,*
3. *$epi(f)$ est fermé.*

Proposition 1.17. *Soit $f : H \to [-\infty, +\infty]$, alors $f \in \Gamma_0(H)$.*

1.4 Adjoint d'un opérateur et fonction conjuguée

les résultats suivants sont pris de la référence [4] et [17] .

Définition 1.18. *L'application A^* définie de H_2 à valeurs dans H_1 par*

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle,$$

*est appelée **l'adjoint** de A.*

Proposition 1.19. *Soit H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et soit $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, alors pour tout $y \in H_2$, il existe un unique $z \in H_1$ tels que*

$$\forall x \in H_1, \langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle,$$

on note $z = A^* y$.

Proposition 1.20. *Soit $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, alors $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ et $\|A^*\| = \|A\|$.*

Proposition 1.21. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

1. *$(I_{H_1})^* = I_{H_1}$.*
2. *$A^{**} = A$.*
3. *$\|A^* A\| = \|AA^*\| = \|A\|$.*

Définition 1.22. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.*
*On appelle fonction **conjuguée** de f la fonction notée f^* définie par :*

$$\begin{aligned} f^* :& E' \to \overline{\mathbb{R}} \\ & x' \longmapsto f^*(x') = \sup_{x \in E}[\langle x', x\rangle - f(x)], \end{aligned}$$

la fonction conjuguée de f^* est la fonction notée f^{**} définie par :

$$\begin{aligned} f^{**} :& E \to \overline{\mathbb{R}} \\ & x \longmapsto f^{**}(x) = \sup_{x' \in E'}[\langle x', x\rangle - f^*(x')]. \end{aligned}$$

Proposition 1.23. *Soient $f_1, f_2 : E \to \overline{\mathbb{R}}$, alors*

1. $f(x) + f^*(x') \geqslant \langle x', x\rangle$,$\forall x \in E$,$\forall x' \in E$ *(cette inégalité est connue par l'inégalité de Young-Fenchel).*
2. $f^*(x') + f^{**}(x) \geqslant \langle x', x\rangle$,$\forall x \in E$,$\forall x' \in E'$.
3. $f^{**} \leqslant f$.
4. $f_1 \leqslant f_2 \Rightarrow f_1^* \geqslant f_2^*$.
5. $f^*(0) = \sup(-f) = -\inf(f)$.

Proposition 1.24. *Soient $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) \in \mathbb{R}$, et soit $x' \in X'$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $x' \in \partial f(x_0)$,
2. $f^*(x') + f(x_0) \leq \langle x', x_0\rangle$,
3. $f^*(x') + f(x_0) = \langle x', x_0\rangle$.

De plus $\partial f(x_0)$ est un sous ensemble ***convexe fermé*** *de X'.*

1.5 Topologie faible

les résultats suivants sont pris de la référence [5].
Soient X un espace de Banach et X' son dual topologique.

Définition 1.25. *Soit $f \in X'$, et considérons la fonction*

$$\begin{aligned} \varphi_f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = f(x) := \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

Lorsque f décrit X' nous obtenons une famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$ définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On appelle ***la topologie faible*** *sur X la topologie la moins fine rendant les applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$ continues et on la note $\sigma(X, X')$.*

Remarque.

1. *X étant un espace de Banach, X est muni d'une norme (donc d'une distance) et alors on définit la topologie associée à cette norme, cette topologie sera dite* ***topologie forte****.*
2. *Les ouverts (resp. fermés) faibles (pour $\sigma(X, X')$) sont aussi des ouverts (resp. fermés) pour la topologie forte.*

Proposition 1.26. *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de* X.

1. *La suite* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *converge vers* x *pour* $\sigma(X,X')$ *(ou faiblement) si et seulement si* $(\langle f, x_n\rangle)_{n\geqslant 1}$ *converge vers* $\langle f, x\rangle$ *pour tout* $f \in X'$.
2. *Si* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *converge fortement vers* x, *alors* $(x_n)_n$ *converge faiblement vers* x.
3. *Si* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *converge faiblement vers* x *alors* $\|x_n\|$ *est bornée et nous avons*
$$\|x\| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|.$$
4. *Si* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *converge faiblement vers* x *et* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge fortement vers* f *dans* X', *alors* $(\langle f_n, x_n\rangle)_{n\geqslant 1}$ *converge vers* $\langle f, x\rangle$.

Proposition 1.27. *Lorsque* X *est de dimension finie, la topologie forte de* X *et la topologie faible* $\sigma(X,X')$ *coïncident. En particulier, une suite* $(x_n)_n \subset X$ *converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

1.6 Fonctions à variation bornée

Les résultats suivants sont pris des référence [6], [8] et [10].

Définition 1.28. f *est une fonction de* $[0,T]$ *dans* H, *on appelle* ***variation totale*** *de* f *sur* $[0,T]$ *l'expression*

$$Var(f,[0,T]) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\|f(a_k)-f(a_{k-1})\| \text{ pour toutes les subdivisions } 0=a_0<a_1<\ldots<a_n=T\right\}.$$

Si $Var(f,[0,T])<+\infty$, *on dit que* f *est à* ***variation bornée***, *on désigne par* $VB([0,T],H)$ *l'espace des fonctions à variation bornée de* $[0,T]$ *dans* H.

Définition 1.29. *Une application* f *définie sur* I *à valeurs dans un espace vectoriel normé* $(E,\|\cdot\|)$ *est dite* ***absolument continue*** *si pour tout* $\varepsilon>0$ *il existe* $\mu>0$ *tel que pour toute famille finie d'intervalle ouverts disjoints deux à deux de* I ; $(]a_i,b_i[)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, *nous avons*
$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\leq\mu \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\|f(b_i)-f(a_i)\|\leq\varepsilon\,.$$

Proposition 1.30. *Si* f *est absolument continue, alors* f *est à variation bornée.*

Proposition 1.31. *Toute fonction à variation bornée est bornée.*

Définition 1.32. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to H$. La limite à droite de f au point $t \in I$ est définie par $\lim\limits_{s \downarrow t} f(s)$ et on note*

$$\lim_{s \downarrow t} f(s) = f^+(t).$$

La limite à gauche de f au point $t \in I$ est définie par $\lim\limits_{s \uparrow t} f(s)$ et on note

$$\lim_{s \uparrow t} f(s) = f^-(t).$$

Si $f^+(t)$ existe alors on dit que f est continue à droite et on a

$$f(t) = f^+(t).$$

Si $f^-(t)$ existe alors on dit que f est continue à gauche et on a

$$f(t) = f^-(t).$$

Définition 1.33. *Soit $f \in VB(I, H)$. La mesure de Stieltdjes d'un sous intervalle non vide $[a, b] \subset I$ est donnée par*

$$df([a, b]) = \int_{[a,b]} df = \int 1\!\!I_{[a,b]}\, df = f^+(b) - f^-(a).$$

Proposition 1.34. *Soit $f \in VB(I, H)$ et soit $[a, b]$ un sous intervalle non vide de I. Alors on a*

1. $df(\{a\}) = \int_{\{a\}} df = f^+(a) - f^-(a).$
2. $df([a, b[) = f^-(b) - f^-(a).$
3. $df(]a, b]) = f^+(b) - f^+(a).$
4. $df(]a, b[) = f^-(b) - f^+(a).$

1.7 Quelques résultats utiles

Théorème 1.35. ***(Théorème de Projection)*** *Voir [5] .*
Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert et soit A un sous ensemble convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe $x' \in A$ tel que

$$\|x - x'\| = d(x, A) = \inf_{z \in A} \|x - z\|.$$

x' s'appelle la projection de x sur A noté par $P(x, A)$,i.e., $x' = P(x, A)$.
De plus $P(x, A)$ est caractérisée par, $Re < x - P(x, A), z - P(x, A) > \leqslant 0 \quad \forall z \in A$.

Lemme 1.36. *Voir[4]*
Soient x et y dans H, alors

$$\langle x, y\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \|x\| \leq \|x-\alpha y\| \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1],\ \|x\| \leq \|x-\alpha y\|.$$

Lemme 1.37. ***(Lemme de Moreau)*** *Voir [16]*
la mesure vectorielle est égale à d_{u_n}, où u'_n indique une suite de fonctions en escalier,à valeurs dans la boule unitaire de H, construite à chaque intervalle $]t_i^n, t_{i+1}^n)]$ de la forme

1. *Si $r(t_{i+1}^n) = r(t_i^n)$ on prend $u'_n(t) = 0$ dans cet intervalle.*
2. *Autrement u'_n a une valeur constante*

$$\forall t \in [t_i^n, t_{i+1}^n], u'_n(t) = \frac{v(t_{i+1}^n) - v(^{(}tn_i)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)}$$

3. *En outre $u'_n(t_0) = 0$.*

Proposition 1.38. ***(Formule de Moreau)*** *Voir [10]*
Pour tout $v \in BV(I, H)$, alors Moreau a donné un résultat général pour le cas du produit scalaire donné comme suit

$$\langle 2v^-, dv^-\rangle \leqslant d\|v^2\| \leqslant \langle 2v^+, dv^+\rangle.$$

Théorème 1.39. ***(Banach-Mazur)*** *Voir [5]*
Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments qui converge faiblement vers $x \in X$ $(x_n \rightharpoonup x)$. Alors, il existe une suite $(y_n)_n$ telle que chaque y_n est une combinaison convexe des éléments de la suite $(x_k)_{k\geq n}$ qui converge fortement vers x, i.e,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k^n x_k \text{ où } \alpha_k^n \geq 0,\ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k^n = 1 \text{ et } \forall k \geq n,\ \alpha_k^n = 0.$$

Théorème 1.40. *Voir [10]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction à variation bornée définie sur $I = [0, T]$ à valeurs dans H. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée en variation et en norme, i.e il existe un $K > 0$ et $M > 0$, tels que pour tout $t \in I$

$$\|u_n(t)\| \leq K \quad et \quad Var(u_n, I) \leq M.$$

Alors il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ et une fonction $u : I \to H$ à variation bornée tels que pour tout $t \in I$

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad et \quad Var(u, I) \leq M.$$

De plus, si $(u_n)_n$ et u sont continues à droite, alors pour toute fonction à variation bornée continue ou continue à gauche $\varPhi : I \to H$ on a

$$\int_{[s,t[} \varPhi \, du_{n_k} \longrightarrow \int_{[s,t[} \varPhi \, du.$$

Si $(u_n)_n$ et u sont continues à droite, alors pour toute fonction à variation bornée continue ou continue à droite $\varPhi : I \to H$ on a

$$\int_{]s,t]} \varPhi \, du_{n_k} \longrightarrow \int_{]s,t]} \varPhi \, du.$$

Théorème 1.41. ***(Convergence dominée de Lebegue)***
Soit $(f_n)_n$ avec $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables telle que

1. *la suite $(f_n)_n$ converge vers une fonction f,*
2. *il existe une fonction intégrable g telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \ |f_n| \leqslant g$.*

alors f est intégrable et $\int |f_n - f| \to 0$.
En particulier

$$\int f_n \to \int f \quad \text{ou encore } \lim \int f_n = \int \lim f_n. \tag{1.1}$$

Lemme 1.42. ***(Lemme de Gronwall)****, Voir [9]*
Soient $(\alpha_i), (\beta_i), (\gamma_i)$ et (a_i) des suites à termes positives telles que pour tout $\mathbb{N}_0$, ait

$$a_{i+1} \leq \alpha_i + \beta_i(a_0 + ... + a_{i-1}) + (1 + \gamma_i)a_i,$$

alors

$$a_j \leq \left(a_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k\right). \exp\left(\sum_{k=0}^{j-1}(k + \beta_k\gamma_k)\right) \quad \text{pour} \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Chapitre 2

Opérateurs maximaux monotones

Dans ce chapitre nous abordons une classe importante des multifonctions appelée classe des opérateurs maximaux monotones, ou m-accretifs cette classe possède certaines propriétés intéressantes comme la fermeture du graphe et des applications très utiles comme l'unicité de solution pour des inclusions différentielles gouvernées par tels opérateurs (ce qui n'est pas le cas pour les autres multifonctions).

2.1 Opérateurs monotones

Les résultats de cette section sont pris de la référence [4].

Définition 2.1. *Soit $A : H \to 2^H$. Alors A est monotone si,*

$$\forall (x,u) \in Gr(A), \forall (y,v) \in Gr(A) \Longrightarrow \langle x-y, u-v\rangle \geq 0. \tag{2.1}$$

Un sous ensemble de $H \times H$ est monotone si c'est le graphe d'un opérateur monotone. Si A est univoque alors la condition devient

$$\langle x-y, Ax-Ay\rangle \geq 0.$$

Proposition 2.2. *Soit $A : H \to 2^H$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est monotone,*
2. *A est accretif i.e,*

$$\forall \alpha \in [0,1],\ \forall (x,u),(y,v) \in Gr(A), \|x-y+\alpha(u-v)\| \geq \|x-y\|, \tag{2.2}$$

3.

$$\forall (x,u),(y,v) \in Gr(A), \|y-u\|^2 + \|x-v\|^2 \geq \|x-u\|^2 + \|y-v\|^2. \tag{2.3}$$

Preuve.

• Montrons que (2.2) et (2.1) sont équivalentes

Soient $(x,u),(y,v) \in Gr(A)$, alors on a $u \in Ax$ et $v \in Ay$,

A est monotone, alors

$$\begin{aligned} \langle x-y, u-v\rangle &\geq 0 \\ \langle x-y, -(v-u)\rangle &\geq 0 \\ -\langle x-y, v-u\rangle &\geq 0 \\ \langle x-y, v-u\rangle &\leq 0, \end{aligned}$$

en appliquant le Lemme 1.36 pour $\alpha \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ on obtient

$$\|x-y\| \leq \|x-y+\alpha(v-u)\|,$$

d'où (2.1) et (2.2) sont équivalentes.

• Montrons que (2.1) et (2.3) sont équivalentes

Soient $(x,u),(y,v) \in Gr(A)$, on a

$$\|y-u\|^2 + \|x-v\|^2 \geq \|x-u\|^2 + \|y-v\|^2$$

d'après les propriétés de la norme

$$\begin{aligned} \|y-u\|^2 + \|x-v\|^2 &= \|y\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle y,v\rangle + \|x\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle x,v\rangle \\ \|x-u\|^2 + \|y-v\|^2 &= \|x\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle x,u\rangle + \|y\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle y,v\rangle, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \|y\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle y,v\rangle + \|x\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle x,v\rangle &\geq \|x\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle x,u\rangle + \|y\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle y,v\rangle \\ -2\langle y,u\rangle - 2\langle x,v\rangle + 2\langle x,u\rangle + 2\langle y,v\rangle &\geq 0 \\ 2\langle x,u-v\rangle - 2\langle y,u-v\rangle &\geq 0 \\ \langle x-y,u-v\rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Donc A est monotone. ■

Proposition 2.3. *Soit $A : H \to 2^H$ un opérateur monotone et soit $\gamma \in \mathbb{R}_+$. Alors les opérateurs A^{-1}, γA sont monotones.*

Preuve.

1. Montrons que A^{-1} est monotone.

   Soient $(y_1, u_1), (y_2, u_2) \in Gr(A^{-1})$, on a

$$(y_1, u_1) \in Gr(A^{-1}) \Leftrightarrow u_1 \in A^{-1}y_1 \Leftrightarrow y_1 \in Au_1,$$
$$(y_2, u_2) \in Gr(A^{-1}) \Leftrightarrow u_2 \in A^{-1}y_2 \Leftrightarrow y_2 \in Au_2.$$

   Comme A est monotone,

$$\langle u_1 - u_2, y_1 - y_2 \rangle = \langle y_1 - y_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0.$$

   Alors A^{-1} est monotone.

2. Montrons que γA est monotone.

   Soient $(y_1, u_1), (y_2, u_2) \in Gr(\gamma A)$, alors $u_1 \in (\gamma A)y_1$ et $u_2 \in (\gamma A)y_2$ donc,

$$u_1 \in (\gamma A)y_1 \Leftrightarrow \exists v_1 \in A(y_1) \text{ tel que } u_1 = \gamma v_1$$
$$u_2 \in (\gamma A)y_2 \Leftrightarrow \exists v_2 \in A(y_2) \text{ tel que } u_2 = \gamma v_2,$$

   par la monotone de A on a,

$$\begin{aligned}\langle y_1 - y_2, u_1 - u_2 \rangle &= \langle y_1 - y_2, \gamma v_1 - \gamma v_2 \rangle \\ &= \langle y_1 - y_2, \gamma(v_1 - v_2) \rangle \\ &= \gamma \langle y_1 - y_2, v_1 - v_2 \rangle \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

   d'où,

$$\langle y_1 - y_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0.$$

   γA est monotone $\forall \gamma \in \mathbb{R}_+$.

$\blacksquare$

Proposition 2.4. *K est un espace de Hilbert réel, $A : H \to 2^H$ et $B : K \to 2^K$ deux opérateurs monotones, soit $L \in \mathcal{B}(H, K)$, alors $A + L^*BL$ est monotone.*
***En particulier**, si A et B sont monotones alors $A + B$ est monotone.*

Preuve. Soient $x, y \in H$, $u \in (A + L^*BL)x$ et $v \in (A + L^*BL)y$.

$$u \in (A + L^*BL)x \Leftrightarrow \exists u_1 \in Ax \;\; et \;\; u_2 \in (L^*BL)x \;\text{ tel que }\; u = u_1 + u_2.$$
$$u_2 \in (L^*BL)x \Leftrightarrow \exists u_3 \in B(Lx) \text{ tel que } u_2 = L^*u_3 \;\; et \;\; u = u_1 + L^*u_3$$
$$v \in (A + L^*BL)y \Leftrightarrow \exists v_1 \in Ay \;\; et \;\; v_2 \in (L^*BL)y \;\text{ tel que }\; v = v_1 + v_2$$
$$v_2 \in (L^*BL)y \Leftrightarrow \exists v_3 \in B(Ly) \text{ tel que } v_2 = L^*v_3 \;\; et \;\; v = v_1 + L^*v_3$$

$$\begin{aligned}\langle x-y, u-v\rangle &= \langle x-y, u_1+L^*u_3-v_1-L^*v_3\rangle\\ &= \langle x-y, u_1-v_1\rangle + \langle x-y, L^*u_3-L^*v_3\rangle,\end{aligned}$$

comme A est monotone alors

$$\langle x-y, u_1-v_1\rangle \geqslant 0,$$

donc

$$\begin{aligned}\langle x-y, u-v\rangle &\geqslant \langle x-y, L^*u_3-L^*v_3\rangle\\ &= \langle L(x)-L(y), u_3-v_3\rangle\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

D'où $A+L^*BL$ est monotone. ■

Proposition 2.5. *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est monotone,*
2. *A^* est monotone,*
3. *$A+A^*$ est monotone.*

Preuve. 1. Supposons que A est monotone et montrons que A^* est monotone.
Dans ce cas il faut montrer que $\langle x-y, A^*x-A^*y\rangle \geq 0$, $\forall x, y \in H$.
Soient $x, y \in H$,

$$\langle x-y, A^*x-A^*y\rangle = \langle x-y, A^*(x-y)\rangle$$

comme $A \in \mathcal{B}(H)$, alors

$$\begin{aligned}\langle x-y, A^*(x-y)\rangle &= \langle A(x-y), x-y\rangle\\ &= \langle Ax-Ay, x-y\rangle\\ &= \langle x-y, Ax-Ay\rangle\end{aligned}$$

comme A est monotone alors

$$\langle x-y, Ax-Ay\rangle \geq 0.$$

D'où la monotonie de A^*.
2. Supposons que A^* est monotone et montrons que $A+A^*$ est monotone.
D'abord on a déjà prouvé que A est monotone $\Longrightarrow$ A^* est monotone,
et d'après la Proposition 2.4 le cas particulier pour $B = A^*$ on trouve que $A+A^*$ est

monotone.

3. Supposons que $A + A^*$ est monotone et montrons que A est monotone.

Soient $x, y \in H$, alors

$$\begin{aligned}
\langle x - y, (A + A^*)x - (A + A^*)y \rangle &\geq 0\\
\langle x - y, Ax - Ay + A^*x - A^*y \rangle &\geq 0\\
\langle x - y, Ax - Ay \rangle + \langle x - y, A^*x - A^*y \rangle &\geq 0\\
\langle x - y, Ax - Ay \rangle + \langle x - y, A^*(x - y) \rangle &\geq 0\\
\langle x - y, Ax - Ay \rangle + \langle A(x - y), x - y \rangle &\geq 0\\
\langle x - y, Ax - Ay \rangle + \langle x - y, Ax - Ay \rangle &\geq 0\\
2\langle x - y, Ax - Ay \rangle &\geq 0.
\end{aligned}$$

Donc A est monotone. ■

Dans la suite on va donner quelque exemple sur les opérateurs monotones.

Exemple 2.6. *Soit $f : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre. Alors le sous différentiel noté ∂f est monotone.*

Preuve. Soient $x, y \in H$ et soient $u \in \partial f(x)$ et $v \in \partial f(y)$. Alors,

$$u \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \langle y - x, u \rangle, \tag{2.4}$$

$$v \in \partial f(y) \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) + \langle x - y, v \rangle. \tag{2.5}$$

En additionnant (2.4) et (2.5) on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) + f(y) + \langle y - x, u \rangle + \langle x - y, v \rangle &\leq f(x) + f(y)\\
\langle -x + y, u \rangle + \langle x - y, v \rangle &\leq 0\\
\langle x - y, u \rangle - \langle x - y, v \rangle &\geq 0\\
\langle x - y, u \rangle + \langle x - y, -v \rangle &\geq 0\\
\langle x - y, u - v \rangle &\geq 0.
\end{aligned}$$

D'où ∂f est monotone. ■

Exemple 2.7. *Soit D un sous ensemble non vide de H et soient $T : D \to H$, $\alpha \in]0, 1/2]$. T est dit α-**moyenné** si,*

$$\|Tw - Ty\|^2 + (1 - 2\alpha)\|x - y\|^2 \leq 2(1 - \alpha)\langle x - y, Tx - Ty \rangle. \tag{2.6}$$

Alors T est monotone si T est α-moyenné.

Preuve. Montrons que T est monotone.

Soient $\alpha \in]0, 1/2]$, $x, y \in D$.

T est α-moyenné, en utilisant l'inégalité (2.6) on obtient

$$\langle x - y, Tx - Ty\rangle \geq \frac{\|Tw - Ty\|^2 + (1 - 2\alpha)\|x - y\|^2}{2(1 - \alpha)}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha \in]0, 1/2] &\Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq 1/2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 2\alpha \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 1 - 2\alpha \leq 1. \end{aligned}$$

De plus la norme $\|.\|$ est toujours positive, $2(1 - \alpha) > 0$ et $1 - 2\alpha \geq 0$. Alors

$$\langle x - y, Tx - Ty\rangle \geq 0,$$

d'où la monotonie de T. ■

Exemple 2.8. *Soit C un sous ensemble non vide de H fermé et soit P_C la projection sur C. Alors P_C est monotone.*

Preuve. Soient $(x, u), (y, v) \in Gr(P_C)$, alors $u \in P_C(x)$ et $v \in P_C(y)$,
par la Définition de la Projection on a,

$$\|x - P_C(x)\| = d(x, C) = \inf_{v \in C} \|x - v\|,$$

$$\|y - P_C(y)\| = d(y, C) = \inf_{u \in C} \|y - u\|.$$

On a,

$$u \in P_C(x) \Rightarrow \|x - u\| = d(x, C) \leq \|x - v\| \Rightarrow \|x - u\|^2 \leq \|x - v\|^2, \tag{2.7}$$

$$v \in P_C(y) \Rightarrow \|y - v\| = d(y, C) \leq \|y - u\| \Rightarrow \|y - v\|^2 \leq \|y - u\|^2, \tag{2.8}$$

en additionnant (2.7) et (2.8) on obtient

$$\|x - u\|^2 + \|y - v\|^2 \leq \|y - u\|^2 + \|x - v\|^2.$$

De la Proposition 2.2 il résulte que P_C est monotone. ■

Exemple 2.9. *Soit $A : H \to H$ linéaire. Alors A est monotone si et seulement si,*

$$\forall x \in H, \quad \langle x, Ax\rangle \geq 0.$$

Preuve. Supposons que A est monotone et montrons que $\langle x, Ax\rangle \geq 0$.
Soient $x, y \in H$, on a A linéaire alors pour tout $x, y \in H$ nous avons

$$A(x+y) = Ax + Ay,$$

Comme A est monotone et linéaire alors

$$\langle x-y, Ax-Ay\rangle \geq 0$$
$$\langle x-y, A(x-y)\rangle \geq 0,$$

En particulier pour $y = 0 \in H$ on obtient

$$\langle x, Ax\rangle \geq 0.$$

D'où le résultat.
Maintenant supposons que $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ et montrons que A est monotone.
Soit $y, z \in H$, posons $w = y - z \in H$ (car H est un espace vectoriel),
puisque A est linéaire alors

$$\begin{aligned}\langle y-z, Ay-Az\rangle &= \langle y-z, A(y-z)\rangle \\ &= \langle w, Aw\rangle \geq 0,\end{aligned}$$

donc

$$\langle y-z, Ay-Az\rangle \geq 0.$$

D'où A est monotone. ■

2.2 Opérateurs maximaux monotones

Les définitions et les propriétés suivantes sont pris des références [1], [3], [4] et [6].

Définition 2.10. *Soit $A : H \to 2^H$, A est dit maximal monotone si A est monotone et il n'existe aucun autre opérateur monotone $B : H \to 2^H$, tel que $Gr(A) \subset Gr(B)$, i.e, pour tout $(x,u) \in H^2$*

$$(x,u) \in Gr(A) \Longleftrightarrow \forall\ (y,v) \in Gr(A), \quad \langle x-y, u-v\rangle \geq 0.$$

Définition 2.11. *Soit $D \subset H$, $A : D \subset H \to 2^H$ on dit que A est une contraction si,*

$$\forall (x,u), (y,v) \in Gr(A), \quad \|u-v\| \leq \|x-y\|.$$

Proposition 2.12. *Soit A un opérateur de H. On a l'équivalence entre les trois propriétés suivantes*

1. *A est maximal monotone.*
2. *A est monotone et $R(I_d + A) = H$.*
3. *Pour tout $\lambda > 0$, $(I_d + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H tout entier.*

Preuve.

1. Supposons que pour tout $\lambda > 0$, $(I_d + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H et montrons que A est monotone et $R(I_d + A) = H$.
   On a $(I_d + \lambda A)^{-1}$ est une contraction alors,
   $$\forall (u, x), (v, y) \in Gr((I_d + \lambda A)^{-1}), \ \|x - y\| \leq \|u - v\|,$$
   $$x = (I_d + \lambda A)^{-1} u \Leftrightarrow u \in (I_d + \lambda A)x \Rightarrow u \in x + \lambda Ax.$$
   $$y = (I_d + \lambda A)^{-1} v \Leftrightarrow v \in (I_d + \lambda A)y \Rightarrow v \in y + \lambda Ay.$$
   Alors
   $$\|x - y\| = \|(I_d + \lambda A)^{-1} u - (I_d + \lambda A)^{-1} v\| \leqslant \|u - v\|$$
   donc,
   $$\begin{aligned} \|x - y\| \leq \|u - v\| &\leq \|x + \lambda Ax - y - \lambda Ay\| \\ &\leq \|x - y + \lambda(Ax - Ay)\|. \end{aligned}$$
   D'après la Proposition 2.2 on déduit que A est monotone.
   Pour tout $\lambda > 0$ $(I_d + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie de H dans H donc $R(I_d + \lambda A) = D((I_d + \lambda A)^{-1})$ alors $R(I_d + \lambda A) = H$, en particulier pour $\lambda = 1$ on trouve $R(I_d + A) = H$.
2. Supposons que A est monotone et que $R(I_d + A) = H$ et montrons que A est maximal monotone.
   Pour cela il suffit de prouver que $(x, u) \in Gr(A)$.
   Soit $(x, u) \in H^2$, alors $x + u \in H$ et comme A est monotone alors
   $$\langle x - x', u - u' \rangle \geq 0, \quad \forall \ (x', u') \in Gr(A) \tag{2.9}$$
   par hypothèse $R(I_d + A) = H$ donc d'après la Définition 1.2 il existe x' tel que $x + u \in (I_d + A)x'$.
   En outre
   $$\exists \ u' \in Ax' \ \text{ tel que } \ x + u = x' + u' \in (I_d + A)x', \tag{2.10}$$

d'une part d'après la relation (2.10) on trouve

$$\begin{aligned}\langle x'-x, u'-u\rangle &= \langle x'-x, x-x'\rangle \\ &= -\langle x'-x, x'-x\rangle \\ &= -\|x'-x\|^2 \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

D'autre part nous avons d'après l'inégalité (2.9) que

$$\langle x'-x, u'-u\rangle = -\|x'-x\|^2 \geq 0$$

alors

$$\|x'-x\| = 0,$$

d'où $x' = x$, en remplaçant dans (2.9) il résulte que $u' = u$

On conclut que $(x,u) = (x',u') \in Gr(A)$, alors A est maximal monotone.

3. Supposons que A est maximal monotone et montrons que $(I_d + \lambda A)^{-1}$ est une contraction.

   On pose $x_\mu = (I_d + \lambda A)^{-1}x$ et $y_\mu = (I_d + \lambda A)^{-1}y$ alors

$$x \in (I_d + \lambda A)x_\mu \tag{2.11}$$

$$y \in (I_d + \lambda A)y_\mu, \tag{2.12}$$

en faisant la soustraction (2.12) de (2.11) alors

$$x - y \in x_\mu - y_\mu + \lambda(Ax_\mu - Ay_\mu),$$

multiplions par $(x_\mu - y_\mu)$ on trouve

$$(x-y)(x_\mu - y_\mu) \in (x_\mu - y_\mu)(x_\mu - y_\mu) + \lambda(Ax_\mu - Ay_\mu)(x_\mu - y_\mu),$$

pour $x' \in Ax_\mu$ et $y' \in Ay_\mu$ on obtient

$$\begin{aligned}\langle x-y, x_\mu - y_\mu\rangle &= \langle x_\mu - y_\mu, x_\mu - y_\mu\rangle + \lambda\langle x'-y', x_\mu - y_\mu\rangle \\ &= \|x_\mu - y_\mu\|^2 + \lambda\langle x'-y', x_\mu - y_\mu\rangle,\end{aligned}$$

comme A est monotone alors $\langle x'-y', x_\mu - y_\mu\rangle \geq 0$, d'où

$$\langle x-y, x_\mu - y_\mu\rangle \geq \|x_\mu - y_\mu\|^2,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\|x-y\|\|x_\mu - y_\mu\| \geq \|x_\mu - y_\mu\|^2,$$

Alors

$$\|x_\mu - y_\mu\| \leq \|x-y\|.$$

On conclut que $(I_d + \lambda A)^{-1}$ est une contraction. ■

Proposition 2.13. *Soient $A : H \to 2^H$ et $B : K \to 2^K$ deux opérateurs maximaux monotones, alors $A \times B : H \times K \to 2^H \times 2^K$, $(x, y) \longmapsto Ax \times By$ est maximal monotone.*

Proposition 2.14. *$A : H \to 2^H$ est un opérateur maximal monotone et $\gamma > 0$ alors A^{-1} et γA sont maximaux monotones.*

Preuve.

1. Montrons que A^{-1} est maximal monotone.

   Nous avons déjà montré que A^{-1} est monotone cela implique que

$$\forall (x,u),(y,v) \in Gr(A^{-1}),\ \langle x-y, u-v\rangle \geq 0.$$

   Soit $(x, u) \in H^2$ tel que,

$$\langle x-y, u-v\rangle \geq 0, \quad \forall (y,v) \in Gr(A^{-1}),$$

   alors

$$\langle x-y, u-v\rangle \geq 0, \quad \forall v \in A^{-1}y,$$

   donc

$$\langle u-v, x-y\rangle \geq 0, \quad \forall y \in Av,$$

   par la maximal monotonie de A on a

$$\langle u-v, x-y\rangle \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \forall\ y \in Av &\Leftrightarrow (u,x) \in Gr(A) \\ &\Leftrightarrow (x,u) \in Gr(A^{-1}). \end{aligned}$$

   ceci implique que A^{-1} est maximal monotone.

2. Montrons que γA est maximal monotone.

Nous avons déjà montré que γA est monotone cela implique que

$$\forall (x,u),(y,v) \in Gr(\gamma A),\ \langle x-y, u-v\rangle \geq 0,$$

$$(x,u) \in Gr(\gamma A) \Leftrightarrow u \in (\gamma A)x \Leftrightarrow \exists\ u = \gamma u' \text{ tel que } u' \in Ax.$$

$$(y,v) \in Gr(\gamma A) \Leftrightarrow v \in (\gamma A)y \Leftrightarrow \exists\ u = \gamma v' \text{ tel que } v' \in Ay.$$

Soit$(x, u) \in H^2$, alors

$$\begin{aligned}
&\langle x-y, u-v\rangle \geq 0, \quad \forall u \in (\gamma A)y \\
\Leftrightarrow\ &\langle x-y, \gamma u'-\gamma v'\rangle \geq 0,\ \forall \gamma v' \in (\gamma A)y \\
\Leftrightarrow\ &\langle x-y, \gamma(u'-v')\rangle \geq 0,\ \forall \gamma v' \in (\gamma A)y \\
\Leftrightarrow\ &\ \gamma\langle x-y, u'-v'\rangle\ \geq 0,\ \forall \gamma v' \in (\gamma A)y.
\end{aligned}$$

On a A est maximal monotone alors

$$\langle x-y, u'-v'\rangle \geq 0, \quad \forall\ v' \in Ay \Leftrightarrow (x, u') \in Gr(A).$$

Comme $\gamma > 0$ donc

$$\begin{aligned}
\gamma\langle x-y, u'-v'\rangle \geq 0, \quad \forall\ \gamma v' \in (\gamma A)y &\Leftrightarrow (x, \gamma u') \in Gr(\gamma A), \\
&\Leftrightarrow\ (x, u)\ \in Gr(\gamma A).
\end{aligned}$$

Alors γA est maximal monotone. ∎

Proposition 2.15. *$A : H \to H$ est dit hemicontinue si,*

$$\forall (x, y, z) \in H^3, \quad \lim_{\alpha \downarrow 0} \langle z, A(x+\alpha y)\rangle = \langle z, Ax\rangle,$$

A est maximal monotone si A est monotone et hemicontinue.

Preuve. Soit $(x, u) \in H^2$, supposons que $\forall\ y \in H$, $\langle x-y, u-Ay\rangle \geq 0$
$\forall\ \alpha \in]0, 1]$, on prend $y_\alpha = x + \alpha(u - Ax)$, alors

$$\begin{aligned}
\langle x-y_\alpha, u-Ay_\alpha\rangle &= \langle x-x-\alpha(u-Ax), u-Ay_\alpha\rangle \\
&= \langle -\alpha(u-Ax), u-Ay_\alpha\rangle \\
&= -\alpha\langle u-Ax, u-Ay_\alpha\rangle,
\end{aligned}$$

alors

$$\langle u-Ax, u-Ay_\alpha\rangle = -\frac{1}{\alpha}\langle x-y_\alpha, u-Ay_\alpha\rangle \leq 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\alpha}\langle x-y_\alpha, u-Ay_\alpha\rangle &= -\frac{1}{\alpha}\langle x-x-\alpha(u-Ax), u-A(x+\alpha(u-Ax))\rangle \\
&= -\frac{1}{\alpha}\langle -\alpha(u-Ax), u-A(x+\alpha(u-Ax))\rangle \\
&= \langle u-Ax, u-A(x+\alpha(u-Ax))\rangle,
\end{aligned}$$

passant à la limite quand α tend vers 0

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\langle u - Ax, u - A(x+\alpha(u-Ax))\rangle \leq 0$$
$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\langle u - Ax, u\rangle - \lim_{\alpha\downarrow 0}\langle u - Ax, A(x+\alpha(u-Ax))\rangle \leq 0. \quad (2.13)$$

Comme A est hemicontinue alors

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\langle u - Ax, A(x+\alpha(u-Ax))\rangle = \langle u - Ax, Ax\rangle, \quad (2.14)$$

en remplaçant (2.14) dans (2.13) on aura

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\langle u - Ax, u - A(x+\alpha(u-Ax))\rangle = \langle u - Ax, u - Ax\rangle \leq 0.$$

Donc,

$$\|u - Ax\|^2 \leq 0. \quad (2.15)$$

D'une part on sait que $\|u - Ax\|^2$ est une norme alors

$$\|u - Ax\|^2 \geq 0, \quad (2.16)$$

il résulte de (2.15) et (2.16) que $\|u - Ax\|^2 = 0$, ce qui implique que $u = Ax$.
D'où A est maximal monotone. ■

Corollaire 2.16. *Tout opérateur $A : H \to H$ monotone et continue est maximal monotone.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la Proposition précédente car continue implique hemicontinue (*continue* $\Rightarrow$ *hemicontinue*), d'où vient la maximale monotonie de A. ■

Proposition 2.17. *A est un opérateur maximal monotone défini de H dans 2^H et soit $\mathcal{A}$ un opérateur défini de $D(\mathcal{A}) \subset L^2([0,T],H)$ dans $L^2([0,T],H)$ par $(\mathcal{A}x)(t) = Ax(t)$, alors $\mathcal{A}$ est maximal monotone.*

Proposition 2.18. *Soit $A : H \longrightarrow 2^H$ maximal monotone et soit $x \in H$. Alors l'ensemble défini par*

$$Ax = \bigcap_{(y,v)\in Gr(A)} \{u \in H, \langle x - y, u - v\rangle \geqslant 0\},$$

est convexe fermé.

Preuve. Soit l'ensemble B défini par

$$B = \{u \in H, \langle x-y, u-v\rangle \geqslant 0\},$$

Pour cela il suffit de montrer que B est fermé convexe.

En effet, on commence par démontrer que B est convexe.

Soient $u_1, u_2 \in B$, $\lambda \in [0,1]$.

$$u_1 \in B \Leftrightarrow u_1 \in H, \langle x-y, u_1-v\rangle \geqslant 0 \tag{2.17}$$

$$u_2 \in B \Leftrightarrow u_2 \in H, \langle x-y, u_2-v\rangle \geqslant 0, \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\langle x-y, \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 - v\rangle &= \langle x-y, \lambda(u_1-v) + (1-\lambda)u_2 - v(1-\lambda)\rangle\\ &= \langle x-y, \lambda(u_1-v) + (1-\lambda)(u_2-v)\rangle\\ &= \lambda\langle x-y, u_1-v\rangle + (1-\lambda)\langle x-y, u_2-v\rangle,\end{aligned}$$

d'après les inégalités (2.17) et (2.18) on obtient

$$\langle x-y, \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 - v\rangle \geqslant 0,$$

ceci implique que

$$\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in B.$$

On passe maintenant à montrer que B est fermé.

En effet, soit $u_n \in B$ tel que $u_n \longrightarrow u$.

$$u_n \in B \Leftrightarrow \langle x-y, u_n-v\rangle \geqslant 0, \tag{2.19}$$

en passant à la limite dans (2.19)

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty}\langle x-y, u_n-v\rangle \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \langle x-y, \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n - v\rangle \geqslant 0\\ &\Rightarrow \langle x-y, u-v\rangle \geqslant 0,\end{aligned}$$

il résulte que $u \in B$ donc B est fermé.

Comme $Ax = \bigcap\limits_{(y,v)\in Gr(A)} B$ et B convexe fermé alors Ax est convexe fermé. ■

Proposition 2.19. *Soit $A : H \to 2^H$ maximal monotone, soit $(x_b, u_b)_{b\in B}$ une suite bornée dans le graphe de A, et soit $(x,u) \in H^2$. Alors on a les assertions suivantes*

1. *Supposons que $x_b \to x$ et $u_b \rightharpoonup u$. Alors $(x,u) \in Gr(A)$,*
2. *Supposons que $x_b \rightharpoonup x$ et $u_b \to u$. Alors $(x,u) \in Gr(A)$.*

Preuve. Soient $(x_b, u_b) \in Gr(A)$ pour tout $b \in B$.
A est monotone alors

$$\langle x_b - y, u_b - v\rangle \geq 0, \quad \forall (y,v) \in Gr(A),$$

donc

$$\langle x_b, u_b\rangle - \langle y, u_b\rangle - \langle x_b, v\rangle + \langle y, v\rangle \geq 0, \quad \forall (y,v) \in Gr(A),$$

en passant à la limite quand $b \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{b\to+\infty} \langle x_b - y, u_b - v\rangle = \lim_{b\to+\infty} \langle x_b, u_b\rangle - \lim_{b\to+\infty} \langle y, u_b\rangle - \lim_{b\to+\infty} \langle x_b, v\rangle + \lim_{b\to+\infty} \langle y, v\rangle \geq 0, \tag{2.20}$$

par la Proposition 1.26 on obtient

$$x_b \to x \ et \ u_b \rightharpoonup u \ \Rightarrow \ \langle u_b, x_b\rangle \to \langle u, x\rangle,$$
$$u_b \rightharpoonup u \Longleftrightarrow \langle y, u_b\rangle \to \langle y, u\rangle, \forall\ y \in H,$$

comme $x_b \to x$ alors $\|x_b - x\| \to 0$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\langle x_b - x, v\rangle| \leq \|x_b - x\|\|v\| \longrightarrow 0,$$

alors $(\langle x_b, v\rangle)_b$ converge fortement vers $\langle x, v\rangle$, en remplaçant dans la relation (2.20) on trouve

$$\begin{aligned}\langle x, u\rangle - \langle y, u\rangle - \langle x, v\rangle + \langle y, v\rangle &\geq 0 \quad \forall (y,v) \in Gr(A)\\ \langle x, u - v\rangle - \langle y, u - v\rangle &\geq 0 \quad \forall (y,v) \in Gr(A)\\ \langle x - y, u - v\rangle &\geq 0, \quad \forall (y,v) \in Gr(A)\end{aligned}$$

D'après la maximal monotonie de A il résulte que $(x, u) \in Gr(A)$. ■

Exemple 2.20. *Soit $T : H \to H$ une contraction avec $\alpha \in [-1, 1]$. Alors $I_d + \alpha T$ est maximal monotone.*

Preuve. Toute contraction univoque est continue d'où T est continue sur H, ce qui implique que $I_d + \alpha T$ est continue sur H, $\forall\ (x, y) \in H^2$.
Montrons la monotonie de $I_d + \alpha T$.

$$\begin{aligned}\langle x - y, (I_d + \alpha T)x - (I_d + \alpha T)y\rangle &= \langle x - y, x + \alpha Tx - y - \alpha Ty\rangle\\ &= \langle x - y, x - y\rangle - \langle x - y, \alpha(Ty - Tx)\rangle\\ &= \|x - y\|^2 - \langle x - y, \alpha(Ty - Tx)\rangle. \qquad (2.21)\end{aligned}$$

$$\text{T est une contraction} \Longleftrightarrow \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in D,$$

nous avons

$$\begin{aligned}
-|\alpha|.\|x-y\|.\|Ty-Tx\| \leq & \ \langle x-y, \alpha(Ty-Tx)\rangle \ \leq |\alpha|.\|x-y\|.\|Ty-Tx\| \\
-|\alpha|.\|x-y\|^2 \leq & \ \langle x-y, \alpha(Ty-Tx)\rangle \ \leq |\alpha|.\|x-y\|^2 \\
-|\alpha|.\|x-y\|^2 \leq & -\langle x-y, \alpha(Ty-Tx)\rangle \leq |\alpha|.\|x-y\|^2,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

comme $\alpha \in [-1, 1]$ et en substituant (2.22) dans (2.21), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle x-y, (I_d + \alpha T)x - (I_d + \alpha T)y\rangle &\geq \|x-y\|^2 - |\alpha|.\|x-y\|^2 \\
&\geq \|x-y\|^2(1 - |\alpha|) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Il résulte la monotonie de $I_d + \alpha T$.
En utilisant le Corollaire 2.16 il découle que $I_d + \alpha T$ est maximal monotone. ■

2.3 La fonction Fitzpatrick

Ces résultats sont pris de la référence [4].

Définition 2.21. *Soit $A : H \to 2^H$ monotone, la fonction **Fitzpatrick** de A est définie comme suit $F_A : H \times H \to 2^H$*

$$(x, y) \longmapsto F_A(x, u) = \sup_{(y,v)\in Gr(A)} [\langle y, u\rangle + \langle x, v\rangle - \langle y, v\rangle] \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{(y,v)\in Gr(A)} [\langle y, u\rangle + \langle x, v\rangle - \langle x, u\rangle + \langle x, u\rangle - \langle y, v\rangle] \\
&= -\inf_{(y,v)\in Gr(A)} [-\langle y, u\rangle - \langle x, v\rangle + \langle x, u\rangle - \langle x, u\rangle + \langle y, v\rangle] \\
&= \langle x, u\rangle - \inf_{(y,v)\in Gr(A)} [\langle x-y, u-v\rangle].
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Exemple 2.22. *Soit $A \in B(H)$ monotone et soit $q_A : H \to R : x \longmapsto (1/2)\langle x, Ax\rangle$. Alors*

$$\forall (x, u) \in H \times H, F_A(x, u) = 2q_A^*(1/2u + 1/2A^*x). \tag{2.25}$$

Preuve. Soit $(x,u) \in H \times H$. On a

$$\begin{aligned}
F_A(x,u) &= \sup_{(y,v)\in Gr(A)} [\langle y,u\rangle + \langle x,Ay\rangle - \langle y,Ay\rangle] \\
&= \sup_{(y,v)\in Gr(A)} [\langle y,u\rangle + \langle A^*x,y\rangle - \langle y,Ay\rangle] \\
&= \sup_{(y,v)\in Gr(A)} [\langle y,u+A^*x\rangle - \langle y,Ay\rangle] \\
&= 2(\sup_{(y,v)\in H\times H} [\langle y,(1/2)u+(1/2)A^*x\rangle - (1/2)\langle y,Ay\rangle]) \\
&= 2q_A^*(1/2u+1/2A^*x).
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.23. *Soit $A : H \to 2^H$ monotone tel que $Gr(A) \neq \emptyset$, soit $(x,u) \in H \times H$. Alors on a les propriétés suivantes*

1. $F_A(x,u) = \langle x,u\rangle$ ***si*** $(x,u) \in Gr(A)$.
2. $F_A(x,u) = (\delta_{Gr(A^{-1})}(x,u) + \langle x,u\rangle)^* \in \Gamma_0(H)$.
3. $F_A(x,u) \leqslant \langle x,u\rangle$ ***si et seulement si*** $\{(x,u)\}\bigcup Gr(A)$ *est monotone.*
4. $F_A(x,u) \leqslant F_A^*(u,x)$.
5. $F_A^*(x,u) = \langle x,u\rangle$ ***si*** $(x,u) \in Gr(A)$.
6. $F_A(x,u) = F_{A^{-1}}(u,x)$.

Preuve. 1. Montrons que $F_A(x,u) = \langle x,u\rangle$ **si** $(x,u) \in Gr(A)$.

Soient $(x,u),(y,v) \in Gr(A)$.

A est monotone alors

$$\begin{aligned}
&\forall (x,u),(y,v) \in Gr(A), \langle x-y,u-v\rangle \geqslant 0 \\
\Rightarrow\ &\forall (x,u) \in Gr(A), \inf_{(y,v)\in Gr(A)} \langle x-y,u-v\rangle \geqslant 0 \\
\Rightarrow\ &\forall (x,u) \in Gr(A), -\inf_{(y,v)\in Gr(A)} \langle x-y,u-v\rangle \leq 0
\end{aligned}$$

il résulte

$$F_A(x,u) \leq \langle x,u\rangle. \tag{2.26}$$

De l'autre part on a

$$\begin{aligned}
&F_A(x,u) = \sup_{(y,v)\in Gr(A)} [\langle y,u\rangle + \langle x,v\rangle - \langle y,v\rangle] \\
\Rightarrow\ &F_A(x,u) \geq \langle y,u\rangle + \langle x,v\rangle - \langle y,v\rangle, \forall (y,v) \in Gr(A)
\end{aligned}$$

en particulier pour $(y,v)=(x,v)$ on trouve

$$\begin{aligned} F_A(x,u) &\geq \langle x,u\rangle + \langle x,v\rangle - \langle x,v\rangle \\ &= \langle x,u\rangle, \end{aligned} \tag{2.27}$$

en combinant (2.26) et (2.27) on trouve

$$F_A(x,u)=\langle x,u\rangle.$$

2. Montrons que $F_A(x,u)=(\delta_{Gr(A^{-1})}+\langle x,u\rangle)^* \in \Gamma_0(H)$.
Soit $(x,u)\in H\times H$. On a

$$\begin{aligned} (\delta_{Gr(A^{-1})}(x,u)+\langle x,u\rangle)^* &= \sup_{(x,u)\in Gr(A^{-1})} [\langle (u,x),(y,v)\rangle - (\delta_{Gr(A^{-1})}(x,u)+\langle x,u\rangle)], \\ &= \sup_{(x,u)\in Gr(A^{-1})} [\langle u,y\rangle + \langle x,v\rangle - (\delta_{Gr(A^{-1})}(x,u)+\langle x,u\rangle)], \end{aligned}$$

puisque $(x,u)\in Gr(A^{-1})$ alors

$$\begin{aligned} (\delta_{Gr(A^{-1})}(x,u)+\langle x,u\rangle)^* &= \sup_{(x,u)\in Gr(A^{-1})} [\langle u,y\rangle + \langle x,v\rangle - \langle x,u\rangle] \\ &= F_A(x,u). \end{aligned}$$

par (i) et d'après la Proposition 2.54 on obtient $F_A\in\Gamma_0(H)$.

3. Montrons que $F_A(x,u)\leqslant\langle x,u\rangle$ **si et seulement si** $\{(x,u)\}\bigcup Gr(A)$ est monotone.
— Montrons que si $F_A(x,u)\leq\langle x,u\rangle$ alors $\{(x,u)\}\bigcup Gr(A)$ est monotone.
En effet,
Soit $Gr(B)=\{(x,u)\}\bigcup Gr(A)$, soients $(z,w),(y,v)\in Gr((B)$.
(a) si $(z,w),(y,v)\in Gr(A)$ et A monotone alors

$$\langle z-w, w-v\rangle \geq 0,$$

(b) si $(z,w)=(x,u)$ on trouve

$$\begin{aligned} F_A(x,u) = \sup_{(y,v)\in Gr(A)} [\langle y,u\rangle + \langle x,v\rangle - \langle y,v\rangle] &\leq \langle x,u\rangle \\ \langle y,u\rangle + \langle x,v\rangle - \langle y,v\rangle &\leq \langle x,u\rangle, \forall (y,v)\in Gr(A) \\ \langle y,u-v\rangle &\leq \langle x,u-v\rangle, \forall (y,v)\in Gr(A) \\ 0 &\leq \langle x-y,u-v\rangle, \forall (y,v)\in Gr(A) \end{aligned}$$

alors $\{(x,u)\}\bigcup Gr(A)$ est monotone.

— Montrons que si $\{(x,u)\}\bigcup Gr(A)$ est monotone alors $F_A(x,u) \leq \langle x,u\rangle$.
En effet,
Soient $(x,u) \in Gr(A)$, $(y,v) \in Gr(A)$.
On a $\{(x,u)\}\bigcup Gr(A)$ est monotone alors $Gr(A)$ est monotone,

$$\begin{aligned}
\langle x-y, u-v\rangle &\geq 0 \\
\langle x,u\rangle - \langle x,v\rangle - \langle y,u\rangle + \langle y,v\rangle &\geq 0 \\
\langle x,u\rangle &\geq \langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle - \langle y,v\rangle, \forall (y,v) \in Gr(A) \\
\langle x,u\rangle &\geq \sup_{(y,v\in Gr(A))} [\langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle - \langle y,v\rangle] \\
&= F_A(x,u),
\end{aligned}$$

par conséquent

$$F_A(x,u) \leq \langle x,u\rangle.$$

4. Montrons que $F_A(x,u) \leqslant F_A^*(u,x)$.
Soit $(x,u) \in Gr(A)$. On a

$$F_A(x,u) = \sup_{(y,v)\in Gr(A)} [\langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle - \langle y,v\rangle]$$

d'après l'assertion (1) on obtient

$$\begin{aligned}
F_A(x,u) &= \sup_{(y,v)\in Gr(A)} [\langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle - F_A(y,v)] \\
&\leq \sup_{(y,v)\in H\times H} [\langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle - F_A(y,v)] \\
&= \sup_{(y,v)\in H\times H} [\langle (x,u),(y,v)\rangle - F_A(y,v)], \\
&= F_A^*(u,x).
\end{aligned}$$

5. Montrons que $F_A^*(x,u) = \langle x,u\rangle$ si $(x,u) \in Gr(A)$.
Soit $(x,u) \in Gr(A)$. On a

$$F_A = (\delta_{Gr(A^{-1})} + \langle .,.\rangle)^* \tag{2.28}$$

$$\Rightarrow F_A^* = (\delta_{Gr(A^{-1})} + \langle .,.\rangle)^{**},$$

en utilisant la Proposition 1.23 et l'assertion (3) on trouve

$$F_A^*(u,x) \leq \delta_{Gr(A^{-1})}(u,x) + \langle x,u\rangle, \tag{2.29}$$

et comme $(x,u) \in Gr(A) \Leftrightarrow (u,x) \in Gr(A^{-1})$ on trouve

$$F_A^*(u,x) \leqslant \langle x,u\rangle = F_A(x,u), \tag{2.30}$$

on a déja preuvé que

$$F_A(x,u) \leqslant F_A^*(u,x), \tag{2.31}$$

en combinant (2.30) et (2.31) on trouve

$$F_A^*(u,x) = F_A(x,u). \tag{2.32}$$

6. Montrons que $F_A(x,u) = F_{A^{-1}}(u,x)$.

   On a

$$\begin{aligned} F_{A^{-1}}(u,x) &= \sup_{(v,y)\in Gr(A^{-1})} [\langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle - \langle y,v\rangle] \\ &= \sup_{(y,v)\in Gr(A)} [\langle x,v\rangle + \langle y,u\rangle - \langle y,v\rangle] \\ &= F_A(x,u). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.24. *Soit $A : H \to 2^H$ maximal monotone. Alors $F_A(x,u) \geq \langle x,u\rangle$ et*

$$Gr(A) = \{(x,u) \in H\times H, F_A(x,u) = \langle x,u\rangle\}.$$

Preuve. Soit $(x,u) \in H \times H$.

1. si $(x,u) \in Gr(A)$, $F_A(x,u) = \langle x,u\rangle$ (d'après la Proposition précédente),
2. si $(x,u) \notin Gr(A)$ alors $\{(x,u)\} \bigcup Gr(A)$ n'est pas monotone, d'après la Proposition précédente $F_A(x,u) > \langle x,u\rangle$.

■

Proposition 2.25. *Soit $A : H \to 2^H$ maximal monotone, soient $x \in H$, $(x_n,u_n)_{n\in N}$ une suite dans $Gr(A)$ telle que $(x_n,u_n) \rightharpoonup (x,u)$. Alors on a les propriétés suivantes*

1. $\langle x,u\rangle \leq \liminf_{n\to+\infty}\langle x_n,u_n\rangle$.
2. *Si* $\liminf_{n\to+\infty}\langle x_n,u_n\rangle = \langle x,u\rangle$ *alors* $(x,u) \in Gr(A)$.
3. *Si* $\limsup_{n\to+\infty}\langle x_n,u_n\rangle \leq \langle x,u\rangle$ *alors* $\langle x_n,u_n\rangle \to \langle x,u\rangle$ *et* $(x,u) \in Gr(A))$.

Preuve. Soit $(x_n,u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Gr(A)$,soit $x \in H$. Alors

1. Par la Proposition 2.24 on a

$$\langle x, u\rangle \leq F_A(x, u), \tag{2.33}$$

d'après la Proposition 2.23 on a $F_A = (i_{Gr(A^{-1})} + \langle ., .\rangle)^* \in \Gamma_0(H)$ alors F_A est semi continue inférieurement en (x, u), et en utilisant la Proposition 1.15 l'assertion (1) on trouve

$$F_A(x, u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F_A(x_n, u_n) = \liminf_{n\to+\infty}\langle x_n, u_n\rangle \tag{2.34}$$

en combinant (2.33) et (2.34) on obtient

$$\langle x, u\rangle \leq \liminf_{n\to+\infty}\langle x_n, u_n\rangle.$$

2. Par (2.34) on a

$$F_A(x, u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F_A(x_n, u_n) = \liminf_{n\to+\infty}\langle x_n, u_n\rangle = \langle x, u\rangle, \tag{2.35}$$

et en combinant (2.33) et (2.35) on trouve

$$F_A(x, u) = \langle x, u\rangle,$$

par conséquent $(x, u) \in Gr(A)$.

3. On a

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle x_n, u_n\rangle \leqslant \langle\ x, u\rangle \ \textit{et}\ \langle x, u\rangle \leq \liminf_{n\to+\infty}\langle x_n, u_n\rangle,$$

alors

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle x_n, u_n\rangle = \liminf_{n\to+\infty}\langle x_n, u_n\rangle = \langle\ x, u\rangle,$$

ceci équivaut à

$$\langle x_n, u_n\rangle \to \langle x, u\rangle,$$

par l'assertion (2) on obtient $(x, u) \in Gr(A)$.

■

2.4 Approximation de Yosida

On va établir quelques propriétés et preuves reliées à l'approximation de Yosida pour les opérateurs maximaux monotones, pour plus de détails on se réfère à [1] et[6].

Dans cette section considérons A un opérateur maximal monotone, $\lambda > 0$ et A^0 est l'élément de norme minimale de A tel que $\|A^0\| = \inf\{\|y\|,\ y \in Ax\} = d(0, A)$.

Définition 2.26. *Soit $A : D(A) \subset H \to 2^H$. L'opérateur $J_\lambda = (I_d + \lambda A)^{-1}$ est appelé* ***la résolvante*** *de A pour tout $\lambda > 0$.*

Définition 2.27. *Soit $A : D(A) \subset H \to 2^H$. L'opérateur $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I_d - J_\lambda)$ est appelé* ***l'approximation de Yosida*** *de A pour tout $\lambda > 0$.*

Proposition 2.28. *A est un opérateur maximal monotone. Alors pour tout $\lambda > 0$ nous avons*

1. *A_λ est un opérateur maximal monotone, univoque et Lipschitzien de rapport $\frac{1}{\lambda}$.*
2. *Pour tout $x \in H$ on a $J_\lambda x \in D(A)$ et $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$.*

Preuve. **1)** On va prouver que A_λ est maximal monotone.

Soient $x_1, x_2 \in H$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\langle x_1 - x_2, A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \rangle \leq \|x_1 - x_2\| \|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|, \tag{2.36}$$

et

$$\begin{aligned} \langle J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \rangle &= \langle J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, \frac{1}{\lambda}(I_d - J_\lambda)x_1 - \frac{1}{\lambda}(I_d - J_\lambda)x_2 \rangle \\ &= \langle J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, \frac{1}{\lambda}(x_1 - x_2) \rangle \\ &+ \langle J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, \frac{1}{\lambda}(J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2) \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda} \langle J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, x_1 - x_2 \rangle + \frac{1}{\lambda} \|J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2\|^2. \end{aligned}$$

Par la Proposition 2.12 on conclut que la résolvante est monotone d'où

$$\langle J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \rangle \geq 0, \tag{2.37}$$

il résulte de la Définition 2.27 que $x = \lambda A_\lambda x + J_\lambda x$ et en utilisant l'inégalité (2.37) on trouve

$$\begin{aligned} \langle x_1 - x_2, A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \rangle &= \langle (\lambda A_\lambda + J_\lambda)(x_1 - x_2), A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \rangle \\ &= \langle \lambda A_\lambda x_1 - \lambda A_\lambda x_2, A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \rangle + \langle J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \rangle \\ &\geq \langle \lambda A_\lambda x_1 - \lambda A_\lambda x_2, A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \rangle \\ &\geq \lambda \langle A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \rangle \\ &\geq \lambda \|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2 \qquad (2.38) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

D'où la monotonie de A_λ.

Maintenant il suffit de prouver que A_λ est hemicontinue pour montrer que A_λ est maximal monotone,

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\downarrow 0}\langle z, A_\lambda(x+\alpha y)\rangle &= \lim_{\alpha\downarrow 0}\langle z, \frac{1}{\lambda}(I_d - J_\lambda)(x+\alpha y)\rangle \\
&= \lim_{\alpha\downarrow 0}\langle z, \frac{x+\alpha y}{\lambda} - \frac{J_\lambda(x+\alpha y)}{\lambda}\rangle \\
&= \langle z, \frac{x}{\lambda} - \frac{J_\lambda x}{\lambda}\rangle \\
&= \langle z, A_\lambda x\rangle,
\end{aligned}$$

donc A_λ est hemicontinue.

A_λ est monotone et hemicontinue alors d'après la Proposition 2.15 A_λ est maximal monotone.

Ensuite montrons que A_λ est lipschitzien de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

En combinant (2.36) et (2.38) on trouve

$$\lambda\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2 \leq \langle x_1 - x_2, A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\rangle \leq \|x_1 - x_2\|\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lambda\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2 &\leq \|x_1 - x_2\|\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\| \\
\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\| &\leq \frac{1}{\lambda}\|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Donc A_λ est lipschitzien de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

2) Soit $x \in H$, nous avons

$$\begin{aligned}
J_\lambda x = (I_d + \lambda A)^{-1}x &\Leftrightarrow x \in (I_d + \lambda A)J_\lambda x \\
&\Leftrightarrow x \in J_\lambda x + \lambda A J_\lambda x \\
&\Leftrightarrow x - J_\lambda x \in \lambda A J_\lambda x \\
&\Leftrightarrow \frac{x - J_\lambda x}{\lambda} \in A(J_\lambda x) \\
&\Leftrightarrow A_\lambda x \in A J_\lambda x.
\end{aligned}$$

Alors $J_\lambda x \in D(A)$ et $A_\lambda x \in A J_\lambda x$.

■

Proposition 2.29. *Soit A un opérateur maximal monotone. Alors pour tous $\lambda, \mu > 0$ on a*

$$(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu}.$$

Preuve. Soit $(x, y) \in Gr(A_\lambda)$, en effet

$$\begin{aligned}
y \in A_\lambda x &\iff y \in \frac{1}{\lambda}(I_d - J_\lambda)x \\
&\iff y \in \frac{x}{\lambda} - \frac{J_\lambda x}{\lambda} \\
&\iff \lambda y \in x - J_\lambda x \\
&\iff \lambda y \in x - (I_d + \lambda A)^{-1}x \\
&\iff x - \lambda y \in (I_d + \lambda A)^{-1}x \\
&\iff x \in (I_d + \lambda A)(x - \lambda y) \\
&\iff x \in x - \lambda y + \lambda A(x - \lambda y) \\
&\iff y \in A(x - \lambda y),
\end{aligned}$$

d'où

$$(x, y) \in Gr(A_\lambda) \iff (x - \lambda y, y) \in Gr(A). \tag{2.39}$$

En appliquant cette dernière (2.39) sur $A_{\lambda+\mu}$ on obtient

$$\begin{aligned}
(x, y) \in Gr(A_{\lambda+\mu}) &\iff (x - (\lambda + \mu)y, y) \in Gr(A) \\
&\iff (x - \lambda y - \mu y, y) \in Gr(A) \\
&\iff (x - \mu y, y) \in Gr(A_\lambda) \\
&\iff (x, y) \in Gr((A_\lambda)_\mu).
\end{aligned}$$

Il résulte que $(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu}$ pour tous $\lambda, \mu > 0$. ∎

Proposition 2.30. *Soit A_λ l'approximation de Yosida de A, pour tout $x \in D(A)$ on a*

1. $\|A_\lambda x - A^\circ x\|^2 \leq \|A^\circ x\|^2 - \|A_\lambda x\|^2$.
2. $\|A_\lambda x\| \leq \|A^\circ x\|$.

Preuve. 1. Montrons que $\|A_\lambda x - A^\circ x\|^2 \leq \|A^\circ x\|^2 - \|A_\lambda x\|^2$.

Soit $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned}
\|A_\lambda x - A^\circ x\|^2 &= \|A^\circ x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 - 2\langle A_\lambda x, A^\circ x\rangle \\
&= \|A^\circ x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 - 2\langle A_\lambda x, A^\circ x + A_\lambda x - A_\lambda x\rangle \\
&= \|A^\circ x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 - 2\langle A_\lambda x, A_\lambda x\rangle - 2\langle A_\lambda x, A^\circ x - A_\lambda x\rangle \\
&= \|A^\circ(x)\|^2 - \|A_\lambda x\|^2 - 2\langle A_\lambda x, A^\circ x - A_\lambda x\rangle
\end{aligned}$$

$A^\circ x$ est un élément de Ax d'où $A^\circ x \in Ax$ et $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$ alors

$$\begin{aligned}
\langle A_\lambda x, A^\circ x - A_\lambda x\rangle &= \frac{1}{\lambda}\langle x - J_\lambda x, A^\circ x - A_\lambda x\rangle \\
&= \frac{1}{\lambda}\langle x - J_\lambda x, Ax - AJ_\lambda x\rangle,
\end{aligned}$$

comme A est monotone alors

$$\langle A_\lambda x, A^\circ x - A_\lambda x\rangle \geq 0 \Longrightarrow -2\langle A_\lambda x, A^\circ x - A_\lambda x\rangle \leq 0,$$

d'où

$$\|A_\lambda x - A^\circ x\|^2 \leq \|A^\circ x\|^2 - \|A_\lambda x\|^2. \tag{2.40}$$

2. Montrons que $\|A_\lambda x\| \leq \|A^\circ x\|$.
   Soit $x \in D(A)$, d'après l'inégalité (2.40) on trouve

$$\begin{aligned} &\|A_\lambda x - A^\circ x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 \leq \|A^\circ x\|^2 \\ \Longrightarrow &\|A_\lambda x\|^2 \leq \|A^\circ x\|^2 \\ \Longrightarrow &\|A_\lambda x\| \leq \|A^\circ x\|, \end{aligned}$$

d'où le résultat . ■

Proposition 2.31. *Pour tout $x \in D(A)$, on a*

1. *$J_\lambda x$ converge vers x quand $\lambda \longrightarrow 0$.*
2. *$A_\lambda x$ converge vers $A^\circ x$ quand $\lambda \longrightarrow 0$.*

Preuve. Soit $x \in D(A)$, on a

$$\|x - J_\lambda x\| = \lambda \|A_\lambda x\|$$

de la Proposition 2.30 nous avons,

$$\|A_\lambda x\| \leq \|A^\circ x\|,$$

alors ,

$$\lambda\|A_\lambda x\| \leq \lambda\|A^\circ x\|,$$

d'où

$$\|x - J_\lambda x\| \leq \lambda\|A^\circ x\|,$$

en passant à la limite lorsque $\lambda \longrightarrow 0$,

$$\lim_{\lambda\to 0} \|x - J_\lambda x\| \leq \lim_{\lambda\to 0} \lambda\|A^\circ x\| \longrightarrow 0.$$

Alors $J_\lambda x$ converge vers x. ■

Remarque. *il découle de la Proposition 2.12 que la résolvante est une contraction pour un opérateur monotone, et est définie sur tout l'espace si A est maximal monotone.*

Théorème 2.32. *Soit $A : H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone. Alors $\overline{D(A)}$ est convexe et pour tout $x \in H$*

$$\lim_{\lambda\longrightarrow 0} J_\lambda x = P_{\overline{D(A)}}(x). \tag{2.41}$$

2.5 La pseudo-distance de Vladimirov entre deux opérateurs maximaux monotones

Ces résultats sont pris des références [18] et [9].

Définition 2.33. *Soient A et B deux opérateurs maximaux monotones sur un espace de Hilbert, La pseudo-distance introduite par Vladimirov entre A et B est définie par*

$$dis(A,B) = \sup\left\{\frac{\langle y-\bar{y}, \bar{x}-x\rangle}{1+\|y\|+\|\bar{y}\|}, x\in D(A), y\in Ax, \bar{x}\in D(B), \bar{y}\in B\bar{x}\right\}. \tag{2.42}$$

Proposition 2.34. *Soient A et B deux opérateurs maximaux monotones. Alors on a*

1. *$dis(A,B)\in[0,+\infty]$, $dis(A,B)=dis(B,A)$ et $dis(A,B)=0$ si et seulement si $A=B$.*
2. *$\|x_1 - P_{\overline{D(B)}}(x_1)\| \leqslant dis(A,B)$ pour tout $x_1\in\overline{D(B)}$.*
3. *$d_H(D(A),D(B)) \leqslant dis(A,B)$.*

Preuve. 1. Montrons que $dis(A,B)\in[0,+\infty]$.

Pour cela il suffit de montrer que

$$\frac{\langle AJ_\lambda^A x - BJ_\lambda^B x, J_\lambda^B x - J_\lambda^A x\rangle}{1+\|AJ_\lambda^A x\|+\|BJ_\lambda^B x\|} \geq 0,$$

comme $A_\lambda x\in AJ_\lambda^A x$ et $B_\lambda x\in BJ_\lambda^B x$ alors on montre que

$$\langle A_\lambda x - B_\lambda x, J_\lambda^B x - J_\lambda^A x\rangle \geq 0,$$

Pour tout $x\in H$, on a

$$\begin{aligned}\langle A_\lambda x - B_\lambda x, J_\lambda^B x - J_\lambda^A x\rangle &= \langle \frac{x-J_\lambda^A x}{\lambda} - \frac{x-J_\lambda^B x}{\lambda}, J_\lambda^B x - J_\lambda^A x\rangle\\ &= \frac{1}{\lambda}\langle J_\lambda^B x - J_\lambda^A x, J_\lambda^B x - J_\lambda^A x\rangle\\ &= \frac{1}{\lambda}\|J_\lambda^B x - J_\lambda^A x\|^2\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

d'où

$$dis(A,B)\in[0,+\infty].$$

Montrons que $dis(A,B)=dis(B,A)$.

$$\begin{aligned}dis(B,A) &= \sup\left\{\frac{\langle \bar{y}-y, x-\bar{x}\rangle}{1+\|y\|+\|\bar{y}\|}, x\in D(A), y\in Ax, \bar{x}\in D(B), \bar{y}\in B\bar{x}\right\}\\ &= \sup\left\{\frac{\langle -(y-\bar{y}), -(\bar{x}-x)\rangle}{1+\|y\|+\|\bar{y}\|}, \bar{x}\in D(B), \bar{y}\in B\bar{x}, x\in D(A), y\in Ax\right\}\\ &= dis(A,B).\end{aligned}$$

Montrons que $dis(A,B)=0$ si et seulement si $A=B$.
$\Leftarrow$) supposons que $A=B$ et montrons que $dis(A,B)=0$

$$\begin{aligned}
\langle x-\bar{x}, y-\bar{y}\rangle &\geqslant 0, \forall y\in Ax, \bar{y}\in A\bar{x}\\
\langle y-\bar{y}, x-\bar{x} &\geqslant 0, \forall y\in Ax, \bar{y}\in A\bar{x}\\
\langle y-\bar{y}, -(\bar{x}-x)\rangle &\geqslant 0, \forall y\in Ax, \bar{y}\in A\bar{x}\\
-\langle y-\bar{y}, \bar{x}-x\rangle &\geqslant 0, \forall y\in Ax, \bar{y}\in A\bar{x}\\
\langle y-\bar{y}, \bar{x}-x\rangle &\leqslant 0, \forall y\in Ax, \bar{y}\in A\bar{x}\\
\frac{\langle y-\bar{y}, \bar{x}-x\rangle}{1+\|y\|+\|\bar{y}\|} &\leqslant 0, \forall y\in Ax, \bar{y}\in A\bar{x}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup\left\{\frac{\langle y-\bar{y}, \bar{x}-x\rangle}{1+\|y\|+\|\bar{y}\|}, x\in D(A), y\in Ax, \bar{x}\in D(B), \in B\bar{x}\right\}\leqslant 0,$$

comme $dis(A,B)\geqslant 0$ alors $dis(A,B)=0$,
$\Rightarrow$) supposons que $dis(A,B)=0$ et montrons que $A=B$.
$dis(A,B)=0$ alors pour tous $x\in D(A), y\in Ax, \bar{x}\in D(B), \bar{y}\in B\bar{x}$ on a

$$\langle y-\bar{y}, \bar{x}-x\rangle \geqslant 0 \tag{2.43}$$

Soit l'opérateur défini par $C=A\bigcup B$ et $Gr(C)=Gr(A\bigcup B)$
il suffit de montrer que C est monotone.
Soient $(x,y),(\bar{x},\bar{y})\in Gr(C)$.
Si $(x,y),(\bar{x},\bar{y})\in Gr(A)$ alors C est monotone.
Si $(x,y),(\bar{x},\bar{y})\in Gr(B)$ alors C est monotone.
Si $(x,y)\in Gr(A)\subset Gr(C)$ et $(\bar{x},\bar{y})\in Gr(B)\subset Gr(C)$,
d'après (2.43) on a

$$\langle y-\bar{y}, \bar{x}-x\rangle \geqslant 0, \tag{2.44}$$

donc C est monotone mais A et B sont maximaux monotones donc $C=A=B$.

2. Soient $x_1\in D(A_1)$, $y_1\in A_1x_1$. D'après la Définition de l'opérateur maximal monotone A_2, $\forall\lambda>0$ il existe un unique $x_2^\lambda\in D(A_2)$ tel que $\frac{x_1-x_2^\lambda}{\lambda}\in A_2x_2^\lambda$.
On a

$$dis(A_1,A_2)\geqslant \frac{\langle\frac{x_1-x_2^\lambda}{\lambda}-y_1, x_1-x_2^\lambda\rangle}{\|\frac{x_1-x_2^\lambda}{\lambda}\|+\|y_1\|+1},$$

alors

$$\begin{aligned}
\langle\frac{x_1-x_2^\lambda}{\lambda}-y_1, x_1-x_2^\lambda\rangle &\leqslant dis(A_1,A_2)\big(\|\frac{x_1-x_2^\lambda}{\lambda}\|+\|y_1\|+1\big)\\
\langle x_1-x_2^\lambda-\lambda y_1, x_1-x_2^\lambda\rangle &\leqslant \lambda dis(A_1,A_2)\big(\|\frac{x_1-x_2^\lambda}{\lambda}\|+\|y_1\|+1\big)
\end{aligned}$$

posons $x_2^\lambda = J_2^\lambda x_1$ donc

$$\langle x_1 - J_2^\lambda x_1 - \lambda y_1, x_1 - J_2^\lambda x_1 \rangle \leqslant dis(A_1, A_2) \| x_1 - J_2^\lambda x_1 \| + \lambda dis(A_1, A_2)(\|y_1\| + 1)$$

par passage à la limite $\lambda \longrightarrow 0$ et d'après le Théorème 2.4 on trouve que

$$\langle x_1 - P_{\overline{D(A_2)}}(x_1), x_1 - P_{\overline{D(A_2)}}(x_1) \rangle \leqslant dis(A_1, A_2) \| x_1 - P_{\overline{D(A_2)}}(x_1) \|$$
$$\| x_1 - P_{\overline{D(A_2)}}(x_1) \| \leqslant dis(A_1, A_2), \forall x_1 \in D(A_1),$$

par conséquent

$$\| x_1 - P_{\overline{D(A_2)}}(x_1) \| \leqslant dis(A_1, A_2), \forall x_1 \in \overline{D(A_1)}.$$

3. Montrons que $d_H(D(A), D(B)) \leqslant dis(A, B)$.
Soient $x_1 \in D(A), x_2 \in D(B)$. On a

$$d(x_1, D(B)) = \| x_1 - P_{D(B)} x_1 \|$$

en utilisant l'assertion (2) on trouve

$$d(x_1, D(B)) \leqslant dis(A, B)$$
$$\underset{x_1 \in D(A)}{sup} d(x_1, D(B)) \leqslant dis(A, B).$$

On fait les mêmes étapes pour $x_2 \in D(B)$ on trouve

$$\sup_{x_2 \in D(B)} d(x_2, D(A)) \leqslant dis(A, B).$$

Donc

$$\max\{ \sup_{x_1 \in D(A)} d(x_1, D(B)), \sup_{x_2 \in D(B)} d(x_2, D(A)) \} \leqslant dis(A, B)$$
$$d_H(D(A), D(B)) \leqslant dis(A, B).$$

■

Proposition 2.35. *Soient $(A_n)_n$ une suite des opérateurs maximaux monotones et A un opérateur maximal monotone tel que $dis(A_n, A) \longrightarrow 0$.on suppose que $x_n \in D(A_n)$ tel que $x_n \longrightarrow x \in H$ et $y_n \in A_n x_n$ avec $y_n \rightharpoonup y \in H$. Alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.*

Preuve. Soient $s \in D(A)$, $t \in As$. comme $x_n \in D(A_n)$ et $y_n \in A_n x_n$ et par la définition de la pseudo-distance on trouve

$$\frac{\langle y_n - t, s - x_n \rangle}{1 + \|t\| + \|y_n\|} \leqslant dis(A_n, A)$$
$$\langle y_n - t, s - x_n \rangle \leqslant \big(1 + \|t\| + \|y_n\|\big) dis(A_n, A),$$

par passage à la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\langle y_n - t, s - x_n\rangle \leqslant \lim_{n\to+\infty}\big(1+\|t\|+\|y_n\|\big)dis(A_n, A) \tag{2.45}$$

D'autre part on a

$$\lim_{n\to+\infty}\langle y_n - t, s - x_n\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle y_n, s\rangle - \lim_{n\to+\infty}\langle y_n, x_n\rangle - \lim_{n\to+\infty}\langle t, s\rangle + \lim_{n\to+\infty}\langle t, x_n\rangle,$$

en utilisant la Proposition 1.26 on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{h\to+\infty}\langle y_n - t, s - x_n\rangle &= \langle y, s - x\rangle + \langle -t, s - x\rangle\\ &= \langle y - t, s - x\rangle,\end{aligned}$$

on a $(\|y_n\|)$ bornée et $dis(A_n, A) \longrightarrow 0$ alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\langle y_n - t, s - x_n\rangle &\leqslant \lim_{n\to+\infty}(1+\|t\|+\|y_n\|)dis(A_n, A)\\ \langle y - t, s - x\rangle &\leqslant 0\\ \langle y - t, -(x - s)\rangle &\leqslant 0,\\ \langle y - t, x - s\rangle &\geqslant 0.\end{aligned} \tag{2.46}$$

Comme A est maximal monotone et d'après (2.46) on trouve que $x \in D(A)$ *et* $y \in Ax$. ■

Lemme 2.36. *Soient A et B deux opérateurs maximaux monotones. Alors on a*

1. *pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $x \in D(A)$*

$$\|x - J_\lambda^B x\| \leqslant \lambda\|A^\circ x\| + dis(A, B) + \sqrt{\lambda(1+\|A^\circ x\|)dis(A, B)}. \tag{2.47}$$

2. *pour $\lambda > 0$ et pour tout $x, \bar{x} \in H$*

$$\|J_\lambda^A x - J_\lambda^B \bar{x}\| \leqslant \|x - \bar{x}\|^2 + 2\lambda(1+\|A_\lambda x\|+\|B_\lambda \bar{x}\|)dis(A, B). \tag{2.48}$$

3. *pour $\lambda > 0$ et pour tout $x, \bar{x} \in H$*

$$\|A_\lambda x - B_\lambda \bar{x}\| \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\|x - \bar{x}\|^2 + \frac{2}{\lambda^2}(1+\|A_\lambda x\|+\|B_\lambda \bar{x}\|)dis(A, B). \tag{2.49}$$

Preuve. 1. Soient $x \in D(A)$, $y \in Ax$,$J_\lambda^B x \in D(B)$, $B_\lambda x \in B(J_\lambda^B x)$, d'après la définition de la pseudo distance on a

$$\begin{aligned} dis(A, B) &\geqslant \frac{\langle y - B_\lambda x, J_\lambda^B x - x\rangle}{1+\|y\|+\|B_\lambda x\|}\\ \Rightarrow \langle y - B_\lambda x, J_\lambda^B x - x\rangle &\leqslant (1+\|y\|+\|B_\lambda x\|)dis(A, B).\end{aligned}$$

D'une part on a

$$\begin{aligned}\langle y - B_\lambda x, J_\lambda^B x - x\rangle &= \langle y, J_\lambda^B x - x\rangle - \langle B_\lambda x, J_\lambda^B x - x\rangle \\ &= \langle y, J_\lambda^B x - x\rangle - \langle \frac{x - J_\lambda^B x}{\lambda}, J_\lambda^B x - x\rangle \\ &= \langle y, J_\lambda^B x - x\rangle + \frac{1}{\lambda}\|x - J_\lambda^B x\|^2,\end{aligned}$$

en particulier pour $y = A^\circ x$, on a

$$\begin{aligned}\Rightarrow \|x - J_\lambda^B x\|^2 &\leqslant \lambda(1 + \|A^\circ x\| + \|\frac{x - J_\lambda^B x}{\lambda}\|)dis(A,B) - \lambda\langle A^\circ x, J_\lambda^B x - x\rangle \\ &\leqslant \lambda(1 + \|A^\circ x\|)dis(A,B) + \|x - J_\lambda^B x\| dis(A,B) - \lambda\|A^\circ x\|\|x - J_\lambda^B x\| \\ &\leqslant \lambda(1 + \|A^\circ x\|)dis(A,B) + (\lambda\|A^\circ x\| + dis(A,B))\|x - J_\lambda^B x\|.\end{aligned}$$

Ceci équivalent à

$$\Big[\|x - J_\lambda^B x\| - \frac{1}{2}(\lambda\|A^\circ x\| + dis(A,B))\Big]^2 \leqslant \lambda(1 + \|A^\circ x\|)dis(A,B) + \frac{1}{4}(\lambda\|A^\circ x\| + dis(A,B))^2$$

$$\Big[\|x - J_\lambda^B x\| - \frac{1}{2}(\lambda\|A^\circ x\| + dis(A,B))\Big] \leqslant \sqrt{\lambda(1 + \|A^\circ x\|)dis(A,B) + \frac{1}{4}(\lambda\|A^\circ x\| + dis(A,B))^2},$$

on a pour tous $c, d \geqslant 0$, $\sqrt{c+d} \leqslant \sqrt{c} + \sqrt{d}$ alors on trouve

$$\|x - J_\lambda^B x\| - \frac{1}{2}(\lambda\|A^\circ x\| + dis(A,B)) \leqslant \sqrt{\lambda(1 + \|A^\circ x\|)dis(A,B)} + \frac{1}{2}(\lambda\|A^\circ x\| + dis(A,B)),$$

donc

$$\|x - J_\lambda^B x\| \leqslant \sqrt{\lambda(1 + \|A^\circ x\|)dis(A,B)} + \lambda\|A^\circ x\| + dis(A,B)).$$

2. Soient $A_\lambda x \in A(J_\lambda^A x)$, $B_\lambda \bar{x} \in B(J_\lambda^B \bar{x})$. D'après la Définition de la pseudo-distance on peut écrire

$$\langle J_\lambda^B \bar{x} - J_\lambda^A x, A_\lambda x - B_\lambda \bar{x}\rangle \leqslant (1 + \|A_\lambda x\| + \|B_\lambda \bar{x}\|)dis(A,B). \tag{2.50}$$

On a

$$\begin{aligned}\|J_\lambda^A x - J_\lambda^B \bar{x}\|^2 &= \|J_\lambda^A x - J_\lambda^B \bar{x} - x + x - \bar{x} + \bar{x}\|^2 \\ &= \|(J_\lambda^A x - x) - (J_\lambda^B \bar{x} - \bar{x}) + (x - \bar{x})\|^2 \\ &= \|(J_\lambda^A x - x) - (J_\lambda^B \bar{x} - \bar{x})\|^2 + \|x - \bar{x}\|^2 + 2\langle (J_\lambda^A x - x) - (J_\lambda^B \bar{x} - \bar{x}), x - \bar{x}\rangle \\ &= -\|(J_\lambda^A x - x) - (J_\lambda^B \bar{x} - \bar{x})\|^2 + \|x - \bar{x})\|^2 \\ &+ 2\langle J_\lambda^A x - x - J_\lambda^B \bar{x} + \bar{x}, J_\lambda^A x - J_\lambda^B \bar{x}\rangle \\ &= -\|(J_\lambda^A x - x) - (J_\lambda^B \bar{x} - \bar{x})\|^2 + \|x - \bar{x})\|^2 \\ &+ 2\langle x - J_\lambda^A x - \bar{x} + J_\lambda^B \bar{x}, J_\lambda^B \bar{x} - J_\lambda^A x\rangle \\ &= -\|(J_\lambda^A x - x) - (J_\lambda^B \bar{x} - \bar{x})\|^2 + \|x - \bar{x})\|^2 \\ &+ 2\lambda\langle A_\lambda x - B_\lambda \bar{x}, J_\lambda^B \bar{x} - J_\lambda^A x\rangle,\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|J_\lambda^A x - J_\lambda^B \bar{x}\|^2 \leqslant \|x - \bar{x})\|^2 + 2\lambda\langle A_\lambda x - B_\lambda \bar{x}, J_\lambda^B \bar{x} - J_\lambda^A x\rangle \tag{2.51}$$

en utilisant (2.50) on obtient

$$\|J_\lambda^A x - J_\lambda^B \bar{x}\|^2 \leqslant \|x - \bar{x}\|^2 + 2\lambda(1 + \|A_\lambda x\| + \|B_\lambda \bar{x}\|)dis(A, B).$$

3. Soient $\lambda > 0$, $x, \bar{x} \in H$. On a

$$\begin{aligned}
\lambda^2\|A_\lambda x - B_\lambda \bar{x}\|^2 &= \|x - J_\lambda^A x - \bar{x} + J_\lambda^B \bar{x}\|^2 \\
&= \|x - \bar{x}\|^2 + \|J_\lambda^B \bar{x} - J_\lambda^A x\|^2 + 2\langle x - \bar{x}, J_\lambda^B \bar{x} - J_\lambda^A x\rangle \\
&= \|x - \bar{x}\|^2 - \|J_\lambda^B \bar{x} - J_\lambda^A x\|^2 + 2\langle x - J_\lambda^A x - \bar{x} + J_\lambda^B \bar{x}, J_\lambda^B \bar{x} - J_\lambda^A x\rangle \\
&= \|x - \bar{x}\|^2 + \|J_\lambda^B \bar{x} - J_\lambda^A x\|^2 + 2\lambda\langle A_\lambda x - B_\lambda \bar{x}, J_\lambda^B \bar{x} - J_\lambda^A x\rangle
\end{aligned}$$

donc

$$\lambda^2\|A_\lambda x - B_\lambda \bar{x}\|^2 \leqslant \|x - \bar{x}\|^2 + 2\lambda\langle A_\lambda x - B_\lambda \bar{x}, J_\lambda^B \bar{x} - J_\lambda^A x\rangle,$$

en utilisant (2.50) on trouve

$$\|A_\lambda x - B_\lambda \bar{x}\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\|x - \bar{x}\|^2 + \frac{2}{\lambda}(1 + \|A_\lambda x\| + \|B_\lambda \bar{x}\|)dis(A, B).$$

■

Proposition 2.37. *Soit A un opérateur maximal monotone, si $x \in \overline{D(A)}$ et $y \in H$ tels que*

$$\langle A^\circ x - y, \eta - x\rangle \geq 0 \text{ pour } \eta \in D(A),$$

alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Proposition 2.38. *Soit $(A_n)_n$ une suite des opérateurs maximaux monotones telles que $dis(A_n, A) \longrightarrow 0$ pour A un opérateur maximal monotone, supposons que $\eta_n \in D(A_n)$ tel que $\eta_n \longrightarrow \eta \in D(A)$ et que $M = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|A^\circ\eta\| < \infty$, Alors il existe une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\xi_n \in D(A_n), \quad \xi_n \longrightarrow \eta, \quad et \quad A^\circ\xi_n \longrightarrow A^\circ\eta. \tag{2.52}$$

Pour être plus précis,on peut prendre $\xi_n = J_{\lambda_n}^{A_n}\eta_n$ avec

$$\lambda_n = (\|\eta_n - \eta\| + dis(A_n, A))^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad lorsque\ n \longrightarrow 0. \tag{2.53}$$

En particulier, si $dis(A_n, A) \longrightarrow 0$ et $\|A_n^\circ x\| \leqslant c(1 + \|x\|)$ pour $c > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in D(A_n)$, alors pour tout $\eta \in D(A)$ il existe une suite $(\xi_n)_n$ telle que (2.52) soit satisfaite.

Preuve. Soient $\eta_n \in D(A_n)$, $\eta \in H$ tel que $\eta_n \longrightarrow \eta$. On a

$$\|A_{\lambda n}\eta_n\| \leqslant \|A_{\lambda n}\eta_n - A_{\lambda n}\eta\| + \|A_{\lambda n}\eta\|, \tag{2.54}$$

d'aprés l'inégalité (2.49) de la Proposition 2.36 on obtient

$$\|A_{\lambda n}\eta_n - A_{\lambda n}\eta\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_n^2}\|\eta_n - \eta\|^2 + \frac{2}{\lambda_n}(1 + \|A_{\lambda_n}\eta_n\| + \|A_{\lambda_n}\eta\|)dis(A_{\lambda_n}, A_{\lambda_n}).$$

comme $dis(A_{\lambda_n}, A_{\lambda_n}) = 0$ alors

$$\begin{aligned}\|A_{\lambda n}\eta_n - A_{\lambda n}\eta\|^2 &\leqslant \frac{1}{\lambda_n^2}\|\eta_n - \eta\|^2 \\ \Rightarrow \|A_{\lambda n}\eta_n - A_{\lambda n}\eta\| &\leqslant \frac{1}{\lambda_n}\|\eta_n - \eta\|.\end{aligned}$$

Revenant à l'inégalité (2.54) on trouve

$$\|A_{\lambda n}\eta_n\| \leqslant \frac{1}{\lambda_n}\|\eta_n - \eta\| + \|A^\circ\eta\|,$$

avec

$$\lambda_n = (\|\eta_n - \eta\| + dis(A_n, A))^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$\begin{aligned}\|A_{\lambda_n}\eta_n\| &\leqslant \frac{\|\eta_n - \eta\| + \|A^\circ\eta\|}{\|\eta_n - \eta\|^{\frac{1}{2}}} \\ &\leqslant \|\eta_n - \eta\|^{\frac{1}{2}} + \|A^\circ\eta\|.\end{aligned}$$

Comme $\|A_{n,\lambda_n}\eta\| \leqslant \|A_n^\circ\eta\| \leqslant M$ et $\eta_n \longrightarrow \eta$ alors $(A_{\lambda_n}\eta_n)_n$ bornée,i.e,

$$\exists S > 0 \ \text{ tel que } \ \|A_{\lambda_n}\eta_n\| \leqslant S.$$

D'autre part on a

$$\|\eta_n - \xi_n\| = \|\eta_n - J_{\lambda_n}^{A_n}\eta_n + J_{\lambda_n}^{A}\eta_n - J_{\lambda_n}^{A}\eta_n\|,$$

en utilisant les inégalités (2.47) et (2.48) de la Proposition 2.36 on trouve

$$\begin{aligned}\|\eta_n - \xi_n\| \leqslant{}& \lambda_n\|A^\circ\eta_n\| + dis(A_n, A) + \sqrt{\lambda_n(1 + \|A^\circ\eta\|)dis(A_n, A)} \\ &+\|\eta_n - \eta_n\| + \sqrt{2\lambda_n(1 + \|A_{\lambda_n}\eta_n\| + \|A_{n,\lambda_n}\eta_n\|)dis(A_n, A)},\end{aligned}$$

puisque $\|A_{n,\lambda_n}\eta_n\| \leqslant \|A^\circ\eta_n\| \leqslant M$ et $\|A_{\lambda_n}\eta_n\| \leqslant S$ alors

$$\|\eta_n - \xi_n\| \longrightarrow 0.$$

Et

$$\begin{aligned}\|\xi_n - \eta\| &= \|J^{A_n}_{\lambda_n}\eta_n - \eta - \eta_n + \eta_n\| \\ &\leqslant \|J^{A_n}_{\lambda_n}\eta_n - \eta_n\| + \|\eta_n - \eta\| \longrightarrow 0 \ \ lorsque\ n \longrightarrow +\infty,\end{aligned}$$

par l'assertion (2.49) de la Proposition 2.36 on trouve

$$\|A_{n,\lambda_n}\eta_n - A_{\lambda_n}\eta\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_n^2}\|\eta_n - \eta\|^2 + \frac{2}{\lambda_n}(1 + \|A_{n,\lambda_n}\eta_n\| + \|A_{\lambda_n}\eta\|)dis(A_n, A) \longrightarrow 0.$$

Et par conséquent

$$\|A_{n,\lambda_n}\eta_n - A_{\lambda_n}\eta\| \leqslant \|A_{n,\lambda_n}\eta_n - A^\circ\eta\| + \|A^\circ\eta - A_{\lambda_n}\eta\| \longrightarrow 0, n \longrightarrow 0, \tag{2.55}$$

il résulte

$$\begin{aligned}\|A_{n,\lambda_n}\eta_n - A^\circ\eta\| &= \|A_{n,\lambda_n}\eta_n - A^\circ\eta - A_{\lambda_n}\eta + A_{\lambda_n}\eta\|, \\ &\leqslant \|A_{n,\lambda_n}\eta_n - A_{\lambda_n}\eta\| + \|A_{\lambda_n}\eta - A^\circ\eta\|,\end{aligned}$$

par (2.55) et la Proposition (2.30) on obtient

$$\|A_{n,\lambda_n}\eta_n - A^\circ\eta\| \longrightarrow 0, \ \ lorsque\ n \longrightarrow +\infty.$$

Puisque $A_{n,\lambda_n}\eta_n \in A_n(J^{A_n}_{\lambda_n}\eta_n) = A_n\xi_n$ on obtient $\|A^\circ_n\xi_n\| \leqslant \|A_{n,\lambda_n}\eta_n\|$ et alors

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\|A^\circ\xi_n\| \leqslant \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\|A_{n,\lambda_n}\eta_n\| = \|A^\circ\eta\|. \tag{2.56}$$

Pour montrer que $A^\circ\xi_n \longrightarrow A^\circ\eta$, nous pouvons assumer que $y_n = A^\circ_n\xi_n \rightharpoonup y \in H$ et $x_n = \xi_n \longrightarrow \eta$ et en appliquant la Proposition 2.35 on obtient $y \in A\eta$,
comme $A^\circ\eta_n$ est l'élément de norme minimale de $A\eta$ et par la Proposition 2.25 on trouve

$$\|A^\circ\eta\| \leqslant \|y\| \leqslant \liminf_{n\longrightarrow+\infty}\|A^\circ_n\xi_n\|, \tag{2.57}$$

en combinant (2.57) et (2.56) on trouve que $y = A^\circ\eta$ et

$$A^\circ_n J^{A_n}_{\lambda_n}\eta_n \longrightarrow A^\circ\eta.$$

Le cas particulier

Pour tout $x \in D(A)$ posons $\eta_n = J^{A_n}_{\mu_n}\eta$ avec μ_n une suite arbitraire telle que $\mu_n \longrightarrow 0$, en utilisant la Proposition 2.36 l'assertion (1) on trouve

$$\|\eta - \eta_n\| \leqslant \mu_n\|A^\circ\eta\| + dis(A_n, A) + \sqrt{\mu_n(1 + \|A^\circ\eta\|)dis(A_n, A)},$$

en passant à la limite

$$\|\eta - \eta_n\| \longrightarrow 0.$$

On a encore

$$\begin{aligned}\|A^\circ\eta_n\| &\leqslant c(1+\|\eta_n\|) = c(1+\|\eta_n-\eta+\eta\|)\\ &\leqslant c(1+\|\eta_n-\eta\|+\|\eta\|) := N.\end{aligned}$$

Comme les conditions sont satisfaites alors on peut appliquer le cas général. ■

Chapitre 3

Étude d'une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone

Dans ce chapitre, nous présentons le résultat principal de ce mémoire, l'existence et l'unicité de solution pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone sans et avec une perturbation.

3.1 Cas autonome

Les résultats suivant sont pris des référence [1] et [6].
Le but de cette section est de montrer l'existence et l'unicité de solutions pour une inclusion différentielle de premier ordre avec une condition initiale, le problème est donné comme suit

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\dot{x}(t) \in -Ax(t), \quad p.p\ sur\ [0,T],\\ x(0) = x_0 \in D(A).\end{cases}$$

où A un opérateur maximal monotone défini de H à valeurs dans 2^H, ne dépendant pas séparément de t, pour cela on aura besoin du Théorème suivant

Théorème 3.1. *Considérons le problème $(\mathcal{P})$, alors il existe une solution unique $x(.)$ définie sur $[0,T]$ telle que*

$$\forall t \in [0,T], \dot{x}(t) = A^{\circ}x(t). \tag{3.1}$$

En outre

1. $t \longrightarrow \|\dot{x}(t)\|$ *est décroissante.*
2. *Soient* $x(.), y(.)$ *deux solutions de* $(\mathcal{P})$*, alors*
$$\forall t \geqslant 0, \quad \|x(t) - y(t)\| \leqslant \|x_0 - y_0\|. \tag{3.2}$$
3. $\forall t \geqslant 0, \quad \dot{x}(t) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}$ *et* $\dot{x}(.)$ *est continue à droite.*

Preuve. **a)** Commençons d'abord par prouver l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P})$.

Supposons qu'il existe x et y deux solutions distinctes de $(\mathcal{P})$ telles que $x(0) = y(0) = x_0$, alors
$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -Ax(t), & p.p \ sur \ [0, T] \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in -Ay(t), & p.p \ sur \ [0, T] \\ y(0) = x_0. \end{cases}$$

Comme A est monotone alors,
$$\langle x(t) - y(t), Ax(t) - Ay(t) \rangle \geq 0,$$
$$-\langle \ x(t) \ - y(t), \dot{x}(t) \ - \dot{y}(t) \rangle \ \geq 0.$$

Donc,
$$\langle \ x(t) \ - y(t), \dot{x}(t) \ - \dot{y}(t) \rangle \leq 0 \quad p.p \ sur \ [0, T].$$

Par la dérivé de la norme on a
$$\langle \ x(t) \ - y(t), \dot{x}(t) \ - \dot{y}(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x(t) - y(t)\|^2,$$

en intégrant de 0 à t on déduit que,
$$\int_0^t \frac{d}{dt} \|x(\tau) - y(\tau)\|^2 d\tau = \|x(t) - y(t)\|^2 - \|x(0) - y(0)\|^2 \leq 0,$$

alors
$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(0) - y(0)\|, \quad \forall t \geq 0$$

c'est à dire
$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \|x(0) - y(0)\| \quad \forall t \geq 0. \tag{3.3}$$

Comme $x(0) = y(0) = x_0$ d'où,
$$\|x(t) - y(t)\| = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Donc si le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution, alors elle est unique.

b) Montrons que $t \to \|\dot{x}(t)\|$ est décroissante.

Pour cela posons $y(t) = x(t+h)$ avec $h > 0$ et supposons que $x(t)$ est une solution de $(\mathcal{P})$, cela satisfait

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in -Ay(t), \quad p.p \ sur \ [0,T], \\ y(0) = x(h) \in D(A). \end{cases}$$

En utilisant la relation (3.3) on aura,

$$\|x(t+h) - x(t)\| \leq \|x(h) - x(0)\| \quad \forall t \geq 0,$$

divisons sur h

$$\frac{\|x(t+h) - x(t)\|}{h} \leq \frac{\|x(h) - x(0)\|}{h} \quad \forall t \geq 0,$$

par passage à la limite lorsque h tend vers 0 on obtient

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|x(t+h) - x(t)\|}{h} \leq \lim_{h \to 0} \frac{\|x(h) - x(0)\|}{h} \quad \forall t \geq 0,$$

donc

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \|\dot{x}(0)\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Cela donne que $t \to \|\dot{x}(t)\|$ est décroissante.

c) Considérons les solutions approximative $x_\lambda(t)$ du problème (P)

$$\begin{cases} \dot{x_\lambda}(t) = -A_\lambda x_\lambda(t), \quad \forall t \in [0,T], \\ x_\lambda(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Puisque A_λ est univoque alors elle admet une solution unique et comme elle est lipschitzienne donc la solution est continuement différentielle $x_\lambda(t)$ défini sur $[0,T]$. Dans la suite nous allons prouver que $x_\lambda(t)$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T],H)$. Tout d'abord dans l'étape (**b**) nous avons montré que $t \to \|\dot{x}(t)\|$ est décroissante alors,

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x_\lambda(t)\| &= \|\dot{x_\lambda}(t)\| \\ &\leq \|\dot{x_\lambda}(0)\| \\ &= \|A_\lambda x_0\|, \end{aligned}$$

par la Proposition 2.30 l'assertion (2) on aura,

$$\|A_\lambda x_\lambda(t)\| \leq \|A^\circ x_0\|. \tag{3.5}$$

on pose $g(t)=\frac{1}{2}\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
g(t)=\frac{1}{2}\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|^2 &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\langle x_\lambda(\tau)-x_\mu(\tau), x_\lambda(\tau)-x_\mu(\tau)\rangle d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|x_\lambda(\tau)-x_\mu(\tau)\|^2 d\tau \\
&= \int_0^t \langle x_\lambda(\tau)-x_\mu(\tau), \dot{x_\lambda}(\tau)-\dot{x_\mu}(\tau)\rangle d\tau \\
&= -\int_0^t \langle x_\lambda(\tau)-x_\mu(\tau), A_\lambda x_\lambda(\tau)-A_\mu x_\mu(\tau)\rangle d\tau,
\end{aligned}$$

étant donné que $x=\lambda A_\lambda x+J_\lambda x$, alors

$$\begin{aligned}
g(t) &= -\int_0^t \langle \lambda A_\lambda x_\lambda(\tau)-\mu A_\mu x_\mu(t)+J_\lambda x_\lambda(\tau)-J_\mu x_\mu(\tau), A_\lambda x_\lambda(\tau)-A_\mu x_\mu(\tau)\rangle d\tau \\
&= -\int_0^t \langle \lambda A_\lambda x_\lambda(\tau)-\mu A_\mu x_\mu(\tau), A_\lambda x_\lambda(\tau)-A_\mu x_\mu(\tau)\rangle d\tau \\
&- \int_0^t \langle J_\lambda x_\lambda(\tau)-J_\mu x_\mu(\tau), A_\lambda x_\lambda(\tau)-A_\mu x_\mu(\tau)\rangle d\tau. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Ainsi, A est monotone et $A_\lambda x\in AJ_\lambda x$, alors de la relation (2.37) on a,

$$\langle J_\lambda x_\lambda(t)-J_\mu x_\mu(t), A_\lambda x_\lambda(t)-A_\mu x_\mu(t)\rangle \geq 0,$$

d'où

$$-\int_0^t \langle J_\lambda x_\lambda(\tau)-J_\mu x_\mu(\tau), A_\lambda x_\lambda(\tau)-A_\mu x_\mu(\tau)\rangle d\tau \leq 0.$$

En remplaçant dans (3.6) on trouve

$$\begin{aligned}
g(t) &\leq -\int_0^t \langle \lambda A_\lambda x_\lambda(\tau)-\mu A_\mu x_\mu(\tau), A_\lambda x_\lambda(\tau)-A_\mu x_\mu(\tau)\rangle d\tau \\
&\leq \int_0^t \lambda\langle A_\lambda x_\lambda(\tau), A_\mu x_\mu(\tau)\rangle d\tau + \int_0^t \mu\langle A_\mu x_\mu(\tau), A_\lambda x_\lambda(\tau)\rangle d\tau \\
&- \int_0^t (\lambda\|A_\lambda x_\lambda(\tau)\|^2+\mu\|A_\mu x_\mu(\tau)\|^2) d\tau. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&(\|A_\lambda x_\lambda(t)\|-\frac{1}{2}\|A_\mu x_\mu(t)\|)^2 \geq 0 \\
&\|A_\lambda x_\lambda(t)\|^2+\frac{1}{4}\|A_\mu x_\mu(t)\|^2 \geq \|A_\lambda x_\lambda(t)\|\|A_\mu x_\mu(t)\|, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité (3.8) et Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
\lambda\langle A_\lambda x_\lambda(\tau), A_\mu x_\mu(\tau)\rangle &\leq \lambda\|A_\lambda x_\lambda(\tau)\|\|A_\mu x_\mu(\tau)\| \\
&\leq \lambda\|A_\lambda x_\lambda(\tau)\|^2+\frac{\lambda}{4}\|A_\mu x_\mu(\tau)\|^2, \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

de même,

$$\mu\langle A_\mu x_\mu(\tau), A_\lambda x_\lambda(\tau)\rangle \leq \mu\|A_\mu x_\mu(\tau)\|^2 + \frac{\mu}{4}\|A_\lambda x_\lambda(\tau)\|^2. \tag{3.10}$$

En remplaçant (3.9), (3.10) dans (3.7) et d'après l'inégalité (3.5) on trouve

$$\begin{aligned}
g(t) &\leq \int_0^t \frac{\lambda}{4}\|A_\mu x_\mu(\tau)\|^2 + \frac{\mu}{4}\|A_\lambda x_\lambda(\tau)\|^2 d\tau \\
&\leq \int_0^t \frac{\lambda}{4}\|A^\circ x_0\|^2 + \frac{\mu}{4}\|A^\circ x_0\|^2 d\tau \\
&\leq (\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4})\|A^\circ x_0\|^2 \int_0^t 1.d\tau \\
&\leq t\frac{(\lambda+\mu)}{4}\|A^\circ x_0\|^2.
\end{aligned}$$

D'où $x_\lambda(t)$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T],H)$ et toute suite de Cauchy est une suite convergente,

ainsi

$$\begin{aligned}
g(t) = \frac{1}{2}\|x_\lambda(t) - x_\mu(t)\|^2 &\leq t\frac{(\lambda+\mu)}{4}\|A^\circ x_0\|^2 \\
\Longrightarrow \|x_\lambda(t) - x_\mu(t)\|^2 &\leq t\frac{(\lambda+\mu)}{2}\|A^\circ x_0\|^2 \\
\Longrightarrow \|x_\lambda(t) - x_\mu(t)\| &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{t(\lambda+\mu)}\|A^\circ x_0\|,
\end{aligned}$$

quand $\mu \to 0$ on obtient

$$\|x_\lambda(t) - x(t)\| \ \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\lambda t}\|A^\circ x_0\|,$$

par passage à la limite quand λ tend vers 0

$$\|x_\lambda(t) - x(t)\| \longrightarrow 0.$$

Par conséquent $(x_\lambda)_\lambda$ converge uniformément vers x sur $[0,T]$, pour tout $T < +\infty$.

d) Dans cette étape on vas prouver que $x(t)$ est une solution de l'inclusion $(\mathcal{P})$.
Commençons par montrer que $\dot{x_\lambda}(.)$ converge uniformément vers $\dot{x}(.)$ en suivant la même méthode utilisé dans l'étape (**c**).
On pose $z(t) = \dot{x}(t)$ et $z_\lambda(t) = \dot{x_\lambda}(t)$, pour tout $t \in [0,T]$
donc $z_\lambda(t) = -A_\lambda z_\lambda(t)$,

En utilisant l'inégalité triangulaire et celle de Cauchy-Schwartz on trouve,

$$\begin{aligned}
b(t) &= \frac{1}{2}\|z_\lambda(t) - z_\mu(t)\|^2 \\
&\leq -\int_0^t \langle \lambda A_\lambda z_\lambda(t) - \mu A_\mu z_\mu(t), A_\lambda z_\lambda(t) - A_\mu z_\mu(t)\rangle \\
&\leq \int_0^t \lambda\|A_\lambda z_\lambda(t)\|\|A_\mu z_\mu(t)\| + \mu\|A_\mu z_\mu(t)\|\|A_\lambda z_\lambda(t)\| - \lambda\|A_\lambda z_\lambda(t)\|^2 - \mu\|A_\mu z_\mu(t)\|^2 \\
&\leq \int_0^t \lambda\|A_\lambda z_\lambda(t)\|(\|A_\mu z_\mu(t)\| - \|A_\lambda z_\lambda(t)\|) + \mu\|A_\mu z_\mu(t)\|(\|A_\lambda z_\lambda(t)\| - \|A_\mu z_\mu(t)\|) \\
&\leq \int_0^t (\|A_\mu z_\mu(t)\| - \|A_\lambda z_\lambda(t)\|)(\lambda\|A_\lambda z_\lambda(t)\| - \mu\|A_\mu z_\mu(t)\|) \\
&\leq \int_0^t (\|A_\mu z_\mu(t)\| + \|A_\lambda z_\lambda(t)\|)(\lambda\|A_\lambda z_\lambda(t)\| + \mu\|A_\mu z_\mu(t)\|),
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité (3.5) on trouve que

$$\begin{aligned}
b(t) &\leq \int_0^t (\|A^\circ x_0\| + \|A^\circ x_0\|)(\lambda\|A^\circ x_0\| + \mu\|A^\circ x_0\|) \\
&\leq \int_0^t 2(\lambda+\mu)\|A^\circ x_0\|^2.
\end{aligned}$$

alors,

$$\frac{1}{2}\|z_\lambda(t) - z_\mu(t)\|^2 \leq 2.t(\lambda+\mu)\|A^\circ x_0\|^2,$$

donc

$$\|z_\lambda(t) - z_\mu(t)\| \leq 2\sqrt{t(\lambda+\mu)}\|A^\circ x_0\|.$$

Lorsque μ tend vers 0 alors

$$\|z_\lambda(t) - z_\mu(t)\| \leq 2\sqrt{\lambda t}\|A^\circ x_0\|.$$

Quand $\lambda \longrightarrow 0$ on aura

$$\|z_\lambda(t) - z_\mu(t)\| \longrightarrow 0.$$

Donc $(z_\lambda)_\lambda$ converge uniformément vers z.

Toute suite convergente est une suite borné par conséquent on peut extraire une sous suite $(z_{\lambda_n})_n$ qui converge faiblement vers z pour tout $T > 0$ dans $L^2([0,T], H)$ i.e, $z_{\lambda_n} \rightharpoonup z$ et

$$\begin{aligned}
\|x_\lambda(t) - J_\lambda x_\lambda(t)\| &= \lambda\|A_\lambda x_\lambda(t)\| \\
&\leq \lambda\|A^\circ x_0\|.
\end{aligned}$$

Donc $J_\lambda x_\lambda(t)$ converge uniformément vers $x(t)$ quand λ tend vers 0, d'où $J_\lambda x_\lambda(t)$ converge fortement vers $x(t)$ dans $L^2([0,T], H)$.

La Proposition 2.17 implique que la multi-application $x \to (\mathcal{A}x)(.) = Ax(.)$ est maximal monotone dans $L^2([0,T],H)$.
Puisque $A_\lambda x_\lambda(t) \in AJ_\lambda x_\lambda(t)$, alors d'après la demi fermeture du graphe, on déduit que $-\dot{x}(t) \in \mathcal{A}x(t)$ dans $L^2([0,T],H)$.
Par conséquent $\dot{x}(t) \in -Ax(t), \quad p.p \; sur \; [0,T]$.

e) Dans cette étape on doit montrer que $t \to \|A^\circ x\|$ est décroissante.
D'après l'inégalité (3.5) on déduit qu'on peut extraire une sous suite $(A_{\lambda_n}x_{\lambda_n}(t))_n$ qui converge vers $u(t)$ dans H,
comme $A_{\lambda_n}x_{\lambda_n}(t) \in AJ_{\lambda_n}x_{\lambda_n}(t)$, donc on déduit de la Proposition 2.19 que $u(t) \in Ax(t)$ ce qui prouve que pour tout $t \geq 0$, $x(t) \in D(A)$.
Pour tout $t > t_0$ on a,

$$\|\dot{x_\lambda}(t)\| = \|A_\lambda x_\lambda(t)\| \leq \|A^\circ x(t_0)\|.$$

Passant à $\liminf$,

$$\begin{aligned}\liminf_{\lambda\to 0}\|\dot{x_\lambda}(t)\| &\leq \liminf_{\lambda\to 0}\|A^\circ x(t_0)\| \\ &\leq \|A^\circ x(t_0)\|,\end{aligned}$$

et

$$\liminf_{\lambda\to 0}\|\dot{x_\lambda}(t)\| \geq \|u(t)\|,$$

donc,

$$\|A^\circ x(t_0)\| \geq \|u(t)\|.$$

Puisque $u(t) \in Ax(t)$ alors,

$$\|A^\circ x(t)\| \leq \|u(t)\|,$$

d'où

$$\|A^\circ x(t)\| \leq \|A^\circ x(t_0)\|, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.11}$$

Ce qui donne que $\|A^\circ x\|$ est décroissante.

f) Dans cette étape on va montrer que $t \to A^\circ x(t)$ est continue à droite.
Soit $t_n > t_0$ tel que $t_n \longrightarrow t_0$, alors $x(t_n) \longrightarrow x(t_0)$.
d'après l'inégalité (3.11), on a

$$\|A^\circ x(t_n)\| \leq \|u(t_n)\| \leq \|A^\circ x(t_0)\|,$$

donc on peut extraire une sous suite $A^\circ x(t_n)$ qui converge faiblement vers $g \in H$, il résulte de la Proposition 2.19 que $g \in Ax(t_0)$,
par conséquent ,

$$\|A^\circ x(t_0)\| \leq \|g\|,$$

et on a aussi

$$\|g\| \leq \liminf_{t_n \to +\infty} \|A^\circ x(t_n)\| \leq \|A^\circ x(t_0)\|,$$

cela implique que $g = A^\circ x(t_0)$ d'où $A^\circ x(t_n) \rightharpoonup A^\circ x(t_0)$,
de plus $x(t_n) \longrightarrow x(t_0)$ alors,

$$\lim_{n\to\infty} \|A^\circ x(t_n)\| = \|A^\circ x(t_0)\|,$$

on déduit que $A^\circ x(t_n) \longrightarrow A^\circ x(t_0)$ quand $t_n \longrightarrow t_{0^+}$,
donc,

$$\lim_{t\to t_0^+} \|A^\circ x(t)\| = \|A^\circ x(t_0)\|.$$

On conclut que $t \to A^\circ x(t)$ est continue à droite.

g) Dans cette dernière étape on doit conclure que $\dot{x}(t) = -A^\circ x(t)$ et que $x(t)$ est dérivable à droite.
Soit C un sous ensemble qui appartient à $[0, +\infty[$ où $x(t)$ n'est pas différentiable i.e, $\dot{x}(t) \notin -Ax(t)$. Soit $t_0 \notin C$, $h > 0$ on a

$$\begin{aligned} \|x(t_0+h) - x(t_0)\| &\leq \int_{t_0}^{t_0+h} \|\dot{x}(\tau)\| d\tau, \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+h} \|A^\circ x(t_0)\| d\tau, \\ &\leq h\, \|A^\circ x(t_0)\|, \end{aligned}$$

cela implique que

$$\frac{\|x(t_0+h) - x(t_0)\|}{h} \leq \|A^\circ x(t_0)\|,$$

en passant à la limite quand $h \longrightarrow 0^+$, on trouve

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\|x(t_0+h) - x(t_0)\|}{h} = \|\dot{x}(t_0)\| \leq \|A^\circ x(t_0)\|. \tag{3.12}$$

Puisque $\dot{x}(t_0) \in -Ax(t_0)$, alors

$$\|\dot{x}(t_0)\| \geq \|A^\circ x(t_0)\|, \tag{3.13}$$

d'après les inégalités (3.12) et (3.13), on déduit que $x(t)$ est dérivable à droite en $t = 0$ et $\dot{x}(t_0) = -A^\circ x(t_0)$.

■

3.2 Le cas non autonome

les résultats sont pris de la référence [9].

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité de solution à variation bornée du problème,

$$(\mathcal{P}')\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) \in A(t)u(t)\ dr - p.p\ dans\ [0,T] \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

Où $A(t) : D(A(t)) \subset H \to 2^H$ est un opérateur maximal monotone pour tout $t \in [0,T]$. Ceci généralise le cas d'une solution absolument continue.

Tout d'abord pour la résolution du problème $(\mathcal{P}')$ on aura besoin des hypothèses suivantes,

(H1) Il existe une fonction $r : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ continue à droite sur $[0,T[$ et croissante avec $r(T) < \infty$ telle que

$$dis(A(t), A(s)) \leq dr(]s,t]) = r(t) - r(s) \quad pour\ 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{3.14}$$

Comme on a mentionné dans le Chapitre 2, $A^\circ(t,x)$ est l'élément de norme minimal de $A(t)x$ et supposons que

(H2) Il existe une constante $c \in L^1([0,T]; dr)$ qui est positive telle que

$$\|A^\circ(t,x)\| \leq c(1 + \|x\|)\ pour\ t \in [0,T],\ x \in D(A(t)). \tag{3.15}$$

Théorème 3.2. *Soit $A(t) : D(A(t)) \longrightarrow 2^H$ un opérateur maximal monotone pour tout $t \in [0,T]$ tel que (**H1**) et (**H2**) sont vérifiées. Alors pour tout $u_0 \in D(A(0))$ le problème d'évolution $(\mathcal{P}')$ avec la condition initiale $u(0) = u_0$, a une solution unique à variation bornée.*

Preuve.

a) Subdivision de l'intervalle $[0,T]$.

On choisit une suite $(\xi_n) \subset \left]0,1\right]$ avec $\xi_n \searrow 0$, on subdivise l'intervalle $[0,T]$ avec la partition $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{k_n}^n = T$ telle que

$$|t_{i+1}^n - t_i^n| + dr(]t_i^n, t_{i+1}^n[) \leqslant \xi_n,\ \forall i = 0, ..., k_n - 1. \tag{3.16}$$

On peut supposer que $r(0) = 0$, $u(0) \in D(A(0))$ et

$$\delta_{i+1}^n = dr(]t_i^n, t_{i+1}^n[) = r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n),\ \forall i = 0, ..., k_n - 1. \tag{3.17}$$

b) Construction d'une suite u_n de fonctions étagées.

On définit $(u_n)_n$ une suite d'application en escalier continue à droite telle que

$$u_n : [0,T] \longrightarrow H$$
$$t \longmapsto u_n(t) = \begin{cases} u_0 & si\ t \in [0, t_i^n[\\ u_i^n & si\ t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\\ u_{k_n}^n & si\ t = T. \end{cases}$$

et pour $i = 0, ..., k_n - 1$ on a, $u_{i+1}^n = J_{i+1}^n(u_i^n)$ avec $J_{i+1}^n x = (I_d + \delta_{i+1}^n A(t_i^n))^{-1}x.$

c) Montrons que u_n converge faiblement vers u.

On commence par montrer que la suite $(u_n)_n$ est uniformément bornée en variation et en norme, pour cela il suffit de trouver deux constantes positives distinctes telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i = 0, ..., k_n$ resp. $i = 0, .., k_n - 1$

$$\|u_i^n\| \leq M \quad resp. \quad \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq R\,dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]). \tag{3.18}$$

En particulier,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_i^n\| \leq M \quad et \quad Var(u_n, [0,T]) \leq R\,dr(]0,T]). \tag{3.19}$$

En plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leqslant R(dr(]s,t]) + \varepsilon_n). \tag{3.20}$$

En effet,

d'après l'inégalité (3.14) dans la première hypothèse et la relation (3.17) on a,

$$\begin{aligned} dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) &\leq dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]) \\ &= r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n) \\ &= \delta_{i+1}^n, \end{aligned}$$

pour $i = 0, ..., k_n - 1$. On montre la première inégalité de (3.18).

Par la Proposition 2.36 l'assertion (1) on obtient,

$$\begin{aligned} \|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \|u_i^n - J_{i+1}^n(u_i^n)\| \\ &\leq \delta_{i+1}^n\|A^\circ(t_i^n)u_i^n\| + dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)) \\ &\quad + (\delta_{i+1}^n(1 + \|A^\circ(t_i^n)u_i^n\|)dis(A(t_i^n), A(t_{i+1}^n)))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \delta_{i+1}^n\|A^\circ(t_i^n)u_i^n\| + \delta_{i+1}^n + (\delta_{i+1}^n(1 + \|A^\circ(t_i^n)u_i^n\|)\delta_{i+1}^n)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

pour tout $a \geq 1$ on a $\sqrt{a} \leq a$, tel que a est un réel et d'après la deuxième hypothèse on trouve,

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq 2(1 + \|A^\circ(t_i^n)u_i^n\|)\delta_{i+1}^n \\ &\leq 2\big(1 + c(1 + \|u_i^n\|)\big)\delta_{i+1}^n. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Onn a

$$\|u_{i+1}^n\| \leqslant \|u_i^n\| + \|u_{i+1}^n - u_i^n\|,$$

en utilisant l'inégalité (3.21),

$$\begin{aligned}\|u_{i+1}^n\| &\leqslant \|u_i^n\| + 2\big(1 + c(1 + \|u_i^n\|)\big)\delta_{i+1}^n \\ &= (1 + 2c\,\delta_{i+1}^n)\|u_i^n\| + 2(1+c)\delta_{i+1}^n,\end{aligned}$$

en appliquant le Lemme de Gronwall quand $\beta_i = 0$ il résulte que

$$\|u_i^n\| \leqslant \left(\|u_0\| + 2(1+c)\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{k+1}^n\right).\exp\left(2c\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{k+1}^n\right),$$

de plus

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{k+1}^n &= \sum_{k=0}^{i-1} dr\big(]t_k^n, t_{k+1}^n]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{i-1}\big(r(t_{k+1}^n) - r(t_k^n)\big) \\ &= r(t_1^n) - r(t_0^n) + ... + r(t_i^n) - r(t_{i-1}^n) \\ &= r(t_i^n) - r(t_0^n) \\ &= r(t_i^n) - r(0) \\ &= dr\big(]0, t_i^n]\big),\end{aligned}$$

mais

$$t_i^n \leqslant t_{k_n}^n = T,$$

et comme r est croissante il découle

$$r(t_i^n) \leqslant r(T),$$

alors

$$\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{k+1}^n = dr\big(]0, t_i^n]\big) \leqslant dr\big(]0, T]\big). \tag{3.22}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\|u_i^n\| &\leqslant \Big(\|u_0\| + 2(1+c)\,dr\big(]0,t_i^n]\big)\Big).\exp\Big(2c\,dr\big(]0,t_i^n]\big)\Big)\\ &\leqslant \Big(\|u_0\| + 2(1+c)\,dr\big(]0,T]\big)\Big).\exp\Big(2c\,dr\big(]0,T]\big)\Big),\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall i=0,...,k_n\end{aligned}$$

posant $M := \Big(\|u_0\| + 2(1+c)\,dr\big(]0,T]\big)\Big).\exp\Big(2c\,dr\big(]0,T]\big)\Big) > 0$,
donc,

$$\|u_i^n\| \leqslant M,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall i=0,...,k_n \tag{3.23}$$

d'où

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\| \leqslant M. \tag{3.24}$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée en norme.

On montre la deuxième inégalité de (3.18).

En effet,

en substituant δ_{i+1}^n par sa valeur dans l'inégalité (3.21) on trouve

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leqslant 2\big(1 + c(1+\|u_i^n\|)\big)\,dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]),$$

en utilisant (3.23) on obtient,

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leqslant 2\big(1 + c(1+M)\big)\,dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]), \tag{3.25}$$

on pose $R := 2\big(1+c(1+M)\big)$ d'où

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leqslant R\,dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]),$$

donc

$$\sum_{i=0}^{k_n-1}\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leqslant \sum_{i=0}^{k_n-1} R\,dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]),$$

l'inégalité (3.22) implique que

$$Var(u_n, [0,T]) \leqslant R\,dr(]0,T]).$$

Maintenant on passe à montrer l'inégalité (3.20).

On fixe $s\in[t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $t\in[t_j^n, t_{j+1}^n[$ avec $j>i$, on pose $u_n(t)=u_j^n$ et $u_n(s)=u_i^n$ alors

$$\begin{aligned}\|u_n(t)-u_n(s)\| &= \|u_j^n - u_i^n\|\\ &= \|u_j^n - u_{j-1}^n + u_{j-1}^n - ... + u_{i+1}^n - u_i^n\|\\ &= \left\|\sum_{k=0}^{j-i-1} u_{i+k+1}^n - u_{i+k}^n\right\|\\ &\leq \sum_{k=0}^{j-i-1}\|u_{i+k+1}^n - u_{i+k}^n\|.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (3.18),

$$\begin{aligned}\|u_n(t)-u_n(s)\| &\leq \sum_{k=0}^{j-i-1} R\,dr(]t^n_{i+k},t^n_{i+k+1}])\\ &= R\sum_{k=0}^{j-i-1}\delta^n_{i+k+1}\\ &= R\left(dr(]t^n_i,t^n_{i+1}])+dr(]t^n_{i+1},t^n_{i++}])+..+dr(]t^n_{j-1},t^n_j])\right)\\ &= R\,dr(]t^n_i,t^n_j]).\end{aligned}$$

Pour $t\in[t^n_j,t^n_{j+1}[$ et $t\geq t^n_j$ et comme r est croissante alors $r(t)\geq r(t^n_j)$, pour $s\in[t^n_i,t^n_{i+1}[$ et $s\geq t^n_i$ et comme r est croissante alors $r(s)\geq r(t^n_i)$.
Donc

$$\begin{aligned}\|u_n(t)-u_n(s)\| &\leq R\big(r(t^n_j)-r(t^n_i)\big)\\ &= R\big(r(t^n_j)+r(t^n_i)-r(t^n_i)-r(t^n_i)\big)\\ &\leq R\big(r(t^n_j)+r(s)-r(s)-r(t^n_i)\big)\\ &\leq R\big(r(s)-r(t^n_i)+r(t)-r(s)\big)\\ &= R\big(dr(]t^n_i,s])+dr(]s,t])\big),\end{aligned}$$

comme $s\leq t^n_{i+1}$ et r croissante alors $r(s)\leq r(t^n_{i+1})$, d'où

$$\|u_n(t)-u_n(s)\|\leq R\big(dr(]t^n_i,t^n_{i+1}])+dr(]s,t])\big), \tag{3.26}$$

depuis l'inégalité (3.16) on a,

$$dr(]t^n_i,t^n_{i+1}[)\leqslant \xi_n-|t^n_{i+1}-t^n_i|\leqslant\xi_n, \tag{3.27}$$

revenant à (3.26) on obtient

$$\|u_n(t)-u_n(s)\|\leq R\big(dr(]s,t])+\xi_n\big).$$

Par le Théorème 1.40 on a la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications continues à droite à variation bornée et uniformément bornée en norme et en variation, alors il existe une fonction à variation bornée $u:[0,T]\to H$ telle que

$$u_n(t)\rightharpoonup u(t)\quad pour\quad t\in[0,T].$$

d) Montrons que $u'\in L^2([0,T],H;dr)$.
En particulier, on a $u(0)=u_0$ et

$$\|u(t)-u(s)\|\leq R\,dr(]s,t])\quad pour\quad 0\leq s\leq t\leq T. \tag{3.28}$$

Commençons par prouver cette dernière inégalité (3.28).

Tout d'abord on a $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ *et* $u_n(s) \rightharpoonup u(s)$ donc

$$u_n(t) - u_n(s) \rightharpoonup u(t) - u(s),$$

étant donné que $\xi_n \searrow 0$ on trouve

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u(s)\| &\leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \|u_n(t) - u_n(s)\| \\
&\leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} R\big(dr(]s,t]) + \xi_n\big) \\
&= \liminf_{n \longrightarrow +\infty} R\,dr(]s,t]) + R \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \xi_n \\
&\leq R\,dr(]s,t]),
\end{aligned}$$

alors

$$\|u(t) - u(s)\| \leq R\,dr(]s,t]) \quad pour \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

En outre,

$$\|du(]s,t])\| \leq R\,dr(]s,t]),$$

alors

$$\|du\| \leq R\,dr.$$

De plus, u est continue à droite car

$$\lim_{t \downarrow s} \|u(t) - u(s)\| \leq \lim_{t \downarrow s} R(r(t) - r(s)),$$

r est continue à droite alors

$$\lim_{t \downarrow s} \|u(t) - u(s)\| \longrightarrow 0,$$

d'où u est continue à droite sur $[0, T[$ et $u' \in L^2([0,T], H; dr)$ sachant que u' est la densité de u par rapport à dr.

e) Construction de la suite de solution approximées $(v_n)_n$.

Considérons une autre suite de fonctions $v_n : [0,T] \to H$ définie par

$$t \longmapsto v_n(t) = \begin{cases} \dfrac{r(t) - r(t_i^n)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)}(u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n & si\ t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\\ u_{k_n}^n & si\ t = T. \end{cases}$$

dans la suite on va utiliser la convention $\frac{0}{0} = 0$,

f) Bornitude de la suite v_n en variation et en norme.

On a

$$pour\ \delta_{i+1}^n = 0, v_n(t) = u_i^n = u_{i+1}^n\ dans\ [t_i^n, t_{i+1}^n[, \tag{3.29}$$

$$v_n(0) = u_0,$$

et

$$\|v_n(t) - u_n(t)\| \leq R\xi_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t \in [0, T], \tag{3.30}$$

de plus

$$\|v_n(t) - v_n(s)\| \leqslant R\big(r(t) - r(s)\big) \quad pour \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{3.31}$$

En effet,

soit $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, on a

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \frac{r(t) - r(t_i^n)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)}(u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n \\ &= \frac{r(t) - r(t_i^n)}{\delta_{i+1}^n}(u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n, \end{aligned} \tag{3.32}$$

pour $\delta_{i+1}^n = 0$ et de l'inégalité (3.21) on trouve que

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq 0,$$

comme la norme est positive alors

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| = 0 \Longleftrightarrow u_i^n = u_{i+1}^n,$$

en remplaçant dans la relation (3.32) on obtient,

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \frac{0}{0}\big(r(t) - r(t_i^n)\big) + u_i^n \\ v_n(t) &= u_i^n = u_{i+1}^n, \end{aligned}$$

en particulier pour $i = 0$ et $t = 0$ on trouve,

$$v_n(0) = u_0^n = u_0.$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n(t) - v_n(t)\| \leq R\xi_n$, $\forall t \in [0, T]$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - u_n(t)\| &= \left\|\frac{r(t) - r(t_i^n)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)}(u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n - u_i^n\right\| \\ &= \|u_{i+1}^n - u_i^n\|\left|\frac{r(t) - r(t_i^n)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)}\right|, \end{aligned}$$

par la deuxième inégalité de (3.18) on trouve

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - u_n(t)\| &\leq R\,dr(]t_i^n, t_{i+1}^n])\frac{|r(t) - r(t_i^n)|}{|dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]|} \\ &= R|r(t) - r(t_i^n)| \\ &\leq R|r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)| \\ &= R\,dr(]t_i^n, t_{i+1}^n])), \end{aligned}$$

de l'inégalité (3.27), il découle

$$\|u_n(t) - v_n(t)\| \leq R\xi_n. \tag{3.33}$$

Enfin on montre la troisième propriété de v_n.

Soient $s, t \in [0, T]$ tels que $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, on a

$$\begin{aligned}
\|v_n(t) - v_n(s)\| &= \left\| \frac{r(t) - r(t_i^n)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)}(u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n - \frac{r(s) - r(t_i^n)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)}(u_{i+1}^n - u_i^n) - u_i^n \right\| \\
&= \left\| \frac{r(t) - r(s)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)}(u_{i+1}^n - u_i^n) \right\| \\
&= \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \left| \frac{r(t) - r(s)}{dr(]t_i^n, t_{i+1}^n])} \right| \\
&\leq R\, dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]) \left| \frac{r(t) - r(s)}{dr(]t_i^n, t_{i+1}^n])} \right| \\
&\leq R\big(r(t) - r(s)\big),
\end{aligned}$$

donc

$$\|v_n(t) - v_n(s)\| \leqslant R\big(r(t) - r(s)\big) \quad pour \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{3.34}$$

Soient $s, t \in [0, T]$, on a

$$\|v_n(t) - v_n(s)\| \leqslant R\big(r(t) - r(s)\big).$$

En particulier pour $t = t_{i+1}^n$ et $s = t_i^n$ on trouve

$$\|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| = \|u_{i+1}^n - u_i^n\|.$$

Grâce à (3.18) on obtient

$$\|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| \leqslant R\, dr(]t_i^n, t_{i+1}^n)]),$$

alors,

$$\sum_{i=1}^{k-1} \|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} R\, dr(]t_i^n, t_{i+1}^n)]) = R \sum_{i=1}^{k-1} dr(]t_i^n, t_{i+1}^n)]),$$

donc

$$\sum_{i=1}^{k-1} \|v_n(t_{i+1}^n) - v_n(t_i^n)\| \leqslant R\, dr\big(]0, T]\big),$$

$$Var(v_n, [0, T]) \leqslant R\, dr\big(]0, T]\big).$$

Et pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ on a $v_n(t) = u_i^n$ alors,

$$\|v_n(t)\| = \|u_i^n\|, \quad \forall t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[,$$

d'après l'inégalité (3.18) on trouve

$$\|v_n\|_\infty \leqslant M,$$

il résulte que (v_n) est bornée en variation et en norme.
Et en utilisant l'inégalité (3.34), on trouve que

$$\lim_{t \downarrow s} \|v_n(t) - v_n(s)\| \leq \lim_{t \downarrow s} R\big(r(t) - r(s)\big),$$

et comme r est continue à droite alors

$$\lim_{t \downarrow s} \|v_n(t) - v_n(s)\| \leq 0.$$

D'où $(v_n)_n$ est continue à droite.
Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications à variation bornée continues à droite et uniformément bornée en norme et en variation.
On a,

$$\langle \theta, v_n(t)\rangle - \langle \theta, u(t)\rangle = \langle \theta, v_n(t) - u(t)\rangle, \quad \forall \theta \in H,$$

comme $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ alors,

$$\langle \theta, v_n(t) - u(t)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \theta, v_n(t) - u_n(t)\rangle,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\langle \theta, v_n(t) - u(t)\rangle \leq \lim_{n\to\infty} \|\theta\| \|v_n(t) - u_n(t)\|,$$

d'après l'inégalité (3.33) on obtient

$$\langle \theta, v_n(t) - u(t)\rangle \leq \lim_{n\to\infty} \|\theta\| R\, \xi_n = 0$$

alors $v_n(t) \rightharpoonup u(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.
Il en va de même pour le Lemme de Moreau on obtient que $dv_n = v_n' dr$ et $v_n'(0) = 0$ telle que v_n' est définie par

$$v_n' = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)} \quad pour \quad t \in \big]t_i^n, t_{i+1}^n\big].$$

g) Montrons la convergence faible de v_n' vers u' dans $L^2([0,T], H; dr)$.
Maintenant nous allons prouver que toute $n \in \mathbb{N}$

$$\|v_n'\| \leq R. \tag{3.35}$$

Tout d'abord on a

$$\begin{aligned} \|v'_n\| &= \left\| \frac{u^n_{i+1} - u^n_i}{r(t^n_{i+1}) - r(t^n_i)} \right\| \\ &= \frac{\|u^n_{i+1} - u^n_i\|}{|dr(]t^n_i, t^n_{i+1}])|}, \end{aligned}$$

d'après l'assertion (3.18) on trouve

$$\|v'_n\| \leq \frac{R\,dr(]t^n_i, t^n_{i+1}])}{|dr(]t^n_i, t^n_{i+1}])|} = R$$

Par conséquent,

$$\|v'_n\| \leq R \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il résulte que $(v'_n) \subset L^2([0,T], H; dr)$, alors on peut lui extraire une sous suite qui converge faiblement vers $w \in L^2([0,T], H; dr)$ i.e,

$$v'_n \rightharpoonup w \text{ dans } L^2([0,T], H; dr).$$

Pour tout $t \in]0,T]$ et pour tout $x \in H$ on a

$$\begin{aligned} \langle x, u(t) - u(0) \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x, v_n(t) \rangle - \langle x, v_n(0) \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle x, v_n(t) - v_n(0) \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle x, dv_n(]0,t]) \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} x.dv_n(]0,t]). \end{aligned}$$

$v_n \in BV([0,T], H)$, alors d'après les propriétés de la mesure de Stieltdjes on a

$$dv_n([a,b]) = \int_{[a,b]} dv_n = \int \mathbb{1}_{[a,b]}\ dv_n, \tag{3.36}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle x, u(t) - u(0) \rangle &= \lim_{n\to\infty} x. \int_{]0,t]} dv_n(\tau) \\ &= \lim_{n\to\infty} x. \int_0^T \mathbb{1}_{]0,t]}\ dv_n(\tau) \\ &= \lim_{n\to\infty} x. \int_0^T \mathbb{1}_{]0,t]}\ v'_n(\tau) dr(\tau) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\langle \mathbb{1}_{]0,t]}\ x, v'_n(\tau) \right\rangle dr(\tau), \end{aligned}$$

comme $v'_n \rightharpoonup w$ et en introduisant (3.36) on obtient

$$\begin{aligned} \langle x, u(t) - u(0) \rangle &= \int_0^T \left\langle \mathbb{1}_{]0,t]}\ .x, w(\tau) \right\rangle dr(\tau) \\ &= \left\langle x, \int_{]0,t]} w(\tau) dr(\tau) \right\rangle. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Comme $dv_n = v_n'\ dr$ alors $du = u'dr$ et d'après la relation (3.37)

$$\begin{aligned}(u'dr)(]0,t]) &= du(]0,t]) = u(t) - u(0)\\ &= \int_{]0,t]} w(\tau)dr(\tau) = (w(\tau)dr(\tau))(]0,t]) \quad pour \quad t \in [0,T].\end{aligned}$$

Par conséquent $u' = w\ dr - p.p\ dans\ [0,T]$.

Puisque $v_n' \rightharpoonup w$ et $u' = w$ alors

$$v_n' \rightharpoonup u' \text{ dans } L^2([0,T],H;dr).$$

h) Montrons que $-v_n'(t) \in A(\varphi_n(t), v_n(\varphi_n(t))\ dr - p.p\ \ t \in [0,T]$.

Considérons la suite φ_n définie par

$$\begin{aligned}\varphi_n : [0,T] &\longrightarrow [0,T]\\ t &\longmapsto \varphi_n(t) = \begin{cases} t_{i+1}^n & si\ \ t \in]t_i^n, t_{i+1}^n] \\ 0 & si\ \ t = 0.\end{cases}\end{aligned}$$

qui pour tout $t \in [0,T]$ satisfait que $\varphi_n(t) \geqslant t$ et

$$-v_n'(t) \in A(\varphi_n(t), v_n(\varphi_n(t)))\ dr - p.p\ \ t \in [0,T]. \tag{3.38}$$

En effet, on a

$$[0,T] = \{0\} \bigcup_{i=0}^{k_n-1}]t_i^n, t_{i+1}^n],$$

pour $t = 0$ on a $\varphi_n(0) = 0 \geqslant 0$ et pour $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$ on a, $\varphi_n(t) = t_{i+1}^n \geqslant t$.

Soit $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$ alors

$$\begin{aligned}v_n'(t) &= \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)}\\ &= \frac{-(u_i^n - J_{i+1}^n(u_i^n))}{\delta_{i+1}^n}\\ &= -A_{\delta_{i+1}^n}(t_{i+1}^n)u_i^n.\end{aligned}$$

D'une part on a

$$\begin{aligned}v_n(\varphi_n(t)) = v_n(t_{i+1}^n) &= \frac{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)}{r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n)}(u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n\\ &= u_{i+1}^n = J_{i+1}^n(u_i^n),\end{aligned} \tag{3.39}$$

en utilisant le fait que $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$ et la relation (3.39) on trouve

$$-A_{\delta_{i+1}^n}(t_{i+1}^n)u_i^n \in -A(J_{i+1}^n(u_i^n), t_{i+1}^n),$$

donc

$$-A_{\delta^n_{i+1}}(t^n_{i+1})u^n_i \in -A(v_n(\varphi_n(t)), \varphi_n(t)).$$

Par conséquent

$$-v'_n(t) \in A(\varphi_n(t), v_n(\varphi_n(t))).$$

i) Montrons que v_n converge fortement et uniformément vers u.

Commençons d'abord par montrer que $|r(\varphi_n(t)) - r(t)| \longrightarrow 0$.

Soit $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}|\varphi_n(t) - t| &= |t^n_{i+1} - t|\\ |\varphi_n(t) - t| &\leqslant \max_{i=0,\ldots,k_n-1} |t^n_{i+1} - t^n_i|,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité (3.16) on trouve

$$\begin{aligned}|\varphi_n(t) - t| &\leqslant \xi_n - dr(]t^n_i, t^n_{i+1}[)\\ &= \xi_n.\end{aligned}$$

En passant à la limite on obtient

$$|\varphi_n(t) - t| \longrightarrow 0,$$

comme r est continue à droite il découle,

$$|r(\varphi_n(t)) - r(t)| \longrightarrow 0, \quad lorsque\ n \ \longrightarrow +\infty. \tag{3.40}$$

Passant maintenant à montrer

$$\|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\| + dis(A(\varphi_n(t)), A(t)) \longrightarrow 0, \quad \forall\ t \in [0, T]. \tag{3.41}$$

Soit $t \in [0, T]$, de l'hypothèse **(H1)** et l'assertion (3.34) on obtient,

$$\begin{aligned}\|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\| + dis(A(\varphi_n(t)), A(t)) &\leqslant R\big(r(\varphi_n(t)) - r(t)\big) + \big(r(\varphi_n(t)) - r(t)\big)\\ &= (R+1)(r(\varphi_n(t)) - r(t)),\end{aligned}$$

par passage à la limite on trouve

$$\|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\| + dis(A(\varphi_n(t), A(t)) \longrightarrow 0, \ lorsque\ n \longrightarrow +\infty.$$

En introduisant la Définition de la pseudo-distance pour tout $t \in [0, T]$ et l'inégalité (3.35) on obtient,

$$\big\langle v_n(\varphi_n(t)) - v_m(\varphi_m(t)), v'_n(t) - v'_m(t)\big\rangle \leqslant (1 + \|v'_n(t)\| + \|v'_m(t)\|)dis(A(\varphi_n(t)), A(\varphi_m(t))),$$

en utilisant les inégalités (3.14) et (3.35) on trouve

$$\begin{aligned}\big\langle v_n(\varphi_n(t)) - v_m(\varphi_m(t)), v_n'(t) - v_m'(t)\big\rangle &\leqslant (1+2R)\big|r(\varphi_n(t)) - r(\varphi_m(t))\big| \\ &= (1+2R)\big|r(\varphi_n(t)) - r(t) + r(t) - r(\varphi_m(t))\big| \\ &\leqslant (1+2R)\big(|r(\varphi_n(t)) - r(t)| + |r(\varphi_m(t)) - r(t)|\big).\end{aligned} \tag{3.42}$$

Alors pour tout $t \in [0,T]$ on a,

$$\begin{aligned}\big\langle v_n(t) - v_m(t), v_n'(t) - v_m'(t)\big\rangle &= \langle v_n(t) - v_n(\varphi_n(t)), v_n'(t) - v_m'(t)\rangle \\ &+ \langle v_n(\varphi_n(t)) - v_m(\varphi_m(t)), v_n'(t) - v_m'(t)\rangle \\ &+ \langle v_m(\varphi_m(t)) - v_m(t), v_n'(t) - v_m'(t)\rangle \\ &\leqslant |\langle v_n(t) - v_n(\varphi_n(t)), v_n'(t) - v_m'(t)\rangle| \\ &+ \langle v_n(\varphi_n(t)) - v_m(\varphi_m(t)), v_n'(t) - v_m'(t)\rangle \\ &+ |\langle v_m(\varphi_m(t)) - v_m(t), v_n'(t) - v_m'(t)\rangle|,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient

$$\begin{aligned}\big\langle v_n(t) - v_m(t), v_n'(t) - v_m'(t)\big\rangle &\leqslant \langle v_n(\varphi_n(t)) - v_m(\varphi_m(t)), v_n'(t) - v_m'(t)\rangle \\ &+ \|v_n(t) - v_n(\varphi_n(t))\|\|v_n'(t) - v_m'(t)\| \\ &+ \|v_m(\varphi_m(t)) - v_m(t)\|\|v_n'(t) - v_m'(t)\| \\ &= \langle v_n(\varphi_n(t)) - v_m(\varphi_m(t)), v_n'(t) - v_m'(t)\rangle \\ &+ \|v_n'(t) - v_m'(t)\|\big(\|v_n(t) - v_n(\varphi_n(t))\| + \|v_m(\varphi_m(t)) - v_m(t)\|\big)\end{aligned}$$

en utilisant les inégalités (3.35) et (3.42) il résulte que

$$\begin{aligned}\big\langle v_n(t) - v_m(t), v_n'(t) - v_m'(t)\big\rangle &\leqslant \langle v_n(\varphi_n(t)) - v_m(\varphi_m(t)), v_n'(t) - v_m'(t)\rangle \\ &+ 2R\big(\|v_n(t) - v_n(\varphi_n(t))\| + \|v_m(\varphi_m(t)) - v_m(t)\|\big) \\ &\leqslant (1+2R)\big(|r(\varphi_n(t)) - r(t)| + |r(\varphi_n(t)) - r(t)|\big) \\ &+ 2R\big(\|v_n(t) - v_n(\varphi_n(t))\| + \|v_m(\varphi_m(t)) - v_m(t)\|\big) \\ &:= \Delta_{n,m}(t).\end{aligned} \tag{3.43}$$

Cette estimation nous aide à démontrer la convergence forte et uniforme de v_n vers u . Soit w une fonction continue à droite à variation bornée telle que $w = v_n - v_m$, alors

$$dw = dv_n - dv_m$$

et

$$dw = v_n' dr - v_m' dr,$$

d'où $\frac{dw}{dr} = v_n' - v_m'$, ainsi $v_n(0) = u_0 = v_m(0)$, on a

$$\frac{1}{2}\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 = \frac{1}{2}\|w(t)\|^2,$$

et $w(0) = v_n(0) - v_m(0) = 0$, d'où

$$\frac{1}{2}\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 = \frac{1}{2}\|w(t)\|^2 - \|w(0)\|^2,$$

on applique la formule de Moreau qui est valable pour la fonction à variation bornée w et précise que $d\|w^2\| \leq 2w^+.dw^+$, donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 &= \frac{1}{2}\int_{]0,t]} d(\|w(h)\|^2)\\ &\leq \frac{1}{2}\int_{]0,t]} 2w^+(h).dw^+(h)\\ &= \int_{]0,t]} w^+(h).dw^+(h),\end{aligned}$$

comme w est une fonction à variation bornée alors,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 &= \int_{]0,t]} w(h).dw(h)\\ &= \int_{]0,t]} \langle w(h), dw(h)\rangle\\ &= \int_{]0,t]} \langle v_n(h) - v_m(h), dv_n(h) - dv_m(h)\rangle\\ &= \int_{]0,t]} \langle v_n(h) - v_m(h), v_n'(h)dr(h) - v_m'(h)dr(h)\rangle\\ &= \int_{]0,t]} \langle v_n(h) - v_m(h), v_n'(h) - v_m'(h)\rangle dr(h),\end{aligned}$$

depuis (3.43) on trouve,

$$\frac{1}{2}\|v_n(t) - v_m(t)\|^2 \leq \int_{]0,t]} \Delta_{n,m}(h)dr(h) \leq \int_{[0,T]} \Delta_{n,m}(h)dr(h), \tag{3.44}$$

alors,

$$\|v_n(t) - v_m(t)\|_\infty^2 \leq 2\int_{[0,T]} \Delta_{n,m}(h)dr(h),$$

des relations (3.34) et (3.40) on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\| \leq \lim_{n\to\infty} R\big(r(\varphi_n(t)) - r(t)\big) \longrightarrow 0. \tag{3.45}$$

On sait que

$$\begin{aligned}\Delta_{n,m}(t) := (1 + 2R)&\big(|r(\varphi_n(t)) - r(t)| + |r(\varphi_n(t)) - r(t)|\big)\\ &+ 2R\big(\|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\| + \|v_m(\varphi_m(t)) - v_m(t)\|\big),\end{aligned}$$

en passant à la limite on obtient

$$\lim_{n,m\to\infty} \Delta_{n,m}(t) := \lim_{n,m\to\infty} (1+2R)\big(|r(\varphi_n(t)) - r(t)| + |r(\varphi_n(t)) - r(t)|\big)$$
$$+ \lim_{n,m\to\infty} 2R\big(\|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\| + \|v_m(\varphi_m(t)) - v_m(t)\|\big),$$

en introduisant (3.45) et (3.40)

$$\Delta_{n,m}(t) \longrightarrow 0,$$

alors $\Delta_{n,m}(t)$ est borné i.e, il existe $g(t)$ tel que

$$\Delta_{n,m}(t) \leq g(t),$$

en appliquant le Théorème de la convergence dominé on aura

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_{[0,T]} \Delta_{n,m}(h)dr(h) = \int_{[0,T]} \lim_{n,m\to\infty} \Delta_{n,m}(h)dr(h) \longrightarrow 0,$$

d'où

$$\|v_n - v_m\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Donc $(v_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H alors elle converge uniformément vers une fonction et vu que $(v_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u(t)$ alors $(v_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $u(t)$.

De plus, pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$\begin{aligned}\|u(t) - v_n(\varphi_n(t))\| &= \|u(t) - v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t) + v_n(t)\| \\ &\leq \|u(t) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - v_n(\varphi_n(t))\| \\ &\leq \|u(t) - v_n(t)\|_\infty + \|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\|,\end{aligned}$$

en passant à la limite

$$\lim_{n\to\infty} \|u(t) - v_n(\varphi_n(t))\| \leq \lim_{n\to\infty} \|u(t) - v_n(t)\|_\infty + \lim_{n\to\infty} \|v_n(\varphi_n(t)) - v_n(t)\|$$

comme $v_n \longrightarrow u$ et en utilisant l'inégalité (3.45) on trouve,

$$\|u(t) - v_n(\varphi_n(t))\| \longrightarrow 0. \tag{3.46}$$

j) Montrons que la limite de v_n satisfait $(\mathcal{P}')$.

Maintenant, passant à prouver l'existence de solution $u(t)$ du problème $(\mathcal{P}')$ telle que

$$-u'(t) \in A(t)u(t)\ dr\ p.p\ sur\ [0,T].$$

D'abord montrons que $u(t) \in D(A(t))$, *pour tout* $t \in [0,T]$.

On a déjà montré que u est une fonction à variation bornée, continue à droite et absolument continue par rapport à dr.

On considère la fonction β_n définie comme suit

$$\beta_n : [0,T] \longrightarrow [0,T]$$
$$t \longmapsto \beta_n(t) = \begin{cases} t_i^n & si\ t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[; \\ T & si\ t = T. \end{cases}$$

D'abord on montre que pour tout $t \in [0,T]$, $u_n(t) \in D\big(A(\beta_n(t))\big)$ ceci équivaux à

$$u_i^n \in D(A(t_i^n)), \forall i = 0, ..., k_n.$$

Pour $\delta_{i+1}^n > 0$, par la deuxième assertion de la Proposition 2.28 on trouve

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n(u_i^n) \in D(A(t_{i+1}^n))\ \forall i = 0, ..., k_n - 1$$

c'est à dire,

$$u_i^n \in D(A(t_i^n)), \forall i = 1, ..., k_n.$$

Pour $\delta_{i+1}^n = 0$, on a

$$\delta_{i+1}^n = dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]) = r(t_{i+1}^n) - r(t_i^n) = 0,$$

il suit de l'hypothèse **(H1)** que

$$dis(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n)) \leq 0, \tag{3.47}$$

par l'assertion (1) de la Proposition 2.34 on obtient

$$dis(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n)) \in [0, +\infty], \tag{3.48}$$

en combinant (3.47) et (3.48),

$$dis(A(t_{i+1}^n), A(t_i^n)) = 0, \tag{3.49}$$

il résulte de l'assertion (1) de la Proposition 2.34 que

$$A(t_{i+1}^n) = A(t_i^n).$$

Et on a,

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n(u_i^n) = (I_d + \delta_{i+1}^n A(t_{i+1}^n))^{-1} u_i^n = u_i^n,$$

comme $J_{i+1}^n(u_i^n) \in D(A(t_{i+1}^n))$ alors,

$$u_{i+1}^n = u_i^n \in D(A(t_i^n)) = D(A(t_{i+1}^n)),$$

ce qui donne

$$u_n(t) \in D(A(\beta_n(t))) \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.50}$$

En utilisant (**H1**) et pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ donc

$$\begin{aligned} dis(A(t), A(\beta_n(t))) &\leq dr(]\beta_n(t), t]) \\ &= r(t) - r(\beta_n(t)) \\ &= r(t) - r(t_i^n) \\ &\leq dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]), \end{aligned}$$

de l'inégalité (3.16) on trouve que $dr(]t_i^n, t_{i+1}^n]) \leq \xi_n$ alors,

$$dis(A(t), A(\beta_n(t))) \leq \xi_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

il découle de l'assertion (1) de la Proposition 2.34 que

$$dis(A(\beta_n(t)), A(t)) \leq \xi_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, on fixe $t \in [0, T]$ on obtient

$$dis(A(\beta_n(t)), A(t)) \longrightarrow 0. \tag{3.51}$$

Et on a,

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\| &= \|u_n(t) - v_n(t) + v_n(t) - u(t)\| \\ &\leqslant \|u_n(t) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - u(t)\|, \end{aligned}$$

de l'inégalité (3.33),

$$\|u_n(t) - u(t)\| \leqslant R\xi_n + \|v_n(t) - u(t)\|,$$

comme $v_n(t) \longrightarrow u(t)$ et en passant à la limite on obtient

$$\|u_n(t) - u(t)\| \longrightarrow 0,$$

ceci implique que

$$u_n(t) \longrightarrow u(t). \tag{3.52}$$

Par l'hypothèse **(H2)**,

$$\|A^\circ\big(\beta_n(t), u_n(t)\big)\| \leqslant c\,(1 + \|u_n(t)\|), \forall t \in [0, T], \forall u_n \in D(A),$$

d'après la relation (3.18),

$$\|A^\circ\big(\beta_n(t), u_n(t)\big)\| \leqslant c(1+M),$$

et

$$A^\circ\big(\beta_n(t), u_n(t)\big) \in A(\beta_n(t))u_n(t). \tag{3.53}$$

Par suite $y_n = A^\circ\big(\beta_n(t), u_n(t)\big)$ est bornée alors on peut lui extraire une sous suite qui converge faiblement vers $y \in H$ i.e,

$$y_n \rightharpoonup y, \tag{3.54}$$

d'après les relations (3.51), (3.50), (3.52) (3.53) et (3.54) on peut appliquer la Proposition 2.35 qui donne

$$u(t) \in D(A(t)).$$

Montrons que $-u'(t) \in A(t)u(t) \ \ dr \ p.p \ sur \ [0,T]$.
D'après le Théorème de Mazur, on peut choisir une combinaison convexe
$w_j = \sum_{k=j}^{k_j} \mu_k^j . v_k' \in L^2([0,T], H; dr)$ tel que $w_j \longrightarrow u'$, alors il existe un $N_0 \subset [0,T]$ avec $dr(N_0) = 0$ et une sous suite (j_p) de $\mathbb{N}$ qui satisfait

$$t \in [0,T] \setminus N_0 \Longrightarrow w_{j_p}(t) \longrightarrow u'(t) \ lorsque \ p \longrightarrow \infty. \tag{3.55}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit l'ensemble $[0,T] \setminus N_n$ tel que pour tout $t \in [0,T] \setminus N_n$ on a $-v_n'(t) \in A(\varphi_n(t), v_n(\varphi_n(t)))$.
A est monotone, en particulier pour $t \in [0,T] \setminus N_n$ et $\varepsilon \in D(A(\varphi_n(t)))$,

$$\langle v_n(\varphi_n(t)) - \varepsilon, A(\varphi_n(t), v_n(\varphi_n(t))) - A(\varphi_n(t), \varepsilon)\rangle \geq 0,$$

en utilisant la relation (3.38) on trouve

$$\begin{aligned}
&\langle v_n(\varphi_n(t)) - \varepsilon, -v_n'(t) - A\big(\varphi_n(t), \varepsilon\big)\rangle \geq 0 \\
&\langle v_n(\varphi_n(t))) - \varepsilon, -A\big(\varphi_n(t), \varepsilon\big)\rangle \geq \langle v_n(\varphi_n(t)) - \varepsilon, v_n'(t)\rangle \\
&\langle \varepsilon - v_n(\varphi_n(t)), A\big(\varphi_n(t), \varepsilon\big)\rangle \geq \langle v_n(\varphi_n(t)) - \varepsilon, v_n'(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

D'où le résultat.
Pour prouver la suite de ce Théorème il suffit de montrer que

$$\langle u(t) - \eta, u'(t)\rangle \leqslant \langle \eta - u(t), A^\circ(t,\eta)\rangle, \ \forall t \in [0,T] \setminus \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} N_n\Big), \tag{3.57}$$

posons $A_n = A(\varphi_n(t))$ et $A = A(t)$, comme $dis(A_n, A) \longrightarrow 0$ et $\|A^\circ x\| \leqslant c(1+\|x\|)$ $\forall x \in D(A)$ alors on peut appliquer la Proposition 2.38 pour trouver une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\varepsilon_n \in D(A(\varphi_n(t))), \varepsilon_n \longrightarrow \eta \ et \ A^\circ(\varphi_n(t), \varepsilon_n) \longrightarrow A^\circ(t,\eta), \tag{3.58}$$

alors

$$\begin{aligned}\langle u(t)-\eta, v_n'(t)\rangle &= \langle u(t)-\eta - v_n(\varphi_n(t)) + v_n(\varphi_n(t)) - \varepsilon_n + \varepsilon_n, v_n'(t)\rangle \\ &= \langle v_n(\varphi_n(t)) - \varepsilon_n, v_n'(t)\rangle + \big\langle (\varepsilon_n - \eta) + \big(u(t) - v_n(\varphi_n(t))\big), v_n'(t)\big\rangle,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et les relations (3.56), (3.35) on obtient

$$\begin{aligned}\langle u(t)-\eta, v_n'(t)\rangle &\leqslant \langle \varepsilon_n - v_n(\varphi_n(t)), A^\circ(\varphi_n(t),\varepsilon_n)\rangle + \|v_n'\|\big(\|\varepsilon_n-\eta\| + \|u(t)-v_n(\varphi_n(t))\|\big) \\ &\leqslant \langle \varepsilon_n - v_n(\varphi_n(t)), A^\circ(\varphi_n(t),\varepsilon_n)\rangle + R\big(\|\varepsilon_n-\eta\| + \|u(t)-v_n(\varphi_n(t))\|\big),\end{aligned}$$

prenant la lim sup,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\langle u(t)-\eta, v_n'(t)\rangle \leq{}& \limsup_{n\to\infty}\langle \varepsilon_n - v_n(\varphi_n(t)), A^\circ(\varphi_n(t),\varepsilon_n)\rangle \\ &+ \limsup_{n\to\infty} R\big(\|\varepsilon_n-\eta\| + \|u(t)-v_n(\varphi_n(t))\|\big),\end{aligned}$$

les assertions (3.58) et (3.46) implique que

$$\limsup_{n\to\infty}\langle u(t)-\eta, v_n'(t)\rangle \leq \langle \eta - u(t), A^\circ(t,\eta)\rangle, \tag{3.59}$$

comme $v_n'(t)$ converge faiblement vers $u'(t)$ alors pour tout $\eta \in L^2$, on a

$$\langle v_n'(t), u(t)-\eta\rangle \longrightarrow \langle u'(t), u(t)-\eta\rangle, \tag{3.60}$$

et

$$\begin{aligned}\langle u(t)-\eta, u'(t)\rangle &= \lim_{p\to\infty}\langle u(t)-\eta, w_{j_p}(t)\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big\langle u(t)-\eta, \sum_{k=j_p}^{k_{j_p}} \mu_k^{j_p} v_k'(t)\Big\rangle,\end{aligned}$$

en utilisant (3.59) et (3.60) on obtient

$$\begin{aligned}&\langle u(t)-\eta, u'(t)\rangle \leq \langle \eta - u(t), A^\circ(t,\eta)\rangle,\ \forall \eta\in D(A)\\ &-\langle \eta - u(t), u'(t)\rangle \leq \langle \eta - u(t), A^\circ(t,\eta)\rangle,\ \forall \eta\in D(A)\\ &\langle \eta - u(t), A^\circ(t,\eta) + u'(t)\rangle \geqslant 0,\ \forall \eta\in D(A)\\ &\langle \eta - u(t), A^\circ(t,\eta) - (-u'(t))\rangle \geqslant 0,\ \forall \eta\in D(A),\end{aligned}$$

en conséquence la Proposition 2.37 implique que $-u'(t) \in A(t)u(t)$.

k) L'unicité de solution du problème $(\mathcal{P}')$.

Pour cela on suppose qu'il existe u et $\tilde{u}$ deux solutions de notre problème i.e,

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) \in A(t)u(t)\ dr-p.p\ dans\ [0,T], \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)),\end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\dfrac{d\tilde{u}}{dr}(t) \in A(t)\tilde{u}(t)\ dr - p.p\ dans\ [0,T], \\ \tilde{u}(0) = u_0 \in D(A(0)); \end{cases}$$

en utilisant le fait que A est monotone on trouve

$$\langle -\frac{du}{dr}(t) + \frac{d\tilde{u}}{dr}(t), u(t) - \tilde{u}(t)\rangle \geqslant 0,\ dr - p.p\ dans\ [0,T],$$
$$\langle \frac{du}{dr}(t) - \frac{d\tilde{u}}{dr}(t), u(t) - \tilde{u}(t)\rangle \leqslant 0,\ dr - p.p\ dans\ [0,T].$$

en suivant les mêmes étapes que dans (3.44) on trouve que

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|^2 - \|u(0) - \tilde{u}(0)\|^2 \leqslant 2\int_{]0,T]} \langle \frac{du}{dt} - \frac{d\tilde{u}}{dt}, u - \tilde{u}\rangle dr \leqslant 0,$$

comme $u(0) = \tilde{u}(0) = u_0$ alors $\|u(t) - \tilde{u}(t)\|^2 = 0$ ce qui implique que $u = \tilde{u}$.
Donc la démonstration du Théorème est complète et le problème $(\mathcal{P}')$ admet une solution unique à variation bornée. ■

3.3 Application

Ce type de problèmes d'évolution trouve des applications diverses surtout lorsque le système considéré est sujet à des forces extérieures que l'on appelle perturbations. Elles peuvent être univoques ou multivoques. On en trouve en économétrie (procédure de planning), dynamique des populations (au biologie), théorèmes des jeux...etc.
Les théorèmes ci dessus sont pris des références [12] et [14].

3.3.1 Perturbation univoque

On commence par une perturbation dépend seulement de t.

Théorème 3.3. *Sous les hypothèses **(H1)** et **(H2)** du Théorème 3.2, pour tout* $h \in L^2\big([0,T],H\big)$ *et* $u_0 \in D(A(0))$ *le problème* $(\mathcal{P}_h)$ *donné comme suit*

$$(\mathcal{P}_h) \begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) \in A(t)u(t) + h(t)\ dr - p.p\ dans\ [0,T] \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

admet une solution $u(.)$ *à variation bornée unique.*

Preuve. Pour tout $t \in [0,T]$ on pose $\Phi(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$. Alors le problème $(\mathcal{P}_h)$ est équivalent à

$$\begin{cases} -\dfrac{dy}{dr}(t) \in B(t)y(t) \; dr - p.p \; dans \; [0,T] \\ y(0) = x_0 \in D(A(0)). \end{cases}.$$

où

$$y(t) = u(t) + \Phi(t) \quad \forall t \in [0,T],$$
$$B(t)z = A(t)(z - \Phi(t)) \quad \forall (t,z) \in [0,T] \times H.$$

Il est évident que $B(t)$ est un opérateur maximal monotone dans H .

Par conséquent il suffit de montrer que pour tout $t \in [0,T]$, $B(t)$ satisfait les hypothèses **(H1)** et **(H2)** du Théorème 3.2.

Tout d'abord vérifions **(H1)**.

Considérons pour tout $s,t \in [0,T]$, $x_1 \in D(B(t))$, $x_2 \in D(B(s))$ et $y_1 \in B(t)x_1$ et $y_2 \in B(s)x_2$, on a pour tout $t \in [0,T]$, $D(B(t)) = D(A(t)) + \int_0^t h(s)ds$, de plus

$$x \in D(B(t)) \Longleftrightarrow x - \int_0^t h(s)ds \in D(A(t)),$$

et

$$y_1 \in B(t)x_1 \Longleftrightarrow y_1 \in A(t)(x_1 - \Phi(t)),$$
$$y_2 \in B(t)x_1 \Longleftrightarrow y_2 \in A(t)(x_2 - \Phi(t)),$$

alors d'après la Définition de la distance de Vladimirov et l'inégalité (3.14) on a,

$$\begin{aligned} \langle y_2 - y_1, x_1 - \Phi(t) - (x_2 - \Phi(s))\rangle &\leq dis(A(t), A(s))\big(1 + \|y_1\| + \|y_2\|\big) \\ &\leq \big(r(t) - r(s)\big)\big(1 + \|y_1\| + \|y_2\|\big), \end{aligned}$$

par conséquence

$$\begin{aligned} \langle y_2 - y_1, x_1 - x_2\rangle &= \langle y_2 - y_1, x_1 - \Phi(t) - (x_2 - \Phi(s))\rangle + \langle y_2 - y_1, \Phi(t) - \Phi(s)\rangle \\ &\leq \big(r(t) - r(s)\big)\big(1 + \|y_1\| + \|y_2\|\big) + \|y_2 - y_1\|.\|\Phi(t) - \Phi(s)\| \\ &\leq \big(r(t) - r(s)\big)\big(1 + \|y_1\| + \|y_2\|\big) + \big(1 + \|y_1\| + \|y_2\|\big)\|\Phi(t) - \Phi(s)\| \\ &\leq \big(r(t) - r(s) + \|\Phi(t) - \Phi(s)\|\big)\big(1 + \|y_1\| + \|y_2\|\big), \end{aligned}$$

on met

$$r_1(t) = \int_0^t \big(r(\tau) + \|h(\tau)\|\big)d\tau, \; \forall t \in [0,T],$$

qui est à variation borné donc,

$$\langle y_2 - y_1, x_1 - x_2\rangle \leqslant (r_1(t) - r_1(s))(1 + \|y_1\| + \|y_2\|),$$

par conséquent

$$dis(B(t), B(s)) \leqslant r_1(t) - r_1(s).$$

Il suit que l'hypothèse **(H1)** est satisfaite.

Passant maintenant à prouver **(H2)**.

Pour tout $t \in [0, T]$ et $y \in D(B(t))$ on a,

$$\begin{aligned}
\|B^\circ(t)y\| &= \|A^\circ(t)(y - \Phi(t))\| \\
&\leq c(1 + \|y - \Phi(t)\|) \\
&= c\big(1 + \|y - \int_0^t h(\tau)d\tau\|\big) \\
&\leq c\big(1 + \|y\| + \|\int_0^t h(\tau)d\tau\|\big) \\
&\leq c\big(1 + \|y\| + \int_0^t \|h(\tau)\|d\tau\big).
\end{aligned}$$

On pose $c' = c\big(1 + \int_0^t \|h(\tau)\|d\tau\big)$ d'où

$$\begin{aligned}
\|B^\circ(t)y\| &\leq c' + \frac{c'}{1 + \int_0^t \|h(\tau)\|d\tau}\|y\| \\
&\leq c'(1 + \|y\|).
\end{aligned}$$

Par conséquent les hypothèses du Théorème 3.2 sont satisfaites, nous concluons que le problème $(\mathcal{P}_h)$ admet une solution unique à variation bornée $u(.)$. ■

Maintenant on étudie le cas d'une perturbation univoque qui dépend de t et x.

Théorème 3.4. *Supposons que les Hypothèses (**H1**) et (**H2**) sont satisfaites et soit $f : [0, T] \times H \longrightarrow H$ une application telle que*

1. *f est séparément mesurable sur $[0, T]$.*
2. *$\forall \eta > 0$ il existe une fonction positive $\gamma_n(.) \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ telle que $\forall t \in [0, T]$ et $\forall u, v \in B(0, \eta)$,*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leqslant \gamma_n(t)\|u - v\|.$$

3. *il existe une fonction $\beta(.) \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ telle que $\forall t \in [0, T]$ et $\forall u \in H$ on a*

$$\|f(t, u)\| \leqslant \beta(t)(1 + \|u\|).$$

Alors pour toute condition initiale $u_0 \in D(A(0))$ le problème

$$(\mathcal{P}_f) \begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t)) \;\; dr - p.p \; t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

admet une solution unique à variation bornée $u(.)$ sur $[0, T]$.

Preuve.

On utilise une méthode de discrétisation qui consiste à subdiviser l'intervalle $[0,T]$ en sous intervalle et construire des solutions approchées dans chacun en procédant comme suit : on fixe la deuxième variable de f en commençant par $f(t,u_0)$, on obtient une perturbation $h(t)=f(t,u_0)$ et on applique le Théorème 3.3.

On considère donc la subdivision utilisée précédemment, et on considère l'inclusion différentielle sur l'intervalle $[t_0^n,t_1^n]$

$$(\mathcal{P}_0)\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t)\in A(t)u(t)+f(t,u_0) \;\; dr-p.p\; t\in[t_0^n,t_1^n] \\ u(t_0^n)=u(0)=u_0\in D(A(0)). \end{cases}$$

observons que $f(.,u_0)$ dépend seulement de t sur $[0,T]$ et $f(.,u_0)\in L^2([t_0^n,t_1^n],H)$.

En effet,

On a

$$\|f(t,u_0)\|\leqslant\beta(t)(1+\|u_0\|)$$

comme $\beta(.)\in L^2([0,T],\mathbb{R})$ alors $f(.,u_0)\in L^2([t_0^n,t_1^n],\mathbb{R})$.

Puisque $f(.,u_0)$ dépend que de t sur $[0,T]$ alors on peut appliquer le Théorème 3.3 sur le problème $(\mathcal{P}_0)$ donc on trouve qu'il admet une unique solution à variation bornée notée $u_0^n:[t_0^n,t_1^n]\to H$.

De la même façon on trouve que le problème suivant admet une solution unique à variation bornée

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t)\in A(t)u(t)+f(t,u_0^n(t_1^n)) \;\; dr-p.p\; t\in[t_1^n,t_2^n] \\ u(t_1^n)=u_0^n(t_1^n)\in D(A(t_1^n)). \end{cases}$$

cette solution est notée $u_1^n(.):[t_1^n,t_0^n]\to H$ avec $u_0^n(t_1^n)=u_1^n(t_1^n)$.

On suit les mêmes étapes pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors il existe une suite finie de fonctions à variation bornée

$$u_i^n:[t_i^n,t_{i+1}^n]\to H \quad telle\ que \quad \forall i=0,...,n-1$$

$$\begin{cases} -\dfrac{du_i^n}{dr}(t)\in A(t)u_i^n(t)+f(t,u_{i-1}^n(t_i^n)) \;\; dr-p.p\; t\in[t_i^n,t_{i+1}^n] \\ u_i^n(t_i^n)=u_{i-1}^n(t_i^n)\in D(A(t_i^n)). \end{cases}$$

où $u_{-1}^n(0)=u_0$.

Maintenant on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n:[0,T]\to H$ comme suit

$$u_n(t)=u_i^n(t),\forall t\in[t_i^n,t_{i+1}^n].$$

u_n est à variation bornée. En effet,

On a déjà prouvé dans les étapes précédentes que pour tout $i=0,...,n-1$ u_i^n est à

variation bornée donc la suite (u_n) est à variation bornée.
Et on met

$$\begin{cases} \theta_n(0) = 0 \\ \theta_n(t) = t_i^n \quad si \quad t \in \left]t_i^n, t_{i+1}^n\right], \quad i = 0, ..., n-1. \end{cases}$$

Donc le problème $(\mathcal{P}_f)$ est équivalent à

$$\begin{cases} -\dfrac{du_n}{dr}(t) \in A(t)u_n(t) + f(t, u_n(\theta_n(t))) \;\; dr - p.p \; t \in [0, T] \\ u_n(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

En suivant les mêmes étapes que [9] et [], on obtient les estimations pour les suites de solutions approximatives et leurs dérivées, puis on montre la convergence de ces suites(en montrant qu'elles sont de Cauchy).
Enfin, on montre que la limite est solution de notre inclusion en utilisant la propriété de demi fermeture de graphe et on conclut que

$$-\frac{du}{dr}(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t)) \; dr - \;\; p.p \; t \in [0, T].$$

■

3.3.2 Perturbation multivoque

Théorème 3.5. *Soit $A(t) : D(A(t)) \subset H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone pour tout $t \in [0, T]$, vérifie les hypothèses (**H1**) et (**H2**), soit $F : [0, T] \times H \to 2^H$ une multi-application à valeurs compactes convexes non vide telle que*

1. *$F(.,.)$ est semi continue supérieurement dans $[0, T] \times H$.*
2. *pour tout ensemble compact $K \subset B$ et pour toute fonction non-négative $\beta(.) \in L^2([0, T])$, $\forall (t, x) \in [0, T] \times H$, on a la condition de croissance linéaire*

$$F(t, x) \subset \beta(t)(1 + \|x\|)K.$$

Alors pour tout $u_0 \in D(A(t_0, .))$ le problème suivant

$$(\mathcal{P}_\mathcal{F}) \begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t)) \; dr - p.p \; dans \; [0, T] \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

admet au moins une solution à variation bornée.

Preuve.

On commence par construire la suite $u_n(.)$.

On considère la même partition de la preuve du Théorème 3.2, on fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0^n(t_0^n) = u_0$ et on choisit une sélection $y_0^n \in F(t_0^n, u_0)$ alors du Théorème 3.3 le problème suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) \in A(t)u(t) + y_0^n \; dr - p.p \; dans \; [t_0^n, t_1^n] \\ u(t_0^n) = u_0^n(t_0^n) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases}$$

admet une solution à variation bornée notée $u_0^n(.) : [t_0^n, t_1^n] \to H$.

Et aussi pour tout $i = 1, ..., n$ on choisit $y_i^n \in F(t_i^n, u_{i-1}^n(t_i^n))$ et soit $u_i^n : [t_i^n, t_{i+1}^n] \to H$ la solution à variation bornée de

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dr}(t) \in A(t)u(t) + y_i^n \; dr - p.p \; dans \; [t_i^n, t_{i+1}^n] \\ u(t_i^n) = u_{i-1}^n(t_i^n) = u_0 \in D(A(t_i^n)). \end{cases}$$

Maintenant on définit $u_n(t) : [0, T] \to H$ par

$$u_n(t) = \begin{cases} u_i^n(t) & si \; t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\; pour \; i = 0, ..., n \\ u_n^n(t) & si \; t = T. \end{cases}$$

u_n est une suite à variation bornée.

On considère $\theta_n : [0, T] \to [0, T]$ telle que

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_i^n & si \; t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\; pour \; i = 0, ..., n \\ T & si \; t = T. \end{cases}$$

et $y_n : [0, T] \to H$ par

$$y_n(t) = \begin{cases} y_i^n & si \; t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\; pour \; i = 0, ..., n \\ y_n^n & si \; t = T. \end{cases}$$

donc le problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$est équivalent à

$$\begin{cases} -\dfrac{du_n}{dr}(t) \in A(t)u_n(t) + y_i^n \; dr - p.p \; dans \; [t_i^n, t_{i+1}^n] \\ u(t_i^n) = u_{i-1}^n(t_i^n) = u_0 \in D(A(t_i^n)). \end{cases}$$

En suivant les mêmes étapes que [9] et [], on obtient les estimations pour les suites de solutions approximatives et leurs dérivées, puis on montre la convergence de ces suites en montrant qu'elles sont de Cauchy.

Dans la dernière étape on montre que $u(.)$ est une solution du Problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.

En utilisant les propriétés des opérateurs maximaux monotones en particulier la propriété de la demi fermeture du graphe on conclut que

$$-\frac{du}{dr}(t) \in A(t)u(t) + F(t, u(t))\ dr-\ \ p.p\ dans\ [0, T].$$

■

Conclusion

Ce mémoire est consacré à l'étude des opérateurs maximaux monotones et ses propriétés pour prouver l'existence et l'unicité de solution de quelque inclusions différentielles régit par un opérateur maximal monotone. ces problèmes trouvent beaucoup d'applications en théorie du contrôle, relaxation, viscosité, Hamilton-Jacobi-Belman problems. Voir ([11], [13], [14] et [15]).

Bibliographie

[1] **J.P. Aubin, A. Cellina**, *Differential inclusions set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New york Tokyo (1984).

[2] **J.P.Aubin and H.Frankowska**, *Set valued analysis*, Birkouiser, Boston, (1990).

[3] **V. Barbu**, *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, (2010).

[4] **H.H. Bauschke, P.L. Combette**, *Convexe analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, Springer-Science+Business Media, LLC(2011),

[5] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson, (1993).

[6] **H. Brézis**, *Opérateurs maximaux monotones*, North-Holland, Amesterdam, London, (1973) .

[7] **K. Deimling**, *Multivalued différential équation*, W. de Grayter, Berlin, New york, 1992.

[8] **L. Gasinski et N. S. Papageorgiou**, *Series in Mathematical Analysis and Applications, Volume 9 :Nonlinear analysis*, National University of Ireland, (2005).

[9] **M. Kunze and M. D. P. M. Marques**, *B.V Solutions to evolution problems with time-dependent domains*, Set Valued Analysis, vol. **5**, N°1 (1996), 57-72.

[10] **M. D. P. M. Marques**, *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems-shocks and dry friction*, Birkhäuser-Verlag, Basel, (1993).

[11] **S. Saidi, L. Thibault and M.F. Yarou**, *Realaxation of optimal control problems involving time dependent subdifferentiel operators*, Numer. Funct. and Optim. **34** . 1156-1186, (2013).

[12] **S. Saidi and M.F. Yarou**, *Control problems gouverned by time-dependent maximal monotine operateurs*, Esaim, Cocv, **23** 455-473, Control, Optimisation and Calculus of Variations, (2017).

[13] **S. Saidi and M.F. Yarou**, *On a time-dependent subdifferential evolution inclusion with Carathéodory perturbation*, Ann. Pol. Math., 114, **2**, 133-146, (2015).

[14] **S. Saidi and M.F.Yarou**, *Set- valued perturbation for time dependent subdifferential operator, Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 46, **1**, 447-470, (2015).

[15] **S. Saidi and M.F.Yarou**, *Viscosity results for a class of evolution inclusions with maximal monotones operators, Numer. Funct. and Optim.* **39** 05 . 623-641, (2018).

[16] **J. J. Moreau** *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Differential Equations **26**, (1977),

[17] **Jan Van Tiel**, *convex analysis an introductory text*, Winey, 347-374, (1984).

[18] **A. A. Vladimirov**, *Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space*, Nonlinear Anal. **17**, , 499-518, (1991).